GÖTEBORG STUDIES
IN EDUCATIONAL SCIENCES 87

Ann Ahlberg

ATT MÖTA MATEMATISKA PROBLEM

En belysning av barns lärande

ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS

ATT MÖTA MATEMATISKA PROBLEM

En belysning av barns lärande

GÖTEBORG STUDIES
IN EDUCATIONAL SCIENCES 87

Ann Ahlberg

ATT MÖTA MATEMATISKA PROBLEM

En belysning av barns lärande

ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS

ISBN 91-7346-250-0
ISSN 0436-1121

Distribution: ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS
Box 5096
S-402 22 Göteborg, Sweden

Printed in Sweden by Vasastadens Bokbinderi AB, Göteborg 1992

ABSTRACT

Title: THE MEETING WITH MATHEMATICAL PROBLEMS
An illumination of children's learning
Acta Universitatis Gothoburgensis 87:1992
ISBN 91-7346-250-0
Language: Swedish (English summary)
Keywords: Mathematical problem solving; Teaching arithmetic in primary school; Interaction in small groups; Writing, drawing and communicating in mathematics; Conceptions of arithmetic problems; The dynamics of problem solving; Phenomenography

The aim of the empirical study is to describe and analyse how primary school children in a school context experience arithmetic word problems and problem solving. The investigation has been carried out with a phenomenographic research approach and includes both an interview and a classroom study. In the interview study deep semi-structured interviews were held with 38 primary school pupils while they worked at solving problems from a sequence consisting of five different types of problem. In the classroom study three school classes were studied twice a week for a term while they worked with the same problems as the pupils in the interview study. In the classroom study problem solving was studied with the point of departure that pupils should draw, write, talk and calculate while solving problems. The classroom has a quasi-experimental design with pre- and post-tests in the participating and control classes, since one partial aim of the study is to see if such a change in working methods can contribute to pupils' ability to solve arithmetic problems.

The basic intentions underlying the design and content of the lessons in the classroom study was that the pupils should be able to speak their own language, carry out different actions, and vary their perspective on arithmetic problem solving and the problems posed. Sixty-eight lessons were observed and recorded on audio tape. The empirical material includes all the documents produced by pupils while solving the problems, comprising written stories, drawings and arithmetic calculations. The pupils who participated commented on the lessons in interviews and written reports. The class teachers have also given their comments on the lessons and the pupils' learning.

The results show that the pupils in the participating classes solved the problems in the post-test to a greater degree than did the pupils in the control classes. A covariance analysis shows that the difference between the two groups was statistically significant.

A pupil's understanding of a problem depends on their prior experiences, the problem situation and the specific problem. They have a preconception of a given problem which gives them a diffuse overall

understanding of it. Thereafter they differentiate within the problem and while solving it they refer to different parts of the content. When the pupils relate the problem's parts to one another and integrate them to a composite whole the problem takes shape such that they understand and conceptualise the problem. This understanding is seen in their orientation and approach to the problem and in their conception of the problem.

It is found that pupils can have two orientations, in which they have different goals or intentions for solving the problem.

Taken-for-granted orientation: Pupils have a *product*-intention; they want to *give* an answer to the problem.

Open orientation: Pupils have a *process*-intention; they want to *search for* an answer to the problem.

Pupils approach the problem in four qualitatively different ways.

Operand approach: Pupils focus on the numbers; they estimate a numerical answer to problems and do not carry out calculations.

Procedure approach: Pupils focus on numbers and operations; they perform a calculation to reach an answer.

Hypothesis approach: Pupils focus on all parts of the problem's content, and try to see how they are related. They do not, however, relate the numbers given to the relevant content of the problem.

Gestalt approach: Pupils focus on all the parts of the problem and on the relationships between them.

Pupils with a taken-for-granted orientation have an operand or a procedure approach. They see only the problem's surface and problem solving means that they have to give a numerical answer or perform an arithmetic operation. They apply well-known methods to the solution and solve the problem according to a fixed pattern. Pupils with an open orientation have a hypothesis or a gestalt approach. They go into the problem in depth and problem solving means that they relate the parts of the problem's content to one another. They are captivated by the problem solving process; they pose hypotheses, try different alternative solutions, and can vary their perspective.

A pupil's orientation, approach to and conceptions of the problem determine how the problem solving process takes shape. The process itself is characterised by the three components direction, reference and movement which in a dialectic relationship determine the outcome of the attempt to solve the problem.

Pupils' different ways of experiencing arithmetic problems and problem solving is formed in the meeting between their own ideas, the classroom situation, and the content of the lesson. The problems which pupils meet have a meaning for them and present themselves in the light of the pupils' earlier experience. Teaching of arithmetic problem solving should therefore to a greater extent give the pupils the opportunity to form arithmetic relationships and discover mathematical structures with a basis in their own experiences.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

FÖRORD

Den undersökning som presenteras i det här arbetet hade inte varit möjlig att genomföra utan medverkan av elever och lärare. Ett stort tack till de elever som tålmodigt besvarat mina frågor och till de lärare som öppnat dörrarna till sina klassrum och låtit mig delta i undervisningen. Det finns risk för att de enskilda eleverna försvinner bland alla ord och meningar som är avsedda att beskriva deras lärande. Min förhoppning är emellertid att framställningen ibland ger glimtar av barnens olika personligheter och att deras värld, som innefattar så mycket mer än aritmetisk problemlösning skymtar fram.

Den värld som varit min under forskarutbildningen har varit institutionen för pedagogik vid Göteborgs universitet. Många studiekamrater, forskare och andra anställda vid institutionen har vid skilda faser av avhandlingsarbetet engagerat sig i mitt arbete och på olika sätt hjälpt till att föra det framåt. Några vill jag speciellt tacka.

Ference Marton som har varit min handledare har följt arbetet från planeringstadiet till slutligt avhandlingsmanus. Hans insiktsfulla och engagerade sätt att handleda doktorander är väl känt och allmänt omvittnat. Det har varit en förmån att få handledning och undervisning av honom.

Bengt Johansson har läst manuskript i olika versioner, kritiserat, gett konstruktiva förslag och delat med sig av sin kunskap inom det matematikdidaktiska ämnesområdet. Han har dessutom generöst försett mig med intressant och givande litteratur.

Shirley Booth och Elisabeth Nyqvist har med uppmuntran och stöd intresserat sig för mitt avhandlingsarbete. Elisabeth har följt arbetet och lagt ned mycket tid på att läsa mina manuskript. Hennes synpunkter har lett till givande diskussioner som fört arbetet framåt. Även Shirley har varit en diskussionspartner som bidragit med många klartänkta förslag under arbetets gång. Hon har dessutom tålmodigt instruerat mig om hur datorer fungerar och översatt den engelska sammanfattningen. Ett djupt känt tack och en stor kram till Elisabeth och Shirley.

Leif Lybeck har med stor noggrannhet läst manuskriptet och gjort värdefulla kommentarer. Gudrun Balke och Jan-Erik Gustavsson har givit mig råd och anvisningar när det gäller den statistiska berarbetningen av datamaterialet. Monica Hansen har läst korrektur.

Ett tack även till Göteborgs Kungl. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhälle som har bidragit med forskningsanslag.

Slutligen vill jag med tacksamhet vända mig till mina närmaste, min man Ola och mina barn Helena och Martin. Ni är i grunden delaktiga i mitt arbete. Förutan er samverkan och ert stöd hade arbetet med att skriva en avhandling ännu inte varit slutfört.

Göteborg i augusti 1992

Ann Ahlberg

DEL I

PROBLEMFORMULERING OCH FORSKNINGSFÄLT

Ljuset vidgar området för vad vi vet, men också för vad vi blir medvetna om att vi inte vet.

Arne Næss

Kapitel 1

INLEDANDE ORIENTERING

Den undersökning som beskrivs i denna avhandling har sin upprinnelse i den klassrumsvardag som eleverna och jag delade under de många år jag arbetade som lågstadielärare. I matematikundervisningen förvånades jag ofta över elevernas bristande intresse för problemlösning i matematik. Det var framför allt de benämnda uppgifterna i matematikboken som inte förmådde väcka elevernas intresse. När eleverna skulle lösa ett skriftligt problem ställde de ofta frågan "Vad ska jag göra här?", vilket troligtvis är en fråga som de flesta lärare är väl bekanta med.

Eleverna tar under lektionerna inte några egna initiativ för att lösa problemet utan förväntar sig att läraren skall tala om hur man skall gå tillväga. Eftersom tiden är begränsad och det oftast är ett flertal elever som ställer sig frågande, är det vanligt att läraren i undervisningssituationen inte anser sig ha möjlighet att i detalj analysera vilka kunskapsbrister eleverna har utan tillgriper lotsning (Lundgren,1983). Den språkliga interaktionen byggs då upp genom ett fråga - svars mönster där eleven genom att besvara lärarens frågor förs fram till ett svar på problemet. Lotsning är enligt Lundgren (1983) ingen äkta kommunikation, utan ett sätt för läraren att hjälpa eleven att komma fram till ett svar på uppgiften. Detta kan få till följd att eleven svarar på uppgiften utan att egentligen förstå vad problemet innebär.

Enligt Lundgren (1983) producerar lotsning framför allt två typer av kompetens hos eleven, dels inlärning av de språkliga regler som gäller för kommunikation, dels inlärning rörande den egna kompetensen och inlärningsförmågan, dvs metainlärning. Elevens förmåga att själv klara en viss uppgift ökar ytterst lite genom

lotsningsförfarandet, eftersom de frågor som borde komma från eleven själv ställes av läraren. Eleven ges inte tillfälle att analysera problemet utifrån sina egna erfarenheter och kunskaper, reflektera, ställa hypoteser och pröva sig fram.

Baroody (1987) ställer frågan på vilka sätt skolundervisningen bidrar till att ge vissa elever föreställningen att de är oförmögna att utföra matematiska uppgifter. Han menar att elevernas känslomässiga inställning till matematik har stor betydelse för deras inlärning och användning av matematik. Undervisning som inte är kopplad till elevens behov, känslor och intressen kan få skadliga emotionella och intellektuella följder och därigenom hämma elevernas intresse för matematik. Det kan vara så nedslående för vissa elever att de undviker och misslyckas med att lära sig matematik överhuvudtaget.

> Instruction that is not geared to children can distort their view of mathematics, mathematical learning and self. These distorted beliefs can deaden children's drive to learn mathematics or create such fear that children cannot learn. (Baroody, 1987, s 68)

Det finns risk att de elever som ofta svarar fel så småningom upphör att tro på sin egen förmåga och slutar följa med i undervisningen. Denna uppgivenhet och rädsla för matematik kan grundläggas redan på lågstadiet och sedan följa eleven genom skolåren upp i vuxen ålder.

Elevernas frågor under matematiklektionerna fick mig att fundera över mitt sätt att undervisa och över de problem som Baroody lyfter fram i citatet ovan. Enligt min erfarenhet var det ofta nödvändigt att hjälpa eleverna med frågor och samtal om probleminnehållet för att problemlösningsprocessen inte helt skulle avstanna. Hur är det då möjligt att stödja elevernas matematikinlärning med frågor och samtal utan att detta leder till ett lotsningsförfarande, som innebär att eleverna inte ges tillfälle till egna initiativ vid problemlösningen? Hur skall undervisningen i aritmetisk problemlösning utformas för att eleverna skall lära sig att lära, och få tilltro till sin förmåga att lära, så att undervisningen inte grundlägger en negativ inställning till matematik som försvårar inlärningen? Dessa frågeställningar var inkörsport och utgångspunkt vid planeringen och genomförandet av den studie som behandlas i denna framställning och bildar bakgrund till projektets problemformulering.

För att studera hur lågstadieelever upplever och förstår aritmetisk problemlösning i skolundervisningen utarbetade jag en serie

lektioner i problemlösning som på avgörande punkter skiljer sig från en traditionell läroboksbunden undervisning. Det är dessa undervisningssituationer som utgör ramen för den undersökning som kommer att beskrivas i avhandlingen.

AVHANDLINGENS UPPLÄGGNING

Huvudintresset i avhandlingen är riktat mot att ge en beskrivning av hur lågstadieelever erfar, upplever och förstår aritmetisk problemlösning i en skolkontext. Den studerade undervisningens utformning och genomförande beskrivs, och elevernas förståelse av de aritmetiska problem som presenteras i de aktuella undervisningssituationerna anlyseras och tolkas. För att framställa det genomförda projektet på ett överskådligt sätt är avhandlingen disponerad i fyra huvuddelar.

I denna första del gavs inledningsvis en beskrivning av problemformuleringens ursprung och en inledande orientering av studiens syfte. Fortsättningsvis görs en avgränsning och bestämning av det studerade fenomenet, vilken inkluderar en redovisning av olika teoretiska beskrivningsmodeller för aritmetiska problem. Undervisning i matematik diskuteras därefter från ett didaktiskt perspektiv, och en teoretisk referensram tecknas i en beskrivning av hur man har studerat och studerar inlärning i matematisk problemlösning inom några olika forskningsinriktningar.

Den andra delen inleds med en redovisning av projektets syfte. Därefter följer en genomgång av de metoder som använts vid datainsamling och analys, där den fenomenografiska forskningsansatsen står i fokus. Vidare beskrivs planeringen och utformningen av de studerade undersökningssituationerna, vid vilka eleverna ritar, skriver och talar när de löser problem. Tidigare forskning med anknytning till att rita, skriva och tala vid matematisk problemlösning redovisas, i anslutning till beskrivningen av den genomförda undervisningen, och slutligen följer en beskrivning av projektets genomförande.

I den tredje delen redovisas resultaten av undersökningen. Eftersom projektet har resulterat i ett omfattande empiriskt material, redovisas resultaten i tre sektioner. Den första sektionen innefattar en beskrivning och analys av de genomförda undervisningssituationerna med utgångspunkt från de deltagande

elevernas och lärarnas perspektiv. Denna sektion inkluderar även resultaten från en statistisk bearbetning av elevernas resultat på de för- och eftertest, som med syftet att mäta elevernas aritmetiska problemlösningsförmåga bjöds i de deltagande klasserna och i kontrollklasser. I sektion två följer en beskrivning och analys av elevernas förfaringssätt när de ritar, skriver, talar och räknar vid problemlösning. Slutligen i sektion tre ges en beskrivning och analys av elevernas förståelse och uppfattning av det aritmetiska innehållet i de framställda problemen. Denna beskrivning innefattar en övergripande beskrivningsmodell av elevernas förståelse och uppfattning av aritmetisk problemlösning i en skolkontext. Med utgångspunkt i denna analys ges därefter en beskrivning av problemlösningsprocessens strukturella dynamik.

Den fjärde delen innehåller en sammanfattning och diskussion av resultaten samt reflektioner om didaktiska implikationer av den genomförda undersökningen.

PROBLEMLÖSNING SOM STUDERAT FENOMEN

Människor har i alla tider löst matematiska problem. På papyrusrullar från det gamla Egypten 1600 f Kr finner man matematiska problem. Forskare studerar idag de problem som löstes i det gamla Kina, och de matematiska problem som formulerades och löstes i det antika Grekland är idag kända även för många människor som inte är matematiker av facket. Jan Thompson (1988) ger i *Historiens matematik* en beskrivning av matematikens utveckling från historiens gryning fram till våra dagar och ger otaliga exempel på matematiska problem. Han menar att matematik handlar om verkligheten och att matematikämnets historiska utveckling borde ha avsevärda implikationer för undervisningen i matematik.

Thompson (1988) ställer frågan varför s k benämnda uppgifter, till skillnad från de uppgifter som han benämner "algoritmiska"[1] uppfattas som svåra av eleverna. Man kan tycka att de benämnda uppgifterna borde vara lättare, eftersom de ofta handlar om verkligheten och även i vissa fall har ett innehåll som anknyter till elevernas upplevelser och erfarenheter. Men det är detta förhållande som Thompson (1988) menar är problematiskt.

---

[1] Min tolkning av innebörden i Thompsons benämning algoritmiska uppgifter är att det är uppgifter som löses i ett bestämt antal steg med hjälp av väl specificerade regler.

> Plötsligt handlar matematiken om verkliga händelser, en koppling som tidigare inte tillräckligt betonats. Eleven skall *själv* ta steget från en verklighetens värld till matematikens. (s 540)

"Algoritmiska uppgifter" anknyter till mekaniskt lärande medan benämnda uppgifter behandlar verkliga händelser som skall symboliseras av eleven. Detta ger enligt Thompson svaret på frågan varför benämnda uppgifter är svåra för eleverna i skolundervisningen. Elevernas svårigheter ligger i användningen av symbolerna när kopplingen mellan verkligheten och symbolerna måste utföras av dem själva.

Före skolstarten har barn utvecklat en avsevärd aritmetisk kompetens, och när de skall lösa matematiska problem i sitt vardagsliv använder de sig av ett stort antal olika lösningsstrategier (Fuson & Hall, 1983; Gellman & Gallistel, 1983; Ginsburg, 1977). I skolan möter de emellertid en formell matematik som är olik deras tidigare sätt att räkna. Man kan iaktta en diskrepans mellan barns förmåga att utföra räkneuppgifter i vardagslivet och deras förmåga att lösa de skrivna matematikuppgifterna som de möter i skolan. Ett kritiskt skede i matematikundervisningen är övergången från de informella personliga strategier som många elever utvecklat till formell skolmatematik med krav på specifika lösningsmetoder och tabellkunskaper. Carpenter och Moser (1982) betonar betydelsen av att uppmärksamma det brott mot elevernas personliga informella problemlösningsmetoder som den formella skolmatematiken innebär.

> We believe that the transition from the informal modeling and counting strategies that children invent to solve basic additon and subtraction problems to the use of memorized number facts and formal algorithms they learn in school is a critical stage in children's learning of mathematics. (Carpenter & Moser, 1982, s 23)

I denna framställning används begreppslig kunskap för att beskriva elevernas förståelse av innebörden i ett verbalt problem medan proceduriell kunskap innefattar räknefärdighet, tabellkunskaper och den formella färdigheten, t ex i vilken ordning räkneoperationer och symboler skall skrivas. I internationell forskning om grundläggande aritmetik uppmärksammas frågan om hur relationen mellan begreppslig och proceduriell kunskap uppkommer och utvecklas hos eleven, och vilka faktorer som kan bidra till en interaktion mellan de båda typerna av kunskap. Frågeställningen angående interaktionen mellan begreppslig och proceduriell kunskap upplöser den hårda frontlinjen mellan förståelse och

träning och pekar på betydelsen av samspelet mellan de båda kunskapsformerna i utvecklingen av den matematiska förmågan.

> Building on past work, it now is evident that it is the relationships between conceptual and procedural knowledge that hold the key. (Hiebert & Lefevre, 1986, s 23)

Lågstadieelevers upplevelse och begreppsliga förståelse av verbala, aritmetiska problem står i fokus för denna undersökning. Proceduriella färdigheter är emellertid en del av problemlösningsprocessen och denna process utvecklas i ett samspel mellan begeppsliga och proceduriella färdigheter. I de undervisningssituationer som kommer att beskrivas i det följande, tas utgångspunkten för undervisningen i de problem som presenteras vid lektionerna, vilket medför att de proceduriella färdigheterna inte behandlas som en isolerad del av matematiken, utan tränas i det sammanhang där de är avsedda att användas.

ETT PROBLEMS RELATIVA KARAKTÄR

Vad är ett problem och vad innebär det att lösa problem? Vid studier av problemlösning kan vissa svårigheter uppstå vid definitionen av termen "problem" och vid avgränsningen av vad "problemlösning" innebär. I vardagslivet använder vi ofta ordet problem och menar då ofta olika personliga svårigheter vi ställs inför. I *Svensk Ordbok* definieras problem dels som en svårighet som det krävs stor ansträngning att komma till rätta med, dels som en uppgift vilken kräver tankearbete och analytisk förmåga.

Vid problemlösning i aritmetik förhåller det sig emellertid på det sättet att de uppgifter som fodrar stor ansträngning av några elever mycket väl kan vara rutinuppgifter eller minneskunskap för andra, och den uppgift som är ett mycket besvärligt problem för en elev i dag inte behöver vara det imorgon. Således är det relationen mellan individen och uppgiften som avgör om uppgiften är ett problem.

I läroplanen för den svenska grundskolan betonas vikten av problemlösande aktiviteter och där framhålles att "... stort utrymme ska i undervisningen ägnas åt att tolka skriftligt ställda problem samt åt att diskutera dessa" (Lgr 80, s 100). Problemlösning i undervisningen bör inte betraktas som skilt från de problem barnen ställs inför i sitt vardagsliv, utan matematik skall ses som något som kan beskriva verkligheten och som kan användas för att beräkna följder av olika handlingar. I läroplanen avses med

problem en frågeställning som man vill lösa och som man kan lösa med en matematisk modell som inte är given. Denna typ av uppgifter kontrasteras mot tillämpningsuppgifter som definieras som en uppgift på vilken en erhållen matematisk modell tränas och tillämpas.

I den undersökning som beskrivs i denna avhandling har elevernas problemlösning studerats utifrån ett antal givna problem. Uppgifterna är problem för eleverna i den mening att det inte finns någon given metod eller matematisk modell som skall användas vid lösningen av uppgiften. Problemlösning ses som en utgångspunkt för att skapa behov hos eleverna av tillägna sig matematisk färdighet och inte för att träna en redan inlärd färdighet.

ANALYSMODELLER AV SKRIFTLIGA, VERBALA PROBLEM

Ett flertal angreppssätt har använts av olika forskare för att analysera och karakterisera skriftliga, verbala problem. De flesta av de modeller som konstruerats har varit inriktade mot att kartlägga strukturella likheter och skillnader mellan olika typer av problem, kategorisera de lösningsstrategier eleverna använder sig av och identifiera de faktorer som gör vissa problem svårare än andra för eleverna att lösa. Variabler som problemets längd, dvs antalet ord och meningar i problemet, samt de ingående ordens svårighetsgrad har visat sig ha effekt på lösningsfrekvenser, liksom grammatisk komplexitet och antalet påståenden i problemformuleringen. Det har även framkommit att problem som representeras av öppna utsagor är svårare än kanoniska problem. Frågeställningen om tillgången till material som klossar, räknestavar, pengar etc förbättrar problemlösningsförmågan har också studerats, och det har visat sig att tillgången till manipulativt material, särskilt för mindre barn, har en positiv inverkan på problemlösningsförmågan (se Carpenter, Moser & Romberg, 1982).

Tre huvudinriktningar kan identifieras inom den forskning som utförts om elemäntär aritmetisk problemlösning. Utgångspunkten vid beskrivningarna och analyserna tas (A) i problemens matematiska innehåll och struktur, (B) i problemens språkliga innehåll och struktur eller (C) i problemlösningsstrategier och lösningsmetoder.

A. Utgångspunkten tas i problemens matematiska innehåll och struktur

Verbala problem kategoriseras ofta genom att man identifierar ett antal kvantiteter och beskriver en relation mellan dem. Carpenter och Moser (1982) använder denna typ av kategorisering när de utifrån den sematiska innebörden i problemen analyserar verbala additions- och subtraktionsproblem. Analysen av den semantiska strukturen i additions- och subtraktionsproblem inbegriper begreppslig kunskap om ökning, minskning, kombinationer och jämförelser av olika mängder. I en sammanställning av sina resultat beskriver Carpenter och Moser flera dimensioner av de relationer och händelser som är involverade i denna typ av problem. Den första dimensionen är baserad på huruvida det är en statisk eller dynamisk relation mellan de mängder som ingår i problemet. Den andra dimensionen involverar mängd - delmängd relationen. För problem som kategoriseras som dynamiska finns en tredje dimension; den händelse som beskrivs i ett problem kan resultera i en ökning eller en minskning av den initialt givna kvantiteten. Utifrån dessa distinktioner har man identifierat sex olika kategorier av problem: *Joining, Separating, Part-part-whole, Comparison, Equalizing-add on* och *Equalizing-take away.* När hänsyn tas till att vissa kvantiteter är givna och andra är okända identifieras tre olika problemtyper inom varje kategori, vilket innebär att klassifikationsschemat inbegriper de flesta av de relationer som finns representerade i additions- och subtraktionsproblem.

När det gäller elementära aritmetikproblem skiljer Vergnaud (1982) mellan numeriska beräkningar och relationella beräkningar. Med numeriska beräkningar menar han enkla räkneoperationer som inbegriper addition, subtraktion, multiplikation och division. Relationella beräkningar innebär de tankeoperationer som är nödvändiga för att handskas med de relationer som är involverade i en problemlösningssituation.

B. Utgångspunkten tas i problemens språkliga innehåll och struktur

Nesher (1982) har analyserat verbala additions- och subtraktionsproblem med utgångspunkt från textens (a) logiska struktur (b) den semantiska tolkningen av texten och (c) den syntaktiska komponenten i texten.

(a) Den underliggande logiska strukturen i verbala problem består av minimalt tre huvudlinjer av vilka två omfattar informationskomponenter och den tredje är frågekomponenten, vilka inbördes har speciella beroendeförhållanden.

(b) Den sematiska komponenten innefattar en kontextuell och en lexikal del. Den kontextuella delen behandlar textens natur som helhet och dess inbördes semantiska förhållanden, alltså problemens innehåll. Den lexikala delen behandlar effekten av isolerade lexikala uppgifter i texten t ex svårtolkade ord.

(c) Den syntaktiska komponenten behandlar lingvistiska aspekter ur ett ytligt perspektiv med variabler som antal meningar, frågans position i texten och antalet ord.

C. Utgångspunkten tas i problemlösningsstrategier

Charles och Lester (1982) kategoriserar problemtyper på en mer övergripande nivå och utgår då de olika lösningsstrategier som kan användas för att lösa problemen.

Enkla översättningsproblem är en mycket vanlig typ av uppgifter i matematikböcker, och innebär att man översätter orden i problemet till ett matematiskt uttryck. En annan benämning för problem av denna typ är enstegsproblem.

> Jenny har 7 tropiska fiskar i sitt akvarium. Tommy har 4 tropiska fiskar i sitt akvarium. Hur många fler fiskar har Jenny än Tommy?

Komplexa översättningsproblem är benämningen på de problem där översättningen av innehållet till matematiska uttryck och beräkningar sker i två steg. Problemen benämnes även flerstegsproblem.

> Pingpongbollar kommer i paket med 3 i varje. En kartong innehåller 24 paket. Herr Karlsson som äger en sportaffär, beställde 1800 pingpong bollar. Hur många kartonger beställde Herr Karlsson?

Processproblem kan inte enkelt lösas genom att man väljer en eller flera räkneoperationer. De löses i stället genom att man gissar och kontrollerar, använder logiskt resonemang, ritar en bild, gör en lista eller tabell eller letar efter ett mönster.

> En schackklubb hade en turnering för sina 15 medlemmar. Om varje medlem spelade en omgång mot varje annan medlem, hur många omgångar spelades?

Tillämpningsproblem är vardagsproblem eller, enligt Charles och Lester, realistiska problem. Problemlösningsprocessen i denna typ av problem involverar mer än matematik, men matematiken spelar en nyckelroll för lösningen av problemet.

Hur mycket papper av olika slag använder skolan varje månad?

Charles och Lester (1982) har således benämnt aritmetiska problem utifrån problemens innehåll samt utifrån de olika lösningsmetoder och strategier som anses vara mest relevanta att använda vid problemlösningen.

Sammanfattningsvis kan sägas att i de tre beskrivna analysmodellerna fokuseras olika aspekter av aritmetiska problem och analysen sker på olika beskrivningsnivåer. På grund av att man har olika utgångspunkter och använder skilda analysinstrument blir skillnaderna stora mellan de identifierade problemtyperna. Detta medför att det är svårt att utföra en jämförande analys, och kategorisystemen får därför närmast betraktas som komplementära. Ett gemensamt drag för samtliga modeller är emellertid att kategorierna huvudsakligen tar sin utgångspunkt i forskarens analys av de aritmetiska problemens innehåll och struktur och att kategorierna inte definieras och formuleras med utgångspunkt från elevernas perspektiv på problemen. I analysmodellerna synliggörs därmed inte hur eleverna upplever och förstår aritmetiska problem.

Kapitel 2

MATEMATIK, DIDAKTIK OCH FORSKNING

Under det senaste decenniet har problemlösning tilldragit sig ett mycket stort och ökande intresse i forskning om inlärning och undervisning i matematik. Många forskare menar att matematik i grunden handlar om problemlösning och att problemlösning borde genomsyra skolans undervisning i matematik (Kilpatrick, 1985). I läroplaner världen över betonas också vikten av att eleverna får ägna sig åt problemlösande aktiviteter under matematiklektionerna. I det amerikanska dokumentet *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989) har problemlösning en mycket framträdande roll och ses både som utgångspunkt och mål för undervisningen i matematik (se Ahlberg, Emanuelsson & Olsson, 1992). Även i läroplanen för den svenska grundskolan betraktas problemlösning som det viktigaste huvudmomentet i matematik, och det framhålles att stort utrymme skall ägnas åt att tolka och diskutera skriftligt ställda problem i undervisningen (Lgr 80 s 100).

Trots det ökade intresset för problemlösning har matematikundervisningen i grundskolan i och med den nya läroplanen 1980 (Lgr 80) emellertid karakteriserats av en betoning på baskunskaper. Uppfattningen av vad baskunskaper innebär är skiftande. Det tycks emellertid som om betoningen på baskunskaper i matematikundervisningen på lågstadiet har resulterat i att eleverna under matematiklektionerna till mycket stor del tränar additions- och multiplikationstabeller samt att räkna med algoritmer. Resultaten från den nationella utvärderingen av matematiken som presenterades 1990 (Ljung & Pettersson, 1990) visade att svensk matematikundervisning på låg- och mellanstadiet är teknikinriktad och huvudsakligen inriktad mot att träna proceduriella färdigheter.

> Att ställa upp och räkna ut, oftast genom enskild tyst räkning har varit och är fortfarande det dominerande inslaget under matematiklektionerna medan Lgr 80 framhäver problemlösning som ett dominerande huvudmoment. (s 19)

Den numeriska räkningen har enligt Ljung och Pettersson (1990) sin plats i undervisningen, men om undervisningen skall vara förankrad i läroplanen borde inte enskild tyst räkning vara det

dominerande inslaget i matematikundervisningen på lågstadiet. I målbeskrivningen för huvudmomentet problemlösning i Lgr 80 framhålles att undervisningen i matematik skall utgå från elevernas erfarenheter och behov, och vikten av att eleverna lär sig att lösa den typ av matematiska problem som de kommer att möta i sitt vardagsliv betonas.

> Undervisningen i matematik skall utgå från elevernas erfarenheter och behov och förbereda dem för rollen som vuxna medborgare. Eleverna skall därför i första hand skaffa sig en god förmåga att lösa sådana matematiska problem som vanligen förekommer i vardagslivet. (Lgr 80, s 98)

Den betoning av teknikträning som förekommer i matematikundervisningen är således inte i enlighet med läroplanens målsättning. Tabellkunskaper och teknikträning är bra i tidsbesparande syfte, men inte ens den allra mest automatiserade beräkningsfärdighet medför i sig en förmåga att uppfatta och lösa matematiska problem. I ett föränderligt samhälle med krav på nya kunskaper och med tekniska hjälpmedel av olika slag t ex miniräknare, förespråkas från många håll ett skifte av undervisningens fokus till en mer förståelseinriktad matematikundervisning (se t ex Neuman, 1989; Unenge, 1989).

DE DIDAKTISKA FRÅGORNA

Den stora uppmärksamhet som problemlösning rönt i de senaste årens forskning om inlärning och undervisning i matematik aktualiserar de didaktiska frågorna. Didaktikens frågeställningar berör urvalet av det ämnesinnehåll och de undervisningsformer som skall förekomma i skolan, samt bestämningen av mål och riktlinjer för hur undervisningen skall bedrivas. Innebörden i begreppet didaktik har diskuterats livligt i Sverige, och det framkommer skilda tolkningarna av vad begreppet didaktik står för. Det har ibland lyfts fram som ett nytt begrepp inom den pedagogiska forskningen, emellertid är didaktikens frågeställningar inte på något sätt nya eller revolutionerande, utan berör frågor som på olika nivåer ständigt har varit och är aktuella för all undervisning. Det är exempelvis relevant att studera vad som skall behandlas i undervisningen, hur undervisningen skall utformas, och varför ett visst innehåll skall behandlas utifrån ett läroplansteoretiskt perspektiv, men frågeställningarna är också

dagligen närvarande för den enskilde läraren i undervisningspraktiken.

Det ökade behovet av kunskapsutveckling inom den didaktiska forskningsdomänen har lett till ett intresse för att utveckla och formulera olika didaktiska teorier, där man fokuserar skilda frågeställningar inom det didaktiska kunskapsområdet. Inom skolämnet matematik har Kilborn (1989) initierat skapandet av en didaktisk ämnesteori. Han menar att en didaktisk ämnesteori bör vara:

> ...ett instrument som kan hjälpa läraren att förstå barns tankar och förklara hur barn kan bygga upp ett matematiskt vetande. En didaktiskt ämnesteori i matematik bör därför i första hand utgå från forskning om barns inlärning i matematik. Ett viktigt tillskott kan man också få från matematikens historia och dess beskrivningar av hur mänskligheten från början tillängnat sig och byggt upp ett matematiskt vetande. (s 7)

I Tyskland är, i motsats till det förhållande som råder i Sverige, matematikdidaktik ett etablerat vetenskapligt fält med ett stort antal professurer spridda över landet. I en beskrivning av matematikdidaktikens utveckling i Tyskland betonar Steiner (1980;1987;1988) betydelsen av att anlägga ett tvärvetenskapligt synsätt på matematikdidaktik, eftersom matematisk kunskap interagerar med kunskap från andra områden såsom pedagogik, psykologi och sociologi. Steiner menar att även andra kunskapsområden som exempelvis lingvistik, historia och naturvetenskap måste införlivas i den matematiska forskningen, samt att det är mycket viktigt att matematiken ingår i ett filosofiskt ramverk.

Det framförs ibland tankar om att skolundervisning inte kan vara vetenskaplig och vila på vetenskaplig grund. Steiner vänder sig emot denna föreställning och anför att om så vore fallet skulle verksamheten helt lämnas öppen för subjektiva uppfattningar och synpunkter och ett pragmatiskt synsätt utifrån vilken undervisning betraktas som en konstart. Steiner menar att en mer fruktbar ansats istället är att studera skilda aspekter av verksamheten, genom t ex en analys av innehållet, läroplanskonstruktion, undervisningsmetoder, läroböcker och samspel mellan elever och lärare i klassrummet. I dessa fall gör man speciella innehållsliga områden till föremål för studier. Enligt Steiner finns det ett behov av att skapa en teoretisk bas som tillåter oss att bättre förstå och identifiera de olika ståndpunkter, aspekter och intentioner som ligger till grund för olika synsätt på matematikundervisningen.

Man måste analysera sambanden mellan dessa olika ståndpunkter och föra dem samman i en didaktisk förståelse av den totala verksamheten.

Steiner påpekar även att forskning om undervisning tidigare huvudsakligen har genomförts med grundtesen att undervisning enbart har med läraren att göra, vilket medfört att eleverna ofta varit osynliga i studier om undervisning. När man i vetenskapliga studier ägnat sig åt elever har det företrädesvis varit i undersökningar som genomförts i experimentsituationer. Steiner menar att både lärare och elever är aktörer i undervisningssituationen och att klassrummet bör ses som en arena där elever och lärare interagerar. Interaktionen inrymmer sociala och psykologiska aspekter som är beroende av varandra. Studier av undervisning bör därför utföras i klassrumssituationer och enligt Steiner är det viktigt att läraren deltar i genomförandet av forskningen, samt att en dialog förs med lärarna eftersom de är en del av undersökningssituationen.

En förutsättning för en utveckling av den matematikdidaktiska forskningen är enligt Steiner (1987) således att man intar ett tvärvetenskapligt förhållningssätt eftersom en framgångsrik utveckling av en teori om matematikundervisning är beroende av en allmän nivå. Samtidigt måste emellertid en teori om matematikundervisning ha sin förankring i undervisningspraktiken och ge konkreta exempel på innehåll och metoder i undervisningen. Det är sambanden mellan vetenskaplig teoribildning och grundläggande aspekter av matematikdidaktik som enligt Steiner måste uppmärksammas och observeras i en fortsatt utveckling av den matematikdidaktiska teoribildningen.

Det tvärvetenskapliga synsätt på hur forskning om skolans undervisning i matematik bör bedrivas som Steiner (a.a.) förespråkar utmärker projektet *Vardagskunskaper och skolmatematik* som genomförts vid Stockholms universitet (Wistedt 1990). I projektet, som omfattade en empirisk fältstudie på grundskolans mellanstadium, medverkade forskare med olika intresseinriktningar från pedagogiska institutionen, matematiska institutionen samt lärarutbildningen. De centrala frågeställningarna i projektet var hur elever använder sin intuitiva kunskap, sin kompetens i vid mening när de lär sig matematik i skolan och vilken betydelse en anknytning till kända problemmiljöer och vardagliga situationer har för elevernas tolkning av matematiska problem.

En tvärvetenskaplig ansats är även kännetecknande för Mellin-Olsens (1989) studier angående lärares didaktiska kunskapssyn som genomsyras av ett politiskt - historiskt perspektiv på matematikundervisning. Mellin-Olsen menar att den didaktik som har sina rötter i Comenius och Pestalozzi och som utgår från val och behandling av undervisningsinnehåll t ex genom en anpassning av inlärningsuppgifter till elevernas mognad och tidigare kunskaper, inte bidrar till att öppna för elevens individuella eller kollektiva deltagande i utvecklingen av samhället. Mellin-Olsen (1991) urskiljer i skolundervisning en "oppgavediskurs" vilken han kritiskt belyser. Han drar med influens från verksamhetsteoretiska samt konstruktivistiska perspektiv på inlärning upp konturerna för en alternativ diskurs i undervisningen, som innebär en mindre sträng ämnesmässig kontroll över hur matematikkunskaperna hanteras av lärare och elever i undervisningen. Detta skulle enligt Mellin-Olsen möjliggöra att den potential som finns hos lärarna för att utveckla undervisningen i matematik skulle kunna användas, och medföra att eleverna ges möjlighet att själva ta kontroll över sin inlärning och kunskapsutveckling.

ALLMÄN DIDAKTIK, FACKDIDAKTIK OCH FENOMENOGRAFISK DIDAKTIK

Marton (1986) ger en orienterande beskrivning av den didaktiska forskningsdomänen och gör en avgränsning och indelning av det didaktiska forskningsfältet genom att på ett övergripande plan identifiera allmändidaktik och fackdidaktik eller en innehållsspecifik didaktik. Allmändidaktiken utgör grunden för den didaktiska forskningen och där innefattas frågor om undervisning på ett allmänt plan som exempelvis läroplansfrågor, metodiska frågor av mer generell karaktär samt specialdidaktiken, som fokuserar allmänna didaktiska frågeställningar inom t ex en viss skolform eller ett visst stadium. Marton gör även en innehållslig bestämning av fackdidaktiken som han menar till stor del består av ämnesdidaktik, men där inte enbart enskilda skolämnen studeras utan där undervisningen även kan vara relaterad till andra innehållsliga områden och beröra undervisning i olika ämnen och på flera skolstadier. Fackdidaktiken kan enligt Marton (1986) definieras i termer av:

> ...frågor om val och behandling av undervisningens innehåll inom olika kunskaps- och färdighetsområden. (s 72)

Fackdidaktisk forskning innefattar således forskning inom kunskaps- och färdighetsområden vilka inte nödvändigtvis är skolämnen i traditionell mening som exempelvis matematik, utan som även berör forskning inom icke disciplinära område som stadier, teman, blockämnen etc. En ytterligare avgränsning inom fackdidaktiken, där innehållet kan beskrivas i termer av hur elever uppfattar ett specifikt undervisningsinnehåll, benämns fenomenografisk didaktik (Marton, 1986).

Dahlgren (1986) menar att en kartläggning och beskrivning av människors uppfattningar av ett undervisningsinnehåll kan bidra med värdefull kunskap och svar på frågor om hur val och behandling av olika innehåll skall göras i undervisningen. Vid meningsfull inlärning sker vanligen en konfrontation mellan ett hos den studerande befintligt sätt att uppfatta ett undervisningsinnehåll och en i många fall kvalitativt annorlunda uppfattning som i undervisningen förmedlas av läraren. Utfallet av denna konfrontation bestäms till stor del av om undervisningen bringar den studerande fram till en insikt om skillnaderna i uppfattningar, samt om den av läraren presenterade uppfattningen framstår som en mer ändamålsenlig förståelse. Enligt Dahlgren är en av den didaktiska forskningens uppgifter att beskriva och analysera de skilda uppfattningar av väsentligt undervisningsinnehåll som kan påträffas empiriskt.

> Kunskap bland lärare om existensen av och karaktären hos de kvalitativa skillnaderna i sättet att uppfatta undervisningsinnehållet blir dessutom rimligen i sig en didaktisk tillgång genom att komma till synes som innehåll i undervisningen. (Dahlgren, 1986, s 156)

Kroksmarks (1987) beskrivning av den fenomenografiska didaktiken förankras i didaktikens idéhistoria och har ett inflöde av tankar från den fenomenologiska filosofin (se Bengtsson, 1987 a, 1987 b,1988; Husserl, 1970; Merleau-Ponty, 1976). Fenomenografins närhet till fenomenologin visar sig bl a i att man anknyter till och använder begrepp som har sitt ursprung i den fenomenologiska filosofin, exempelvis intentionalitet och livsvärld, som är centrala begrepp i fenomenologin (se Dahlin, 1989; Teman, 1983).

Den fenomenografiska didaktiken kan enligt Kroksmark (1987) ses som ett forskningsfält inom vilket man:

> ... tematiserar olika undervisningsinnehåll, via människors kvalitativt skilda uppfattningar av samma innehåll. Undersökningarna avtäcker elevernas initiala (naiva) uppfattningar av undervisningsinnehållet. (s 283)

Ett avgränsat undervisningsinnehåll kartläggs och aktörernas skilda uppfattningar av detta innehåll beskrivs. Enligt Kroksmark (1987) ger resultatet av kartläggningen en kollektivt uppburen bild av hur det undersökta innehållet intersubjektivt uppfattas. Den kvalitativa innehållsbeskrivningen bildar oftast en hierarkisering av innehållet så att det blir möjligt att urskilja uppfattningar som är relaterade till undervisningsmålen, i meningen att t ex en uppfattning ligger närmare undervisningsmålet än en annan.

> Det handlar således inte om beskrivningar av uppfattat innehåll i största allmänhet utan om beskrivningar som är *relaterade till och ordnade i förhållande till ett definierat mål,* där målet inte uttrycks i termer av vad eleverna skall kunna utan vad han innehållsligt skall *behandla*. Denna skillnad mellan undervisningens mål uttryckt som vad eleverna skall *göra* återge eller lösa (kunskapskvantiteter) och vad eleverna skall *förstå,* tänka eller uppfatta (intentionala akter) är fundamentalt inom den fenomenografiska didaktiken. (Kroksmark, 1987, s 282, kursiv. i orginal).

Kroksmark (1987) lyfter fram K.G. Jonssons doktorsavhandling från år 1919 med titeln *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp* som ett exempel på tidig svensk forskning med didaktisk inriktning. Jonsson studerade de olika tillvägagångssätt elever i olika åldrar använder när de löser aritmetiska huvudräkningsuppgifter. Jonsson undersökte på vilket sätt eleverna löste uppgifterna och vilken inverkan olika uppgiftstyper hade på elevernas behandling av problemet. Vid sina studier uppmanade Jonsson eleverna att försöka klargöra hur de tänkte när de utförde beräkningarna och elevernas lösningssätt analyserades kvalitativt och indelades i skilda behandlingssätt. Det framkom att den enskilde elevens behandlingssätt av de framställda problemen kunde variera vid lösningen av olika uppgiftstyper och att eleven hade sitt eget sätt att förstå och behandla de givna uppgifterna. Eftersom elevernas olika sätt att lösa de givna uppgifterna får konsekvenser för inlärningen drar Jonsson slutsatsen att lärarkompetensen bl a borde bestå i att känna till det som är konstant, vilket är elevernas olika behandlingssätt eller de skilda tankeformer som de begagnar sig av i skolarbetet. Jonsson menar att implikationerna för undervisningen är att den borde vara inriktad mot att eleven skall tillägna sig en matematisk metod som innefattar en förståelsepräglad matematisk färdighet. Kroksmark (1987) understryker att Jonssons resultat är historiskt anmärkningsvärda eftersom denne i sin studie visar hur elevens behandling av ett innehållsligt avgränsat område varierar, och att

varje elev har sitt eget sätt att förstå det matematiska exemplet, vilket i allt väsentligt styr elevens förfaringssätt vid problemlösningen. Kroksmark uppmärksammar även det sätt på vilket Jonssons undersökning tillåter honom att utifrån resultaten av undersökningen uttala sig på en allmändidaktisk nivå angående matematikundervisning, i det att han på ett mer generellt plan pekar ut en ledstjärna för hur undervisningen bör bedrivas.

Jonssons (1919) undersökning från början av seklet där han studerade elevers beräkningsmetoder vid problemlösning kan ses som ett exempel på tidig forskning som väl försvarar en plats i den didaktiska forskning, vars innehåll och avgränsningar på skilda sätt definieras av dagens svenska forskare (se Dahlgren, 1986; Kilborn, 1989, Kroksmark, 1987, Marton, 1986).

FORSKNING OM INLÄRNING OCH UNDERVISNING I MATEMATIK

Intentionerna vid utvecklingen av det matematikdidaktiska forskningsfältet tycks vara att utifrån olika perspektiv studera undervisning inom olika delar av matematikens ämnesdomän, samt att bedriva fortlöpande forskning om elevernas lärande inom matematikens skilda innehållsliga områden. Den didaktiska forskningen skiljer sig således från huvuddelen av den tidigare forskningen i matematik, som dominerats av psykologiska inlärningsteorier. Det utförs emellertid fortfarande en hel del studier som tar sin utgångspunkt i psykologiska inlärningsteorier. Syftet är då att söka efter allmängiltiga lagbundenheter och transfereffekter med avseende på problemlösningsförmåga och att generera allmängiltiga modeller över det matematiska tänkandet.

För att ge en teoretisk referensram till undersökningen ges i det följande en återblick och översiktlig belysning av några utmärkande drag i den forskning om matematisk problemlösning som utförts inom olika forskningsinriktningar. Denna inledande sammanhängande beskrivning av tidigare genomförd forskning är dessutom utförd för att undvika att projektbeskrivningen fragmentariseras för läsaren genom att en mängd beskrivningar och förtydligande måste ges av de skilda forskningsinsatser som omnämns i den kommande texten.

De resultat man erhåller inom olika forskningsansatser är till stor del avhängiga de teoretiska grundantagande som teoribildningen

utgår från, varför varje avsnitt inleds med en kort beskrivning av de epistemologiska antagande som ligger till grund för de olika forskningsinriktningar som behandlas. När resultaten från forskningen diskuteras i ljuset av den teoretiska ansatsen ökar möjligheten att bedöma och ta ställning till den kunskap forskningen bidrar med. I vissa avseenden kan det emellertid medföra en förenkling när man kategoriserar forskning och renodlar perspektiv på det sätt som görs i det följande, dels därför att framställningen blir översiktlig och dels därför att gränserna mellan de olika forskningsinriktningarna i många fall inte är helt skarpa. Det förekommer att forskare inte enbart tar sin teoretiska utgångspunkter inom en forskningsinriktning utan kombinerar flera ansatser (Sternberg,1982; Threadgill-Sowder, 1985).

Eftersom den tidigare forskningen är omfattande kan det i denna framställning endast bli fråga om en relativt begränsad kunskapsöversikt med några nedslag i hur man inom olika forskningsinriktningar på grundval av olika teoretiska grundantaganden väljer problem och metoder och därmed erhåller skiftande beskrivningar av vad matematisk problemlösning innebär. Låt oss emellertid se på några olika forskningsinriktningar utifrån frågeställningarna om vilka kunskaper forskning om matematik och problemlösning har bidragit med och i korthet diskutera eventuella implikationer för undervisningen i matematik.

THORNDIKE OCH DEN VETENSKAPLIGA PSYKOLOGIN

Edward Thorndike publicerade 1922 i *The Psychology of Arithmetic*, en del resultat från sina omfattande studier. Thorndike hade genom experimentella studier förkastat den analytiska språkfilsosofins formalbildningsteori, i vilken man utgår från logiska slutsatser (syllogismer) för att komma fram till en absolut rätt slutsats. Thorndike lade istället grunden till associationsteorin där tänkandet ses som en stimulus - respons reaktion. Karakteristiskt för all inlärning är enligt Thorndike (1922) att den till en början består av en mängd slumpartade reaktioner (trial and error), vilka till slut elimineras för att lämna plats för en direkt och adekvat reaktion. För att förstå tänkandet måste man enligt Thorndike studera de lagar som bestämmer uppkomsten av tankarna eller idéerna. En tanke eller idé är i ett klassiskt associationistiskt synsätt ett spår från en stimuli, dvs en respons. Den fundamentala lagen som bestämmer om en förbindelse (connection) skall upprättas mellan stimuli och repons är mycket enkel. Om två saker a och b

ofta har uppträtt tillsammans blir följden att a framkallar b i människans tänkande. Sakerna är förbundna på det sätt som som t ex en väns telefonnummer är förbundet med hans namn, eller som en serie meningslösa stavelser kan memoreras när de läres in i serier, eller på det sätt som en hund kan läras att få salivavsöndring när den hör ett speciellt ljud eller musikstycke. En önskad färdighet kan uppnås genom upprättandet av en av flera möjliga förbindelser som t ex i en additonstabell.

> ...learning to add may include the bonds "0 and 0 are 0," "0 and 1 are 1," "0 and 2 are 2," "1 and 0 are 1," "2 and 0 are 2," etc; or these may be all left unformed, the pupil being taught the habits of entering 0 as the sum of a column that is composed of zeros and otherwise neglecting 0 in addition. (Thorndike, 1922, s xiii).

Enligt Thorndikes synsätt finns överspridning i fråga om utveckling av förmågan från träning av ett innehållsområde, som man kan ha användning av när det gäller att tillägna sig förmåga inom ett annat område, endast i den utsträckning som det finns identiska element i de båda områdena. Man kan forma de riktiga "vanorna", dels genom upprepning av "situation - reaktion förbindelsen", dels genom de konsekvenser i form av belöning eller straff som reaktionen får. Detta gäller även för den form av tänkande som är utmärkande för matematisk problemlösning.

> Reasoning or selective, inferential thinking is not at all opposed to, or independent of, the laws of habit, but really is their necessary result under conditions imposed by mans's nature and training. A closer examination of selective thinking will show that no principles beyond the laws of readiness, exercise and effect, are needed to explain it: that it is only an extreme case of what goes on in associative learning as described under the "piecemeal" activity of situations. (s 190)

Enligt den associationistiska teorin har således inte elevens upplevelse av de problem de möter, deras begreppsliga kunskap och förståelse någon betydelse för inlärningen i matematisk problemlösning.

Thorndikes teorier om inlärning överfördes till undervisningspraktiken på 1920-talet och hans teorier om inlärning fick stort inflytande på undervisningen i matematik.

> In the early part of the century, the psychology of learning had a significant influence on the mathematical curriculum. In the 1920s Thorndikes theories of learning were directly translated into practice in aritmetic instruction. (Carpenter, 1985, s 87)

Den teori som Thorndike står som representant för, kan vi fortfarande finna spår av i dagens svenska matematikundervisning. På låg- och mellanstadiet framkommer i den nationella utvärderingen av matematiken (Ljung & Pettersson, 1990) att enskild tyst räkning och träning i att ställa upp och räkna ut har varit och fortfarande är det dominerande inslaget under matematiklektionerna. Denna form av teknikinriktning av undervisningen i matematik är helt förenlig med den syn på inlärning och kunskap som förespråkas av associationsteoretikerna.

GESTALPSYKOLOGI

Den atomistiska kunskapssyn som återfinns i Thorndikes associationsteori lyser med sin frånvaro i gestalpsykologin som växte fram i Tyskland i början av seklet. Inom gestaltpsykologin ägnade man sig huvudsakligen åt experimentella undersökningar av varseblivning, men man har även gjort studier av problemlösning. Förgrundsgestalten är M. Wertheimer, andra kända företrädare är K. Koffka och W. Köhler.

Inom gestaltpsykologin tar man en helt annorlunda utgångspunkt när det gäller inlärning än vad som är fallet inom den reduktionistiska associationspsykologin. Man hävdar gestalt- eller helhetsuppfattningens betydelse och framhåller tolkningens avgörande roll för människors omvärldsuppfattning. Människor tolkar en situation på ett visst sätt, våra handlingarna är målstyrda och människan har ett behov av att strukturera och organisera sin omvärld i en strävan efter helhet. Denna strukturering av omvärlden styrs av gestaltlagarna, och innebär att ett antal gestaltfaktorer är avgörande för hur varseblivningen gestaltas. Slutenhetsfaktorn ger enhet och stadga åt varseblivningen, och riktningsfaktorn har en tendens att gestalta skeendet i en naturligt given fortsättning. Dessutom talar man om närhets- och likhetsfaktorn. Den ursprungligaste gestaltfaktorn är den s k figurgrund relationen.[1] Varje varseblivnings innehåll framträder som en figur, gestaltad mot en given grund. Gestaltlagarna innefattar reorganisationsprinciper och helheten beror på de ingående elementens egenskaper och deras arrangemang. Vår varseblivningen är selektiv, vilket innebär att vi uppmärksammar vissa

[1] Begreppet härstammar från Edgar Rubin (1911), grundaren av den fenomenologiska psykologi som kallas Köpenhamnsskolan.

företeelser i vår omgivning, medan andra skjuts i bakgrunden. Exempelvis fokuserar vi orden på en tidningssida och ser inte bokstäverna, och vi uppmärksammar oväntade ljud i vår omgivning, medan vi förbiser andra välbekanta hörselförnimmelser.

När en människa står inför en uppgift, som trots att hon har prövat alla hypoteser tycks omöjlig att lösa, kan hon komma på lösningen genom en plötslig insikt. Lösningen av ett problem genom insikt innebär i gestaltpsykologiska termer att de element som ingår i problemets gestalt omorganiseras av den person som är involverad i problemlösningsförsöket. Inom gestaltpsykologin är ett vanligt tillvägagångssätt vid datainsamling att människor får beskriva hur de upplever olika saker, vad de ser och hur de går tillväga när de utför olika uppgifter. Analysen tar sedan sin utgångspunkt i de iakttagelser och beskrivningar som människor gör om sitt eget tänkande och handlande.

I *Productive Thinking* som gavs ut postumt 1945 beskriver Max Wertheimer ett antal fall av problemlösning där lösningen ligger i en omorganisation av tänkandet. Denna omstrukturering av tankefältet, dvs organisationen och omorganisationen av tänkandet, är fundamental inom gestaltpsykologin. Gestaltpsykologernas starka betoning av strukturer framstår mycket tydligt i det mest kända exemplet i denna bok som gäller hur en lärare undervisar om metoden för att beräkna en parallellograms area. Eleverna lär in den lösningsmetod som läraren presenterar, men när de ställs inför en variant av problemet som de inte tidigare mött fungerar inte den strategi de använt sig av tidigare. Det uppstår en funktionell fixering eftersom eleverna enbart memorerat lärarens lösningsmodell och inte förstått den underliggande principen. Lärarens undervisningsmetod ställs emot Wertheimers lösningsmodell där parallellogramen ses som ett specialfall av en rektangel. Vid beräkningen av parallellogrammens area skall eleverna använda sig av dess symmetriska egenskaper. För att vara i stånd att använda denna lösningsmetod måste eleverna uppfatta parallellogrammen i ett för dem nytt perspektiv. Detta perspektivskifte innebär en omorganisation av de element som ingår i problemets gestalt och utgör ett exempel på den omstrukturering av tänkandet, som gestaltpsykologerna anser vara av mycket stor betydelse vid problemlösningsprocessen.

De gestaltpsykologiska inlärningsteorierna har inte haft något märkbart genomslag i senare teoribildning om matematisk problemlösning och inte heller undervisningen i matematik har i

någon nämnvärd omfattning influerats av gestaltpsykologin. Den syn på inlärning som gestaltpsykologerna företräder, där inlärning beskrivs i termer av förändringar i människors sätt att varsebli och förstå olika företeelser i omvärlden, har således inte förmått påverka undervisningen i problemlösning i samma höga grad som den associationistiska teorin, där man genom reduktionism söker lagbundenheter och allmängiltiga principer.

FORSKNING OM INDIVIDUELLA DIFFERENSER

När det gäller frågor som berör matematisk kompetens och problemlösningsförmåga har individuella differenser mellan människor varit av särskilt intresse att studera. En orsak till detta är att matematisk problemlösningsförmåga ofta har ansetts vara en stabil egenskap hos människor. Matematisk problemlösningsförmåga har betraktats som en egenskap som vissa människor har fått till skänks av naturen, medan andra inte har utrustats med de anlag som erfordras för att lösa matematiska problem. Under 40 och 50-talet växte det fram ett mycket stort intresse inom den pedagogisk - psykologiska forskningen för att studera individuella differenser. Ansatsen utvecklades emellertid mycket tidigare och har sina rötter i bl a Thurstones forskning. Han publicerade redan 1924 sitt första större arbete *The nature of intelligence.*

I forskningen om individuella differenser lämnade man i inledningsskedet helt studiet av olika innehållsliga områden och ägnade sig åt att på ett generellt plan kartlägga hur människor skiljer sig från varandra i olika avseenden när det gäller begåvning och intellektuell förmåga. Den klassiska differentialpedagogiken har sina rötter i den lära om människans och samhällets utveckling som August Comte benämnde positivism, och som han utvecklade på 1830-talet. Positivismen är utformad efter naturvetenskapligt mönster och Comte menade att på samma sätt som man kartlagt naturens processer, skall det vara möjligt att kartlägga samhällsprocesser samt människors tänkande och handlande. På grundval av den information man erhåller genom s k objektiva studier och analys av säkerställda data är det möjligt att formulera generella lagar om människors handlande. Positivismen har efter Comtes programförklaring utvecklats i olika riktningar och man kan idag möta benämningar som logisk empirism och nypositivism. Alltjämt står emellertid det positivistiska vetenskapsidealet för krav på systematiska observationer, noggrann prövning av påståenden och teorier, logiskt rationellt tänkande och precision i de framförda

resonemangen. Det är en abstraherande och generaliserande forskningsansats där resultaten skall kunna beläggas helt objektivt (Hempel 1966). Kunskapens syfte är rationellt och människan skall veta, för att kunna förutse och handla. Forskningsmetodiken vilar på avancerade statistiska metoder och man utarbetar principer och kontrollinstrument för forskning inom beteendevetenskaperna (Kerlinger 1970).

De fyra huvudfrågor som man tidigt arbetade med inom differentialpedagogiken och som fortfarande i dagens forskning står i fokus är:

- I vilka avseenden är människor olika?
- Hur är människor olika?
- Vilka samband finns mellan människors olika egenskaper?
- Varför är människor olika?

Ett stort intresse har inom den psykometriska ansatsen ägnats åt att kartlägga de faktorer som ingår i ett intelligent beteende och med hjälp av avancerade statistiska metoder söka efter samband och minsta gemensamma nämnare när det gäller begåvningsfaktorer. Man har varit intresserad av intelligensens kvantitativa tillväxt med stigande ålder och intelligenstest har konstruerats som skall ge ett operationellt och kvantifierbart mått på intelligens. Med utgångspunkt från människors förmåga att lösa testuppgifterna har man utformat intelligensmodeller, alltså hypotetiska konstruktioner som antas förklara skillnader mellan människor i olika hänseende.

Den intelligensmodell som har framförts av bl a Thurstone beskriver intelligensen som summan av en rad från varandra helt skilda förmågor. En annan teori är Spearmans tvåfaktorteori i vilken förutsätts förekomsten av dels en allmän intelligensfaktor (g-faktorn) och dels en mängd specialfaktorer (s-faktorer). I varje intelligensfunktion medverkar dels den allmänna intelligensfaktorn, dels en viss specialfaktor.

Domänen vidgas av Sternberg (1982) som kritiserar försöken att ensidigt använda faktoranalys för att definiera intelligens på olika områden. Sternberg försöker finna de komponenter i det mänskliga beteendet som betecknar ett intelligent handlande. Han har undersökt hur individer löser problem inom skilda problemområden, och menar att det är skilda komponenter som tas i anspråk vid problemlösning beroende på problemområde. Han uttrycker att det som kan betecknas som ett intelligent beteende i ett sammanhang eller i en kultur kanske är irrelevant eller ointelligent

i en annan, och att den begåvning som mätes med intelligenstest har en snäv innebörd. De intelligensfaktorer som definierats av Thurstone (1924) och som tas i anspråk vid lösning av intelligenstest av konventionell typ är närmast avsedda att mäta någon typ av skolbegåvning. Förmåga att handskas effektivt med sin miljö, anpassa sig till omgivningen, samarbeta med kamrater, förmåga till nytänkande, tillämpning av gamla kunskaper i nya situationer och mycket annat som ingår i ett intelligent beteende mäts inte med dessa konventionella test. Intelligensen är således beroende av kontexten, och Sternberg (1982) definierar intelligens som ett målinriktat handlande som är anpassat till omständigheterna.

Threadgill-Sowder (1985) diskuterar matematisk problemlösning i perspektivet individuella differenser och menar att det finns två urskiljbara men ändå delvis övertäckande forskningslinjer. I den första inriktning koncentrerar man sig på problemlösarna, skiljer på "bra" och "dåliga" problemlösare och kartlägger hur de löser olika problem. Krutetskiis (1976) fallstudier av ett antal extremt matematikbegåvade barn är enligt Threadgill-Sowder ett exempel på detta. Den senare tidens intresse för att studera vad som skiljer "experter" från "noviser" när det gäller problemlösning räknar hon också till denna kategori. I den andra riktningen (till vilken hon själv hör) har man försökt identifiera mer allmänna anlag eller individuella egenskaper, t ex rumsuppfattning, som interagerar eller korrelerar med problemlösningsförmågan.

Den genomförda forskningen haft fått stora konsekvenser när det gäller avgränsningen och bestämningen av vad problemlösningsförmåga i matematik innebär, och den har resulterat i att kognitiva faktorer som t ex logiskt tänkande, numerisk förmåga, minne samt spatial och perceptuell förmåga användes som kategorier för att definiera problemlösningsförmåga i matematik. De individuella skillnaderna sätts in i ett undervisningssammanhang av bl a Snow i den s k ATI-forskningen (Aptitude-Treatment Interaction). Snow (se Snow & Yalow, 1982) förenar en analys av individens förutsättningar med en analys av undervisningen och försöker beskriva samspelet däremellan. Snow menar att det finns kvantitativa och kvalitativa skillnader i intelligens som förutsäger avsevärda olikheter i de stilar och strategier som används av människor i inlärningssammanhang. På grundval av individers resultat på olika test och med hjälp av avancerade statistiska metoder studeras vad som kännetecknar olika uppgifter och vilka karakteristiska egenskaper som erfordras för att lösa uppgifterna. Intresset för ATI-forskning var under en

tid mycket stort, men resultaten har enligt Silver (1985) inte infriat förväntningarna och under det senaste decenniet har studier med denna inriktning avtagit. Enligt Silver har ATI-forskningen med avseende på undervisning i matematisk problemlösning inte genererat några användbara resultat.

Syftet inom forskningsansatsen individuella differenser är att kategorisera och sortera människor i olika kategorier. Detta intresse sammanfaller med skolans uppgift att sortera och gradera elever, vilket medför att forskningen om individuella differenser har fått stort genomslag i undervisningen. Forskningsresultaten har i stor utsträckning använts vid konstruktion av begåvnings- och anlagstester och vid utarbetandet av standardprov. Prov och mätinstrument fungerar som kraftfulla styrfaktorer på skolans undervisning. Om man mäter en viss typ av kunskap i ett nationellt test blir effekten att lärarna i sin undervisning väljer att betona dessa moment (se tex Ljung & Pettersson, 1990). De mätinstrument som utnyttjas har således inverkan på hur undervisningen i matematisk problemlösning utformas och påverkar i stor utsträckning lärares och elevers syn på inlärning och kunskap.

Marton, Dahlgren, Svensson och Säljö (1977) beskriver två olika typer av kunskapssyn, den kvantitativa respektive den kvalitativa kunskapssynen.

- En kvantitativ kunskapssyn utmärkes av att kunskap uppfattas som bitar som går att mäta. Det man läst eller hört skall kunna återges och kunskapen är av antingen - eller karaktär, dvs den är rätt eller fel.
- En kvalitativ syn på kunskap innebär att ha en uppfattning om företeelser i verkligheten, att skapa mening, förstå sammanhang, principer och begrepp.

Vid utvärderingen av undervisning i matematik användes oftast test som är inriktade mot att mäta de kunskaper som Marton m fl benämner kvantitativa. Detta förhållande beror troligtvis på flera samverkande faktorer, bl a att de test som mäter kvantitativa kunskaper, särskilt vid större utvärderingar, är lättare att konstruera och analysera. Detta får ofta till följd att det endast är de enkelt mätbara målen som utvärderas och sedan ensidigt tas som kriterium på att ett önskat resultat uppnåtts eller uteblivit. Andra undervisningsmål som exempelvis förståelse av begrepp och principer, förmåga att tolka, tyda och analysera samband och sammanhang som är svårare att mäta men som kanske trots allt är mycket viktigare på längre sikt utvärderas därmed inte. Eftersom testens utformning och innehåll i stor utsträckning styr lärares och

elevers syn på inlärning och kunskap, försvåras på detta sätt en förändring mot en mer kvalitativ syn på kunskap. Kunskapssynen i skolan konserveras och traditionen från Thorndikes dagar med en atomistisk syn på kunskap lever kvar.

BETEENDEVETENSKAPLIGA ANSATSER OCH UNDERVISNINGSTEKNOLOGI

Det finns inga mentala konstruktioner och man behöver inte mentala begrepp. Det är inte vetenskapligt. Så löd budskapet från Skinner (1965) när han på 50- och 60- talet förde ut behaviorismen och undervisningteknologin över världen. Med rötter i Thorndikes reduktionistiska associationsteori och med impulser från Pavlov och Watson, var han den förste radikale behavioristen i USA. Skinner började som experimentalpsykolog och tränade råttor och duvor att utföra de mest komplicerade saker genom att ge djuren lämplig förstärkning vid det rätta önskvärda beteendet. Behaviorismen har ett naturvetenskapligt forskningsideal, dvs man intresserar sig för mätbara data, som skall kunna isoleras och iakttagas helt objektivt. En mekanistisk syn på människan ligger till grund för teorien och man utgår från två grundprinciper, dels en mycket noggrann uppgiftsanalys och dels förstärkning.

Undervisningsteknologin fick ett mycket stort genomslag i undervisningspraktiken. Skinners inlärningsteorier implicerades med stor kraft i undervisningen. Skinner var föregångsmannen när det gällde programmerad undervisning och undervisningsmaskiner. Undervisningen fick en teknologisk inriktning där ett antal kriterier skulle vara uppfyllda för att den rätta inlärningen skulle komma till stånd. Den underliggande idén är att inlärningen skall ske i mycket små steg, så att de rätta stimulus - respons reaktionerna kan utvecklas och befästas. I en programmerad undervisning ställs därför ett stort antal lätta frågor, svar krävs av eleverna, som får förstärkning genom omedelbar bekräftelse på om de svarat rätt eller fel.

Utvecklingen av undervisningsteknologin innebar att stora mängder programmerat undervisningsmaterial producerades och användes i våra skolor. IMU-projektet (Individualiserad matematikundervisning), är ett exempel på dess tillämpning (Larsson, 1973). Forskningen inom den radikala behaviorismen som företräddes av Skinner har numera till stor del avstannat. Den syn på undervisning och inlärning som undervisningsteknologin

representerade kan emellertid fortfarande spåras i en del arbetsböcker och arbetsblad som användes i våra skolor. Det kan finnas en risk för att en ökad datorisering av våra skolor kan medföra att behavorismen återigen får ökad spridning, eftersom en stor del av den mjukvara som produceras för skolbruk i matematik kännetecknas av Skinners syn på inlärning som ett stimulus-respons system där eleverna i stor utsträckning tränar redan inlärda färdigheter (Holmberg & Petterson, 1985).

KLASSRUMSFORSKNING OCH PROCESSFORSKNING

I och med att undervisningsteknologin inte visade sig vara en framkomlig väg för att studera och utveckla teorier om inlärning och undervisning böjde forskningen under 70-talet av i en annan riktning och den läroplansteoretiska forskningen tilldrog sig ett ökande intresse. Undervisnings- och klassrumsforskningen utvecklades och studier gjordes med det dubbla syftet att dels förändra undervisningens utfall, genom att förbättra lärarens kompetens och undervisningsmetoder, dels utfördes studier med avsikten att bidra till metodutveckling och teoribildning inom klassrumsforskningen. De experimentella undersökningarna övergavs till en del och forskningen karakteriserades av empiriska undersökningar av hur undervisningen bedrevs i klassrummen. Socialpsykologiskt anknutna fältstudier som byggde på direkta observationer av händelseutvecklingen i klassrummet var vanligt förekommande. Interaktionen i klassrummet studerades genom systematiska, planerade, objektiva observationer för att klartlägga lärarens agerande och den verbala interaktionen i klassrummet. Ett syfte var, särskilt i den amerikanska forskningen, att beskriva vad som karakteriserar en effektiv lärare och hur en sådan bedriver sin undervisning. Vid datainsamlingen användes olika typer av observationsschema och undervisningen dokumenterades ofta genom ljudbands- eller videoinspelningar.

I Sverige intar Kompass-projektet (Komparativa mål- och processanalyser av skolsystem) en central roll. Projektet genomfördes av Urban Dahllöf och hade bl a som mål att utarbeta en metodik för pedagogisk processanalys. Den teori som projektet ledde fram till visade bl a på hur olika organisatoriska ramar begränsade undervisningens förlopp och därmed formade dess resultat (Lundgren 1983).

De teorier som var ett resultat av Kompass-projektetet vidareutveckades under ledning av Ulf P. Lundgren i Map-projektet (Modellanalyser av pedagogiska processer). Där fördjupades studierna av hur elevgruppens sammansättning formade reglerna för undervisningen och man studerade de skilda sätt på vilka olika elevgrupper deltar i undervisningen. Bland de resultat som framkom kan nämnas att undervisningen dominerades av s k traditionell undervisning. Läraren talar 2/3 av tiden i klassrummet och eleverna tillsammans 1/3. Av denna 1/3 dominerar 4-5 elever 2/3 av tiden, medan de övriga 20-25 eleverna får dela på 1/3 av den tid som upptas av eleverna. Vidare visade det sig att det är en stereotyp kommunikation i klassrummet, och det förekommer en mycket stark läromedelsstyrning av undervisningen. Individualisering sker i termer av kvantitet i stället för kvalitet. Om någon elev är duktig i matematisk problemlösning får han eller hon lösa ytterligare problem av samma sort. Om någon elev inte förstår och ber om ytterligare förklaring av läraren, upprepar läraren samma fråga många gånger, istället för att utveckla problemet och angripa det från ett annat håll (Gustavsson 1984).

I PUMP-projektet (Processtudier av undervisning i matematik/psykolingvistik) analyserades de fyra räknesätten med avseende på nödvändiga färdighetskomponenter (Kilborn,1979). Med hjälp av de s k Pumpmatriserna kunde man för varje uppgift ange vilka delfärdigheter som behövdes för att lösa uppgiften. Eleverna diagnosticerades och utifrån en analys av de uppgifter som man skulle arbeta med under lektionen kunde en prediktion ställas över vilka uppgifter eleverna hade möjlighet att lösa. Det visade sig att en stor andel av eleverna inte hade kunskaper att förstå de uppgifter som de förväntades lösa under lektionen. Man identifierade dessutom i PUMP-projektet det tidigare nämnda lotsningsfenomenet och påvisade att ramfaktorernas begränsande effekt på undervisningen styr kommunikationen mellan lärare och elev i klassrummet.

I klassrumsforskningen står undervisningsprocessen i fokus, och man studerar processer och skeenden i den dagliga undervisningssituation. Forskningen ses som ett instrument att överbrygga klyftan mellan psykologiska teorier och pedagogisk process (Gustavsson 1984). Det är rimligt att anta att dessa undersökningar som utföres i verkliga undervisningssituationer, i större utsträckning än de studier som utföres i experimentsituationer har bäring på undervisningspraktiken och att forskningsresultaten därför i hög grad skulle kunna påverka undervisningsvardagen och

influera läraren till större flexibilitet i undervisningen. I den nationella utvärderingen av matematikundervisningen (Ljung & Pettersson, 1990) framkommer emellertid att den genomförda forskningen inte i någon större utsträckning påverkat undervisningspraktiken. Undervisningen i matematik är starkt teknikinriktad och kännetecknas fortfarande i hög grad av s k traditionell klassrumsundervisning.

COGNITIVE SCIENCE OCH HUMAN INFORMATION PROCESSING

Human information processing är den forskningsinriktning inom vilken den största delen av forskningen om matematisk problemlösning utförts under det senaste decenniet. Information processing har utvecklats under de senaste tjugo åren och brukar införlivas i det vidare forskningsfältet Cognitive Science där man studerar det det mänskliga tänkandet med utgångspunkt från olika vetenskapliga dicipliner som exempelvis lingvistik, psykologi och neurologi. Information processing bygger på datoranalogier vilket innebär att inlärning karakteriseras av att människan mottar, analyserar, lagrar och använder den information som förmedlas av våra sinnen. Minnet beskrivs på tre olika nivåer: sensoriskt minne, kortidsminne och långtidsminne. Det sensoriska minnet är inte är beroende av uppmärksamheten och har mycket kort varaktighet. I korttidsminnet befinner sig den mottagna informationen i ca 20-30 sekunder och informationen kan uppehållas genom att den ständigt uppmärksammas, som exempelvis när man minns ett telefonnummer genom att ihärdigt repetera siffrorna. Repetionen eller övningen bidrar till att informationen lagras i långtidsminnet i form av informationsbitar, som man vanligen beskriver i termer av scripts, schema och semantic networks. Dessa är förbundna med varandra och organiserade till olika representationssystem (se Norman, 1982).

En människas informationsbehandling innehåller både automatiska och kontrollerade processer som styr uppmärksamheten. Informationsbehandlingen byggs ofta upp som flödesschema där tänkandet representeras av procedurer. Med datorn som metafor konstruerar forskare modeller över det mänskliga tänkandet som ger ingående beskrivningar av de olika minnesfunktionernas interaktion (se t ex Osborne & Wittrock, 1983).

Information processing och undervisning i problemlösning

En annan form av informationsbehandling som fokuseras inom ansatsen information processing är de strategier som människor använder som delmetoder och hjälpmedel vid lösningen av olika typer av problem, som t ex att upprepa tal som man skall minnas eller att välja ett sätt att representera ett problem. Kartläggningen av problemlösningsstrategier har inom ansatsen varit i fokus vid studier av matematisk problemlösning. Under de senare åren kan man notera ett ökat intresse för att komplettera de modeller av den matematiska problemlösningsprocessen som framkommit i experimentsituationer med empiriska undersökningar av problemlösning i klassrumssituationer, där man utnyttjar intervjuer, observationer, bandinspelningar och frågeformulär som datainsamlingsmetoder.

Den forskning som utförs om den matematiska problemlösningsprocessen i undervisningssituationer har till stor del influerats av den beskrivning Polya (1945) ger av en lyckosam problemlösning i sin bok *How to solve it*. Problemlösningprocessen kan enligt Polya indelas i fyra faser. Den första fasen innebär att man försöker förstå problemet. I den andra fasen av problemlösningsprocessen utarbetar man en plan. Planen genomförs i den tredje fasen och slutligen i den fjärde fasen kontrolleras det erhållna resultatet. De detaljerade anvisningar som ofta refereras till som Polyas heuristik är olika strategier som man kan använda sig av för att förstå och lösa ett matematiskt problem. Man kan exempelvis gissa och pröva, rita bilder och diagram eller försöka upptäcka analoga problem.

Schoenfeld (1985) har studerat hur elever vid high school och college i USA löser geometriska problem. Han har identifierat fyra betydelsefulla faktorer som i vissa avseenden påverkar varandra vid problemlösningsprocessen och som enligt honom möjliggör en analys av hur en komplex matematisk problemlösning utföres:

- *Resources* innnefattar elevens matematiska kunskap och det sätt på vilket eleverna kan utnyttja och använda sin befintliga kunskap.
- *Heuristics* är de allmänna matematiska problemlösningsstrategier som Polya (1945) introducerade och utvecklade, vilka bl a innefattar att konstruera en tabell eller ett diagram, rita en bild, gissa och kontrollera, jämföra med ett analogt men förenklat problem, söka efter mönster eller använda logiska resonemang. En individs förmåga att använda olika

strategier är enligt Schoenfeld av stor betydelse för problemlösningsprocessens utveckling.

- *Control* utgöres av det sätt på vilket en individ använder sin kunskap och med vilken effektivitet. Matematikprestationer är inte enbart beroende av vad man vet, utan även av hur den befintliga kunskapen används och med vilken effektivitet kunskapen utnyttjas. Kompetenta beslut om hur man skall gå tillväga för att lösa ett problem kan bidra till framgång även om resurserna från början är begränsade. Dåliga beslut leder till misslyckanden trots ansenliga kunskaper.
- *Belief systems* involverar den förståelse av matematik som bestämmer det sociala och psykologiska sammanhang inom vilken eleven utför uppgifterna. Människors syn på sig själva, omgivningen, matematik och uppgiften är avgörande för hur de går tillväga när de löser problem. Beliefs skapar den kontext inom vilken resources, heuristics och control utnyttjas av individen.

Schoenfeld menar att ovanstående kategorisering representerar ett försök att utarbeta en karakteristik över det matematiska tänkandet. För att en individ skall kunna tänka matematiskt erfordras enligt Schoenfeld mer än goda ämneskunskaper. Flexibilitet i tänkandet och individens förmåga att utnyttja den befintliga kunskapen effektivt är av stor betydelse.

Även Lester (1986) som utfört ett stort antal studier av hur elever i secondary school löser matematiska problem betonar vikten av en utvidgad syn på de faktorer som är relevanta vid problemlösning. Problemlösningsförmågan tycks enligt Lester vara en funktion av fem av varandra beroende kategorier av faktorer.

- *Knowledge* utgöres av elevens samtliga kunskaper och färdigheter i matematik och som innefattar både informella och formella kunskaper. Särskilt viktigt är att eleven har tillgång till:
  - faktakunskaper och definitioner, t ex att en kvadrat är en rektangel som har fyra kongruenta sidor eller att 7 är ett primtal
  - kunskap om algoritmer, t ex uppställning för lång division
  - olika problemlösningsstrategier, t ex rita figurer och söka efter mönster
  - kunskap om olika icke algoritmiska metoder som kan leda fram till en lösning av ett problem, t ex olika metoder för att lösa en ekvation

- *Control* innebär att eleven utnyttjar och omfördelar sina tillgängliga resurser i problemlösningssituationen, t ex att eleven beaktar den egna räkneförmågan vid val av räknesätt. Elevens metakognitiva förmåga dvs kunskap om det egna tänkandet och förmågan att kontrollera och styra det egna tänkandet är enligt Lester avgörande för problemlösningsprocessens utveckling.
- *Affects* är attityder och emotionella faktorer. Olustkänslor och negativa attityder till matematik och till situationen påverkar problemlösningsprocessen. En elev kan ha utvecklat en negativ attityd gentemot någon del av matematiken t ex procenträkning som inverkar på elevens prestationer. Även en speciell uppgift kan ge upphov till oönskade attityder och negativ inställning till matematik vilket exempelvis kan inträffa då en elev arbetar under en längre tid med ett problem utan göra nämnvärda framsteg.
- *Beliefs* innefattar individens uppfattning om matematik, sig själv och sin egen problemlösningsförmåga. Det innebär t ex att lågstadieelever vid lösning av benämnda uppgifter kan ha föreställningen att alla uppgifter löses genom att man använder ett eller flera räknesätt, och valet av räknesätt bestäms av "nyckelorden" som finns i texten. Förekommer orden "kvar" respektive "tillsammans" i en uppgift är det självklart för vissa elever att använda räknesätten subtraktion respektive addition utan att försöka förstå det givna problemet.
- *Socio-cultural conditions* står för samhällets påverkan på individens inställning till matematik. Samhällets kollektiva syn på matematik påverkar individens uppfattning av matematik och avgör den enskildes möjligheter att förstå och använda matematik.

Schoenfeld och Lester tar sina teoretiska utgångspunkter i forskningsinriktningen information processing. Detta medför att det föreligger stor överensstämmelse i de båda forskarnas analyser och slutsatser av elevernas problemlösningsprocess och att likheter i de två olika kategorisystemens konstruktion kan urskiljas. De skiljaktigheter som förekommer gäller i huvudsak benämningarna av de kategorier av faktorer som påverkar problemlösningsprocessen. Schoenfeld såväl som Lester anser att det är fler faktorer än den kognitiva förmågan som är av betydelse för elevernas problemlösningsförmåga. Även kunskaper, metakognition, attityder, elevens självuppfattning och socio-kulturella

faktorer har stor betydelse för hur en individs problemlösningsprocess utvecklas.

Forskning om metakognition

Processforskning är också huvudintresset när det gäller den metakognitiva forskningen. Forskningen om metakognition som växte fram under 70- och 80-talen har rönt ett stort intresse. Metakognition kan kort beskrivas som människors förståelse av sina egna tankeprocesser. Det var John Flavell (1976) som inledde forskningen om metakognition, och han är tillsammans med Ann Brown (1978) två av de forskare som kommit att framstå som tongivande inom den metakognitiva forskningen. Det är huvudsakligen inom ansatsen information processing man intresserar sig för metakognition. Studier med anknytning till det metakognitiva forskningsfältet utförs emellertid även utifrån andra ansatser som t ex inom den psykometriska forskningen. Pramling (1987; 1988) har inom den fenomenografiska forskningsansatsens ram i en experimentell studie undersökt barns uppfattningar och reflektioner om skilda undervisningsinnehåll i förskolan. Metakognition studeras med avseende på de skilda sätt som barnen tänker om undervisningsinnehållet, innehållets struktur och sin egen inlärning.

I den metakognitiva forskning som berör undervisning i matematisk problemlösning tas Flavells och Browns beskrivningar av meta-kognition som utgångspunkt. Garofalo och Lester (1985) menar att metakognition har två skilda men relaterade aspekter (a) kunskap och uppfattningar om kognitiva fenomen och (b) styrningen och kontrollen av kognitiva handlingar. Enligt Garofalo och Lester fångar Flavells beskrivning av metakognition de här två olika aspekterna.

> Metacognition refers to one's knowledge concerning one's own cognitive processes and products or anything related to them, e.g. the learning-relevant properties of information or data. Metacognition refers, among other things, to the active monitoring and consequent regulation and orchestration of these processes in relation to the cognitive objects on which they bear, usually in the service of some concrete goal or objective. (Flavell, 1976, s 232)

(a) Kunskap om kognition refererar till vad en person vet om kognitiv förmåga, kognitiva processer och kognitiva resurser i förhållande till en specifik kognitiv uppgift. Kunskap om kognition

kategoriseras utifrån om den har bäring på *person, uppgift* eller *strategi*. Kunskap i detta sammanhang inkluderar även individens subjektiva uppfattningar.

Metakognitiv kunskap som innefattas i *person*-kategorin handlar om vad man har för uppfattningar om sig själv och andra människor som kognitiva varelser. Ett exempel på detta är att äldre barn i förhållande till yngre barn mycket bättre kan förutsäga hur de skall lyckas på en seriell minnesuppgift. Kunskap som faller inom kategorin *uppgift* inkluderar kunskap om uppgiftens omfattningen och krav, såväl som kunskap om de faktorer och villkor som bestämmer att somliga uppgifter är svårare än andra. 9- och 10-åringar kan bättre än 7-åringar förutsäga, att det är lättare att minnas ett antal saker som är kategoriserade än ett antal saker som inte är kategoriserade. Metakognitiv kunskap om *strategier* innebär att man har kunskap om generella och specifika kognitiva strategier i förening med deras potentiella användbarhet när det gäller att angripa och lösa vissa uppgifter. Den metakognitiva aspekten av denna kunskap är att veta var, när och hur strategierna skall användas. Ett exempel på detta är att äldre barn kan tänka ut mer minnesknep och minnesstrategier och arbeta mer planenligt än yngre barn.

(b) Reglering av kognition är den andra aspekten av metakognition. Exemplen ovan visar att kunskap om uppgiften och kunskap om strategier interagerar och vidare att kunskap influerar beslutet att använda en specifik strategi, dvs denna kunskap gör att man kan styra förståelsen av uppgiften och reglera användandet av olika strategier. Vanligtvis är regleringen av kognitionen avhängig en mängd olika beslut och strategiska aktiviter som man använder när man arbetar med kognitiva uppgifter och problem. Exempel på sådana aktiviter är att välja strategier för att förstå ett problems natur, planera olika vägar för hur man skall handla, välja passande strategier för att fullfölja planer, utvärdera resultatet av strategier och planer. Dessa metakognitiva beteenden korresponderar med mer generella funktioner som tillskrivs de exekutiva komponenterna i vissa information processing modeller. De har också anknytning till uppfattningar och modeller av matematisk problemlösning som t ex Polyas heuristiska problemlösningsmodell.

Garofalo, Kroll och Lester (1985) har med influens från Polya, Schoenfeld, Sternberg och även till viss del från den ryske forskaren Luria gjort en modell för ett kognitivt- metakognitivt ramverk. Det innefattar fyra olika aktiviteter som är involverade vid en

problemlösningsprocess: problemorientering, organisation, utförande och verifikation.

- *Problemorientering* innefattar de strategier man använder för att förstå problemet. Det kan exempelvis vara analys av informationen och villkoren i problemet.
- *Organisation* är när man planerar vad man skall göra och väljer de handlingar man skall utföra. Det kan t ex vara att identifiera mål och delmål, samt göra en övergripande och en avgränsad planering.
- *Utförande* är regleringen av de handlingar man väljer för att slutföra planerna. Det kan innebära på vilket sätt man man utför den avgränsade planeringen och styr framåtskridandet i riktning mot de avgränsade och övergripande målen.
- *Verifikation* innebär utvärdering av de gjorda besluten och resultaten av de utförda planerna. T ex när man undersöker om man gjort en adekvat representation, om det har funnits överensstämmelse mellan handlingar och planer i lösningsproceduren och om det finns överensstämmelse mellan det slutliga resultatet och problemets villkor.

En stor del av forskningen om matematisk problemlösning har varit inriktad mot att identifiera elevernas olika feltyper och missuppfattningar och mot att beskriva vad som skiljer en expert från en novis i syfte att synliggöra ett expertförfarande och därigenom möjliggöra för noviserna att tänka och agera på samma sätt som experterna. Lester (1988) anknyter till forskningen om noviser och experter, i en diskussion om vad som skiljer den avancerade problemlösaren från novisen när det gäller de olika faserna av problemlösningsprocessen. Experten inriktar sig enligt Lester mot att förstå problemet och lägger ner mycket tid på att göra en plan över hur problemet skall lösas. Utförandefasen tar inte lång tid eftersom de strategier och uträkningar som behövs för att lösa problemet redan är planerade. Granskningen och utvärderingen är ständigt aktuell för en god problemlösare, vilken fortlöpande värderar olika strategier och kontrollerar de genomförda uträkningarna. Slutligen görs en bedömning om resultatet är rimligt, om svaret ger lösningen på problemet, och om den valda strategin var den riktiga. En novis däremot lägger inte ner mycket tid på att försöka förstå problemet, planerar inte sitt handlande utan inriktar sig mot att göra uträkningar som går jämt ut och som är lämpliga för talen i problemet. Uträkningarna utförs planlöst och utförandefasen är den fas som tar längst tid i anspråk.

Utvärderingen kan för en novis helt enkelt bestå i att se efter i facit om svaret är rätt.

Schoenfeld (1985) har skapat ett schema för analys av intervjuprotokoll, där han för att kunna analysera olika problemlösningsansatser utgår från de händelser och tidpunkter i problemlösningsprocessen där beslut fattas. Händelserna inkluderar läsning, analys, upptäckande, planering, implementation och verifikation. Det är i övergången mellan dessa händelser som metakognitiva beslut kan ha kraftfull effekt på lösningsförsöken. I *What's all the fuss about metacognition?* menar Schoenfeld (1987) att de elever som har en utvecklad metakognitiv förmåga är bra på att argumentera med sig själva och ställa hypoteser. Han stöder sig på Vygotsky (1978) när han framhåller att den metakognitiva förmågan utvecklas i en interaktion med andra människor.

Information processing har fått ett mycket stort genomslag när det gäller forskningen om matematisk problemlösning. Enligt Groen och Kieran (1983) beror detta på ansatsen är lämplig för "bottom up" analyser. Teorierna eller modellerna genereras då av särskilda uppgifter. Således kan man utifrån denna ansats ta vilken del av matematiken som helst och utifrån specifika uppgifter analysera matematisk problemlösning. Ansatsen är därför enligt Groen och Kieran mycket användbar när det gäller att konstruera modeller och teorier. Detta är att troligtvis en av anledningarna till att den matematiska forskning som utföres inom information processing är mycket omfattande i förhållande till de insatser som görs inom andra forskningsansatser.

Frågeställningen om ansatsen ter sig fruktbar när det gäller att implicera forskningsresultaten i undervisningen i matematisk problemlösning är fortfarande obesvarad. De erfarenheter människor gör i livet och som får till följd att man i vardagslivet i olika situationer kan hantera och förstå matematiska problem, ryms inte i de datoranalogier över det mänskliga tänkandet som utmärker den forskning som utföres inom information processing Det stora intresset för processer och handlingsstrategier resulterar för undervisningens del i att olika typer av problemlösningsstrategier fokuseras. Det framhålls att det väsentligaste för inlärning i matematisk problemlösning är att eleverna lär sig att utnyttja olika strategier och tillägnar sig metakognitiva färdigheter i form av heuristiska tekniker. Forskningen har därför resulterat i att lärarna har erbjudits olika uppsättningar av problem, listor över problemlösningsstrategier och förslag till olika klassrums-

aktiviteter. Enligt Lester (1988) har detta i USA emellertid inte i någon större utsträckning påverkat skolans undervisning i matematisk problemlösning.

KONSTRUKTIVISM

Det stora intresset för processforskning har beledsagats av en tillbakagång för intresset omkring Piagets teorier om det matematiska tänkandet vilka för något decennium sedan dominerade forskningsfältet. Många forskare utvidgade Piagets teorier eller omtolkade dem, medan andra ställde Piagets teoribyggnad i kritisk belysning och menade att Piagets frågor är relevanta att ställa, men att svaren inte tolkats på ett adekvat sätt. (Donaldson, 1978; Boden, 1979; Gelman & Gallistel, 1983). Den forskning som varit inriktad mot att verifiera eller falsifiera Piagets stadieteori har idag avtagit. Ett ökat intresse kan emellertid märkas för att studera inlärning i matematik och utvecklingen av den matematiska problemlösningsförmågan med utgångspunkt i olika former av konstruktivistiska förklaringsmodeller.

Konstruktivism beskrivs dels som inriktning inom den kognitiva psykologin, där utgångspunkten tas i den teori om kunskap och lärande som Piaget utformade och dels som ett större filosofiskt ramverk som behandlar kunskapens ursprung och natur (se von Glasersfeld 1987).

Piaget menade att människor inte kan nå kunskap om världen direkt genom sina sinnen, utan det är först och främst genom våra handlingar som kunskap skapas. Handlingar för med sig en förändrad syn på omvärlden och en förändring av människors relation till världen. Det är i människans kroppsliga handlingar och mentala akter som kunskapen konstrueras. Denna syn på inlärning står i skarp kontrast till en en empiristisk uppfattning där kunskap antas komma från den yttre verkligheten. Piaget (1969; 1970) beskriver kunskap som bestående av mentala strukturer. Genom våra handlingar och mentala akter uppkommer en mängd tranformeringar av strukturerna. De viktigaste transformationerna är de som är reversibla, vilka Piaget benämner operationer. Det är endast när barn förmår utföra reversibla transformationer (operationer), som de har förutsättningar att tillägna sig matematisk förståelse. Indikationen på att barn kan utföra operationer är enligt Piaget att de kan konservera kontinuerliga och diskontinuerliga kvantiteter. Detta innebär

exempelvis att barnen förstår att volymen av en vätska i ett glas inte är beroende av glasets form eller att antalet träkulor i en mängd inte beror på pärlornas spridning i rummet.

Piagets intresserade sig inte för praktiska tillämpningar av sin teori, men trots detta har hans forskning fått betydelse i undervisningspraktiken. I första hand har teorierna influerat förskolans och lågstadiets pedagogik där Piagets stadieteori haft inflytande genom att mognadens roll för inlärningen betonats. Betydelsen av att använda manipulativt material i undervisningen i matematik har kraftigt understrukits samt även vikten av att all inlärning sker i en stimulerande miljö. När det gäller att studera och förklara barns förmåga att lära matematiska begrepp och färdigheter har däremot de piagetanska teorierna inte erbjudit mycket hjälp, trots att det förekommer en hög korrelation mellan barns förmåga att lösa de piagetanska uppgifterna och deras aritmetiska förmåga (Hiebert & Carpenter, 1982).

Von Glasersfeld (1987) menar att Piagets tänkande i grunden är konstruktivistiskt. I första hand är emellertid konstruktivismen en filosofi om kunskap vilken står på en rationalistisk grund, och som innefattar hur människan erhåller kunskap, människans relation till världen och människors försök att genom erfarenheter organisera världen. De grundantaganden om kunskapens natur och människans skapande av kunskap som von Glasersfeld (1987) anser utmärker en konstruktivistisk syn på kunskap och lärande är:

- Kunskap konstrueras aktivt av den tänkande människan och erhålles inte passivt från omgivningen.
- Att bygga upp kunskap är en adaptiv process, som organiserar den upplevda världen: Skapandet av kunskap innebär inte en upptäckt av en oberoende, på förhand existerande värld, utanför människan.

Man brukar skiljas på "trivial" eller "enkel" konstruktivism och "radikal" konstruktivism. I den förra omfattar man enbart det första av ovanstående påstående medan man i den radikala konstruktivism, som von Glaserfeld företräder, omfattar båda principerna. Den lärande *får* således inte kunskap, utan konstruerar kunskapen själv och inlärning ses som en process där människan anpassar sin syn på världen till resultatet av sina mentala konstruktioner. En konstruktivistisk position i förhållande till kunskap och lärande innebär således att vi aldrig kan uppnå en objektiv sanning även om den existerar. Det vi kan göra är att sträva efter att förklara vad vi observerar och identifiera teorier som passar våra observationer.

Von Glasersfeld (1987) hävdar att konstruktivismen i en vidare bemärkelse som filosofi har betydelsefulla konsekvenser för undervisningen i matematik. Kilpatrick (1987) bemöter denna uppfattning och diskuterar fem konsekvenser för undervisningspraktiken vilka följer av den radikala konstruktivistiska position som von Glasersfeld för fram:

1. Undervisning som syftar till att eleverna skall skapa förståelse av ett undervisningsinnehåll är helt skilt från träning (som leder till att eleverna lär sig att repetera lärarens lösningsmetoder).
2. Mentala processer blir mer intressanta än elevernas yttre agerande.
3. Språklig kommunikation blir en process där läraren leder elevernas inlärning och inte en process för att överföra kunskap.
4. De sätt på vilka eleverna i sitt agerande avviker från de förväntningar läraren ställer, kan i undervisningen användas som ett medel för läraren att förstå elevernas försök att förstå.
5. Undervisningsintervjuer blir medel inte bara för att kartlägga kognitiva strukturer utan också för att förändra dem.

Kilpatrick (1987) menar att principerna för undervisningspraktiken är helt förenliga med den radikala konstruktivismens grundantaganden om kunskapsbildning och inlärning. Det är emellertid möjligt att utifrån andra kunskapsteorier komma fram till samma principer, och Kilpatrick drar slutsatsen att även om man ansluter sig till ovanstående principer för undervisning innebär det inte att man ansluter sig till konstruktivismen. Ytterligare synpunkter som Kilpatrick framför är att om den kunskap som framkommer i den konstruktivistiska forskningen skall kunna tillföras undervisningspraktiken, och om man skall kunna kommunicera med praktiserande lärare, måste den genomförda forskningen bli mer förbunden med de matematiska undersökningar som utförs i det vardagliga vetenskapliga arbetet samt även förbindas med den undervisning i matematik som bedrivs i klassrummen.

Jaworski (1990) uttrycker i polemik mot Kilpatrick (1987) att huruvida de fem konsekvenserna är resultatet av ett konstruktivistiskt tankesätt, eller om de endast är principer som stöds av konstruktivismen, är av mindre betydelse än det sätt på vilket konstruktivism kan influera uppfattningar om undervisning

och inlärning i matematik. De två första punkterna innebär att kunskap inte passivt erhålles från läraren utan att eleverna själva aktivt konstruerar kunskapen. Läraren ses som en förmedlare mellan eleverna och matematiken. I pragmatiska termer kan detta uttryckas som att läraren har ansvar för att tolka lärostoffet, presentera kursplanen och garantera att eleverna åstadkommer sitt bästa vid prov och examinationer. Detta innebär att det i undervisningen måste förekomma en kommunikationen mellan elever och lärare, så att läraren blir insatt i elevernas kunskapsutveckling.

Skapandet av kunskap är en adaptiv process som organiserar människans erfarna värld och som innebär att man inte upptäcker en oberoende förexisterande värld utanför människan. I de traditionella tester som används för att utvärdera elevers matematiska kunskaper förutsätts ofta en sådan förexisterande matematisk värld. Om ett testningsförfarande verkligen skall blottlägga den förståelse som eleverna bygger upp är emellertid inte stereotypa tester tillräckliga. Läraren måste på något sätt få tillgång till elevernas tänkande. Jaworski menar att punkterna två till fem ovan är relaterade till detta. Kommunikationen i undervisningen blir mycket betydelsefull. Läraren skall uppmuntra eleverna att tala och lyssna, se till att eleverna får tillfälle att lyssna och tala till varandra, uppmuntra eleverna att ge uttryck för olika typer av förståelse utan rädsla för att svara dumt eller fel. Läraren behöver använda elevernas missförstånd för att få insikt i deras föreställningar och kunskapsuppbyggnad.

Undervisningsintervjuer utformades som ett forskningsverktyg för att undersöka hur eleverna tänker och hur de bygger upp kunskap. Det är inte helt lätt att överföra undervisningsintervjuer till en klassrumsmiljö där lärarna anser att det är svårt att under en längre tid tala med endast en elev. Emellertid kan en modifierad form av undervisningsintervjuer användas vid varje tillfälle när en lärare talar med en eller flera av eleverna i klassrummet. Läraren skall vid samtalen söka efter inkonsekvenser i elevernas tänkande, så att de kan besvara frågor eller erbjuda aktiviteter som kan blottlägga svårigheterna och utmana elevernas missförstånd.

Enligt Jaworski (1990) erbjuder inte konstruktivismen läraren ett universalmedel för att hantera frågor om undervisning och inlärning, däremot kan det konstruktivistiska tänkandet ge läraren en insikt om de svårigheter eleverna möter och varför det inte är enkelt med matematisk förståelse. Om inlärning betraktas som en kontinuerlig förståelseakt och inte ses utifrån perspektivet att

eleverna skall ta emot en förutbestämd kvantitet matematisk kunskap, finns det förutsättningar för att klassrumsmiljön kan bli inriktad mot att skapa en sammanhängande begreppslig förståelse för matematik hos eleverna.

SITUATED COGNITION

Barn bygger själva upp en ansenlig mängd matematisk kunskap i sitt vardagsliv och vid skolstarten kan de använda ett stort antal olika lösningsstrategier när de löser aritmetiska problem (Ginsburg, 1982). Den typ av matematik som användes av grupper av barn i olika åldrar i olika sociala kontexter och den matematik som användes av vuxna människor i olika kulturella grupper kontrasteras i många undersökningar till den formaliserade skolmatematik som tar sin utgångspunkt i matematik som en akademisk disciplin. Den traditionella uppläggningen av innehållet i skolmatematiken anses ibland vara ett hinder för inlärning i matematik, eftersom man inte uppmärksammar och värderar den matematik som människor använder i sitt vardagsliv (Bishop, 1988; D'Ambrosio, 1985). En stor mängd forskning har under senare år vuxit fram där man studerar hur människor använder matematik när de löser problem i vardagssituationer i olika sociala kontexter. Studierna är influerade av antropologisk forskning och man undersöker med etnografiska metoder hur människor löser problem i sin dagliga verksamhet. Datainsamlingen bygger på deltagande observation, där observatören successivt försöker förstå vad som pågår i den situation som studeras. Det ställs inte några krav på absolut objektivitet och i motsats till vad som är vanligt i klassrumsforskning användes inte observationsschema. De lågstrukturerade direkta observationsmetoderna gör det möjligt att upptäcka nya och oväntade händelser, identifiera kritiska situationer och skapa en helhetsbild av den studerade problemlösningssituationen.

Inom den framväxande teoribildningen "situated cognition" står det tänkande som är kontextbundet till de specifika situationer i vilka problemlösningen utföres i fokus för intresset. Forskningen inom detta fält har till en del ägnats åt att studera hur vuxna använder matematik för lösa problem i sin dagliga verksamhet (Scribner 1984). Skillnaden mellan matematisk skolkunskap och de beräkningmetoder människor utnyttjar i vardagssituationer har undersökts av Lave (1988), som bl a studerat hur den aritmetik människor använder i en vardaglig inköpssituation skiljer sig från

den formella skolmatematiken. Enligt Lave karakteriseras problemlösningssituationer i vardagslivet av att kontexten är välbekant och att det språk vi använder har en tydligt definierad innebörd för oss. Dessutom är problemlösningen målrelaterad och lösningsprocessen är "dilemma driven" dvs den drivs framåt av att vi successivt ställs inför oförutsedda händelser där vi omedelbart måste fatta beslut. Matematik i vardagslivet utvecklas således i en dialektik mellan ett tänkande som är avhängigt kontexten och människors handlande i själva lösningssituationen. Lösningsprocessen förändras mycket ofta i den aktuella situationen, eftersom individens aktivitet i relation till problemet skapar konflikter för individen, vilka bidrar till lösningen av problemet.

I en del studier har man även undersökt barns användning av matematik utanför skolan. Carraher och hennes kollegor i Brasilien har studerat de informella procedurer barn använder för att lösa problem (Carraher, Carraher & Schliemann 1985). Vid studiet av skolungdomar mellan 9 och 15 år, som arbetade arbetade med gatuförsäljning fann man att ungdomarna i sin dagliga verksamhet kunde lösa beräkningsproblem som de oftast misslyckades när problemen presenterades för dem i skolan. Carraher menar att orsaken till ungdomarnas överlägsna beräkningsförmåga i vardagssituationer var att de då förlitade sig på huvudräkning vilken var direkt relaterad till de föremål eller objekt som var involverade i problemlösningssituationen. Priset på 10 kokosnötter beräknas exempelvis utifrån kunskapen om att tre stycken kostade 105 cruzeidos. Därav följer att priset på 10 kokosnötter är 3x105+35. I motsats till denna lösningsmetod var ungdomarnas försök att lösa mer formella skolliknande problem enbart begränsade till manipulationer med inlärda symboler och generella metoder. Resultaten av studien står enligt Carraher m fl i konflikt med de implicita pedagogiska antagandet att man i skolan skall lära elever matematiska operationer som de senare skall använda i verbala problem och för att lösa problem i vardagslivet. Carraher m fl drar inte slutsatsen från sina resultat att skolmatematiken inte erbjuder rika och kraftfulla redskap som kan användas vid problemlösning utanför skolan. Det som ifrågasättes är det sätt på vilket undervisningen i matematik bedrivs i skolan. Man föreslår att lärare istället för att lära ut procedurer och matematiska operationer skall söka efter vägar att introducera den formella matematiken i kontexter, där skolmatematiken bekräftas av elevernas vardagstänkande.

Resnick (1987) har studerat skillnaderna mellan elevers sätt att tänka utanför skolan och deras sätt att tänka i en skolsituation. Hon diskuterar nedanstående problem utifrån de lösningmetoder som en grupp barn kan tänkas använda när de i en affär ställs inför problemet, och jämför med de metoder barnen använder om problemet presenteras i skolan.

> An ice cream cone can be bought for 60 cent and you have a quarter, a dime and two pennies. How much more money do you need to buy the cone?

En praktisk vardaglig lösning på detta problemet innebär enligt Resnick troligtvis att man tittar i fickorna efter en quarter eller kanske någon kombination av nickels och dimes, så att det blir en quarter som man kan lägga till den quarter och dime som man har. När problemet presenterades för elever i fourth grade tolkade några av eleverna det som en beräkningsövning och räknade 25+10+2=37 och därefter 60-37=23. De numeriska beräkningarna är korrekta, men i verkliga vardagsproblem är det inte förnuftigt att slösa tid på att genomföra den exakta beräkningen och sedan lägga ihop några kombinationer av mynt för att få tjugotre cent. I vardagssituationer som involverar matematik är det oftast inte rimligt att använda de standardiserade procedurer som läres in i skolundervisningen.

I den matematik som utföres i skolan menar Resnick (1987) att det enbart handlar om individuellt tänkande och skolundervisningen mestadels inriktas mot kognitiva symbolmanipulationer, som syftar till ett lärande som kan generaliseras och användas i olika situationer. Eleverna är i skolan inte beroende av varandra i problemlösningssituationen, vilket däremot oftast är fallet när de löser problem i vardagslivet. I vår dagliga verksamhet är det relativt ovanligt att vi löser problem eller utför komplexa uppgifter på egen hand. Om vi ställs inför uppgifter som är svåra att lösa, diskuterar vi oftast problemen med andra människor. Det är dessutom ovanligt att vi är involverade i problemlösning i vardagslivet, utan att använda verktyg eller situationsspecifika redskap. Det finns således enligt Resnick en djup klyfta mellan den problemlösning som elever möter i skolan och den problemlösning de utför i vardagslivet.

En mer ingående analys av kontextens betydelse för tänkandet utföres av Säljö (1989) som diskuterar hur villkoren för kunskapsbildningen förändras i och med att skolan övertar den centrala rollen för kunskapsförmedlingen. I ett skolsammanhang dekontextualiseras inlärningen, dvs löses från ett direkt samband

med de vardagliga situationer där färdigheterna naturligt ingår. Från en inlärningspsykologisk utgångspunkt framkommer en viktig skillnad, mellan den inlärning som sker utanför skolan i vardagliga sammanhang och den inlärning som kommer till stånd inom skolan, därigenom att i en skolsituation är inlärningen medveten och ett mål i sig medan lärandet i vardagliga sammanhang i allmänhet är en del i ett förlopp med andra syften. I den institutionaliserade miljön utvecklas speciella och delvis nya sätt att förhålla sig till världen och använda språket.

En serie studier har genomförts där man undersökt hur skolan som verksamhet styr och påverkar elevers sätt att utveckla perspektiv genom att studera hur elever förstår och tolkar aritmetiska problem (Säljö & Wyndhamn, 1987). Grundprincipen vid undersökningarna var att en konflikt introducerades mellan det sätt på vilken en uppgift i klassrumssituationen presenterades för eleverna och uppgiftens matematiska innebörd. En studie genomfördes där eleverna i ett antal mellanstadieklasser i åk 6 skulle lösa en divisionsuppgift där rubriker och instruktioner i varierande utsträckning inriktade elevernas uppmärksamhet mot att utföra en multiplikation.

Resultaten visar på en stark känslighet hos elever för de förutsättningar för problemlösningen som den vilseledande rubriken innebär. Klasslärarna ombads med avseende på elevernas prestationer i matematik att dela in eleverna i tre grupper med hög- medel- och lågpresterande elever. Om utfallet relateras till denna gruppindelning finner man att de högpresterande eleverna i motsats till de övriga grupperna inte förleds av den vilseledande rubriken. En viktig aspekt som enligt Säljö och Wyndhamn framkommer av detta resultat är att vad som anses vara skillnader i matematikförmåga egentligen handlar om att ha mer kapacitet att avskilja mångtydiga kommunikativa situationer än att hantera matematiska algoritmer. Det finns en skillnad i elevernas ansatser vid problemlösningen. De högpresterande eleverna tycktes i större utsträckning än de medel- och lågpresterade elever vara inriktade mot att fastställa problemets innebörd och fråga sig vilken typ av uppgift det är frågan om och vad som kan utgöra en lösning av detta problem. När eleverna har den inriktningen vid problemlösningen kan de medvetet göra problemlösningen tvådelad, dels fråga sig hur problemet skall förstås, dels hur det skall lösas i mer teknisk mening.

Att identifiera och förstå problemet är således inte enbart en fråga om att kunna räkna ut rätt svar, utan snarare att hantera hela

situationen. I de flesta pedagogiska sammanhang finns det en tendens att uppfatta det sista ledet - lösningsfärdigheterna - som det problematiska och det som skall läras ut, medan detta exempel kan tolkas som att det är första ledet som bereder svårigheter. Elevens känslighet för och inriktning mot att växla mellan meningsnivåer, bidrar till hennes förmåga att lösa uppgifterna i den institutionella miljön och detta i sin tur uppfattas av lärarna som uttryck för "högprestation". Mellanstadielärarens sätt att uppfatta elever som förmår hantera motstridiga kommunikativa signaler som högpresterande (och de som inte förmår det som lågpresterande), kan ses som ett konkret uttryck för att barnen i sin egenskap av elever möter ny kommunikativ praktik med andra premisser för förståelsen av världen. Denna nya praktik är enligt Säljö (1989) inte primärt inriktad på förmedling av kompetens för hanterandet av vardagens problem utan är inriktad mot abstrakt reflektion och symbolisk verksamhet. Skolan som institution utvecklar således sina egna perspektiv och egna sätt att prioritera.

Om det förhåller sig så att skolundervisningen inte är inriktad mot att utveckla elevernas kompetens att hantera vardagens problem utan istället är inriktad mot abstrakt reflektion och symbolisk verksamhet föreligger en motsättning mot läroplanens mål och riktlinjer för matematikundervisningen. I läroplanen (Lgr 80, s 98) uttrycks att undervisningen i första hand syftar till att eleverna skall tillägna sig god förmåga att lösa de matematiska problem som förekommer i vardagslivet. Ett försök att överbrygga denna konflikt kan spåras i den "situationsmatematik" som Unenge (1989) med influens från ethnomatematikern D'Ambrosius (1985) introducerar. Enligt Unenge är det viktigt att i skolundervisningen skapa situationer där eleverna möter matematik i en omgivning som stöder och underbygger inlärningen av matematiska begrepp och principer. Med hänvisning till ett engelskt projekt där man studerat undervisning i historia kontrasterar han två synsätt på ett skolämne, där ämnet å ena sidan kan ses som "a body of knowledge" och å andra sidan som "a form of knowledge". I det första synsättet ses skolmatematiken som en logiskt ordnad information vilken eleverna skall lära sig i en korrekt ordning. Det andra synsättet innebär att eleverna skall ges tillfälle att upptäcka matematik och försättas i situationer som ger dem motiv och intresse för att söka matematisk kunskap.

Skolundervisningens fjärmande från ett naturligt inlärningsförlopp som sätts under belysning av många forskare inom ansatsen situated cognition, kan emellertid inte enligt min uppfattning, tas

som en indikation på att eleverna inte skall presenteras för den formella skolmatematiken. I vardagslivet utvecklas inom vissa områden en avsevärd matematisk kompetens, som emellertid är situationsbunden. För att den skall kunna användas och utvecklas erfordra att den är direkt knuten till de objekt eller föremål som användes som redskap vid tänkandet. Målet för skolundervisningen i matematik är dock att eleverna skall lära sig behärska matematikens formella språk i vardagliga situationer, där det i kraft av sin höga abstraktionsnivå och hanterandet av symboler utgör ett kraftfullt verktyg vid problemlösning. Om eleverna skall lära sig att generalisera sina matematiska kunskaper och använda dem i skilda problemsituationer erfordras en successivt ökande grad av abstrakt reflekterande och hanterande av symboler i undervisningen. De slutsatser som kan dras från den forskning som utförts inom ansatsen situated cognition blir då att man bör ifrågasätta det sätt på skilda undervisningsinnehåll introduceras i skolmatematiken. Den formella matematiken presenteras ofta för elever genom att procedurer och matematiska operationer förevisas i undervisningen. Ett alternativt sätt borde vara att i den inledande matematikundervisningen presentera det formella matematiska språket i kontexter, där skolmatematiken inledningsvis bekräftas av elevernas vardagstänkande.

Inom fortbildnings- och utvecklingsarbetet tas initiativ som syftar till att knyta skolmatematiken närmare vardagsmatematiken, och skapa broar mellan elevernas problemlösning i vardagen och i skolan. Det sker exempelvis genom att matematisk problemlösning integreras med andra ämnen som t ex slöjd eller hemkunskap. Eleverna ges då tillfälle att att utveckla sitt matematiska tänkande i autentiska problemlösningssituationer, och att upptäcka att matematik är ett redskap som är användbart vid skilda former av problemlösning.

FENOMENOGRAFI

Det projekt som kommer att beskrivas i denna framställning är utfört inom den fenomenografiska forskningsinriktningens ram, vilket medför att ansatsen ingående behandlas i metodkapitlet. I det följande ges därför en allmän, inledande orientering om den fenomenografiska forskningsansatsen.

Fenomenografi är en empirisk, kvalitativ forskningsansats där man beskriver aspekter av den erfarna världen, dvs man beskriver,

analyserar och försöker förstå hur människor upplever och förstår sin omvärld.

> Phenomenography is about the qualitatively different ways in which people experience or think about various phenomena. (Marton, 1981, s 5)

En huvudtanke i fenomenografin är att det inte finns en given omvärld som uppfattas lika av alla människor. Människor uppfattar saker och ting på olika sätt på grund av skiftande erfarenhet, perspektiv och sammanhang och det är i en relation mellan människan och världen som uppfattningen framträder. Uppfattningar avser alltid någon avgränsad aspekt av omvärlden och är innehållsliga till sin natur, dvs de är alltid uppfattningar av något. Fenomenografi är inte inriktad mot individer som uppfattar aspekter av omvärlden, inte heller mot objektet i denna omvärld, utan mot själva uppfattandet och uppfattningarna i sig (se Kroksmark, 1987 s 232). Ett huvudtema i fenomenografin är att varje aspekt av omvärlden kan upplevas eller uppfattas med ett begränsat antal kvalitativt olika innebörder och syftet med den fenomenografiska analysen är att empiriskt blottlägga variationen av innebörder av skilda aspekter i omvärlden. En systematisering av de uppfattningar som framkommit inom ett innehållsligt område resulterar i ett antal beskrivningskategorier i vilka man sammanför uppfattningar som är kvalitativt lika. Samtliga beskrivnings-kategorier sammanställs slutligen i ett utfallsrum som representerar den variation av kvalitativt skilda uppfattningar av ett innehållsligt område som framkommit vid tolkningen av det empiriska materialet samt relationen mellan dessa uppfattningar (se Svensson 1989).

Den fenomenografiska forskningsansatsen har utvecklats av INOM-gruppen (Inlärning och omvärldsuppfattning) vid Pedagogiska institutionen vid Göteborgs universitet under ledning av Ference Marton. Det har utförts ett stort antal studier inom olika innehållsliga domäner av hur människor uppfattar sin omvärld. Enligt Marton (1988) kan man i den genomförda forskningen finna tre huvudriktningar. En första riktning omfattar innehållsrelaterade studier som fokuserar allmänna aspekter av inlärning, såsom relationen mellan inlärningsprocessen och dess utfall. Säljö (1982) visar att utfallet av en inlärningsprocess är relaterad till de lärandes skilda förhållningssätt till inlärnings-uppgiften, och är avhängigt såväl det sätt på vilket uppgiften och kontexten uppfattas av den lärande, som den lärandes uppfattning av vad inlärning innebär.

I en andra riktning har inlärningsprocessen inte särskilt uppmärksammats, utan studierna har behandlat människors uppfattningar av företeelser i omvärlden som inte varit föremål för formell undervisning. Ett exempel är Themans (1983) studie av hur människors uppfattar politisk makt.

I en tredje riktning återfinns studier där individers uppfattningar av ett undervisningsinnehåll befinner sig i fokus för intresset. Dahlgren och Olsson (1985) har studerat barns perspektiv på läsning och Renström (1988) har undersökt högstadieelevers uppfattningar av materia.

Den aktuella undersökningen kan införlivas i denna tredje riktning av fenomenografiska studier. Riktningen betecknas av Kroksmark (1987) som fenomenografisk didaktik och har till uppgift att beskriva och analysera de skilda uppfattningar av olika undervisningsinnehåll som kan påträffas empiriskt. I studier av inlärning och problemlösning som gjorts inom den fenomenografiska forskningsansatsen beskrivs uppfattningar i termer av ett uppfattat innehåll, och inlärning ses som kvalitativt förändrade uppfattningar av samma innehåll. I en explorativ studie kartlade Lybeck (1981) hur gymnasieelever bildar kunskap om matematiska och fysikaliska begrepp. Undersökningen är en föregångare till den av Kroksmark (1987) definierade fenomenografiska didaktiken. Utifrån ett ämnespedagogiskt intresse klargör Lybeck skilda aspekter på den gradvisa förändringen från en vardagsfysikalisk uppfattning till ett vetenskapligt fysikaliskt synsätt. Denna förändringsprocess utgör ett kärnproblem för de begreppsmässiga svårigheter eleverna möter i undervisningen. Elevernas uppfattningar av ämnesinnehållet utgör i Lybecks studie ett reellt undervisningsinnehåll genom att elevernas olika uppfattningar av ämnesinnehållet konfronteras i de dialoger omkring ett presenterat problem som eleverna för med varandra och med läraren. Konfrontation av olika tankeformer[1] leder till kognitiva konflikter, dvs de motsägelser mellan olika uppfattningar som samtidigt kan

[1] Theman (1983) diskuterar Lybecks (1981) principiella användning av begreppen uppfattning och tankeform. Med tankeform menar Lybeck strukturella aspekter av uppfattningar och tänkande. Generella tankestrukturer torde motsvara det som tidigare representerats av gestaltlagar och den senare piagetanska forskningen mot fasta utvecklingssteg. Enligt Theman är det troligt att Lybecks generella tankeformer syftade till en struktur i denna äldre mening, vilket därmed innebär en avgörande skillnad till det av Marton (1981) beskrivna uppfattningsbegreppet, som har en internal relation till innehållet och som således kan växla med fenomenets art. Det är uppfattningsbegreppet i denna senare mening som Kroksmark (1987) ser som det centrala begreppet i den fenomenografiska didaktiken.

existera hos en viss elev. I bästa fall kan den kognitiva konflikten lösas genom att elevernas uppfattningar övergår till mer vetenskapligt avancerade tankeformer som överensstämmer med den fysikaliska begreppsbildning som utgör ett mål för den aktuella undervisningen.

Lybeck (1981) utvecklar en autonom ämnespedagogisk eller didaktisk forskningsinriktning, och menar att det viktigaste bidraget för att påvisa hur en sådan autonom forskningsinriktning kan utvecklas är den forskningsmetod som han använt.

> Dess främsta kännetecken är, att den bygger på lärarens och forskarens förtrogenhet av undervisning och ämnesinnehåll. Detta innebär att metodiskt och ämnesmetodiskt vetande disciplineras i relation till pedagogik, utvecklingspsykologi, vetenskapshistoria och vetenskapsteori med bas i skolämnets disciplin. Det är en denna process som leder till ämnespedagogik för skolämnet i fråga. (s 278)

Studier av elevers lärande av skilda innehållsliga områden i matematik, fysik och kemi (Lybeck, 1985; 1986) kopplas samman med en läroplansteoretisk granskning genom att Lybeck analyserar dokument av central eller lokal karaktär som på olika sätt ger uttryck för hur undervisningen skall bedrivas inom det aktuella området. Med utgångspunkt från relationen mellan de mänskliga tankestrukturerna och utvecklingen av det vetenskapliga tänkande inom ämnesdomänen kan Lybeck ge en kritisk belysning av skrivningarna i de aktuella läroplanstexterna.

Pramling (1983) har i en studie med metakognitiv inriktning beskrivit hur barn i åldrar mellan 3 och 8 år uppfattar sin egen inlärning. I en senare studie (1988) drar hon didaktiska slutsatser av sina resultat. Pramling menar att kunskap om hur en sekvens av barns spontana idéer är beskaffad hjälper läraren att förstå hur barn tänker och ger förutsättningar att utveckla barns tankar mot nya insikter. En annan didaktisk aspekt är att läraren kan använda sig av barns idéer i pedagogiska sammanhang genom att inrikta undervisningen mot mångfalden av olika idéer och tematisera undervisningsinnehållet genom att elevernas tankar och skilda uppfattningar görs till föremål för undervisningen.

Neuman (1987) har i en intervjustudie, med utgångspunkt från de olika strategier och lösningsmetoder nybörjare i skolan använder när de löser elementära aritmetiska problem, kartlagt utvecklingen av barns talbegrepp. Neuman drar från sin undersökning slutsatsen att barn som har utvecklingsbara talbegrepp har tillägnat sig dem genom att uppfatta tal i del- del- helhetsrelationer och inte genom

att räkna på talraden. Hon drar didaktiska slutsatser av sina resultat och menar att det är en bristfällig uppfattning av talen och olämpliga undervisningmetoder som leder till att elever får matematiksvårigheter. Neuman implementerar sina resultat i undervisningspraktiken, och beskriver en undervisning i elementär matematik, som hon menar utgår från barns egna taluppfattningar och där elevernas förvärvande av de grundläggande talbegreppen kraftigt betonas.

Eftersom det projekt som behandlas i denna framställning är utfört inom den fenomenografiska forskningsinriktnings ram, belyses och diskuteras fenomenografi mer ingående i det kommande metodkapitlet, varvid intresset är riktat mot de frågeställningar som väcks med anledning av den genomförda undersökningen.

FRÅN PSYKOLOGISKA INLÄRNINGSTEORIER TILL INNEHÅLLSRELATERAD DIDAKTISK FORSKNING

Den översiktliga bild som tecknats av tidigare forskning om inlärning och undervisning i matematik visar att den inlärningsforskning som implicerar en färdighetsinriktad undervisning fått större genomslag i undervisningspraktiken än den forskning som implicerar en förståelseinriktad undervisning. Största delen av forskningen har utförts utifrån ett positivistiskt vetenskapsideal vilket innebär att den varit utformad efter naturvetenskapligt mönster med föreställningen att man på grundval av den information man erhåller genom objektiva studier och analys av säkerställda data kan formulera generella lagar om människors handlande. Thorndikes (1922) reduktionistiska associationsteori med en atomistisk syn på kunskap som ett stimulus - respons system och dess efterföljare behaviorismen är tydliga exempel på denna typ av forskning som kraftigt influerat undervisningen. Den gestaltpsykologiska teoribildningen däremot, där tolkningens och helhetens betydelse för inlärningen uppmärksammas, har däremot inte fått genomslag i matematikundervisningen.

Forskningen i problemlösning i matematik under det senaste decenniet kan huvudsakligen sägas följa två huvudlinjer inom vilka man undersökt matematisk problemlösning från olika perspektiv. En mindre del av den genomförda forskningen karakteriseras av att man studerat matematisk problemlösning i vardagsliv och i klassrumssituationer utifrån ett kulturhistoriskt och socialt

perspektiv (Lave,1988; Säljö, 1989). Denna forskning är influerad av antropologisk forskning samt av verksamhetsteorin där Vygotsky av många forskare ses som en portalfigur. Den andra forskningslinjen innefattar en mycket omfattande forskning om problemlösning inom olika innehållsliga områden i matematik som exempelvis aritmetik (Carpenter & Moser, 1982; Steffe et al, 1983), geometri (Schoenfeld, 1985), bråk och proportionalitet (Hart, 1988). I undersökningarna studeras ofta hur elever tänker när de löser problem och man kartlägger de olika strategier eleverna använder när de löser problem inom olika innehållsliga domäner. Datainsamlingsmetoderna består till övervägande delen av intervjuer och observationer och man utarbetar olika schema och instrument för att analysera intervjuprotokollen. Ett ökat intresse kan emellertid noteras för att studera inlärning av problemlösning vid klassrumsundervisning (Lampert, 1986). Den forskning som utförts i undervisningspraktiken, med syftet att dra didaktiska slutsatser av de genomförda studierna, har resulterat i ett vidare synsätt på den matematiska kompetensen, där individers förmåga att lösa matematiska problem inte enbart anses vara beroende av kognitiva faktorer, utan där även elevernas emotioner, attityder, självuppfattning och föreställningar om matematik har stor betydelse för en elevernas problemlösningsförmåga (Baroody, 1987; Lester, 1988; Schoenfeld, 1985).

Från att ha tagit sin utgångspunkt i psykologiska inlärningsteorier har en stor del av senaste decenniets forskning om problemlösning böjt av i riktning mot en innehållsrelaterad didaktisk forskning. I de fall då man man diskuterar didaktiska implikationer kan man finna en stor enighet bland forskarna att elevernas problemlösningsförmåga bör utvecklas genom en förståelseinriktad undervisning, och det framkommer ett samfälligt avståndstagande från Thorndikes (1922) reduktionistiska associationsteori. Det framhålls att den grundläggande begreppsbildningen skall betonas i undervisningen och att den kvalitativa dimensionen av elevernas lärande måste uppmärksammas. De resultat som erhålls inom olika forskningsansatser är emellertid avhängiga de teoretiska grundantaganden som teoribildningen vilar på. Detta framkommer vid en översiktlig jämförelse av de forskningsresultat som framkommit och även de didaktiska slutsatser som dras av studier inom forskningsinriktningarna cognitive science, konstruktivism och fenomenografi.

Huvuddelen av forskningen om matematisk problemlösning har utförts av forskare som verkar inom forskningsinriktningen

cognitive science. Datorn ses där som en metafor för det mänskliga tänkandet, vilket medför att man söker efter generella procedurer i det sätt på vilket eleverna tänker när de löser matematiska problem. Resultaten av den genomförda forskningen redovisas därför ofta i form av generella modeller över det matematiska tänkandet (se t ex Goldin, 1985; Lester, 1985). När implikationer för undervisning i problemlösning diskuteras, får den teoretiska grundsynen på inlärning med dess starka inriktning mot processforskning genomslag genom att man rekommenderar att eleverna i undervisningen skall utveckla sin metakognitiva förmåga samt träna olika problemlösningstrategier och tekniker som de skall utnyttja när de löser matematiska problem (Lester, 1989; Resnick, 1988; Schoenfeld, 1987).

Utgångspunkten för den *konstruktivistiska* forskningen är att kunskap konstrueras aktivt av den tänkande människan. Människan skapar själv sin syn på världen snarare än att upptäcka en värld som existerar utanför henne själv. Skapandet av kunskap är en adaptiv process som organiserar människans värld och som innebär att kognitiva strukturer skapas och förändras hos människan. Denna syn på tänkande och kunskapsbildning får konsekvenser för den bedrivna forskningen och har inflytande på de slutsatser som dras av hur undervisningen i matematik skall bedrivas. I matematikundervisningen skall eleverna ges tillfälle att upptäcka och undersöka undervisningsinnehållet, för att därigenom skapa och förändra de kognitiva strukturerna. Erfarenheter och mognad skall vara avgörande för hur undervisningen skall utformas och läraren ses som en förmedlare mellan eleverna och matematiken. Kommunikationen mellan elever och lärare blir därför en mycket central del av undervisningen i matematisk problemlösning. Läraren skall leda elevernas kunskapsbildning och uppmuntra eleverna att tala och lyssna och ge uttryck för sin förståelse av undervisningsinnehållet eftersom läraren därigenom kan få insikt i elevernas föreställningar och kunskapsuppbyggnad (Jaworski, 1990; von Glasersfeld, 1987).

Forskningsintresset i *fenomenografin* är att studera hur människor uppfattar den levda världen (se Kroksmark 1987, s 245-254), vilket innebär att kunskapsbildning liksom i de två tidigare beskrivna forskningansatserna ses som en aktiv process. Människan är i världen, och ett grundantagande i den fenomenografiska forskningsansatsen är att skilda fenomen i världen erfars i relation till tidigare erfarenheter. Det finns således inte en given omvärld som uppfattas lika av alla människor utan företeelser och skilda

objekt i omvärlden framstår på olika sätt för människor. Som fallet är i konstruktivismen förläggs emellertid inte kunskapsbildningen och människans meningsskapande enbart hos människan själv. Istället betonas i fenomenografin relationen mellan människan och världen, en relation som visar sig i människors skilda uppfattningar av fenomen i sin omvärld.

Även fenomenografins grundantaganden om kunskapsbildning och inlärning får implikationer för undervisning i matematisk problemlösning. I den fenomenografiska didaktik som utvecklas av Kroksmark (1987) görs det sätt på vilket elever erfar, förstår och uppfattar olika undervisningsinnehåll till fokus i undervisningen. Undersökningar som avtäcker elevernas initiala uppfattningar av undervisningsinnehållet ger enligt Kroksmark en kollektivt uppburen bild av hur det undersökta innehållet intersubjektivt uppfattas. Den kvalitativa innehållsbeskrivningen bildar oftast en hierarkisering av innehållet så att det blir möjligt att urskilja uppfattningar som är relaterade till undervisningsmålen, där målet inte uttrycks i termer av vad eleverna skall kunna utan vad de innehållsligt skall behandla. Denna skillnad mellan undervisningens mål uttryckt som vad eleverna skall göra, återge eller lösa och vad eleverna skall förstå, tänka eller uppfatta är fundamental inom den fenomenografiska didaktiken och utgör en avgörande skillnad mot den syn på undervisning som avspeglas i den forskning som är influerad av cognitive science.

Av fenomenografins syn på inlärning följer att elevernas erfarenheter utgör den grund på vilken undervisningen skall bygga. Kommunikationen i undervisningssituationen blir då liksom inom den konstruktivistiska teoribildningen en mycket central del av undervisningen i matematisk problemlösning. En skillnad mellan den konstruktivistiska teoribildningen och den fenomenografiska, när det gäller de didaktiska slutsatser som dras av forskningen är emellertid den mycket starka betoningen i fenomenografin på att undervisningen inom ett kunskapsområde skall ta sin förankring i elevernas erfarenheter. Undervisningen skall utgå från hur eleverna erfar, förstår och uppfattar det aktuella undervisningsinnehållet (Marton & Neuman, 1989). Elevernas skilda uppfattningar bör dessutom synliggöras i undervisningen och utgöra ett undervisningsinnehåll (Lybeck, 1981; Pramling, 1988).

Som avslutning på denna kunskapsöversikt kan frågan ställas om det senaste decenniets omfattande forskning om matematisk problemlösning kommer att påverka undervisningspraktiken. Frågeställningen kan ännu inte ges något entydigt svar, utan måste

ses i relation till undervisningens mål och till hur den genomförda undervisningen utvärderas. Det finns dessutom inte några enkla regler för hur forskning om inlärning och undervisning skall implementeras i undervisningspraktiken, eftersom forskningsresultat oftast inte ger några definitiva riktlinjer för hur undervisning skall bedrivas och sällan erbjuder några nya revolutionerande undervisningsmetoder. Forskningsinsatser kan därför inte visa på ett enda idealiskt sätt att bedriva undervisning i matematik. Däremot kan forskningen ge förklaringsmodeller till hur eleverna bildar kunskap, blottlägga deras tänkande och lärande och därigenom peka ut färdriktningen för undervisningen i matematisk problemlösning.

DEL II
PROBLEMLÖSNING I EN SKOLKONTEXT

Kapitel 3

PROBLEMLÖSNING I ETT VIDGAT PERSPEKTIV

Bakgrunden till projektet står att finna i min erfarenhet av matematikundervisning på lågstadiet samt i de litteraturstudier jag genomfört. I mitt arbete som lågstadielärare insåg jag, att det inte enbart är kognitiva faktorer som är avgörande för elevernas aritmetiska problemlösningsförmåga. Elevernas frågor under matematiklektionerna fick mig att uppmärksamma att det är ett komplext nätverk av samverkande faktorer som influerar elevernas förmåga att lösa skriftliga problem och att elevernas emotioner, attityder samt föreställningar om matematik har stor betydelse för utvecklingen av den matematiska problemlösningsförmågan. När jag påbörjade min forskarutbildning började jag reflektera över hur en undervisning i aritmetisk problemlösning skulle se ut för att underbygga elevernas tilltro till sin egen förmåga och bidra till att utveckla deras förmåga att lära. *Förutsättningen för att kunna utforma en undervisning som lär eleverna att lära är emellertid att man har kunskap om hur eleverna upplever och förstår den aktuella undervisningssituationen och undervisningsinnehållet.* Det är denna frågeställning som står i fokus och kommer att belysas i den följande framställningen.

DIDAKTISKA UTGÅNGSPUNKTER OCH SYFTE

Vid ett tidigare tillfälle genomförde jag en intervjustudie inom den fenomenografiska forskningsinriktningens ram angående barns uppfattning av läsning (Ahlberg, 1981). Även i det här aktuella projektet ville jag genomföra en fenomenografisk intervjustudie eftersom jag var intresserad att studera problemlösning med utgångspunkt från elevernas perspektiv. Som framgick av inledningskapitlet är emellertid problemformuleringen framsprungen i en undervisningssituation, och mitt huvudintresse ligger i att studera elevers aritmetiska problemlösning i en klassrumssituation. Projektet innefattar därför en intervjustudie och en klassrumsstudie. En huvudsaklig avsikt med att använda två skilda

undersökningskontexter är att utöka möjligheterna för att grundligt belysa frågeställningen hur elever upplever och förstår de verbala, skriftliga problem som de möter i den elementära matematikundervisningen.

Undervisningen i matematik på låg- och mellanstadiet karakteriseras ofta av en läroboksbunden matematikundervisning där eleverna huvudsakligen är sysselsatta med att utföra numeriska beräkningar. Det faktum att undervisningen i aritmetisk problemlösning i lågstadieklasser oftast är begränsad till kortare stunder av lektionerna bidrog till att jag ansåg att det skulle bli svårt att samla in tillräckligt med empiriskt material för en analys och tolkning av elevernas problemlösning genom att studera och observera den aritmetiska problemlösning som pågick i lågstadieklasser. Från ett forskningsperspektiv skulle det vara fördelaktigare att undersöka elevernas förståelse av aritmetisk problemlösning på ett mer systematiskt sätt och studera hur eleverna löser aritmetiska problem i en serie sammanhängande undervisningssituationer. För att få tillgång till ett så rikt och varierat dataunderlag som möjligt för att studera hur eleverna upplever och förstår aritmetiska problem i en undervisningssituation planerade och utformade jag därför ett antal lektioner i aritmetisk problemlösning och konstruerade även en problemsekvens som innefattar problem med skiftande utformning och aritmetiskt innehåll som skulle göras till föremål för studier.

När lärare tillfrågas om de vill medverka i ett forskningsprojekt av större omfattning, och avsätta timmar från den ordinarie undervisningstiden i matematik till ett forskningsprojekt är en förutsättning att den undervisning som genomförs bidrar till elevernas inlärning i matematik. Målsättningen för den undervisning som utformades var därför att de elever som deltog i projektet skulle utveckla sin aritmetiska problemlösningsförmåga. Den studerade undervisningen utformades således med det dubbla syftet att dels tillhandahålla ett varierat och rikt empiriskt datamaterial för att studera hur lågstadieelever upplever och förstår aritmetiska problem, dels utveckla elevernas problemlösningsförmåga. Ett antagande som låg till grund för detta ställningstagande var att de resultat som undersökningen bidrog med skulle kunna användas i en fortlöpande kunskapsuppbyggnad och ingå i en kontinuerlig utveckling av undervisningen i aritmetisk problemlösning. Med utgångspunkt i hur elever upplever och förstår aritmetisk problemlösning skulle det vara möjligt att peka

på ytterligare framkomliga vägar för att förändra och utveckla undervisningen i aritmetisk problemlösning.

Mina erfarenheter av undervisning i matematik på lågstadiet och litteraturstudier inom ämnesdomänen låg till grund för planeringen av de undervisningssituationer vars innehåll och utformning kommer att beskrivas mer ingående i nästa kapitel. Kort kan här sägas att de grundläggande intentionerna vid utformningen och innehållet i den studerade undervisningen var att eleverna vid problemlösningen skulle få tillfälle att använda sig sitt eget språk, utföra olika handlingar samt variera sitt perspektiv på aritmetisk problemlösning och de presenterade problemen.

I de studerade undervisningssituationerna tas elevernas problemlösning som utgångspunkt för undervisningen och integreras med undervisningen i grundläggande aritmetik. I motsats till vad ofta är fallet vid en läroboksbunden undervisning, där problemlösning ofta ses som ett sätt för eleverna att träna redan inlärda algoritmer och matematiska procedurer, är målsättningen att eleverna i den studerade undervisningen i samband med problemlösning skall få tillfälle att upptäcka och lära matematiska procedurer. Vid en jämförelse med en läroboksbunden matematikundervisning där eleverna huvudsakligen är sysselsatta med att utföra numeriska beräkningar, har i denna undersökning den studerade kontexten för elevers aritmetiska problemlösning utvidgats såväl med avseende på arbetsformer som undervisningens innehåll. Detta vidgade perspektiv på aritmetisk problemlösning innebär med avseende på utformningen och innehållet i den studerade undervisningen att eleverna skall möta skriftliga verbala problem med skiftande matematiskt innehåll. De skall dessutom vid problemlösningen använda olika framställnings-former genom att rita en bild med anknytning till det aktuella problemet, skriva en berättelse om problemet, tala med sina kamrater om problemlösningen samt utföra aritmetiska beräkningar. Vid problemlösningen skall eleverna även ges tillfälle att upptäcka att det finns olika sätt att lösa aritmetiska problem, vilket möjliggörs genom att eleverna tar del av varandras problemlösningsförslag och samtalar om dem. Den studerade undervisningen skiljer sig således avsevärt från en traditionell läroboksbunden matematikundervisning.

Projektets huvudsyfte är att beskriva och analysera vad aritmetiska problem och aritmetisk problemlösning har för innebörd för lågstadieelever i en skolsituation. Den innebörd eleverna tillskriver problemlösning studeras genom en kartläggning och analys av hur

lågstadieelever upplever, förstår och uppfattar de skriftliga, verbala, aritmetiska problem som de möter i en undervisningssituation samt i en intervjusituation. I begreppet förståelse innefattas i denna framställning inte enbart kognitiva aspekter utan även emotionella och sociala aspekter, dvs det sätt på vilket eleverna förstår och värderar problemen på ett känslomässigt plan i en specifik social kontext. Forskningsintresset är riktat mot att kartlägga det sätt på vilket eleverna inriktar sig mot det aritmetiska innehållet i de givna problemen samt att beskriva elevernas kommunikation vid problemlösning då de gestaltar problemen i bild, uttrycker sig i skrift och samtalar med varandra i smågrupper om de framställda problemlösningsförslagen. Med utgångspunkt från de skilda sätt på vilka eleverna löser de aritmetiska problem som presenteras i en skolkontext beskrivs och analyseras den variation som förkommer i elevernas förståelse och uppfattningar av innehållet i enskilda problem, olika typer av aritmetiska problem samt aritmetisk problemlösning.

Ett delsyfte för projektet är att undersöka om en förändrad inriktning av undervisningen i aritmetisk problemlösning bidrar till att förbättra elevernas inlärning i aritmetisk problemlösning. Därför studeras om det föreligger några skillnader i aritmetisk problemlösningsförmåga mellan de elever som deltagit i undervisningssituationer där de arbetat med olika typer av skriftliga, verbala aritmetiska problem samt fått tillfälle att rita, skriva och tala med varandra om de presenterade problemen, och andra elever som deltagit i en läroboksbunden undervisning, där dessa moment inte särskilt uppmärksammats i undervisningen i aritmetisk problemlösning.

UNDERSÖKNINGENS DESIGN

För att skapa ett rikare underlag för att studera variationen i lågstadieelevers sätt att förstå aritmetiska problem, studeras elevernas problemlösning i intervjusituationer och i undervisningssituationer. Projektet är således indelat i en intervjustudie och en klassrumsstudie. I båda studierna möter eleverna samma problemsekvens som innefattar olika typer av problem. I intervjustudien genomförs djupintervjuer med eleverna när de löser den problemsekvens som presenteras i klassrumsstudien. Vid en jämförelse mellan intervjustudien och klassrumsstudien kan sägas att eleverna i klassrumsstudien erbjuds rikare tillfällen att rita, skriva och tala

vid problemlösningen än vad som är fallet i intervjustudien. Eftersom ett delsyfte i projektet är att studera om de elever som deltagit i den studerade undervisningen utvecklat sin aritmetiska problemlösningsförmåga gavs klassrumsstudien en kvasi-experimentell design med för- och eftertest i de deltagande klasserna och i kontrollklasser.

Undersökningen tar sin utgångspunkt i elevernas handlingar och ord vid problemlösningen. De skilda sätt på vilka eleverna handlar och kommunicerar vid problemlösningen, dvs deras sätt att lösa de givna problemen, benämns i denna framställning förfaringssätt. *Studiet av elevernas skilda förfaringssätt ses som ett medel som ger tillgång till hur eleverna förstår och uppfattar de givna problemen.* I den tidigare beskrivna forskningsinriktningen "information processing" är kunskapsintresset riktat mot att identifiera de olika strategier elever använder sig av när de löser problem, vilket således inte är målet för denna undersökning. En kartläggning av elevernas problemlösningsstrategier innefattas i studiet av deras förfaringssätt, men elevernas förfaringssätt kartlägges med syftet att blottlägga hur de förstår och uppfattar de de givna problemen.

För att optimera möjligheterna att skapa en tydlig bild av hur eleverna upplever och förstår verbala, skriftliga problem varieras undersökningskontexten.

- Elevernas problemlösning studeras dels i en intervjusituation, dels i en klassrumssituation. I klassrumssituationer görs observationer och bandinspelningar av den studerade undervisningen och elevernas samlade problemlösningsförsök dokumenteras.
- Elevernas skilda förfaringssätt vid problemlösningen studeras när de löser problem med varierande innehåll och aritmetisk struktur.
- Eleverna använder olika kommunikationsformer vid problemlösningen och ges tillfälle att rita, skriva, tala, lyssna och räkna. Deras skiftande förfaringssätt när de utnyttjar dessa olika kommunikationsformer vid problemlösning studeras och analyseras.

De mest framträdande skillnaderna mellan den aktuella studien och tidigare genomförda studier av aritmetisk problemlösning är således en utvidgning av undersökningssituationen till att innefatta en stor variation av olika undersökningskontexter där även emotionella och sociala dimensioner kan urskiljas.

I klassrumsstudien har undervisningen dokumenteras genom bandinspelningar och observationer. De deltagande eleverna har lämnat synpunkter på den genomförda undervisningen vid intervjuer och skriftliga redovisningar. Även klasslärarna har vid intervjusamtal gett synpunkter på undervisningen samt elevernas agerande och lärande. Tidigare studier av elevers aritmetiska problemlösning har företrädesvis utförts i experiment- och intervjusituationer med en mycket avgränsad frågeställning i fokus (Carpenter & Moser, 1982). Forskningsintresset har vanligtvis varit riktat mot en kategorisering av olika matematiska problem i olika svårighetsgrader eller mot att analysera hur elever behandlar information, planlägger och väljer strategier för sitt handlande (Lester, 1985, Schoenfeld, 1985). Det har även utförts forskning där man studerat elevernas olika kommunikationsformer vid problemlösningen, exempelvis elevers bilder och representationer vid elementär aritmetisk problemlösning (Janvier, 1987), elevers samtal i smågrupper (Noddings, 1985; Resnick, 1988) eller deras diskussioner i helklassundervisning (Lampert, 1986). Det som är utmärkande för detta projekt är emellertid att de problemområden som tidigare studerats var för sig, som isolerade företeelser, här studerats i ett sammanhang, i en gemensam undervisningskontext.

I den aktuella undersökningen studeras elevernas upplevelse och förståelse av det presenterade undervisningsinnehållet. Med utgångspunkt i de skilda förfaringssätt som eleverna använder, har deras lärande och kommunikation när de ritar, skriver, talar och räknar vid problemlösning kartlagts och analyserats.

UNDERSÖKNINGSMETODER

För att ge en så heltäckande bild av elevernas problemlösning som möjligt utnyttjas i projektet såväl kvantitativa som kvalitativa metoder. Benämningarna kvantitativa respektive kvalitativa forskningsmetoder blottlägger inte i någon större utsträckning skillnaderna mellan de båda metoderna. Termerna är emellertid vedertagna begrepp och användes därför i denna framställning.

Kvantitativa metoder utnyttjas i projektet för att testa en framställd hypotes om att elevernas aritmetiska problemlösningsförmåga utvecklas, när de deltar i en undervisning där de får tillfälle att kommunicera muntligt och skriftligt. För att studera denna frågeställning, och undersöka om det föreligger skillnader i

aritmetisk problemlösningsförmåga mellan de elever som deltagit i de genomförda undervisningssituationerna och elever som deltagit i en läroboksbunden undervisning, gavs klassrumsstudien en kvasiexperimentell design med för- och eftertest i de deltagande klasserna och i kontrollklasser.

KVALITATIV METOD

Beteckningen kvalitativ metod brukar användas inom en mängd olika forskningsansatser där analysen av ett insamlat datamaterial grundar sig på tolkning och förståelse av ett empiriskt material och inte på mätning och frekvensfördelningar av numeriska data. Med syftet att blottlägga den innebörd eleverna tillskriver aritmetiska problem har jag genomfört djupintervjuer med elever som varit inbegripna i lösningsförsök av ett antal skriftliga, verbala problem. Denna del av projektet har benämnts intervjustudien. För att förtydliga och fördjupa förståelsen av elevernas problemlösningsprocess har jag även med kvalitativa metoder studerat hur elever löser aritmetiska problem i klassrumssituationer. Denna del av projektet har benämnts klassrumsstudien.

I klassrumsstudien karakteriserades undervisningen av elevernas agerande vid problemlösningen samt den kommunikation som pågick under lektionerna. Den muntliga kommunikationen i undervisningen innefattade huvudsakligen elevernas samtal i smågrupper och handlingarna utfördes när eleverna räknade, skrev och ritade vid lösningen av de givna problemen. I denna undersökning betraktas samtliga handlingar eleverna utför som en form av kommunikation. För att söka efter mönster, regelbundenheter och teman i undervisningssituationen och skapa förståelse för den studerade undervisningen samt elevernas lärande, analyseras elevernas kommunikation om undervisningsinnehållet, dvs de presenterade problemen. Beskrivningen och analysen av den genomförda undervisningen tar således sin utgångspunkt i elevernas kommunikation om undervisningsinnehållet och deras lärande.

Elevernas kommunikation och deras olika sätt att uttrycka sig vid problemlösningen är den ingång som öppnar sig till att i möjligaste mån blottlägga elevernas förståelse. Vid analysen av elevernas problemlösning utgår jag från vad eleverna säger, och hur de agerar i problemlösningssituationen. Elevernas ord och handlingar när de löser de givna problemen blottlägger deras förståelse. Det

finns en flora av uttryck som används för att på skilda nivåer beteckna hur elever går tillväga vid problemlösning. Exempelvis används benämningar som strategier, behandlingssätt, tillvägagångssätt och metoder. Jag föredrar ordet förfaringssätt som en samlande beteckning för elevernas ord och handlingar, eftersom jag tycker att det i ordet framskymtar att eleverna har med sig sina tidigare erfarenheter in i problemlösningssituationen.

Det empiriska materialet i klassrumsstudien innefattar intervjuutskrifter, klassrumsobservationer, utskrifter av bandinspelade intervjuer med lärare och elever som deltagit i klassrumsstudien, samt elevernas samlade dokumentation från den studerade undervisningen. Den kvalitativa analysen av detta datamaterial inbegriper dels innehållsanalyser och tolkningar av de skrivna texterna och samtalen, dels analyser av det empiriska materialet som grundar sig på den fenomenografiska forskningsmetoden.

METOD OCH ANALYS I FENOMENOGRAFISK FORSKNING

Den fenomenografiska forskningsinriktningen och fenomenografisk didaktik har på ett allmänt plan beskrivits i avhandlingens första del. En ytterligare belysning av ansatsen kommer därför i det följande huvudsakligen att ta sin utgångspunkt i den genomförda undersökningen.

I fenomenografiska studier är forskningsintresset riktat mot att karakterisera och kategorisera de kvalitativt olika sätt på vilka människor uppfattar och förstår olika fenomen i sin omvärld. Skillnaden mellan kvalitativ innehållsanalys och fenomenografi kan tyckas något svårfångad. En utmärkande skillnad är emellertid att man vid innehållsanalysen fokuserar på texten eller kommunikationen. Man söker efter uttryck som refererar till olika fenomen och är inriktad mot att karakterisera uttrycken. Inom fenomenografin däremot är intresset riktat mot att studera hur skilda fenomen framstår för olika individer genom att blottlägga mening bortom den exakta ordalydelsen. Den mening och innebörd som människor tillskriver ett fenomen visar sig i deras uppfattningar av fenomenet, och den fenomenografiska analysen syftar till att kartlägga dessa skilda uppfattningar.

Uljens (1988) beskriver den distinktion som görs inom fenomenografin mellan åsikt och uppfattning.

> Med uppfattning "av" något avser man människans grundläggande förståelse av något. Med uppfattningar "om" något avser man att människan gör något till föremål för medveten reflektion och förenar en värdering till denna tanke. I vardagstal säger vi att hon har en åsikt om något. Vad detta fenomen i grunden betyder för individen eller det grundläggande sätt på vilket individen förstår fenomenet kallas individens uppfattning "av" fenomenet. Det är detta sistnämnda som fenomenograferna intresserar sig för. (s 10)

Den här aktuella undersökningen avser lågstadieelevers uppfattning av aritmetiska problem. Eleverna inriktar sig mot de givna problemen på skilda sätt och vad de uppfattar och hur de uppfattar är avgörande för deras begreppsliga förståelse av problemen och konstituerar deras uppfattning av de givna problemen. Elevernas skilda uppfattningar synliggörs i deras utsagor och behandling av de givna problemen. Forskningsintresset är riktat mot att beskriva elevernas uppfattningar, kartlägga den variation av skilda uppfattningar som förekommer och kategorisera uppfattningarna i beskrivningskategorier. Eleverna betraktas som bärare av uppfattningar, och det är således uppfattningar och inte enskilda elever som kategoriseras.

Den fenomenografiska intervjustudien

För att blottlägga uppfattningar använder man i fenomenografiska studier oftast intervjuer som datainsamlingsmetod, men även andra källor kan utnyttjas. När Lybeck (1981) studerade elevers kunskapsbildning av fysikaliska begrepp utnyttjades även observationer och bandinspelningar av elevers dialoger, när de gemensamt löste problem, för att samla in data. Även bilder har utnyttjas som empiriskt material (Wenestam & Wass, 1987).

Den fenomenografiska intervjun kännetecknas av ett genuint intresse av att låta den intervjuade själv avgränsa det behandlade innehållet. De frågor som ställs har därför en öppen karaktär utan några svarsalternativ. Eftersom avsikten är att synliggöra de intervjuades perspektiv på det innehåll som avhandlas, är intervjuerna djupinriktade och följdfrågor ställs för att klargöra och belysa de intervjuades uttalanden.

Vid intervjuerna presenterades samma problemsekvens som eleverna arbetade med i de studerade undervisningssituationerna. Eftersom tiden sätter gränser när man skall intervjua ett stort antal elever skrev eleverna inte någon berättelse i intervjusituationen. De redogjorde istället muntligt för sina funderingar kring

problemet, utförde numeriska beräkningar och uppmuntrades att vid lösningen av problemet rita en bild. Intervjuerna inleddes med ett antal frågor om elevens inställning till matematik, vad matematik innebär och räkningens funktion i vardagslivet. Avsikten med dessa frågor var att få en naturlig inledning på samtalet. I intervjusituationen påbörjade de flesta eleverna problemlösningen på egen hand. I de fall eleverna inte gjorde några lösningsförsök eller uttalade att de inte visste hur de skulle gå tillväga uppmuntrade jag dem att rita en bild eller ställde frågor om problemets innehåll. Så länge problemlösningsprocessen fortlöpte försökte jag att inte störa elevernas arbete alltför mycket med frågor utan förde istället anteckningar över deras förfaringssätt. Avsikten med att inte ställa alltför många frågor angående hur eleverna tänkte eller vad de gjorde när de löste problemen var att när man avbryter eleverna kan det inträffa att de inte fullföljer sin påbörjade tankegång och att problemlösningsprocessen avstannar. Med utgångspunkt från elevernas uttalanden, handlingar och mina observationsanteckningar följdes emellertid samtliga problemlösningsförsök upp av frågor om elevernas förfaringssätt.

Intersubjektiviteten och elevernas skilda tolkningar av situationen har en avgörande betydelse för interaktionen i intervjusituationen och påverkar elevernas uppfattning av problemen (se Theman, 1983). Elevens förståelse och uppfattning av problemet är beroende av elevens kunskaper och erfarenheter av matematikundervisning, men även av den sociala kontext där problemlösningen utföres. Intervjusituationen är ett socialt sammanhang där det ingår ett stipulerat villkor att eleven skall lösa ett antal förelagda problem. Det är tänkbart att eleven upplever den aktuella situationen som en lektion och medvetet går in för att uppfylla de förväntningar som de antar att "läraren" har på dem. Det är emellertid också möjligt att eleven upplever att en person som de inte känner skall testa deras kunskaper, vilket kan leda till motstånd och till att eleven inte vill svara på de frågor som ställs. En målsättning vid intervjuerna var emellertid att eleven skulle känna sig avspänd och fri att lösa problemen på sitt eget sätt.

Analys och tolkning av intervjuerna

Elevernas tolkning av situationen bildar grund för deras upplevelser, förståelse och begreppsbildning och deras kommunikation är den ingång som öppnar sig till att i möjligaste mån blottlägga deras skilda sätt att förstå och uppfatta den aritmetiska problemlösningen. Vid analys och tolkning av intervjuerna har jag

haft en strävan att skapa förståelse och se sammanhang i intervjuinnehållet. Bearbetningen har följt ett visst mönster. Den intuitiva tolkningen av intervjuerna påbörjades redan i intervjusituationen, där jag fick min första kännedom om eleverna. Det första skedet i analysarbetet var att de bandinspelade intervjuerna ordagrannt skrevs ut och en inledande analys och tolkning påbörjades. Den följdes upp med en ostrukturerad genomläsning av intervjuerna där huvudsyftet var att jag skulle bekanta mig med materialet, försöka få en helhetsbild av det och upptäcka företeelser som var särskilt tydliga och framträdande.

I det andra skedet av analysen, som var påverkat av den intuitiva tolkningen, använde jag en mer systematiserad strategi och uppmärksammade skillnader och likheter mellan elevernas sätt att lösa de olika problemen. Vissa frågeställningar valdes ut som jag ville rikta in analysen mot. Till en början läste jag ett antal intervjuer där eleverna behandlade problemen mycket olika, kontrasterade dem mot varandra och försökte identifiera skillnader och eventuella likheter. Därefter jämfördes de intervjuer som liknade varandra för att skillnaderna skulle framkomma tydligt.

Jag förde anteckningar om elevens utsagor och matematiska beräkningar och efter ett antal genomläsningar av intervjuerna utkristalliserades så småningom ett mönster för analysen där jag utgick ifrån de innehållsliga delar av problemet som eleverna fokuserade och som framstod som meningsbärande för dem. Elevernas utsagor och matematiska beräkningar vid lösningar av de enskilda problemen och de olika problemtyperna samt även mina kompletterande tolkningar och synpunkter på elevernas förfaringssätt antecknades. Vid de tillfällen då det vid bearbetningen av intervjuutskrifterna framkom tolkningar som inte tidigare uppmärksammats, genomfördes en förnyad genomläsning av samtliga intervjuer för att undersöka hur denna tolkning var relaterad till de övriga elevernas problemlösning.

Elevens förfaringssätt och utsagor vid problemlösningen tolkades utifrån meningsinnehållet i det avgränsade specifika sammanhang där de förekom, men även i relation till elevens slutliga lösning av det givna problemet. Dessutom bidrog jämförelsen mellan olika intervjuer till att blottlägga den innebörd eleverna tillskrev problemen. De uppfattningar som på detta sätt så småningom utkristalliserades, kategoriserades med utgångspunkt från likheter och skillnader i ett antal beskrivningskategorier. Kategorierna är kvalitativt skilda i den bemärkelsen att till varje beskrivningskategori sammanfördes uppfattningar som distinkt kunde avskiljas

från de uppfattningar som fanns representerade i de övriga kategorierna. Tillsammans bildar samtliga beskrivningskategorier ett utfallsrum som ger en bild av den funna variationen av uppfattningar av de presenterade aritmetiska problemen och relationen mellan dessa uppfattningar.

Fenomenografi i undervisningssituationer

I det aktuella projektet ingår en intervjustudie och en klassrumsstudie. I de båda studierna har samma problemsekvens presenterats för elever vilket innebär att eleverna arbetat med ett givet undervisningsinnehåll i två olika undersökningskontexter. Detta erbjuder tillfälle att utforska den fenomenografiska forskningsansatsens möjligheter och begränsningar i klassrumsundervisning.

I klassrumsstudien har ett flertal olika datainsamlingsmetoder använts. Det är observationer av lektioner, intervjuer med elever, intervjuer med lärare samt elevernas samlade dokumentation från arbetet i klassrummet. Eftersom tyngdpunkten i projektet är förlagd till klassrumsstudien och intervjuer huvudsakligen har använts som datainsamlingsmetod i tidigare fenomenografiska studier, diskuteras i det följande det fenomenografiska uppfattningsbegreppet med utgångspunkt från två de frågeställningarna: Är det möjligt att kartlägga elevernas uppfattningar av ett fenomen i en klassrumsituation, och blottlägger elevernas handlingar i en undervisningssituation deras uppfattningar av ett fenomen.

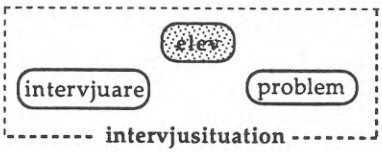
Kan elevers uppfattningar av ett fenomen kartläggas i en klassrumssituation?

Vid studier av elevers inlärning av olika undervisningsinnehåll blottläggs och beskrivs elevernas uppfattning av det aktuella kunskapsinnehållet vilka sedan sammanförs till beskrivningskategorier. Inom fenomenografi utgår man således inte från kategorier som är definierade i förväg utan beskrivningskategorierna är ett resultat av analysen och emanerar från de skilda uppfattningar av ett kunskapsområde som återfinns i det empiriska materialet. För att granska om det är möjligt att studera elevers uppfattningar av olika fenomen i en klassrumssituation kan vi för att ytterligare klargöra innebörden i begreppet uppfattning tillfoga den definition Svensson (1984) ger:

> ... begreppen uppfattning och uppfattande används för att beteckna karaktären hos det meningsskapande som är grunden för kunskapsbildning. (s 12)

Att uppfatta betecknar således från ett fenomenografiskt perspektiv det sätt på vilket människor skapar mening och sammanhang i sin omvärld, och människors uppfattningar konstitueras av vad de förstår och hur de förstår. Såväl i en klassrumsituation som i en intervjusituation tolkar eleverna de givna problemen med avsikten att skapa mening och förståelse. Vid lösningen av problemen förstår eleverna problemen på olika sätt och skilda uppfattningar av problemen konstitueras såväl i intervjusituationen som i klassrumssituationen. Den kritiska frågeställningen i detta sammanhang blir då om det är möjligt att blottlägga elevernas uppfattningar av ett undervisningsinnehåll i en klassrumssituation för att eventuellt spåra om elevers uppfattningar av aritmetiska problem i en intervjusituation och elevers uppfattningar av samma problem i en klassrumssituation är av samma kategorier.

I en intervjusituation försöker intervjuaren inrikta elevens uppmärksamhet mot vissa specifika innehåll genom att göra ett uttalande, ställa en fråga eller presentera ett problem. I den aktuella intervjussituationen, där eleverna skall lösa ett givet problem, är den innebörd eleven tillskriver problemet beroende av elevernas erfarenheter och den aktuella situationen. Problemet framstår för eleven som ett av flera möjliga intentionala objekt, dvs saker som elevens medvetande är riktat mot[1]. Andra intentionala objekt som tydligt kan urskiljas i intervjusituationen är eleven själv och intervjuaren, vilket kan visas med en schematisk bild.



Figur 3.1. *Intentionala objekt för eleven i intervjusituationen*

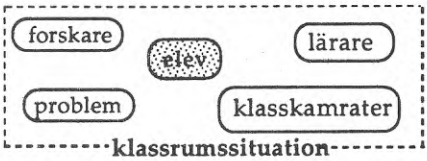
Eftersom intervjuaren uppmärksammar och refererar till det specifika problemet är det vanligtvis ett implicit antagande i en intervjusituation att man samtalar om samma sak, alltså

[1]Intentionala objekt anknyter till det fenomenologiska begreppet intentionalitet, dvs medvetandets riktadhet. Det finns ett grunddrag hos alla medvetandeakter som innebär att man kan skilja mellan medvetandeakten och det som akten är riktad mot. Det som framstår för elevernas medvetande betecknas som ett intentionalt objekt (se sid 18).

avgränsar och refererar till samma fenomen. Det inträffar emellanåt att kommunikationen inte fungerar mellan intervjuare och elev, vilket kan få till följd att man inte talar om samma fenomen. En orsak till bristande kommunikation kan vara elevens tolkning av den aktuella intervjusituationen. Bristande intresse hos eleven för fråge-ställningen och intervjusituationen har betydelse för vilka fenomen som diskuteras. Även en eventuell överambition som resulterar i att eleven spänner sig och blir nervös påverkar kommunikationen. En annan orsak till att skilda fenomen uppmärksammas i intervjussituationen kan bero på att eleven inte har tillräckliga kunskaper och erfarenheter för att tolka intervjuarens yttranden och därför inte uppfattar den företeelse som intervjuaren refererar till. Även det omvända förhållandet kan emellertid råda, vilket innebär att intervjuaren inte har tillräckliga kunskaper för att tolka det eleven säger. Ytterligare en orsak till att elev och intervjuare talar om olika fenomen kan vara att frågeställningen inte är tillräckligt avgränsad utan kan referera till ett antal olika företeelser. I de fall där ett specifikt avgränsat skriftligt problem presenteras för eleverna är emellertid sannolikheten stor att intervjuaren och eleven riktar sig mot detta problem och kommunicerar om samma fenomen. Det underlag forskaren har tillgång till vid bedömningen om man behandlat samma fenomen, och för kartläggningen av individernas uppfattningar, är skriftliga utskrifter av de bandinspelade intervjuerna.

Undervisning i ett klassrum är en komplex situation som i mycket är skild från en intervjusituation. I klassrummet finns en grupp individer och elevernas tidigare erfarenheter av undervisnings-situationer medför att klassrumskontexten upplevs och tolkas annorlunda av eleverna än intervjusituationen. Det finns dock vissa likheter i de båda situationerna. När läraren framställer ett matematiskt problem för eleverna är avsikten att inrikta elevernas uppmärksamhet mot detta specifika problem på liknande sätt som intervjuaren vill inrikta den intervjuades uppmärksamhet mot en bestämd företeelse genom att formulera frågor.

Vid problemlösningen i klassrummet framstår problemet för eleven som ett av flera möjliga intentionala objekt, dvs saker som elevens medvetande är riktat mot. Andra intentionala objekt som tydligt kan urskiljas är eleven själv, klasskamraterna, läraren och i de aktuella undervisningssituationerna även forskaren, vilket på nästa sida visas med en schematisk bild.



Figur 3.2. *Intentionala objekt för eleven i klassrumssituationen*

Även i denna situation är den innebörd eleven tillskriver problemet beroende av elevernas erfarenheter och situationen. Problemet får en särskild dignitet i den aktuella situationen eftersom lärarens avsikt är att inrikta elevernas uppmärksamhet mot det.

De svårigheter som kan uppstå i en intervjusituation när det gäller att bedöma om samma fenomen avhandlas accentueras till viss del i en klassrumssituation. Den komplexa situationen i klassrummet utesluter dock inte att läraren har möjligheter att rikta elevernas uppmärksamhet mot specifikt problem. Tvärtom karakteriseras de flesta undervisningssituationer av att en lärare introducerar ett undervisningsinnehåll som skall behandlas vid lektionen. När eleverna löser det givna problemet är deras uppmärksamhet i olika utsträckning riktade mot problemets innehåll. Elevernas förfaringssätt och kommunikation i klassrummet vid de studerade problemlösningsförsöken blottlägger de sätt på vilka eleverna inriktar sig mot det givna problemet. Den innebörd eleverna tillskriver problemen framkommer i elevernas samlade dokumentation från undervisningen i form av beräkningar, berättelser och bilder samt även i den språkliga kommunikation som pågår mellan eleverna och mellan lärare och elever. I undervisningssituationerna utgör forskarens samlade empiriska material, i form av bandinspelningar och observationsanteckningar från undervisningen samt elevernas dokumentation, det dataunderlag som ligger till grund för bestämningen av vilket fenomen eleverna riktar sig mot och för kartläggningen av elevernas uppfattning av de framställda problemen. I den mån det är möjligt att i en intervjusituation, med utgångpunkt från det empiriska datamaterialet, kartlägga elevernas uppfattning av ett givet problem är det också möjligt i de studerade klassrumssituationerna.

Blottlägger elevers handlingar i en undervisningssituation deras uppfattningar av ett fenomen?

I fenomenografiska studier som gäller matematisk problemlösning studeras elevernas uppfattning av de givna problemen dels utifrån

verbala utsagor, dels utifrån elevernas handlingar i problemlösningsituationen. Elevernas handlingar är av särskilt intresse eftersom frågan inställer sig om elevernas uppfattningar av de givna problemen kan kartläggas utifrån de handlingar eleverna utför vid problemlösningen. Kartläggningen av elevernas uppfattningar av de givna problemen är emellertid i denna studie till stor del förankrad i elevernas samlade skriftliga dokumentation. Under lösningsprocessens fortskridande varseblir eleverna sitt tänkande i sina handlingar när de ritar, skriver och gör numeriska beräkningar. Denna skriftliga gestaltning av tänkandet kan få till följd att den innebörd eleverna tillskriver problemet förändras, vilket i sin tur påverkar elevens kommande handlingar. Under problemlösningsprocessens fortskridande kan således elevernas uppfattning av problemet förändras på grund av de handlingar som är involverade i problemlösningsprocessen. När eleverna löser aritmetiska problem kan därför uppfattningen inte betraktas som skild från elevernas handlingar och det blir möjligt att blottlägga uppfattningar utifrån de handlingar eleverna utför när de skriftligt dokumenterar sin problemlösning. Elevernas samlade skriftliga dokumentation från de studerade undervisningssituationerna, som avspeglar elevernas handlingar vid problemlösningen, tjänar som utgångspunkt vid en kartläggning av elevernas uppfattningar av de givna problemen.

Sammanfattningsvis kan sägas att ovanstående diskussion leder fram till att det är möjligt att studera elevers uppfattningar av olika fenomen i en klassrumssituation och dessutom att elevers handlingar i en undervisningssituation avtäcker deras uppfattningar av ett fenomen. Det framstår därför som rimligt att utifrån en fenomenografisk forskningsansats studera problemlösning i klassrumssituationer.

Forskarens roll i klassrummet

En vuxen person som kommer till ett klassrum på lågstadiet möts ofta av en viss uppmärksamhet och ett intresse från elevernas sida. Eleverna i de tre klasserna vände sig inte enbart till sina klasslärare med sina frågor utan även till mig. Jag besvarade frågorna, huvudsakligen försökte jag emellertid följa klasslärarens och elevernas diskussioner och föra observationsanteckningar om skeendet i klassrummet, elevernas samtal och handlingar. I de fall då någon av eleverna frågade vad jag skrev, förklarade jag att deras frågor intresserade mig och jag ville komma ihåg vad de hade sagt, därför måste jag föra anteckningar. Enligt min och de

deltagande lärarnas uppfattning tycktes det faktum att jag förde anteckningar inte vidare bekymra eleverna. Även i andra studier har man funnit att eleverna ganska snart bortser från att en utomstående följer undervisningen och för observationsanteckningar över händelser i klassrummet (Bellack, 1978).

Det förhållande att en forskare studerar undervisning och samtidigt är involverad i skeendet i klassen kan emellertid ha en negativ effekt på datainsamlingen eftersom i och med att det finns en större risk för att forskaren inte observerar det som faktiskt pågår i klassrummet. Mitt forskningsintresse låg emellertid i att undersöka elevernas förfaringssätt vid problemlösningen och deras förståelse av de framställda problemen. Detta medförde att jag inte såg någon nackdel med att besvara deras frågor, utan tvärtom ansåg att samtalen gav tillfälle för mig att utröna vad eleverna undrade över i undervisningssituationen och studera hur löste de givna problemen. Eftersom jag deltog i undervisningen, och även ibland inledde lektionerna med att läsa upp det aktuella problemet, såg eleverna min närvaro i klassen som helt naturlig och de samtalade ofta och villigt med mig. Mitt aktiva engagemang vid lektionerna hade därmed en positiv effekt på datainsamlingen och inverkade även i förklarande riktning vid analys och tolkning av data.

Analys och tolkning av klassrumsstudien

En grundtanke i undersökningen är att elevens förståelse av matematiska problem inte existerar skild från elevens omvärldsuppfattning utan ingår i elevens livsvärld och är en aspekt av elevens sätt att se på världen och sig själv. Det inledande analysskedet bestod i att översiktligt studera elevernas dokumentation bestående av berättelser, bilder och aritmetiska problemlösningar från den genomförda undervisningen, samt en genomläsning av intervjuutskrifterna. Därefter inleddes en organisation av datamaterialet och en integrering av klassrumsobservationer och intervjuer gjordes för att skapa en sammanhängande bild av skeendet i undervisningsituationen. Datamaterialet är omfattande och det kan vara problematiskt att avgränsa och fokusera olika aspekter av innehållet utan att göra våld på sammanhanget. Det är under analysens fortskridande risk att överblicken går förlorad och sammanhanget splittras upp på ett antal från varandra avgränsade komponenter. För att motverka att en fragmentarisk bild av undervisningssituationerna framkommer har utskrifterna från bandinspelningarna av lärarens inledning samt avslutande

diskussion införlivats med observationsanteckningarna från de studerade lektionerna. Även utskrifter från lärar- och elev-intervjuer har införlivats med observationsanteckningarna från lektionerna i klassrummet för att skapa en helhetsbild av lektionen. Vid tolkningen av datamaterialet har en pendling skett mellan det enskilda och sammanhanget i ett samspel på olika nivåer, så att det kunskapsfält som efter hand framträder i möjligaste mån avspeglar den dynamik och komplexitet som döljer sig i datamaterialet, förmedlar en bild av undervisningssituationerna, blottlägger elevernas kommunikation i klassrummet och deras uppfattningar av aritmetiska problem och problemlösning.

Relationen mellan klassrumsstudien och intervjustudien

På liknande sätt som tolkningen av klassrumsstudiens olika delar har påverkats av varandra har även tolkningen av projektets båda studier påverkats av varandra. Det har inte varit möjligt att hålla en skarp skiljelinje mellan klassrumsstudien och intervjustudien. Vid tolkningen av klassrumsstudiens innehåll har det skett en pendling till intervjustudien och när klassrumsstudien varit föremål för analys har den kunskap som framkommit i intervjustudien påverkat tolkningen. Båda studierna har således bidragit till den bild som kommer att beskrivas i resultatredovisningen av elevernas för-ståelse av aritmetiska problem. Vissa företeelser framstår dock tydligare och kan lättare fokuseras i intervjustudien medan andra faktorer som inverkar på elevernas problemlösningsprocess framträder tydligare i klassrumstudien. I intervjustudien fanns tid till att ställa ingående frågor till varje elev och i detalj undersöka elevernas begreppsliga och proceduriella kunskaper. I klassrumsstudien däremot var forskningsintresset inriktat mot att kartlägga elevernas kommunikation vid problemlösningen och situationen var mer komplex, vilket medförde att inte enbart elevernas förfaringssätt vid problemlösningen utan även andra faktorer som påverkade elevernas problemlösningsprocess kunde uppmärksammas. Analysen av det empiriska materialet inriktades därför inte huvudsakligen mot att studera om elevers uppfattningar av aritmetiska problem i en intervjusituation och elevers uppfattningar av samma problem i en klassrumssituation är av samma kategorier, utan de två datainsamlingsmetoderna används i komplementärt syfte.

Det faktum att projektet omfattar en klassrumsstudie och en intervjustudie har bidragit till att fördjupa analysen och tolkningen av datamaterialet. De båda datainsamlingsmetoderna har berikat

varandra och enligt mitt synsätt bidragit till att ge en tydligare helhetsbild av elevernas upplevelse och förståelse av problemlösning än vad som skulle blivit fallet om endast en av metoderna använts.

Diskussion om validitet och reliabiltet

I fenomenografisk forskning liksom inom andra kvalitativa forskningsansatser ställs frågor om validitet och reliabilitet ofta under debatt. Forskningsresultaten framkommer genom en tolkning av det empiriska materialet vilket aktualiserar frågor om resultatens trovärdighet, giltighet och noggrannhet. Den övergripande diskussionsfrågan gäller resultatens förankring i det empiriska materialet, varvid det huvudsakligen är tre områden inom vilka validitets- och reliabilitetsfrågorna uppmärksammas och diskuteras.

- Frågeställningar med inriktning mot avgränsningen och bestämningen av det studerade fenomenet.
- Frågeställningar avseende uppfattningsbegreppet vilka omfattar innebörden i begreppet uppfattning och om forskningsresultaten verkligen kan sägas blottlägga och beskriva uppfattningar.
- Frågeställningar som behandlar i vilken utsträckning de kategorier som framkommit ur datamaterialet verkligen reflekterar *individernas* uppfattningar och inte enbart är en konstruktion av forskaren. Frågorna berör således de framtagna kategoriernas giltighet med avseende på det empiriska materialet.

De två första av ovanstående frågor har tidigare belysts i avsnittet om metod och analys i fenomenografisk forskning (se s 68), därför diskuteras i det följande huvudsakligen den sista frågeställningen, som berör huruvida de kategorier som framkommit ur datamaterialet verkligen representerar individernas uppfattningar och kommunicerar meningsinnehållet i människornas utsagor. Det vore tänkbart att pröva validiteten genom att två av varandra oberoende forskare analyserar ett givet empiriskt material och därefter utför en jämförande analys av de uppfattningar och beskrivningskategorier som framtagits i datamaterialet. Marton (1981) skriver emellertid att de beskrivningskategorier som framkommer i ett datamaterial bör betraktas som en upptäckt. Eftersom det är inte troligt att två forskare gör samma upptäckt

kan det inte ställas krav på att två av varandra oberoende forskare skall komma fram till exakt samma beskrivningskategorier.

När beskrivningkategorierna väl en gång har framlagts ställs det däremot krav på att resultaten kunna kommuniceras och andra forskare skall kunna reproducera och styrka upptäckterna.

> Consequently what we want to ascertain is that once categories of description are made explicit, other researchers should be able to identify them when they are applicable in varying contexts. (Johansson, Marton & Svensson, 1985 s 251)

Det skall således vara möjligt för en annan person att finna de beskrivningskategorier som forskaren har upptäckt i datamaterialet.

En prövning kan utföras för att undersöka i vilken utsträckning en utomstående person kan identifiera och fördela de beskrivna uppfattningar över de av forskaren framtagna beskrivningskategorierna. Denna prövning resulterar i en bedömning av beskrivningskategoriernas tillförlitlighet eller reliabilitet. I ett stort antal fenomenografiska studier har reliabilitetsprövningar utförts genom att en s k oberoende medbedömare tagit del av det empiriska materialet och med utgångspunkt från de framtagna beskrivningskategorierna identifierat de uppfattningar som framkommer i det förelagda empiriska materialet och klassificerat in dem i de befintliga beskrivningskategorierna. Överenstämmelsen mellan forskarens och medbedömarens kategoriseringar beräknas, varvid man erhåller ett mått på interbedömarreliabilitet som uttrycks i procent. Johansson, Marton och Svensson (1985) skriver att medbedömareliabiliten legat mellan 75-100 % i de flesta fenomenografiska studier. I studier där det empiriska materialet har varit omfattande och resulterat i ett större antal olika beskrivningskategorier har man kontrollerat för resultatens reliabilitet genom att låta en medbedömare pröva en eller flera utvalda beskrivningskategorier (se Annerstedt, 1991; Franke, 1990). Detta tillvägagångssätt har utnyttjats i den här aktuella undersökningen där en medbedömare har prövat en av de kategorier som beskriver variationen i elevernas uppfattningar av en specifik typ aritmetiska problem. Resulatet redovisas i kapitel nio i samband med att elevernas uppfattningar av de presenterade problemen beskrivs.

Vid en medbedömning tas således inte ställning till om de funna kategorierna reflekterar meningsinnehållet i det empiriska materialet, utan bedömningen avser enbart om de framtagna

resultaten är kommunicerbara och kan återfinnas i datamaterialet. För att bedöma resultatens validitet, när det gäller frågeställningen huruvida de kategorier som framkommit ur datamaterialet verkligen representerar uppfattningar och kommunicerar meningsinnehållet i datamaterialet, är den enda möjlighet som står till buds att någon annan person analyserar det aktuella empiriska materialet och på ett övertygande sätt kan argumentera för att det tidigare kategorisystemet var bristfälligt och att den nya tolkningen är mer giltig och rimlig. Det är emellertid oftast en omöjlig uppgift för en utomstående person att analysera ett omfattande, befintligt empiriskt material. Frågan hur tillfredsställande kategorierna återspeglar meningsinnehållet i materialet som helhet måste därför bedömas utifrån resultatens kommunikativa validitet (Kvale, 1989; Uljens, 1988). Denna aspekt av validiteten berör i vilken utsträckning tolkningen av det empiriska materialet kan göras trovärdig genom att forskaren synliggör de grunder som resultaten vilar på. Genomförande och analys bör beskrivas så tydligt att resultaten kan diskuteras och eventuella missgrepp av forskaren kan synliggöras. Forskaren skall övertygande kunna resonera och argumentera för de kategorisystem som skapats. Dessutom skall resultaten kunna förstås, vara igenkännbara och anses rimliga av läsare och forskarsamhälle.

Eftersom det empiriska materialet i denna undersökning är mycket omfattande måste resultaten bedömas utifrån den kommunikativa validiteten, dvs i vilken utsträckning de presenterade resultaten är kommunicerbara. I syfte att skapa en bedömningsgrund för läsaren redovisas i framställningen de teoretiska antaganden om kunskapssyn och kunskapsbildning som är undersökningens plattform. Även de didaktiska utgångspunkterna för studien beskrivs. Tillvägagångssättet vid datainsamlingen som innefattade en intervju- och en klassrumsstudie redovisas och en beskrivning ges av hur analysen och tolkningen av det empiriska materialet genomfördes. För att möjliggöra för läsaren att fånga innebörden i de kategorisystem som skapats illustreras samtliga beskrivningskategorierna med intervjucitat samt exempel på elevernas lösningsförslag och varierande förfaringssätt vid problemlösningen. För att skapa ett jämförelsematerial och en rikhaltigare tolkningsgrund beskrivs den undervisning som genomfördes i klassrumsstudien inte enbart från forskarens perspektiv, utan även de synpunkter som framfördes vid samtal med de deltagande eleverna och lärarna redovisas. I undersökningen har dessutom ett större antal olika delresultat och

kategorisystem framkommit som relateras och jämförs med avseende på skillnader och likheter. Det faktum att det föreligger olika delresultat, som läsaren kan ta ställning till, jämföra och relatera till den totala resultatredovisningen, öppnar vägar för en ökad förståelse och för en mer välgrundad bedömning av resultatens giltighet.

Kapitel 4

UTFORMNING AV EN UNDERSÖKNINGSSITUATION

Med det dubbla syftet att i första hand skapa ett rikt och varierat dataunderlag som möjliggjorde en grundlig analys av hur lågstadielever förstår aritmetiska problem, och i andra hand utforma en undervisning som utvecklade lågstadieelevers aritmetiska problemlösningsförmåga, planerade och utformade jag en serie lektioner i aritmetisk problemlösning som skulle göras till föremål för studier. I de studerade undervisningssituationerna tas elevernas problemlösning som utgångspunkt för undervisningen. I motsats till vad som ofta är fallet vid en läroboksbunden undervisning, där problemlösning ses som ett sätt för eleverna att träna redan inlärda algoritmer och matematiska procedurer, var målsättningen att eleverna i den studerade undervisningen i samband med problemlösning skulle få tillfälle att upptäcka och lära matematiska idéer och procedurer. Utgångspunkten för utformningen och innehållet i den studerade undervisningen var att undervisningen skulle anknyta till elevernas erfarenheter. Tre intentioner som jag anser är av avgörande betydelse för elevernas inlärning i aritmetisk problemlösning var vägledande vid planeringen och utformningen. När eleverna löser problem skall de få tillfälle:

- att använda sig sitt eget språk
- att utföra olika handlingar
- att variera sitt perspektiv på aritmetisk problemlösning och de presenterade problemen

För att ge eleverna möjlighet att använda sig av sina skiftande erfarenheter och sitt vardagliga *språk* anknyter de problem eleverna arbetar med i klassrumssituationen till deras vardagsliv och föreställningsvärld.

I undervisningen utför eleverna olika *handlingar* då de läser, skriver, talar, lyssnar och gestaltar i bild vid problemlösningen. När eleverna på detta sätt utför olika handlingar och använder skilda uttrycksformer vid problemlösningsprocessen ges de utökade

möjligheter att bearbeta sina egna erfarenheter och utveckla sina kunskaper.

För att möjliggöra att eleverna varierar sitt *perspektiv* på de presenterade problemen, skall eleverna vid problemlösningen använda olika uttrycksformer genom att rita, skriva, tala och räkna. Eleverna får tillfälle att variera sitt perspektiv vid problemlösningen även genom att den innehållsliga kontexten i de givna problemen skiljer sig åt, då olika typer av aritmetiska problem presenteras i undervisningen. En ytterligare möjlighet för eleven att se det givna problemet i olika perspektiv är att eleverna varseblir att man kan använda olika förfaringssätt och olika sätt att tänka, när man löser verbala aritmetiska problem. Eleverna skall emellertid inte enbart upptäcka att det finns en variation av lösningsätt genom att läraren presenterar olika lösningsstrategier. Istället skall eleven ta del av kamraternas problemlösningsförslag och därigenom ges möjlighet att se problemet i olika perspektiv.

DELMÅL FÖR UNDERVISNING I ARITMETISK PROBLEMLÖSNING

Utifrån mina erfarenheter som lärare och från litteraturstudier identifierades fem olika delmål som jag ansåg vara av betydelse för utveckla elevernas aritmetiska problemlösningsförmåga. Delmålen skulle bidra till att ge eleverna tilltro till sin egen förmåga att lösa aritmetiska problem, påverka deras attityder till problemlösning i positiv riktning och motverka blockeringar och matematikängslan. Med utgångspunkt från dessa delmål utformade jag därefter en undervisning i aritmetisk problemlösning där en sekvens av olika typer av verbala skriftliga problem ingick. Undervisningen, som kommer att beskrivas i det följande, omfattar såväl arbetsformer som undervisningsinnehåll. Den skall ses som ett exempel på vilka konsekvenser ett vidgat perspektiv på lågstadieelevers aritmetiska problemlösning kan få för skolundervisningen i aritmetisk problemlösning.

De fem delmålen innebär att eleverna skall upptäcka:

- att det finns olika sätt att lösa ett problem och att en konfrontation av olika lösningssätt bidrar till förståelsen av problemet

- att matematiska problem är en del av den mängd problem som människor dagligen ställs inför i vardagslivet
- att det vardagliga språket kan förbindas med det matematiska symbolspråket
- att tala, skriva och rita är betydelsefulla verktyg vid problemlösning
- att det tar tid att lösa problem

Delmålen samverkar i en gemensam undervisningskontext i syfte att utveckla elevernas problemlösningsförmåga och är relaterade till varandra och till den helhet som de tillsammans utgör. De kan ses som ett antal delmål för undervisningen, som emellertid inte kan uppnås isolerade från varandra, eftersom de är beroende av varandra och samverkar i en gemensam kontext. Syftet med studien är inte att påvisa ett specifikt delmål som mer betydelsefullt än de övriga genom en rangordning och ingående analys av det specifika delmålets betydelse för elevernas inlärning. Forskningsintresset är istället riktat mot att studera och beskriva elevernas förfaringssätt när de löser problem i undervisningssituationer som är utformade med utgångspunkt i dessa delmål. I det följande ges en beskrivning och en redovisning av tidigare forskning med anknytning till delmålen och det sätt på vilket delmålen har inverkat på den studerade undervisningens innehåll och utformning.

Det finns olika sätt att lösa ett problem och en konfrontation av olika lösningssätt bidrar till förståelsen av problemet

Anknytning till tidigare forskning

Vygotsky, framhåller i böckerna *Thought and Language* (1962) och *Mind in Society* (1978) kommunikationens och språkets stora betydelse vid inlärning. Han menar att allt tänkande har sitt ursprung och utvecklas i relationen med andra människor. En av Vygotskys huvudteser är att den sociala interaktionen mellan människor har en avgörande betydelse för begreppsutveckling och för skapandet av tankestrukturer.

> Every function in the child's development appears twice; first on the social level and later, on the indidviduel level: first between people (interpsychological) and then inside the child (intrapsychological). This applies equally to voluntary attention, to logical memory and to the formation of concepts. All the higher

functions originate as actual relationships between individuals. (1978, s 57)

Vygotsky använder begreppen "aktuell utvecklingszon" och "närmaste utvecklingszon". Aktuell är den utvecklingszon som innefattar den faktiska förmåga ett barn har. Det är denna aktuella utveckling, som enligt Vygotsky, nästan uteslutande är grunden för bedömningar av barns utveckling, och han menar att man istället borde inrikta sig mot barnens utvecklingsmöjligheter. Den potentiella utvecklingen vid varje tillfälle är begränsad till vad han kallar närmaste utvecklingszon (zone of proximal development, "ZPD"). Ett barn som arbetar på egen hand kan utföra uppgifter och tillgodogöra sig kunskaper på en viss nivå, i samarbete tillsammans med andra, mer kompetenta kamrater, eller under en vuxens ledning kan barnet emellertid nå längre. Den nivå som barnet kan uppnå med hjälp av andra, men inte av sig själv är närmaste utvecklingszon. Vygotskys hypotes innebär att barn för att bli mer kompetenta inom ett område skall träna de förmågor som ligger inom närmsta utvecklingszon med hjälp av andra människor för att sedan internalisera dem, dvs själva behärska det som de vid ett tidigare tillfälle behövde hjälp för att klara av.

Den interaktion mellan individer som Vygotsky anser är av avgörande betydelse för begreppsbildning, kan i undervisning om aritmetisk problemlösning möjliggöras genom att eleverna ges tillfälle att i grupper samtala omkring sina problemlösningsförsök och ta del av varandras lösningsmetoder. Vygotskys perspektiv ger stöd för samarbete i smågrupper vid problemlösning i matematik eftersom han betonar den sociala naturen i individens tänkande. De lösningsmetoder en elev använder sig av när hon löser problem på egen hand är en återspegling av de metoder hon använt sig av vid problemlösning tillsammans med andra. När en elev arbetar med problemlösning på egen hand har hon kanske ett lösningsförslag och arbetar i enlighet med det. Vid problemlösning i smågrupper kommer kanske varje enskild elev med ett lösningsförslag, så att det i gruppen kanske finns tre eller fyra olika förslag. Eftersom eleverna i en grupp har mer än ett förslag, måste man värdera de olika förslagen och välja emellan dem. Eleverna måste då formulera och försvara sin egen uppfattning, lyssna på och utvärdera de andra gruppmedlemmarnas förslag och slutligen delta i ett gruppbeslut om vilket förslag man skall anta. Om man accepterar Vygotskys teorier skulle elever som arbetar i grupp utnyttja sin potentiella kapacitet och tillsammans åstadkomma mer än de individuellt kan klara. Eleverna kommer även så småningom

att internalisera gruppens kompetens, så att varje enskild elev kan åstadkomma detsamma som gruppen.

I en studie av gymnasieelevers uppfattningar av fysikaliska problem beskriver Lybeck (1981) hur eleverna blir medvetna om sitt eget tänkande och kan påverka det, genom att de ges möjlighet att reagera på varandras uppfattningar. När eleverna tar del i hur kamraterna tänker kring ett problem och försöker följa denna tankegång och förstå den, förändras elevens eget sätt att tänka kring problemet. I den explorativa studien görs elevernas uppfattningar av ämnesinnehållet till undervisningssinnehåll genom att eleverna konfronterar sina olika uppfattningar av innehållet i ett samtal. Denna konfrontation av uppfattningar kan leda till kognitiva konflikter, dvs de motsägelser mellan olika uppfattningar som samtidigt kan existera hos en viss elev. I bästa fall kan konflikterna lösas genom att tankeformer och uppfattningar förädlas och enligt Lybeck övergå till mer vetenskapligt avancerade tankeformer.

Easley och Stake (1984), som har studerat hur amerikanska elever i primary school (lågstadiet) löser matematiska problem, menar att för vissa elever innebär enbart upptäckten att man kan tänka på olika sätt om ett problem en ny insikt. Eleverna är vanligtvis inriktade mot att finna den rätta lösningsmetoden som i deras ögon oftast är den som läraren väljer att presentera och de accepterar därför inte sina egna, kamraternas eller föräldrarnas lösningsmetoder. I samtal mellan eleverna, där den enskilde elevens förståelse av problemet konfronteras med kamraternas, kan eleverna upptäcka att det finns ett antal olika metoder som leder fram till rätt svar på ett problem och att en konfrontation av olika lösningsmetoder kan bidra till förståelsen av olika problem.

Implikationer för den studerade undervisningen

Eleverna skall uppmärksammas på den variation av olika lösningssätt som kan förekomma för att lösa ett problem genom att i undervisningssituationen ta del av varandras problemlösningsförslag och diskutera dem i smågrupper samt i hela klassen. Syftet med att eleverna skall uppmärksamma att man kan lösa ett problem på olika sätt är att denna insikt kan leda till att eleverna förmår variera sitt perspektiv på problemet. Vid denna process har den verbala kommunikationen en viktig funktion. Samtliga elever skall för varandra redogöra för sin uppfattning av problemet samt diskutera och jämföra sin egen lösning med kamraternas. Samtalen inriktas inte i första hand mot att finna det rätta svaret, utan

eleverna uppmuntras att redogöra för hur de har förstått problemet och ställa frågor till varandra om de olika lösningsförslagen.

Matematiska problem är en del av den mängd problem som människor dagligen ställs inför i vardagslivet

Anknytning till tidigare forskning

Skolundervisningen tar enligt Vygotsky (1962) sin utgångspunkt på ett alltför högt plan i förhållande till barnens kunskaper och begrepp och är ofta alltför intellektualiserad för att inlärningen skall vara effektiv. Han menar att barnens vardagsuppfattningar bör tas till utgångspunkt för undervisningen och att i undervisningssituationen skall två typer av kunskap mötas: den spontana kunskapen som eleven bär med sig och den vetenskapliga som läraren eller läroboken presenterar.

Många elever har uppfattningen att det finns en särskild skolmatematik som enbart utförs i skolan och som skiljer sig från den matematik som utförs i vardagslivet. Vid den intervjustudie som ingår i projektet ställdes inledande frågor till eleverna angående hur de använder matematik i vardagslivet och räkningens funktion. Elevernas svar visar att många elever anser att man räknar i skolan för att man skall lära sig att räkna. Det är ett mycket litet antal elever som förknippar matematik med något som de har användning av i sitt vardagsliv. Eleverna ser inte aritmetisk problemlösning som en aktivitet som ingår i deras vardagsliv och som är relaterad till andra aktiviter, utan skolmatematiken har ett användningsområde som är begränsat till lektionerna i skolan. Wistedt (1990) som studerar relationen mellan elevers vardagskunskaper och skolmatematiken skriver:

> Skoluppgifterna är ofta konstruerade så att de ska vara lätta att lösa med någon känd algoritm. De är m a o tillämpningsuppgifter snarare än problem i genuin mening. Räkneoperationerna går oftast jämt ut, räknesätten antyds gärna i frågeformuleringen och all numerisk information i uppgiften är tänkt att användas vid lösningen. Verklighetens mångtydiga problem möter man sällan i matematikböckerna (Kilborn 1981, Wyndham 1987, Unenge, 1989) Resultatet blir ett artificiellt kunnande som eleverna inte förmår överföra till vardagliga situationer eller matematiska sammanhang. (s 2)

Lave (1988) har kartlagt diskrepansen mellan matematisk skolkunskap och den matematiska kunskap som människor

använder sig av i vardagslivet. Hon menar att matematik i vardagslivet utvecklas i en dialektik emellan ett tänkande som är avhängigt kontexten och människors handlande i lösningssituationen. Lösningsprocessen förändras mycket ofta i den aktuella situationen, eftersom det är individens aktivitet i relation till problemet som skapar konflikter för individen vilka bidrar till lösningen av problemet. Denna form av problemlösning är enligt Lave annorlunda och helt skild från den problemlösning elever utför i skolundervisningen.

Implikationer för den studerade undervisningen

För att understryka närheten mellan problemlösning i ett vidare perspektiv och matematisk problemlösning har de problem eleverna arbetar med i den studerade undervisningen anknytning till elevernas omvärld, till deras erfarenheter och föreställningsvärld. För att uppnå en kunskapsintegration mellan elevernas vardagskunskaper och den formella matematiken utvidgas undervisningskontexten, och avviker från det vanliga mönstret i matematikundervisning med numeriska beräkningar som det huvudsakliga inslaget i undervisningen. Eftersom målsättningen är att den skarpa skiljelinjen mellan problemlösning i en vidare bemärkelse och matematisk problemlösning skall mjukas upp, innehåller de problem eleverna möter i den första fasen av problemsekvensen inte några tal och det behövs inga numeriska beräkningar för att lösa problemen. Eleverna skall erfara att matematiska problem är en del av den mängd av de problem som finns i verkligheten och som de dagligen ställs inför i sitt vardagsliv, samt att den problemlösning de utför på matematiklektionerna inte är väsensskild från de problem de möter i vardagslivet. Problemlösning utan numeriska beräkningar betraktas i detta perspektiv som en ingång till matematisk problemlösning och som en brygga mellan elevernas informella aritmetiska kunskaper och skolmatematiken.

Det vardagliga språket kan förbindas med det matematiska symbolspråket

Anknytning till tidigare forskning

Det är ett välbekant faktum att förförståelse och kännedom om ett innehåll ger en förbättrad inlärning. Donaldson (1978) menar i sin kritik av Piaget att barn kan tänka logiskt och dra slutledningar vid

lägre åldrar än vad Piagets stadieindelning visar, om barnen ges möjlighet till identifiering och förståelse av kontexten och innehållet i de problem som presenteras för dem. Det är enligt Donaldson inte alltid fallet att barnet inte har förmåga att tänka logiskt, utan det är istället en fråga om brister i kommunikationen mellan den vuxne och barnet.

Det finns en stor mängd forskning som visar att barn själva upptäcker och använder matematik när de skall lösa additions- och subtraktionsproblem i sitt vardagsliv och att de vid skolstarten har ett stort antal personliga lösningsstrategier som de utnyttjar när de skall lösa matematiska problem (Fuson & Hall, 1983; Gelman & Gallistel, 1978). I skolan möter de en skriven matematik som är olik deras tidigare sätt att räkna. Man kan iaktta en diskrepans mellan barns förmåga att utföra aritmetiska uppgifter i vardagslivet och deras förmåga att lösa de skrivna matematikuppgifter de möter i skolan (Ginsburg, 1983).

Ett kritiskt skede i matematikundervisningen är enligt Carpenter och Moser (1982) övergången från de informella personliga strategier som många elever utvecklat till användandet av memorerade talfakta och algoritmer. Enligt Carpenter och Moser upphör många elever i skolan så småningom att försöka förstå de problem som de skall lösa och de menar att äldre elevers svårigheter med att analysera och lösa problem troligtvis kan hänföras till denna övergång från de egna informella procedurerna till skolans formella matematik.

Även Easley och Stake (1984) menar att det finns en klyfta mellan elevernas informella kunskaper och det formella matematiska symbolspråket. I skolundervisningen uppmärksammas inte detta faktum, och elevernas informella kunskapar tas inte tillvara, vilket resulterar i att eleverna till stor del överger sina egna ändamålsenliga räknestrategier till förmån för skolans formella matematik.

Implikationer för den studerade undervisningen

För att det matematiska symbolspråket skall få en innebörd för eleverna måste det utgå från och förbindas med deras eget språk. Denna förbindelse upprättas i två steg, eleverna måste uppmärksamma att de löser matematiska problem på ett informellt sätt i vardagslivet och de måste bli medvetna om på vilka olika sätt de problem de ställs inför i sitt vardagsliv kan uttryckas med ett matematiskt symbolspråk. Med avsikten att eleverna skall förbinda

sitt vardagsspråk med det formella matematiska symbolspråket anknyter innehållet i de problem eleverna möter i undervisningen till deras erfarenheter och föreställningsvärld. Eleverna har då en förförståelse av problemens innehåll och ges därigenom möjlighet till identifiering i problemlösningssituationen. För att ge eleverna ytterligare möjlighet till identifiering i problemlösningssituationen presenteras vissa av problemen i form av att två barn ställs inför olika problem som de skall lösa. Eleverna kan då etablera en likhet mellan sina egna upplevelser och problemens innehåll vilket leder till inlevelse i problemen och en intuitiv känsla för problemens lösning. Detta underlättar för eleverna att förbinda talsymbolerna med det vardagliga språket.

Det aktuella problemet tas som utgångspunkt för undervisningen och eleverna skall samtala med varandra om sina olika lösningsmetoder. Vid samtalet om problemens innehåll kan eleverna använda sitt eget språk och sina informella kunskaper, samtidigt som de ges tillfälle att diskutera kamraternas skilda sätt att beskriva probleminnehållet i ett matematiskt symbolspråk. Det är elevernas samtal och problemens innehåll som skall underlätta för eleverna att upprätta en förbindelse mellan det egna språket och det formella matematiska symbolspråket.

Tala, skriva och rita är betydelsefulla verktyg vid problemlösning

Anknytning till tidigare forskning

De olika momenten tala, skriva och rita vid problemlösning redovisas ingående i nästa kapitel. I det följande ges därför endast en kortare introduktion.

Eleverna på lågstadiet ges inte i någon större utsträckning tillfälle att använda olika kommunikationsformer när de löser problem, utan undervisningen i matematik är huvudsakligen inriktad mot att eleverna skall träna sin numeriska beräkningsförmåga.

> Den numeriska räkningen har naturligtvis sin plats men den kan inte, med läroplanen som riktningsgivare, få vara det helt dominerande inslaget som det på ett närmast slentrianmässigt sätt varit och är i flertalet utvärderingsinsatser som gjorts och fortfarande görs idag. (Ljung & Pettersson, 1990 s 19)

När eleverna under matematiklektionerna är sysselsatta med numeriska beräkningar utför de olika handlingar. Om eleverna utför dessa handlingar enskilt, och deras aktiviteter inte uppmärksammas eller diskuteras under lektionerna, får eleverna

inte tillfälle att reflektera över vad de gör. Den förståelseinriktade dimensionen av matematikundervisningen blir då inte synlig för eleverna.

Implikationer för den studerade undervisningen

I den här beskrivna undervisningssituationen ges eleverna tillfälle att använda olika uttrycksformer vid problemlösningen genom att de talar, lyssnar, skriver och ritar bilder. Syftet med denna variation av handlingar är att de olika uttrycksformerna skall bidra till att eleverna ges möjligheter att reflektera över problemen och se dem från olika perspektiv, vilket kan medföra att de får en förändrad förståelse av problemen. När eleverna regelbundet använder olika uttryckssätt och framställningsformer vid problemlösning, kan de upptäcka att muntlig och skriftlig kommunikation samt gestaltning i bild är betydelsefulla verktyg vid matematisk problemlösning och att de olika uttrycksformerna stöder och kompletterar varandra.

Det tar tid att lösa aritmetiska problem

Anknytning till tidigare forskning

Det är närmast en självklarhet att eleverna för att bli goda problemlösare måste lösa ett stort antal problem. Detsamma kan sägas om det faktum att eleverna måste ägna tid åt problemlösning. En föreställning om problemlösning som är mycket vanligt förekommande hos skolelever är emellertid att om man inte genast kan lösa ett problem är det utsiktslöst att försöka komma fram till en lösning. Lester (1986) menar att en vanlig uppfattning hos elever om aritmetisk problemlösning är att inget problem tar mer än två minuter att lösa. För att eleverna skall utveckla sin problemlösningsförmåga anser Lester, att det är av största vikt att eleverna inser att det tar tid att lösa problem.

Baroody (1987) skriver att skolundervisningen i hög grad är inriktad mot att eleverna skall komma fram till rätt svar på ett problem på kortast möjliga tid. Ett implicit budskap i matematikundervisningen är att eleverna så fort som möjligt skall lära sig att använda sig av rätt fakta och rätt procedur.

> When instruction places a heavy emphasis on memorizing facts and skills, it is very likely that children will get the wrong impression of what mathematics is all about. If children are rushed into using abstract mathematical symbolism, they may

> conclude that understanding plays no role in mathematics. (Baroody, 1987 s 68)

En överbetoning i matematikundervisningen av att eleverna skall komma fram det rätta svaret och använd en enda korrekt procedur kan enligt Baroody leda till att eleverna får uppfattningen att alla problem endast har ett rätt svar, och att det endast finns ett riktigt sätt att lösa ett problem. Eleverna får då enligt Baroody felaktiga föreställningar om vad matematisk kunnande innebär. De kan dessutom få uppfattningen att alla svar som inte är absolut exakta, dvs överslagsräkning och uppskattningar, inte är önskvärda.

Implikationer för den studerade undervisningen

För att undvika att eleverna påskyndar problemlösningsprocessen, och istället arbetar under en längre tid med lösningen av ett problem, skall eleverna enbart lösa ett problem vid varje undervisningstillfälle. Problemet presenteras för eleverna i ett separat häfte för att det inte skall finns möjlighet för eleven att gå vidare och lösa andra problem. Eleverna skall ges tid att fördjupa sig i problemets innehåll, reflektera över det och arbeta under en längre tid med samma problem. När eleverna arbetar under en längre tid med ett problem kan de upptäcka att problemets innebörd kan förändras under problemlösningsprocessens fortskridande, och att det inte är förutbestämt huruvida de kan lösa ett problem eller inte. I de fall eleverna själva anser att de har slutfört sitt lösningsförslag innan kamraterna är klara, får de inte ett nytt problem att lösa utan ställs istället inför uppgiften att formulera ett eget problem, som de kan framlägga för klasskamraterna.

RITA, SKRIVA OCH TALA VID PROBLEMLÖSNING

En intention i den studerade undervisningen var att eleverna skulle få tillfälle att använda sig av sina erfarenheter och sitt eget språk vid aritmetisk problemlösning. De problem eleverna mötte anknöt därför till deras vardagsliv eller föreställningsvärld och eleverna skulle ges tillfälle att kommunicera med varandra om de olika problemlösningsförslag som framställdes i klassen. De andra intentionerna som låg till grund för utformningen av undervisningen var att eleverna skulle få tillfälle att se det presenterade problemet i olika perspektiv och utföra olika handlingar. Eleverna löste därför olika typer av problem där det

matematiska innehållet presenterades på varierande sätt, de talade med varandra och använde de olika uttrycksformerna rita, skriva och räkna.

RITA BILDER VID PROBLEMLÖSNING

Elevernas bilder är förbundna med deras handlande och de ger uttryck för elevernas erfarenheter och förståelse men även känslor, behov och önskningar. Sedan länge har man ansett bildens förmåga att föreställa något som dess utmärkande egenskap. Att bilden föreställer något betraktas som en teckenegenskap hos bilden. Den amerikanske filosofen Charles S. Pierce skiljer mellan tre grundläggande typer av tecken: ikoniska tecken (bildtecken), index och symboler. Skillnaden mellan dem ligger i det sätt på vilket förbindelsen mellan tecknet och det tecknet hänvisar till skapas, dvs den förbindelse som uppträder när något som man har framför sig skapar föreställning om något annat. Ett bildtecken skapar föreställningar om något annat än sig självt genom likhet, ett index skapar föreställningar om något annat än sig självt genom ett föreliggande samband (rök kan t ex vara ett tecken på att det brinner för den som känner sambandet mellan rök och eld), en symbol skapar föreställningar genom vana, överenskommelse eller dylikt (ordet rök betecknar rök i den språkliga praxis vi kallar svenska språket) (se Sörbom, 1984). När eleverna i de studerade undervisningssituationerna löser problem, använder de såväl ikoniska tecken som index och symboler.

I matematikens värld använder man sig av symboler. Matematik är en vetenskap om strukturer, som är uppbyggd på olika symbolsystem vilka kan betraktas som ett bildspråk. I matematik studerar man t ex ett symbolsystem med utgångspunkt tagen i andra symbolsystem, och man talar om symbolsystem som olika former av representationer. De vanligaste symbolerna är våra siffror, vilka symboliserar olika tal och som skall ge oss föreställningar om antal. Våra talsymboler har en lång historia och har utvecklats under många årtusenden, man har funnit klubbor från Fidjiöarna och svärd från Filippinerna med skåror inristade. Ett vargben påträffades i Mähren 1937 som troligtvis kan dateras åtminstone 30 000 är tillbaka i tiden. Det är försett med skåror ordnade i grupper om fem (se t ex Flegg, 1983). Från att ha varit enkla streck med direkt korrespondens till den avbildade verkligheten har symbolerna under årtusendenas gång utvecklats i riktning mot den abstrakta form de har idag.

Det finns ett stort antal studier av hur elever i olika åldrar använder tecken vid matematisk problemlösning. En del av studierna är inriktade mot att undersöka vilka former av index och symboler eleverna använder vid olika typer av matematisk problemlösning, dvs man kartlägger de olika notationssystem eleverna har tillgång till, och studerar elevernas informella representationsformer. Andra undersökningar är effektstudier, vid vilka man utarbetar olika metoder för hur eleverna skall utveckla koder och symboler samt förfina sina representationer.

Undersökningar av hur förskolebarn representerar kvantiteter har genomförts av Hughes (1986) som visar att barn inte använder konventionella procedurer när de representerar kvantiteter. Vid lösningen av olika problem kan emellertid barnen skapa ett eget koherent system för representation av kvantiteter. Barnens tecken är grundade i ett- till- ett korrespondens, men de flesta barn i förskoleålder kan även representera mängden noll. Barnen har svårigheter med att representera operationer med addition och subtraktion, enligt Hughes tycks det som om barnen har svårt att förstå innebörden i de transformationer som symbolerna för de olika räknesätten betecknar.

Dufour-Janvier, Bednarz och Belanger (1987) redovisar en studie av elevers elementära matematikinlärning, där man utarbetat en strategi för hur elever kan utveckla koder och symboler samt förfina sina representationer. Resultaten av studien visar att när eleverna arbetar i enlighet med den utarbetade strategin, upptäcker de representationernas roll för att påvisa de speciella omständigheterna i en situation som möjliggör en modellering av händelser och procedurer. Från att enbart vara beskrivande antar elevernas representationer efterhand alltmer formella och effektiva former.

Johnsen Høines (1990), som studerat elevers grundläggande matematikinlärning i ett klassrumsperspektiv, framhåller betydelsen av att eleverna i den elementära aritmetikundervisningen arbetar med bildframställning i olika former. För att eleverna skall utveckla värdefulla kunskaper om symbolfunktionen skall de:

> ... vara med om att skapa symboler, uppleva att de berättar något, uppleva vilka krav vi måste ställa på dem för att vi ska kunna använda dem i olika situationer, samt vara med och bestämma vilka symboler vi skall använda. (s 95)

Det är när eleverna i samband med att de använder sitt eget vardagliga språk utvecklar bilden som uttrycksform, som de enligt Johnsen Høines (1990) kan upptäcka bildens symbolfunktion, och inse att bilden kan representera något annat än det som är direkt avbildat.

De studerade undervisningssituationerna

I den här aktuella undersökningen är undervisningen inriktad mot att eleverna skall upptäcka bildens olika föreställande egenskaper samt dess funktion som ett redskap vid problemlösning. I problemlösningssituationen använder eleverna tre olika typer av tecken. Eleverna skapar ikoniska tecken när de illustrerar de givna problemen i sina bilder. När det i elevernas bilder föreligger ett underförstått samband mellan problemens innehåll och de framställda tecknen använder eleverna index och vid de aritmetiska beräkningarna använder eleverna våra vedertagna talsymboler. Undervisningens syfte är inte att träna eleverna i att använda en viss strategi när de tecknar bilder, som skall underlätta för dem att på ett formaliserat sätt framställa representationer. Eleverna skall istället utifrån sin egen erfarenhet framställa bilder och vid en jämförande diskussion med kamraterna upptäcka bildens funktion i en matematisk problemlösningssituation och varsebli att man på olika sätt kan representera matematiska händelser. Vid gruppsamtal skall eleverna diskutera de framställda bilderna och jämföra dem utifrån det matematiska innehållet i bilden och med avseende på bildens illustrerande funktion. Förutom att se problemens innehåll i skrift samt framställda i ett matematiskt symbolspråk, varseblir eleverna, när de tecknar bilder och iakttar sina kamraters bilder, problemen i ytterligare en framställningsform, vilket kan bidra till att de får ett förändrat perspektiv på problemen. Bildframställningen kan därmed bli ett verktyg för elevernas förståelsen av problemen.

SKRIVA VID PROBLEMLÖSNING

Matematik betraktas ofta som ett språk och därigenom som ett medel för kommunikation mellan människor. Det matematiska symbolspråket skiljer sig emellertid från de naturliga språken genom att det är uppbyggt efter logikens lagar. För att eleverna skall lära sig att behärska detta för dem främmande språk, måste de använda det matematiska symbolspråket i ett meningsfullt

sammanhang. Det är i själva språkanvändandet vi utvecklar språkliga uttryck och begrepp. Vygotsky (1962) tillmäter språket en avgörande betydelse för ett barns utveckling. Språket leder utvecklingen framåt. Vygotsky betraktar inte språk som ett resultat av begreppsutveckling utan som en del av själva begreppet och han menar att språk och tanke utvecklas i en ständigt pågående dialektik. Ord betraktas som ett medel varmed begreppsbildandet sker och begreppsuttryck är språk i vid mening, där talat språk, skriftspråk, bild- och kroppspråk är olika uttrycksmedel. Vygotsky jämför de olika språken och menar att skriftspråket är den mest utvecklade språkformen, som uppstår på grundval av de andra språkformerna och som kraftigt återverkar på dessa och på tänkandet överhuvudtaget. Skriftspråket får därigenom ytterligare en funktion utöver att tjäna som kommunikationsmedel och blir ett kraftfullt verktyg för att utveckla begrepp. Det skrivna språket blir ett medel för tänkandet eftersom det ger tid till eftertanke och öppnar möjligheter att gå tillbaka och reflektera över det skrivna. Att skriva är således ett kraftfullt och effektivt medel att uttrycka tankar med, eftersom tankarna blir synliga och vi varseblir vårt tänkande. Orden finns kvar och vi har möjlighet att gå tillbaka och reflektera över vad vi tänkt.

Det skrivna språkets betydelse för tänkandets utveckling betonas även av Donaldson (1978).

> De egenskaper hos det skrivna ordet som gynnar medvetenheten om språket kan också gynna medvetenhet om det egna tänkandet och spela en roll för utvecklingen av den intellektuella självkontrollen, med omätbara konsekvenser för utvecklingen av det slags tänkande som är utmärkande för logik, matematik och naturvetenskap. (Donaldson, 1978 s 89)

De studerade undervisningssituationerna

I motsats till elevernas informella matematiska språk som i huvudsak är ett muntligt språk, är det formella matematikspråket till stor del ett skriftspråk. För att eleverna skall bli förtrogna med det matematiska symbolspråket och förknippa det med sitt vardagliga språk måste de reflektera över vad som uttrycks och hur det uttrycks i ett formaliserat matematiskt symbolspråk. I undervisningen ställs eleverna inför uppgifter där en problemsituation beskrivs och de skall utifrån sina egna erfarenheter och med sitt eget språk berätta om den situation och de händelser som presenteras i de givna problemen och föreslå en lösning på problemet. Eleverna använder sina egna ord när de skriver om

händelserna i problemet, men de skall även försöka använda det matematiska språket och uttrycka skeendet i ett formaliserat symbolspråk. När eleverna på detta sätt införlivar det formella symbolspråket i skriftliga berättelser kan skriftspråket bli ett översättningsled mellan deras vardagliga språk och det formella symbolspråket och fungera som en förbindelselänk mellan elevernas muntliga, vardagliga språk och det formella symbolspråket.

Det inträffar att elever i dagens matematikundervisning uttrycker sig i skriftligt berättande form om sin aritmetiska problemlösning. Vanligtvis innebär uppgiften att elever beskriver hur de tänker när de löser ett problem, dels för att eleverna då får tillfälle att kommunicera om matematik, dels för att redovisningen kan tjäna som ett utvärderingsinstrument för läraren. Det kan även förekomma att elever skriver räknehändelser eller berättar om olika aktiviteter som de utför under matematiklektionerna i dagböcker eller i form av brev. I de berättelser eleverna skriver i de här aktuella problemlösningssituationerna är emellertid inte avsikten att eleverna skriftligt skall redovisa hur de tänker när de löser problem eller redogöra för sina olika problemlösande aktiviteter. Eleverna skall istället skriva helt fritt om problemets innehåll, fantisera, utvidga kontexten och utifrån sin förståelse ge förslag på en lösning av det givna problemet. Den aritmetiska lösningen av problemen införlivas på så sätt i en berättelse som skildrar problemets innehåll.

Eftersom det inte finns något formellt lösningsschema som skall följas vid problemlösningen, kan eleverna fritt uttrycka sina idéer och tankar omkring det givna problemet, och välja de aspekter av problemets innehåll som de vill behandla och fördjupa i sina berättelser. Vid varje problemlösningstillfälle skriver eleverna en berättelse, vilket innebär att de skriver ofta och regelbundet. Eleverna avgör själva hur de vill disponera den tillgängliga tiden och hur omfattande den skriftliga framställning bör vara. De får tid att skriva och att fördjupa sig i den skriftliga framställningen. Vid gruppsamtalen och vid den avslutande klassredovisningen, då berättelserna diskuteras möter eleverna gensvar och reaktioner på sin skriftliga framställning. De ger då synpunkter på lösningarna och jämför dem med avseende på allmänt och matematiskt innehåll. Eleverna ges således tillfälle att reflektera över vad de själva har skrivit, samt även att diskutera kamraternas berättelser.

TALA VID PROBLEMLÖSNING

Vygotsky (1962; 1978) tillmäter språket en avgörande betydelse för barns begreppsutveckling. Han menar att språket leder utvecklingen framåt, eftersom det är i språkanvändandet som människor bildar begrepp. Den sociala interaktionen och kommunikationen mellan människor blir därmed enligt Vygotsky av avgörande betydelse för begreppsutvecklingen. Av detta följer att elever för att utveckla matematiska begrepp måste kommunicera och använda det matematiska symbolspråket i en interaktion med andra människor.

Kommunikationens och språkets stora betydelse vid matematikinlärning betonas av de flesta matematikdidaktiker och forskare. Malmer (1984) framhåller den viktiga roll språket har när det gäller att nå kunskap och utveckla begrepp och föreställningar i matematik. Enligt Malmer är det utan tvekan fler elever som misslyckas i matematik på grund av brister i den språkliga kommunikationen än på grund av brister i t ex aritmetikkunskaper.

Lampert (1986) ger utifrån ett klassrumsperspektiv exempel på hur fundamentala matematiska principer ingår i en mängd olika procedurer som elever använder vid beräkningar. Eleverna kan inte artikulera de matematiska principerna i ett formellt matematiskt språk men de kan använda dem i olika kontexter. Lampert menar att elever i "fourth grade" (motsvarar tredje klass i Sverige) kan tillägna sig dessa principer genom att de använder och kritiserar aritmetiska procedurer samt argumenterar om innebörden i matematiska uttryck. Eleverna i Lamperts studie konstruerar olika multiplikationsalgoritmer och diskuterar huruvida de är korrekta eller inte. När eleverna framför sina olika åsikter och påståenden inför klassen, skall deras olika påståenden rättfärdigas inte enbart utifrån om de är rätt eller fel, utan även utifrån frågeställningen om de är begripliga för kamraterna.

Problemlösning i smågrupper

Vid diskussioner i större grupper eller vid samtal i helklass är det sällan samtliga elever får komma till tals. Det kan ibland förekomma att några elever ständigt intar en lyssnande roll. Ett sätt att ge eleverna ökade tillfällen till kommunikation och samtal med varandra är att låta dem samarbeta i smågrupper. När diskussionerna företas i mindre grupper ökar möjligheterna för de tysta och tillbakadragna eleverna att delta i samtalet. Problemlösning i matematik behöver inte enbart utföras

individuellt utan är ofta lämpat för arbete i grupp. I vardagslivet löser vi oftast problem tillsammans med andra, men i undervisningen förekommer det inte lika ofta. Vid den nationella utvärderingen i matematik (Ljung, 1990) har man frågat elever i årskurs fem dels om de anser att de ganska ofta räknar tillsammans med någon kamrat på lektionerna, dels om de nästan bara räknar tyst för sig själva. Endast 22% av eleverna svarar att de ganska ofta brukar räkna tillsammans med någon kamrat. Hela 76% av eleverna uppger att de räknar nästan bara tyst för sig själva på lektionerna. Elevsvaren är i god överenstämmelse med vad lärarna angett i den lärarenkät som också ingått i den nationella utvärderingen. Enligt författaren tycks det som om barnen sällan ges tillfälle till och träning i att samarbeta eller möjligheter att hjälpa varandra på matematiklektionerna:

> ... det är uppenbart att vi fortfarande har en obalans mellan olika arbetsformer i ämnet matematik, en obalans som ej är i överensstämmelse med läroplanens intentioner. (Ljung, 1990 s 5)

Det finns en stor mängd forskning om hur interaktion och samarbete i smågrupper påverkar elevernas inlärning i matematik. Faktorer som påverkar samarbetet i gruppen och som studerats är t ex lärarens roll, elevernas personlighet och kön, gruppuppgifterna och gruppernas sammansättning. Man kan finna starkt stöd i litteraturen för att samarbete och dialog har en positiv effekt på elevers matematiska problemlösningsförmåga, men resultaten är inte särskilt lättolkade eller entydiga.

Redan under 70-talet var intresset för grupparbete stort bland forskare och lärare. Barnes och Todd (1984) utförde en studie där de analyserade och beskrev trettonåriga elevernas kommunikation och inlärning när de samarbetade i smågrupper för att lösa olika problem i bl a kemi, fysik och engelska. Eleverna gjorde egna bandinspelningar av sina gruppdiskussioner. Bandinspelningarna skrevs ut och analyserades kvalitativt utifrån ett sociolingvistiskt perspektiv. En slutsats från studien var att det inte är möjligt att förstå meningen i ett samtal enbart genom att studera isolerade yttranden från eleverna. Samtliga uttalande måste ses i ett vidare sammanhang, eftersom eleverna tolkar samtalet utifrån sin kunskap om uppgiften, samtalets innehåll och kamraterna i gruppen.

Barnes och Todd (1984) analyserar samtalens innehåll och gruppernas interaktion och beskriver och diskuterar olika sociala och kognitiva färdigheter som eleverna använder sig av när de löser sina uppgifter. Eftersom det inte finns någon lärare i gruppen

och den enda kunskapskällan är eleverna själva och det material eller den information som finns framför dem, avviker elevernas uppträdande från det typiska klassrumsbeteendet. Eleverna försöker gå till materialet i stället för att leta efter tecken från läraren. De testar sina tolkningar av kamraternas yttrande genom att jämföra dem med sin egen förståelse av uppgiften och på så sätt använder de sig av varandra som resurser. Elever som samarbetar i smågrupper besitter och utnyttjar i varierande grad färdigheter som inte kommer till användning i en konventionell undervisning. Enligt Barnes och Todd är det vid diskussioner i klassrummet vanligtvis läraren som bestämmer ämnet för diskussionen, avgör vilka elever som skall tala, tystar andra elever och bedömer kvalitén på elevernas diskussionsinlägg. När eleverna samtalar i grupp, utan att någon vuxen är närvarande, har de själva ansvaret för att leda samtalet. Eleverna måste vara överens om vem som skall tala, när man skall tala och hur. De måste kunna hantera tillfälliga konflikter och även tystnad i gruppen. Samtliga gruppmedlemmar uppmuntras att bidra till diskussionen och samtidigt skall man försöka hindra att enskilda elever dominerar samtalet med inlägg som inte leder någonstans. Eleverna måste bedöma de olika bidragens relevans och bestämma anknytningen till den aktuella uppgiften. Dessutom måste man göra en övergripande bedömning om diskussionens kvalité, så att man kan avgöra när det är lämpligt att avsluta diskussionen.

Samarbete är inte tillräckligt, samtalen måste leda till ny förståelse av uppgiften. Barnes och Todd (1984) har beskrivit hur eleverna använder olika kognitiva strategier när de ställer frågor, formulerar följdfrågor eller nya frågor. Eleverna ställer hypoteser, använder bevis och uttrycker känslor och erfarenheter. Exempel ges på att eleverna är medvetna om olika lösningsstrategier, att de kan relatera alternativa förslag, utvärdera samtalet och att de har förmåga att styra sitt tänkande. Vid gruppdiskussionen använder eleverna sig av alltså de metakognitiva färdigheter som av många forskare anses vara av stor betydelse när det gäller problemlösningsförmågan i matematik.

Studier av hur lågstadieelevers samtal kan utveckla tänkandet och inlärningen vid problemlösning i matematik har utförts av Easley och Stake (1984). De har fått impulser till forskningen från Japan där de studerat undervisningen i matematik. Easley och Stake anser att barn som börjar skolan har ett stort antal olika lösningsstrategier som de använder när de löser matematiska problem i sitt vardagsliv. Barnens sätt att tänka om olika innehåll i undervisningen är ofta olikt lärarens sätt att undervisa om det.

Eftersom barnens problemlösningsförmåga inte tas tillvara i undervisningen blir följden att barnen i årskurs tre är helt beroende av de lösningsstrategier som presenteras av läraren. För att tillvarata de olika strategier barnen använder sig av när de löser matematiska problem låter Easley och Stake barnen samtala om problemet. Läraren presenterar ett problem och var och en av eleverna försöker lösa det. När alla är färdiga skall de diskutera sina idéer och lösningar i smågrupper. Läraren bör välja utmanande problem så att eleverna stimuleras och tycker att det är spännande och roligt med problemlösning. När barnen i tur och ordning redogör för sin lösning av problemet skall läraren stödja elevernas dialog så att samtliga i gruppen lyssnar, argumenterar och försöker kritisera varandras idéer. Inom gruppen väljer man ut en eller flera lösningar som presenteras för hela klassen. Vid presentationen inför hela klassen riktas intresset mot de olika strategier som grupperna använt för att lösa problemet i stället för att fokuseras på det rätta svaret. Slutsatsen som Easley och Stake drar av sina studier är att när barnen i en dialog ges möjlighet att diskutera och konfrontera sina egna idéer och problemlösningar med kamraternas, tränar de upp sin förmåga att kombinera olika lösningsstrategier och utvecklar därigenom sitt matematiska tänkande.

Webb (1989) menar att inlärningen är bättre eller minst lika effektiv när elever arbetar tillsammans i smågrupper än vad som är fallet vid individuellt arbete. Enligt Webb är det emellertid inte alltid i studier av gruppinlärning dokumenterat att det är kommunikationen och gruppinteraktionen som bidrar till en ökad inlärning. Det kan lika gärna vara socio - emotionella faktorer med en ökad motivation som en starkt bidragande faktor. Webb framhåller svårigheterna med att bedöma olika forskningsresultat eftersom metoder och mätinstrument ännu inte är utvecklade och anpassade för att undersöka inlärning i smågrupper.

Noddings (1985) anser att om det enda kriteriet man är intresserad av är en förbättrad problemlösningsförmåga kan man troligtvis uppnå lika goda resultat med en väl genomförd klassrumsundervisning som när eleverna samarbetar i smågrupper, även han påpekar dock brister i analysmetoderna.

Damon (1989) visar i en undersökning att vid additions- och subtraktionsuppgifter lärde sig mellanstadieelever som arbetade i smågrupper inte mer än de elever som arbetade enskilt. När det däremot gällde uppgifter som berörde bl a proportionalitet och bråk var inlärningen klart bättre för de elever som arbetat i

grupper. Damons förklaring är att vissa uppgifter ställer krav på mer specifik undervisning och på minneskunskaper medan andra typer av problem fodrar nya insikter och begreppsliga skiften. Insikterna kan nås genom att eleverna samarbetar eftersom samarbete uppmuntrar till att pröva nya och osäkra idéer. När elever arbetar tillsammans kan eventuella misstag bli roande istället för att vara personligt hotande, och svårigheterna behöver inte verka avskräckande utan kan upplevas som en utmaning. Eftersom man arbetar med samma problem vid samma tillfälle, granskas lösningsförslag och antagande av kamrater som är väl insatta i varandras problemlösningsprocess, vilket medför att de kan förstå vilka svårigheter gruppkamraterna brottas med.

Johnson (1989) menar att om matematikundervisningen syftar till att eleverna skall tänka matematiskt, förstå sambanden mellan olika matematiska fakta och procedurer samt kunna använda matematisk kunskap flexibelt och meningsfullt, så måste eleverna ges tillfälle att samarbeta. Johnson menar bl a att inlärning av matematiska begrepp och färdigheter sker bäst i en dynamisk process där eleverna engagerar sig, får tillfälle att "tala matematik" och förklara för varandra hur de resonerar. Dessutom får eleverna enligt Johnson bättre självförtroende när de samarbetar.

Vid studier av hur flickor respektive pojkar bemöts i grupper framkom enligt Webb (1989) att elever som frågade en flicka om hjälp, för det mesta fick mer ingående förklaringar än om man frågade en pojke, det spelade ingen roll om frågan ställdes av en flicka eller pojke. I en annan studie jämfördes olika gruppsammansättningar: två flickor och två pojkar, tre flickor och en pojke, och tre pojkar och en flicka. Det framkom att både flickor och pojkar ger mer förklaringar i grupper med majoritet av endera könet än i grupper med lika många flickor som pojkar. I grupper med flest flickor riktade flickorna flest förklaringar till pojken. I grupper med flest pojkar riktade pojkarna största delen av förklaringarna till andra pojkar och ignorerade ofta flickan. Flickorna var alltså inte i lika hög grad som pojkarna delaktiga i interaktionen. Denna skillnad mellan hur pojkar och flickor blir bemötta i skolundervisningen i matematik bekräftas även av Fennema (1985).

Forskningsresultaten är inte helt entydiga, vilket visar att det är besvärligt att kartlägga och utvärdera arbete i smågrupper. Effekterna är flerdimensionella och det är många aspekter som måste beaktas och övervägas samtidigt, för att man skall förstå hur

grupparbete påverkar elevers inlärning och kognitiva utveckling. Resnick (1988) beskriver en pågående forskning där man försöker finna lämpliga metoder för att analysera gruppinteraktion utifrån sociala och inlärningsteoretiska perspektiv och dessutom försöker utveckla en strategi för att förbättra elevernas inlärning när de interagerar och kommunicerar med varandra under den gemensamma problemlösningen. Man har i ett av de försök som utförts låtit eleverna arbeta med "stickrepliker" som de vid problemlösningen erhåller på ett kort för att få dem att bli uppmärksamma på vad de gör och att ifrågasätta sina handlingar:

1. *Varför skall vi göra det?*

Frågeställningen innebär ett ifrågasättande och rättfärdigande av den valda proceduren.

2. *Är du säker på att vi skall addera (subtrahera, multiplicera, dividera)?*

Frågeställningen innebär ett ifrågasättande och rättfärdigande av en specifik beräkning.

3. *Vad är det vi försöker göra nu?*

Frågeställningen innebär ett ifrågasättande och klargörande av målet.

4. *Vad betyder talen?*

Frågeställningen innebär att eleverna skall uppmärksamma mening istället för beräkningar och symbolmanipulationer.

Resultaten från Resnicks studie visar att eleverna efter tretton undervisningstillfällen med denna typ av frågekort inte förbättrat sin generella problemlösningsförmåga. Enligt Resnick har det således inte någon positiv effekt på elevernas problemlösningsförmåga om de får tillgång till speciella ledtrådar och frågor i problemlösningssituationen. Den slutsats Resnick drar av resultaten från studien är att man bör frångå en global inriktning vid studier av och undervisningsförsök med gemensam problemlösning.

För att utveckla elevernas generella problemlösningsförmåga vid samarbete i smågrupper skall man således enligt Resnick försöka utveckla mycket strukturerade problemlösningsstrategier som eleverna skall använda i problemlösningssituationen. Rakt motsatt slutsats drar Marton (1976) i en studie, där även han påvisar ett misslyckande med inlärningsalgoritmer (som talar om för individer vad de skall göra för att lära sig en uppgift). En experimentgrupp bestående av högskolestuderande uppmanades att läsa en text mycket noggrant. Studenterna fick innan genomläsningen påbörjades veta att efter varje stycke skulle muntliga frågor på texten ställas av försöksledaren. Frågorna som ställdes var

avsedda att förmå studenterna att inta ett djupinriktat förhållningssätt till texten och underlätta för dem att förstå vad de läst. Vid ett efterföljande minnestest gjorde emellertid den grupp studenter som besvarade frågor på texten enbart korta omnämnande av innehållet, och de presterade avsevärt sämre resultat än studenterna i en motsvarande kontrollgrupp, till vilka inte några frågor hade ställts vid genomläsningen av texten. Förklaringen till detta något oväntade resultat anses vara att studenterna i experimentgruppen vid läsningen av texten fokuserade de kommande frågor som skulle ställas på texten, vilket resulterade i en nedbrytning och fragmentarisering av textens innehåll. Studenterna utvecklade troligtvis en strategi för att inhämta den information som var nödvändig för att besvara försöksledarens frågor och fördjupade sig därmed inte i textens innehåll utan teknifierade inlärningsprocessen.

En alltför formaliserad problemlösningssituation kan således innebära en risk för att eleverna i hög grad inriktar sig mot att svara på eventuella frågor eller blir beroende av att följa den förelagda strategin istället för att fördjupa sig i problemet och försöka förstå det. Formalisering och teknifiering av elevernas problemlösningssituation binder elevernas inlärning till den speciella problemlösningssituationen och teknifierar problemlösningsprocessen. Elevernas tänkande blir i stor utsträckning knutet till den speciella problemlösningssituationen och deras problemlösningsförmåga blir därmed i hög grad situationsbunden. Det är således tveksamt om man för att åstadkomma en generellt förbättrad problemlösningsförmåga hos eleverna, enbart skall inrikta sig mot att finna former för utvecklandet av strukturerade och riktade problemlösningsstrategier som Resnick (1988) rekommenderar.

De studerade undervisningssituationerna

I den problemlösningssituation som beskrives i denna framställning är elevernas interaktion inte styrd genom att de vid samarbetet har olika uppgifter eller har tilldelats olika repliker. Den styrning som förekommer vid gruppsamtalen är att gruppledaren har ansvaret för att samtliga elever i gruppen får presentera sin lösning och att de andra i gruppen lyssnar. Eleverna utarbetar först ett enskilt förslag till lösning på det aktuella problemet, därefter diskuterar man i gruppen de olika framlagda förslagen. Den fas där eleverna arbetar gemensamt vid problemlösningen är således när de väljer ut den lösning som skall presenteras för den övriga klassen. De

givna problemen är "öppna", dvs den numeriska datan i problemen är inte alltid tydligt specificerad och lösningsmetoderna är inte uppenbara. Eleven måste själv välja den information som behövs för en lösning av problemet och dessutom välja ett av flera tänkbara tillvägagångssätt. Gruppmedlemmarna presenterar alternativa lösningsförslag, således finns flera olika lösningsförslag att ta ställning till vilket medför att samarbetet och kommunikationen i gruppen utvecklas.

Eleverna i gruppen måste vid samtalet värdera de olika förslagen och välja emellan dem. De måste bedöma de olika bidragens relevans och bestämma anknytningen till den aktuella uppgiften samt diskutera och konfrontera sina egna idéer och problemlösningar med kamraternas. De skall argumentera utifrån sin egen uppfattning av de olika förslagen och försöka upptäcka och framföra fördelar och nackdelar med samtliga lösningsförslag. Vid samtalet skall eleverna således formulera och försvara sin egen uppfattning, lyssna på och utvärdera de andra gruppmedlemmarnas förslag och slutligen delta i ett gruppbeslut om vilket förslag man skall välja ut för att presentera för de övriga klasskamraterna. Kommunikation är en process för att utveckla befintliga kunskaper, inte för att överföra kunskaper. När eleverna delger varandra sina tankar muntligt kan den sorts kommunikation uppstå där den elev som talar, genom att uttrycka sig i ord blir klarare över sina egna tankegångar, och den som lyssnar genom tolkningen av kamratens ord får en förändrad förståelse av samtalets innehåll. Språket är således nyckeln till förståelsen av ett problem och eleverna skall lyssna och tala, använda sitt eget språk och vidareutveckla det genom att fråga, redogöra, beskriva och förklara. När eleverna upptäcker att kamraterna har löst problemet på ett annorlunda sätt än de själva, och de samtalar om olika lösningssätt i gruppen uppmärksammas eleverna på sina egna handlingar vid problemlösningen och kan reflektera över dem.

PROBLEMSEKVENS I FEM FASER

Med utgångspunkt från de tidigare redovisade undervisningsprinciperna för aritmetisk problemlösning konstruerade jag en problemsekvens bestående av tjugo verbala, skriftliga problem indelade i fem faser utifrån typ av problem. I problemsekvensen

ingår problem som i flera avseenden skiljer sig från de problem eleverna vanligtvis arbetar med under matematiklektionerna, och som man studerat i tidigare forskning inom detta område. De fem delmålen är en plattform för såväl undervisningens uppläggning som för problemens innehåll och utformning. Problemsekvensen är riktad mot delmålen, dels genom de enskilda problemens speciella utformning och innehåll, dels genom den progression mot en alltmer formaliserad aritmetisk problemlösning som framkommer i de olika faserna av problem.

Det matematiska innehållet i de problem som ingår i problemsekvensen innefattar de nödvändiga kunskaper i grundläggande aritmetik som eleverna enligt läroplanen skall tillägna sig under sin lågstadietid. Samtliga fyra räknesätt kommer till användning, de aritmetiska beräkningarna är emellertid relativt enkla för att frigöra tid till problemlösningsprocessen. Ett av additionsproblemen ligger inom talområdet >100. Övriga problem berör ett lägre talområde. De problem som innefattar multiplikation har ena faktorn högst fem och divisionsproblemen kan lösas med multiplikation där den ena faktorn är högst fem.

I det inledande kapitlet gavs en översikt av olika analysmodeller som använts för att beskriva skriftliga verbala problem. Utgångspunkten vid analyserna tas i problemens matematiska innehåll och struktur (Carpenter & Moser, 1982), problemens språkliga innehåll och struktur (Nesher, 1982) samt i de skilda problemlösningsstrategier som kan användas vid lösningen (Charles & Lester, 1982). De problem som eleverna möter i denna undersökning analyseras och kategoriseras inte i termer av svårighetsgrad och matematisk komplexitet, och inte heller utifrån en detaljerad analys av innehållsliga logiska, semantiska och syntaktiska komponenter eftersom syftet är att synliggöra elevernas perspektiv på problemen. En samlad beskrivning av de olika problemtyperna i sekvensen ges med utgångspunkt i en redovisning av problemens innehåll. Tydliga språkliga skiljaktigheter mellan problemen i de olika faserna uppmärksammas, och problemens matematiska innehåll och det sätt på vilket detta innehåll presenteras i problemet redovisas. Problemsekvensen är indelad i fem faser och innefattar följande typer av problem:

Fas 1: Berättelseproblem utan aritmetisk innehåll

Fas 2: Berättelseproblem med aritmetisk innehåll

Fas 3: Numeriska uträkningar införlivas i elevernas berättelser

Fas 4: Berättelseproblem med uppskattning

Fas 5: Benämnda uppgifter

Fas 1: Berättelseproblem utan aritmetiskt innehåll

I de fyra problem som ingår i den första fasen presenteras problemet i form av en lång berättelse med anknytning till elevernas verklighet eller föreställningsvärld. Det ges möjlighet till identifikation i berättelsen genom att en flicka och en pojke i elevernas egen ålder upplever ovanliga händelser och i olika situationer ställs inför ett problem som de skall lösa. Berättelserna i denna fas innehåller ett stort antal ord och meningar, men inga tal och det behövs inga numeriska beräkningar för att lösa problemen. Frågor skall väckas hos eleverna och de skall använda sin kreativitet och fantasi för att göra personliga tolkningar och lösningar av problemet. Trots det faktum att problemen inte innehåller några tal och eleverna inte behöver utföra aritmetiska operationer förekommer en matematik i problemen i form av omvärldsbeskrivningar i tid och rum där tidskillnader beskrives i form av situationer som inträffar före respektive efter en viss händelse. Ett geometriskt innehåll kommer till uttryck genom beskrivningar av egenskaper, form, riktning, läge och lägesförändring (se bilaga 1). Dessa matematiska aspekter av problemens innehåll är emellertid inte i fokus i den här genomförda undersökningen.

Syftet med att i problemsekvensen införliva problem vilka inte erfordrar numeriska beräkningar, är att mjuka upp den starka skiljelinjen mellan problemlösning i en vidare bemärkelse och matematisk problemlösning som många elever upplever. Eleverna skall vid diskussionen om de presenterade problemen uppmärksammas på det finns olika typer av problem och att matematiska problem är en del av de problem som finns i verkligheten och som de dagligen ställs inför i sitt vardagsliv. Problemen har avsiktligt formulerats mycket öppet, med möjligheter till alternativa lösningssätt, för att eleverna skall inse att man ofta kan lösa ett problem på olika sätt.

Fas 2: Berättelseproblem med aritmetiskt innehåll

Aritmetiska beräkningar förs in i berättelserna den andra fasen, men i denna fas ges det möjlighet till alternativa lösningar vilka inte inbegriper räkneoperationer. Problemen anknyter även i denna

fas till elevernas erfarenheter eller föreställningsvärld och framställs i form av berättelser där en flicka och en pojke skall lösa ett problem som de ställs inför i olika situationer. Det förekommer en mängd information i berättelserna som är irrelevant för problemets lösning men som är avsedd att väcka och stimulera elevernas intresse. I motsats till de skriftliga problemlösningsuppgifter eleverna vanligtvis arbetar med på matematiklektionerna innehåller berättelserna även i denna fas ett stort antal ord och meningar, vilket medför att det aritmetiska innehållet till viss del är dolt i texten. Eleverna kan vid en aritmetisk lösning av problemet använda olika metoder och räknesätt. Liksom i fas ett förekommer här matematik i form av omvärldsbeskrivningar i tid och rum. Ett geometriskt innehåll kommer till uttryck genom beskrivningar av egenskaper, form, riktning, läge och lägesförändring (se bilaga 2).

Syftet med att i problemsekvensen införliva problem, där talen är dolda i innehållet, är att eleverna själva skall uppmärksamma den aritmetiska dimensionen i problemformuleringen och träna sin känslighet för och förmåga att upptäcka den matematik som förekommer i omvärlden. Det finns möjligheter till alternativa lösningsmetoder vid problemlösningen för att eleverna skall inse att ett problem kan lösas på olika sätt och att en numerisk lösning av problemet ibland är en lämplig lösningsmetod.

Fas 3: Numeriska uträkningar införlivas i elevernas berättelser

I fas tre skall eleverna själva skriva berättelser om en given uträkning. En uträkning t ex 18+7=25 presenteras för eleverna och de skall fundera ut och skriva en berättelse som innefattar ett aritmetiskt problem i deras föreställningsvärld och som leder till den givna uträkningen. Eleverna kan ta hjälp av de tidigare identifikationsmodellerna genom att skriva om den flicka och pojke som i de tidigare problemen ställts inför problem som skall lösas, eller eleverna kan fantisera helt fritt. De olika räknesätten addition, subtraktion, multiplikation och division är representerade med var sin uppgift (se bilaga 3).

Syftet med problemen i fas tre är att eleverna när de gestaltar den givna uträkning i ord måste förbinda det matematiska symbolspråket med sitt eget vardagliga språk, vilket kan medföra att eleverna får insikt om att en aritmetisk operation kan beskriva en händelse eller en situation i deras vardagsliv.

Fas 4: Berättelseproblem med uppskattning

I fas fyra förekommer de båda barnen återigen i olika situationer men i en kortare berättelse. Problemen är inte logiska i matematisk mening eftersom de saknar den numeriska information som behövs för att eleverna skall kunna utföra en aritmetisk beräkning. Eleverna måste själva uppskatta och bestämma de numeriska fakta som är nödvändiga för att en aritmetisk operation skall kunna utföras. Liksom i fas ett och två förekommer matematik i form av omvärldsbeskrivningar i tid och rum. I problemen i denna fas ingår dessutom bl a prisbegrepp och proportionalitet (se bilaga 3).

Syftet med att i problemsekvensen införliva problem där det saknas numerisk information är att eleverna skall uppmärksamma att de problem som förekommer i omvärlden ser olika ut, träna upp sin förmåga att estimera numeriska fakta samt inrikta sig mot att behandla det aritmetiska innehållet i problemen.

Fas 5: Benämnda uppgifter

Problemen i fas fem är i förhållande till problemen i första och andra fasen korta och innehåller ett färre antal ord och meningar. De liknar den typ av skriftliga, verbala problem eleverna ofta möter i sina matematikböcker. För att eleverna skall kunna lösa problemen måste aritmetiska beräkningar utföras. Problemen är formulerade så att de relativt enkelt kan gestaltas i bild. Vid lösningen är det möjligt att använda olika lösningsmetoder och räknesätt. Prisbegrepp, mätetal, de fyra räknesätten, kommutativa och distributiva lagen ingår i det matematiska innehållet (se bilaga 3).

Syftet med att införliva benämnda uppgifter i problemsekvensen är att eleverna skall förbinda dessa problem med de andra typer av problem som de mött tidigare i problemsekvensen och inse att även problem av den typ som de oftast möter i sina matematikböcker kan lösas på ett antal olika sätt. Problemen är enkla att gestalta i bild med avsikten att eleverna skall uppmuntras att rita bilder vid problemlösningen och därigenom upptäcka att bildgestaltning kan vara ett värdefullt verktyg vid aritmetisk problemlösning.

KLASSRUMSSITUATIONEN

Eleverna ställs vid lektionerna inför en uppgift som innebär att de skall lösa ett skriftligt verbalt problem. De skall vid problemlösningen rita, skriva och utföra beräkningar samt i smågrupper samtala om varandras lösningsförslag.

Vid varje undervisningstillfälle möter eleverna enbart ett problem. Det framställs i ett särskilt häfte, i vilket eleverna även skall utföra problemlösningen. Häftena har pärmar i olika färg i de fem faserna för att underlätta för eleverna att avgränsa problemen i de olika faserna från varandra. I häftena förekommer det inte några illustrationer förutom ett antal frågetecken på pärmarna, eftersom avsikten är att elevernas tankar skall vandra fritt och de skall skapa sina egna associationer och bilder. Häftena innehåller fem sidor. Problemet presenteras på första, andra sidan innehåller information till eleverna om hur de skall gå tillväga under lektionen och de tre sista sidorna utnyttjas till elevernas berättelser, bilder och numeriska kalkyler. Eleverna arbetar först med de fyra problemen i fas ett, därefter följer problemen i fas två respektive tre, fyra och fem.

I undervisningen integreras skolämnena matematik, svenska och bild. Varje undervisningstillfälle är 80 minuter och följer ett bestämt mönster. Läraren inleder lektionen med att läsa upp det aktuella problemet för klassen så att i synnerhet de lässvaga eleverna skall få en omedelbar upplevelse av problemets innehåll. Därefter delas häftena ut och eleverna påbörjar problemlösningen med att läsa igenom problemet själva. De elever som så önskar får hjälp vid genomläsningen av läraren. Eleverna väljer själva om de vill inleda problemlösningen med att skriva en berättelse, rita en bild eller utföra en numerisk kalkyl.

Eleverna är indelade i grupper med fyra barn i varje grupp. I några få grupper förekommer det att man är tre eller fem medlemmar. Gruppmedlemmarna utarbetar en egen lösning på det aktuella problemet och när samtliga elever i gruppen anser att de är klara med sin lösning redovisas lösningarna inför gruppen. I varje grupp finns en gruppledare som ansvarar för att samtliga elever i gruppen framför sin lösning och att man lyssnar på varandra. Eleverna fungerar som gruppledare efter en uppgjord turordning. Gruppdiskussionerna spelas in på band och det är gruppledarens uppgift att ansvara för inspelningen. När gruppmedlemmarna redovisat sina lösningar diskuteras förslagen och man bestämmer gemensamt i gruppen vilken lösning som skall presenteras inför

klassen. Gruppledarna redovisar därefter gruppernas förslag inför klassen varvid läraren antecknar lösningsförslagen på tavlan och de olika gruppernas lösningsförslag diskuteras. När samtliga grupper redovisat, konfronteras de olika lösningsförslagen med varandra i en jämförande och sammanfattande diskussion. Det huvudsakliga intresset inriktas i denna diskussion inte mot att kategorisera lösningarna i rätt eller fel utan i stället mot att uppmärksamma variationen av lösningsförslag och de olika lösningsmetoder eleverna har använt vid problemlösningen.

Häftena med berättelser, bilder och aritmetiska beräkningar samlar barnen i en egen pärm. Efterhand som antalet problem ökar diskuteras problemen i de olika faserna vid de inledande och avslutande samtalen i klassen. Problemen jämföres med varandra för att eleverna skall ges tillfälle att urskilja likheter och skillnader mellan de olika typerna av problem.

LÄRARENS ROLL

I klassrumsundervisning medverkar många aktörer, och där utspelas ett stort antal händelser i en kontinuerlig följd. Vid genomförandet av ett forskningsföretag i klassrumssituationer är det omöjligt att observera och fånga in allt som samtidigt pågår i undervisningen. Det är nödvändigt att begränsa intresset och fokusera avgränsade företeelser i den aktuella situationen. I denna undersökning studeras elevernas förfaringssätt när de löser olika typer av problem samt deras förståelse av aritmetisk problemlösning. Den undervisande läraren står således inte i fokus för forskningsintresset och lärarens roll har därför i vissa avseenden systematiserats för att underlätta tolkning och analys av data.

Läraren läser inledningsvis upp problemen för klassen och besvarar frågor under den enskilda problemlösningen. Vid gruppkommunikationen är lärarens viktigaste uppgift att underlätta kommunikationen mellan eleverna, stödja deras dialoger och försöka hjälpa eleverna att ta ställning och ansvar för sina tankar och funderingar. Läraren betonar vikten av att eleverna lyssnar på varandra, tar ansvar för sin lösning och framför den så att den är begriplig för de övriga i gruppen. Vid den avslutande redovisningen leder läraren diskussionen och relaterar gruppernas olika lösningsmetoder till varandra. Lärarens intention skall då vara att stärka elevernas självförtroende och försöka underlätta för eleverna att skapa tillit till sin förmåga att lära och att lösa

matematiska problem. Vid diskussionerna står inte rätt eller fel svar i fokus för intresset, utan lösningarna uppmärksammas och diskuteras med utgångspunkt från de varierande tillvägagångssätt eleverna använt när de löst problemen. Diskussionen skall handla hur eleverna har tänkt och hur de gått tillväga vid problemlösningen, och i vilka avseenden de olika lösningsförslagen skiljer sig åt när det gäller matematiskt innehåll.

Läraren skall försöka bedriva undervisningen på så sätt att de fem delmålen för undervisning i aritmetisk problemlösning, som inledningsvis redovisades i detta kapitel kan uppnås.

Kapitel 5

UNDERSÖKNINGENS GENOMFÖRANDE

Utformning och uppläggning av projektet påbörjades under vårterminen 1986, då jag utförde ett antal provintervjuer med olika typer av benämnda uppgifter. Därefter formulerade jag ett antal olika problem vilka var tänkta att ingå i problemsekvensen samt planerade undervisningens innehåll.

En inledande pilotundersökning genomfördes i en klass med 24 elever i årskurs tre under höstterminen 1986. Studien byggde på de tidigare beskrivna undervisningsprinciperna, problemsekvensen var emellertid indelad i fyra faser. Avsikten med pilotstudien var att pröva ut de problem som skulle ingå i studien och undersöka om projektet i något avseende behövde modifieras. Försöket sträckte sig över 8 lektionstillfällen om vardera ca 80 minuter. Inom varje fas presenterades två problem för eleverna. Vid pilotstudien arbetade eleverna intensivt och inspirerat med att lösa de givna problemen. De var intresserade av kamraternas lösningar och samtliga elever var engagerade både i det enskilda arbetet och vid gruppdiskussionerna. Stämningen i klassrummet präglades av harmoni och verksamhetslust och eleverna gav tydligt uttryck för sin besvikelse när undersökningen var över. Vid en enkät efter pilotförsöket uttryckte samtliga elever förutom en pojke att de tyckte det var roligt, spännande eller bra att se hur kamraterna hade löst olika problem. Den elev som hade en avvikande uppfattning anser att det är "så där" att samtala med kamraterna och att se hur de löst de olika problemen. Förutom denne elev uppgav samtliga elever att man de ansåg att man kan lära sig lösa problem om man ser kamraternas lösningar, och genom att lyssna på hur andra har tänkt och resonerat när de löser problem.

Med utgångspunkt från resultaten av pilotstudien bearbetades problemsekvensen under vårterminen 1987 varvid ett större antal problem formulerades och problemsekvensen kompletterades med ytterligare en fas av problem. Läsåret 87-88 utfördes i två omgångar ett antal provintervjuer varefter de problem som skulle ingå i studien utvaldes. Detta följdes upp av 10 nya provintervjuer för att utröna om uppläggningen av intervjuerna ytterligare

behövde korrigeras. Provintervjuerna ledde emellertid inte till några förändringar av problemsekvensen.

För- och eftertesten utprövades vid två tillfällen i två klasser under vårterminen 1987. Höstterminen 1988 genomfördes huvudstudien. De elever som deltog i undersökningen i huvudstudien gick i årskurs tre på lågstadiet och var cirka nio år gamla. Årskurs tre bedömdes som en lämplig årskurs för projektet, eftersom de flesta elever i årskurs tre behärskar ett relativt stort talområde när de använder räknesätten addition och subtraktion, samt inom ett begränsat talområde även kan utföra beräkningar med multiplikation och division. Vidare har flertalet elever i årskurs tre uppnått en relativt god läs- och skrivkunnighet, vilket är en fördel eftersom de flesta av problemen innehåller mycket text och elevernas problemlösningsförslag innefattar skrivna berättelser.

Urvalet av de deltagande klasserna skedde godtyckligt på så sätt att sex lågstadielärare tillfrågades om de var villiga att delta i projektet. Det enda kriteriet för att medverka i undersökningen var att det enligt klasslärarens bedömning förekom stor spridning i klassen med avseende på elevernas matematikkunskaper. Indelningen i deltagande- respektive kontrollklasser gjordes utifrån den pragmatiska bedömningen att avstånden mellan skolorna med de tre försöksklasserna inte skulle vara alltför stort för att bespara projektledaren tidskrävande resvägar. Skolorna med de deltagande klasserna är belägna i hyres- och radhusområden i Göteborg med omnejd. Innan undersökningen inleddes deltog jag vid föräldramöte i två av de deltagande klasserna och informerade elevernas föräldrar om projektets syfte och innehåll. I den tredje klassen informerades föräldrarna av klassläraren.

Det fanns fyra invandrarbarn i de deltagande klasserna. Dessa elever har emellertid inte varit föremål för särskilda studier, eftersom de deltog i klassens ordinarie undervisning och talade god svenska. I de tre kontrollklasserna fanns tre invandrarbarn, men inte heller dessa elever har utsatts för speciell uppmärksamhet eftersom även de talade god svenska och deltog i klassens ordinarie undervisning. I de deltagande klasserna var det totalt 66 elever och i kontrollklasserna 55 elever.

	Deltagande klasser	Kontrollklasser
Flickor	28	29
Pojkar	38	26
Totalt	66	55

Tabell 5.1. *Antalet elever i de deltagande klasserna och i kontrollklasserna*

Projektet pågick under en termin. Det inleddes med ett förtest i samtliga deltagande- och kontrollklasser vecka 34 och avslutades med ett eftertest vecka 50. Intervjuundersökningen utfördes vecka 34-36 innan klassrumsstudien påbörjades. När samtliga intervjuer var genomförda inleddes klassrumsstudien vecka 37 i de tre klasserna. I varje klass fördelades den studerade undervisningen på två tillfällen i veckan om vardera 80 minuter, med några undantag då undervisningstillfället fick framflyttas på grund av lov eller aktiviteter i klasserna. Klassrumsstudien pågick till och med vecka 49 och omfattade sammanlagt 68 undervisningstillfällen.

En sammanfattande översikt av tidsperspektivet för projektets genomförande visar:

Vecka	34-35	Förtest i de tre deltagande klasserna och i de tre kontrollklasserna
	34-36	Intervjustudie i två klasser
	37-49	Klassrumsstudie i de deltagande klasserna
	50	Eftertest i de deltagande klasserna och i kontrollklasserna

FÖR- OCH EFTERTEST

Vid testkonstruktionen gjordes bedömningen att om eftertestets uppgifter var av samma typ som de problem försöksklasserna arbetat med skulle kontrollklasserna ha ett avsevärt sämre utgångsläge än försöksklasserna. Testen har därför inte samma innehåll och form som de problem eleverna i försöksklasserna arbetade med. Varje test innehåller tolv skriftliga matematiska uppgifter, vilka konstruerades utifrån skrivningarna i Lgr 80 om nödvändiga kunskaper i grundläggande aritmetik på lågstadiet. Uppgifterna i testen är den typ av benämnda uppgifter som eleverna möter i sina matematikböcker och som i många fall utgör utgångspunkten för skolundervisningen i problemlösning. Problemen innefattar de fyra räknesätten: addition, subtraktion, multiplikation och division. Vissa av uppgifterna kan lösas med flera olika räknesätt.

Förtestet genomfördes i de tre deltagande klasserna och i kontrollklasserna innan undervisningen i de deltagande klasserna inleddes. Testet var tidsbegränsat till 40 minuter. Eleverna hade inte några

hjälpmedel. På grund av testets karaktär, där elevernas läsförmåga kan inverka på resultatet, erbjöds de elever som ansåg att de hade svårigheter med läsningen hjälp av läraren. Det poängterades mycket starkt av testledaren att det inte var den enskilde eleven som skulle testas, utan avsikten var att studera hur eleverna gick tillväga när de löste uppgifterna. Eleverna uppmanades att på anvisad plats på testformuläret skriva och ställa upp de beräkningar som de utförde i samband med lösningen av uppgiften. De skulle emellertid försöka svara på samtliga uppgifter, även om de inte kunde redovisa någon beräkning (se bilaga 4).

Eftertestet genomfördes i samtliga klasser när undervisningssekvensen var genomförd. Även eftertestet var tidsbegränsat till 40 minuter. Omständigheterna och instruktionerna vid testens genomförande var desamma vid för- och eftertesten. Eleverna hade inga hjälpmedel, men om de så önskade fick de hjälp med att läsa uppgifterna. Vikten av att skriva svar på samtliga uppgifter poängterades samt nödvändighet av att tydligt redovisa samtliga uträkningar. På grund av att några elever presterade mycket bra på förtestet omformulerades uppgifterna i eftertestet något, och ett antal distraktorer i form av information som är ovidkommande för problemens lösning införlivades i vissa uppgifter i eftertestet. De språkliga formuleringarna i motsvarande uppgifter i för- och eftertest är därför inte helt identiska (se bilaga 5).

INTERVJUSTUDIEN

Intervjustudien utfördes i två av kontrollklasserna. Eleverna löste vid intervjuerna de problem som eleverna arbetade med i de studerade undervisningssituationerna. Intervjuerna ägde rum de första veckorna på höstterminen i två klasser med vardera 19 elever, därav 18 flickor och 20 pojkar, sammanlagt genomfördes således 38 intervjuer.

Eleverna intervjuades i ett ostört rum på skolan under lektionstid och intervjuerna varade genomsnittligt 40-45 minuter. De bandinspelades och har sedan skrivits ut i sin helhet. Problemen i problemsekvensen fördelades på de två klasserna, eftersom eleverna inte kan lösa tjugo problem vid ett intervjutillfälle. För varje elev presenterades två problem från var och en de olika faser av problem som ingick i problemsekvensen. Intervjusamtalen inleddes med ett antal frågor om elevens inställning till matematik, vad matematik innebär och räkningens användbarhet i

vardagslivet. Avsikten med dessa frågor var att få en naturlig inledning på samtalet och möjlighet att jämföra elevernas syn på matematik med deras kommande problemlösningar. Efter det inledande samtalet påbörjades problemlösningen, varvid de olika problemen lästes upp för eleven. Varje enskilt problem presenterades på ett särskilt papper som eleverna hade tillgång till vid problemlösningen.

KLASSRUMSSTUDIEN

Vid varje undervisningstillfälle observerades händelseutvecklingen i klassrummet och observationsanteckningar fördes. Vid observationerna stod den verbala kommunikationen mellan eleverna och mellan läraren och eleverna i fokus för intresset. De frågor eleverna ställde under lektionerna antecknades. Även elevernas agerande vid problemlösningen, gruppsamtalen och klassredovisningen observerades och antecknades. Med avsikten att komplettera observationsanteckningarna bandinspelades samtalen vid lektionens inledning där läraren framförde det aktuella problemet inför klassen. Även den avslutande gemensamma klassredovisningen bandinspelades.

För att dokumentera elevernas gruppsamtal spelades elevernas diskussioner in på band. I varje grupp var en gruppledare utsedd vars uppgift bl a innebar att hämta gruppens bandspelare och att ansvara för inspelningen av samtalen.

Efter varje slutförd problemfas utfördes bandinspelade intervjuer med de deltagande lärarna. Vid samtalen diskuterades den genomförda undervisningen och lärarna kommenterade och gav sina synpunker på händelserna i klassrummet, gruppsamtalen, problemen och elevernas inlärning.

Tolv slumpvis utvalda elever intervjuades återkommande efter varje slutförd problemfas. Från två av klasserna intervjuades fyra elever från vardera klass enskilt, medan samtalen i den tredje klassen fördes i en grupp med fyra elever. Sammanlagt har 45 intervjuer genomförts. Intervjuerna varade ca 10 minuter och inriktades mot elevernas förståelse av problemen i den aktuella fasen samt deras förmåga att relatera problemen i de olika faserna till varandra. Eleverna gav även synpunkter på de olika problemtyperna, gruppsamtalen och sin egen inlärning.

SAMMANSTÄLLNING AV DATAMATERIALET

Det är en ansenlig mängd data som har samlats in vid de båda studierna. De två klasser i vilka intervjustudien genomfördes utsågs även till kontrollklasser. I den tredje kontrollklassen genomfördes inte några intervjuer eftersom jag ansåg att 38 intervjuer gav tillräckligt dataunderlag. För att ge en överskådligare bild av det av det empiriska materialet i intervju- och klassrumsstudien ges nedan en sammanställning.

Datamaterialet från intervjustudien

- *Intervjuutskrifter*

  38 utskrivna intervjuer samt 10 provintervjuer
- *Skriftlig dokumentation* som omfattar de bilder och aritmetiska beräkningar som eleverna utförde när de arbetade med de olika problemen

Datamaterialet från klassrumsstudien

- *Resultat på för- och eftertest*

  Elevernas dokumenterade problemlösningsförsök vid för- och eftertestet.

  Elevernas resultat på för- och eftertest i de tre klasserna
- *Elevernas dokumentation* som består av de skriftliga berättelser, bilder och aritmetiska beräkningar som producerats vid problemlösningen. Eleverna har sammanlagt utfört ca 1300 problemlösningsförslag samlade i 66 stycken A4-pärmar.
- *Observationsanteckningar* över händelseutvecklingen under 66 lektioner. I fokus står interaktionen och den verbala kommunikationen mellan eleverna och mellan läraren och eleverna. Anteckningar fördes vid samtliga problemlösningstillfällen samt vid genomförande av för- och eftertest.
- *Bandinspelningar* som till stora delar har transkriberats till skriven text.

  Lärarens inledande presentationen vid 60 lektionstillfällen.

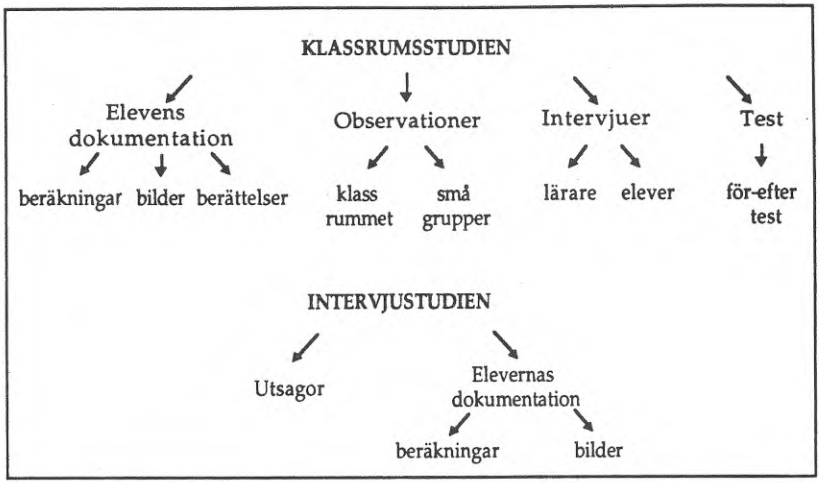
  Den avslutande gemensamma klassredovisningen vid 60 lektionstillfällen.

  Elevernas samtal i smågrupper vid 60 lektionstillfällen.

  15 intervjusamtal med de deltagande lärarna efter varje avslutad problemlösningsfas.

  Intervjuer med 12 elever efter varje genomförd problemfas.

Datainsamlingen kan visas med en schematisk bild.



Figur 5.1. *Översiktlig bild av det empiriska materialet i intervju- och klassrumstudien*

För att få tillgång till ett innehållsrikt och varierat datamaterial vid kartläggningen av lågstadieelevers förfaringssätt när de matematiska problem studerades elevernas problemlösning dels i en intervjusituation, dels i en klassrumssituation. Intervjuerna genomfördes inte med eleverna i de deltagande klasserna, däremot presenterades samma problemsekvens i de båda studerade problemlösningssituationerna. Eftersom klassrumsstudien och intervjustudien är utförda i olika kontexter föreligger skillnader i karaktären av det insamlade datamaterialet. Det övergripande syftet och det studerade undervisningsinnehållet överensstämmer emellertid i de båda studierna, vilket medför att studierna är komplementära, och gemensamt har bidragit till den resultatredovisning som nu följer av hur lågstadieelever upplever, förstår och uppfattar aritmetiska problem och problemlösning i en skolkontext.

DEL III
RESULTAT

Kapitel 6

DE STUDERADE UNDERVISNINGSSITUATIONERNA

Den beskrivning av de studerade undervisningssituationerna som ges i det följande är avsedd att ge en belysning av hur elevernas problemlösning gestaltade sig i den kontext där problemlösningsförsöken utfördes. Elevernas och lärarnas synpunkter på den genomförda undervisningen presenteras för att ge en bild av hur eleverna upplevde och förstod undervisningens innehåll. Beskrivningen är dessutom avsedd att förankra de huvudresultat som senare kommer att presenteras i det sammanhang från vilket de delvis är framsprungna.

Elevernas lärande har studerats i ljuset av den genomförda undervisningen. De handlingar eleverna utförde i undervisningssituationen var avsedda att blottlägga elevernas förståelse av aritmetiska problem och problemlösning samt att befrämja deras aritmetiska problemlösningsförmåga. Elevernas handlingar när de ritar, skriver, talar och räknar vid problemlösningen betraktas i denna undersökning som en form av kommunikation. Beskrivningen och analysen av de genomförda undervisningssituationerna tar därför sin utgångspunkt i elevernas kommunikation om undervisningsinnehållet samt deras lärande.

BESKRIVNING AV UNDERVISNINGENS GENOMFÖRANDE

De tre klasser som deltog i de studerade undervisningssituationerna var olika, dels på grund av att det förekom skillnader mellan klasserna med avseende på elevernas kunskaper och färdigheter och dels beroende på att de deltagande lärarna var olika personligheter och använde olika undervisningsmetoder. Olikheterna påverkade naturligtvis undervisningen och situationen i klassrummet. Den studerade undervisningssekvensen var emellertid mycket strukturerad. Detta bidrog till att stora likheter kunde urskiljas med avseende på det sätt undervisningen genomfördes i de olika klasserna och även med avseende på

elevernas agerande under lektionerna. För att ge en bakgrund till resultatredovisningen tecknas inledningsvis en översiktlig bild av hur den studerade undervisningen gestaltade sig i de tre klasserna.

Eleverna ställdes vid varje lektion inför en uppgift. Uppgiften innebar att eleverna skulle lösa ett skriftligt verbalt problem som presenterades av läraren. Vid problemlösningen skulle eleverna rita, skriva, tala och utföra aritmetiska operationer. Lektionerna inleddes med att läraren redogjorde för hur eleverna skulle gå tillväga, och därefter lästes det aktuella problemet inför klassen. I en av klasserna introducerades den första uppgiften på följande sätt[1].

L. Ni ska få ett blått häfte av mig (håller upp häftet). I det står en berättelse som jag ska läsa upp. Den handlar om två barn som heter Lena och Per. De råkar ut för konstiga saker. ... Saker som de undrar över hur de kan ha hänt, och som de inte riktigt kan förklara. ... Du ska försöka hjälpa dem att komma på vad barnen skall göra för att ta reda på vad som har hänt. ... När du får häftet skall du läsa igenom berättelsen. Och fundera över den. När du gjort det ska du skriva en berättelse och och tala om vad som har hänt och vad du tycker att barnen skall göra och du skall rita en bild till berättelsen. ... Som ni vet kommer ni att sitta i grupper och diskutera och det är dom berättelser och bilder som ni har gjort som ni ska samtala om. ... När alla i gruppen tycker att dom är färdiga skall gruppledaren hämta bandspelaren som står här framme *(pekar)* och som har ett nummer på. Ta den bandspelare som har gruppens nummer .... När gruppledaren har satt på bandspelaren ska ni i i tur och ordning läsa upp berättelserna som ni har skrivit för varandra och visa bilderna. Förklara för varandra vad ni tror har hänt och vad Lena och Per gör. ... Ni ska tillsammans välja en lösning som gruppledaren skall presentera för hela klassen .... och när ni har sett alla lösningarna ska ni prata om dom och välja ut det förslaget. När ni är färdiga stänger gruppledaren av bandspelaren .... och sen ska gruppledaren visa förslagen för klassen och vi ska tillsammans se hur ni har löst problemet. ... Tänk på att du skriver tydligt eftersom det kan vara svårt för någon annan att läsa det du skriver.

E. Ska vi skriva först?

L. Du får börja att skriva om du tycker det ... eller med att rita. Men försök att göra både en berättelse och en teckning.

E. Ä det svårt?

L. Det är inte svårt, men du ska tänka efter.

E. Ska vi rita och skriva i häftet?

L. Ja det finns en vit sida som du kan rita på en linjerad sida som du skriver på. ... När vi pratar om era lösningar kanske vi ser att alla inte

---

[1] L betecknar läraren och E står för elev. Punkterna i intervjucitaten markerar att lärare eller elever gör en paus.

löser det här problemet på samma sätt, utan att ni har olika förslag på vad som har hänt. Det ska bli spännande och se hur ni gör.

E. Skall vi göra så här fler gånger?
L. Ja, och det är mycket att komma ihåg första gången, men snart kommer ni inte alls att tycka att det är svårt.

Eleverna tycktes mycket intresserade av det presenterade problemet och lyssnade uppmärksamt vid lärarens genomgång. Efter genomläsningen av det aktuella problemet delades elevhäftena ut och eleverna påbörjade sin individuella problemlösning. När samtliga elever i en grupp ansåg att de var klara med problemlösningen diskuterades de olika olika problemlösningsförslagen i smågrupperna. Vid gruppsamtalen var det gruppledarens ansvar att hämta en bandspelare, placera den på gruppens bord och se till att samtalen spelades in. När eleverna började samtala i grupper höjdes ljudnivån i klassrummen betydligt, men efterhand som eleverna kom igång med samtalen blev det lugnare och man talade oftast med varandra med låg röst. Gruppinteraktionen utvecklade sig emellertid i olika riktningar i de olika grupperna. I flertalet grupper diskuterade man relativt lugnt och dämpat, medan ljudnivån i några grupper, beroende på att man i gruppen hade olika åsikter, stundtals blev hög. Medlemmarna i gruppen beslutade gemensamt vilken av lösningarna som skulle framföras för den övriga klassen. En mer ingående beskrivning av elevernas gruppdiskussioner ges i kapitel sex där elevernas samtal i smågrupperna behandlas.

Vid den gemensamma klassdiskussionen läste gruppledarna upp den skriftliga berättelsen som innefattade den aritmetiska lösningen av problemet, och därefter visades den bild som illustrerade problemets innehåll. Lärarna ledde redovisningen av gruppernas förslag och skrev efterhand upp de olika lösningsförslagen på tavlan. Lösningarna diskuterades i klassen och de olika lösningsförslagen jämfördes, varvid likheter och skillnader uppmärksammades. Som ett exempel på hur klassredovisningen gestaltade sig, kan vi se på de lösningsförslag som framkom vid redovisningen av det första problemet i varje fas.

Problem 1.1 (Stökigt i lägenheten)[2]

Efter varje presentation av ett lösningsförslag vände sig läraren till klassen och frågade hur hon skulle skriva på tavlan, för att kort

[2] Problemen presenteras i bilagorna 1-3. För att läsaren skall få en föreställning om probleminnehållet ges problemen verbala benämningar.

sammanfatta den lösning som framkommit i berättelsen. Eleverna föreslog då kortfattade formuleringar. I en av klasserna framkom följande förslag.

Grupp 1.	Katten har varit inne och stökat till.
Grupp 2.	Det har varit inbrott.
Grupp 3.	Katten har varit där.
Grupp 4.	Det har varit kidnapping.
Grupp 5.	En stor svart katt har stökat till.

Tablå 6.1. *Sammanställning av gruppernas lösningsförslag*

I klassen samtalade man om de olika lösningsförslagen i anslutning till det givna problemets innehåll, och läraren inriktade elevernas uppmärksamhet mot att det i problemet nämndes att barnen på hemväg från skolan såg en katt som sprang iväg. Vid samtalen uppmärksammades det faktum att flera grupper hade samma lösningsförslag. Problemet kunde emellertid ha flera tänkbara lösningar och läraren framhöll att det i denna typ av problem inte finns någon lösning som ger det rätta svaret.

Problem 2.1 (Äpplen till hästarna)

Efter varje gruppledares redovisning frågade läraren klassen hur den aktuella lösningen kortfattat kunde sammanfattas och antecknade svaren på tavlan. Läraren skrev även upp de aritmetiska beräkningar som eleverna hade utfört.

Grupp 1.	Man delade äpplena och fick 16 halvor	3+3+2=8	2·8=16
Grupp 2.	Hämtade äpplen	6+2=8	8+8=16
Grupp 3.	Plockade mer äpplen	8+8=16	
Grupp 4.	Delade äpplena	8·2=16	
Grupp 5.	Man hämtade äpplen	8+8=16	2·8=16

Tablå 6.2. *Sammanställning av gruppernas lösningsförslag*

Vid samtalen i klassen uppmärksammades att problemet kunde lösas på skilda sätt och att det är möjligt att ge lösningsförslag som inte innefattar aritmetiska beräkningar. Läraren gick medvetet in för att inrikta elevernas intresse mot problemets aritmetiska

innehåll och det uppmärksammades exempelvis att det antal äpplen Per stoppar i sina byxfickor beror på hur många fickor det finns i byxorna. Det faktum att några elever hade uppfattningen att man kan lösa problemet genom att hämta fler äpplen och andra elever menade att man kan dela de äpplen som barnen redan hade plockat diskuterades i klassen. Eleverna fick tala om varför de valt ett visst räknesätt och förklara hur de hade tänkt vid lösningen. Läraren framhöll att man kan tänka på olika sätt när man räknar, och sambandet mellan addition och multiplikation diskuterades med utgångspunkt från det lösningsförslaget där additionen 8+8 och multiplikationen 2·8 var noterad.

Problem 3.1 (18+7=25)

I fas tre skrev eleverna berättelser om en given uträkning. I denna fas fick eleverna i klassen efter varje redovisning ge en sammanfattande beskrivning av berättelsernas innehåll som i många fall överensstämde med den rubrik eleverna själva satt på berättelsen. Läraren antecknade elevernas förslag på tavlan tillsammans med de aritmetiska operationer som eleverna utfört.

Grupp 1.	Äppleplockning	7 äpplen + 18 äpplen = 25 äpplen
Grupp 2.	Grilla korv	18 korvar + 7 korvar = 25 korvar
		20 bröd + 5 bröd =25 bröd
Grupp 3.	Plocka äpplen	12 1/2 äpple + 12 1/2 äpple = 25 äpplen
Grupp 4.	Lena är rädd för kor	7 kor + 18 kor = 25 kor
Grupp 5.	Tugga tuggummi	18tuggummin+7tuggummin=25tuggummin

Tablå 6.3. *Sammanställning av gruppernas lösningsförslag*

När samtliga förslag var redovisade ställde läraren frågor till eleverna i klassen om de kunde se några skillnader mellan de olika förslagen. Det faktum att förslaget från grupp tre inte var relaterat till talen i den givna uträkningen uppmärksammades, och skillnaderna detta förslag och övriga förslag diskuterades. Läraren betonade emellertid att det var en korrekt aritmetisk operation. I de framlagda lösningsförslagen tecknade eleverna termerna i olika ordning, vilket uppmärksammades av eleverna och ledde till att man i klassen samtalade om operandernas godtyckliga ordning (den kommutativa lagen för addition).

Problem 4.1 (Försäljning av blommor)

I fas fyra är elevernas aritmetiska beräkningarna mycket skiftande beroende på att eleverna själva uppskattar numeriska fakta i problemen. Redovisningen följde samma mönster som tidigare och läraren antecknade gruppernas lösningsförslag på tavlan.

Grupp 1. Klassen tjänar 250 kronor			
25 kronor för varje blomma.		25·10=250	25·10=250
20 blommor		250+250=500	25·20=500
Grupp 2. Klassen tjänar 200 kronor			
10 kronor för varje blomma		20·10=200	
20 blommor			
Grupp 3. Klassen tjänar 230 kronor			
10 kronor för varje blomma	10·20=200	10·3=30	200+30=230
23 barn			
Grupp 4. Klassen tjänar 480 kronor	3		
15 kronor för varje blomma	32		
32 blommor	...		
	...		
	+...		
	480	*(32 adderat 15 gånger)*	
Grupp 5. Klassen tjänar 230 kronor			
10 kronor för varje blomma	10·23=230		
23 barn			

Tablå 6.4. *Sammanställning av gruppernas lösningsförslag*

Liksom tidigare jämfördes gruppernas förslag och orsakerna till att priset på blommorna varierade diskuterades i klassen. Intresset riktades även i denna fas mot det sätt på vilka eleverna tecknat uträkningar, och deras olika sätt att tänka vid de aritmetiska beräkningarna uppmärksammades. Orsakerna till att det endast var i en av gruppernas förslag som en algoritm användes vid beräkningen diskuterades. I anslutning till en diskussion om elevernas skilda sätt att tänka, när de gjort deloperationer vid

beräkningarna för att komma fram till en lösning, uppmärksammades sambandet mellan addition och multiplikation.

Problem 5.1 (Barnen får skrivböcker och räkneböcker)

Vid problemlösningen i fas fem skrev eleverna på samma sätt som tidigare en berättelse, ritade en bild, utförde en aritmetisk operation och samtalade i smågrupper. Gruppledaren presenterade liksom tidigare ett lösningsförslag inför klassen och läraren skrev därefter en sammanfattning på tavlan.

Grupp 1.	I skolan		
	57 böcker	19+19+19=57	
		19	
		19	
		+19	
		57	
Grupp 2.	Utdelning av böcker		
	57 böcker	3+3+3+3+3+3+3+3+3+3=30	
		3+3+3+3+3+3+3+3+3=27	
		27	
		+30	
		57	
Grupp 3.	Räkneapparaten		
	57 böcker	19·2=38 19·3=57	
Grupp 4.	Böcker i skåpet		
	57 böcker	19+19=38	38+19=57
		19	38
		+19	+19
		38	57
Grupp 5.	Böcker till barnen		
	57 böcker	19·3=57	

Tablå 6.5. *Sammanställning av gruppernas lösningsförslag*

När lösningsförslagen jämfördes vid klassdiskussionen poängterade läraren att det fanns många olika sätt att komma fram till en lösning på problemet och uppmanade eleverna att förklara hur de hade tänkt när de löste problemen. De skilda sätt på vilka eleverna tecknat en uträkning, eller använt algoritmer diskuterades och även elevernas skilda behandlingssätt när de utfört deloperationer vid beräkningarna uppmärksammades.

LÄRARES OCH ELEVERS FRÅGOR

Vid jämförelsen av de olika lösningsförslagen efter redovisningen av de olika lösningsförslagen styr lärarna samtalen i klassrummet genom att ställa frågor eller genom att uppmana eleverna att fundera över en frågeställning. Lärarna bemöter elevernas uttalande genom att upprepa, omformulera eller förklara dem och utvärderar därvid elevernas uttalande. Lektionerna skiljer sig i detta avseende inte från det fråga- svars mönster som är så vanligt förekommande vid klassrumsundervisning, vilket tidigare diskuterats i anslutning till klassrumsforskningen (Gustavsson, 1984; Lundgren,1983). En avgörande skillnad mot det traditionella sättet att undervisa är emellertid att i de studerade undervisningssituationerna tas utgångspunkten för samtalen i klassen i de lösningsförslag som eleverna själva framställt. Innehållet i samtalen utgår därmed från elevernas egna tankar och funderingar, vilka synliggörs och därigenom bildar ett reellt innehåll i undervisningen. När lösningsförslagen diskuteras och man för en jämförande diskussion om de olika lösningsförslagen ges eleverna ytterligare tillfälle att bidra till undervisningsinnehållet, genom att läraren bemödar sig om att införliva deras uttalanden i undervisningskontexten, och låta elevernas synpunkter förklara och tydliggöra matematiska idéer och aritmetisk problemlösning. Vid samtalen om lösningsförslagen poängterade läraren att det fanns många olika sätt att komma fram till en lösning på ett problem, och eleverna uppmanades att förklara hur de hade tänkt när de löste de givna problemen. De skilda sätt på vilka eleverna tecknat en uträkning, eller använt algoritmer uppmärksammades och även deras skilda sätt att utföra deloperationer vid de numeriska beräkningarna diskuterades i klassen.

Med syftet att eleverna skall inse att det finns olika sätt att lösa problem och att vissa typer av problem kan ha flera möjliga svar,

var intresset vid klassrumssamtalen inte fokuserat vid "det rätta svaret" utan mot att konfrontera de olika lösningsförslagen och samtala om de skilda förfaringssätt eleverna använt för att lösa problemet. Vid de första lektionerna var emellertid eleverna intresserade av få reda på vilket svar som var rätt, och i samtliga tre klasser förekom att någon elev vände sig till mig och frågade: "Vad är rätt?" När svaret blev att det inte fanns en enda "rätt" lösning utan att flera svar var tänkbara märktes en aning besvikelse hos eleverna och de ställde följdfrågor som "Ja, men vad hade du för lösning?" eller "Vad tänkte du på?" Denna typ av frågor upphörde vid de följande lektionerna vilket pekar mot att eleverna accepterade det faktum att det fanns flera tänkbara svar och att man kunde lösa problemen på olika sätt.

Den aktuella undersökningen har sin upprinnelse i de frågor eleverna ställer till sin lärare vid matematiklektionerna. Inledningsvis i denna framställning nämndes att det är vanligt att elever när de skall lösa aritmetiska problem inte tar egna initiativ utan vänder sig till sin lärare och frågar hur de skall gå tillväga för att lösa problemet. Även i den studerade undervisningen ställde eleverna frågor. Vid den första lektionen undrade några elever i samtliga klasser om undervisningens uppläggning och organisation. De frågade t ex. "Ska vi börja med att rita?" "Får vi skriva först ?". Svaret på denna typ av frågor var att eleverna skulle välja själva på vilket sätt de ville inleda problemlösningen. Redan vid andra lektionen avtog emellertid denna typ av frågor och fortsättningsvis frågade eleverna inte särskilt mycket under lektionerna. Emellertid ställde vissa elever ofta några frågor innan lektionerna påbörjades och vid lektionernas inledning t ex "Handlar det fortfarande om Lena och Per?" (barnen som förekom i de första berättelserna) eller "Är det gula häften idag också?". En fråga som många gånger framställdes av en och samma elev var "Är det svårt?".

De flesta eleverna påbörjade genast arbetet, men det inträffade att någon elev dröjde en stund innan arbetet med problemlösningen inleddes. Eleverna frågade emellertid inte sin lärare vad de skulle göra för att lösa problemet. När läraren en kort stund in på lektionen frågade David[3] varför han inte började arbeta svarade han: "Jag tänker på det ... vad det är om". Sverker besvarade samma fråga från läraren med att han inte visste hur han skulle inleda arbetet: "Jag vet inte hur jag ska börja". Sverker var noga

[3]Eleverna har i en av klasserna tilldelats namn som börjar på A till H. I den andra respektive tredje klassen har eleverna tilldelats namn som börjar på I till P respektive R till V.

med att hans lösningar skulle vara rimliga och verklighetsanknutna och han uttryckte vid flera lektionstillfällen: "Jag vet inte hur jag ska skriva, för jag vill inte ha något overkligt". Eleverna frågade emellertid inte sin lärare vad de skulle skriva eller hur de skulle lösa problemet. I observationsanteckningarna finns inte noterat något tillfälle då eleverna frågade läraren hur man skall gå tillväga för att lösa det givna problemet. Eleverna planerade självständigt sitt arbete och påbörjade problemlösningen på eget initiativ.

När eleverna arbetat en stund med problemet hände det att några elever vände sig till sin lärare och frågade: "Är det bra?". Detta förekom oftare i en klass än i de övriga, där denna fråga under en lektion ställdes av sex flickor. Vid samtliga lektioner i de tre försöksklasserna var det endast en pojke som frågade sin lärare om det egna problemlösningsförslaget var bra. Det inträffade emellanåt att några elever utförde relativt komplicerade numeriska beräkningar och därvid vände sig till sin lärare för att diskutera beräkningarna och för att fråga om de var korrekta.

En iakttagelse som gjordes i samtliga tre klasser var att det till stor del var en mindre grupp av elever som ställde de flesta frågorna. Det var särskilt tydligt i en av klasserna där en grupp pojkar ställde flertalet frågor och även till största delen besvarade lärarens frågor (jfr Gustavsson, 1984; Lundgren, 1983).

Sammanfattningsvis kan sägas att eleverna huvudsakligen ställde frågor vid lektionernas inledning. Dessa frågor var till största delen var procedurfrågor som berörde undervisningens organisation och uppläggning, alltså det praktiska utförandet av uppgiften. Frågorna berörde således uppgiften som sådan, och inte hur man skulle gå tillväga för att lösa det givna problemet. Vid de inledande undervisningstillfällena undrade eleverna dessutom vilket som var det rätta svaret på problemet. Frågor av denna typ upphörde emellertid efter några lektioner. De flesta eleverna verkade vara inspirerade av problemlösningsuppgifterna och lärarna uttryckte vid flera tillfällen förundran över den verksamhetslust som präglade arbetet i klassrummet. Samtliga tre deltagande lärare kommenterade i positiva ordalag det förhållandet att eleverna så snart lärde sig ett nytt arbetssätt.

ELEVERS OCH LÄRARES SYN PÅ UNDERVISNINGEN

Elever och lärare har deltagit i den undervisning som beskrivs i denna framställning. Vilken uppfattning om den genomförda undervisningen har aktörerna? Kan man finna likheter och skillnader mellan elevers och lärarnas syn på undervisningen och i de fall skillnader framkommer, i vilka avseenden skiljer sig elevers och lärares uppfattningar? Med utgångspunkt i dessa frågeställningar analyseras och beskrivs i det följande elevernas och lärarnas syn på den undervisning de varit delaktiga i. Analysen är förankrad i en innehållsanalys och tolkning av intervjusamtal med elever och lärare samt skriftliga redogörelser från eleverna. Elevers och lärares uttalanden har analyserats och tolkats dels med avseende på gemensamma drag och dels med avseende på särskiljande drag. Enbart i de fall då det ansetts vara av särskilt intresse har frekvenser angivits.

UNDERVISNINGEN I ELEVERNAS PERSPEKTIV

Eleverna framförde som tidigare redovisats synpunkter på undervisningen under lektionerna. För att fördjupa kunskapen om elevernas uppfattningar intervjuades tolv elever efter varje avslutad problemlösningsfas. När undervisningssekvensen avslutats gav dessutom eleverna i två av klasserna synpunkter på den genomförda undervisningen i skriftliga redogörelser. På grund av tidsbrist vid terminens avslutning fick detta lektionstillfälle utgå i den tredje klassen.

Intervjusamtal med eleverna

När samtliga fyra problem i varje fas var lösta intervjuades fyra slumpvis utvalda elever från varje klass om de problem som de arbetat med i den aktuella fasen. Syftet med intervjusamtalen var att eleverna skulle berätta om sin syn på undervisningen och de problem man hade arbetat med. Intresset vid intervjusamtalet var inriktat mot att kartlägga om eleverna kunde se skillnader och likheter mellan de olika problemtyperna och att diskutera elevernas samarbete i smågrupperna. Intervjusamtalen inleddes med en uppmaning till eleverna att beskriva den fas av problem man för tillfället arbetat med och frågor ställdes huruvida eleverna såg några skillnader och likheter mellan de olika problemtyperna.

Intervjuernas innehåll kan med avseende på samtalens tema indelas i tre områden: problemsekvensen, samtalen i smågrupperna samt elevernas inlärning.

Hur ser eleverna på problemsekvensen?

I undervisningen och vid intervjuerna har inte termen faser använts. Problemtyperna har istället diskuterats med utgångspunkt från färgen på de olika häften i vilka problemen presenterats.

Fas	Benämning	Färg
1	Berättelseproblem utan aritmetiskt innehåll	Blå
2	Berättelseproblem med aritmetiskt innehåll	Gula
3	Uträkningar som införlivas i berättelser	Vita
4	Berättelseproblem med uppskattning	Gröna
5	Benämnda uppgifter	Rosa

Tabell 6.1. *Problemfasernas benämning och färg på respektive häften*

När problemsekvensen behandlas vid intervjuerna värderar eleverna olika problem och problemtyper samt beskriver likheter och skillnader mellan problemtyperna. Det förekom en variation när det gäller elevernas inställning till de olika problemtyperna, emellertid ansåg de flesta att problemen i de första faserna var roligast. En orsak till detta kan vara att problemen i de första faserna har helt öppna frågeställningar och att eleverna vid lösningen av problemen upplever att de i dessa faser har störst frihet vid utformningen av sitt lösningsförslag. De flesta av eleverna ansåg även att problemen i de två första faserna var lättast. Eleverna sätter således likhetstecken mellan roliga problem och lätta problem. I den nationella utvärderingen av matematiken framkom emellertid att 22 % av eleverna ansåg att matematikämnet är svårt men samtidigt roligt (Ljung, 1990). Av elevernas uttalanden skall man således inte dra slutsatsen att arbetet med problemlösning blir roligt bara för att det är enkelt. Det är möjligt att det är den specifika utformningen av och innehållet i de olika problemtyperna i problemsekvensen som påverkar elevernas inställning. En nödvändig förutsättning för att elever skall uppleva problemlösning som roligt och bli motiverade att lösa problem är emellertid att de upplever att de har möjlighet att lösa de givna problemen. Ställs elever inför alltför stora krav kan detta resultera i att de avslutar sina lösningsförsök, och får föreställningen att de

inte har den kompetens som erfordras för att lösa aritmetiska problem.

Samtliga elever uppmärksammar även vid intervjusamtalen problemens innehåll och beskriver med varierande noggrannhet likheter och skillnader mellan de olika problemtyperna. I den första fasen förekommer inte något aritmetiskt innehåll, vilket av de flesta elever beskrives som att man skall fortsätta på en berättelse. Vid samtalen om problemen i den andra fasen är det vanligt att eleverna uttrycker att problemen innehåller mer "matte" och att man skall räkna. I den tredje problemfasen säger eleverna vanligtvis att man skall skriva om tal. I problemen i den fjärde fasen är all numerisk information inte är given, och problemen karakteriseras av flertalet av eleverna i termer av att man skall hitta på och räkna ut. Den femte problemfasens innehåll jämförs med de tidigare problemfaserna och de flesta eleverna uttrycker skillnaderna som att man måste "räkna mer" när man löser denna typ av problem.

Hur ser eleverna på samtalen i smågrupper?

När frågeställningar om hur eleverna uppfattade samarbetet i smågrupperna behandlades vid intervjuerna, kretsade samtalen huvudsakligen omkring tre teman: presentationen av de olika problemlösningsförslagen i gruppen, synpunkter på hur man väljer den lösning som skall framföras inför klassen och elevernas syn på sin inlärning.

Presentationen av de olika problemlösningsförslagen i gruppen.

På den öppna frågan vad eleverna tyckte om att sitta i smågrupper och samtala handlade elevernas svar i första hand om vad de tyckte om att förevisa sitt problemlösningsförslag för kamraterna och vad de ansåg om att ta del av kamraternas lösningsförslag. Max tycker att det är roligt att lyssna på kamraterna.

I. När ni pratar i gruppen. Vad tycker du om det?[4]

M. Det är roligt.

I. På vad sätt då?

M. Det är roligt att höra på dom andra.

Leo uttrycker i likhet med de andra eleverna att han uppskattar att se hur kamraterna löst problemen.

---

[4] I betecknar intervjuaren. Övriga versaler står för elevernas initialer.

I. Hur är det att sitta i grupp och diskutera?

L. Det är roligt ... för man ser ju hur dom andra gör.[5]

Erika tycker att det är roligt att förevisa sitt eget arbete för kamraterna.

I. Vad tycker du om att visa din lösning?

E. Det är jätteroligt.

I. Varför det ?

E. Att visa vad man har gjort.

Samtliga elever är vid samtalen mycket positiv inställda såväl till att ta del av sina kamraters lösningar som att förevisa sina egna lösningsförslag i gruppen.

Elevernas synpunkter på hur man väljer en lösning i gruppen

I några av grupperna uppstod svårigheter när gruppmedlemmarna skulle välja ut det lösningsförslag som skulle förevisas inför klasskamraterna. Arne anser att gruppen enbart valde ut flickornas lösningsförslag.

I. Hur är det med gruppsamtalen?

A. Ibland kunde det vara jobbigt. ... Dom valde bara tjejernas.

I. Valde ni inte efter vad man hade gjort för lösning?

A. Ibland gjorde jag det. Men inte Greta och Agneta. Dom valde bara varandra.

Enligt Arne inriktar sig medlemmarna i gruppen mot kamraterna när de diskuterade varandras lösningar. Även Henrik nämner att det kan uppstå problem när gruppen skall välja en lösning.

I. Hur var det när ni valde ut en lösning?

H. Det var rätt jobbigt ibland för dom kunde inte bestämma sig. ... Alla fick en röst och så.

I. Vad berodde det på ?

H. Vet inte riktigt. Någon var bästa kompis med någon så väljer den den. Också väljer bästa kompisen tillbaka.

I Max grupp finner man ett sätt att komma tillrätta med svårigheterna.

---

[5] För att markera att intervjuare eller elev gör en paus användes punkter.

I. Hur är det när ni ska välja ut den lösning som ni ska redovisa för dom andra?'

M. Vi tar i tur och ordning?

I. Tar ni i tur och ordning?

M. Ja

I. Så ni bestämmer inte att ni ska ta en särskild för att den var bra?

M. Nej

I. Det har ni inte gjort någon gång?

M. Nej

I. Varför inte det?

M. Det är svårt ... att bestämma sig.

Som framkommer av intervjucitatet ovan uppmärksammar eleverna inte alltid lösningsförslagens innehåll, när de väljer det lösningsförslag som skall presenteras för de andra klasskamraterna. Aspekter av problemlösningssituationen vilka inte är anknutna till problemlösningen styr valen. Vid dessa tillfällen inriktar eleverna sig i första hand mot kamraterna i gruppen och låter kamratkontakter påverka valet av lösning. För att undvika de svårigheter som är förknippade med valet av lösning, utarbetar eleverna i några av grupperna en egen strategi som innebär att man presenterar gruppmedlemmarnas lösnings-förslag i tur och ordning.

Elevernas syn på vad de lär sig vid samtalen i smågrupper

Vid intervjuerna säger samtliga elever med varierande uttryckssätt att de anser att det är lärorikt att se hur kamraterna har löst problemen. Sofia har insett att man kan lösa problem på olika sätt.

I. Har du lärt dig något?

S. Ja man kan skriva olika saker som man kan ... och då kan se att man göra på olika sätt.

Stina anser att hon lär sig, när hon tar del av kamraternas problemlösningsförslag.

I. Vad tycker du om att sitta i grupp och diskutera?

S. Det är kul och höra på dom andra... och se deras lösningar

I. Tror du att du lär dig något?

S. Ja... man ser hur dom andra har gjort.

När Maria ser hur kamraterna löst ett problem, och förstår hur de har gått tillväga vid lösningen, inser hon problemen inte alltid är så svåra som man föreställer sig.

I. Har du lärt dig något?

M. Om man tycker det är jättesvårt och man inte vet hur det ska va eller så.. då tänker man det var egentligen inte så svårt, när man ser vad de andra har gjort.

I. Förstår du vad vad de andra har gjort?

M. Ja.

Frida menar att det är bra när man upptäcker att man kan lösa problem på olika sätt, därför att man då kan använda sig av kamraternas lösningsmetoder vid ett annat tillfälle.

I. Hur är det att sitta i gruppen och prata?

F. Det är bra.

I. Vad är det som är bra med att prata i gruppen?

F. Det är bra för man ser hur dom andra gör och så kan man komma ihåg det och så gör man så en annan gång.

I. Förstår du alltid hur dom andra har räknat?

F. Ja... det är inte så svårt.

Vid intervjuerna uttalar samtliga elever att de inser att ett problem kan lösas på olika sätt när de tar del av kamraternas problemlösningsförslag. De menar även att deras lärande påverkas i positiv riktning, när kamraterna presenterar sina olika problemlösningsförslag eftersom de då kan höra och se hur kamraterna har löst problemen. Vid direkta frågor om inlärning och förståelse vid samtalen i smågrupper, ger eleverna således uttryck för uppfattningen att de har insett att det finns olika sätt att lösa ett problem och att en konfrontation av olika lösningssätt bidrar till att utveckla deras egen förståelse av problemen. Vid intervjusamtalen ställdes även direkta frågor om hur eleverna på en mer allmän nivå uppfattade sin egen inlärning, vilket vi skall se på i följande avsnitt.

Hur ser eleverna på sin inlärning ?

Samtliga elever gav exempel på något de lärt sig vid lektionerna. När eleverna uttalade sig om sin egen inlärning gav de exempel med anknytning till aritmetisk problemlösning, skriftlig framställning och bildframställning.

Samtliga elever ger exempel på inlärning med anknytning till aritmetisk problemlösning. De uttrycker på olika sätt att de lärt sig matematik och att lösa problem.

Henrik säger att han har lärt sig matematik, att lösa problem och att räkna ut saker.

I. Tror du att du har lärt dig något?

H. Ja det har jag.

I. Vadå?

H. Att räkna ut saker och ting.

I. Jaha ... Något mer?

H. Matte ... att lösa problem. ... Jag är bättre nu eftersom vi har gått igenom en massa saker.

Monika anser att hon lärt sig matematik, uppställning och att man kan lösa problem på olika sätt.

I. Har du lärt dig något?

M . Ja jag har lärt mig matte ... att se att man kan göra på olika sätt ... och att ställa upp.

De flesta eleverna gav även exempel på inlärning med anknytning till skriftlig framställning. Oftast nämndes dessa exempel i samband med att eleverna utryckte att de lärt sig att räkna eller att lösa problem.

Märta anser att hon lärt sig matematik och att skriva berättelser.

I. Har du lärt dig något?

M. Ja

I. Vad?

M. När man skulle ställa upp matte. Jag har lärt mig matte och att skriva berättelser.

Det var endast två elever som vid något av intervjutillfällena nämnde inlärning med anknytning till bild.

Lisa anser att hon lärt sig att rita och att lösa problem.

I. Har du lärt dig något ?

L. Ja.. mycket.

I. Vadå?

L. Ja t ex att rita har jag lärt mig och att lösa problem.

Eleverna är vid bedömningen av sitt lärande huvudsakligen inriktade mot matematik och mot det lärande som lämnat synliga spår i form av skriftlig dokumentation. De är medvetna om att

matematik står i fokus för undervisningen och när de skall exemplifiera sitt lärande uttrycks inlärningen i termer av att de har lärt sig att räkna eller att lösa problem. Det är emellertid även vanligt att eleverna säger att de lärt sig att skriva berättelser. Däremot är det ovanligt att eleverna uttrycker att de lärt sig att rita. Förklaringen till att så få elever nämner att de lärt sig att rita kan eventuellt vara att många elever upplever att teckningsförmåga är en egenskap som man besitter och inte något som man kan lära sig. Antingen ritar man "bra" eller så kan man inte rita. I det kommande avsnittet, där elevernas skriftliga redogörelser behandlas, ges en mer ingående beskrivning av elevernas syn på sin inlärning.

Elevernas skriftliga redogörelser

När samtliga problem i sekvensen var lösta fick eleverna i två av klasserna vid ett avslutande undervisningstillfälle skriva en berättelse och rita en bild om det arbete som pågått i klassrummen. Totalt är det 42 elever som skrivit berättelser. Instruktionerna till eleverna vid denna sista lektion var att de skulle tänka en stund på de olika problem de arbetat med under lektionerna samt på vad de skrivit, ritat och räknat. Därefter skulle de skriva en berättelse som handlade om vad de arbetat med under terminen. Eleverna skulle berätta om skillnader och likheter mellan problemen i de olika häftena och även nämna om de tyckte att de hade lärt sig någonting under den tid projektet pågått. Nedan redovisas innehållet i elevernas berättelser med de synpunkter som eleverna framförde angående problemsekvensen och det egna lärandet. Få av eleverna nämner gruppsamtalen i sina skriftliga redogörelser, troligtvis beror detta på att lärarens instruktioner vid lektionens inledning huvudsakligen inriktades mot att eleverna skulle skriva om de olika problem som man arbetat med vid lektionerna.

Vad skriver eleverna om problemsekvensen?

Elevernas berättelser behandlar huvudsakligen de problem som förekommit i problemsekvensen. Samtliga 42 elever nämner i sina texter olika problem eller problemtyper man arbetat med. Vid en innehållsanalys av hur eleverna skriver om problemsekvensen i sina texter framkommer att texterna kan sammanföras i fyra olika kategorier. I nedanstående kategorisering redovisas antalet texter som återfinns i respektive kategori.

A. Eleverna beskriver ett eller flera problem i problemsekvensen (n=2)

Eleverna nämner ett eller två olika problem man arbetat med och återger något av innehållet i de aktuella problemlösningarna. Stella skriver:

> Vi har gjort en massa häften med en massa matteproblem och i ett häfte har jag skrivit så här som rubrik Lenas kalas så här skrev jag. I dag fyller Lena år och hon ska ha kalas. Hon har bjudit tio av sina klasskamrater men jag hade skrivit lite mer men jag skriver inte mer nu. Jag ska skriva ur ett anat häfte. Så här skrev jag som rubrik. Den mystiska natten. Jag tror att det var någon som hade gått in i huset för att undersöka det.

B. Eleverna bedömer och värderar ett eller flera problem i problemsekvensen (n=4)

I berättelserna nämner eleverna olika problem varvid de inriktar sig mot en bedömning av enskilda problem i termer av roliga, tråkiga, enkla eller svåra. Ulla skriver:

> Jag tycker att den lättaste berättelsen var när Lena och Maria räknade bokmärken. Och den svåraste berättelsen är när Per diskar och köper en boll. Jag har lärt mig väldigt mycket av det här matteprojektet tycker jag Jag tycker ganska mycket om matteprojektet. .... P.S. Ibland tycker jag det är dö-tråkigt.

C. Eleverna ger en beskrivning av en eller flera olika faser av problem och en bedömning av problemtyper (n=17)

Eleverna nämner olika faser av problem och gör en bedömning av olika problemtyper i termer av roliga, tråkiga, enkla eller svåra. Eleverna inriktar sig inte mot att beskriva och jämföra de olika problemtyperna. Susanne skriver:

> Jag tycker det är roligt med matteprojekt. Men jag tycker inte det är någon skillnad mellan häftena precis. Men i det första häftet var det inte någon fråga man skulle lösa precis, men jag tycker det är lika roligt för det. Men jag vet inte riktigt vilka häften som var lättast eller svårast. Dom blå var nog lättast. Vi har haft 20 häften sammanlagt. Jag tycker att jag har lärt mej att räkna ut saker lättare än vad jag har gjort förut. Men det är ju inte alla som tycker att dom har lärt säj nya räknesätt, eller hur?

D. Eleverna ger en beskrivning och bedömning av olika problemtyper samt redovisar likheter och skillnader mellan olika typer av problem (n=19)

I elevernas texter behandlas olika faser av problem med en värderande beskrivning av olika problemtyper. Eleverna jämför även olika problemtyper och beskriver likheter och skillnader mellan olika typer av problem. Märta skriver:

> I dom blåa häftena var det inget matteproblem precis, utan bara en berättelse som man skulle fortsätta på. I dom gula häftena var det lite mera matte, men inte så mycket ändå. I dom vita häftena var det bara ett tal som man skulle skriva en berättelse till, som t ex 3 x 7 = 21. Det var ganska lätt. Dom gröna häftena var ganska lika dom gula, men lite svårare för i dom gröna fick man hitta på. Dom rosa häftena var ganska lika dom gula och gröna, men svårast av dom tre, var dom rosa. Jag har lärt mig mycket. Det är synd att det snart är slut.

Ovanstående kategorisering visar att eleverna när de skriver om problemen är inriktade mot olika aspekter av problemsekvensen. Det är två elever i kategori A som i sina texter, utan att värdera och bedöma de aktuella problemen, inriktar sig mot att beskriva innehållet i ett eller två enskilda problem. Enstaka problem i problemsekvensen uppmärksammas även av fyra elever i kategori B. Eleverna i denna kategori beskriver emellertid inte huvudsakligen innehållet i problemen utan gör även en bedömning och värdering av problemen, och nämner problem som man ansett vara speciellt svåra, enkla, eller roliga.

I kategori B och C är eleverna i sina texter huvudsakligen inriktade mot en bedömning. Skillnaden mellan kategorierna är att i kategori B värderar eleverna enskilda problem medan eleverna i kategori C bedömer problemtyper.

Det är 36 elever (85%) som behandlar olika typer av problem samt gör en jämförelse mellan en eller flera problemtyper. Av dessa återfinns 17 elever i kategori C, vilka i sina texter värderar en eller flera olika faser av problem utan att beskriva innehållet i problemen, samt 19 elever i kategori D. Eleverna i kategori D ger en jämförande beskrivning av problemen i de olika faserna, och tar upp strukturella skillnader och likheter mellan problemtyper. Dessa texter innehåller dessutom en jämförelse mellan olika problem i värderande termer, där problemen bedömes såsom roliga, tråkiga, lätta eller svåra.

Eleverna i kategori A och D är inriktade mot att beskriva ett innehåll. Skillnaden mellan kategorierna A och D är att i kategori A inriktar eleverna sig mot att redogöra för enskilda problem, endast

en mycket begränsad del av problemsekvensen står därmed i fokus för deras intresse. Eleverna i kategori D däremot, inriktar sig mot en större del av sekvensen eller mot hela problemsekvensen. Eleverna i kategori D ser samband mellan olika problem och integrerar de enskilda problemen till sammansatta enheter, dvs problemtyper. De beskriver innehållsliga likheter och skillnader mellan de olika typerna av problem, varvid de ser en generalitet i de problem som ingår i de olika problemtyperna. I texterna i kategori D har således eleverna lämnat det enskilda problemets innehåll och beskriver problemen på en mer övergripande nivå, än vad som är fallet i kategori A.

Sammanfattningsvis kan sägas att samtliga elever *differentierar* problemsekvensen genom att tala om innehållet i termer av enskilda problem eller problemtyper. Några elever *fördjupar* behandlingen av det aktuella problemet eller problemtypen och beskriver innehållet mycket ingående och detaljerat. Många elever *utvidgar* även det behandlade innehållet och beskriver flera olika problem eller problemtyper. Slutligen finns en andel av eleverna som beskriver olika problemtyper, ser problemen i relation till varandra och upptäcker samband mellan olika problem. De *integrerar* enskilda problem till sammanhängande enheter, dvs problemtyper och skriver om likheter och skillnader mellan olika problemtyper. Elevernas beskrivning av problemsekvensens innehåll innefattar således differentiering, fördjupning, utvidgning och integrering. En grundläggande skillnad mellan elevernas sätt att beskriva problemsekvensens innehåll är att några elever endast redogör för enskilda problem, medan andra elever kan se problemsekvensen på en metanivå och uppfatta sekvensen som en sammansatt enhet. De elever som inriktar sig mot att redogöra för enskilda problem fokuserar endast en mycket begränsad del av problemsekvensen. Dessa elevers uppmärksamhet är fixerad vid enskilda problem och problemen relateras inte till varandra. Andra elever relaterar problemen till varandra, skriver om de olika typerna av problem och integrerar problemen i problemsekvensen till sammansatta enheter.

Vad skriver eleverna om sin inlärning?

I något över hälften, 23 av de 42 texterna, tar eleverna spontant upp frågeställningen huruvida de har lärt sig något vid problemlösningen. Elevernas redovisningar har analyserats med avseende på de skriftliga utsagor i texterna som behandlar inlärning. Vissa elever nämner fler exempel på något som de lärt

sig, vilket medför att det sammanlagt förekommer 38 utsagor som berör inlärning. När eleverna skriver om sin egen inlärning, framkommer att några få elever anser att de inte har lärt sig något. Andra elever uttalar sig i allmänna termer om sin inlärning och ytterligare andra elever exemplifierar sin inlärning med anknytning till den genomförda undervisningen. Nedan redovisas de utsagor i elevernas texter som berör inlärning.

A. Man har inte lärt sig något (n=2)

Två elever uttrycker att de inte har lärt sig något. Ingemar skriver "Jag lärde mig inget" och Leo skriver "Jag lärde mig inte något särskilt".

B. Man har lärt sig mycket (n=9)

Eleverna skriver i allmänna ordalag om sin inlärning och uttrycker att de lärt sig mycket. Det är nio elever som inte preciserar sin inlärning närmare och inte ger något exempel på vad de lärt sig. Sara skriver: "Jag har lärt mig mycket av det här matteprojektet". Therese skriver: "Jag har lärt mig jättemycket".

C. Man exemplifierar sin inlärning (n=27)

Elevernas utsagor, där de exemplifierar sitt lärande, kan indelas samma kategorier som elevernas uttalanden vid intervjusamtalen, inlärning med anknytning till bildframställning, skriftlig framställning samt aritmetisk problemlösning.

Endast en av utsagorna behandlar bildframställning. Jesper skriver "Jag har lärt mig att lösa problem och att rita och skriva".

30% av elevernas utsagor berör inlärning med anknytning till den skriftliga framställningen såsom att lära sig stava, läsa och skriva. Lena uttrycker exempelvis "Jag har lärt mig skriva". Tage skriver "Jag har lärt mig hur man skriver berättelser" och Olof anser "Jag tycker att jag har lärt mig att skriva och stava bättre".

De flesta av elevernas utsagor om inlärning, ca 66%, har anknytning till aritmetisk problemlösning. Eleverna skriver exempelvis att de lärt sig att lösa problem, räkna ut saker, räkna snabbare och ställa upp. Max skriver "Jag tycker jag har lärt mig att räkna". Lisa skriver "Jag har lärt mig att ställa upp bra och en massa andra saker om matte". Monika anser att hon lärt sig att tänka "Jag har lärt mig att tänka till när jag löser problem".

En jämförelse av intervjuer och skriftliga redogörelser

Vid analysen av intervjuerna och elevernas skriftliga redogörelserna framkommer vissa skillnader med avseende på hur eleverna uttrycker sig om problemsekvensen, samtalen i smågrupper och sitt eget lärande. En förklaring till detta förhållande är troligtvis att vid intervjusamtalet ställdes direkta frågor. Intervjuaren kan då omedvetet eller medvetet styra samtalen i en viss riktning. En annan orsak kan vara att eleverna har en föreställning om vilka svar som förväntas av dem och ger det svar som de tror är "det rätta". Vid en intervju vandrar således inte elevernas tankar fritt, i samma utsträckning som vid en skriftlig redogörelse, vilket avspeglar sig i elevernas utsagor.

När det gäller elevernas allmänna omdömen av den genomförda undervisningen framkommer emellertid inte några märkbara skillnader mellan elevernas uttalanden vid intervjusituationen och i de skriftliga berättelserna. Vid intervjuerna är det mest frekventa svaret på frågan hur eleverna uppfattar undervisningen att "Det är roligt". Även i de skriftliga berättelserna skrev de flesta eleverna i allmänna värderande ordalag att de tyckte att projektet hade varit roligt. Det var endast en elev som i sin text gav uttryck för att projektet ibland varit tråkigt. I allmänhet uttryckte sig eleverna på liknande sätt som som Lena när hon skriver "Det har varit en rolig tid med att lösa problem".

Problemsekvensen

Vissa skillnader i elevernas uttalanden om problemsekvensen framkom vid jämförelsen mellan intervjuer och skrivna texter. Vid intervjusamtalen uttalade sig samtliga elever vid något tillfälle om skillnader och likheter mellan de olika problemtypernas innehåll, vilket inte var fallet när eleverna skrev berättelser.

Vid samtal med lärarna framkom att de ansåg att eleverna uppfattade likheter och skillnader mellan problemtyperna, vilket är ett rimligt antagande eftersom skillnader och likheter mellan problemtyperna uppmärksammades och diskuterades i undervisningen. Vid intervjusamtalen med eleverna om problemsekvensens innehåll integrerade samtliga elever de enskilda problemen till problemtyper. När eleverna gav skriftliga synpunkter inriktade sig emellertid några elever enbart mot delar av problemsekvensen och gav fragmentariska innehållsbeskrivningar eller värderingar av enstaka problem. De utgick inte från undervisningsinnehållet som en sekvens av problem, utan

deras beskrivning relaterades till hågkomster av några enstaka problem som uppfattades som mer intressanta eller roliga än andra. Elevernas beskrivningar av undervisningsinnehållet relaterades då till den egna upplevelsen av enskilda problem och inte till problemsekvensens innehåll som det framstår i ett undervisnings- och lärarperspektiv.

Intentionen i undervisningen var att eleverna skulle uppfatta likheter och skillnader mellan problemtyperna. Det är emellertid helt förståligt, att inte samtliga elever i de skriftliga redogörelserna beskriver problemsekvensen på en metanivå. Att integrera ett undervisningsinnehåll, och se det som en sammansatt enhet, innebär för vissa elever betydande svårigheter. Det som är direkt uppenbart och givet av ett undervisningsinnehåll från lärarens perspektiv inte alltid är lika självklart och naturligt i ett elevperspektiv.

Samtalen i smågrupper

Vid intervjuerna gav eleverna ett mycket stort antal synpunkter på samtalen i smågrupper. Samtliga elever hade en mycket positiv inställning till att presentera sitt eget förslag för kamraterna och även till att ta del av de andra gruppmedlemmarnas förslag. Eleverna menade att de vid gruppsamtalen insåg att problem kan lösas på olika sätt, och att man kan lära sig något, när man tar del av kamraternas problemlösningsförslag. Samtidigt ansåg emellertid flertalet elever att det var problematiskt att i gruppen välja ut det lösningsförslag, som skulle presenteras för de övriga klasskamraterna. Inställningen till gruppsamtalen var således något motstridig på så sätt att eleverna var mycket positiva till att ta del av kamraternas lösningsförslag men att de på samma gång ansåg att det var svårt att enas om den lösning som skulle presenteras för klassen.

Elevernas skriftliga redovisningar innehåller mycket lite av elevernas syn på hur samarbetet i smågrupperna gestaltade sig. Det fåtal elever som nämnde gruppsamtalen skrev mycket kortfattat och summariskt. Denna stora skillnad i behandlingen av gruppsamtalen vid intervjuerna och i de skriftliga berättelserna, beror troligtvis på att vid intervjuerna ställdes direkta frågor om gruppsamtalen, medan lärarna vid introduktionen av den skriftliga uppgiften inte inriktade elevernas uppmärksamhet mot gruppsamtalen, utan istället betonade att eleverna skulle skriva om de olika problem de arbetat med i undervisningen.

Det egna lärandet

Samtliga elever gav i intervjusituationen exempel på sitt lärande, vilket inte är fallet i de skriftliga berättelserna, där drygt hälften av eleverna spontant skrev om inlärning. Eleverna uttalade sig emellertid om sitt lärande på liknande sätt vid intervjuerna och i texterna. När eleverna beskriver sin inlärning i intervjuerna såväl som i de skriftliga redogörelserna, är utgångspunkten de handlingar som eleverna utfört vid lektionerna. Den studerade undervisningen är uppbyggd med intentionen att eleverna skall kommunicera när de löser problem. De skall rita, skriva, tala och räkna vid problemlösningen. När eleverna ställs inför frågan vad de har lärt sig, ger de exempel på sin inlärning utifrån dessa handlingar och nämner att de har lärt sig att lösa problem, ställa upp, räkna, skriva berättelser etc. Det är tydligt att eleverna vid bedömningen av sitt lärande huvudsakligen uppfattar *den inlärning som lämnat synliga spår i form av skriftlig dokumentation*. Det är inte någon elev som exemplifierar sin inlärning i termer av förståelse av undervisningsinnehållet.

Vid samtal i smågrupper fick eleverna tillfälle att tillsammans med kamrater samtala och reflektera över undervisningsinnehållet med uppmaningen att försöka förstå kamraternas olika lösningsförslag. Det är emellertid inte någon elev som vid intervjun på en direkt fråga om vad de lärt sig spontant nämner att hon eller han har lärt sig att samtala, förstå eller att tänka och endast en elev uttrycker i sin skrivna text att hon lärt sig att tänka. Det framkommer emellertid att samtliga elever anser att de förstår hur kamraterna har löst de olika problemen när de tar del av kamraternas lösningsförslag. De menar dessutom att man kan lära sig genom att se hur kamraterna löst de givna problemen. Några av eleverna nämner vid de tillfällen när problemsekvensens innehåll diskuteras att man måste tänka när man löser problem. Henrik har vid tidigare tillfällen uttalat att han har lärt sig att lösa problem och att räkna. När Henrik talar om skillnader mellan de olika problemtyperna menar han att man måste tänka efter när man arbetar med matematik.

I. Om du jämför dom blå och gula häftena. Tycker du att det är något som är olika?

H. Ja i dom gula får man jobba mer med matte. Man får tänka efter lite mer. I dom blå var det bara att fortsätta. Dom rosa var nästan likadan som dom gröna. Dom rosa var bra men där fick man också räkna lite mer. Man fick tänka efter lite mer. Dom blå var roligast. Dom vita var jobbigast.

Det faktum att eleverna nästan uteslutande besvarar frågan vad de lärt sig i undervisningen genom att ge exempel på handlingar de utfört vid lektionerna kan även tolkas som att eleverna ser på tänkandet, förståelsen och samtalet, som medel för inlärning, dvs man lär sig *genom* att förstå, tänka och samtala. Denna tolkning får stöd av bl a Henriks uttalande i citatet ovan.

Vid de tillfällen eleverna spontant kommenterar förståelse i undervisningssituationer använder de oftast ordvalet "fatta" som uttryck för förståelse. Martin säger exempelvis: "Man måste ju fatta hur man skall göra när man löser problem". Nina uttrycker: "Jag fattar inte. Jag vet inte vad jag skall göra." Förståelse och handlande betraktas då inte som två skilda företeelser. För att kunna utföra vissa handlingar måste man förstå och när eleverna utför olika handlingar uppfattar de att man får erfarenhet, tränar sig och lär sig olika saker med det implicita antagande att förståelsen inryms i handlandet. I elevernas perspektiv lämnar handlingarna, men inte förståelsen, synliga spår i form av skriftlig dokumentation vilket medför att förståelsen blir osynliggjord, och huvudsakligen betraktas som ett medel för lärandet.

UNDERVISNINGEN I LÄRARNAS PERSPEKTIV

De tre deltagande klasslärarna intervjuades efter varje genomförd fas av problem för att de skulle få tillfälle att ge synpunkter på undervisningen. Intervjuerna tog formen av samtal där mitt intresse var inriktat mot att lärarna skulle berätta hur de uppfattade den genomförda undervisningen och framföra kritiska synpunker på undervisningssituationen och elevernas problemlösning. Vid samtalen gav lärarna sammanfattande omdömen av undervisningen, kommenterade händelser som utspelats i klassrummet och uttalade sig om enskilda elevers agerande i undervisningssituationen. Lärarna uttalar sig emellertid oftast i allmänna termer och deras utsagor berör oftast eleverna som grupp. De frågeställningar som huvudsakligast diskuterades var emellertid problemsekvensen, samarbetet i smågrupperna samt elevernas inlärning.

Vad säger lärarna om problemsekvensen?

Samtliga lärare ansåg att det var mycket positivt att eleverna skulle lösa olika typer av problem. De fyra första faserna av

problemsekvensen var intressanta och tillförde matematikundervisningen något nytt. Förhoppningsvis skulle det faktum att eleverna löser annorlunda matematikproblem bidra till att eleverna blir mer fria i sitt sätt att använda sig av matematik. Frågan huruvida lärarna ansåg att eleverna såg likheter och skillnader mellan de olika problemtyperna besvarades av de tre lärarna på likartat sätt.

> Lär A. Ja dom ser ju att det är olika slags problem och att man ska använda matematik i dom vi har gjort nu. Att det är problem, men av olika sort.
>
> Lär B. Ja, jag tycker verkligen dom är inskolade på det här nu. Som Sofia sa idag. Det är ju bara tvärtom det här. Så dom förstår precis.
>
> Lär C. Dom har klart för sig sambanden mellan problemen. De inriktar sig mer mot talen här, dom ser ju att det handlar mer om matematik i denna fasen.

Lärarna uttrycker att eleverna förstår att de arbetat med olika typer av problem och att de kan relatera de olika typerna av problem till varandra, upptäcka likheter och även se skillnader mellan problemtyperna. I de senare faserna menar lärarna att eleverna i ökad utsträckning inriktar sig mot det aritmetiska innehållet i uppgifterna.

Vad säger lärarna om elevernas samtal i smågrupper?

Elevernas kommunikation och interaktion i smågrupper diskuterades återkommande vid samtalen med lärarna. De synpunkter lärarna framförde med avseende på elevernas gruppsamtalen ger en bild av hur samarbetet i smågrupperna utvecklade sig, därför redovisas nedan ett relativt stort antal av lärarnas uttalanden. De två frågeställningar som var aktuella när elevernas gruppsamtal kom upp till diskussion, var dels lärarnas uppfattning om gruppsamtalen, dels om de tyckte att någonting i undervisningsituationen var problematiskt eller besvärligt.

Vid en analys av samtalen framkommer att det är tre olika problemområden som lärarna har synpunkter på och som huvudsakligen behandlas i samtalen.

1. Elevernas argumentation vid valet av den lösning som skall framläggas för de andra klasskamraterna.
2. De kriterier eleverna utgår från, när de väljer en av lösningarna.
3. Elevernas reaktionerna på gruppens val av lösning.

1. *Elevernas argumentation*

Lär A. Jag tror att barnen lär sig mycket och jag tycker egentligen att den roligaste grejen är det här med gruppdiskussionen. Men den blir ju ofta kort .. och dom säger, din är bra, din är bra ... och så har dom svårt att komma vidare. Den biten tycker jag är mest intressant att få dom att komma vidare och resonera mer ... Men det är inte gjort i en handvändning. Det tror jag är något som de lär sig mycket på .... Att kunna få fram varför.

Lär B. Det är svårt att få dem att förklara varför dom väljer en lösning.

Lär C. Dom skulle diskutera mer om lösningarna.

Enligt lärarna diskuterar inte eleverna de olika lösningarna i innehållsliga termer, utan eleverna ger endast kortfattade och allmänna omdömen om problemlösningsförslagen som exempelvis att en lösning är bra. Eleverna motiverar inte sitt val av lösning och förklarar inte på vilka grunder de väljer den lösning som de anser skall framföras i klassen. Lärarna uttrycker att de inte i den utsträckning de skulle önskat har lyckats styra samtalen i grupperna i riktning mot att eleverna argumenterar och resonerar om problemen och motiverar sina val. När läraren frågar efter synpunkter svarar ett stort antal elever med ett allmänt omdöme, och eleverna är sällan mottagliga för lärarens försök att inrikta deras uppmärksamhet mot ett specifikt innehåll i problemet.

2. *Elevernas kriterier vid val av lösning*

Lärarna uttrycker att elever väljer ett lösningsförslag utifrån irrelevanta kriterier och att elevernas uppfattningar inte överensstämmer med en vuxens uppfattning.

Lär B. Som lärare har jag varit besviken på vissa grupper där jag vet att det sitter elever som är duktiga i matematik som köper en berättelse som inte är relevant. Då blir jag besviken. Hur kan de gå på det?

Lär C. Sen tycker jag att när dom väljer den berättelse som dom ska läsa upp blir det ju många gånger jaa .... så att säga den häftigaste. Så man står där framme och funderar på vad de andra har haft för idéer. Det kanske ur den vuxnes synpunkt inte alltid är den bästa som de läser upp alltid.

Elevernas val av lösning avgörs i vissa fall på grundval av vilken elev det är som har framställt förslaget.

Lär A. Ja. i vissa grupper räcker det att någon person säger någonting, så går dom andra på det.

Lär B. Ja för det är ju så att det är en i varje grupp som är ledare på rasterna och dom gör ju gärna så att dom tar den ... För dom vet att det är poppis.

Lär C. Som vuxen tycker man det är synd att de inte har förmågan att se vilken som i mina ögon är den bästa. Deras tankebanor är riktade åt person.

När eleverna samtalade om problemlösningsförslagen i smågrupperna, uppmanades de av lärarna att diskutera de olika förfaringssätt man använt för att lösa det aktuella problemet. Av ovanstående citat från intervjuerna med lärarna framkommer emellertid att eleverna hade svårigheter att inrikta sig mot de varierande sätt på vilka eleverna kommit fram till en lösning på de givna problemen. Lärarna ansåg att eleverna i många fall valde den lösning som skulle presenteras för kamraterna utifrån andra kriterier:

- Eleverna utgår vid bedömning av de olika förslagen från att en viss person framlagt en lösning. Vid samtalen avger eleverna då oftast i allmänna termer en bedömning att lösningen är "bra", men de inte argumenterar inte vidare i innehållsliga termer om lösningsförslagen.
- Eleverna väljer en lösning med utgångspunkt från formuleringar i den skriftliga berättelsen. Argumentet kan vara att berättelsen är "häftig".
- Eleverna uttrycker inte någon egen uppfattning om de olika lösningsförslagen, utan anpassar sig till de åsikter som framförs av kamraterna i gruppen.

Lärarna anser således att många elever vid gruppsamtalen inte inriktar sig mot kärnan i problemlösningsförslagen. Eleverna granskar och samtalar inte om de olika förfaringssätt som använts vid lösningen av problemet, och det är inte alltid på grundval av det sätt på vilket problemlösningen har utförts som eleverna väljer ut det lösningsförslag som skall presenteras inför klasskamraterna.

3. Elevernas reaktioner på gruppens val av lösning

Vid intervjusamtalen diskuterade lärarna det förhållande att några av elevernas lösningar inte valdes ut av gruppen.

Lär A. Det som jag tänkt på är ... ju detta ... Ja, jag har hört kommentaren från några elever att det blir ju samma hela tiden, och då skulle man kanske växla grupperna lite grann ... så att det inte blir någon som tappar sugen för att lösningen aldrig läses upp.

Lär A. Guns reaktion var nästan att nu är det min igen ... så hon sa att det måste bli dom andra också.

Lär C. I början tyckte jag det var svårt med grupperna för jag märkte att det var några som tyckte att jag får aldrig min uppläst.

Det är två av lärarna som är bekymrade över det faktum att några av eleverna blivit besvikna på grund av att deras egna lösningar inte har presenterats för kamraterna vid de gemensamma klassrumsredovisningarna. Lärarna upplever att det finns risk för att de berörda eleverna kan förlora intresset för undervisningen. Det var i första hand vid intervjusamtalen efter andra fasens genomförande, som lärarna tydligast gav uttryck för dessa farhågor.

Sammanfattningsvis kan sägas att lärarna ansåg att eleverna inte inriktade sin argumentationen mot de olika förfaringssätt som använts vid problemlösningen, utan ofta gav ytliga, sammanfattande omdömen om lösningsförslagen. Dessutom utgick eleverna från irrelevanta kriterier och inriktade sig inte mot det framlagda problemlösningsförlagen, när de valde den lösning som skulle framläggas för de andra klasskamraterna. Två av lärarna upplevde även att vissa elevers reaktion på gruppmedlemmarnas val av lösning var problematiskt.

Lärarna framförde emellertid även ett stort antal positiva synpunkter på gruppsamtalen. Nedan följer de sammanfattande synpunkter som lärarna framförde vid de sista intervjusamtalen angående elevernas samarbete i smågrupper.

> Lär A. Det är jättespännande och en rolig grej och de lär sig säkert mycket.
>
> Lär C. Jag tror att dom lär sig väldigt mycket. Även om dom inte resonerar speciellt mycket om lösningarna.
>
> Lär B. Det har inte varit något problem med gruppsamtalen. Jag tror att dom lär sig. Det har varit väldigt nyttigt måste jag säga.

Vid intervjuerna framkommer således att lärarna på ett övergripande plan uttalar sig positivt om elevernas samtal i smågrupper. Lärarna anser att samtalen i grupp har bidragit till elevernas inlärning. Lärarnas inställning till gruppsamtalen är således något motstridig, där den negativa aspekten är att samtalen inte alltid utvecklats i den riktning de själva skulle önskat, och den positiva aspekten är att samtalen enligt deras uppfattning befrämjar elevernas inlärning.

Vad säger lärarna om elevernas inlärning?

Vid intervjusamtalen uttalade lärarna sig ofta i allmänna termer om den inlärning som de ansåg hade ägt rum i undervisningen. På frågan om de ansåg att eleverna hade lärt sig något svarade en av lärarna t ex "Jag tror att de lär sig enormt bra på det här". En

annan lärare uttryckte:"Dom lär sig väldigt mycket". De frågor som ställdes vid skilda tillfällen huruvida eleverna hade lärt sig något, besvarades emellertid huvudsakligen med att lärarna gav exempel på elevernas inlärning. Vid en granskning av lärarnas uttalande finner man att de givna exemplen har anknytning till inlärning i skriftlig framställning samt aritmetisk problemlösning. I det följande skall vi se på några exempel.

Inlärning med anknytning till de skriftliga berättelserna

> Lär A. Dom lär sig att skriva och just när de ska läsa upp sen, att dom tänker på att skriva så att någon annan kan läsa det. Dom har ju skrivit otroligt mycket, så jag märker att man får mycket till skänks när det gäller stavning och sånt där.
>
> Lär B. Vad som förvånar mig är att de inte säger näää ska vi nu skriva en berättelse igen, utan de tycker det är lika roligt och det blir väldigt bra berättelser så där tycker jag svenskan har kommit in.
>
> Lär C. Ja dom har verkligen skrivit mycket och tränat sig i att skriva berättelser. Dom har på samma frejdiga sätt gått in för att skriva dom här berättelserna så svenskan har blivit en integrerad del. Dom lär sig en hel del nya ord.

En synpunkt som samtliga tre lärare framför är att de framställda problemen stimulerar och motiverar till fri skrivning och att eleverna under lektionerna skrivit gärna och väldigt mycket. Lärarna menar att eleverna därmed har utvecklat sin förmåga att skriva berättelser. En av lärarna nämner att eleverna har lärt sig nya ord och en annan lärare uttrycker att eleverna vid den skriftliga framställningen tränar sig i att stava. Eftersom berättelsen skall läsas upp av gruppledaren måste eleverna även tänka på att skriva så att en annan person kan läsa texten.

Lärarna framförde även att det faktum att eleverna skall lyssna på varandra är nyttigt och lärorikt. I samband med att gruppledaren redogör för smågruppernas olika problemlösningsförslag är det även bra att eleverna får träna sig i att framträda och tala inför sina klasskamrater.

Inlärning med anknytning till aritmetisk problemlösning

> Lär A. Det är bra att dom får se att man kan göra lösningar på olika sätt. Det tror jag är utvecklande.
>
> Lär B. Dom har lärt sig vad division är... Och det här problemet med bokmärken på testet idag. Det var många som direkt såg att de kostade 5 kronor styck ... Ja just det här med att dela upp. I det sista problemet i går hade ju alla grupper samma svar vid

redovisningen, men dom hade gjort mycket olika uträkningar så dom ser att man kan räkna ut ett problem på många olika sätt.

Lär C. Ja, de har lärt sig att se ett samband mellan de här talen och verkligheten. Som idag ... när de fick glass, då skämtade vi om det. Det fanns säkert något problem om glass i häftena. När jag sa om det i matteprojektet fanns ett problem om att det var 24 barn i klassen och det var två på varje paket .... då var det alla händer uppe i luften. Dom visste att man måste köpa 12 paket. Då tycker jag man har kommit en bra bit. Jag menar att dom har lättare att se om de ska använda sig av addition, subtraktion, division eller multiplikation och det har kommit in på ett naturligt sätt, istället för att det bara finns där, som att den här veckan jobbar vi med multiplikation då är alla uppgifter multiplikation och så kan man presentera vilka tal som helst. Här har hela tiden varit en blandning och samtidigt också en problemlösning ... där dom har sett när de olika grupperna redovisat att man kan komma fram till ett acceptabelt svar om man använder t ex addition, men man kan också genom att de flesta grupperna har använt multiplikation se att jaha det går också ... Att man ser olika utvägar tror jag dom har lärt sig. Att det inte finns bara ett sätt att lösa problem.

Det var vanligast förekommande att lärarna besvarade frågan om elevernas inlärning med att ge något exempel med anknytning till aritmetisk problemlösning. Samtliga lärare ger uttryck för uppfattningen att eleverna har insett att man kan lösa ett problem på flera olika sätt. De nämner även att eleverna har fått en bättre förståelse för räknesättet division, och att de har lättare att använda sig av de fyra räknesätten. En av lärarna framför även synpunkten att eleverna har lärt sig att se samband mellan tal och verklighet. Synpunkter om att eleverna lärt sig kreativitet och logiskt tänkande framkommer även vid samtalen.

Lärarna exemplifierar i likhet med eleverna huvudsakligen elevernas inlärning utifrån de handlingar som eleverna utför vid lektionerna. Lärarna ger emellertid även exempel på den förståelse handlingarna har lett fram till, t ex att eleverna har förstått att ett problem kan lösas på olika sätt, lärt sig att se samband mellan tal och verklighet, förstå vilket räknesätt som skall användas samt att eleverna lärt sig logiskt tänkande. Förståelsen ses vid dessa uttalande som ett mål för undervisningen och inte enbart som ett medel för att lösa problem.

Lärarnas bedömning av undervisningen

När det gällde frågan om vad lärarna tyckte var problematiskt i undervisningssituationen, framfördes oftast synpunkter med anknytning till elevernas gruppinteraktion. Dessutom uttryckte de

vid något tillfälle att att det var tråkigt när tiden ibland inte räckte till så att samtliga elever hann slutföra sin problemlösning. En lärare kommenterade att det kunde vara ett problem när vissa elever ansåg att de var färdiga med sin problemlösning och inte vill fortsätta att skriva eller rita. Enligt samtliga lärare hade eleverna ibland svårt att lyssna på varandra, vilket emellertid inte var specifikt för just denna undervisningssituation. Lärarna var emellertid överlag positivt inställda till den genomförda undervisningen. En av lärarna uttryckte att hon personligen hade lärt sig mycket, och att projektet inneburit att hon fått en förändrad syn på elevernas inlärning i matematik. Nedan följer de allmänna synpunkter lärarna lämnade när den sista fasen av problem var genomförd.

> Lär A. Jag tycker det har varit roligt som jag har sagt förut, och jag tror att ungarna tycker det också ... Det,har säkert gett en hel del. ... Jaa ... t ex det här att man kan lösa problem på olika sätt.
>
> Lär B. Jag tycker att barnen jobbat fantastiskt bra och varit ... ja man har märkt att dom tycker det har varit roligt och just det här med redovisningen och alltihopa. Det har varit väldigt bra.. Det har givit mycket på alla möjliga sätt ... Det är tråkigt att det är slut.
>
> Lär C. Barnen tycker det är tråkigt att det är slut. Ja det har varit väldigt roligt faktiskt ... och att timmarna inte bara gått till matte utan att vi har haft bild och svenska. Ja och i svenskan har de inte bara skrivit utan även talat ... och framfört det inför hela klassen. Det är bara positivt ... Jag tycker det är roligt att barnen upplevt det så positivt. Dom har varit glada, det är inga sura miner. Sammanfattningsvis kan jag säga att att det har givit barnen mycket det här och jag är jättenöjd.

De fem delmålen för aritmetisk problemlösning som redovisades i kapitel fyra låg till grund för undervisningens innehåll och utformning. I vilken utsträckning de fem delmålen har uppnåtts i den genomförda undervisningen har inte utvärderats eftersom de ingår i en gemensam undervisningskontext med syftet att gemensamt bidra till att utveckla elevernas aritmetiska problemlösningsförmåga. Vid samtalen med lärarna diskuterades emellertid delmålen och det framkom att lärarna ansåg att den genomförda undervisningens utformning och innehåll bidragit till att delmålen uppnåtts. Eftersom eleverna endast arbetat med ett problem under varje lektion hade eleverna insett att man kan arbeta länge med ett problem och att det tar tid att lösa problem. Eleverna hade även i sina problemlösningar förknippat det vardagliga språket med det matematiska symbolspråket och undervisningen hade därigenom bidragit till att eleverna upptäckt att det finns ett samband mellan tal och verklighet. Vid

problemlösningen hade eleverna dessutom insett att det är lättare att lösa aritmetiska problem om man använder olika uttryckssätt och ritar, skriver och talar. Det delmål som lärarna gav mest uppmärksamhet var att eleverna skulle ges tillfälle att inse att det finns olika sätt att lösa ett problem och att en konfrontation av olika lösningssätt bidrar till förståelsen av problemet. Lärarna ansåg att denna insikt var mycket betydelsefull vid utvecklandet av den aritmetiska problemlösningsförmågan och menade att eleverna uppnått denna förståelse genom att delta i en undervisning där de fått tillfälle att se hur kamraterna på olika sätt löst samma problem som de själva arbetat med.

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

En jämförande beskrivning av elevernas och lärarnas syn på problemsekvensens innehåll visar att såväl elever som lärare tycker att det är positivt att olika typer av problem införlivas i undervisningen. De flesta elever talar om de olika problemtyperna i värderande termer såsom roliga, tråkiga, lätta eller svåra och beskriver skillnader och likheter mellan de olika problemtyperna. Även lärarna menar att eleverna uppmärksammar skillnaderna mellan de olika problemtyperna.

Elever och lärare har vissa samstämmiga synpunkter på gruppsamtalen. De uttalar på ett övergripande plan att de anser att det är roligt och lärorikt med samtal i smågrupper. Elever säger vid intervjuerna att de vid samtalen i grupperna har insett att ett problem kan lösas på ett antal olika sätt och att de lär sig genom att se hur kamraterna har löst ett problem. Dessa synpunkter framförs även av lärarna. Eleverna såväl som lärarna menar att en kritisk punkt vid gruppsamtalen är när den lösning, som skall presenteras inför klassen skall väljas ut. Lärarna diskuterar relativt ingående dessutom ytterligare två problemområden med avseende på samtalen i smågrupper, dels gruppmedlemmarnas argumentation när de samtalar om lösningsförslagen i gruppen, dels elevernas reaktion på valet av den lösning som skall presenteras för klasskamraterna. De synpunkter elever och lärare framför angående samtalen i smågrupper bekräftas vid en analys av bandinspelningar och observationer från undervisningen, vilket framkommer i den beskrivning av elevernas gruppsamtal som senare följer i kapitel 8.

Såväl elever som lärare kommenterade ofta lärandet i undervisningen i allmänna termer. Lärarna uttrycker exempelvis att eleverna har lärt sig mycket. Undervisningen tar sin utgångspunkt i de presenterade problemen samt i de handlingar eleverna utför vid lektionerna. När eleverna beskriver sitt lärande utgår de från dessa handlingar och exemplifierar huvudsakligen sitt lärande med att de lärt sig lösa problem, räkna, skriva berättelser etc. Elevernas uppfattade inlärning är kontextberoende, och de handlingar som utföres i en undervisningssituation, där en förmodad inlärning äger rum, är till stor del avgörande för hur inlärningen uppfattas av eleverna. Eleverna ger uttryck för uppfattningen att när de utför olika handlingar tränar de sig, får erfarenhet och förbättrar sin förmåga. I den studerade undervisningen fick eleverna vid gruppsamtalen tillfälle att tillsammans med kamrater samtala och reflektera över undervisningsinnehållet med uppmaningen att försöka förstå kamraternas olika lösningsförslag. Det är emellertid inte någon elev som vid intervjuerna explicit uttalar att hon eller han har lärt sig att tänka eller förstå något. Förståelsen är implicit och outtalad och synliggörs inte i elevernas utsagor. Det tycks således som om eleverna huvudsakligen ser på förståelsen och tänkandet, som ett medel för inlärning, man lär sig inte *att* förstå och tänka utan man lär sig *genom* att förstå och tänka.

Även lärarna exemplifierar huvudsakligen elevernas inlärning utifrån de handlingar eleverna utför vid lektionerna och nämner att eleverna lärt sig lösa problem och skriva berättelser. Lärarna ger emellertid även exempel på den förståelse elevernas handlingar har lett fram till, t ex att eleverna har förstått att ett problem kan lösas på olika sätt, lärt sig att se samband mellan tal och verklighet, lärt sig att förstå vilket räknesätt de skall använda och lärt sig att tänka logiskt. Förståelsen ses vid dessa uttalande som ett mål för undervisningen i problemlösning och inte enbart som ett medel, som eleverna skall ha tillgång till för att kunna lösa de givna problemen. Elevernas förståelse av den aritmetiska problemlösningen ses då även som ett mål för undervisningen, som öppnar vägar för eleverna att generalisera sin kunskap till andra kontexter.

Med avseende på undervisningens innehåll och form kan sammanfattningsvis sägas att vid en jämförelse mellan enskilda elevers uttalanden och de synpunkter som lärarna lämnade framkommer stora skillnader mellan elev- och lärarperspektiv framför allt genom att lärarna behandlade fler problemområden,

och uttalar sig utförligare om olika frågeställningar. Om emellertid elevernas uttalanden betraktas på gruppnivå förekommer däremot inte några markanta skillnader mellan elevernas och lärarnas perspektiv på den genomförda undervisningen. Det som öppet försigick i undervisningssituationen noterades av både lärare och elever och relativt likartade tolkningar gjordes av undervisningens innehåll och och form. Den tydligaste skillnaden mellan elevernas och lärarnas perspektiv framkommer vid intervjusamtalen när elevernas arbete i smågrupper behandlas. Lärarna identifierar då explicit i högre utsträckning än eleverna svårigheterna med gruppsamtalen. Även när samtalen berör elevernas inlärning uttrycker sig lärarna mer detaljerat. De ger även exempel på den förståelse som den genomförda undervisningen bidragit till att utveckla hos eleverna.

I ovanstående beskrivning framkommer att elever och lärare anser att den genomförda undervisningen resulterat i att eleverna förbättrat sin förmåga att lösa aritmetiska problem. Beskrivningen utgår från elevers och lärares personliga uppfattningar om det lärande som förekommit i undervisningen. Vi skall i följande avsnitt studera elevernas inlärning med utgångspunkt från resultaten på de test som inledde och avslutade den studerade undervisningen.

Kapitel 7

FÖR- OCH EFTERTEST

Vid de tidigare redovisade intervjuerna med elever och lärare angående den genomförda undervisningen, framkom att såväl elever som lärare ansåg att undervisningen bidragit till att eleverna utvecklat sin aritmetiska problemlösningsförmåga samt förmågan att skriva berättelser. Den av elever och lärare förmodade inlärningen i skriftlig framställning har inte utvärderats genom användning av någon form av test, vilket däremot är fallet med elevernas aritmetiska problemlösningsförmåga. När projektet planerades gjordes bedömningen att det kunde vara av intresse att undersöka om en förändrad inriktning av undervisningen i aritmetisk problemlösning påverkar elevernas problemlösningsförmåga. I syfte att studera om det föreligger några skillnader i aritmetisk problemlösningsförmåga mellan de elever som deltagit i den beskrivna undervisningen och elever som deltagit i en läroboksbunden undervisning gavs klassrumsstudien en kvasiexperimentell design med för- och eftertest i de deltagande klasserna och i tre kontrollklasser (se bilaga 4-5).

Testens innehåll och genomförande har tidigare beskrivits i kapitel fem. Kortfattat kan sägas att vid provkonstruktionen gjordes bedömningen att om eftertestets uppgifter var av samma typ som de problem de deltagande klasserna arbetat med, skulle kontrollklasserna ha ett avsevärt sämre utgångsläge än de deltagande klasserna. Testen har därför inte samma innehåll och form som de problem eleverna i de deltagande klasserna arbetade med. De mäter elevernas problemlösningsförmåga vid traditionella skriftliga matematiska problem, s k benämnda uppgifter. Varje test innehåller tolv skriftliga matematiska uppgifter vilka konstruerades utifrån skrivningarna i Lgr 80 om nödvändiga kunskaper i grundläggande aritmetik på lågstadiet. Uppgifterna i testen är den typ av benämnda uppgifter som eleverna möter i sina matematikböcker och som i många fall utgör utgångspunkten för skolundervisningen i problemlösning. Problemen innefattar de fyra räknesätten addition, subtraktion, multiplikation och division. Vissa av uppgifterna kan lösas med flera olika räknesätt.

Vid undersökningar som genomförs i skolans dagliga verksamhet uppstår ofta svårigheter när man vill kontrollera för samtliga variabler som påverkar undervisningsförloppet. I de deltagande klasserna arbetade eleverna ämnesintegrerat vilket innebar att lärarna kan ha avsatt tid från ämnet svenska till projektet. I den första fasen av problem förekom emellertid inte någon aritmetisk problemlösning och även i de följande faserna arbetade eleverna en stor del av tiden med att skriva, rita och tala. Med avseende på undervisningstid kan därför inte skillnaderna mellan de deltagande klasserna och kontrollklasser anses vara av avgörande betydelse för testresultaten.

Undervisningen studerades under en hel termin, vilket naturligtvis medförde att några elever ibland var frånvarande vid lektionerna. Av samtliga 66 elever i de deltagande klasserna var det 2 elever som var frånvarande vid fem av de genomförda lektionerna, 4 elever var frånvarande vid tre lektionstillfällen, 8 elever vid två tillfällen och 14 elever vid en lektion. Resterande 38 elever var närvarande vid samtliga lektionstillfällen. Eftersom inte någon elev varit frånvarande vid mer än 25% av undervisningstiden gjordes bedömningen att samtliga elever kunde ingå i redovisningen av testresultaten.

TESTRESULTAT

På elevernas testblanketter fanns en rutad del, där de numeriska beräkningarna skulle utföras, samt en markerad linje med plats för svar. För- och eftertestet bedömdes efter samma kriterier. Maximalt antal poäng var 24 poäng på respektive test. Korrekt svar och en riktig uppställning gav vid varje uppgift två poäng. Rätt svar utan uppställning gav ett poäng. I de fall eleverna gjort ett räknefel men uppställningen i övrigt var korrekt erhöll man ett poäng. Additions- och subtraktionsuppgifterna måste vara uppställda helt korrekt med eventuell minnessiffra och lån för att ge två poäng. Multiplikations- och divisionsuppställningarna bedömdes som korrekta i de fall de skrevs som upprepad addition. Enheten behövdes inte skrivas ut i svaret, och det var inte nödvändigt att svara med en hel mening för att erhålla två poäng.

På nästa sida redovisas klassmedelvärde och standardavvikelse för de deltagande klasserna och kontrollklasserna på för- och eftertest.

	förtest		eftertest		för- eftertest
	m	s	m	s	dm
DELTAGANDE KLASSER					
klass A n=19	9.0	3.5	14.1	5.9	+5.1
klass B n=24	16.8	4.4	17.0	5.1	+0.2
klass C n=23	13.3	4.7	16.9	4.3	+3.6
Totalt n=66	13.3	5.2	16.1	5.2	+2.8
KONTROLL-KLASSER					
klass D n=17	9.4	5.7	9.9	7.0	+0.5
klass E n=19	11.8	5.8	9.8	7.2	-2.0
klass F n=19	12.1	4.8	10.8	6.4	-1.3
Totalt n=55	11.2	5.5	10.2	6.8	-1.0

Tabell 7.1. *Klassmedelvärden och standardavvikelse för deltagande klasser och kontrollklasser på för- och eftertest* (F= 30.06 df= 118/1 p <.01)

Tabellen visar att medelvärdet för de deltagande klasserna på förtestet är 13.3 poäng och på eftertestet 16.1 poäng. Differensen mellan de deltagande klassernas gruppmedelvärde på för- och eftertest är således +2.8 poäng. Även för kontrollklasserna finns en skillnad i gruppmedelvärde på för- och eftertest. Förändringen har emellertid här gått i negativ riktning och medelvärdet för kontrollklasserna har minskat från 11.2 till 10.2 poäng. Differensen för kontrollklassernas gruppmedelvärde på för- och eftertest är -1.0 poäng. Denna förändring av gruppens medelvärde i negativ riktning kan förklaras av att uppgifterna i eftertestet är något svårare än motsvarande uppgifter i eftertestet, på grund av att distraktorer införts i ett antal problem i eftertestet. Gruppmedelvärdesskillnaden på för- och eftertest mellan de deltagande klasserna och kontrollklasser är således 3.8 poäng.

De deltagande klassernas gruppmedelvärde på eftertestet är 16.1 medan kontrollklassernas gruppmedelvärde är 10.2 poäng. Skillnaden mellan gruppernas gruppmedelvärde på eftertestet är således 5.9 poäng. Grupperna skiljer sig emellertid åt även på förtestet där de deltagande klassernas medelvärde är 13.3 och kontrollklassernas 11.2.poäng. På förtestet förekommer således en skillnad mellan de deltagande klassernas och kontrollklassernas

gruppmedelvärde med 2.1 poäng. Det är tänkbart att dessa initiala skillnader mellan grupperna kan förklara resultaten på eftertestet. För att ta reda på om skillnaderna på eftertestet kan hänföras till de initiala olikheterna mellan grupperna utfördes en kovarianssanalys. Resultatet av denna visar att även när man kontrollerar för olikheterna i gruppernas resultat på förtestet framkommer en signifikant skillnad mellan de deltagande klassernas och kontrollklassernas gruppmedelvärden på eftertestet ($F= 30.06$ $df= 118/1$ $p<.01$).

Den statistiska analysen av testresultaten tyder på att skillnaderna i gruppmedelvärde på eftertestet mellan eleverna i de deltagande klasserna och eleverna i kontrollklasserna inte är slumpeffekter och inte kan förklaras av de initiala skillnaderna mellan grupperna.

DISKUSSION

Testen ger i första hand en prestationsbild och visar om eleverna kan få rätt svar på uppgifterna. En tolkning av elevernas svar på de uppgifter som ingår i de test som bjöds, kan emellertid också ge en viss upplysning om de lösningssätt eleven använder för att nå fram till de redovisade svaren.

En analys av testprotokollen visar att eleverna har svårigheter med de formella procedurerna, när de ställer upp algoritmer som innefattar minnessiffra och växling. Eleverna har även svårt med procedurerna vid multiplikation och division, vilket är förklarligt, eftersom eleverna inte har tränat att ställa upp vid multiplikation och att teckna division under någon längre tid.

Det framkommer i testprotokollen att eleverna gör vissa typer av fel vid problemlösningen. Wigforss (1946) har utfört en noggrann kategorisering av elevers feltyper vid elementär aritmetik och Ljung (1990) diskuterar i den nationella utvärderingen av matematiken de olika typer av fel eleverna gör, när de löser de aritmetiska uppgifter som ingår i utvärderingen. Man kan finna en viss överensstämmelse mellan de feltyper som identifierats i de nämnda undersökningarna och de typer av fel som förekommer i elevernas testprotokoll. Det är emellertid inte något syfte i projektet att kategorisera elevernas feltyper. Därför ges i det följande endast en sammanställning av de feltyper som var vanligast förekommande.

- I de fall distraktorer förekom i uppgiften var det vissa elever som införlivade dem i de numeriska beräkningarna.
- Den numeriska information som var nödvändig för att lösa uppgiften användes inte i de beräkningar som utfördes.
- Vid problemlösningen valde eleverna ibland fel räknesätt.
- Många elever hade svårigheter med de formella procedurerna. Vid addition och subtraktion var det algoritmer som innefattade minnessiffra och växling som förorsakade svårigheter.
- Några elever gjorde läs- eller skrivfel och vände på siffrorna när de skrev av talen i uppgiften.
- Enheten i problemet uppmärksammades inte. Det förekom att några elever gav svar med en enhet som inte omnämnts i problemet.

Ovanstående feltyper kunde återfinnas såväl i de deltagande klassernas som i kontrollklassernas testprotokoll. De var emellertid mer frekventa i kontrollklasserna på eftertestet som framgår av den statistiska bearbetningen av testresultaten.

På förtestet fanns det inte någon elev i de sex klasserna som förutom numeriska beräkningar utförde någon form av skriftliga notationer i testhäftet. Inte heller på eftertestet gjorde någon av eleverna i kontrollklasserna några notationer förutom numeriska beräkningar. I de deltagande klasserna däremot gjorde 54% av eleverna vid eftertestet markeringar eller noteringar på ett eller flera problem i testhäftet. Dessa elever gjorde markeringar på de givna uppgifterna genom att teckna index, stryka under delar av texten eller rita ringar omkring relevant numerisk information. Troligtvis har den undervisning eleverna varit med om, där de fått tillfälle att skriva och rita, bidragit till att drygt hälften av eleverna gjorde skriftliga notationer och markeringar när de löste de uppgifterna i eftertestet.

Vid testtillfällena förelåg det inte några skillnader mellan eleverna från de olika klasserna i deras sätt att förhålla sig till testsituationen. I samtliga klassrum var stämningen något spänd vid förtestet. När eftertestet genomfördes var stämningen emellertid lugnare, eventuellt beroende på att eleverna då visste vad som skulle hända. Det fanns elever i samtliga klasser som vid testens genomförandet uttryckte att testen var tråkiga och svåra. Vid de redovisade intervjuerna med elever i de deltagande klasserna uttryckte flera av eleverna att allt i "matteprojektet" var

roligt, utom de två tillfällen då testen genomfördes. Trots att uppgifterna i förtestet avsiktligt utformats så att eleverna inte skulle uppleva dem alltför svåra, eftersom detta kan resultera i att en del av eleverna ger upp sina försök att lösa problemen och helt avstår från att lösa uppgifterna, var det märkbart att några elever upplevde situationen som pressande. Vid förtestet var det en flicka i en av de deltagande klasserna och en flicka i en av kontrollklasserna, som i slutet av testperioden började gråta. När jag försökte förklara för eleverna att syftet med testet inte var att ta reda på vilka av dem som kunde lösa uppgifterna utan att undersöka hur de löste uppgifterna, svarade eleverna att problemen var för svåra och att de inte kunde räkna ut svaren. Den matematikängslan som diskuterades inledningsvis i denna framställning (Baroody,1987), visade sig således tydligt vid testens genomförande hos några elever, troligtvis på grund av att de i testsituationer starkt upplever att de inte klarar av skolmatematiken.

Vad mäter testen?

Frågeställningen om testen är valida och mäter elevernas aritmetiska problemlösningsförmåga kan diskuteras utifrån ett antal olika frågeställningar. Innehållsvaliditeten kan t ex bedömas utifrån en kursmomentanalys för aritmetisk problemlösning på lågstadiet. Testen konstruerades utifrån skrivningarna i Lgr 80 om nödvändiga kunskaper i grundläggande aritmetik på lågstadiet. De innefattar traditionella skriftliga aritmetiska problem, s k benämnda uppgifter och omfattar de fyra räknesätten addition, subtraktion, multiplikation och division. Uppgifterna i testen skiljer sig inte från de benämnda uppgifter som eleverna möter i sina matematikböcker och som i många fall utgör utgångspunkten för skolundervisningen i problemlösning. Med avseende på test-uppgifternas innehåll och utformning mäter således testen elevernas förmåga att lösa de aritmetiska problem som ingår i skolans matematikundervisning.

Testresultatens validitet kan även diskuteras med utgångspunkt i den matematikundervisningen som bedrivits i de deltagande klasserna. Lärarna i de olika klasserna var olika personligheter och det fanns skillnader i deras sätt att undervisa som kan ha påverkat elevernas inlärning. Den studerade undervisningssekvensen var emellertid mycket strukturerad och till stor del uppbyggd kring elevernas egna aktiviteter. Lärarens roll i undervisningen var därför inte framträdande, vilket minskar sannolikheten för att

lärarnas olika personlighet och sätt att undervisa påverkat de deltagande klassernas testresultat.

Samtliga sex lärare uttalade att de följde en lärobok i sin ordinarie matematikundervisning. Troligtvis innebär detta faktum att det förelåg stora likheter i undervisningen i de olika klasserna, eftersom läroboken oftast är ett mycket kraftigt styrmedel i matematikundervisningen (se t ex Ljung, 1990). I fyra av klasserna, B, C, E, och F använde man samma lärobok i matematik, medan de två övriga klasserna A och D hade en annan matematikbok. Klasserna A och D hade ungefär samma resultat på förtestet. På eftertestet hade emellertid klass A, som deltagit i den beskrivna undervisningen, ett markant bättre gruppmedelvärde än kontrollklass D. Skillnaden i resultat mellan dessa klasser på eftertestet (se tabell 7.1.) kan därmed inte tillskrivas elevernas lärobok. Det tycks vara rimligt att anta, att den undervisning som de deltagande klasserna varit med om, bidragit till de framkomna skillnaderna i gruppmedelvärden på eftertestet mellan de deltagande klasserna och kontrollklasserna.

Kapitel 8

RITA, SKRIVA, TALA OCH RÄKNA MATEMATIK

I de tidigare delarna av denna framställning redogjordes för en del av den omfattande forskning som utförts om aritmetisk problemlösning. Den redovisade forskningen har huvudsakligen tagit sin utgångspunkt i elevers numeriska beräkningar, varvid man har studerat de olika strategier och lösningsmetoder eleverna använder när de löser problem. I motsats till de beskrivna studierna införlivas i den här beskrivna undersökningen analysen av elevernas förfaringssätt vid aritmetisk problemlösning med studiet av hur eleverna ritar bilder, skriver berättelser och samtalar om de givna problemen. Med utgångspunkt från de bilder och berättelser som eleverna framställt i den studerade undervisningen, de bandinspelade gruppsamtalen, samt elevernas numeriska beräkningar i intervjustudien, följer i detta kapitel en beskrivning och analys av elevernas förfaringssätt i de fem olika problemlösningsfaserna när de ritar, skriver, talar och räknar vid aritmetisk problemlösning.

RITA BILDER VID PROBLEMLÖSNING

Vid planeringen av projektet utförde jag som tidigare nämnts provintervjuer i tre omgångar för att pröva ut de problem som skulle ingå i problemsekvensen. Vid samtliga intervjutillfällen frågade jag eleverna om de ritade bilder när de räknade eller löste problem. I en av grupperna med tio elever i årskurs tre svarade nio av de tio eleverna att de inte ritade på matematiklektionerna. Endast en av de tio eleverna svarade att han ritar när han räknar.

> A. Jag började med att rita. När jag var fyra år. Då skulle jag räkna ut 4+5 och mamma försökte lära mig det utantill. Då gjorde jag ringar och sen så gjorde jag ett kryss och sedan fem ringar till. Jag ritar inte så noga för det ska gå fort.

Vid intervjun med Andreas framkommer att han har insett att man kan rita index och förenklade bilder av problemets innehåll. Han nämner även att det är lättare att räkna när man ritar, och att han brukar rita när det är svåra tal. Det är emellertid inte i

skolundervisningen som han har tränat sig i att framställa problemen i bild utan han har enligt egen utsago lärt sig detta själv.

På matematiklektionerna är det således ovanligt att eleverna ritar bilder när de löser aritmetiska problem. När eleverna tillfrågades om varför de aldrig ritar när räknar, svarade eleverna att de ansåg att det var svårt och arbetsamt att rita eller att de inte kunde rita bilder. En annan orsak var att läraren inte tillät att eleverna ritade i sina räkneböcker. Liknande svar, som i den ovan redovisade intervjustudien, framkom vid samtliga tre intervjuomgångar. Det var endast ca 3% av samtliga problemlösningsförslag som inkluderade en bild. Som exempel på elevernas bildframställning kan nämnas Elisabeths problemlösningsförsök vid det det tredje problemet i fas fem. När hon arbetat med problemet en stund stötte hon på svårigheter. Hon visste inte hur hon skulle lösa problemet och började räkna på fingrarna vilket hon inte hade gjort vid de tidigare problemlösningsförsöken. Hon gav så småningom upp lösningsförsöket och sa att hon inte kunde och inte ville fortsätta. Då jag föreslog att hon skulle rita en bild, ritade hon emellertid mycket snabbt upp ett antal ringar för att markera det antal bokmärken som omnämndes i problemet. Hon fick därigenom en visuell bild av problemets innehåll och löste det omedelbart.

Doverborg (1990) ger exempel på ett vardagstillfälle i förskolan då ett barn ritar bilder vid problemlösning och under bildframställningen övergår från att teckna ikoniska bilder till att teckna index. Barnet skall räkna ut hur många tallrikar, glas och bestick som skall dukas fram till barn och vuxna på avdelningen, inalles 16 personer. Först avbildar barnet det antal tallrikar som skall dukas fram i form av runda ringar och skriver hur många det är. Sedan ritar barnet det antal knivar och gafflar som skall dukas fram. När barnet ritat 8 gafflar, övergår han från att rita direkt avbildande tecken till att rita 8 streck. När han ritar glasen inleder han med att rita ett glas. Han avbildar därefter de 16 glasen som streck.

Vid det problemlösningstillfälle som Doverborg beskriver övergår barnet spontant från att rita direkt avbildande tecken till att rita index. Redan i förskolan förekommer således att barnen vid aritmetisk problemlösning ritar tecken som är grundade i ett-till-ett korrespondens. Skolundervisningen är emellertid i mycket liten utsträckning inriktad mot att eleverna skall framställa problemens innehåll i bild utan är i stället inriktad mot att eleverna skall studera redan färdigproducerade bilder eller använda klossar eller annat manipulativt material för att representera det numeriska innehållet

vid aritmetiska beräkningar och problemlösning. Eleverna ges då inte möjlighet att skapa en egen visuell bild av det givna probleminnehållet.

BILDFRAMSTÄLLNINGEN I DE STUDERADE UNDERVISNINGSSITUATIONERNA

Bildframställning är en process som inte kan betraktas skilt från sitt sammanhang, vilket framkommer vid analyserna av elevernas bilder. Bilderna framställdes i en situation där eleverna satt bredvid varandra och tecknade, och somliga av eleverna tog intryck av kamraternas arbete. Vid en jämförelse av de bilder som framställts av elever som satt i samma grupp i klassrummet framkommer att några av bilderna har mycket lika huvudmotiv. Det är tänkbart att någon elev hämmades av svårigheterna att i bild framställa det valda motivet och elevernas medvetenhet om att bilderna skulle förevisas för och diskuteras av kamraterna kan också ha influerat motivval och utförande. Elevernas bilder är emellertid i högsta grad mycket personligt tecknade och skiftar i motivval, färger, stämning och detaljrikedom.

En bilds strukturella egenskaper, dess olika tecken och känslomässiga egenskaper framstår i relationen mellan bilden och en betraktare som tolkar bilden och tillskriver den innebörd. När jag tolkade elevernas bilder inriktade jag mig i första hand mot vad bilden enligt min uppfattning föreställde och hur eleven i bildens form gav uttryck för sin förståelse av problemets innehåll. Konkreta frågor som ställdes vid analysen var: Har eleven ritat en bild? Vad föreställer bilden? Vad är figur och grund på bilden? Är bilden relaterad till det aktuella problemet och elevens skriftliga lösning? Är bilden relaterad till det matematiska innehållet i problemet?

De flesta eleverna i två av klasserna inledde vid de första undervisningstillfällena problemlösningen med att rita en bild. Det var endast två respektive tre elever i dessa klasser som började med att skriva en berättelse. I den tredje klassen påbörjade däremot övervägande delen av eleverna arbetet med att skriva en berättelse. Enligt klassens lärare tyckte eleverna i denna klass mycket om att skriva, och de skrev ofta och gärna. Efter två till tre lektioner förändrades emellertid mönstret i de två förstnämnda klasserna och även i dessa klasser inledde de flesta eleverna problemlösningen med att skriva en berättelse. En pendling tillbaka kan märkas i den sista problemfasen, där de flesta eleverna i samtliga klasser inledde arbetet med att teckna bilder i samband

med den matematiska beräkningen. De häften i vilka eleverna utförde problemlösningen var enbart illustrerade med frågetecken på försättsbladet, eftersom eventuella bilder kunde ha en hämmande inverkan på elevernas egen bildframställning. Vid varje lektion uppmanades eleverna av lärarna att rita en bild med anknytning till problemet. Bildens betydelse vid problemlösning uppmärksammades av läraren när elevernas lösningsförslag förevisades och diskuterades vid de gemensamma klassredovisningarna. Redovisningarna utvecklades emellertid i riktning mot att elevernas skriftliga berättelser och numeriska beräkningar uppmärksammades i högre grad än bilden. Troligtvis berodde detta förhållande på att de matematiska beräkningarna skrevs på tavlan och sambandet mellan innehållet i de skriftliga berättelserna och de aritmetiska beräkningarna diskuterades i klassen, medan bilden förevisades för klasskamraterna med relativt kortfattade kommentarer.

Bildernas innehåll och funktion

Elevernas bilder har mycket varierande motiv och man kan finna stora skillnader mellan bilderna med avseende på utförande och detaljrikedom. Vid en fortlöpande jämförelse av de bilder enskilda elever framställt vid lektionerna kan man emellertid märka en tendens att i de fall någon elev är duktig på att rita t ex katter, hus eller människor återkommer detta motiv ofta i elevens bilder. Nina tecknar ofta flickansikten och på några av pojkarnas bilder återkommer stora, muskulösa män eller skräckinjagande monster.

För att belysa bildernas innehåll kan vi se närmare på de bilder eleverna ritar vid problemlösningen i de olika faserna. När eleverna berättar i bilder behandlar de problemets innehåll på två olika sätt: dels avbildas ett eller flera enstaka föremål, dels avbildas en situation. På de bilder där situationer avbildas förekommer i de flesta fall även bilder på enstaka föremål.

A. Eleverna avbildar ett eller flera föremål. Bilderna är statiska.

Ett eller flera föremål (eller personer) som förekommer i elevernas skriftliga berättelser avbildas mer eller mindre detaljrikt. Eleverna framställer inte något samband mellan de föremål som avbildas. Bilderna är statiska i den bemärkelse att de inte beskriver någon rörelse eller förändring. Vanligt förekommande motiv är människor, hus, träd och ansikten.

B. Eleverna skildrar en situation. Bilderna är dynamiska.

Ett eller flera föremål avbildas och införlivas i en skildring av en situation eller en händelse, där det framkommer ett samband mellan de olika föremålen på bilderna. Bilderna är dynamiska i den bemärkelsen att de beskriver ett skeende med rörelse eller förändring. Den avbildade situationen är anknuten till innehållet i elevernas skriftliga berättelser och skildrar exempelvis en pojke som sparkar iväg en fotboll eller en flicka som säljer lotter.

Fas 1: Berättelseproblem utan aritmetiskt innehåll

Det vanligaste motivet i det första problemet i fas ett (Stökigt i lägenheten) är ett hus eller ett stökigt kök. På vissa av elevernas bilder finns även den lösning av problemet eleven presenterat i sin skriftliga berättelse med på bilden. I de fall elevens lösning på problemet är att det varit en katt i köket, figurerar en katt på bilden, i andra fall då lösningen är att det varit inbrott i huset har eleverna tecknat en människa. Några av eleverna framställer problemets lösning på bilderna, genom att rita tecken som skall ge en föreställning om de händelser och situationer som utspelat sig i deras skriftliga berättelser. Dessa tecken kan betraktas som en form av index. På några av bilderna tecknas ett kök, där det finns spår efter kattassar. Monika har ritat ett kök med stora, svarta fotavtyck på golvet, vilket ger en föreställning om att en person varit där. Oskar har ritat ett hus och ett stort träd, i en pratbubbla bakom trädet står "mjau", som skall referera till den katt som i hans skriftliga berättelse varit inne i köket och orsakat oredan. De situationer och händelser eleverna avbildar på sina bilder framställes huvudsakligen med ikoniska tecken, men det förekommer således även att eleverna använder index.

Elevernas bilder har anknytning till deras skriftliga berättelser. Samtliga 61 elever som ritat en bild till det första problemet, har relaterat bilden till berättelsernas innehåll. Ca 50% av eleverna införlivar på sin teckning den lösning de har givit på problemet i den skriftliga berättelsen. Det förekommer index i den ovan beskrivna betydelsen att tecknet ger en föreställning om någonting annat än det som direkt avbildas på bilden på ca 20 % av det totala antalet teckningar.

Motivet vid det första problemet i fas ett (Stökigt i lägenheten) är oftast en katt, ett kök, ett rum eller ett hus. Vid det andra problemet (Barnvagn i skogen) tecknar eleverna oftast ett träd eller en skog och en barnvagn. Det tredje problemet (Kistan på vinden)

illustreras oftast med ett vindsförråd, en kista eller en klocka och det fjärde problemet (Rivningshuset) med ett gammalt hus eller ett stökigt rum.

Som exempel på elevernas bilder i fas ett kan vi se hur eleverna kan teckna föremål och situationer till det första problemet (Stökigt i lägenheten).

A. Föremål

Bild 8.1. Cecilia har ritat en katt på en gräsmatta.

B. Situation

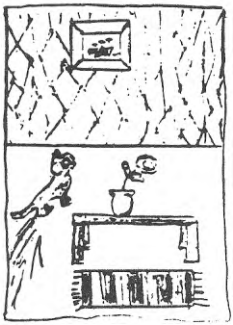


Bild 8.2. Olof har ritat en katt som hoppar upp på ett bord.

Fas 2: Berättelseproblem med aritmetiskt innehåll

I fas två införs aritmetiska beräkningar i problemen. Detta förhållande avspeglas emellertid inte i elevernas bilder, utan det tematiska innehållet i elevernas skriftliga berättelser behandlas även i bilderna. Ett antal elever ritar ett eller flera föremål som förekommer i deras skriftliga berättelser, andra avbildar i en händelse som de skrivit om. Vanliga motiv vid det första problemet i fas två (Äpplen till hästarna) är ett äppleträd med varierande antal äpplen, ett enstaka eller flera äpplen, hästar och ett stall med hästar. På flera av bilderna är även de två barnen som förekommer i problemet avbildade. Vid det andra problemet (Ballonger på kalaset) ritar eleverna huvudsakligen färgglada ballonger eller ett dukat födelsedagsbord. Ett vanligt motiv i det tredje problemet (Samla in fotbollar) är en eller flera fotbollar, en fotbollsplan eller några barn som sparkar fotboll. Vid det sista problemet i fas två

(Diplom på klassens timma) är det vanligast att eleverna tecknar ett eller flera diplom.

Som exempel på elevernas bilder i fas två kan vi se hur eleverna tecknat ett föremål och en situation vid det tredje problemet (Samla in fotbollar).

A. Föremål

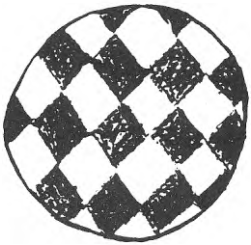


Bild 8.3. Märta har ritat en fotboll.

B. Situation

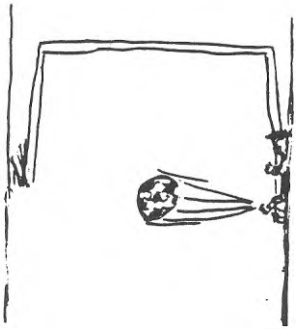


Bild 8.4. Ivar har ritat en fotboll som sparkas i mål.

Fas tre: Numeriska uträkningar som införlivas i berättelser

Bilderna i fas tre skiljer sig inte från de ovan beskrivna. Eleverna skildrar i bild den berättelse som de beskriver i ord. Bilderna visar ett antal olika föremål som förekommer i problemet eller en händelse eller situation som omtalas i berättelserna. Det är ovanligt att eleverna återger det exakta antalet föremål som omnämnes i texterna. Oftast avbildas endast ett eller ett par av de aktuella föremålen.

Som exempel på elevernas bilder i fas tre kan vi se på hur eleverna tecknar ett föremål och en situation när de löser det andra problemet (180-78=102). Ulrika fokuserar den givna numeriska uträkningen i problemet och tecknar den två gånger på sin bild. En situation kan även skildras genom att eleverna ritar pratbubblor som exemplifieras av Veras bild.

A. Föremål

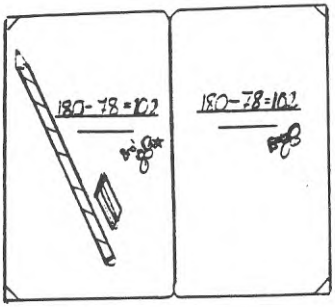


Bild 8.5. Ulrika har tecknat uträkningen i en räknebok.

B. Situation

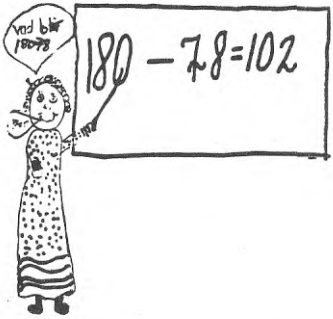


Bild 8.6. Vera har ritat en fröken som pekar på uträkningen och ställer en fråga till klassen.

Fas fyra: Berättelseproblem med uppskattning

När eleverna tecknar bilder i fas fyra går de tillväga på liknande sätt som i de tidigare faserna. I denna fas kan emellertid märkas en förändring i riktning mot att eleverna ritar ikoniska tecken för att avbilda det numeriska innehållet i problemen. I de tidigare faserna var det ytterst sällan förekommande att eleverna avbildade det exakta antalet föremål som omnämnes i de skriftliga berättelserna, något som däremot förkommer i fas fyra. Vera har exempelvis vid problem 4.1 (Försäljning av blommor) skrivit en berättelse om att 23 barn i en klass har planterat var sin blomma och hon avbildar detta numeriska innehåll på sin teckning.

Bild 8.7. Vera har avbildat samtliga blommor som barnen har planterat i klassen.

Det förekommer att eleverna vid lösningen av de olika problemen skiftar mellan att teckna föremål och att teckna situationer, som kan exemplifieras av Veras bilder, där hon ovan gestaltar en situation vid problem 3.2 och föremål vid problem 4.1.

Som ytterligare exempel på hur elevernas bilder i fas fyra kan vi se på en föremålsbild vid det sista problemet (Drickor och chips) och en situationsbild vid det tredje problemet (Lotteri).

A. Föremål

Bild 8.8. Petra har ritat en läskedrycksflaska

B. Situation

Bild 8.9. Stina har tecknat en tant som säljer lotter

Fas fem: Benämnda uppgifter

Vid en jämförelse med bilderna i de tidigare faserna kan i denna fas märkas ännu en förändring i elevernas sätt att teckna bilder. I fas fem avbildar eleverna problemens innehåll på tre olika sätt.

- Eleverna ritar ikoniska tecken som skall illustrera problemets innehåll på liknande sätt som i de tidigare faserna.
- Eleverna ritar ikoniska tecken som avbildar det numeriska innehållet i problemen på liknande sätt som i fas fyra.
- Eleverna ställer upp en tabell eller ritar index och avbildar det aritmetiska innehållet i problemet.

När eleverna ritar ikoniska tecken vid sista uppgiften i fas fem (Per diskar) väljer de liksom tidigare motiv som är relaterade till den

skriftliga berättelsens innehåll, och som illustrerar problemets innehåll t ex ett kök, en pojke som diskar, en fotboll eller några barn som sparkar fotboll.

A. Föremål

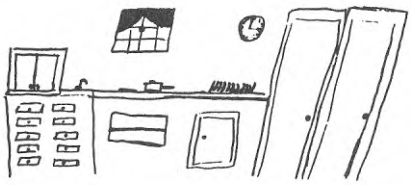


Bild 8.10. Arne har ritat ett kök.

B. Situation

Bild 8.11. Gun ritar barn som sparkar fotboll.

När eleverna tecknar bilder i fas fem förekommer det att de ritar ikoniska tecken för att gestalta det numeriska innehållet i problemen på liknande sätt som i fas fyra. I denna fas inträffar även att eleverna på sina teckningar kombinerar bildens illustrerande funktion med en bild av problemets aritmetiska innehåll.

Vid lösningen av det andra problemet i fas fem (Bord i klassrummet) gestaltar några elever det aritmetiska innehållet på sina bilder och ger dessutom samma bild en illustrerande funktion.

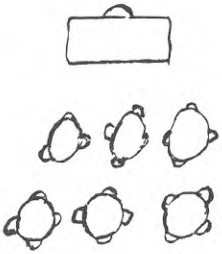


Bild 8.12. Stella ritar fem bord med fyra stolar och ett bord med tre stolar.

Vissa elever ställer i denna fas upp tal i en tabell eller ritar index för att avbilda det aritmetiska innehållet i problemet. Vid problem 5.4 (Per diskar) avbildar 62 % av eleverna det matematiska innehållet i problemet genom att ställa upp tal i en tabell eller teckna index i form av ringar, prickar eller streck.

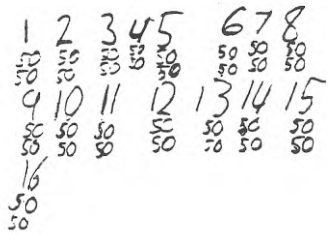


Bild 8.13. Stinas tabell visar att Per måste diska två gånger för varje krona som bollen kostar.

Några eleverna visar med streck och pilar de aritmetiska operationer de utför. Nedan ges exempel på index som avbildar den aritmetiska operationen vid problem 5.3 (Bokmärken).

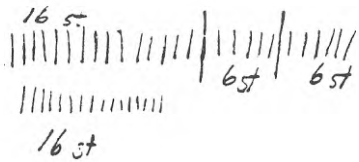


Bild 8.14. Lena visar med streck hur hon fördelar bokmärken till de två flickorna.

Bild 8.15. Anna använder ett streck och en pil.

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

Sammanfattningsvis kan sägas att eleverna i samtliga faser på sina bilder avbildar något av problemens innehåll i sina skriftliga berättelser. En stor andel av eleverna införlivar på bilden den lösning de föreslagit på det givna problemet i sina berättelser. Eleverna behandlar det givna problemet på två olika sätt i sina bilder. (A) Ett antal elever avbildar endast ett eller flera föremål medan (B) andra elever tecknar ett samband mellan två eller flera föremål och införlivar dem i en skildring av en situation eller en händelse.

(A). De elever vilka enbart avbildar enstaka föremål fokuserar en eller flera innehållsliga delar av probleminnehållet eller innehållet i sin berättelse (se t ex bild 3). Eleverna differentierar därmed problemet och fragment av det framställda problemet framkommer i elevernas bilder. På bilden kan exempelvis en fotboll avbildas som en rund ring. Några av eleverna fördjupar bilderna och gör dem inträngande genom att teckna föremålen mycket detaljrikt och omsorgsfullt. Fotbollen kan då vara försedd med ett vackert rutmönster. Andra elever utvidgar sina bilder genom att rita ett mycket stort antal föremål. Det kan förekomma en fotboll, mål och barn på bilderna. Det som utmärker bilderna är emellertid att de är statiska i betydelsen att eleverna inte integrerar några av föremålen på bilderna till en sammansatt enhet, så att en rörelse framkommer och ett händelseförlopp eller en situation skildras på bilden.

(B) Även de elever som skildrar en situation differentierar innehållet och avbildar minst två föremål på sina bilder. Några elever fördjupar sina bilder genom att teckna detaljrika föremål och vissa elever utvidgar sina bilder och ritar ett stort antal föremål. Det som utmärker bilderna är emellertid att de är dynamiska i den bemärkelsen att eleverna integrerar flera föremål till en sammansatt enhet så en rörelse eller en situation skildras. Bilden kan t ex visa hur ett barn sparkar iväg en fotboll (se bild 4).

Vid en jämförelse mellan elevernas bilder i de olika faserna i problemsekvensen framkommer att eleverna i de två avslutande faserna i större utsträckning än i fas två och tre inriktar sig mot att avbilda det matematiska innehållet i problemen. I fas fyra avbildar ett antal elever problemets numeriska innehåll i bild och i fas fem avbildar ett stort antal elever problemens matematiska innehåll genom att ställa upp tal i en tabell eller genom att teckna index i form av ringar, prickar eller streck. En skillnad kan märkas i det sätt

på vilket eleverna tecknar index, därigenom att några elever använder index enbart för att avbilda föremål medan andra elever även använder index för att beteckna en rörelse eller förändring (se bild 15). Denna rörelse i bilden framkommer då eleverna ritar pilar eller med olika streck för samman de index man tecknat till sammansatta enheter, så att ett skeende avbildas. Även vissa av de elever som ställer upp tal i en tabell eller tecknar index integrerar således på bilden sina tecken till sammansatta enheter.

De elever som tecknar index i form av streck, ringar, prickar och pilar använder bilden som redskap vid problemlösningen. När eleverna istället för att rita direkt avbildande tecken ritar index, som är ett mer abstrakt tecken, upprättar de en förbindelse mellan bilder och talsymboler som kan medverka till förståelsen av det abstrakta symbolspråket.

Det framkom vid de intervjuer som beskrevs inledningsvis i detta kapitel att de lågstadielever som intervjuades mycket sällan ritade bilder när de löste aritmetiska problem, eftersom de tyckte att det var svårt och arbetsamt. I den studerade undervisningen ritade eleverna eftersom bildframställning ingick som ett moment vid problemlösningen. Det är undervisningens uppläggning, samt uppgifternas innehåll och formulering, som i de olika faserna inriktat eleverna mot den ovan beskrivna bildframställningen. I fas fem är problemformuleringen mer direkt inriktad mot aritmetiska beräkningar än vad som är fallet i de övriga faserna. Problemens formulering och innehåll influerar elevernas bildframställning och bildernas innehåll. Det har emellertid inte ställts något krav i undervisningen på att bildframställningen skall inordnas i bestämda former. Läraren har inte förevisat en procedur som eleverna skall tillämpa, utan de framställda bilderna är ett resultat av elevernas egen tolkning av problemet. Eleverna har emellertid vid en jämförande diskussion med kamrater i smågrupper uppmanats att studera och samtala om varandras bilder. Vid samtalen i smågrupper om de olika problemlösningsförslagen har eleverna således givits tillfälle att uppmärksamma att det finns olika sätt att framställa ett matematiskt innehåll, varav ett sätt är att rita bilder.

SKRIVA VID PROBLEMLÖSNING

Vid varje lektionstillfälle får eleverna i uppgift att skriva en berättelse om det problem som läraren presenterar. Eleverna avgör emellertid själva hur de vill disponera den tillgängliga lektionstiden vilket medför att några elever arbetar mycket intensivt med att skriva, medan andra lägger ner mer tid och arbete på sin teckning. De berättelser eleverna skriver är av mycket varierande karaktär. En del är mycket korta och enkla texter som består av några få meningar, medan andra är långa och innehållsrika berättelser. Elevernas texter kan beskrivas och anlyseras på flera olika beskrivningsnivåer. Jag har valt att i det följande ge en överblick och redovisning av de teman och motiv eleverna behandlar i sina berättelser, samt att redovisa en analys av det sätt på vilket eleverna behandlar det givna problemets frågeställning i sina texter.

BERÄTTELSERNAS TEMA

Berättelserna behandlar olika motiv och är influerade av elevernas upplevelser och skilda företeelser som förekommer i elevernas vardagsvärld. I de olika problem eleverna möter i undervisningen finns ett innehåll och en stämning som eleverna anknyter till eller förstärker i sina berättelser. Det inträffar emellertid även att eleverna oberoende av problemets innehåll skapar en egen stämning i sina berättelser.

En övergripande analys av elevernas texter, där intresset är riktat mot texternas innehåll, ger vid handen att elevernas berättelser kretsar kring ett antal olika teman. Vanligast förekommande är vardagsbeskrivningar, där motiven är hämtade från elevernas upplevelser i skolan och från fritiden med familjen eller tillsammans med kamrater. Flickornas vardagsbeskrivningar behandlar oftast familjeliv och samvaro med kamrater på fritiden. Flickorna skriver emellertid även ofta om den givna uträkningen som ett skolproblem eller som en hemläxa. Lena skriver.

Problem 3.1 (18 + 7 = 25)

> Det var när Per och Lena skulle lära sig 18+7. Det visste dom inte så dom gick ner och frågade mamma. Hon visste inte heller vad 18+7 var. Då frågade dom sin granne och hon visste det. Hon sa 18+7=25. Så skrev dom upp det i matteboken.

Några av såväl flickornas som pojkarnas berättelser handlar om en duktig pojke som löser ett problem eller visar en flicka hur man skall gå tillväga. Det finns däremot ingen berättelse där en flicka visar en pojke hur man löser ett problem. Stella skriver om hur en pojke räknar ut ett tal.

Problem 3.2 (180 - 78 = 102)

> Lena och Maria stog och pratade. De hade fått ett tal i läxa. Jag vet inte vad det ska bli, sa Lena. Det är konstigt. Då kom Per gående på gatan. Han stannade och frågade vad dom gjorde. Vi har ett tal som vi ska räkna ut sa Maria. Vad då sa Per. 180-78 sa Maria. Det är lätt sa Per. Det blir 102. Jaha sa Lena då kan vi leka.

Elevernas upplevelser på fritiden såsom kalas och discobesök behandlas i texterna. Några enstaka elever skriver om sällskapsdjur, exempelvis Tina som skriver en berättelse om fem valpar. Idrottsutövning är ett ganska vanligt tema i pojkarnas berättelser, däremot skriver inte flickorna lika ofta om idrott. Vid de få tillfälle flickorna skriver om sport handlar det om ridning. Pojkarna skriver om ett antal olika idrotter som de utövar t ex bordtennis och fotboll. Valter skriver om basketboll.

Problem 3.3 ($3 \cdot 7 = 21$)

> Per och Martin spelade basket. Deras tränare sa att det skulle vara match på lördag. Dom skulle spela mot Kungsbackas basketklub. Per och Martin gick hem. Dom berättade det för sin mamma och pappa. Det skall ni väl gå på sa deras pappa. Per och Martin sa att det ska vi göra. Vilken dag är det idag mamma. Det är fredag. Per sover över hos Martin. På morgonen gick dom till matchen. Först gjorde Per en 3-poängare sedan gjorde dom 7 mål till. Sedan när matchen var slut hade de sammanlagt 21 poäng. Dom gick hem och drack saft och bullar.

I några av berättelserna kan märkas att eleverna använder ovanliga namn och ord eller anlägger en humoristisk ton. Ivar ger en interiörbild från ett klassrum.

Problem 4.1 (Försäljning av blommor)

> Sune, vad tycker du att blommorna ska kosta? frågar fröken. Alla tittar på Sune. Då börjar Sune gråta. Sune gråter så det blir ett hav i klassrummet. Alla barn hoppar upp på bänkarna och har dom som båtar, fröken själv sitter på katedern. Rune vad tycker du då, frågar fröken än en gång, men Rune hör inte för han leker färja med Pekka, då skriker fröken lite högre, men Rune hör inte då heller. Då lutar sig fröken så långt ut från katedern och ropar, R u n e, men sen hinner hon inte säga mer för sen hörs ett plask från katedern. Fröken över katedern, ropar Svenne glatt. Sen hörs ett spottande och fräsande, sen sticker frökens huvud upp och frågar, vad sa du Rune? Alla barn skrattar. 10 kronor säger Rune. Sen pumpar de ut vattnet och säljer

blommor. De fick ihop 260 kronor och det var nästan precis för resan kostade 250 kronor. Nästa sommar åkte de på skolresa.

Eleverna ger även uttryck för fantasier. Det är drömmar och önskningar om vad man kan företa sig och uträtta. Oskar vill åka till Australien.

Problem 4.1 (Försäljning av blommor)

Jag tycker dom ska ta 500 kronor för varje blomma. Och det gör dom, och dom åker till Australien och där äter dom hamburgare och glass och dricker coca-cola varje dag. Och sen köper dom en lott och vinner 200 000 kronor och kan bo på ett lyxhotell som är 17 stjärnigt. Dom är 15 i klassen. 15 · 500 = 7500

Det förkommer även att eleverna skriver berättelser som innehåller "action". I de teckningar eleverna ritar i anslutning till dessa berättelser finns ofta "pratbubblor". Texterna handlar ofta hjältar, elaka personer, dramatik och våld, i likhet med den berättelse som Mats skriver.

Problem 1.4 (Rivningshuset)

Dom går in i huset där ser dom att trappan ner i huset är sönderslagen. Dom märker att det är ett ficklampeljus och ser en stege som ligger i källaren.Det är långt ner och när dom är nere känns det inte bra. Per springer in i ett hämligt rum som bara dom vet. Men när Lena skall springa får hon en revolver i tinningen och någon skriker HEJ med hög röst. Per tittar ifrån nyckelhålet och ser när Lena blir kidnappad. Han ser sig om och där hittar han en revolver. Dom där killarna har hittat Pers och Lenas skatt. Två stycken av grabbarna bär iväg med skatten men en är kvar. Nu har jag chansen säger Per. Han hoppar ut ur dörren och skriker Släpp Lena innan jag skjuter dej. Killen släpper Lena och Lena och Per springer hem.

Några av pojkarnas texter handlar om monster. Ett annat motiv som pojkarna behandlar är indianer. Gunnar berättar om en indianstam.

Problem 3.4 (16 : 4 = 4)

Det var en gång då Lille Mohawa fyllde år. Han fyllde 4 år men den födelsedagen var inte lyckad för då kom Baorossindianerna. De är Aronbayas värsta fiende. Ja Mohawas indianstam hette så. De var 21 stycken men fem indianer hade dött så nu var de bara 16 stycken. Då sa svarta korpen. Vi måste dela upp oss. 4 indianer i varje grupp. Då blev dom fyra grupper. En grupp gick åt väst, en åt öst en grupp åt norr och en åt syd. Nu var dom säkra på att vinna och det gjorde dom också.

Många av berättelserna är sagobetonade. Cecilia inleder i en vardaglig ton, men hon avslutar med ett sagotema.

Problem 1.3 (Kistan på vinden)

> Lena och Per går och hämta skridskorna. När dom är hemma berättar mamma och pappa att dom ska gå fest och att Lena och Per måste vara hema ensamna den kvällen. När mamma och pappa har åkt iväg går Per och Lena upp på vinden. och tittar på kistan. Plötsligt går locket upp av sig själv. Lena och Per står nästan förstenade, så rädda blir dom. Ur kistan går fyra stycken små tomtar. Tomtarna sejer HEJ ska vi bli vänner? Ja sejer Lena och Per på en gång. En tomte säjer. Jag heter Blyger. Han där heter Skratter och han där heter Toker och han är Butter. Hej jag heter Per och det här är min syster Lena. I nästa ögonblick har Lena Per, Butter, Toker, Blyger och Skratter börjat leka. Sen dess har dom alltid lekt.

I sina texter anknyter eleverna ibland till ett innehåll i ett problem som de mött tidigare, eller till de berättelser de själva eller kamraterna har skrivit. När exempelvis ett problem har handlat om ett barnkalas är det alltid några av eleverna som tar upp motivet igen i en kommande berättelse. Eleverna använder i stor omfattning de indentifikationsmodeller i form av de två barnen, Per och Lena, som förekommer i problemen i de första faserna, och skriver om barnens upplevelser även i senare berättelser. Berättelserna inleds ofta med "Det var en gång". Vissa av dessa texter är sagobetonade, men även vardagsberättelser har mycket ofta denna inledning.

Berättelsernas tema framkommer ofta i elevernas rubriksättningen. Rubriken anknyter till innehållet i berättelserna och fokuserar ofta en betydelsefull aspekt av innehållet. I de fall eleverna nämner lösningen på problemet i rubriken, har de även fokuserat problemets lösning i sin berättelse. Det är mycket ovanligt att rubriken i de tre första faserna utelämnas. Rubriken är oftast mycket kortfattad och innehåller ibland enbart ett ord. Det vanligast förekommande antalet är tre ord. Det är endast en flicka som skrivit en riktigt lång rubrik som innehåller sexton ord. Rubrikerna kan vara "Mysteriet med ..." eller "Sagan om ...". Det är även vanligt att rubriken består av namn på de personer som förekommer i berättelsen, eller beskriver lösningen på problemet. Det är tre elever som i samtliga rubriker har använt namnen på de personer deras texter handlar om. I en av klasserna var det nästan hälften av eleverna som vid de två sista problemen i fas ett använde ordet mysterium i rubriken. Läraren läste vid detta tillfälle en bok som handlade om hur Kalle Blomkvist löser ett mysterium. Trots att ordet mysterium förekommer i rubriken finns det inte någon skillnad mellan de teman som behandlas i dessa berättelser och de

teman som eleverna väljer när de skriver texter med andra varierande rubriker.

Händelser i skolan och i vardagslivet, läsning av böcker och serietidningar, olika tv-program, föreningsverksamhet, resor etc påverkar elevernas skriftliga framställning. I pojkarnas berättelser behandlas idrottsutövning i olika former och pojkarna har även i mycket högre grad än flickorna skrivit "action"- influerade berättelser. De elever som har en hobby eller ett speciellt intresse har ofta det som motiv i sin berättelse, men det vanligast förekommande temat är vardagsbeskrivningar vilka behandlar familjeliv och elevernas samvaro med kamrater på fritiden.

ELEVERNAS BEHANDLING AV DET GIVNA PROBLEMETS FRÅGESTÄLLNING

De skriftliga berättelserna kan analyseras och tolkas på olika sätt, beroende på vilken beskrivningsnivå man väljer vid analysen. Nedan beskrivs hur eleverna *vid problemlösningen i fas ett* i sina texter inriktar sig mot frågeställningen och behandlar innehållet i det givna problemet. Eftersom den aritmetiska problemlösningen ingående kommer att beskrivas i avhandlingens tredje del behandlas i detta avsnitt enbart fas ett, där problemen inte har något aritmetiskt innehåll. Det är ett mycket begränsat urval av elevernas texter som används för att förtydliga och exemplifiera eleverna förfaringssätt vid den skriftliga framställningen, emellertid återfinns i det tidigare avsnittet som berörde berättelsernas teman ytterligare några av elevernas texter i fas ett.

Totalt har eleverna i fas ett skrivit 253 texter. Dessa texter kan med avseende på hur eleverna i sina berättelser behandlar det givna problemets frågeställning och innehåll delas in i två kategorier: dels texter där det inte framkommer någon lösning på problemets frågeställning, dels texter där en lösning på problemets frågeställning framställs.[1]

[1] Elevernas problemlösning har resulterat i ett antal olika kategorisystem. Endast där det ansetts vara av särskilt intresse har frekvenser angivits.

A. Texten ger inte någon lösning på problemets frågeställning.

1. Problemets frågeställning behandlas inte. Texten saknar relevans för problemets lösning. (n= 9)

Eleverna ger inte någon lösning på de framställda problemen i sina texter. De skriver inte om problemen med inriktning mot den givna frågeställningen, utan behandlar aspekter av problemens innehåll som inte är anknutna till problemens lösning.

Sverker (Problem 1. 1: Stökigt i lägenheten)

> Dom gick ut genom rummet. Dom gick ut i huset och in till grannen och frågade om Karin var där. Nä sa hon och så gick dom hem. När dom kom hem och tog på handtaget var det inte låst. Dom gick in då stog smörgåsarna på bordet och där satt mamma.

Nina (Problem 1. 2: Barnvagn i skogen)

> Dom letade och letade men dom hittade inga blåsippor.

I sina texter uppmärksammar eleverna detaljer och fragment i det förelagda problemen. Det innehåll i problemen eleverna uppmärksammar integreras inte med problemens frågeställning utan behandlas avskiljt från problemformuleringen.

2. Problemets frågeställning behandlas inte. Texten har emellertid relevans för problemets lösning. (n=60)

Elevernas texter är anknutna till problemets innehåll och de händelser eleverna beskriver ingår i en tänkbar lösning av problemet. Eleverna inriktar sig emellertid inte mot problemens frågeställning och redogör inte för sambandet mellan de händelser som beskrives i texten och den givna frågeställningen.

Frida (Problem 1. 4: Rivningshuset)

> De gick in i huset där satt en gumma. Per och Lena sa Hej vad heter du? Jag heter Stilka och vad heter ni då era små rackare där? Vi heter Per och Lena. Vet ni vem jag är? frågade gumman. Nej sa Per och Lena på samma gång. Jag är en häxa sa gumman då blev Per och Lena så rädda att dom sprang hem direkt och där hemma satt mamma och pappa och var så oroliga. Men när dom såg Per och Lena blev dom jätteglada.

Susan (Problem 1. 4: Rivningshuset)

> När Per och Lena gick in i huset så gick Per ner i källaren. Och då ropade Per till Lena och sa kom och titta så får du se. Där nere satt ett gäng tjejer och hade en klubb mitt framför deras skatt.

När eleverna skriver om problemen finns lösning av problemet implicit i texten. Lösningen är emellertid inte uttalad och beskriven i ord utan finns underförstådd i texten. Berättelserna anknyter till

det givna problemet, men eleverna integrerar inte frågeställningen med innehållet i sina berättelser vilket medför att texterna saknar en explicit lösning. De berättelser som har en implicit lösning är ofta långa och innehållsrika.

3. Problemets frågeställning behandlas. Texten ger inte någon lösning på problemet. (n = 6)

Eleverna skriver explicit om frågeställningen i det givna problemet utan att ge någon lösning på problemet.

Sofia (Problem 1. 1: Stökigt i lägenheten)

> När Lena och Per kommer in är det rörigt. Dom undrar varför skräppåsen ligger på golvet. Ingen vet varför.

Mia (Problem 1. 2: Barnvagn i skogen)

> Undra vem det är som har lämnat ett barn i storskogen. Om det var mitt barn så skulle jag aldrig lämnat det i skogen. Skulle du det, Per? Nä, det skulle jag aldrig gjort. Undra vems barn det är?

Eleverna inriktar sig mot frågeställningarna i problemen. De framställer emellertid inte några hypoteser i syfte att att ge ett svar på problemen och utvidgar inte problemens innehåll.

B. Texten ger en lösning på problemets frågeställning.

1. En lösning på problemet ges. Problemets frågeställning och innehåll behandlas inte i texten. (n = 30)

Problemens frågeställning uppmärksammas av eleverna och de ger en lösning på problemet i sina texter. Eleverna skriver emellertid inte om problemets innehåll utan ger enbart ett svar på problemen.

Olof (Problem 1. 3: Kistan på vinden)

> Jag tror att det låg en klocka i kistan.

Lena problem 1. 1: Stökigt i lägenheten)

> Det var katten som varit inne och stökat till.

Eleverna ger en lösning på det givna problemets frågeställning. De införlivar emellertid inte lösningen i en berättelse, i vilken de fördjupar och utvidgar frågeställning och problemformulering.

2. En lösning på problemet ges. Problemets innehåll och frågeställning behandlas i texten. (n= 148)

I sina berättelser ger eleverna en lösning på problemens frågeställning. Det givna problemets innehåll utvidgas och problemets frågeställning integreras i elevernas berättelser.

Oscar (Problem 1. 4: Rivningshuset)

> Lena och Per gick in i huset. Plötsligt hörde dom ett knakande ljud uppifrån vinden. Lena och Per blev rädda. Plötsligt försvann ljuset som dom sett. Dom gick ner i källaren igen och då såg dom en spegel. Lena förstog att ljuset som dom hade sett utifrån kom ifrån spegeln, när månen speglades i spegeln. Lena och Per gick hem.

Henrik (Problem 1. 3: Kistan på vinden)

> Nu vet jag sa Per. Vi klär ut oss till poliser och säger att vi måste undersöka vinden. Ja säger Lena. Dom tar sina sparpengar och ilar bort till Buttericks. Dom kommer ut glada och i poliskostymer. Nu ska vi nog kuna lista ut vad det finns i kistan sa Per. Ja sa Lena. Dom gick till vinden för att se vad det stog på kistan. Det stod nämligen vems sakerna var. E R I C K S O N stavade Lena. Det är den gamla gubben i huset nedanför oss sa Per. Kom så går vi dit sa Lena. Dom ringde på dörren och gubben öppnade. Ähum sa Per och Lena. Vi är från polisen och en tjuv har rånat en bank och vi tror han har gömt pengarna på våran vind. Kan vi få låna nyckeln till kistan ett tag? Här sa gubben och räckte fram en nyckel. Dom gick till vinden och låste snabbt upp kistan och öppnade den. En klocka sa Per och Lena på en gång.

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

Eleverna har vid de fyra lektionstillfällena i fas ett totalt skrivit 253 texter. I ca 30 % av texterna ges inte någon lösning på problemets frågeställning medan det i ca 70% av samtliga texter framställs en lösning på problemet.

I 4% av de texter som inte ger någon lösning på problemet saknar den skrivna textens innehåll relevans för problemets lösning. Eleverna inriktar sig inte mot frågeställningen i problemet utan fokuserar någon annan del av problemets innehåll. Det förekommer i 24% av samtliga texter, att den skrivna texten har relevans för problemets lösning, men eleverna integrerar inte den givna frågeställningen med innehållet i sin berättelse. Det är endast i 2% av de skrivna texterna som den givna frågeställningen behandlas, utan att eleverna framställer någon lösning på problemet. Dessa elever inriktar sig således mot frågeställningen och skriver att de inte kan ge någon lösning på problemet.

Eleverna ger en lösning på problemet i ca 70% av texterna. I 12 % av samtliga texter ges en lösning på problemet, som emellertid inte införlivas i en berättelse där problemets frågeställning och innehåll behandlas och utvecklas. Det är således i 58% av texterna som det givna problemets frågeställning behandlas och utvecklas och en lösning på det givna problemet framställs.

Den enskilde eleven skiftar ofta förfaringssätt vid lösningen av de fyra olika problemen. I de två första texterna inriktar sig Stina i sina kortfattade berättelser mot problemets frågeställning. I dessa texter framkommer det emellertid inte någon lösning på problemet. De två efterföljande texterna ger däremot en lösning på det framställda problemet.

Problem 1. 1: Stökigt i lägenheten

> När Lena och Per kom hem från skolan var det jätterörigt i köket. Vasen var sönder och vardagsrummet var det också rörigt. Karin var inte hemma men jag vet inte vad som hade hänt.

Problem 1. 2: Barnvagn i skogen

> När Lena och Per kom till en glänta stod det en barnvagn där och mamman var inte där, men jag vet inte var hon var.

Problem 1. 3: Kistan på vinden

> Lena och Per går upp på vinden. Dom hör något som tickar. Det kommer från en gammal kista. De tittar på kistan. Jag tror att det är en gammal klocka som någon har lagt i och så har den börjat ticka.

Problem 1. 4: Rivningshuset

> Jag tror att det var någon nere i källaren. Han skulle hämta något och så tände han ljusknappen för att han skulle se mycket bättre.

61 elever har skrivit berättelser till samtliga fyra problem i fas 1. Vid en jämförelse mellan de texter eleverna skrivit vid de fyra olika problemlösningstillfällena framkommer att 80% av eleverna behandlar problemets frågeställning och innehåll på olika sätt vid ett eller flera tillfällen. Det är endast 12 elever vars samtliga texter återfinns i en och samma kategori. 11 av dessa 12 elever har vid samtliga fyra tillfällen skrivit texter som behandlar problemets frågeställning, och där en lösning på problemet ges. En av dessa tolv elever har genomgående skrivit texter som behandlar problemets innehåll, men där någon explicit lösning på problemet inte framkommer.

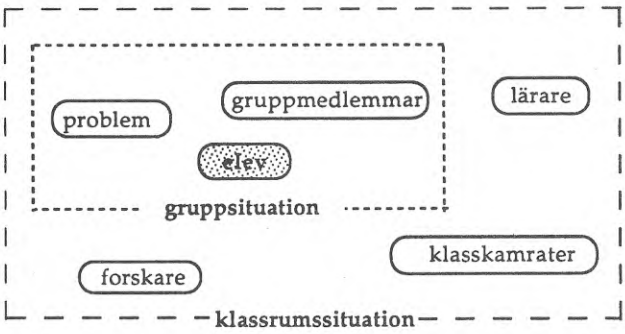
Det är således vanligt att eleverna skiftar förfaringssätt vid lösningen av de fyra olika problemen. Detta skifte uppkommer troligtvis på grund av att flertal olika faktorer, som återfinns i den aktuella problemlösningssituationen och i det givna problemets formulering och innehåll, i samverkan påverkar problemlösningsprocessen. I problemlösningssituationen kan elevernas attityder till den förelagda uppgiften variera vid de olika problemlösningstillfällena på grund av elevernas erfarenheter och personliga

upplevelser. Händelser på rasten före lektionen eller upplevelser i hemmet och på fritiden avspeglas i elevernas tolkning av uppgiften och påverkar elevernas sätt att lösa problemen. Dessutom inträffar att några elever ibland huvudsakligen ägnar sig åt att rita en bild, vilket medför att de får lite tid över för den skriftliga framställningen. Även det givna problemets formulering och innehåll har inverkan på elevernas motivation och intresse och får betydelse för hur eleverna inriktar sig mot problemets innehåll och genomför problemlösningen. Den enskilde elevens skiftande förfaringssätt orsakas även av att eleverna i undervisningssituationen får tillfälle att diskutera kamraternas lösningar i smågrupper och i hela klassen. Eleverna uppmärksammar vid samtalen att man kan gå tillväga på olika sätt vid problemlösningen. De tar intryck av kamraternas lösningsförslag vilket kan få genomslag i deras sätt att skriva om problemen vid nästa problemlösningstillfälle.

TALA VID PROBLEMLÖSNING

Inlärning innefattar inte enbart intellektuella aspekter. Även sociala och emotionella faktorer påverkar händelseförloppet i en undervisningssituation och har betydelse för utvecklingen av elevernas problemlösningsförmåga. Socio-emotionella faktorer får ökad betydelse vid arbetet i smågrupper, eftersom elevernas interaktion ökar och deras uttalande konfronteras i samtal och dialoger. Vid samtalen befinner sig eleverna i en situation där de själva, klasskamraterna, läraren och forskaren är delaktiga och ingår som aktörer. I situationen finns dessutom ett problem som eleverna har i uppgift att lösa. En matematiklektion i skolan bildar den grund mot vilken aktörerna och problemet framstår för elevernas medvetande. När eleverna samtalar i smågrupper om de skilda problemlösningsförslagen finns läraren och forskaren mestadels i bakgrunden eftersom de inte har möjligheter att delta vid samtliga gruppsamtal. Det inträffar emellertid att läraren eller forskaren träder fram t ex när de på eget initiativ deltar i gruppsamtalet eller då eleverna riktar sig till läraren och forskaren med frågor. Situationen förändras därmed och läraren eller forskaren framstår för elevernas medvetande som ett intentionalt objekt (se s 18).

Situationen utvidgas när eleverna riktar sig mot fler aktörer och urskiljer fler företeelser i den aktuella samtalssituationen. En utvidgning av situationen kan förändra gruppmedlemmarnas förståelse och uppfattning av det givna problemet. Analysen av elevernas samtal i smågrupper visar emellertid att eleverna när de argumenterar om de olika problemlösningsförslagen huvudsakligen är inriktade mot sig själva, gruppmedlemmarna eller problemet. Detta kan visas med följande schematiska bild.



Figur 8. 1. *Intentionala objekt för eleverna vid gruppsamtalen*

Tolkningen av elevernas samtal visar att kommunikationen i grupperna utvecklas i två olika riktningar och att eleverna vid samtalen har olika mål.

A. Eleverna kan vara tävlingsinriktade. Deras mål vid argumentationen är då att ett av förslagen skall "vinna".
B. Eleverna kan vara samförståndsinriktade. Deras mål vid argumentationen är då att gruppmedlemmarna skall enas om ett lösningsförslag.

A. Tävlingsinriktning

1. Elevernas argumentation behandlar inte innehållet problemlösningsförslagen.

När eleverna samtalar om de olika lösningsförslagen kan de vara inriktade mot sig själva och sitt eget lösningsförslag. De diskuterar inte de olika lösningsförslagens innehåll och argumenterar inte

utifrån de skilda förfaringssätt gruppmedlemmarna använt för att komma fram till en lösning på problemet. Kommunikationen i gruppen kan utvecklas i riktning mot låsta positioner som i en av grupperna.

H. Jag tycker min.

F. Vi tar min.

A. Jag tycker min egen.

L. Men ni ska säga varför ni tycker det.

H. Jag tycker min är bäst.

A. Jag tycker min.

F. Min

Eleverna inriktar sig ibland mot kamraterna i gruppen, och låter saker som inte är relevanta för problemlösningsförslaget påverka argumentationen. I den händelse man har varit osams med någon på rasten kan man argumentera som Arne.

L. Men varför tycker du inte att Bertil har en bra lösning?

A. Han är knäpp.

Lärarens försök att få eleven att inrikta sig mot problemlösningsförslaget har inte i denna situation inte någon effekt på elevens argumentation.

L. Men du ska se vad han har gjort.

A. ... *(svarar inte)*

L. Se här på lösningen.

A. ... *(svarar inte)*

Vid ett annat tillfälle anser David att Bertil har den bästa lösningen. Han förklarar emellertid inte på vilka grunder han drar denna slutsats.

D. Jag tycker Bertils var bäst.

L. Varför det?

D. För jag tycker att hans är bäst.

De elever som har en tävlingsinrikting och i argumentationen inte behandlar lösningsförslagens innehåll är inte öppna för att diskutera de olika lösningsförslagens innehåll. Eleverna argumenterar inte om de olika förslagens olika innehållsliga delar, istället är de inriktade mot sig själva, sin egen lösning eller mot gruppmedlemmarna.

2. Elevernas argumentation behandlar innehållet i problemlösningsförslagen.

Eleverna kan ha en tävlingsinriktning även när de är inriktade mot att samtala om de olika lösningsförslagens innehåll. Eleverna ger uttryck för en bestämd uppfattning om ett av lösningsförslagen och är inte villiga att lyssna på de andra elevernas argument och att förändra sitt ställningstagande. De argumenterar för sin uppfattning med utgångspunkt från bilden, den skriftliga framställningen eller den aritmetiska problemlösningen i förslagen.

Det förekommer att eleverna vid samtalen inriktar sig mot bilden och ger en bedömning av bildens innehåll och utförande. Sofia anser att Tage har ett bra lösningsförslag för han har ritat bra.

S. Tages ... han har ritat en sån bra katt.

Eleverna kan även rikta sig mot den skriftliga berättelsen och i sin argumentation utgå från sin upplevelse av berättelsens tema och innehåll. Susan tycker att en lösning är bra om berättelsen är spännande.

S. Jag tycker Torstens ... Den är spännande ... Den handlar om monster ... Jag tycker den är bra.

S. Jag tycker Oskars var bäst. Han har mycket fantasi och skriver så roliga saker.

När eleverna har en tävlingsinriktning kan de i sin argumentation även utgå från det lösningsförslagets matematiska innehåll och gruppmedlemmarnas förfaringssätt vid en aritmetiska problemlösningen. Sten inriktar sig mot problemlösningen och den aritmetiska beräkningen.

S. Ja det är ... Svante ... Jag tycker Svantes ... han har gjort den bästa lösningen ... och han har visat hur han har räknat ... och ställt upp och så.

När eleverna är tävlingsinriktade kan de argumentera om problemlösningsförslagen på två olika sätt. Eleverna kan inledningsvis nämna ett förslag när gruppen närmar sig ett samförstånd förändrar de emellertid sin uppfattning och driver ett annat förslag med i stort sett samma argument som de använt vid diskussionen om det tidigare förslaget. Det inträffar även att eleverna inledningsvis nämner ett förslag och därefter i argumentationen inte förändrar sin uppfattning utan håller fast vid sin uppfattning med samma argument under hela samtalet. Flera av de elever som var tävlingsinriktade skrev på det häfte i vilket de utförde problemlösningen "Jag vann" eller "vann" vid de tillfällen då deras lösning valdes ut. Det inträffade även att de skrev namnet

på den kamrat vars förslag valdes ut av gruppen, exempelvis "Richard vann".

B. Samförståndsinriktning

1. Elevernas argumentation behandlar inte innehållet problemlösningsförslagen.

När eleverna har en samförståndsinriktning och inte behandlar problemlösningsförslagens innehåll vid argumentationen riktar de sig mot kamraterna i gruppen.

Susan tycker att flickornas lösningar skall framläggas inför klassen.

S. Jag tycker Renata, för vi tjejer ... våra har aldrig varit.

Även Sverker tycker att man skall se till att samtliga gruppmedlemmars lösning någon gång presenteras inför de andra klasskamraterna.

S. Vad ska vi ta? ..... Ulla och jag tycker att det är Veras tur...hon har inte haft..

Inriktningen mot kamraterna tar sig inte enbart uttryck i att eleverna negligerar en kamrats lösning, utan den kan även visa sig genom att eleverna argumenterar för en lösning på grund av välvilja för en kamrat. Ivar genomför varje problemlösning mycket föredömligt enligt klasslärarens uppfattning. Trots detta blir hans lösningsförslag inte presenterade inför de övriga klasskamraterna.

L. Men se på Ivars lösning. Har ni verkligen gjort det?

K. Ja.

L. . Varför väljer ni inte den någon gång? Det är alltid Jans lösning ?

K. Jo ... det är ...vi är två ..vi två ... och så Jan som tycker ... att vi får bestämma ... och då ... då tar vi hans för han är så ... gullig *(viskar)*.

2. Elevernas argumentation behandlar innehållet i problemlösningsförslagen.

När eleverna har en samförståndsinriktning kan de även rikta sig mot de framlagda problemlösningsförslagens innehåll. Eleverna inriktar sig mot bilden, berättelsen eller den aritmetiska problemlösningen på samma sätt som när de har en tävlingsinriktning.

Therese har svårt att göra en bedömning av de olika förslagen. Hon inriktar sig emellertid mot bilden i ett av förslagen och tar den som utgångspunkt för sin argumentation.

T. Det är svårt... Jag tycker att vi ska ta Sverker.för han har ritat så bra.

Eleverna inriktar sig mot den skriftliga berättelsens tema och innehåll.

L. Jag tycker att den handlade så mycket om resan och så. Jag tyckte den var bra .. och så ... vi kan ... Vi väljer den.

Vid samtalen utgår eleverna vid sin argumentation från den aritmetiska lösningen och gruppmedlemmarnas skilda förfaringssätt vid problemlösningen.

G. Hör här vi måste bestämma oss .... Frida har en bra uträkning.

B. Vi kan la ta Bo ... han har inte varit och han har skrivit upp hur han har räknat.

När eleverna är samförståndsinriktade har de intentionen att gruppen gemensamt skall välja den lösning som skall framläggas för hela klassen. Vid argumentationen vänder de sig till kamraterna och frågar efter synpunkter på de olika förslagen. De öppnar för en diskussion i gruppen, där samtliga gruppmedlemmar förväntas delta. Vid samtalen riktar de sig mot kamraterna i gruppen eller utgår vid sin argumentation från de framställda lösningsförlagens innehåll.

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

Analysen av samtalen i smågrupper visar att emotionella och sociala faktorer har stor inverkan på elevernas samtal och argumentation. Tidigare upplevelser av emotionell karaktär påverkar i stor utsträckning elevernas samtal och argumentation. Vid samtalen inriktar sig eleverna huvudsakligen mot sin egen person, gruppmedlemmarna eller det givna problemet. Detta framkom även i den redovisning som tidigare gjorts av hur lärare och elever ser på samtalen i smågrupper. Såväl lärare som elever uttryckte att argumentationen i grupperna ibland inte berörde problemlösningsförslagens innehåll. Lärarna och vissa elever uppgav att gruppmedlemmarna inte alltid valde ut den lösning som skulle framföras inför klasskamraterna med utgångspunkt från de skilda förfaringssätt eleverna använt vid den aritmetiska problemlösningen. Istället utgick eleverna från andra kriterier och tog exempelvis ställning utifrån vilken gruppmedlem som hade framställt lösningsförslaget. Lärarna och vissa elever framför således synpunkter på gruppsamtalen, som överensstämmer med

den beskrivning och tolkning, som framkommer när elevernas argumentation analyseras.

Enligt Johnson (1989) kan samarbete och interaktion i smågrupper betraktas som skild från "vanlig" undervisning som enligt honom är tävlings- eller individinriktad. När matematiklektioner är tävlingsinriktade arbetar eleverna i konkurrens med varandra. Eleverna graderas på en skala vilket skall motivera dem att arbeta snabbare och bättre än kamraterna. I individinriktad undervisning arbetar eleverna för att uppnå mål som inte är relaterade till kamraterna och resultaten jämföres endast med elevens tidigare prestationer. I motsats till vad som är fallet vid tävlings-och individinriktad undervisning menar Johnson att eleverna när de samarbetar i grupper tillsammans arbetar för att uppnå ett gemensamt mål.

Hur förhåller det sig med samarbetet vid den form av gruppsamtal där eleverna diskuterar sina lösningsförslag i smågrupper och gemensamt skall välja ut ett förslag som skall presenteras för de övriga kamraterna. Är eleverna inriktade mot samarbete, arbetar de mot samma mål, och finns det en grundläggande skillnad mellan arbete i smågrupper och annan undervisning som Johnson (1989) förespråkar?

Lärarna har i den studerade undervisningen tydligt framhållit att målet vid samtalen är att eleverna i gruppen, med utgångspunkt från de olika lösningsförslagens innehåll, gemensamt skall välja ut det förslag som skall presenteras för de övriga klasskamraterna. Analysen av elevernas gruppsamtal visar emellertid att lärarnas mål med gruppsamtalen inte omfattas av samtliga elever, utan att eleverna vid samtalen i smågrupperna har olika mål. De är inriktade mot samförstånd eller de är tävlingsinriktade. De flesta elever som är inriktade mot samförstånd har det gemensamma målet att med utgångspunkt från lösningsförslagens innehåll tillsammans välja ut det förslag som skall presenteras för de övriga klasskamraterna. Emellertid kan målet för några elever vara att uppnå samförstånd på andra grunder än utifrån förslagens innehåll, t ex utifrån det faktum att någon av gruppmedlemmarna inte tidigare presenterat sin lösning för klassen. För de elever som är tävlingsinriktade förhåller det sig på liknande sätt och deras argumentation tar inte sin utgångspunkt i problemlösnings-förslagens innehåll. Elevernas inriktning är emellertid inte fixerad utan en relativt stor andel av eleverna skiftar inriktning under samtalens gång och övergår från att ha varit tävlingsinriktade till att inrikta sig mot att gruppen skall samarbeta.

Eleverna som samarbetade i klassrummen kände varandra och hade förväntningar på på sig själva och på varandra. De jämförde det de själva gjorde med kamraternas prestationer. Gruppmedlemmarna kunde ha samma syn på hur ett problem skulle lösas eller de kunde ha olika synsätt. Samtliga dessa faktorer kan vara bidragande orsaker till konflikter mellan eleverna vilket innebär att gruppsamtalen till stor del blir färgade av emotionella och sociala faktorer. När eleverna vid samtalen måste hantera konflikter i gruppen får de emellertid tillfälle att träna sina emotionella och sociala färdigheter. Ett exempel på detta är man i några av de grupper där man hade svårt att välja ut en lösning bestämmer att samtliga medlemmar i gruppen skall få tillfälle att presentera ett lösningsförslag.

I några få grupper förekom ofta konflikter. Konflikt och interaktion är emellertid inte varandras motsatser utan konflikt är en form av interaktion och de konflikter som uppstod upplöstes oftast under samtalens gång. Det är i andra problemlösningsfasen som det uppstår mest konflikter i grupperna. Konflikterna avtar i de följande faserna och eleverna inriktar sig från och med fas tre i högre grad mot att diskutera förslagens innehåll. En jämförelse mellan elevernas gruppsamtal vid den sista uppgiften i fas två och den sista uppgiften i fas fem visar att ett ökat antal elever uppmärksammar problemlösningsförslagens matematiska innehåll vid samtalen i den sista fasen. Problemen i de olika faserna är emellertid av olika typ och det matematiska innehållet i uppgifterna framställs på olika sätt, vilket medför svårigheter om man vill göra direkta jämförelser och uttala sig om en eventuell träningseffekt. Det är emellertid troligt att det förekommer en viss träningseffekt och att eleverna som en följd av de kontinuerliga samtalen i smågrupperna i någon mån utvecklar sin förmåga att argumentera om de olika lösningsförslagens innehåll. Lärarnas synpunkter på gruppsamtalen som tidigare redovisats bekräftar detta antagande.

Lybeck (1981), som gjort studier av högstadie- och gymnasieelevers dialoger när de löser fysikaliska problem, identifierar kognitiva konflikter vid elevernas samtal. Lybeck definierar kognitiva konflikter som den konfrontation eller motsägelse mellan olika tankeformer och uppfattningar av ett inlärningsinnehåll som samtidigt kan existera hos en elev. Konflikterna kan i vissa fall lösas genom att elevens tankeform förändras och övergår till en mer vetenskapligt avancerad tankeform. Avgörande skillnader mellan Lybecks studie och den här aktuella studien är eleverna i Lybecks studie är väsentligt äldre och att det finns ett väl avgränsat

problem som eleverna skall lösa tillsammans. I de här studerade gruppsamtalen skall eleverna diskutera varandras färdiga lösningsförslag där det ingår berättelser, bilder och numeriska beräkningar och tillsammans välja ut en lösning som skall presenteras för klasskamraterna. Det har inte varit möjligt att i det empiriska materialet påvisa kognitiva konflikter i den definition Lybeck ger, vilket eventuellt har sin grund i ovanstående skiljaktigheter mellan studierna.

Det faktum att kognitiva konflikter i elevernas tänkande inte kan spåras i det empiriska materialet innebär inte att sådana inte har förekommit. Det är emellertid en förutsättning för att eleverna skall förändra sitt tänkande om problemen att deras argumentation i smågrupperna har sin förankring i de framlagda problemlösningsförslagen. I de fall elevens uppmärksamhet är inriktat mot något annat än den aritmetiska problemlösningen kan elevernas tänkande med avseende på problemets matematiska innehåll inte förändras. Huvudsyftet med elevernas samtal i smågrupper var i denna studie att eleverna skulle ges tillfälle att uppmärksamma att problem kan lösas på olika sätt. Vid de tidigare redovisade intervjuerna med eleverna om samtalen i smågrupper framkom att eleverna själva anser att samtalen bidrar till att de inser att man kan lösa problem på olika sätt och eleverna uttrycker att de förstår kamraternas lösningsförslag. Därigenom har gruppsamtalen medfört att eleverna har sett de givna problemen ur olika perspektiv vilket kan möjliggöra att eleverna förändrar sitt tänkande om problemens innehåll.

RÄKNA VID PROBLEMLÖSNING

När eleverna löser aritmetiska problem ingår numeriska beräkningar i problemlösningsprocessen. Det har utförts en omfattande forskning för att kartlägga de olika tillvägagångssätt elever använder vid aritmetiska beräkningar (Carpenter & Moser, 1982; Fuson, 1982; Jonsson, 1919; Neuman, 1987; Resnick, 1983). Det förekommer ett stort antal benämningar som på skilda nivåer betecknar elevernas beräkningsmetoder och skilda sätt att tänka vid aritmetiska beräkningar. Exempelvis används tankeformer (Kilborn, 1989), behandlingssätt (Jonsson, 1919; Kroksmark, 1987), strategier (Neuman, 1989).

Det är inte ett huvudsyfte i denna framställning att studera elevernas beräkningsmetoder, därför ges i det följande endast en sammanställning av elevernas tillvägagångssätt. Beskrivningen skiljer sig från de kategoriseringar som vanligtvis brukar göras då systematiseringen tar sin utgångspunkt i de skilda medel eleverna använder när de utför beräkningar. Analysen och tolkningen är förankrad i det empiriska materialet från såväl klassrumsstudien som intervjustudien. De exempel som används för att tydliggöra elevernas tillvägagångssätt är emellertid huvudsakligen hämtade från intervjustudien. Addition har valts som illustration eftersom eleverna utnyttjar additiva strukturer vid samtliga fyra räknesätt.

När eleverna räknar har de mycket skilda tillvägagångssätt varvid de på varierande och ofta komplementärt sätt utnyttjar tre olika medel: huvudräkning, fingerräkning och skriftliga notationer. Med utgångspunkt från hur eleverna använder sig av dessa tre medel, skall vi i det följande se på hur eleverna går tillväga när de adderar.

HUVUDRÄKNING

När eleverna utför beräkningar kombinerar de vanligtvis huvudräkning, fingerräkning och skriftliga notationer på varierande sätt. Huvudräkning kan användes vid vissa delberäkningar även i de fall då eleverna huvudsakligen utnyttjar andra medel. Eleverna går tillväga på ett stort antal skilda sätt när de adderar i huvudet vilket framkommer av följande sammanställning.

1. Uppräkning

1.1 Uppräkning på en talrad

Eleverna räknar upp på talraden. De utgår ibland från det första talet i den beräkning de skall utföra. I andra fall påbörjas emellertid uppräkningen från det största talet (se Kilborn, 1989; Neuman, 1987; Resnick, 1983).

Problem 2.4 (Diplom på kalaset: 3+5)

M. 8

I. Hur fick du åtta?

M. 3 plus fem är åtta.

I. Visste du det?

M. Ja jag tog 5 .... 6 7 8.

Det är ovanligt att eleverna vid addition räknar uppåt utan att hålla ordning med fingrarna eller på något annat sätt markera antal. Det förekommer oftast när eleverna skall addera små tal. På frågan hur man kan veta att man har adderat rätt antal svarar eleverna att man vet hur många gånger man har räknat. Ibland kan emellertid eleverna vid uppräkningen göra rörelser i form av små nickningar med huvudet. Denna medrörelse hjälper troligtvis eleverna att hålla ordning på talen genom att den ger en kroppslig förnimmelse av det antal som räknats.

1.2 Uppräkning på två parallella talrader

Eleverna räknar upp på två parallella talrader. De håller ordning på talen på den ena talraden, samtidigt som de utför en addition på den andra (se Steffe, von Glaserfeld, Richards & Cobb, 1983).

Problem 5.4 (Per diskar: 16·2)

L. 2 är 1 .... 4 är 2 .... 6 är 3 .... 8 är 4 .... 10 är 5.

I. Mmm ... 10 och 5 var du på.

L. 10 och 5 ... 6 ... 14 och 7 ... 16 och 8 ... 16 17 ... 18 och 19 ... 20 och 10 ... 22 .... 22.och 11 .... 24 och 12 ... 18 .... 26 och 13 ... 28 och 14 ... 29 ... det blir 30 och 30 och ... 30 och ... kommer inte ihåg var jag var på.

När eleverna som Lena ovan, räknar upp på två talrader i huvudet måste de hålla ordning på två räkneoperationer som löper jämsides och utföra ett stort antal delberäkningar. När antalet deloperationer ökar uppstår svårigheter för eleverna att hålla delberäkningarna i minnet vilket oftast medför att de inte lyckas fullfölja beräkningen.

2. Inlärda "talfakta"

Problem 2.1 (Äpplen till hästarna: 6+2)

E. Per hade 6 stycken ... och Lena hade nog 2. Då blir det 8.

I. Hur räknade du då?

E. 6 plus 2 är 8.

I. Ja men hur tänkte du?

E. Jag vet vad det är.

Problem 5.4 (Per diskar: 16+16)

I. Kan du räkna högt så jag kan följa med hur du gör?

A. 16+16 är 32 och 50 öre ... 33 gånger ska han diska.

Det är vanligast att eleverna använder inlärda "talfakta" inom talområdet ett till tio, men det förekommer även vid svårare talkombinationer.

3. Användning av "dubblor"

Problem 5.4 (Per diskar: 4·8)

S. Först tänkte jag 4+4=8 och så visste jag att 8+8=16

Problem 3.3 (3·7=21)

L. 7 plus 7 är 14 ... och så på fingrarna då 15 16 17 18 19 20 21.

Eleverna utgår ofta från "dubblorna" när de adderar. Orsaken till att eleverna har lätt för att använda dubblor kan härledas till likhetsfaktorn som är en av de gestaltlagar som formulerats inom gestalpsykologin (se s 23). Ofta inleder eleverna additionen med en "dubbla" för att vid de återstående delberäkningarna använda sig av fingerräkning (se Kilborn, 1989).

4. Tiotal och ental beräknas var för sig

Problem 5.4 (Per diskar: 16·2)

I. Vad räknar du nu?

K. Han skulle alltså diska... Han skulle diska ... så mycket ... 16 ... för ... två gånger får han en krona 16 ... 10+10 räknar man 20 ... 12 ... 6+6= 12 ... så blir det 10 till ... det blir 32 ... 32 gånger måste han diska.

Eleverna adderar tiotal och ental på en mängd varierande sätt, varvid de ibland inleder med att addera tiotalen och i andra fall med att addera entalen. Det förekommer att den enskilde eleven beroende av uppgiftens numeriska innehåll går tillväga på ett sätt vid en uppgift och ett annat sätt vid lösningen av en annan uppgift (se Jonsson, 1919).

5. Visuella bilder av en algoritm

Problem 3.1 (18+7

I. Hur gör du nu?

E. 8+7... 8 ... 8+7 blir 15 och så ... och det räknar jag där uppe så får du en 2:a och så blir det 25.

I. Jaha

E. Jag räknar det ... fast jag räknar det i huvudet.

Eleverna ser en inre bild av talen, där de föreställer sig talen i en uppställning. De utför en beräkning i huvudet på samma sätt som om de använde en algoritm uppställd på ett papper (se Hayes, 1973).

6. Omgestaltning av tal

Problem 3.1 (18+7)

I. Hur gjorde du nu?

B. Jag har tagit bort 2 från 7 ... så blir det 20 så tar jag dom 5 som är kvar och sätter där, så blir det 25.

Problem 3.1 (18+7)

I. Hur räknade du?

A. 2 av 7 och lägger det till 18 det blir 20 ... Sen finns fem kvar.

Eleverna tänker i talkombinationer och omgestaltar talen. En variant av omgestaltning av tal är när eleverna utnyttjar "dubblorna".

Problem 2.3 (Samla in fotbollar: 7+8)

R. 7+7 är 14 och så har jag ett från 8. Det är 15.

Omgestaltning av tal ges av olika forskare andra benämningar t ex transformationer av tal (se Baroody, 1987; Neuman, 1987).

FINGERRÄKNING

Det är ett vanligt att eleverna använder fingrarna när de räknar. När eleverna anser att beräkningarna är svåra ökar deras användning av fingerräkning.

I. Vad gör du när du tycker att det är svårt?

S. När det är svårt räknar jag på fingrarna.

Eleverna kan ha händerna på bordet eller i knät och de kan ha handflatorna eller handryggarna uppåtvända. På en övergripande beskrivningsnivå använder eleverna fingrarna på två sätt: dels räknar eleverna ett finger i taget, dels grupperar de ett antal fingrar för att gestalta ett tal. Det förekommer ett stort antal varianter och olika kombinationer av dessa två sätt att använda fingrarna vid beräkningarna.

1. Eleverna använder ett finger i taget

Eleverna använder ett finger i taget för att hålla ordning på antal vid uppräkning. De använder då antingen höger eller vänster hand eller båda händerna och de kan inleda räknandet med lillfingern, tummen eller något annat finger. De rör på ett finger eller sträcker ut det, tar med en hand över ett antal av andra handens fingrar eller trycker med fingrarna för att markera antal.

I. Hur vet du var du är?

S. Jag trycker lite ... så vet jag vilket tal jag är på.

När eleverna använder ett finger i taget för att hålla ordning på antal vid uppräkning går de tillväga på följande tre olika sätt.

1.1 Eleverna räknar upp på talraden och markerar varje tal med ett finger

De börjar liksom vid huvudräkning i vissa fall från det första talet i den beräkning de skall utföra, medan de i andra fall påbörjar uppräkningen från det största talet (Neuman, 1987; Resnick, 1983).

Problem 4.1 (Försäljning av blommor: 6+12)

S. 12 ... 13 14 15 16 17 18 *(markerar 13,14,15,16,17 med tummen, pekfingern, långfingern, ringfingern och lillfingern på höger hand och 18 med tummen på vänster hand.*

I. Hur gör du? ... Räknar du alltid från det största talet som du gjorde nu?

S. Nej, jag gör olika, ibland så ... men ibland börjar jag från början.

Den allra största delen av de elever som använder fingrarna gör som Susanne ovan. De utgår från en av addenderna och räknar därefter upp den andra addenden på fingrarna varvid ett finger representerar ett tal.

Vid ett intervjutillfälle förekom att en elev gjorde en uppräkning från början och räknade samtliga tal på fingrarna. Eleven räknade då först det antal fingrar som angavs av den första addenden och därefter antalet fingrar som angavs av den andra addenden. Därefter gjordes en ny uppräkning där samtliga fingrar räknades. Detta omständiga sätt att räkna med fingrarna är mycket ovanligt i tredje klass (Se Kilborn, 1989).

1.2 Eleverna räknar upp på ena handens fingrar och markerar antalet uppräkningar med andra handens fingrar

Eleverna använder fingrarna på två olika sätt vilket kan jämföras med när eleverna räknar i huvudet på två parallella talrader (se Fuson, 1982; Neuman, 1987).

Problem 3.3 (3·7=21)

P. 1 2 3 4 5 6 7. (*Använder höger hands lillfinger, ringfinger, långfinger. pekfinger och tumme. Fortsätter därefter med tummen och pekfingern på vänster hand och räknar 6 och 7. Viker därefter in tummen på vänster hand och markerar att 7 tagits en gång).*

8 9 10 11 12 13 14. (*Räknar återigen från höger hands lillfinger och fortsätter på vänster hand med tummen och pekfingern. Viker in pekfingern på vänster hand och markerar att 7 tagits två gånger).*

15 16 17 18 19 20 21 (*Börjar om på höger hands lillfinger och upprepar samma procedur. Det framkommer inte i intervjun om långfingern på vänster hand viks in).*

1.3 Eleverna använder fingrarna för att markera hur många gånger de adderat ett viss tal

Ellinor håller upp ett finger i taget för att markera hur många gånger hon adderat fyra.

Problem 4.4 (Drickor och chips: 5·4)

E. 4 8 12 16 20

I. Hur vet du hur mycket du har?

E. Jag sätter upp ett finger varje gång.

2. Eleverna grupperar fingrarna varvid ett antal fingrar gestaltar ett tal

När eleverna grupperar fingrar gestaltar de ett tal med ett antal fingrar. De använder då antingen höger eller vänster hand och kan ha handryggarna eller handflatorna uppåtvända. Ibland använder en elev samma fingrar för att gestalta ett specifikt tal, exempelvis kan talet fyra gestaltas av höger hands tumme, pekfinger, långfinger och ringfinger vid flera olika beräkningar. De flesta elever använder emellertid olika sätt för att gestalta ett specifikt tal. Exempelvis kan talet tre vid en addition gestaltas med ena handens tumme, pekfinger och långfinger och vid en annat beräkning kan talet tre formas med den med andra handens pekfinger, långfinger och ringfinger.

När eleverna grupperar fingrar är det vanligast att de gestaltar den första addenden med ett antal fingrar, och därefter använder ett finger i taget och räknar upp den andra addenden.

Problem 2.4 (Drickor och chips: 4+4)

I. Hmm ... vad skall de betala för det då?

G. 4 ... *(håller fram tummen pekfingern, långfingern och lillfingern på vänster hand med handflatan uppvänd)*

och 5 6 7 8 *(räknar upp på tummen, pekfingern, långfingern och ringfingern på höger hand med handflatan uppvänd).*

I det empiriska materialet framkommer att några elever grupperar sina fingrar och gestaltar tal genom att forma ett antal olika fingerkombinationer. Dessa fingerkombinationer skall emellertid inte förväxlas med de "fingertal" som beskrivs av Neuman (1989), eftersom Neuman tillskriver fingertalen en avgränsad och väl specificerad innebörd (se Marton & Neuman, 1990).

SKRIFTLIGA NOTATIONER

När eleverna gör skriftliga notationer kombineras detta med huvudräkning eller fingerräkning. Eleverna göra markeringar på siffrorna, ritar index, skriver tal, tecknar uträkningar och ställer upp algoritmer.

1. Eleverna gör markeringar på siffrorna

Ett sätt att hålla ordning på det antal vid addition, vilket är relativt ovanligt men som några få elever använder, är att markera vissa punkter med pennan på den siffra som ingår i beräkningen. Eleverna har bestämda fixpunkter i ett mönster på siffran där de prickar. Siffran tre får tre strategiska markeringar, siffran fyra ges fyra markeringar osv (se Hayes, 1973). Det är tänkbart att eleverna själva kommit på detta sätt att hålla ordning på antal när de adderar, men det kan även tänkas att eleverna påverkats av någon person i sin omgivning.

I. Vad gör du?

S. Jag prickar med pennan på 4: an 1 2 3 4 ... och på 5 :an 1 2 3 4 5. Ibland vänder jag på pennan.

I. Jaha?

S. Då räknar jag 4 ... 5 6 7 8 9 *(prickar med pennan på siffran fem).*

Det inträffar även att eleverna sätter små prickar under siffran. Dessa prickar bildar då inte något specifikt mönster utan eleven prickar på samma punkt eller i en rad och håller därigenom ordning på talen och markerar antal.

2. Eleverna ritar index

Eleverna använder index i form av streck, ringar, pilar etc vilket tidigare har beskrivits i samband med redovisningen av elevernas bildframställning (se s 179). Vi kan se på några ytterligare exempel. Ove ritar streck för att hålla ordning på antal.

Problem 2.2 (Ballonger på kalaset: 12+9)

O. 21

I. Vad gjorde du nu?

O. Jag gjorde streck.

I. Hur många streck?

O. 12 ... och sen 9

I. Ja?

O. Och så räknade jag ihop allt.

Åke ritar index och skriver ut summan.

Problem 5.4 (Per diskar:16+16)

Å: En ... det är två, tar jag 2 där under, det betyder två 50-öringar.

I. Mm.

Å. Tar vi en till, 2, så en till, 2 ... *(Ritar ett streck och sätter två streck under)* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, så tar vi 15, 16. Då blir det 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 ... 32 gånger. *(Räknar den nedre raden och skriver = 32).*

I. Mm ... du satte streck?

Å. Det är ju en krona. *(Pekar på ett streck på den övre raden).*

I. Det är en krona.

Å. Så är det två 50-öringar. *(Pekar på två streck på den nedre raden).*

3. Eleverna skriver tal

Tomas noterar tal när han löser problemet. Dessa notationer kombineras med huvudräkning eller fingerräkning.

Problem 2.2 (Ballonger på kalaset: 12+9)

12 9

T. Dom var 10 barn. Mm ... Han hade 12 små *(skriver 12)* ... och 9 *(skriver 9 bredvid. Adderar i huvudet och subtraherar med 10).* Då skall dom ha 11 stycken ballonger till.

I. Jaha varför ska dom ha 11?

T. För att dom skall ju ha en stor var och två små.

4. Eleverna tecknar uträkningar

Den vanligaste notationen är att eleverna tecknar uträkningar. Dessa notationer kombineras med huvudräkning. Eleverna använder den skriftliga uträkningen som redskap för att underlätta huvudräkningen. Vid beräkningen pekar eleverna ibland på addenderna med pennan eller ett finger.

Problem 4:4 (Drickor och chips: 32+25)

M. Skriver 32+25 *(Magnus inleder beräkningen med att addera tiotalen. Han drar med en pekfinger från 2 till 3 och skriver 5. Därefter drar han med fingern från 5 till 2 och han skriver 7).*

Problem 3.1 (3·7=21)

G. Skriver 7+7+7=21 *(Gunnar pekar på sjuorna och säger 7 14 ... 21).*

5 Eleverna använder algoritmer

När eleverna använder algoritmer kombineras beräkningen med huvudräkning eller fingerräkning. Det är vanligast att eleverna använder algoritmer när de adderar större tal. Några elever har emellertid en tendens att använda standardalgoritmer även vid mycket enkla tal. När eleverna använder algoritmer har de ibland svårigheter med de formella procedurerna. De kan exempelvis glömma minnessiffran vid addition, och deras uppställningar kan se ut flera olika sätt (se Kilborn, 1989).

Problem 5.1 (Barnen får räkneböcker och skrivböcker: 38+19)

		1	1
38	38	38	38
19	+19	+19	19
57	47	57	57

Det inträffar emellanåt vid de skriftliga noteringarna att eleverna inte skriver av talen i problemen korrekt. De kan exempelvis vända på siffrorna och och skriva 52 istället för 25.

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

Eleverna utnyttjar tre olika medel när de adderar: huvudräkning, fingerräkning och skriftliga notationer. Inom vart och ett av de tre medlen förekommer, som redovisats, en stor variation av tillvägagångssätt och olika sätt att tänka. Problemens aritmetiska struktur och formulering samt det numeriska innehållet påverkar elevernas sätt att räkna, och medför att den enskilde eleven kan skifta mellan olika medel och tänkesätt.

Det förekommer elever som vid *huvudräkning* inte har någon effektiv beräkningsmetod som förenklar tankearbetet och minskar antalet delberäkningar vid additionen. När beräkningarna blir tillräckligt komplicerade möter därför dessa elever svårigheter som medför att beräkningen oftast avstannar. Andra elever har tankeredskap som underlättar vid huvudräkningen. De kan använda "dubblor", "talfakta" och de kan tänka i talkombinationer varvid de omgestaltar addenderna.

Många elever använder *fingerräkning* när de adderar. Eleverna använder fingrarna på två olika sätt: dels använder de *ett finger i taget* för att hålla ordning på antal vid uppräkning, dels *grupperar de ett antal fingrar* på skilda sätt. När eleverna grupperar fingrarna bildar de ett tal med ett antal fingrar, exempelvis kan talet tre gestaltas med vänstra handens tumme, pekfinger och långfinger.

Vid intervjuerna visade det sig att många elever när de arbetar med problemlösningen var ganska ovilliga att göra *skriftliga notationer*. När jag påpekade för eleverna att de kunde skriva upp talen eller rita en bild var ett vanligt svar att detta inte var nödvändigt. Som redovisats har eleverna emellertid tillgång till en repertoar av skilda sätt att föra notationer. För vissa elever kan svårigheter med beräkningarna bli ett hinder som hämmar problemlösningsprocessen. Några elever glömmer nästan omedelbart de tal som ingår i beräkningen, och om de inte har några effektiva tankeredskap som kan underlätta vid beräkningarna stöter de på svårigheter som ibland medför att de inte vill fullfölja problemlösningen. Olika former av notationer exempelvis att teckna bilder, index och tal kan då vara användbara

redskap som kan medverka till att eleverna inriktar sig mot problemformuleringen och problemets innehåll.

RITA, SKRIVA, TALA OCH RÄKNA - KOMMUNIKATIONSFORMER VID PROBLEMLÖSNING

De handlingar eleverna utförde vid lektionerna, då de ritade bilder, skrev berättelser, samtalade och räknade, har analyserats som en form av kommunikation. I det följande görs en jämförande analys av hur eleverna går tillväga när de använder olika uttrycksformer och sätt att kommunicera när de löser problem.

ATT RITA

Eleverna beskriver det givna problemet på två olika sätt i sina bilder. Ett antal elever avbildar endast ett eller flera enstaka föremål, medan andra elever relaterar flera föremål på sina bilder och integrerar olika innehållsliga delar i en skildring av en situation eller en händelse.

De elever som enbart avbildar enstaka föremål inriktar sig mot en eller några innehållsliga delar och *differentierar* därmed probleminnehållet. Andra elever *fördjupar* sina bilder och gör dem inträngande genom att teckna föremålen mycket detaljrikt och omsorgsfullt. Ett antal elever *utvidgar* bilderna genom att rita ett mycket stort antal föremål. Bilderna beskriver inte någon rörelse eller förändring och kan betecknas som statiska.

Även de eleverna som skildrar en situation differentierar det givna problemet och avbildar ett antal föremål på sina bilder. Några av dessa elever fördjupar även sina bilder genom att teckna detaljrika föremål och vissa elever ritar ett stort antal föremål och utvidgar därmed sina bilder. Det som utmärker bilderna är emellertid att de är dynamiska i den bemärkelse att eleverna avbildar en sammansatt enhet genom att de relaterar och *integrerar* föremål på bilden till en sammansatt enhet så att en rörelse, ett händelseförlopp eller en situation skildras.

I fas fem avbildar ett stort antal elever det matematiska innehållet i problemet genom att ställa upp tal i en tabell eller genom att teckna index i form av ringar, prickar eller streck. Dessa elever utvidgar

således det matematiska innehållet i sina bilder i jämförelse med de elever som enbart tecknar ikoniska bilder. Eleverna tecknar index på två sätt. Några elever använder index enbart för att avbilda föremål, medan andra elever även använder index för att beteckna en rörelse eller förändring. Denna rörelse i bilden framkommer då eleverna med pilar eller med olika streck för samman de index man tecknat till sammansatta enheter, så att inte enbart det numeriska innehållet utan även innebörden i den aritmetiska operationen i problemet avbildas.

ATT SKRIVA

De skriftliga berättelserna i fas ett har analyserats med avseende på hur eleverna inriktar sig mot frågeställningen och behandlar innehållet i de givna problemen. Texterna kan indelas i två huvudkategorier, dels texter i vilka det inte ges någon lösning på det givna problemet, dels texter där en lösning på problemet framställes.

I några av texterna inriktar sig eleverna mot delar av problemets innehåll. Eleverna *differentierar* då problemet och skriver om en eller några få innehållsliga delar av problemet som inte har relevans för en lösning av problemet. Några elever *fördjupar* i varierande utsträckning detta innehåll genom att skriva mer eller mindre detaljerat och ingående om enskilda företeelser. Eleverna kan även *utvidga* problemets innehåll. De tillför då information, går utanför det givna problemets innehåll och skriver långa och innehållsrika texter. De inriktar sig emellertid inte mot problemets frågeställning. Istället behandlar de delar av problemets innehåll som inte har relevans för problemets lösning, vilket medför att texterna saknar en fullständig problemlösning.

Flertalet av eleverna fördjupar och utvidgar problemens innehåll samt behandlar problemets frågeställning. De *integrerar* problemets frågeställning med innehållet i sina texter och framställer en lösning på problemet.

Med avseende på det sätt som eleverna differentierar, fördjupar och utvidgar problemets innehåll kan man inte i det empiriska materialet finna någon grundläggande skillnad mellan de texter där eleverna i sin text ger en lösning på problemet och de texter som inte innefattar någon lösning. Den skillnad som framkommer är att eleverna i de texter där en lösning på problemet ges, i motsats till de elever som inte ger någon lösning på problemet, relaterar

problemets frågeställning till en hypotes om problemets lösning, och integrerar problemets frågeställning med innehållet i sina texter.

ATT TALA

Det framkommer vid analysen av elevernas gruppsamtal att eleverna är samförstånds- eller tävlingsinriktade. För de tävlingsinriktade eleverna är målet med argumentationen att ett av förslagen skall "vinna" medan målet för de samförståndsinriktade eleverna är att gruppen skall enas om en lösning.

När eleverna inriktar sig mot ett av lösningsförslag vid samtalen i smågrupperna *differentierar* de innehållet i förslaget och fokuserar den matematiska lösningen, den skriftliga berättelsen eller bilden. Ett fåtal elever *fördjupar* sin argumentationen genom att mer ingående beskriva en innehållslig del av lösningen, t ex den skriftliga berättelsen. Det inträffar även att elever *utvidgar* argumentationen till att omfatta sådant som inte berör problemlösningsförslagens innehåll. Argumentationen kan då utvidgas till att gälla den person som framställt lösningsförslagen t ex en kamrat eller eleven själv. När eleverna argumenterar talar de emellertid oftast om skilda innehållsliga delar av problemen. Det är ovanligt att eleverna relaterar och *integrerar* problemlösningsförslagens olika delar, och med utgångspunkt i innehållet gör en samlad bedömning av det framlagda lösningsförslaget. En jämförande analys av elevernas samtal i de olika problemlösningsfaserna visar emellertid att eleverna vid samtalen i de senare faserna i större utsträckning än i de tidigare faserna argumenterar om lösningsförslagen i innehållsliga termer.

Elevernas svårigheter att relatera och integrera de olika problemlösningsförslagens innehåll beror troligtvis på gruppsamtalens komplexa natur. När eleverna interagerar och deras uttalande konfronteras i samtal och dialoger har socio-emotionella faktorer stor betydelse för hur samtalen utvecklas. Vissa elever är riktade mot sig själva eller sina kamrater, medan andra elever argumenterar om de framställda problemlösningsförslagen. De intentionala objekt som framstår för elevernas medvetande vid samtalen är således relaterade till *samtalskontexten,* och inte enbart till undervisningsinnehållet, som i denna situation är de framlagda problemlösningsförslagen.

ATT RÄKNA

Eleverna utnyttjar på varierande och ofta komplementärt sätt huvudräkning, fingerräkning och skriftliga notationer vid de aritmetiska beräkningarna. När eleverna räknar utför de en procedur som är definierad i en uppgift eller som de vid problemlösningen har valt själva. Till skillnad från när de ritar, skriver och talar är således deras handlande vid de numeriska operationerna relativt begränsat och givet, vilket medför att eleverna inte i samma utsträckning som när de ritar, skriver och talar har frihet att använda sin fantasi för att fördjupa och utvidga det givna innehållet. När eleverna utför aritmetiska operationer *differentierar* de emellertid beräkningen genom att fokusera tal och relatera dem till varandra. Talen i den aritmetiska operationen *integreras* till en sammansatt enhet vilket resulterar i ett numeriskt svar. Som framkommit vid redovisningen av elevernas numeriska beräkningsmetoder behandlas denna del-del-helhetsrelation av eleverna på en mängd skilda sätt.

DIFFERENTIERING, FÖRDJUPNING, UTVIDGNING OCH INTEGRERING

En sammanfattande analys och tolkning av elevernas förfaringssätt när de ritar och skriver, samt även till viss del när de talar och räknar vid problemlösning, är att eleverna när de använder olika kommunikationsformer i varierande utsträckning differentierar, fördjupar, utvidgar och integrerar skilda innehållsliga delar av problemen.

Differentiering: Innehållet differentieras genom att eleverna fokuserar olika innehållsliga delar av det givna problemet.

Fördjupning: Innehållet fördjupas genom att eleverna fokuserar specifika delar av problemet och ger en ingående detaljerad beskrivning av detta innehåll.

Utvidgning: Innehållet utvidgas när eleverna tillför information och går utanför det givna innehållet.

Integrering: Innehållet integreras när eleverna relaterar problemets innehållsliga delar och förbinder dem till en sammansatt enhet.

När eleverna ritar, skriver och talar om ett givet problem differentierar de på skilda sätt innehållet och inriktar sig mot olika innehållsliga delar av problemet. De fördjupar och utvidgar också i varierande utsträckning det givna innehållet. Det är emellertid inte i elevernas fördjupning och utvidgning av olika innehållsliga delar

av problemet som problemlösningsprocessens utfall bestäms. Problemlösningens utfall är istället beroende av i vilken utsträckning eleverna relaterar problemens olika innehållsliga delar och integrerar dem till sammansatta enheter.

Elevernas varierande sätt att differentiera, fördjupa, utvidga och integrera de givna problemens innehåll kan jämföras med de olika förhållningssätt till en inlärningsuppgift som Marton, Dahlgren, Svensson och Säljö (1977) beskriver. Grupper av universitetsstuderande läste olika slag av texter med logisk struktur. Vid analys och tolkning av intervjuer med de studerande fann man att texternas innehåll uppfattades på skilda sätt och att de studerandes uppfattning av textens innehåll var relaterad till hur de studerande gick tillväga vid läsningen. Två skilda förhållningssätt identifierades, ett ytinriktat och ett djupinriktat förhållningssätt. När den studerande har ett ytinriktat förhållningssätt är han inriktad mot en ytlig nivå av texten. Det är inlärningsuppgiften som sådan som fokuseras. Texten ses som ett antal delar ordnade i en viss följd och uppgiften innebär att man skall lära sig vad texten handlar om. De studerande som har ett djupinriktat förhållningssätt eftersträvar förståelse av den givna texten. De är inriktade mot att urskilja budskapet i texten och mot texten på en djupare nivå. Dessa två kvalitativt skilda sätt att förhålla sig till texten visade sig vara avgörande för de studerandes inlärning och förståelse av texten.

Det framkommer vissa likheter mellan hur universitetsstuderande tar sig an en text och elevernas sätt att rita, skriva och tala när de löser problem i den studerade undervisningen. Några elever är inriktade mot problemens ytstruktur. De differentierar, fördjupar och utvidgar då i varierande utsträckning problemens innehåll. Andra elever är inriktade mot en djupare nivå av det givna problemet. Dessa elever relaterar och integrerar problemets innehåll till en sammansatt enhet. Problemet tar då gestalt för eleverna, och de uppfattar en sammanhängande uppbyggnad eller struktur i problemet.

Kapitel 9

ELEVERNAS FÖRSTÅELSE AV ARITMETISKA PROBLEM

För att skapa ett rikt och varierat dataunderlag som erbjuder goda möjligheter att utifrån olika perspektiv studera och analysera hur lågstadieelever erfar och förstår aritmetisk problemlösning genomförde jag som tidigare beskrivits en klassrumsstudie och en intervjustudie. I de båda studierna arbetade eleverna med en problemsekvens, som innefattade olika typer av skriftliga verbala problem. De resultat som hittills har redovisats har huvudsakligen berört klassrumsstudien. I den del av resultatredovisningen som nu följer, införlivas en analys och tolkning av det empiriska materialet från intervjustudien. En analys och tolkning av elevernas förfaringssätt vid problemlösningen och deras uppfattningar av problemsekvensens olika typer av problem presenteras. Denna analys leder fram till en övergripande beskrivningsmodell av elevernas förståelse och uppfattning av aritmetisk problemlösning. Med utgångspunkt från denna beskrivningsmodell ges slutligen en sammanfattande karakteristik av elevernas aritmetiska problemlösning, där problemlösningens essens kan urskiljas.

Elevernas problemlösning har studerats med utgångspunkt från de kvalitativt skilda sätt på vilka eleverna uppfattar problemen i de olika faserna. Uppfattningarna har därefter förts samman i kategorier som är avsedda att ge en beskrivning av skillnader i elevernas sätt att uppfatta problemen. Analysen bygger på en tolkning av elevernas förfaringssätt vid problemlösningen och är riktad mot att beskriva den innebörd eleverna tillskriver aritmetiska problem. Den genomförda analysen är således inte inriktad mot att analysera elevernas taluppfattning eller kartlägga elevernas uppfattningar av skilda räknesätt.

Vid analysen och tolkningen av elevernas skilda förfaringssätt har jag följt problemsekvensens olika faser i intervju- och klassrumstudien. I de olika typer av problem som ingår i problemsekvensen framkommer olika aspekter av elevernas förfaringssätt med varierande tydlighet. Det är de aspekter som kan urskiljas särskilt tydligt i de olika faserna som utgör grund för de kategorisystem som kommer att beskrivas i det följande. Detta faktum innebär emellertid inte att kategorisystemen endast har

relevans för problemen i den beskrivna fasen. Elevernas problemlösning i den första fasen av problem, som inte innefattar något aritmetiskt innehåll, redovisades i föregående kapitel och behandlas därför inte i denna del av resultatredovisningen.

FAS TVÅ

BERÄTTELSEPROBLEM MED ARITMETISKT INNEHÅLL

Innehållet och formuleringen av problemen i fas två har tidigare redovisats vid beskrivningen av problemsekvensen i kapitel fyra (se s 108). Problemen har ett aritmetiskt innehåll, men det ges även möjligheter till alternativa lösningar som inte inbegriper räkneoperationer. När eleverna vid intervjuerna tillfrågas om de kan tänka sig fler lösningar på problemen ger många elever förslag på alternativa sätt att lösa problemen. Elevernas skilda förfaringssätt vid problemlösningen kan indelas i två huvudkategorier: dels lösningar som inte innefattar matematik, dels lösningar som inbegriper matematiska aspekter.

EJ MATEMATISKA LÖSNINGAR

Eleverna inriktar sig inte mot det matematiska innehållet i problemen. De nämner inte mängder, tal eller aritmetiska operationer och utför inte någon numerisk beräkning.

Berit (Problem 1: Äpplen till hästarna)

I. Vad tycker du?

B. Man gör äpplemos.

Ida (Problem 2: Ballonger på kalaset)

I. Hmm? Kan du komma på något annat sätt de kan göra?

I. Att dom inte tar ballonger alls. Dom tar en annan lek.

Max skriver (Problem 1: Äpplen till hästarna)

... Dom slänger bort äpplena[1].

---

[1] Elevernas problemlösning exemplifieras med citat både från intervjustudien och från klassrumsstudien. När det inledningsvis står att eleven skriver är det ett citat från en text som framställts i klassrummet. För att markera att text har uteslutits användes tre punkter.

Vid intervjuerna kan eleverna övergå från att avge svar som inte inbegriper matematiska aspekter till att ge matematiska lösningsförslag. När detta inträffar skiftar eleverna fokus och uppmärksammar en innehållslig del av problemet som de inte tidigare fokuserat. Detta skifte av fokus innebär att eleverna förstår problemen på ett nytt sätt. Förändringen av elevernas förståelse är ofta beroende av tidsaspekten, dvs elevernas förståelse av det givna problemet utvecklas när de får tid att arbeta med problemets innehållet och uppmärksamma alltmer av det givna problemets innehåll. Elevernas perspektivskifte kan emellertid också bero på de frågor som ställs i intervjusituationen, eftersom frågorna inriktar elevernas uppmärksamhet mot specifika innehållsliga delar av problemet.

MATEMATISKA LÖSNINGAR

Eleverna inriktar sig mot det matematiska innehållet i problemen. De har antaganden om en eller flera lösningar vilka inbegriper mängder eller tal. Med avseende på det sätt på vilket eleverna inriktar sig mot matematiska aspekter av problemen kan elevernas förfaringssätt indelas i två kategorier, estimering[2] och beräkning.

1. Estimering

Eleverna estimerar ett svar. De utför emellertid inte någon beräkning för att kontrollera rimligheten i sin uppskattning. De nämner mängder eller fokuserar tal som ingår i problemet, och kan uttrycka att en beräkning skall utföras. När eleverna estimerar framkommer att de inriktar sig mot problemet och uppfattar problemens innehåll på tre kvalitativt skilda sätt.

1.1 Eleverna fokuserar mängder eller tal som inte förekommer i problemen.

Eleverna estimerar ett svar med en mängd eller ett tal som inte nämns i problemet. De utgår från sin egen erfarenhet och gör ibland en uppskattning med utgångspunkt från hur de själva skulle ha handlat i en liknande situation.

---

[2] Benämningen estimering användes i betydelsen uppskatta, värdera och bedöma. En bedömning av den gjorda estimeringens rimlighet innefattas ibland i begreppet estimering. Detta är emellertid inte fallet i denna framställning.

Nils skriver (Problem 1: Äpplen till hästarna)

Antingen får dom ge äpplen till dom som har varit längst i stallet eller också får de gå till äppelträdet och hämta flera äpplen.

Maria (Problem 2: Ballonger på kalaset)

I. Hmmm?

M. Jag skulle ha handlat 4 .. ifall det skulle gått sönder mer ... eller 5 eller så.

1.2 Eleverna fokuserar de tal som förekommer i problemen.

Eleverna estimerar ett svar med utgångspunkt från de tal och händelser som nämns i problemen.

Helen (Problem 2: Ballonger på kalaset)

I. Hur många ska de köpa då?

H. Lika många.

I. Hur många är det?

H. 9 stycken och 12.

I. Varför ska de köpa lika många?

H. Så att det räcker.

Martin (Problem 2: Ballonger på kalaset)

I. Jaha ... Hur många ska de köpa då?

M. Två.

I. Varför ska de köpa två?

M. För att det smällde två.

1.3 Eleverna fokuserar tal som förekommer i problemen samt nämner att en beräkning skall utföras.

Eleverna estimerar ett svar med utgångspunkt från de tal och händelser som nämns i problemen. De nämner att en beräkning kan göras, men de utför inte någon räkneoperation. Det är företrädesvis tal som förekommer tidigt i problemet som eleverna fokuserar. De relaterar emellertid inte talen till problemets övriga aritmetiska innehåll.

Therese (Problem 2: Ballonger på kalaset)

I. Vad säger du?

T Jag tycker dom ska köpa nya ballonger. Dom tar 9 ... och lägger till så många som behövs .... Jag vet inte hur många som behövs. Dom ska köpa 20 ballonger till. .... Jag vet inte varför de ska köpa 20 ballonger.

2. Beräkning

Eleverna fokuserar de tal som ingår i problemet och utför matematiska operationer. Beräkningarna kan utföras med olika målinriktning i ett eller flera steg och eleverna använder huvudräkning, fingerräkning eller skriftliga noteringar. I denna kategori återfinns de allra flesta av eleverna. När eleverna utför beräkningar framkommer att de har två skilda förfaringssätt: dels utför eleverna beräkningar som inte har anknytning till problemens aritmetiska innehåll, dels utför de beräkningar med anknytning till problemens matematiska innehåll.

2.1 Eleverna fokuserar tal och räknesätt i problemen, De utför beräkningar som inte har anknytning till problemens aritmetiska innehåll.

Eleverna relaterar inte den information som är given i problemet. Vid problemlösningen ser inte eleven samband mellan problemets olika innehållsliga delar och relaterar inte talen med problemets innehåll. De utför räkneoperationer som saknar relevans för en lösning av problemet.

Mia (Problem 2: Ballonger på kalaset)

I. Hur många ballonger har hon?

M. 12+12 eller så kan man ta 12 +2 eller 12 gånger 2.

I. Hur var det med de små ballongerna?

M. De var väl också 12 .. när dom smällde så blev dom 9.

I. ... Hur många handlade dom?

M. Om man inte räknar de som ska smälla så blir det 3 ... för 9+3 är 12.

2.2 Eleverna fokuserar tal och räknesätt i problemen. De utför beräkningar med anknytning till problemens aritmetiska innehåll.

Vid problemlösningen relaterar eleverna den information som är given i problemet. De ser samband mellan problemets olika innehållsliga delar och anknyter tal samt räkneoperationer till problemets innehåll.

Andreas (Problem 2: Ballonger på kalaset)

A. Dom blåser upp en stor ballong så att den blir liten. ... Dom blåser inte upp den helt ... Vänta få se..så lämnar man en kvar, då får dom tio. Hmm ... Nej får jag se ... Istället..Hur många ihop ... Får jag måla? 12 stora ballonger och så nio små *(ritar)*. Det skulle vara 2 små ballonger. 12 + 9 blir 21 och så ska man dela det i 2 först ... och sedan i 10 ... Om

man tar bort 10 först , sen har man 11 kvar ... det blir 1 barn som får 2 stora. Men det räcker ju ändå inte ... de ska ha 2 små.

När Andreas löser problemet anser han inte i likhet med de flesta andra elever att man skall köpa fler ballonger utan han försöker vid lösningen utgå från den den information som ges i problemet. Han utvecklar lösningsprocessen och arbetar under en längre tid med lösningen.

Lisa skriver (Problem 1: Äpplen till hästarna)

... Lena säjer att dom ska dela äpplena. Det tycker Per också. Per går till sig och hämtar en kniv. Lena går ut på gården så länge. Snart kommer Per och dom går in. Du kan dela säger Per. Nej du kan göra det. Hur många skall vi dela säjer Per. Kan du inte dela? Jo det kan jag säger Per också delar han ett äpple i fyra delar. Du kan ju inte räkna säger Lena och så delar Lena dom andra äpplena. Så får hästarna ett halvt äpple var och 2 hästar får 2 små bitar.

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION:

Att ge eller söka ett svar på problemet

När eleverna inriktar sig mot matematiska aspekter av problemen fokuserar de skilda delar av problemens aritmetiska innehåll. Eleverna har tre olika sätt att uppfatta problemens innehåll och problemlösning i fas två.

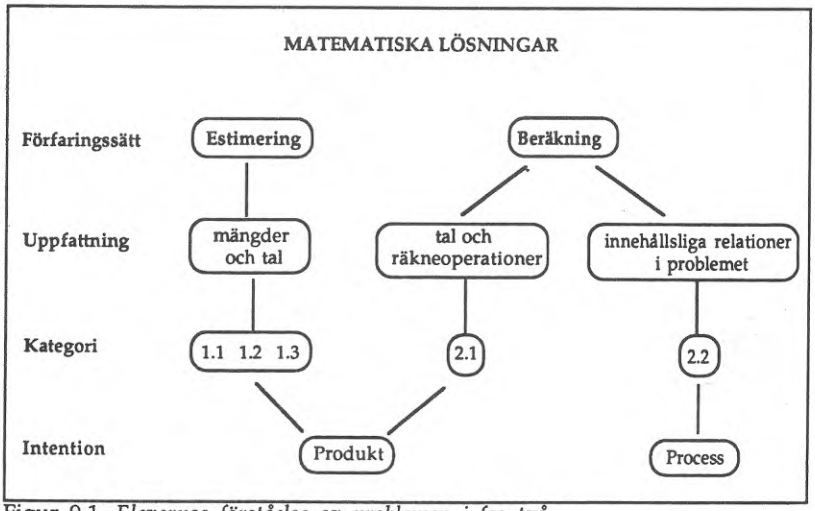
- Eleverna fokuserar mängder eller tal i problemen. De utför inte några några räkneoperationer. De har uppfattningen att problemlösning innebär att man skall ge ett svar på problemen vilket innefattar en mängd eller ett tal.
- Eleverna fokuserar tal och räkneoperationer i problemens innehåll. De utför räkneoperationer och uppfattar att problemlösning innebär att man för att ge ett svar på problemen skall utföra en aritmetisk operation.
- Eleverna fokuserar innehållsliga relationer i problemen. De utför räkneoperationer och uppfattar att problemlösning innebär att man för att ge ett svar på problemen inte enbart skall relatera tal och räkneoperation utan även problemens övriga aritmetiska innehåll.

En tolkning av hur elevernas förfaringssätt och uppfattningar av de givna problemen visar att eleverna har olika mål eller *intention* i problemlösningssituationen. Några elever har huvudsakligen målsättningen att *ge ett svar på problemet* vilket framkommer när

de inte inriktar sig mot problemens aritmetiska innehåll. Eleverna estimerar då ett svar utan att utföra beräkningar, eller de utför beräkningar som inte är anknutna till problemets aritmetiska innehåll. Eftersom deras intresse huvudsakligen är inriktat mot att komma fram till ett svar på problemet relaterar de inte problemens samtliga innehållsliga delar och fördjupar eller utvidgar inte problemlösningen, vilket medför att problemlösningsprocessen avstannar. När eleverna vid problemlösningen huvudsakligen är inriktade mot att ge ett svar på problemet och framställa en produkt har de en *produktintention*.

I andra fall kan elevernas mål vara *att söka ett svar på problemet*. Det framkommer när eleverna vid beräkningarna är inriktade mot att söka samband och relatera problemens aritmetiska innehåll. Eleverna utför då inte endast en aritmetisk operation för att komma fram till ett en lösning på problemet, utan fördjupar och utvidgar problemlösningen samt inriktar sig mot att relatera problemets innehållsliga delar, vilket medför att problemlösningsprocessen utvecklas. När elevernas huvudsakliga målsättningen med problemlösningen är att söka ett svar på problemen är de inte enbart inriktade mot den produkt problemlösningsförsöket skall resultera i, utan mot problemlösningsprocessen i sig, och de har då en *processintention*.

En sammanfattande bild av elevernas förståelse av problemen när de inriktar sig mot matematiska aspekter av problemen visar:



Figur 9.1. *Elevernas förståelse av problemen i fas två*

FAS TRE

NUMERISKA UTRÄKNINGAR INFÖRLIVAS I ELEVERNAS BERÄTTELSER

Problemen i denna fas innehåller inte någon skriven text. En numerisk uträkning presenteras, som eleverna skall klä i ord genom att skriva en berättelse eller "räknehändelse" där det aritmetiska innehållet i uträkningen motsvarar det skeende som beskrivs i elevernas berättelser (se s 109).

I intervjustudien hade eleverna ibland svårigheter med att förstå vad som menades med "räknehändelse" och uttrycket "vad talen handlar om". Trots att det i intervjuutskrifterna framkommer ett flertal exempel på att ledande frågor ställs, är det ett relativt stort antal av eleverna som inte ger något lösningsförslag. Detta förhållande beror troligtvis på att eleverna tidigare i matematikundervisningen inte tidigare i någon större utsträckning arbetat med räknehändelser.

Anna (Problem 2: 180-78=102)

> I. Kan du säga något som talen kan handla om? ..... En räknehändelse där de här talen finns med?
>
> A. Nej det finns nog inget.

I klassrumsstudien var det endast elev som inte gav något lösningsförslag.

Gunnar skriver (Problem 1: 18+7=25)

> Idag orkar Lena och Per inte berätta.

Elevernas förfaringssätt kan liksom i fas två indelas i två huvudkategorier: dels lösningar vilka inte innefattar matematik, dels lösningar som inbegriper matematiska aspekter.

EJ MATEMATISKA LÖSNINGAR

Eleverna inriktar sig inte mot det matematiska innehållet i problemen. De nämner inte mängder, tal eller aritmetiska operationer.

Viktor skriver (Problem 4: 16:4=4)

> Det var en gång en kille som hette Olle. Han skröt om att han var bäst i golf. Sen kom det en ny i klassen som hette Martin. Han gick också i golf. Då sa Olle att dom kunde gå ut på banan en dag. Ja sa Martin. Första hålet var ett korthål. Där slog Martin hole in one. Andra hålet

slog Olle först. Det låg en asfaltsväg bakom hålet. Olle slog ut. Den gick som en banan och försvann.

Det är ovanligt att eleverna inte behandlar några matematiska aspekter av den givna uträkningen. I intervjustudien inriktade sig samtliga de elever som gav ett lösningsförslag mot matematiska aspekter av uppgiften.

MATEMATISKA LÖSNINGAR

Eleverna inriktar sig mot det matematiska innehållet i problemen. De har antaganden om en eller flera lösningar vilka inbegriper mängder eller tal. Elevernas uppfattningar av de givna uträkningarna kan delas in i tre kategorier.

1. Eleverna inriktar sig mot delar av den givna uträkningen. De fokuserar tal som ingår i uträkningen. Lösningen beskriver inte den givna uträkningen.

Eleverna fokuserar tal och inriktar sig mot delar av den givna uträkningen. Talen införlivas i en lösning som inte beskriver den givna uträkningen. Eleverna kan fokusera det första talet eller samtliga tal i uträkningen.

Sven (Problem 1: 18+7=25)

I. Kan du berätta en räknehändelse eller säga någonting som de här talen skulle kunna berätta om ?

S. ... Jag fattar inte riktigt.

I. Kan de här talen stå för något? Kanske kulor eller kronor?

S. Åttan kan vara en snögubbe och ettan kan vara en pinne.

I: Det kan man tänka sig , men jag tänkte inte att dom skulle se ut som någonting utan berätta om någonting. Du har kanske 18 av någonting?

S. Om jag har 18 på tröjan eller så menar du?

I. Jag tänkte att du kanske hade 18 kronor.

S. Jag har 50 kronor.

I. Jaså det har du?..Men det skulle kanske kunna vara 18 kronor som du har .. Om det var det .... hur skulle det bli sedan med det talet? Se här (*pekar*).

S. Hmm.

I. Om man från början har 18 kronor. Vad händer sen?

S. Om man får mer så får man 19.

Sven fokuserar det första talet avgränsat från sitt sammanhang och betraktar inte uträkningen som en helhet. Talet har i den aktuella situationen inte någon numerisk innebörd för honom. Vid sina försök att beskriva talen inriktar han sig inledningsvis mot siffrans form. Därefter ser han talet som en upplysning eller benämning. När han till slut ger talet en numerisk innebörd och utför en räkneoperation innebär additionen för honom i denna situation att lägga till en enhet.

Eleverna kan även fokusera det första talet och beskriva det som bestående av två ental. När Helen tillfrågas om talen kan handla om något uppfattar hon det som att hon skall förändra talet och i den situationen får positionssystemet inte någon innebörd för henne.

Helen (Problem 1: 18+7=25)

I. Kan du tänka dig att de här talen handlar om något? ... En berättelse eller en händelse där de här talen finns med?

H. Nej.

I. Vad skulle 18 kunna vara?

H. 18 ... 9:a istället ... för man kan ha 8 och så 9 ... lägga till ettan ... Fast så räknar jag aldrig.

Eleverna kan även fokusera samtliga tal i uträkningen och införliva dem i en lösning.

Roland skriver (Problem 2: 180-78=102)

Peter skickar ett brev till sin kompis som bor i Stockholm och så här lyder Peters brev. Jag vill komma till dig på sommarlovet. Så börjar Peter att packa ner 78 stycken tröjor kortärmade och 180 st kalsonger och 102 st strumpor.

2. Eleverna inriktar sig mot den givna uträkningen som en helhet. De fokuserar tal och räknesätt som ingår uträkningen. Den händelse eleverna beskriver motsvaras inte av de matematiska symbolerna i uträkningen.

Eleverna uppfattar uträkningen som en helhet i vilken tal och räknesätt ingår. Uträkningen införlivas i en lösning som inte beskriver den givna uträkningen.

Fredrik (Problem 1: 18+7=25)

I. Kan du säga någon räknehändelse eller någon berättelse där de här talen kan ingå? ... Vad kan talen handla om?

F. Nej det vet jag inte.

I. Mmmm ... Någonting som skulle kunna vara 18? ... Kulor eller pengar?..

F. ...25 minus 7 är ju 18 annars. ... Man kan ju vända på det och säga 17+18.

I. Mm.

F Det blir ju också 25.

I. Inte 17 +18?

F Hmm... Hmm... 17 plus 18 ... eller 7 plus 18.

Fredrik förstår inte uppgiftens innebörd och i den situationen inriktar han sig mot att utföra räkneoperationer, varvid han ser talen i en del-del-helhetsrelation. När han säger 17 istället för 7 är det troligtvis en perseverationseffekt som uppkommer genom att han dessförinnan nämnde 18.

I klassrumsstudien förbinder många elever uträkningen med matematik i skolan eller med läxuppgifter. De överför uträkningen i form av en uppgift till sina skriftliga berättelser.

Problem 2 (180-78=102)

... då sa fröken nu ska du få svara på vad 180-78 är. Det blir 102 sa Kristian.

Problem 3 (3·7=21)

...och nu sitter dom i skolan och gör matte. Lena kommer fram till Maria och frågar vad blir 3 · 7. Vet du inte det? säger Maria. Nej säger Lena. 3 · 7=21 säger Lena.

Berättelserna kan emellertid även ha anknytning till vardagslivet.

Problem 3 (3·7=21)

... Vi ordnar en frågesport i vardagsrummet. På en fråga stod det 3·7=... Och det blir 21 sa Lotta.

Problem 2 (180-78=102)

... Han hade fått ett brev där det stod att han fick betala 180 -78. Martin frågade sin mamma hur mycket det var. Hon sa det det blev 102 kronor.

3. Eleverna inriktar sig mot den givna uträkningen som en helhet. De fokuserar tal och räknesätt. De matematiska symbolerna i uträkningen har en motsvarighet i den händelse eleverna beskriver.

Eleverna uppfattar uträkningen som en helhet i vilken tal och räknesätt ingår. Uträkningen införlivas i en lösning som beskriver den givna uträkningen. Symbolerna i den givna uträkningen motsvaras av de händelser som eleverna beskriver och eleverna uppfattar relationen mellan symbolerna och de händelser de beskriver.

I intervjustudien handlade elevernas lösningar till stor del om bollar, kulor och pengar. Innehållet i lösningsförslagen har således stor likhet med de uppgifter som återfinns i elevernas matematikböcker.

Anna (Problem 1: 18+7=25)

I. Kan du berätta en historia, säga någonting som de här talen kan handla om?

A. Ja, man har 18 kronor och så får man 7 kronor ... så har man 25 kronor.

Mikael (Problem 2: 180-78=102)

I. Inte som du vet? ... Du kommer inte på något? ... Men kan det inte handla om pengar eller kulor eller något?

M. Jo om pengar.

I. Ja hur blir det då? ... Hur kan man säga?

M. Ja jag vet inte Man kanske har 180 och ska betala någonting som är 78 så blir 102 kronor kvar.

Som tidigare beskrivits i kapitel 8 behandlade eleverna i klassrumsstudien mycket varierande teman och miljöer i sina texter.

Monika skriver (Problem 3: 3·7=21)

Det var vår och Per och Lena gick ut i trädgården ett slag och Lena sa titta snödropparna har kommit, så bra, nu är det äntligen vår. Sju stycken är det. Ja nu ropar mamma att vi ska äta. Ja då går vi in då. Lena skriker tillbaka till mamma, vi kommer. Och nästa dag när dom går ut i trädgården så var det fjorton stycken. I går var dom inte där. Dom var på Liseberg hela dagen från morgon till kväll. Då sa Lena det har nog kommit sju varje dag. Då sa Per. Vi säga det med ett mattetal. Jo 3·7=21 och det stämmer precis vi har tjugoett snödroppar.

Valter skriver (Problem 2: 180-78=102)

... Idag ska Lena och Per gå på Mac Donald och äta. De vet att de får på ett ungefär in 180 ballonger per dag. Så kommer 78 barn som ska ha ballonger. Då finns det 102 ballonger kvar säger Per.

Per skriver (Problem 3: 3·7=21)

Gustav spelar golf. Han har 7 bollar. Han skjuter bort allihopa. Han går och köper nya. Det finns 7 bollar i varje paket. Han köper 3 paket då har han 21 bollar.Sen spelar han i 5 timmar till och gör 5 hole in one. Sen går han hem och kollar på sin prissamling. Han hade 7 priser på varje hylla och det var 3 hyllor. Han hade alltså 21 priser. Sen går han och räknar sina prispengar. Han har 3 lådor med 7 tiotusenlappar i Han har alltså 21 lappar.

Det inträffade också att eleverna förändrade uträkningen genom att utvidga den.

Henrik skriver (Problem 1: 18+7=25)

> ... Vi går och spelar ping-pong. Vi träffas vid båthuset sa Magnus. Jag har med mina 18 bollar och jag har med mig 6 bollar säger Göran. Det blir 24. Oj här hittade jag en boll så att det blir 25 säger Göran.

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

I klassrumsstudien framkommer att eleverna ibland betraktar uträkningen som en skoluppgift. Eleverna förbinder den givna numeriska uträkningen med ett skolsammanhang och beskriver exempelvis uträkningen som en hemläxa. De flesta eleverna frigör sig emellertid från bindningen till skolmatematiken och anknyter berättelserna till fantasivärldar eller vardagshändelser.

Vid en jämförelse mellan elevernas förfaringssätt vid den första och sista uppgiften i klassrumsstudien framkommer att eleverna i den sista uppgiften i ökad utsträckning relaterar symbolerna i den givna uträkningen till den händelse de beskriver i sina berättelser. Lena har olika förfaringssätt vid lösningen av problem ett respektive fyra. I den första uppgiften ser hon uträkningen som en helhet, där symbolerna inte får en motsvarighet i den händelse hon beskriver. I den sista uppgiften relaterar hon emellertid symbolerna i uträkningen till de händelser hon beskriver.

Problem 1 (18+7=25)

> ... Mamma det är ett svårt tal här. Vad är det för ett tal? Det är 18+7= _ Det blir 25 säger mamman.

Problem 4 (16:4=4)

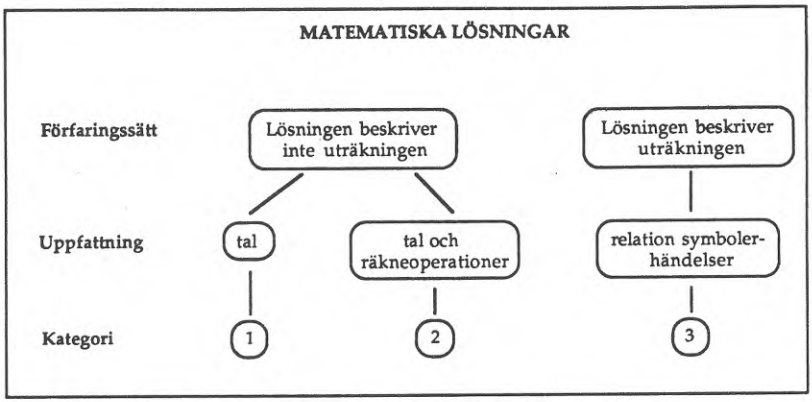
> Per och Lena hade varit och plockat äpplen. De har plockat 16 äpplen. Om du och jag och mamma och pappa vill ha äpplen så får vi ta 16 äpplen och dela det på fyra. Därför blir det fyra äpplen var.

Det är vanligare i intervjusituationen än när eleverna skriver berättelser i klassrumssituationen att eleverna inte relaterar den givna uträkningens innehållsliga delar. och att de händelser som skildras inte motsvaras av de givna symbolerna.

När eleverna löste problemen i fas två framkom att de hade en produkt- eller processsintention. Vid problemlösningen i denna fas framkommer inte detta lika tydligt, vilket troligtvis beror på att problemen i de båda faserna är av olika karaktär. Eleverna

fokuserar emellertid liksom vid problemlösningen i fas två skilda delar av det aritmetiska innehållet. I denna fas uppfattar några elever talen i den givna uträkningen, andra elever uppfattar tal och räkneoperationer och ytterligare andra elever uppfattar relationerna mellan de matematiska symbolerna och de händelser som beskrivs i deras lösning.

En sammanfattande bild av elevernas förfaringssätt, uppfattningar och respektive beskrivningskategorier, när de inriktar sig mot matematiska aspekter av problemen i denna fas visar:



Figur 9.2. *Elevernas förståelse av problemen i fas tre*

FAS FYRA

BERÄTTELSEPROBLEM MED UPPSKATTNING

Innehållet och formuleringen av problemen i fas fyra har liksom problemen i de andra faserna beskrivits i kapitel fyra (se s 110). Problemen framställs här återigen i form av skriven text. Berättelserna är emellertid inte lika innehållsrika som i den andra fasen. Det ställs en direkt fråga som avser ett aritmetiskt innehåll, men det saknas tillräcklig information för att eleverna skall kunna utföra en aritmetisk lösning av problemen. De måste själva uppskatta och bestämma vissa numeriska fakta för att kunna utföra en beräkning.

Den uppskattning eleverna gjorde vid lösningen av de fyra problemen var i allmänhet rimliga. I det första problemet gjorde

eleverna goda uppskattningar av priset på chips och dricka. Det framkom att de var prismedvetna och ofta inriktade mot att jämföra priser och handla i den billigaste affären. Vid lösningen av det sista problemet visade eleverna medvetenhet om vad ett rimligt pris på en lott skall vara. En jämförelse mellan elevernas uppskattningar vid intervjuerna och i deras skriftliga berättelser visar att de uppskattningar eleverna gör i en intervjusituation är mer enhetliga och samstämmiga än de som förekommer när eleverna skriver berättelser. Frekventa tal som användes vid uppskattningarna var 1, 2, 5, 10 och 20.

I intervjustudien gav några enstaka elever inledningsvis inte något förslag till lösning. De flesta av eleverna som gav ett lösningförslag nöjde sig med att göra en uppskattning. När följdfrågor ställdes gjorde de emellertid vanligtvis beräkningar. I de skriftliga berättelserna införlivade de flesta eleverna aritmetiska beräkningar i sina lösningar. Liksom i fas två och tre förekommer en variation med avseende på elevernas förfaringssätt och uppfattningar av problemets aritmetiska innehåll.

Eleverna har antaganden om en eller flera lösningar vilka samtliga inbegriper mängder eller tal. Eleverna har två skilda förfaringssätt vid problemlösningen. De kan enbart estimera ett svar eller de kan uppskatta ett svar samt utföra beräkningar.

1. Estimering

Eleverna estimerar ett svar. De nämner tal och kan uttrycka att en beräkning kan göras. När eleverna inte utför någon beräkning inriktar de sig mot problemens innehåll på tre kvalitativt skilda sätt.

1. 1 Eleverna har en referens i problemen. Deras estimering relateras inte till problemens övriga innehåll.

När eleverna gör en uppskattning refererar de till en innehållslig del av problemet. De har således en referens i det givna problemet. Med utgångspunkt från denna referens estimerar de ett svar som inte relateras till problemets övriga innehåll. Uppskattningen relateras inte till företeelser och förhållanden som nämns i problemet, utan har sin förankring utanför det givna problemets innehåll.

Hanna (Problem 1: Försäljning av blommor)

I. Vad tycker du?

H. 10 kronor

I. Varför det?

H. Det brukar blommor kosta.

I. Vad tjänar dom då

H. Det vet jag inte.

Hanna estimerar hur mycket en blomma skall kosta utan att relatera svaret till problemets innehåll.

Bea (Problem 4: Drickor och chips)

I. Vad tycker du om detta?

B. 2 kronor är väl det vanliga.

I. Är det vanliga?

E. Ja, men man kanske kan få 3 stycken lotter och så kan det kosta 5 kronor.

Eleverna uppger ofta att det pris som de nämner är rimligt därför att det är ett vanligt pris. Svaret estimeras utifrån elevernas egna upplevelser av de situationer som beskrivs i problemen. Vid uppskattningen utgår eleverna således från sin erfarenhet i vardagslivet på samma sätt som när de gör uppskattningar vid problemlösningen i fas två.

Även när eleverna skriver berättelser förekommer att de inte utför några beräkningar. Jan refererar till priset för samtliga blommor.

Jan skriver (Problem 1: Försäljning av blommor)

Ja sa Per vi säljer rubbet för 150 spänn alltså. Jag är la smart sa Per. Ja sa Lena, då gör vi det.

1. 2 Eleverna har en referens i problemen och de ser aspekter av referensen. Deras estimering relateras inte till problemens övriga innehåll.

När eleverna gör en uppskattning refererar de till en innehållslig del av problemet. Eleverna har en referens i problemet och ser aspekter av referenser. Med utgångspunkt från den referens de tagit i problemet estimerar de ett svar, som inte relateras till problemets övriga innehåll.

Fredrika (Problem 1: Försäljning av blommor)

I. Vad ska blomman kosta?

F. Om det är en stor blomma ... en solros 30 kronor .. dom kan ta 10 kronor för dom små.

I. Mmm? Vad tjänar dom då?

F. Jag vet inte.

Fredrika inriktar sig mot att barnen planterat blommor och har det som referens i problemet. Hon har en relativ inställning till prissättningen genom att nämna att priset beror på hur stora blommorna är och ser därmed aspekter av referensen. Däremot inriktar hon sig inte mot det antal blommor barnen planterat och hur mycket pengar skolbarnen kommer att tjäna. Hon estimerar ett svar genom att enbart referera till en innehållslig del av problemet vilken inte relateras till problemets övriga innehåll.

1. 3 Eleverna har flera referenser i problemen. De ser aspekter av referenserna och deras estimering relateras till problemens övriga innehåll.

När eleverna gör en uppskattning refererar de till mer än en innehållslig del av problemet. Eleverna har flera referenser i problemet och ser aspekter av referenserna. Med utgångspunkt från referenserna i problemet estimerar de ett svar som relateras till problemets innehåll.

Julia (Problem 1: Försäljning av blommor)

J. Om dom är sällsynta och väldigt fina, så kan dom väl ta hundra kronor styck sådär, om varje barn sått var sin sällsynt blomma och dom sköter dom och de är väldigt fina. Och för varje barn kostar det hundra kronor att åka. Läraren kanske också har sått en. Ja. Då säljer dom för hundra kronor styck. Om dom inte tycker det. ... 30 barn i klassen t ex då får dom.

I Ja hur mycket får dom ?

J. Dom får nog 1000 ...1400 och ....*(beskriver andra sätt för barnen i klassen att tjäna pengar).*

I. Ja men hur mycket pengar får dom ihop?

J. Det vet jag inte. Jag har inte kommit fram till det i räkneboken.

I. Nähä... Men du vet att man kan räkna ut det?

J. Mm med miniräknare hemma.

I. Ja men om du inte använder miniräknare då.

J. Då får man ta kulram.

Julia har två referenser i problemet: dels priset för blommorna, dels kostnaden för skolresan. Hon inleder problemlösningen med att reflektera över vad blommorna skall kosta, varvid hon refererar till hur blommorna ser ut. Därefter inriktar hon sig mot kostnaden för skolresan. Hon ser även aspekter av referenserna då hon nämner att stora och fina blommor kan kosta 100 kronor och att det är 30

barn i klassen. Hon utför emellertid inte någon beräkning. Förklaringen som hon ger till detta är att hon inte blivit undervisad om denna typ av beräkningar. De stora tal som Julia har estimerat utgör således ett hinder när hon skall utföra en beräkning.

2. Beräkning

Elevernas uppskattning är förankrad i problemens innehåll. Eleverna har flera referenser i problemen, ser aspekter av referenserna, relaterar dem och utför beräkningar.

Även de elever som gör beräkningar inleder problemlösningsförsöken med en uppskattning. De nöjer sig emellertid inte med detta, utan inriktar de sig mot det givna problemets innehåll och utvecklar problemlösningsprocessen. De har referenser i problemet och ser även aspekter av referenserna, vilket är en förutsättning för att de skall kunna utföra beräkningar.

Sara (Problem 4: Drickor och chips)

S. Om drickorna kostar 3 kronor och chipsen 4 ... då ska hon ... Det var 12 barn ... så ska vi köpa 12 drickor ... då får man räkna ... *(räknar på fingrarna)*

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 23 nej nu räknade jag för långt. ... 33 hon får betala 33 för drickorna .. och så chipsen, dom kostar 4 kronor. Ska dom ha en påse var då eller?

I. Det får du bestämma.

S. Vi köper 3 sådana. Det blir 4. 8 ... 12, då får hon betala 12 för dom och *(gör skriftliga noteringar)* 33 det blir 45.

Sara har de två referenserna drickor och chips i problemet. Hon ser även aspekter av referenserna, när hon fokuserar det antal drickor och chipspåsar som skall inhandlas. Hon relaterar referenser och aspekter samt utför beräkningar.

Ivar skriver (Problem 2: Klassens timma)

> När Pär och Lena kom till klassrummet var det tomt. Är det någon här, skrek Lena. Ja sa Per. Jag menar någon i den här klassen sa Lena, ingen kom, då får vi låna ändå sa Per. Vi är 26 barn i klassen och det ska komma 1 förälder från varje familj det blir 26+26=52 sa Pär. Visst ja, vi har ju egna. Och småbarn sa Lena, inte bara små barn sa Pär. Min storasyster kommer också. Med barnen blir det 26+26 och det är 52 tror jag ? sa Lena.. Men vi tar några mer, sa Lena då tar vi 70 stolar sa Pär. Och så tar de 70 stolar och så har de en fest *(uträkning; 26 föräldrar + 30 barn = 56 tillsammans)*.

Ivar fokuserar inledningsvis antalet personer som skall vara med på festen och uppmärksammar dessutom de stolar som Pär och Lena skall hämta. Vid problemlösningen har han två referenspunkter, personer och stolar. Vid referensen till personer ser han två aspekter, dels antalet vuxna som skall komma på festen, dels antalet barn som skall komma. Även vid referensen till stolar ser han två aspekter, dels att varje person skall ha en stol, dels att eleverna i klassen har egna stolar. Den aspekt att eleverna i klassen har egna stolar innebär att man inte behöver lika många stolar som antalet personer. Vid problemlösningen har Ivar således två referenser och han ser dessutom två aspekter av båda referenserna. Han relaterar referenser och aspekter av referenser och utför en beräkning. Han utför dessutom ytterligare en uppskattning för att vara säker på att antalet stolar skall vara tillräckligt.

Valter skriver (Problem 1: Försäljning av blommor)

> Jag tycker dom ska ta 500 kr för varje blomma. Och det gör dom, och dom åker till Australien och där äter dom hamburgare och glass och dricker coca-cola varje dag. Och sen köper dom en lott och vinner 2000000 kr och kan bo på ett lyxhotell som är 17 stjärnigt. Dom är 15 i klassen *(uträkning: 15 x 500= 7500).*

När Valter skriver en berättelse refererar han till blommor och barn. Han ser aspekter av referenserna i det att han estimerar att varje barn planterat en blomma och dessutom estimerar ett bestämt pris för varje blomma. Han relaterar referenser med de aspekter han nämner och utför en beräkning. Det förekom att eleverna när de skrev berättelser uppskattade orimligt stora tal. Valter ovan anser att en blomma skall kosta 500 kronor som är ett alltför högt pris för en blomma, men det bekymrar honom inte när han beskriver den drömresa som eleverna kan åka på.

Lena skriver (Problem 4: Drickor och chips)

> Lena cyklar till affären. Hon ska ha en stor skål med chips och varje barn ska få en liten coca cola.var. Då ska hon köpa tolv coca color och en stor påse chips. 12 kr kostar chipsen och 3 kr kostar cocacolorna. Då får hon betala 48 kr. Hon cyklar hem igen. När hon kommer hem så dukar hon. Sen kommer alla gäster och de äter av chipsen och dricker coca colan och är jätte nöjda.

Märta skriver (Problem 1: Försäljning av blommor)

> Dom är 24 barn i klassen. Alla har fått tre frön var. Varje blomma kostar tio kronor styck. Varje barn får gå i sitt område. Per och Lena tar varannat hus. Alla barnen får ihop 30 kronor var. Skolresan blir en resa till Stockholm. Alla blommorna som barnen fick köpte alla av.

Dom fick ihop 790 kronor. Resan kostade 795, men dom fem kronorna som fattades lade fröken till.

Även Lena och Märta fokuserar och relaterar i sin berättelse referenser och aspekter av referenser och utför beräkningar.

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

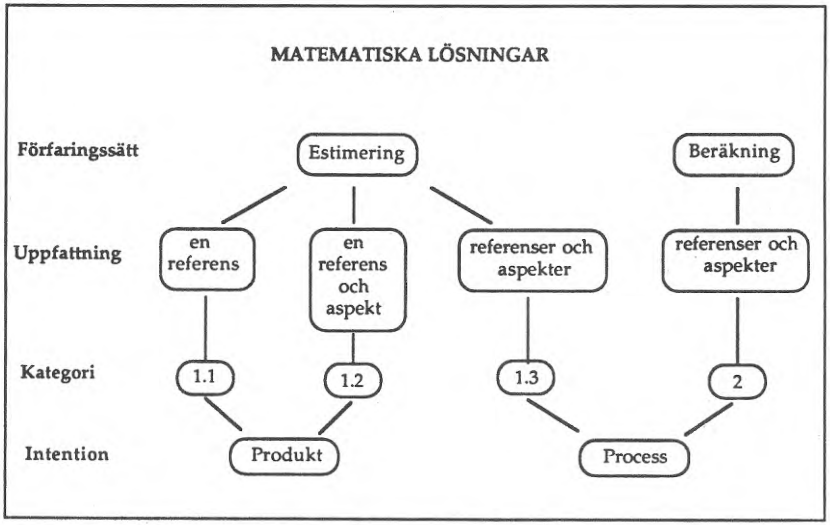
Vid problemlösningen har eleverna två skilda förfaringssätt. Några elever estimerar enbart ett svar medan andra elever estimerar numeriska fakta och utför beräkningar. I klassrumsstudien förekom det i mycket större utsträckning än vid intervjuerna att eleverna utförde beräkningar.

- När eleverna enbart estimerar ett svar uppfattar några få elever endast en innehållslig del av problemet. Eleverna har då en referens i problemet och relaterar inte sin uppskattning till det givna problemets övriga innehåll. Ett större antal av eleverna har en referens i problemet och ser aspekter av referensen. De inriktar sig emellertid inte mot problemets övriga innehållsliga delar. De flesta elever, som estimerar ett svar, uppfattar flera innehållsliga delar av det givna problemet och har flera referenser i problemet. De ser aspekter av referenserna och relaterar uppskattningen till problemets innehåll.
- När eleverna utför beräkningar uppfattar de flera innehållsliga delar av problemet och deras uppskattning av numeriska fakta är förankrad i det givna problemets innehåll. De har flera referenser i problemen, ser aspekter av referenserna och relaterar dem.

Det framkommer att eleverna i denna fas liksom i fas två har olika intentioner vid problemlösningen. Somliga elever har en produktintention och inriktar sig mot att ge ett svar på problemen. De har då en referens i problemet och i vissa fall ser de även en aspekt av referensen när de estimerar ett svar. Andra elever har en processintention och är inriktade mot att söka ett svar på problemet. I dessa fall utgår eleverna från problemens samtliga innehållsliga delar när de estimerar numeriska fakta. De har referenser i det givna problemet och ser aspekter av referenserna. Vid problemlösningen i denna fas förhåller det sig emellertid inte så, att de elever som har en processintention alltid utför beräkningar. Eleverna kan ibland utvidga och fördjupa problemets innehåll utan att göra numeriska kalkyler. Om eleverna estimerar stora tal kan dessa ibland upplevas som ett hinder vid

problemlösningen, vilket innebär att problemlösningsprocessen avstannar.

En sammanfattande bild av elevernas förståelse när de inriktar sig mot matematiska aspekter av problemen visar:



Figur 9.3. *Elevernas förståelse av problemen i fas fyra.*

FAS FEM

BENÄMNDA UPPGIFTER

Vid analysen av problemen i fas två och tre har vi sett att eleverna vid problemlösningen fokuserar tal och räkneoperationer. Eleverna inriktar sig även mot andra innehållsliga delar av problemet, vilket tydligast framkommer vid beskrivningen av elevernas problemlösning i fas fyra. De innehållsliga delar av problemen som eleverna inriktade sig mot benämndes referenser och aspekter av referenser. Analysen av elevernas problemlösning i fas fem visar att eleverna på liknande sätt som i de tidigare faserna fokuserar och relaterar problemens olika innehållsliga delar. Eftersom beskrivningen av elevernas skilda förfaringssätt och uppfattningar av problemen tar sin utgångspunkt i de givna problemens innehåll redovisas i det följande endast elevernas uppfattning av de två första problemen i fas fem. Syftet med att enbart redovisa två av de

givna problemen är att förenkla framställningen eftersom citat och exempel utgår från de givna problemens innehåll. Om samtliga problem redovisas blir beskrivningen mer omfattande och svårgenomtränglig. Även de två sista problemen i fasen har emellertid bidragit till tolkningen av elevernas uppfattning av problemen[3]. För ge en bild av elevernas förståelse av problemen i fas fem, måste vi se närmare på det första och andra problemet och ta dem som utgångspunkt vid beskrivningen.

Problem 5.1

I klassen med 19 barn delar fröken ut två skrivböcker och en räknebok till varje barn. Hur många böcker delade hon ut?

Vid problemlösningen inriktar sig samtliga elever som ger ett svar på problemen mot en eller flera innehållsliga delar av problemet. Detta probleminnehåll tas som utgångspunkt och referens vid problemlösningen. Analysen och tolkningen av det empiriska materialet visar att de innehållsliga delar av problemet som eleverna fokuserar och refererar till, när de löser problemet är: teman, aspekter av tema, tal och räkneoperation. I det följande skall vi närmare studera hur eleverna fokuserar och relaterar dessa innehållsliga delar av problemet.

Tema

Eleverna uppfattar att problemet handlar om barn och böcker. Vid problemlösningen fokuserar eleverna dessa teman i problemet och refererar till dem.

Aspekter av tema

När eleverna refererar till böcker kan de fokusera skrivböcker och räkneböcker. Referensen böcker har således två aspekter; skrivböcker och räkneböcker.

Tal

Eleverna kan fokusera något, flera eller samtliga tal som förekommer i problemet. Talen är 19, 2 och 1.

---

[3] För en beskrivning av innehållet och formuleringen av problemen i fas fem, se kapitel fyra s 110 samt bilaga 3.

Räkneoperation

De räkneoperationer eleverna inriktar sig mot är addition eller multiplikation.

TEMA	ASPEKTER	TAL	RÄKNEOPERATION
barn	skrivböcker,	19, 2, 1	addition,
böcker	räkneböcker		multiplikation

Tablå 9.1. *De innehållsliga delar av problem 5.1 som eleverna fokuserar.*

Problem 5.2

I klassrummet fanns 6 bord. Vid 5 av borden sitter 4 barn och vid ett bord sitter tre barn. Hur många barn är det i klassen?

Vid problemlösningen inriktar sig samtliga elever på liknande sätt som vid det första problemet mot en eller flera innehållsliga delar av problemen, vilka tas som utgångspunkt och referens vid problemlösningen. Det empiriska materialet visar att de innehållsliga delar av problemet som eleverna fokuserar även i detta problem är teman, aspekter av teman, tal och räkneoperation.

Tema

Eleverna uppfattar att problemet handlar om barn och bord. Vid problemlösningen fokuserar eleverna dessa teman i problemet och refererar till dem.

Aspekter av tema

När eleverna refererar till barn och bord kan de uppfatta att det sitter ett antal barn vid några bord och ett antal barn vid andra bord. Eleverna ser därmed aspekter av barn och bord.

Tal

Eleverna inriktar sig mot något, flera eller samtliga tal som förekommer i problemet. Talen är 6, 5, 4, 3 och 1

Räkneoperation

De räkneoperationer eleverna inriktar sig mot är addition och multiplikation.

TEMA	ASPEKTER	TAL	RÄKNEOPERATION
barn	barn vid några bord	6, 5, 4 ,3, 1	addition
bord	barn vid andra bord		multiplikation

Tablå 9.2. *De innehållsliga delar av problem 5.2 som eleverna fokuserar.*

Vid problemlösningen fokuserar eleverna problemets ovanstående innehållsliga delar i problemen på skilda sätt och relaterar dem inbördes i varierande utsträckning. Någon enstaka elev gör inledningsvis inte något försök att lösa det givna problemet och fokuserar inte någon av problemets innehållsliga delar.

Helen (Problem 1: Räkneböcker och skrivböcker)

I. Hur många böcker delade hon ut?

H. ... *(svarar inte)*

I. Kan man räkna efter?

H. Det vill jag inte.

I. Hmm ... Varför vill du inte?

H. Kan inte räkna det.

I de tidigare faserna framkom att några elever gav lösningsförslag som inte innefattade matematiska aspekter av problemen. Vid problemlösningen i fas fem förekommer inte detta förfaringssätt utan samtliga elever som avger ett lösningsförslag nämner mängder, tal eller aritmetiska operationer. Detta förhållande beror på att innehållet och strukturen i den femte problemtypen påverkar eleverna i riktning mot att inrikta sin uppmärksamhet mot de matematiska aspekterna av problemen. Med avseende på det sätt på vilket eleverna inriktar sig mot det matematiska innehållet kan man finna att eleverna dels estimerar ett numeriskt svar, vilket liksom i de tidigare faserna benämnes estimering, dels utför beräkningar.

1. Estimering

1.1 Eleverna fokuserar teman i problemen. (n=1)[4]

Av det givna problemens innehållsliga delar uppfattar eleverna problemens tema. Vid problemlösningen tas utgångspunkten i problemens tema och eleverna ger ett svar som inte är relaterat till problemens aritmetiska innehåll. De inriktar sig inte mot de tal som ingår i det givna problemets innehåll utan refererar till tal som inte omnämns i problemen.

Jörgen (Problem 1: Räkneböcker och skrivböcker)

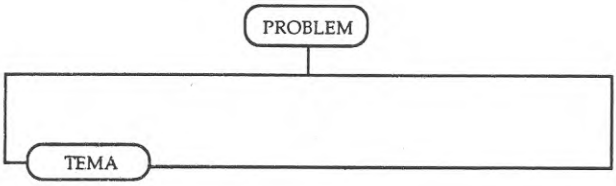
J. Till varje barn? Hur många böcker. ... Jag tror att det är 20.

I. Gissar du nu? ... Varför gissar du på 20 då?

J. Jo, därför att ... det kanske är 20 barn.

Jörgen förstår frågan och är inriktad mot att ge ett svar. Han är emellertid inte inriktad mot problemets innehåll utan hans svar är relaterat till hans erfarenhet av hur många elever det kan vara i en klass. Han svarar med ett jämt tiotal vilket är vanligt när eleverna gör uppskattningar.

För att förtydliga elevernas förståelse och uppfattning av problemen i fas fem, visas vid varje kategori en schematisk bild över de innehållsliga delar av problemen som eleverna fokuserar. De schematiska bilderna framställer inte i en sekventiell ordning vad eleverna uppfattar och hur de uppfattar probleminnehållet, utan visar hur problemen framstår för dem och vilken innebörd de tillskriver problemen.



Figur 9.4. *Fas fem kategori 1.1*

[4] De frekvenser som presenteras vid varje beskrivningskategori anger elevernas uppfattningar av de två första problemen i fas fem och avser endast intervjustudien.

1. 2 Eleverna fokuserar teman och tal i problemen. Tema och tal relateras. (n=3)

Eleverna uppfattar teman i problemen och de fokuserar tal. De ser emellertid inte aspekter av teman och inriktar sig inte mot aritmetiska operationer Vid problemlösningen relaterar de teman och tal och estimerar ett svar.

Bert (Problem 1: Räkneböcker och skrivböcker)

I. Hur många böcker delar hon ut?

B. Jag vet inte hur många det är ?

I. Hur många?

B. Var det i klassen?

I. Ska du läsa om det?

B. Ja. ... (läser)... 19.

I. 19 barn?

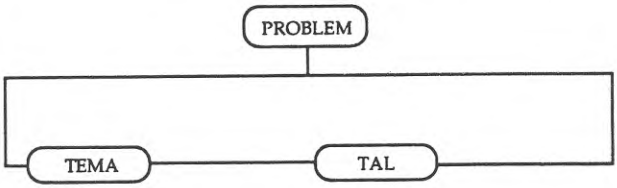
B. Och dom fick en bok.

I. Jaså?

B. Så blir det 19.

Bert ser att problemet handlar om barn och böcker. Bert har två referenser i problemet. Vid sin referens till böcker uppmärksammar han emellertid inte aspekten att barnen fick skrivböcker och räkneböcker. Han estimerar ett svar med utgångspunkt från ett tal i problemet utan att inrikta sig mot aspekterna av teman. Bert estimerar emellertid ett svar utifrån problemets innehåll vilket inte är fallet i kategori 1.1.

I det följande visas schematiska bilder av de innehållsliga delar av problemet som eleverna fokuserar i fas fem. I de fall då problemets innehåll relateras förbinds delarna på bilderna.



Figur 9.5. *Fas fem kategori 1.2*

2. Beräkning

2.1 Eleverna fokuserar teman samt tal och räkneoperation. De relaterar teman, tal och räkneoperation och utför en beräkning. (n=16)

Eleverna uppfattar teman, tal och räkneoperation i problemen. De ser aspekter av teman men endast en av aspekterna har någon relevans för problemlösningsprocessen. Eleverna relaterar således inte samtliga teman med aspekterna. När eleverna nämner en innehållslig del av problemen, utan att den får relevans för elevernas problemlösningsprocess, tolkas detta som eleverna inte uppfattar det aktuella probleminnehållet.

Elsa (Problem 2: Bord i klassrummet)

E. 7 barn

I. Hur kom du fram till 7?

E. Jag räknade 4 och 3 blir 7

I. Ja.

E. Det blir 7 barn det.

I. I klassen?

E. Mm ... oj 5 bord.

I. Hmm.

E. 5 bord ...5 bord sitter 4 barn och ett bord sitter 3 barn

I. Hmm

E. Så jag ska alltså jag ska alltså räkna ihop 5 bord på barn då? ... eller det är ju 4 barn på 5 bord

I. Hmm?

E. Så är det 4 barn?

I. Hm?.

E. Ja då måste det ju bli 7 barn i klassen.

I. Hmm.

E. ... Ja jag kommer bara fram till 7 ... gör jag.

Elsa nämner efter en stund aspekter av teman, dvs att det satt olika antal barn vid borden, aspekterna har emellertid inte någon innebörd för henne och inverkar därför inte på hennes lösningsprocess.

Magnus fokuserar teman i problemet. Han uppfattar att problemet handlar om barn och bord. Han fokuserar tal och utför räkneoperationer. Emellertid uppfattar han inte att det sitter fem barn vid fyra bord. Han ser således inte aspekterna av det ena temat.

Magnus (Problem 2: Bord i klassrummet)

I. Hur många barn är det i klassen?

M. 8.

I. Hur får du 8?

M. 5 plus 3.

I. Varför la du ihop 5 och 3?

M. 4 ...3 på ett bord och 5.

I. Och 5?

M. 5+2 är 7.

I. Var fick du 2 ifrån då? Förut sa du 3.

M. 4 ... 7... 4 och 3 det är 7.

I. 4 och 3 det är 7 ja Varför lägger du ihop 4 och 3?

M. Jo för det sitter 3 vid ett bord.

Eleverna inriktar sig mot operanderna i problemet och utför en addition. Det bör noteras att några elever i likhet med Elsa ovan kan nämna att det sitter olika antal barn vid borden. De uttalar sig således om aspekter av teman. Vid problemlösningen har emellertid dessa aspekter inte någon inverkan för det sätt på vilket eleverna löser problemen. Aspekterna har inte någon innebörd för eleverna och saknar därmed relevans för problemlösningsprocessens utveckling.

Innebörden av aspekterna i ovanstående problem är att det sitter olika antal barn vid fler än två bord. I de fall aspekter av teman i problemen inte har någon innebörd för eleverna uppfattar de inte problemens matematiska struktur som innebär att lösningen måste innefatta en upprepad addition eller multiplikation.

Det inträffar även att eleverna inriktar sig mot att utföra en matematisk procedur. Eva refererar till böcker och barn. Hon uppmärksammar emellertid inte aspekterna att barnen skall ha räkneböcker och skrivböcker.

Eva (Problem 1: Räkneböcker och skrivböcker)

I. Hur många böcker ska hon dela ut?

E. En räknebok .. det blir 19 räkneböcker ... 2 .... räkneböcker ..ska se ... 19 .. jag skriver upp ... det är enklare ... så ... *(skriver 19+19 i algoritm)* .... 9+9 hmm det blir 18 ... det blir 38.

Helen ser teman barn och bord, men hon uppfattar inte aspekterna att vid fem bord sitter fyra barn och vid ett bord sitter tre barn.

Helen (Problem 2: Bord i klassrummet)

I. Hur många barn är det i klassen?

H. Hmmm.

I. Kan du tänka dig något sätt man kan räkna ut det?

H. Plus.

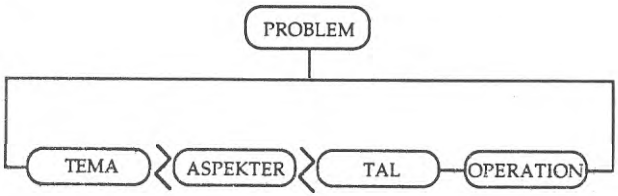
I. ... Hur gör du nu?

H ... 24 barn är dom i klassen.

I. Hur fick du fram det?

H. Räknade ... 4 sex gånger. Jag räknade 4. 8. 12. 16. 20. 24.

När eleverna är inriktade mot att utföra en aritmetisk operation kan deras svar ibland vid lösningen av liknande problem som det ovanstående tolkas som räknefel. Helen har emellertid inte uppfattat innebörden av aspekterna i ovanstående problem, dvs att det sitter olika antal barn vid fler än två bord, och hon har därmed inte uppfattat problemets aritmetiska struktur.



Figur 9.6. *Fas fem kategori 2.1*

2.2 Eleverna fokuserar tema, aspekter av tema,, tal och räkneoperation. Eleverna relaterar dessa innehållsliga delar förutom aspekter av tema och de givna talen. (n=9)

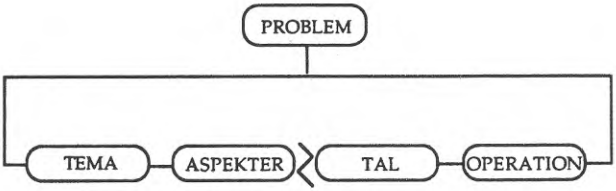
Eleverna uppfattar förutom teman, tal, och räkneoperation även aspekter av teman i problemen. De relaterar emellertid inte de givna talen med aspekterna.

Sara ser aspekterna i problemet, men hon uppfattar inte att det sitter fyra barn vid fem bord. Hon räknar med fyra bord.

Sara (Problem 2: Bord i klassrummet)

I. Hur många barn är det i klassen?

S. ...19 ... Jo först tänkte jag att 4 och 4 är 8 så visste jag att 8 plus 8 är 16 så får man ta tre till.



Figur 9.7. *Fas fem kategori 2.2*

2. 3 Eleverna fokuserar tema och aspekter av tema, tal och räkneoperation. Eleverna relaterar problemens innehållsliga delar, förutom tal och räkneoperation. *(n=5)*

Sofie uppfattar att det sitter olika antal barn vid antal borden. Hon relaterar talen med aspekterna, men vid beräkningen relaterar hon inte rätt tal till räkneoperationen. När hon 5 gånger adderar 4 gör hon ett räknefel vid additionen 12 + 4.

Sofie (Problem 2: Bord i klassrummet)

S. (*räknar*)

I. Nu får du tänka högt?

S. 4. 8. 12. 18 ... det blir 5 bord ... 18 ... och så .... 22 Det blir 22 ... och så tre till ... 23. Nej..jo 27.. Nej har har glömt bort igen. 4..8..12..18 ..22. Då skriver jag upp 22 här ... hmm ... plus 3 ... räknar ... 5, nej det blir så ... det är inte 52 barn i klassen. Nej ... 25 är det ... jag skulle vänt på den så.

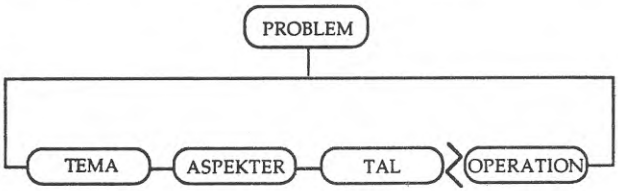
Även Klas uppfattar att det sitter olika antal barn vid ett antal bord. Han relaterar talen och aspekterna. Vid beräkningen relaterar han emellertid inte tal och räkneoperation utan gör räknefel.

Klas (Problem 1: Räkneböcker och skrivböcker)

K. Det blir 19 gånger 3

I. Jaha, vad är det då?

K. 10 plus 10 är 20 och så ... 10 till är 30 och så är det 9+9 det är 18 och så när man lägger till det så blir det 40 ... 47 blir det.



Figur 9.8. *Fas fem kategori 2.3*

Det faktum att eleverna vid lösningen av problem ett och två inte gör räknefel även i de fall då de enbart uppfattar teman, tal och operation i det givna problemet (kat 2.1), eller inte relaterar aspekterna med de givna talen (kat 2.2), kan förklaras av att räkneoperationerna då oftast blir mycket enkla.

2. 4 *Eleverna fokuserar tema samt aspekter av tema, tal och räkneoperation i problemen och relaterar problemens samtliga innehållsliga delar. (n=9)*

Viveka ser teman bord och barn. Hon ser aspekter att det sitter 4 barn vid 5 av borden och 3 barn vid ett bord. Hon relaterar tal, teman, aspekter och räkneoperation.

Viveka (Problem 2: Bord i klassrummet)

V. Först ... det är ... 6 runda bord, vid 5 av borden sitter 4 barn, och 5 gånger 4 är 20 ... 23.

I. Mmm ... 5 gånger 4 är 20 och vad gjorde du sen?

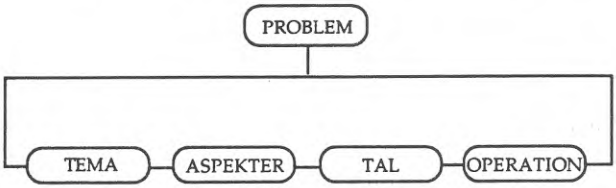
V. La till 3.

Även Peter relaterar problemets olika innehållsliga delar när han löser problemet.

Peter (Problem 1: Räkneböcker och skrivböcker)

P. 3 gånger 19 ... Det blir 30 sen ... två nior till det blir 18 ... 48 och så en nia till 57 då. 57 böcker det var inte så lite.

Vid problemlösningen fokuserar eleverna problemens innehållsliga delar och deras inbördes relationer på skilda sätt. När eleverna inriktar sig mot samtliga innehållsliga delar i problemet och uppfattar deras inbördes relation kan de lösa problemet.



Figur 9.9. *Fas fem kategori 2.4*

SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

Vid problemlösningen kan det inträffa att eleverna plötsligt ser en innehållslig del av problemet eller uppfattar en relation som de inte tidigare uppmärksammat. Detta kan bero på att eleverna när de arbetat en stund med problemlösningen själva varseblir en ny innehållslig del eller relation i problemet, men det kan även ha sin grund i intervjuarens inverkan på lösningsprocessen. De frågor som ställs i intervjusituationen kan bidra till att eleverna ser nya teman eller aspekter av teman i problemet, varvid problemets innehållsliga delar får en förändrad relation till varandra, vilket medför att elevernas tänkande förändras och att problemet får en ny innebörd för eleven När Jörgen får en förnyad fråga uppmärksammar han ytterligare en innehållslig del av problemet.

Jörgen (Problem 1: Räkneböcker och skrivböcker)

J. Till varje barn? Hur många böcker?... Jag tror att det är 20. *(kat 1.1)*

I. Gissar du nu? ... Varför gissar du på 20 då?

J. Jo, därför att... det kanske är 20 barn.

I. ... 20 barn, 20 böcker. En bok till varje? Men så var inte riktigt uppgiften. Nu läser jag igen så får du följa med.

J. Hur många böcker hon delade ut till ... räknebok ... Hon delade väl ut 19 böcker. Och så ska jag räkna ihop det då?

I. Vilket?

J. Det där 19 och 19. .... Eller hur menar du?

I. Hmm?

J. 38.

I. Varför tog du 19 plus 19?

J. Jo det var 19 barn och så skulle hon dela ut 19 räkneböcker och 19 sådana här läseböcker. *(kat 2.2)*

Jörgen inleder med att estimera. Han övergår därefter till att se båda aspekterna av referensen böcker. När eleverna på detta sätt vid problemlösningen fokuserar en ny innehållslig del av problemet eller upptäcker en relation de inte tidigare uppfattat, ser de problemets inre struktur på ett nytt sätt. Elevernas uppfattning av den inre relationen mellan problemets delar förändras och problemets gestalt omstruktureras. Problemet får därmed en ny innebörd för eleverna.

Om vi relaterar elevernas uppfattningar av problemlösningen till de enskilda eleverna finner vi att det är en elev av de 38 eleverna som inledningsvis inte avger något aritmetiskt svar. Fyra av eleverna estimerar ett svar vid problemlösningen. Eleverna ser då teman i problemen eller teman och tal och med utgångspunkt från

dessa estimerar de ett svar. Tre av dessa elever fortsätter därefter problemlösningsförsöken och utför en beräkning. När eleverna utför beräkningar fokuserar de i varierande utsträckning problemens olika innehållsliga delar och relaterar dem på olika sätt. 15 elever (39 %) fokuserar inte aspekterna av teman i problemen. Eleverna uppfattar därmed inte problemens matematiska struktur. 8 elever (21%) uppfattar aspekterna av teman i problemen, men de relaterar inte de tal som är givna i problemen med aspekterna. 5 elever (13%), uppfattar och relaterar problemens innehållsliga delar men gör räknefel. Det är 9 elever (24 %) som uppfattar och relaterar samtliga innehållsliga delar i problemen och som inte gör räknefel.

Nedan visas en tabell över elevernas förfaringssätt och deras uppfattningar av det första och andra problemet i fas fem.

Förfaringssätt	*Estimering*		*Beräkning*				
Kategori	1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	2.4	
Problem 5.1	1	3	7	2	4	5	
Problem 5.2			9	7	1	4	
Totalt	1	3	16	9	5	9	Σ43

Tabell 9.1. *Fördelning av elevernas uppfattningar över kategorier i problem 5.1 och 5.2* [5]

Som framkommer av tabell 9.1. är de mest framträdande skillnaderna i elevernas uppfattningar av de två problemen att det är fyra elever som estimerar ett svar i det första problemet, medan det inte är någon elev som använder detta förfaringssätt vid det andra problemet. Detta kan bero på att det är högre tal i det första problemet, vilket ökar elevernas benägenhet att estimera ett svar. En annan tydlig skillnad är att i det första problemet är det endast 2 elever medan det är 7 elever i det andra problemet, som uppfattar aspekter av teman i problemen, men som inte relaterar de tal som är givna i problemen med dessa aspekter (kat 2.2). En förklaring till

[5] Eftersom några elever skiftar uppfattning överensstämmer inte antalet uppfattningar (43) med antalet elever (38).

detta kan vara att det är fler tänkbara kombinationsmöjligheter mellan tal och aspekter i det andra problemet. De framkomna skillnaderna tyder på att problemens formulering och aritmetiska innehåll påverkar elevernas förfaringssätt och uppfattningar av problemen.

I motsats till problemen i fas fyra där det förekom ett stort antal elever som vid intervjuerna estimerade ett svar är det relativt få elever som estimerar ett svar i denna fas. De allra flesta eleverna utför beräkningar varvid de fokuserar en räkneoperation och relaterar varierande innehållsliga delar av problemet. Det är vanligt att eleverna inte uppfattar skilda aspekter av teman i de aritmetiska problem som de försöker lösa, och det är även relativt vanligt att eleverna inte förknippar talen med aspekterna av teman. I de fall eleverna inte inriktar sig mot samtliga innehållsliga delar i problemet och relaterar dem till varandra uppkommer ett brott i relationen mellan problemets innehållsliga delar. För att eleverna skall kunna lösa problemen måste de uppfatta problemets samtliga innehållsliga delar och se deras inbördes relation. Om eleverna inte relaterar problemens innehållsliga delar och därigenom uppfattar problemens matematiska struktur har de inte några möjlighet att komma fram till en korrekt aritmetisk lösning på problemet, även om de har en mycket god numerisk beräkningsförmåga.

SAMMANFATTANDE RESULTATDISKUSSION

Vid analysen av elevernas lösningsförslag, när de löste problemen i fas två till fem, framstod elevernas förfaringssätt och uppfattningar av problemen med varierande tydlighet i de olika faserna beroende på problemens olika innehåll och formulering.

I samtliga faser förekom att någon eller några få elever inte framställde något lösningsförslag på de givna problemen. I fas två till fyra kan elevernas förfaringssätt på ett övergripande plan kategoriseras i lösningar som inte innefattar matematiska aspekter och matematiska lösningar. I det första fallet inriktar eleverna sig inte mot det matematiska innehållet i problemet och nämner inte mängder, tal eller aritmetiska operationer, och de utför inte någon numerisk beräkning. I det andra fallet, när eleverna ger matematiska lösningsförslag, inriktar de sig mot det matematiska innehållet i problemen och har antaganden om en eller flera

problemlösningar vilka inbegriper mängder eller tal. Vid de matematiska lösningarna kan man urskilja två olika förfaringssätt: estimering och beräkning.

När eleverna vid problemlösningen i fas två (Berättelseproblem med aritmetiskt innehåll) inriktar sig mot ett matematiskt innehåll i problemen, fokuser de tal och räkneoperationer i problemen. De kan även inrikta sig mot att relatera dessa innehållsliga delar. Det framkommer att eleverna har olika intention eller mål vid problemlösningen, vilket uttrycks i termer av att eleverna har en produkt- eller en processintention. När eleverna har en produktintention är de huvudsakligen inriktade mot att ge ett svar på det givna problemet medan när de har en processintention är de inriktade mot att söka ett svar på problemet.

I fas tre (Numeriska uträkningar som införlivas i elevernas berättelser) finns två huvudkategorier: dels lösningar som inte ger en beskrivning av den givna uträkningen, dels lösningar som beskriver uträkningen. Vid de lösningar som inte beskriver uträkningen, är eleverna inriktade mot tal och räknesätt i uträkningen. Vid de lösningar som ger en beskrivning av uträkningen ser eleverna en relation mellan de matematiska symbolerna och de händelser som beskrivs i ord.

I fas fyra (Berättelseproblem med uppskattning) framkommer hur eleverna på varierande sätt ser teman och aspekter av teman i problemen. Liksom i fas två visar det sig i denna fas att eleverna vid problemlösningen har en produkt- eller processintention.

I fas fem (Benämnda uppgifter) bygger analysen av problemen på resultaten från de tidigare faserna. Eleverna uppfattar teman samt aspekter av teman, tal och räkneoperation i problemen och relaterar på skilda sätt problemens innehållsliga delar. Beskrivningen av elevernas uppfattningar av problemen i fas fem är direkt knutna till de två första problemen. Om elevernas uppfattningar av samtliga fyra problem medtagits i beskrivningen skulle antalet beskrivningskategorier bli fler och ett mer differentierat och komplext mönster av hur eleverna relaterar problemens olika innehållsliga delar skulle framträda. Strukturen på beskrivningarna av elevernas uppfattningar av problemens innehåll skulle däremot inte förändras. Denna ökande komplexitet som framkommer vid analysen, när eleverna löser problem med varierande innehåll, beror på att lösningsprocessen är kontextberoende av de presenterade problemens innehåll och formulering.

BESKRIVNINGSKATEGORIERNAS VALIDITET OCH RELIABILITET

Som nämnts tidigare i kapitel tre brukar reliabiliteten i fenomenografiska studier prövas genom att en medbedömare tar del av det empiriska materialet och identifierar och fördelar de beskrivna uppfattningar över de av forskaren framtagna kategorierna. Överenstämmelsen mellan forskarens och medbedömarens kategoriseringar beräknas. Det empiriska materialet i denna studie har resulterat i ett stort antal olika beskrivningskategorier vilket medför att det inte är möjligt att låta en medbedömare kontrollera resultatens reliabilitet i samtliga kategorisystem. De kategorier som beskriver variationen i elevernas uppfattningar av de två första problemen i fas fem som redovisades ovan har emellertid prövats av en medbedömare. Medbedömaren har haft tillgång till de kategorier som beskriver elevernas uppfattningar av problem ett och två. Med intervjuerna som underlag har medbedömaren klassificerat in de uppfattningar som hon identifierat i intervjuerna i de sex befintliga beskrivningskategorierna. I problem ett förekommer skilda kategoriseringen vid två tillfällen. Dessutom finns en avvikelse i kategoriseringarna därigenom att medbedömaren inte identifierat och därmed inte klassificerat in tre uppfattningar. I problem två förekommer skilda kategoriseringar vid ett tillfälle. I detta problem har medbedömaren identifierat samtliga kategoriserade uppfattningar. Av de sammanlagt 43 kategoriseringar som gjorts har 37 kategoriseringar gjorts på identiskt lika sätt. Överenstämmelsen mellan de båda kategoriseringarna är 77 % i problem ett och 95 % i problem två, vilket medför en genomsnittlig överenstämmelse med 86 %.

Den genomförda reliabilitetsprövningen gäller en mindre del av de framtagna kategorisystemen och tar inte upp frågeställningen i vilken utsträckning kategorierna återspeglar meningsinnehållet i det empiriska materialet. Reliabiliteten och validiteten för resultaten som helhet måste därför bedömas utifrån kategorisystemens kommunikativa validitet, dvs om resultaten kan anses trovärdiga genom att grunderna för den genomförda forskningen redovisats, om den genomförda argumentationen synliggjort kategorisystemens legitimitet och om resultaten är igenkännbara och förståliga för läsaren.

Kapitel 10

FÖRSTÅELSE AV PROBLEMLÖSNING I EN SKOLKONTEXT

Den bild av elevernas förståelse av problemlösning som tecknas i detta kapitel tar sin utgångspunkt i de resultat som tidigare redovisats från elevernas problemlösning i klassrums- och intervjustudien. I klassrumsstudien är det inte undervisningen i vid bemärkelse som är forskningsobjektet, utan det är elevernas skilda förfaringssätt vid problemlösningen som har studerats. Händelserna i klassrummet, elevernas och lärarnas synpunkter på den genomförda undervisningen samt elevernas enskilda problemlösningsförsök har analyserats i ett försök att utgå från elevernas perspektiv och blottlägga hur de erfar, förstår och uppfattar aritmetisk problemlösning och aritmetiska problem. Även i intervjustudien var avsikten att fånga elevernas förståelse och uppfattning av de presenterade problemen med utgångspunkt från deras förfaringssätt vid problemlösningen. I detta kapitel presenteras en övergripande och sammanfattande bild av elevernas förståelse av aritmetisk problemlösning.

När elever löser problem är det inte enbart kognitiva faktorer och elevernas färdigheter som är avgörande för hur problemlösningsprocessen utvecklas. Elevernas erfarenheter av tidigare matematikundervisning, deras attityder och emotioner samt den situation i vilken problemlösningen utföres, har stor inverkan på hur problemlösningsprocessen utvecklas. Även om eleverna skall lösa ett problem av en typ som de aldrig tidigare mött, finns ett igenkännande av problemet och av problemlösningssituationen, därigenom att elevernas upplevelser från tidigare problemlösningssituationer framstår för deras medvetande och ligger till grund för den innebörd de tillskriver problemet.

I problemlösningssituationen är samtliga elever medvetna om att det finns ett problem som de förväntas lösa, och de riktar sig mot det givna problemet på skilda sätt. En likartad situation kan vara det sätt på vilket publiken på en teater riktar sig mot en teaterföreställning. Människorna är medveten om teatern, att där finns bänkar, ridå, andra människor samt att en föreställning pågår. Den del av publiken som upplever föreställningen som intressant inriktar sig mot den och identifierar sig med skeendet och

innehållet. De "glömmer" att de är på teater, trots att de är medvetna om att de betraktar ett skådespel. Andra i publiken upplever kanske inte föreställningen som intressant eller roande. De fängslas då inte av skådespelet, utan riktar sig istället mot något annat i teatersalongen. De kanske iakttar varandra eller tänker på andra saker. Människorna upplever skådespelet på olika sätt, och föreställningen framstår i olika skikt av människornas medvetande. För att föreställningen skall förstås, måste människorna i publiken emellertid rikta sig mot innehållet och inte huvudsakligen vara medvetna om någonting annat. På liknande sätt förhåller det sig med undervisningssituationer i aritmetisk problemlösning i skolan, där eleverna förväntas avgränsa de givna problemen mot sitt sammanhang och rikta sig mot innehållet.

När en elev skall lösa ett problem, tillskriver hon problemet en innebörd och en mening som framkommer genom att eleven i den aktuella situationen igenkänner sina tidigare upplevelser av problemlösningssituationer i skolan. Denna förståelse innefattar emotioner och attityder och är relaterad till situationen där problemlösningen utföres. Eleven tillskriver emellertid även problemet en innebörd som är relaterad till det specifika problemets innehåll, vilket medför att elevens förståelse av ett givet problem är relaterad både till förståelsen av aritmetisk problemlösning, dvs hur det givna problemet framstår för eleven i den specifika problemlösningssituationen, och till hur eleven förstår problemet när hon är inriktad mot det givna problemets aritmetiska innehåll. Av det empiriska materialet framkommer att elevens förståelse av aritmetiska problem uppkommer i en relation mellan eleven och ett givet problem, och visar sig i elevens förhållningssätt, inriktning och uppfattning. Med utgångspunkt i relationen mellan eleven och aritmetisk problemlösning skall vi i det följande närmare studera elevernas problemlösning i intervju- och klassrumssituationerna.

FÖRHÅLLNINGSSÄTT TILL PROBLEMLÖSNING

Eleverna bär i problemlösningsituationen med sig en mängd tidigare erfarenheter av matematisk problemlösning. Tidigare lyckosamma problemlösningsförsök i undervisningssituationer stärker elevens målinriktning och självförtroende och i motsvarande grad försvagar tidigare misslyckanden elevens tro på sig själv och sin förmåga att lyckas. Elevernas tidigare erfarenhet

av problemlösning skapar således emotioner och attityder som påverkar problemlösningsprocessen. Detta medför att eleverna när de löser ett problem har en förförståelse av problemet som är inte enbart är relaterad till det presenterade problemet utan även till den kontext i vilken problemlösningen utföres. Elevernas förståelse av ett problem med avseende på hur problemet framstår för dem i den speciella situation där de utför problemlösningen ges i denna framställning benämningen förhållningsätt. Vid analysen och tolkningen av de studerade undervisningssituationerna och av intervjuerna framkommer att eleverna har två olika förhållningssätt: dels ett förgivettaget förhållningssätt, dels ett öppet förhållningssätt.

Förgivettaget förhållningssätt

Ett förgivettaget förhållningssättet till artimetisk problemlösning framkommer ibland i problemlösningens inledningsskede. När eleverna skall inleda problemlösningen riktar de sig mot något annat än det givna problemet. Vid intervjuerna inträffar det att några få elever innan de läst igenom det aktuella problemet säger att de inte kan lösa problemet eller att det är för svårt. Det tycks som om dessa elever, redan innan de har inlett problemlösningen, har bestämt sig för att de inte kan eller vill engagera sig i något problemlösningsförsök. Vid dessa tillfällen inträffar att eleverna fokuserar sin egen upplevda problemlösningsförmåga. Deras möjligheter att lösa problemet och deras matematiska kompetens framstår då i deras medvetande vilket motverkar en inriktning mot problemens innehåll. Det händer även att eleverna istället för att försöka lösa problemet samtalar om händelser och företeelser som de själva har upplevt eller som ska hända, t ex att de varit hos tandläkaren eller att de skall ha kalas. Vid andra tillfällen kan eleverna i problemlösningssituationen rikta sig mot sina klasskamraterna och ställa frågor om kamraterna får utföra samma sak som de själva.

De elever som när de skall inleda problemlösningsförsöken direkt uttalar att de inte kan lösa problemet, att de är trötta, eller tycker att problemet är svårt och som inte gör några ansatser för att självständigt påbörja problemlösningen har inte någon avsikt med problemlösningen. Deras mål i problemlösningsituationen är inte relaterad till det presenterade problemets innehåll, utan till hur de upplever problemlösningssituationen. De undviker att engagera sig i ett problemlösningsförsök, och det är troligt att deras målsättning

eller intention i den aktuella situationen är att fortast möjligt få byta aktivitet.

I de allra flesta fall har emellertid eleverna i problemlösningssituationen en intention som är relaterad till det givna problemet. Den är inte är uttalad, men framkommer i elevernas förfaringssätt vid problemlösningen. Vid tolkningen av elevernas förfaringssätt i fas två och fyra framkom att eleverna hade två skilda intentioner vid problemlösningen. Några elever hade en produktintention och var inriktade mot att ge ett svar på problemet, medan andra hade en processintention och var inriktade mot att söka ett svar (se fig 9.1 s 221 och 9.3 s 235). Elevernas intention påverkar det sätt på vilket de riktar sig mot problemens innehåll och har betydelse för hur problemlösningsprocessen utvecklas.

De elever som har ett förgivettaget förhållningssätt har en produktintention. Vid problemlösningen framkommer intentionen att ge ett lösning på problemet genom att eleverna estimerar ett svar som inte har någon anknytning till problemens aritmetiska innehåll. Även vid de tillfällen när eleverna utför beräkningar vid problemlösningen kan de ha en produktintention vilket visar sig genom att eleverna fokuserar tal och räkneoperationer i problemet och är inriktade mot att utföra en aritmetisk operation. De inriktar sig emellertid inte mot problemets övriga aritmetiska innehåll och relaterar inte problemets innehållsliga delar.

Elevernas olika intention med arbetet framkommer även när de ritar bilder och skriver berättelser. Vid bildframställningen kan en elev vid ett problemlösningstillfällen rita en bild utan att fördjupa och utvidga bildens innehåll. Vid ett annat tillfälle kan samma elev arbeta länge med sin teckning och rita mycket omsorgsfulla och innehållsrika teckningar. Vid det första tillfället när eleven ritar en bild utan att fördjupa och utvidga innehållet framkommer att elevernas huvudsakliga intention i problemlösningssituationen är att framställa en produkt. Eleven har då ett förgivettaget förhållningssätt som kommer till synes genom att eleven producerar en teckning utan att fördjupa sig i bildframställningen. Eleven ritar för att den förelagda uppgiften skall bli genomförd och har inte någon ambition att fördjupa eller utveckla sin teckning. Det förgivettagna förhållningssättet framkommer även när eleverna skriver berättelser. Eleverna skriver då kortfattat, utan att fördjupa och utvidga problemens innehåll, och deras intention är att redovisa ett resultat, att framställa en produkt eller ge ett svar som visar att man försökt lösa det givna problemet.

Elevernas tidigare erfarenheter av problemlösning i skolan blir synliga i deras förhållningssätt i problemlösningssituationen. När eleverna har ett förgivettaget förhållningssätt är deras huvudsakliga intresse vid problemlösningen att ge ett svar på problemen. Denna produktintention visar sig i att de fokuserar en eller några innehållsliga delar av problemen och använder ett välkänt räknesätt för att lösa problemet. De ställer inte hypoteser och prövar inte olika lösningsalternativ, som skulle medföra att problemlösningsförsöken utvecklas, utan problemlösningsprocessen fortgår efter ett bestämt handlingsmönster och har stelnat i bestämda former.

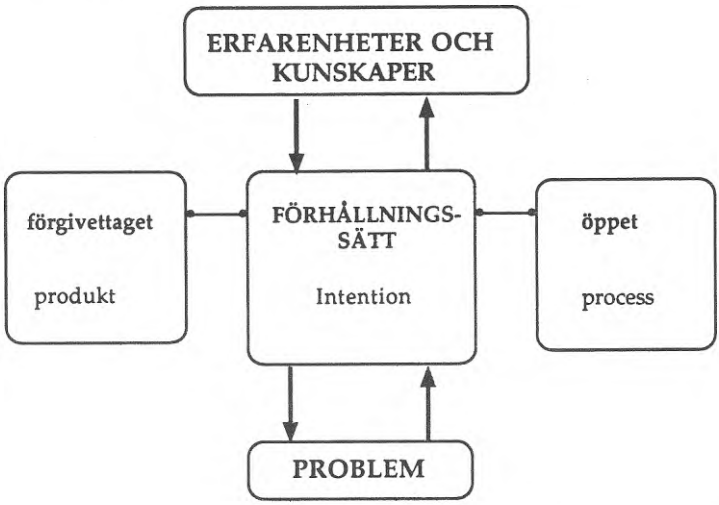
Öppet förhållningssätt

När eleverna har ett öppet förhållningssätt till problemlösningen visar sig detta vid såväl problemlösningens inledningsskede som när eleverna är engagerade i att försöka lösa problemen. Eleverna inriktar sig inledningsvis huvudsakligen mot det presenterade problemet och inte mot något annat i problemlösningssituationen. De inleder inte problemlösningsförsöket med att säga att de inte kan eller att problemet är för svårt. Eleverna gör således inte en omedelbar bedömning av problemet på grundval av vad de direkt varseblir av problemens innehåll. När eleverna har ett öppet förhållningssätt har de en processintention som visar sig i att de fångas av problemlösningsprocessen och inte huvudsakligen är inriktade mot att ge ett svar på problemen.

Det inträffar att eleverna påbörjar problemlösningen omedelbart, men det händer även att de tänker en stund innan de inleder sina lösningsförsök. I intervjusituationen utvecklar eleven lösningsprocessen på egen hand och de arbetar ibland självständigt under lång tid med sin lösning. När eleverna skriver berättelser i klassrumsstudien fördjupar och utvidgar de problemens aritmetiska innehåll och relaterar sina texter till problemets frågeställning. Även när eleverna ritar bilder, kan de fördjupa och utvidga bildernas innehåll. De elever som har ett öppet förhållningssätt avslutar inte genast lösningsförsöken om de möter svårigheter. Eleverna inriktar sig istället mot problemets innehåll, och söker andra vägar och nya infallsvinklar för att lösa problemet. Som redovisades i kapitel åtta byter eleverna ibland framställningssätt och övergår från att använda talsymboler till att rita en bild eller teckna index. Eleverna söker samband, ställer hypoteser, och relaterar problemets olika innehållsliga delar. Problemlösningsprocessen blir då ett mål i sig och utvecklas inte efter ett förbestämt

handlingsmönster, utan eleverna varierar under lösningsprocessens fortskridande sitt perspektiv på problemet.

Elevernas erfarenheter och kunskaper påverkar deras förhållningssätt till problemlösningen och det givna problemet. I motsatt riktning påverkar emellertid även innehållet i det givna problemet deras förhållningssätt, samt även deras erfarenheter och kunskaper. Detta kan visas med en schematisk bild.



Figur 10.1. *Elevernas förhållningssätt till problemlösning i en skolkontext*

PROBLEMINRIKTNING

Tolkningen av elevernas uppfattningar av problemen i de olika problemfaserna har tidigare redovisats i form av innehållsrelaterade beskrivningskategorier. Den specifika problemtypens formulering, innehåll och matematiska struktur påverkar elevernas sätt att inrikta sig mot problemen, vilket medför att elevernas skilda uppfattningar framkommer i varierande utsträckning beroende på problemens karaktär.

Analysen och tolkningen av hur eleverna uppfattar de givna problemen kan emellertid utvidgas från att gälla en problemtyp till

att på ett övergripande plan omfatta samtliga typer av problem vilket synliggör elevernas probleminriktning. Som det framkommer av det empiriska materialet är elevernas probleminriktning eller inriktning mot det aritmetiska innehållet i de presenterade problemen anknuten till förhållningssättet och kan indelas i fyra kategorier: operandinrikning, procedurinriktning, hypotesinriktning och gestaltinriktning.

Operandinriktning

I den tidigare redovisade kategoriseringen av elevernas uppfattningar av problemen i fas två till fem kartlades de olika sätt på vilka eleverna vid problemlösningen på skilda sätt fokuserade och relaterade problemens aritmetiska innehåll. I faserna två, tre och fem framkom att eleverna när de löste problemen ibland fokuserade de tal som förekom i de presenterade problemen. När eleverna fokuserar talen i problemen har de en operandinriktning. De estimerar då ett svar som inte relateras till problemens övriga aritmetiska innehåll och tar då tal som utgångspunkt vid lösningen.

Det inträffar att eleverna ibland nämner tal som inte förekommer i det presenterade problemet (se kat 1.1 fas två s 217). Eleverna utgår från sin egen erfarenhet och relaterar problemets innehåll till hur de själva skulle ha agerat i en liknande situation. Det är emellertid vanligast att eleverna fokuserar ett av de tal som nämns i problemen.

Gunilla (Problem 5.1: Barnen får räkneböcker och skrivböcker)

I. Hur många böcker delar hon ut?
G. Hur många var det? ... 19?
I. Hmm 19.
G. ....
I. Kan man ta reda på det?
G. 19.
I. Varför det?
G. Det var 19 barn så hade hon böcker så delar hon ut dom till varje barn ... så blir det 19 böcker.

Även när eleverna skriver texter estimerar de ibland ett svar utan att anknyta sin lösning till problemets övriga innehåll och utveckla lösningsförslaget.

Valter skriver (Problem 4.1: Försäljning av blommor)

Jag tycker dom ska ta 80 kr och 50 öre.

Eleverna kan i sina texter nämna några eller samtliga tal som ingår i det presenterade problemet utan att relatera dem till problemets övriga aritmetiska innehåll.

Roland skriver (Problem 3.2: 180-78=102)

> Peter skickar ett brev till sin kompis som bor i Stockholm och så här lyder Peters brev. Jag vill komma till dig på sommarlovet. Så börjar Peter att packa ner 78 stycken tröjor kortärmade och 180 st kalsonger och 102 st strumpor.

När eleverna har en operandinriktning har de ett förgivettaget förhållningsätt till problemlösningen som pekar ut riktningen för problemlösningsprocessens utveckling. Eleverna har uppfattningen att aritmetisk problemlösning i första hand innebär att man skall ge ett numeriskt svar på problemet. Vid problemlösningen inriktar de sig därför mot tal utan att relatera dem till problemens övriga matematiska innehåll.

Procedurinriktning

Vid kategorisering av elevernas uppfattningar av problemen i de olika faserna framkom att elever ibland fokuserade de räknesätt som förekom i problemen. För att komma fram till en lösning på det givna problemet inriktade sig eleverna mot att utföra en räkneoperation utan att relatera sin beräkning till problemets övriga aritmetiska innehåll. Elever som är inriktade mot att utföra procedurer och räkneoperationer när de löser problem har en procedurinriktning.

I intervjusituationen inträffar att eleverna redan vid problemlösningsprocessens inledning är inriktade mot att använda en välkänd räkneoperation för att lösa problemet och frågar då om det är plus eller om man skall "plussa". För att lösa problemet använder eleverna tal i olika beräkningar, och använder då ett välkänt räknesätt och gör oftast enkla numeriska beräkningar.

Ove (Problem 5.2: Bord i klassrummet)

> I. Hur många barn är det i klassen?
>
> O. Ja.. 4+3 ... Det är 7... så är det väl 7 barn i klassen.

Elevernas beräkningar kan ibland vara något mer omfattande.

Helen (Problem 5.2: Bord i klassrummet)

> I. Hur många barn är det i klassen?
>
> K. Hmmm.
>
> I. Kan du tänka dig något sätt man kan räkna ut det?
>
> K. Plus.

I. Hur gör du nu?

K. 24 barn är dom i klassen.

I. Hur fick du fram det?

K. Räknade... 4 sex gånger. Jag räknade 4 8 12 16 20 24.

Även i elevernas berättelser kan en räkneoperation tas som utgångpunkt för problemlösningen och det inträffar att eleverna utför mer komplicerade beräkningar.

Lena skriver (Problem 3.1: 18+7=25)

> Hur många äpplen fick du ihop? sa Lena. 12 och en halv, sa Per. Samma här sa Lena. Men hur många blir det tillsammans sa Lena. 25, sa Per. Hur vet du det? För tolv och en halv plus 12 och en halv är 25. Då måste det vara så sa Lena.

De elever som har en procedurinriktning har ett förgivettaget förhållningssätt till hur problemlösningen skall gestalta sig och deras intresse riktat mot att ge ett svar på problemet. Vid problemlösningen inriktar de sig mot tal och räknesätt i problemen vilka emellertid inte relateras till problemens övriga aritmetiska innehåll. Eleverna har uppfattningen att problemlösning innebär att man skall utföra en aritmetisk operation som leder fram till ett numeriskt svar. När de löser aritmetiska problem, upprepar de ett bestämt handlingsmönster vilket medför att det inte finns utrymme för att ställa hypoteser, pröva olika lösningssätt och försöka se problemet från olika perspektiv.

Hypotesinriktning

Den tidigare analysen av hur eleverna uppfattade problemen i problemsekvensen visade att eleverna även inriktade sig mot att relatera det presenterade problemets olika innehållsliga delar. När eleverna relaterar det aritmetiska innehållet i problemen har de en hypotesinriktning. De söker ett svar på problemen genom att ställa hypoteser, försöka se samband mellan problemens olika innehållsliga delar och relatera de givna talen till problemens innehåll. Eleverna utför räkneoperationer med de tal som förekommer i problemen. Talen och räkneoperationerna är emellertid inte de enda verktyg som eleverna använder för att lösa problemet, utan eleverna reflekterar över probleminnehållet. Vid den tidigare redovisade analysen av elevernas uppfattningar av problemen i fas fem framkom att några elever fokuserade tema och aspekter av teman i problemen varvid de uppfattade en aritmetisk struktur i problemen. När eleverna har en hypotesinriktning inriktar de sig mot problemens innehållsliga delar och relaterar

dem. Eleverna relaterar emellertid inte de tal som är givna till respektive tema eller aspekter av teman.

Johanna (Problem 5.2: Bord i klassrummet)

J. Det var ju 6 runda bord och så satt det 3 på ett bord och så var det 4 på dom andra runda borden ... eller ... 19 blir det.

I. Jaha. Hur fick du 19 då?

J. ... På dom 4 borden satt det ju 4 stycken barn .. två fyror ... och två fyror från dom andra borden ... det blir ju 16 ... och så satt det 3 på det andra ... det blir 19.

En hypotesinriktning framkommer tydligast i problemtyperna två och fyra. Innehållet och formuleringen av dessa problem styr eleverna i riktning mot att ställa hypoteser och relatera problemens innehåll i större utsträckning än problemen i de övriga faserna. I problemen i fas fem blir det inte lika tydligt att eleverna ställer hypoteser och ser problemen ur olika perspektiv som vid lösningen av problemen i fas två och fyra. Marie framlägger olika lösningsalternativ.

Marie (Problem 2.2: Ballonger på kalaset)

J. Ett barn fick kanske en ballong. Det fanns ju bara ... hon skulle bjuda tio och dom skulle ha en stor och en liten, kanske en bara fick en liten ... eller någon fick två stora, då blir det ju 10 av dom. Eller ... om det inte kom precis 10 så räcker det. Det kanske bara kom 8 barn ... Eller så kanske dom hade andra ballonger, eller hittade några ballonger till någon annanstans.

Johanna (Problem 2.2: Ballonger på kalaset)

J. Man ska köpa två små, nej inte två små utan fyra små, för om man räknar Lena och Per också ... tio av sina klasskamrater också ... plus 2. Dom behöver inte köpa några stora för dom hade 12 stora.

När eleverna är hypotesinriktade är deras intresse riktat mot att söka ett svar på det givna problemet genom att relatera problemens innehållsliga delar. De har ett öppet förhållningssätt till problemlösningen och deras problemlösningsförsök utvecklas inte efter ett bestämt mönster. Eleverna har inte föreställningen att problemlösning enbart handlar om att utföra en aritmetisk operation eller att ge ett numeriskt svar utan de reflekterar över problemens innehåll och inriktar sig mot problemens aritmetiska innehåll.

Gestaltinriktning

Vid analysen av problemen i fas fem framkom att eleverna vid problemlösningen på skilda sätt inriktade sig mot och relaterade problemets aritmetiska innehåll. Eleverna har en gestaltinriktning

när de inriktar sig mot problemets olika innehållsliga delar, uppfattar olika aspekter av problemen samt relaterar de tal som är givna i problemet till aspekterna. För att eleverna skall lösa problemet helt korrekt, måste de inrikta sig mot samtliga innehållsliga delar i problemet och se deras inbördes relation. Det inträffar emellertid att de elever som har en gestaltinriktning inte relaterar tal och räkneoperation, vilket innebär att de gör räknefel. Om eleverna har svårigheter med de numeriska beräkningar vid problemlösningen medför detta att eleverna trots att de fokuserar problemens samtliga innehållsliga delar inte kommer fram till rätt lösning på problemet.

Kristian (Problem 5.1: Barnen får räkneböcker och skrivböcker)

K. ... (*tänker länge*) ... 64 stycken böcker delade hon ut.

I. Hur fick du fram det?

K. Jag räknade tre på varje finger så tog jag fram nitton fingrar. Så fick jag ihop det till 64 stycken.

Viveka (Problem 5.4: Per diskar)

V. Mmm ... 16 + 16 är 32 och 50 öre ... 33. Han måste diska dubbelt så mycket för 16 och en gång för 50-öringen. ... Om han har fått en 50-öring behöver han diska 32 gånger.

I de berättelser eleverna skriver kan de utvidga problemet. Eleverna går då utanför den givna informationen i problemet och talen ses som relativa storheter som kan omgestaltas.

Henrik skriver (Problem 3.1: 18+7=25)

...Vi går och spelar ping-pong. Vi träffas vid båthuset sa Magnus. Jag har med mina 18 bollar och jag har med mig 6 bollar säger Göran. Det blir 24. Oj här hittade jag en boll så att det blir 25 säger Göran.

Monika skriver (Problem 4.1: Försäljning av blommor)

Varje barn hade planterat två plantor var. Dom var 24 i klassen. Då får dom 48 plantor. Dom tar 5 kronor för varje blomma. Nu har dom 240 kr. Dom har för hela klassen till bussen för det kostar 10 kronor för varje barn. Det kostar 5 kronor i entré. Dom behöver 120 kronor till. Sen kom fröken på att vi kunde göra tidningar. Dom fick ihop 28 st dom kostar 5 kronor st. Nu har dom 380 kronor. Det räcker.

När eleverna har en gestaltinriktning är deras intresse riktat mot att söka ett svar på problemet. Vid problemlösningen inriktar de sig mot problemens innehåll och relaterar problemens olika innehållsliga delar. Eleverna har ett öppet förhållningssätt till problemlösning och har inte föreställningen att problemlösning enbart handlar om att utföra en aritmetisk operation som skall leda fram till ett numeriskt svar. De försöker förstå problemet och de kan variera sitt perspektiv på de givna problemen och pröva olika

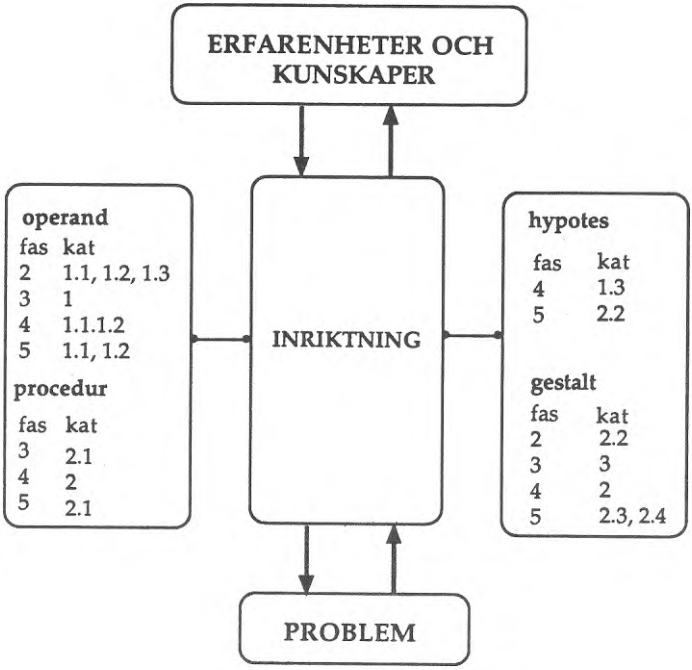
lösningssätt. De ser samband mellan problemets olika innehållsliga delar och i motsats till de elever som har en hypotesinriktning relaterar de givna talen till respektive teman och aspekter av teman i problemen.

Sammanfattning

När eleverna har ett förgivettaget förhållningssätt till problemlösning har de en operand- eller procedurinriktning. I andra fall då eleverna har ett öppet förhållningssätt till problemlösning har de en hypotes- eller gestaltinriktning.

- *Operandinriktning*: Eleverna inriktar sig vid problemlösningen mot tal och utgår från dem vid problemlösningen. De estimerar ett numeriskt svar på problemen och utför inte några beräkningar.
- *Procedurinrikning*: Eleverna inriktar sig mot tal och räknesätt vid problemlösningen och utför en räkneoperation för att komma fram till en lösning på problemet.
- *Hypotesinriktning*: Eleverna fokuserar inte enbart tal och räknesätt i problemen, utan inriktar sig även mot problemens övriga innehållsliga delar och relaterar dem. Eleverna relaterar emellertid inte de tal som är givna med problemens olika teman och aspekter av tema.
- *Gestaltinriktning*: Eleverna inriktar sig mot problemens samtliga innehållsliga delar och relaterar dem.

Elevernas probleminriktning påverkas av elevernas erfarenheter och kunskaper och det givna problemets innehåll. I de olika problemlösningsfaserna framkommer elevernas skilda sätt att inrikta sig mot probleminnehållet med olika tydlighet beroende på problemens formulering och innehåll. I varje enskild fas av problem återfinns därför inte samtliga probleminriktningar. I följande schematiska bild visas hur de innehållsrelaterade beskrivningskategorierna, som framkommit vid analysen av problemen i de olika faserna, kan införlivas i de skilda inriktningarna.



Figur 10.2. *Schematisk bild av elevernas skilda probleminriktning med respektive beskrivningskategorier*

UPPFATTNINGAR AV ARITMETISKA PROBLEM

Den genomförda analysen och tolkningen av elevernas förfaringssätt vid problemlösningen i de olka faserna resulterade i en kartläggning av elevernas kvalitativt skilda uppfattningar av de olika problemtyperna. Elevernas uppfattningar kategoriserades i de innehållsrelaterade beskrivningskategorier som tidigare redovisats för varje typ av problem.

En jämförande analys av beskrivningskategorierna i samtliga faser visar att elevernas uppfattning av problemen är relaterad till probleminriktningen. När eleverna har en operand- eller procedurinrikting uppfattar de problemens ytstruktur vilket innebär

att de uppfattar problemens nivå och typ. Vid andra tillfällen då eleverna har en hypotes- eller gestaltinriktning uppfattar de problemens djupstruktur vilket innebär att de uppfattar relationer mellan problemens innehållsliga delar och även kan uppfatta problemens aritmetiska struktur.

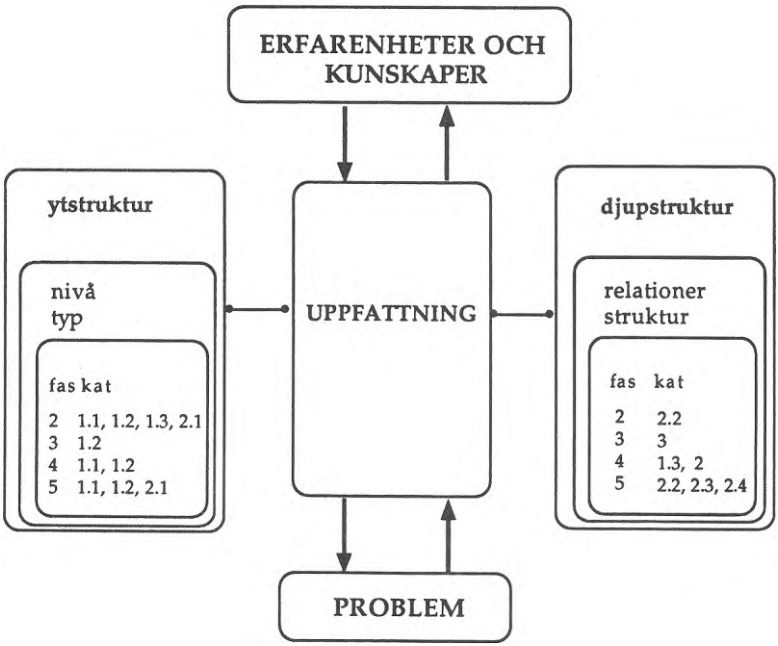
Vid de tillfällen då eleverna ser nivån på problemet uttrycks detta i form av dikotomier som t ex lätt-svårt, långt-kort och tråkigt-roligt. Eleverna uttalar att det är höga tal i det presenterade problemet, att problemet är svårt eller att det är för långt för att man skall kunna lösa det. När eleverna ser typen av problem uppmärksammar de t ex att det är ett skriftligt, verbalt problem, en uträkning eller en algoritm. Vid verbala problem uttalar sig eleverna om problemets innehåll och nämner exempelvis att problemet handlar om att "fröken delar ut böcker". Eleverna inriktar sig även mot räknesätt och uttalar att man skall "plussa" utan att relatera en eventuell beräkning till problemets övriga innehållsliga delar.

När eleverna ser problemets nivå och typ varseblir de problemets ytstruktur. De fokuserar tal och räknesätt i de givna problemen och tar dem som utgångspunkt vid problemlösningen. Därmot uppfattar de inte problemens djupstruktur eller inre struktur, eftersom denna inte kan ses utan måste upplevas och förstås. Eleverna löser problemen genom att tillämpa ett välkänt lösningssätt, som de använt vid tidigare tillfällen. Lösningsmetoden är förankrad i ett förgivettaget förhållningssätt till aritmetisk problemlösning och är inte relaterad till det det givna problemet. Eftersom eleverna löser problemen efter ett bestämt mönster blir frirummet för handling begränsat och därmed förhindras inlärningen och utvecklingen av elevernas matematiska problemlösningsförmåga.

När eleverna även ser relationer mellan problemets innehållsliga delar uppfattar de problemets djupstruktur. Eleverna har ett öppet förhållningsätt till problemets innehåll och söker svaret på det givna problemet genom att relatera och integrera dess olika innehållsliga delar, vilket innebär att de kan uppfatta problemets djupstruktur. När eleverna uppfattar djupstrukturen i problemet ökar handlingspotentialen och därav följer ökade möjligheter till inlärning samt utveckling av den matematiska problemlösningsförmågan.

De innehållsrelaterade beskrivningskategorier som blottlägger elevernas uppfattningar av de olika problemtyperna, kan kategoriseras med avseende på om de avser uppfattningar av de

givna problemens ytstruktur eller av problemens djupstruktur, vilket framkommer av följande schematiska bild.



Figur 10. 3. *Elevernas skilda uppfattningar av aritmetiska problem*

SAMMANFATTANDE BESKRIVNINGSMODELL

Problemlösning har beskrivits som en situationsbunden relation mellan elev och problem. Elevernas upplevelse och förståelse av problemlösning i en skolkontext har synliggjorts i deras förhållningssätt, inriktning och uppfattning. Eftersom problemlösning är en komplex aktivitet är det nödvändigt att differentiera och beskriva olika nivåer av det sätt på vilket eleverna erfar, förstår och uppfattar problemlösning. De skilda beskrivningsnivåerna skall emellertid inte ses som sekvenser, där den ena följer på den andra. Förhållningssätt, inriktning och uppfattning är varandra inneslutande, och i ett dialektiskt

förhållande synliggör de elevernas relation till aritmetisk problemlösning.

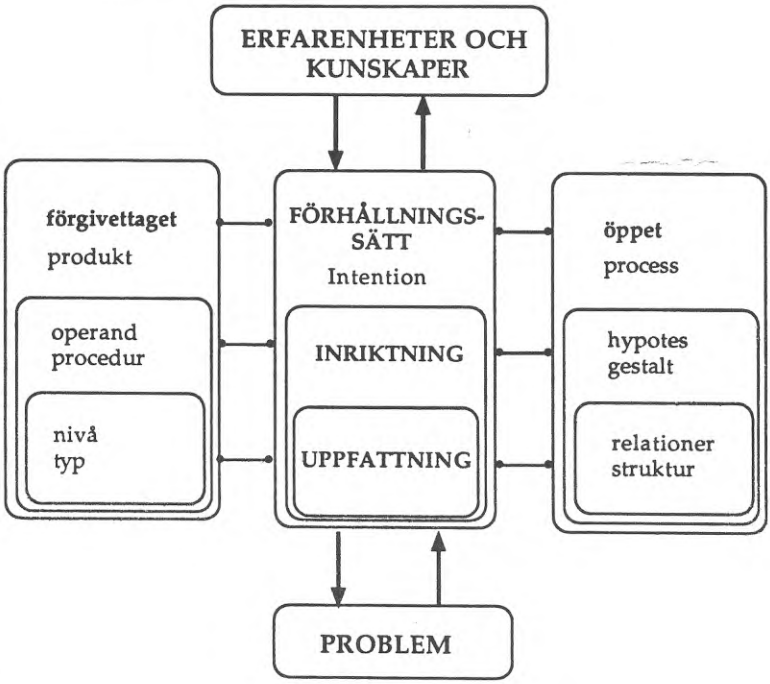
Samtliga elever är medvetna om att de befinner sig i en situation där ett problem ska lösas och har tidigare erfarenheter av problemlösning i en skolsituation. Om elevens erfarenheter inbegriper tidigare lyckosamma problemlösningsförsök stärker detta elevens målinriktning och självförtroende. I motsatt fall försvagar tidigare misslyckanden elevens tro på sig själv och sin förmåga att lyckas. Elevens tidigare erfarenhet av problemlösning, som i stor utsträckning innefattar emotionella och sociala aspekter, är avgörande för hur eleven i den aktuella situationen förhåller sig till de presenterade problemen.

Elevernas kan antingen ha ett förgivettaget förhållningssätt eller ett öppet förhållningssätt. De elever som har ett förgivettaget förhållningssätt har en produktintention vilket innebär att deras mål med problemlösningen huvudsakligen är att *ge ett svar* på det givna problemet. De elever som har ett öppet förhållningssätt har en processintention, och är huvudsakligen inriktade mot att *söka ett svar* på problemet.

Det sätt på vilket eleven inriktar sig mot de presenterade problemen påverkas av det språk som används i problemlösningssituationen, de handlingar som utförs samt problemens utformning och aritmetiska innehåll. Vid den övergripande analysen av samtliga presenterade problemtyper framkom att eleverna på skilda sätt inriktar sig mot problemens innehåll. Elevernas probleminriktning är relaterad till deras förhållningssätt. De elever som har ett förgivettaget förhållningssätt har en operand- eller procedurinriktning. Eleverna är då inriktade mot tal och räknesätt vid problemlösningen, varseblir problemens typ och nivå och uppfattar problemens ytstruktur.

När eleverna har ett öppet förhållningssätt, kan de ha en hypotes- eller gestaltinriktning. Dessa elever är inte huvudsakligen inriktade mot tal och räknesätt i problemen, utan mot problemets innehållsliga delar och mot att se deras inbördes relationer och de uppfattar då problemens djupstruktur.

De skilda sätt på vilka eleverna upplever, förstår och uppfattar aritmetiska problem samt aritmetisk problemlösning i en skolkontext kan visas i en sammanfattande beskrivningsmodell.



Figur 10.4. *Elevernas upplevelse och förståelse av aritmetiska problem i en skolkontext*

Det bör framhållas att det inte är eleverna i egenskap av individer som har kategoriserats utan det är elevernas skilda förfaringssätt och uppfattningar som framkom när eleverna löste de givna problemen som bildat utgångspunkt för analysen. En elev kan i problemlösningssituationen skifta förhållningssätt och övergå från ett förgivettaget förhållningssätt till ett öppet. Det finns en samtidighet i elevernas förhållningssätt, inriktning och uppfattning som innebär att de är varandra inneslutande. Som framkommer av beskrivningsmodellen kan eleverna exempelvis inte samtidigt ha ett förgivettaget förhållningssätt och en hypotesinriktning. Om elevens förhållningssätt till det givna problemet skiftar, kan det inträffa att eleven får en förändrad uppfattning av problemets innehåll, och i de fall elevernas uppfattning om problemet förändras är det möjligt att även elevernas förhållningssätt skiftar.

Kapitel 11

PROBLEMLÖSNINGENS DYNAMISKA KARAKTÄR

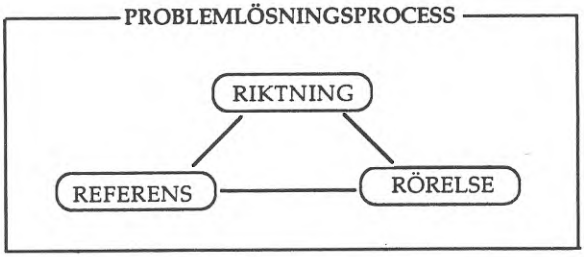
Resultaten av den fenomenografiska analysen har två dimensioner. Samtidigt som beskrivningskategorierna blottlägger elevernas uppfattningar av problemen i de olika faserna, ger kategorierna även en karakteristik av problemtyperna. Även i den övergripande beskrivningsmodellen (fig 10. 4) som synliggör elevernas relation till aritmetisk problemlösning återfinns denna tvåfaldighet. Modellen ger en beskrivning av elevernas upplevelse och förståelse av aritmetisk problemlösning samtidigt som den ger en karakteristik av innebörden i aritmetisk problemlösning.

Studierna av elevernas problemlösningsprocess i klassrummen och i intervjussituationerna visar att det sätt på vilket elevernas problemlösningsförsök utvecklas är beroende av deras samlade erfarenheter och kunskaper, deras tidigare upplevelser av problemlösningssituationen samt deras erfarenheter av den specifika typ av problem de ställs inför. När eleverna möter aritmetiska problem har de en diffus helhetsuppfattning av problemen som visar sig i att eleverna inledningsvis uppfattar problemen ytstruktur, dvs problemens typ och nivå. De ser exempelvis om det är ett benämnt tal eller en algoritm, de uppfattar om problemet är lätt eller svårt. Vid problemlösningsprocessens fortlöpande differentierar eleverna probleminnehållet och inriktar sig mot problemets olika innehållsliga delar, vilka relateras och integreras på skilda sätt, varvid eleverna i varierande utsträckning uppfattar problemens aritmetiska innehåll. Beskrivningen av elevernas problemlösningsprocess synliggör inte enbart hur eleverna uppfattar aritmetisk problemlösning utan karakteriserar även problemlösningsprocessen i sig och blottlägger den dynamik som varje problemlösningsprocess inrymmer. Det finns en inre strukturell dynamik i problemlösningsprocessen som framkommer när elevernas erfarenheter och kunskaper konfronteras med problemens innehåll och formulering. Problemlösningsprocessens dynamiska karaktär framkommer med ökad tydlighet när eleverna möter olika problem eftersom problemens varierande formulering och aritmetiska innehåll påverkar elevernas sätt att uppfatta

problemen och fokusera, relatera samt integrera det givna problemets aritmetiska innehåll.

PROBLEMLÖSNINGSPROCESSENS INRE STRUKTURELLA DYNAMIK

Vid en fördjupad analys av elevernas aritmetiska problemlösning kan ett mönster i elevernas tänkande urskiljas som synliggör problemlösningsprocessens beskaffenhet. Problemlösningsprocessen utmärkes av att den har en riktning, att eleverna refererar till olika innehållsliga delar av problemet, och att den innefattar en rörelse. *Riktning, referens och rörelse* är de komponenter som karakteriserar problemlösningsprocessens inre uppbyggnad och som i samverkan skapar dess strukturella dynamik. När eleverna löser aritmetiska problem är referens, riktning och rörelse ständigt närvarande i lösningsprocessen och utmärker i varierande utsträckning elevernas tänkande. De tre komponenterna blottlägger problemlösningsprocessens karaktär och är problemlösningsprocessens essens eller innersta kärna.



Figur 11.1. *Den dynamiska strukturen i en problemlösningsprocess*

Komponenterna är inbördes relaterade till varandra. De har emellertid inte en sekventiell ordning där den ena följer på den andra, istället har de ett dialektiskt förhållande. Problemlösningsprocessens strukturella dynamik karakteriseras såväl av relationen mellan riktning, referens och rörelse som av komponenterna i sig.

RIKTNING

Elevernas tidigare erfarenheter av aritmetisk problemlösning har en avgörande betydelse för hur problemlösningsprocessen utvecklas. Tidigare erfarenheter av aritmetisk problemlösning ger eleverna en yttre referensram, mot vilken de tolkar ett presenterat problem. Eleverna har en förförståelse av problemet, som innebär att de i en problemlösningssituation har en diffus, otydligt avgränsad helhetsuppfattning av problemet och en intuitiv känsla och förståelse av hur problemet ska lösas. Eleverna har även en inre referensram som utgörs av de skilda innehållsliga delar av problemet som eleverna refererar till vid problemlösningen. Det är i en samverkan mellan elevernas förförståelse av ett givet problem och de skilda sätt på vilket eleverna refererar till olika innehållsliga delar av problemet som den riktning vilken karakteriserar problemlösningsprocessen framkommer.

Redan i inledningsskedet av problemlösningen har eleverna olika intention vid problemlösningsförsöken. I den övergripande beskrivningsmodellen av elevernas förståelse av aritmetiska problem (se fig 10.4 s 267) kan vi se att elever med ett förgivettaget förhållningssätt har en produktintention, medan andra elever som har ett öppet förhållningssätt har en processintention. När eleverna har en produktintention är deras huvudsakliga mål vid problemlösningen att ge ett svar på problemet, medan målet för de elever som har en processintention är att söka ett svar på problemet. Problemlösningsprocessen betingas av elevernas intention. Det mål eleverna siktar mot i problemlösningssituationen får avgörande betydelse för deras tänkande och bestämmer problemlösningsprocessens riktning.

Beskrivningsmodellen visar också att eleverna har olika problem-inriktning när de löser aritmetiska problem. Elevernas probleminriktning avspeglar de skilda sätt på vilka eleverna inriktar sig mot det givna problemets aritmetiska innehåll. De elever som har en operand- eller procedurinriktning har en produktintention medan de elever som har en hypotes- eller gestaltinriktning har en processintention.

För de elever som har en operandinriktning är intentionen att *ge ett svar* på det presenterade problemet. Eleverna inriktar sig då vid problemlösningen huvudsakligen mot de tal som ingår i problemets aritmetiska innehåll och estimerar ett numeriskt svar. När eleverna har en operandinriktning är således deras tänkande inriktat mot talen i de givna problemen och riktningen i problemlösnings-processens vrids mot de tal som ingår i problemens aritmetiska

innehåll. Även de elever som har en procedurinriktning har intentionen att ge ett svar på problemet och de inriktar sig vid problemlösningen mot tal och räknesätt i problemet. Elevernas intention är i dessa fall att ge ett svar på de givna problemen genom att utföra en aritmetisk operation och problemlösningsprocessen riktas mot tal och räkneoperationer.

Eftersom de elever som har en operand- eller procedurinriktning inte fokuserar problemens samtliga innehållsliga delar, uppfattar de inte den varierande aritmetiska strukturen i givna problemen. Frirummet för handling blir därigenom begränsat och eleverna tenderar att lösa samtliga problem på likartat sätt. Elevernas handlingar upprepas vid varje problemlösningsstillfälle och problemlösningsprocessen utvecklas enligt ett fastställt handlingsmönster. När eleverna har en produktintention och är inriktade mot att framställa ett svar på problemet, vilket är fallet när de har en operand- och procedurinriktning, tar problemlösningsprocessen en bestämd och förutsägbar riktning mot tal och räkneoperationer.

De elever som har en hypotes- eller gestaltinriktning har intentionen att *söka ett svar* på det givna problemet. De inriktar sig då inte enbart mot de tal och räkneoperationer som ingår i problemets innehåll utan uppfattar även olika aspekter av problemens tema och inriktar sig mot att relatera problemets aritmetiska innehåll. I de fall då eleverna inriktar sig mot innehållsliga relationer i problemet är riktningen i problemlösningsprocessen inte bestämd på förhand utan avgörs av det specifika problemets aritmetiska innehåll och struktur.

När eleverna har en processintention, styrs problemlösningsprocessens framåtskridande av att eleverna relaterar problemets olika innehållsliga delar och reflekterar över problemets innehåll. Elevernas tidigare erfarenheter av problemlösning binder inte problemlösningsprocessen i ett förutbestämt handlingsmönster utan deras intuitiva känsla och förförståelse av problemet relateras till det givna problemets faktiska innehåll. När problemlösningsprocessen utvecklas i ett samspel mellan elevernas erfarenheter och problemens aritmetiska innehåll kan eleverna se problemet ur olika perspektiv. De kan ställa hypoteser och reflektera över det givna problemet, se alternativa handlingsmöjligheter och lösningssätt. Om problemlösningsprocessen kan utvecklas fritt och inte är fastlåst i ett på förhand givet handlingsmönster kan elevernas uppfattning av problemet förändras under lösningsprocessens fortskridande, vilket kan medföra att lösningsprocessen böjer av och tar en ny riktning.

Vid de tillfällen då eleverna har en produktintention får problemlösningsprocessen en annorlunda beskaffenhet än i de fall då eleverna har en processintention. När eleverna siktar mot att så snart som möjligt komma fram till ett svar på problemet, genom att avge ett numeriskt svar eller genom att utföra en räkneoperation, påverkas inte riktningen i problemlösningsprocessen i någon större utsträckning av de givna problemens innehåll. När eleverna däremot har siktet inställt mot att förstå problemet, och att söka ett svar genom att relatera problemets innehållsliga delar, anges riktningen i problemlösningsprocessen av problemets aritmetiska innehåll och struktur.

REFERENS

Eleverna har en allmän bakgrund av erfarenheter mot vilken de tolkar de givna problemen. Denna allmänna, yttre referensram bildar grund för elevernas förståelse och uppfattning av det givna problemet samt av aritmetisk problemlösning. Eleverna kan exempelvis när de löser ett problem tänka på tidigare problemlösningsförsök, och lyckosamma problemlösningsförsök eller tidigare misslyckanden kan framstå i deras medvetande och bilda deras referens vid problemlösningen. De kan referera till problem som de mött tidigare i skolundervisningen och utnyttja de lösningssätt som de då använt som modell för att lösa ett aktuellt problem. De kan även referera till hur de har löst liknande problem, när de ställts inför dem i sitt vardagsliv (se fas två kat 1.1).

Förutom en allmän referensram har eleverna dessutom en inre referensram vid problemlösningen. Den avgränsning som eleverna gör av ett specifikt probleminnehåll bildar denna inre referensram. Elevernas förförståelse av ett problem ger dem inledningsvis en diffus helhetsuppfattning av ett problem, och det är i denna otydligt avgränsade helhetsuppfattning av problemet som problemlösningsprocessens tar sin utgångspunkt och utvecklas i olika riktning. När eleverna möter ett problem differentierar de problemet genom att fokusera olika delar av probleminnehållet, och vid problemlösningen refererar eleverna till detta probleminnehåll. De skilda innehållsliga delar av problemet som framstår i elevernas medvetande och som de refererar till vid problemlösningen utgör elevernas inre referensram och bildar den grund mot vilken de tolkar och förstår problemet.

Elevernas tolkning av ett problem sker således i relation till två skikt, dels tolkas problemen mot bakgrund av elevernas yttre referensram, dels mot bakgrunden av en inre referensram som

utgörs av det givna problemets innehåll. Elevernas tolkning av problemet mot den referensram som deras allmänna erfarenheter bildar, betingar uppkomsten av den inre referensramen.

Analysen av elevernas förståelse av problemen i de olika faserna visade att eleverna vid problemlösningen fokuserade och refererade till skilda innehållsliga delar av problemen, vilket har beskrivits i termer av elevernas uppfattningar av de olika problemtyperna. Elevernas uppfattningar av de olika problemtyperna utvidgades därefter till att omfatta samtliga typer av problem. Detta synliggjorde elevernas probleminriktning (fig 10.2). De fyra skilda sätt på vilka eleverna inriktar sig mot problemets innehåll har benämnts operandinriktning, procedurinriktning, hypotesinriktning och gestaltinriktning.

- När eleverna har en operandinriktning fokuserar de tal vid problemlösningen. Talen utgör elevernas referens och bildar den inre referensram mot vilken de tolkar det givna problemet.
- De elever som har en procedurinriktning fokuserar förutom tal även räknesätt. Tal och räknesätt relateras och eleverna utför en räkneoperation. I de fall då tal och räkneoperationer är elevernas referenser i det givna problemet utgör dessa den inre referensram mot vilken eleverna tolkar problemet.
- När eleverna har en hypotesinriktning fokuserar de förutom tal och räknesätt även relationer i problemens innehåll. Eleverna fokuserar samtliga delar av problemen som är relevanta för en lösning, men de ser inte deras fullständiga inbördes relation. Vid en jämförelse med de elever som har en operand- eller procedurinriktning har dessa elever en utvidgad inre referensram mot vilken de tolkar det givna problemet.
- De elever som har en gestaltinriktning fokuserar samtliga innehållsliga delar av problemen som är relevanta för en lösning av problemen och relaterar dem. Elevernas inre referensram vid problemlösningen utgöres då av det givna problemets aritmetiska innehåll och struktur.

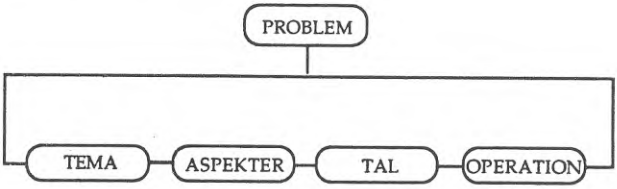
Det probleminnehåll som eleverna refererar till vid problemlösningen ger en beskrivning och karakteristik av problemlösningsprocessen. I de fall då tal och räknesätt utgör elevernas referenser i problemen, får problemlösningsprocessen en helt annorlunda beskaffenhet än om elevernas referenser i problemen utgöres av relationen mellan samtliga de innehållsliga delar i problemet som är relevanta för en lösning.

RÖRELSE

Problemlösningens dynamiska karaktär kännetecknas av att eleverna vid problemlösningen refererar till skilda innehållsliga delar av problemet samt att problemlösningsprocessen har en riktning. Elevernas referenser och lösningsprocessens riktning påverkar karaktären av den rörelse som är den tredje av de komponenter som kännetecknar problemlösningsprocessens strukturella dynamik. Elevernas tänkande vid problemlösningen karakteriseras av en rörelse som framkommer i det sätt på vilket eleverna differentierar, relaterar och integrerar de skilda innehållsliga delar av de givna problemen som de refererar till vid problemlösning.

Det är när eleven mot bakgrund av sina referensramar tolkar ett givet problem, genom att differentiera probleminnehållet, ta referenser i problemet och relatera och integrera referenserna till en sammanhängande enhet, som ett givet problem får en mening och innebörd för eleven.

Vid redovisningen av elevernas uppfattningar av problemen i den femte fasen gavs en beskrivning av det sätt på vilket eleverna differentierade det givna problemets innehåll och fokuserade skilda delar av probleminnehållet. För att synliggöra rörelsen i elevernas tänkande kan vi se på beskrivningskategorierna i fas fem där schematiska bilder visades över hur eleverna uppfattade problemen (fig 9.1-9.6). De innehållsliga delar av problemen som eleverna fokuserade och refererade till vid problemlösningen framkommer av nedanstående schematiska bild.



Figur 11.2. *De innehållsliga delar av problemen som elevernas refererade till i fas fem*

Eleverna fokuserade i varierande utsträckning problemens tema, aspekter av tema, tal och räkneoperationer i problemen. Vid

problemlösningen refererade eleverna till problemens innehållsliga delar och relaterade och integrerade dem på skilda sätt.

Det framkommer av de olika schematiska bilderna av elevernas uppfattningar i fas fem, att några elever enbart fokuserar tema och tal i problemen. När eleverna enbart refererar till tema och tal och relaterar dem vid problemlösningen uppfattar de att innebörden i aritmetisk problemlösning är att man ska ge ett numeriskt svar. Den rörelse som karakteriserar elevernas tänkande vid problemlösningsprocessen blir därmed begränsad och har ringa utsträckning.

Andra elever refererar till tema, tal och räkneoperation och relaterar dem när de löser problemet. I de fall då tema, tal och räkneoperationer är elevernas referenser i det givna problemet uppfattar eleverna att innebörden i problemlösning är att utföra räkneoperationer. Rörelsen som utmärker problemlösningsprocessen har även i dessa fall en begränsad utsträckning. Den är emellertid mer omfattande än den rörelse som karakteriserar lösningsprocessen när eleverna vid problemlösningen enbart refererar till tema och tal.

När eleverna förutom tema, tal och räkneoperationer även refererar till aspekter av problemens tema och relaterar dem, ges rörelsen i problemlösningsprocessen en vidgad utsträckning. För dessa elever är innebörden i problemlösningen inte enbart att ge ett numeriskt svar eller att utföra räkneoperationer, utan att relatera och integrera problemens skilda innehållsliga delar. Elevernas tänkande är då inte fastbundet i ett bestämt rörelseschema utan är flexibelt och problemlösningsprocessen karakteriseras av en vidare rörelse.

Under problemlösningens fortskridande händer det att eleverna tar nya refererenser i problemet eller att de uppmärksammar relationer mellan referenser som de inte tidigare varseblivit. Därigenom förändras omfattningen och karaktären av den rörelse som kännetecknar elevens tänkande vid problemlösningsprocessen. Den förändrade karaktären av rörelsen som är innesluten i problemlösningsprocessen kan medföra att problemets innehållsliga delar får en förändrad relation till varandra och att eleven därigenom får en förändrad uppfattning av problemet.

De skilda sätt på vilka eleverna differentierar, relaterar och integrerar problemens innehållsliga delar ger således en bild av hur den rörelse som karakteriserar problemlösningsprocessen är beskaffad. Rörelsen som karakteriserar elevernas tänkande vid problemlösningsprocessen kommer, liksom riktningen till uttryck i

elevernas förhållningssätt och intention. När eleverna har ett förgivettaget förhållningssätt till problemlösningen med en produktintention rör sig deras tänkande i bestämda banor och är fastbunden i ett bestämt rörelseschema. I de fall då eleverna har ett öppet förhållningsätt och en processintention kan de däremot variera sitt perspektiv på problemet och lösningsprocessen karakteriseras då av ett flexibelt rörelsemönster och en variation i rörelsen.

SAMMANFATTANDE RESULTATDISKUSSION

Den genomförda fenomenografiska analysen har varit inriktad mot att beskriva hur eleverna erfar, förstår och uppfattar olika typer av aritmetiska problem som de möter i en skolsituation. Elevernas problemlösning har studerats med intentionen att kartlägga den innebörd och mening de presenterade problemen har för eleverna, vilket resulterat i ett sammansatt mönster, en kartbild, över elevernas skilda förståelse av de givna problemen och aritmetisk problemlösning. Vid analysen och tolkningen har elevernas skilda sätt att förstå och uppfatta de givna problemen kategoriserats i skilda beskrivningskategorier och en övergripande bild av aritmetisk problemlösning har framkommit där problemlösning ses som en relation mellan elev och problem. Denna relation kommer till synes i elevernas förhållningssätt vid problemlösningen, deras probleminriktning samt deras uppfattningar av de skilda typerna av aritmetiska problem. Kartläggningen av hur eleverna erfar, förstår och uppfattar problemlösning ger emellertid samtidigt en karakteristik av problemlösningsprocessens beskaffenhet.

Problemlösningsprocessens inre strukturella karaktär kan beskrivas i termer av riktning, referens och rörelse. Dessa tre komponenter karakteriserar problemlösningsprocessen och kan betecknas som dess essens. När eleverna löser aritmetiska problem kännetecknas problemlösningsprocessen i varierande utsträckning av att processen har en riktning, referenser tas i problemet, och att en processen innefattar en rörelse. Riktning, referens, och rörelse har ett dialektiskt förhållande och karakteriserar inte lösningsprocessen i en sekventiell ordning.

Eleverna tolkar ett givet problem mot en yttre och inre referensram. Den yttre referensramen utgörs av elevernas samlade erfarenheter och den inre referensramen utgörs av det givna problemets innehåll. Denna tolkning avgör problemlösningsprocessens

utveckling. Vid problemlösningen refererar eleverna till skilda innehållsliga delar av problemet, i vissa fall till tal eller till tal och räknesätt i problemen och i andra fall till samtliga de innehållsliga delar i problemet som är relevanta för en lösning av problemet. Det aritmetiska innehåll eleverna refererar till får konsekvenser för hur problemlösningsprocessen kommer att gestalta sig och ger en karakteristik av dess beskaffenhet.

När eleverna löser aritmetiska problem har de olika intention, vilket medför att en problemlösningsprocess kan ta olika riktning. Vid de tillfällen då eleverna har en produktintention, med siktet inställt mot att framställa ett svar på det givna problemet, får problemlösningsprocessen en annorlunda beskaffenhet än i de fall då eleverna har en processintention och siktar mot att söka ett svar på problemet. När eleverna har en produktintention, och uppfattar att innebörden i aritmetisk problemlösning är att avge ett numeriskt svar eller att utföra en räkneoperation, anges riktning i problemlösningsprocessens av det presenterade problemets innehåll. När eleverna däremot har en processintention, och är inriktade mot att förstå och att söka ett svar på problemet genom att relatera problemets innehållsliga delar, anges riktningen i problemlösningsprocessen av problemets aritmetiska innehåll och struktur.

De skilda sätt på vilka eleverna differentierar, relaterar och integrerar problemens skilda innehållsliga delar ger en bild av hur den rörelse som karakteriserar problemlösningsprocessen är beskaffad. Rörelsen som karakteriserar elevernas tänkande vid problemlösningsprocessen är liksom riktningen i problemlösningsprocessen beroende av elevernas förhållningssätt och intention. För de elever som har ett förgivettaget förhållningssätt till problemlösningen rör sig elevernas tänkande i bestämda banor och rörelsen är fastbunden i ett bestämt rörelseschema. För de elever som har ett öppet förhållningsätt karakteriseras däremot elevernas tänkande vid lösningsprocessen av en fri och obunden rörelse.

Utvecklingen och utfallet av en problemlösningsprocess bestäms av hur eleven upplever och förstår det presenterade problemet. Elevens förståelse av ett problem uppkommer i ett samspel mellan elevens erfarenheter, problemsituationen och det specifika problemet. Denna förståelse visar sig i elevens förhållningssätt i problemlösningssituationen, probleminriktningen och elevens uppfattning av problemet. Det är elevens förståelse av ett problem som anger hur problemlösningsprocessen kommer att gestalta sig och som bestämmer dess karaktär och utfall. Med utgångspunkt

från elevernas förståelse av problemlösning karakteriserades problemlösningsprocessen i sig. Elevernas förhållningsätt, inriktning och uppfattning avgör hur problemlösningsprocessen kommer att gestalta sig och anger dess riktning, referens och rörelse. På en allmän beskrivningsnivå ger således riktning, referens och rörelse en karakteristik av problemlösningsprocessens beskaffenhet och anger dess utveckling och utfall.

DEL IV
SAMMANFATTNING OCH DISKUSSION

Kapitel 12

KOMMUNIKATION, UNDERVISNINGSINNEHÅLL OCH LÄRANDE

I vardagslivet löser vi oftast problem tillsammans med andra människor. I matematikundervisningen.förekommer inte detta lika ofta. Eleverna ges sällan tillfälle att samarbeta och kommunicera med varandra under matematiklektionerna. I läroplanen för grundskolan betonas vikten av problemlösande aktiviteter och problemlösning framhålls som det viktigaste huvudmomentet i matematik. På låg- och mellanstadiet bör problemen vara konkreta samt utgå från elevernas erfarenheter. Stort utrymme skall i undervisningen ägnas åt att tolka skriftligt ställda problem samt åt att diskutera dessa (Lgr 80 s 100).

Enligt Ekholm och Runeson (1990) ligger emellertid betoningen i undervisningen på den procedurbaserade färdigheten. Under huvuddelen av inlärningstiden arbetar eleverna enskilt med färdigproducerade uppgifter i boken, vilket innebär en upprepning av likartade mönster. Undervisningen och träningsuppgifterna anknyter i ringa utsträckning till de tidigare vardagserfarenheter som eleverna har och lärobokens presentation av ett undervisningsinnehåll väljs till utgångspunkt vid den gemensamma genomgången. Ett vanligt mönster för en matematiklektion är att läraren går igenom och förklarar eller repeterar ett moment för eleverna. Därefter arbetar eleverna enskilt en stor del av lektionen med att lösa de uppgifter i matematikboken som behandlar det aktuella momentet. Den kommunikation och diskussion som förekommer under lektionerna är oftast begränsad till en dialog mellan läraren och de elever som ställer direkta frågor. Om de procedurer och handlingar som eleverna utför vid lektionerna inte diskuteras i klassen, och eleverna inte ges tillfälle att tillsammans med läraren och kamraterna reflektera över undervisningsinnehållet, blir följden att den förståelseinriktade dimensionen av matematik förbises.

Forskningen i problemlösning i matematik under det senaste decenniet kan huvudsakligen sägas följa två huvudlinjer inom vilka man studerat matematisk problemlösning från olika perspektiv. En mindre del av den genomförda forskningen karakteriseras av att

man undersökt matematisk problemlösning i vardagsliv och i klassrumssituationer utifrån ett kulturhistoriskt och socialt perspektiv (Lave,1988; Säljö, 1989). Denna forskning är influerad av antropologisk forskning samt av verksamhetsteorin där Vygotsky av många ses som en portalfigur. Den andra forskningslinjen innefattar en mycket stor mängd forskning om problemlösning inom olika innehållsliga områden i matematik som exempelvis aritmetik (Carpenter & Moser, 1982; Steffe, 1983), geometri (Schoenfeld, 1985), bråk och proportionalitet (Hart, 1988). I undersökningarna studeras ofta hur elever tänker när de löser problem och man kartlägger elevernas strategier vid problemlösning inom olika innehållsliga domäner. Datainsamlingsmetoderna består till övervägande delen av intervjuer och observationer, och man utarbetar olika scheman och instrument för att analysera intervjuprotokollen.

Den aritmetiska kompetens som barn utvecklat före skolstarten och de lösningsstrategier som de använder sig av när de löser matematiska problem i sitt vardagsliv har varit föremål för ingående studier (Fuson & Hall, 1983; Gellman & Gallistel, 1983; Ginsburg, 1977). I skolan möter barnen en formell matematik som är olik deras tidigare sätt att räkna. Man kan iaktta en diskrepans mellan barns förmåga att utföra räkneuppgifter i vardagslivet och deras förmåga att lösa de skrivna matematikuppgifter som de möter i skolan. Ett kritiskt skede i matematikundervisningen är övergången från de informella personliga strategier som många elever utvecklat till formell skolmatematik med krav på specifika lösningsmetoder och tabellkunskaper. Carpenter och Moser (1982) betonar betydelsen av att uppmärksamma det brott mot elevernas personliga informella problemlösningsmetoder som den formella skolmatematiken innebär.

Ett ökat intresse kan emellertid noteras för att studera inlärning av problemlösning vid klassrumsundervisning (Lampert, 1986). En del av den forskning som utförts i undervisningspraktiken, med syftet att dra didaktiska slutsatser av de genomförda studierna, har resulterat i ett vidare synsätt på den matematiska kompetensen, där individers förmåga att lösa matematiska problem inte enbart anses vara beroende av kognitiva faktorer, utan där även elevernas emotioner, attityder, självuppfattning och föreställningar om matematik har betydelse för elevernas problemlösningsförmåga (Baroody, 1987).

Den matematiska problemlösningsförmågan utvecklas i ett komplext samspel mellan en mängd olika faktorer. Lester (1986) och

Schoenfeld (1985) diskuterar olika aspekter av den matematiska problemlösningsförmågan, vilka de menar har betydelse och som påverkar varandra vid problemlösningsprocessen. De lyfter fram och diskuterar attityder och emotionella faktorer, samt betydelsen av det sociala och psykologiska sammanhang i vilket problemlösningen utförs. Människors syn på sig själva, omgivningen, matematik och uppgiften har avgörande betydelse för hur de går tillväga när de löser problem. Den slutsats som Lester och Schoenfeld drar av sina studier är ändock att det mest väsentliga för att förbättra elevers problemlösningsförmåga är att de i undervisningen systematiskt tränar sin metakognitiva förmåga genom att använda olika problemlösningstrategier och heuristiska tekniker. En alltför ensidig inriktning mot att eleverna i undervisningen skall använda ett antal väl specificerade strategier vid aritmetisk problemlösning kan emellertid innebära en teknifiering av problemlösningsprocessen (Marton, 1976). En i hög grad formaliserad problemlösningssituation kan innebära att eleverna handlar efter ett givet mönster och använder en beprövad strategi, utan att fördjupa sig i det problem som skall lösas och försöka förstå problemets innehåll.

En stor del av forskningen om problemlösning har under de senaste åren böjt av från att ha tagit sin utgångspunkt i allmängiltiga psykologiska inlärningsteorier i riktning mot en innehållsrelaterad didaktisk forskning. I de fall då man man diskuterar didaktiska implikationer kan man finna en stor samstämmighet bland forskarna att elevernas problemlösningsförmåga bör utvecklas genom en förståelseinriktad undervisning. Det framhålls att den grundläggande begreppsbildning skall betonas i undervisningen och att den kvalitativa dimensionen av elevernas lärande måste uppmärksammas (Hiebert, 1986).

UNDERSÖKNINGKONTEXTEN

Det centrala temat i avhandlingen är lågstadieelevers upplevelse, förståelse och uppfattning av aritmetisk problemlösning i en skolkontext. Inledningsvis i denna framställningen diskuterades frågan om hur undervisningen i aritmetisk problemlösning borde utformas för att eleverna skall lära sig att lära och få tilltro till sin förmåga att lära.

På vilka sätt bidrar undervisningen till att grundlägga en negativ inställning till matematik hos vissa elever och skapa matematikrädsla som försvårar deras inlärning? Eftersom elever är olika och matematikundervisning utformas på skilda sätt finns det naturligtvis inte något enkelt svar på denna frågeställning. En tänkbar orsak till att vissa elever får matematikängslan kan emellertid vara att eleverna i matematikundervisningen huvudsakligen är sysselsatta med att utföra procedurer (Ekholm & Runesson, 1990). Detta medför att eleverna i hög grad blir inriktade mot att finna det rätta svaret på en uppgift på kortast möjliga tid. Några elever behöver längre tid för att lösa en uppgift och lyckas inte ge rätt svar genast, vilket kan medföra att eleverna, av rädsla att svara fel eller att inte bli färdiga tillräckligt fort, avstår från att försöka förstå problemet eller överhuvudtaget inte bryr sig om att försöka lösa det.

Utformningen av den beskrivna undersökningssituationen utgör en exemplifiering av hur det är möjligt att böja av undervisningens inriktning från procedurinriktning till en mer begreppsinriktad undervisning. Den studerade undervisningen skall emellertid inte betraktas som en undervisningsmetod. Undersökningen är utförd inom den fenomenografiska didaktikens ram och har relevans för didaktikens frågor om val och bestämning av ämnesinnehåll, undervisningsformer samt riktlinjer och mål för hur undervisningen skall bedrivas. (Se Dahlgren, 1986; Kilborn, 1989; Kroksmark, 1987; Marton, 1986; Steiner, 1988).

För att skapa ett rikt och varierat dataunderlag, där elevernas perspektiv på problemlösning kunde studeras, genomfördes en intervjustudie och en klassrumsstudie. Eleverna i de båda studierna löste en problemsekvens som innefattade olika typer av problem. I intervjustudien utfördes djupintervjuer med eleverna när de löste de presenterade problemen. I klassrumsstudien studerades elevernas problemlösning i tre lågstadieklasser vid två tillfällen i veckan i varje klass under en termin. Datinsamlingen inkluderar observationer och bandinspelningar av de genomförda lektionerna, intervjuer med elever och de deltagande lärarna samt den samlade dokumentation från elevernas problemlösningsförsök.

Anledningen till att undersökningskontexten varierades och studier utfördes såväl i klassrumssituationer som i intervjusituationer var att optimera möjligheterna för att skapa en så heltäckande bild som möjligt av hur eleverna erfar problemlösning och verbala, skriftliga problem.

Ett delsyfte i projektet var att eleverna som deltog i den studerade undervisningen skulle utveckla sin aritmetiska problemlösningsförmåga. För att undersöka om så var fallet, gavs klassrumsstudien en kvasiexperimentell design med för- och eftertest i de deltagande klasserna och i kontrollklasser.

Den studerade undervisningens innehåll och utformning

Vid en jämförelse med en läroboksbunden matematikundervisning där eleverna huvudsakligen är sysselsatta med att utföra numeriska beräkningar har i denna undersökning den studerade kontexten för elevers aritmetiska problemlösning utvidgats såväl med avseende på undervisningens innehåll som arbetsformer.

Undervisningsinnehållet utvidgades genom att eleverna fick möta olika typer av problem med varierande lingvistisk utformning och där det aritmetiska innehållet presenterades på skilda sätt. *Arbetsformerna* utvidgades i jämförelse med vad som är vanligt i matematikundervisning därigenom att eleverna utförde olika handlingar och använde sig av varierande kommunikationsformer. Vid problemlösningen ritade eleverna en bild med anknytning till det aktuella problemet, skrev en berättelse om problemet, talade med sina kamrater om problemlösningen samt utförde numeriska beräkningar.

Utgångspunkten vid utformningen och innehållet i den studerade undervisningen var att undervisningen skulle anknyta till elevernas erfarenheter. Tre intentioner var därför vägledande vid planeringen och utformningen:

- Eleverna skall vid aritmetisk problemlösningen ges tillfälle att använda sitt eget språk.
- Vid problemlösningen skall eleverna ges möjlighet att utföra olika handlingar.
- Eleverna skall ges tillfälle att variera sitt perspektiv på aritmetisk problemlösning och de givna problemen.

Fem delmål ligger till grund för den studerade undervisningens innehåll och utformning som innebär att eleverna skall inse:

- att det finns olika sätt att lösa ett problem och att en konfrontation av olika lösningssätt bidrar till förståelsen av problemet.
- att matematiska problem är en del av den mängd problem som människor dagligen ställs inför i vardagslivet.

- att det vardagliga språket kan förbindas med det matematiska symbolspråket.
- att tala, skriva och rita är betydelsefulla verktyg vid problemlösning.
- att det tar tid att lösa problem.

För att uppnå de nämnda delmålen utformades en problemsekvens bestående av fem olika faser som innefattade olika typer av problem. I problemsekvensen kommer fem delmålen till uttryck genom problemens innehåll och utformning. En progression mot alltmer formaliserade aritmetiska problem framkommer i sekvensen, där problemen i fas fem har störst likhet med de problem som vanligtvis presenteras i läroböckerna i matematik. Problemfaserna innefattar följande typer av problem:

Fas 1: Berättelseproblem utan aritmetiskt innehåll

Fas 2: Berättelseproblem med aritmetiskt innehåll

Fas 3: Numeriska uträkningar som införlivas i elevernas skriftliga berättelser

Fas 4: Berättelseproblem med uppskattning

Fas 5: Benämnda uppgifter

Vid varje lektion presenterades endast ett problem som framställdes i ett separat häfte. Inledningsvis läste läraren upp det aktuella problemet. Eleverna arbetade därefter enskilt med ett lösningsförslag. Vid problemlösningen skulle de rita en bild, skriva en berättelse och i samtliga faser utom fas ett utföra en aritmetisk beräkning. Eleverna var indelade i grupper och när samtliga gruppmedlemmar ansåg att de var färdiga med sin lösning diskuterades lösningsförslagen i smågrupper. I grupperna valde gruppmedlemmarna därefter en lösning som presenterades inför klassen. Lärarna antecknade de olika gruppernas lösningsförslag på tavlan och förslagen diskuterades. Vid samtalen i klassen försökte läraren inrikta elevernas uppmärksamhet mot de skilda förfaringssätt som använts vid problemlösningen samt hur det numeriska innehållet i problemen behandlats i lösningsförslagen. När läraren uppmärksammade elevernas olika sätt att lösa de givna problemen lyftes matematiska idéer och principer fram, och istället för att fokusera på det eventuellt rätta svaret, framhöll läraren den flora av skilda lösningssätt som framkom vid presentationerna. Eleverna skulle på detta sätt ges tillfälle att upptäcka att man kan använda olika metoder och tillvägagångssätt för att lösa ett problem och de skulle ges möjlighet att reflektera

över denna variation genom att ta del av varandras problemlösningsförslag och diskutera dem i smågrupper samt i hela klassen.

Forskningsmetodik

Undersökningen är utförd inom den fenomenografiska forskningsinriktningens ram. En skillnad mot tidigare studier av aritmetisk problemlösning är att undersökningskontexten är utvidgad, då projektet innefattar en intervjustudie och en klassrumsstudie där eleverna löser samma problemsekvens. I klassrumsstudien gjordes observationer och bandinspelningar av den genomförda undervisningen och intervjuer med elever och lärare genomfördes. Tidigare studier av hur elever löser aritmetiska problem har huvudsakligen varit intervjustudier som utförts i experimentsituationer där intresset till största delen varit inriktat mot en kategorisering av aritmetiska problem (t ex Carpenter & Moser, 1982; Nesher, 1982; Vergnaud, 1982), och mot att studera de strategier eleverna använder sig av vid aritmetisk problemlösning (Lester, 1984).

Den utvidgade undervisningskontexten i klassrumsstudien får även forskningsmetodiska konsekvenser då elevernas problemlösning har studerats med utgångspunkt från hur de löser olika typer av verbala problem där det aritmetiska innehållet presenteras på varierande sätt. Elevernas problemlösning har dessutom studerats när de ritar, skriver, talar och räknar. Den typ av skriftlig framställning som eleverna i de studerade undervisningssituationerna använder, finns inte enligt min kännedom beskriven i tidigare studier av aritmetisk problemlösning. Däremot finns forskning dokumenterad om elevers bildframställning (t ex Janvier, 1987), deras verbala interaktion vid problemlösning (t ex Damon, 1989; Resnick, 1988) och deras beräkningsmetoder (t ex Kilborn, 1979; Wigforss, 1946). I tidigare forskning har emellertid dessa aspekter av elevers aritmetiska problemlösning inte studerats i ett sammanhang utan undersökts var för sig.

De mest framträdande skillnaderna mellan det aktuella projektet och tidigare studier är således att skilda aspekter av aritmetisk problemlösning i detta projekt har studerats samtidigt, medan de i tidigare studerats var och en för sig i separata studier. Elevernas förståelse och uppfattning av de presenterade problemen har dessutom studerats i en skolkontext, vilket medför att resultaten får ekologiskt validitet (Neisser, 1975). Resultaten blir därmed giltiga i

ett undervisningssammanhang eftersom det är i den situation de är framsprungna.

I klassrumsstudien har elevernas lärande studerats i ljuset av den genomförda undervisningen. De handlingar eleverna utförde i undervisningssituationen var avsedda att dels befrämja elevernas inlärning av aritmetisk problemlösning, dels blottlägga deras förståelse av aritmetiska problem och problemlösning. Beskrivningen och analysen av elevernas lärande tog därför sin utgångspunkt i elevernas handlingar när de ritade, skrev, talade och räknade vid problemlösningen. Eftersom elevernas handlingar i detta projekt betraktas som en form av kommunikation utgick beskrivningen och analysen av den genomförda undervisningen från elevernas kommunikation om undervisningsinnehållet samt deras lärande.

ATT ANVÄNDA OLIKA KOMMUNIKATONSFORMER VID PROBLEMLÖSNING

När eleverna löste de presenterade problemen i klassrumsstudien utförde de olika handlingar. De ritade bilder, skrev berättelser, samtalade med varandra samt gjorde aritmetiska beräkningar. Syftet med att eleverna skulle använda olika uttrycksformer var att deras förståelse av de givna problemens innehåll skulle gestaltas i skilda framställningsformer för att ge kunskap om hur problemlösningsprocessen gått till. Dessutom var avsikten att eleverna genom att använda olika uttrycksformer skulle utveckla sin aritmetiska problemlösningsförmåga. Elever och lärare framförde synpunkter på den genomförda undervisningen där det framkom att såväl elever som lärare ansåg att den genomförda undervisningen befrämjat elevernas inlärning i aritmetisk problemlösning. För att undersöka om det förelåg skillnader i problemlösningsförmåga, mellan de elever som deltagit i de studerade undervisningssituationerna och andra elever som deltagit i en mer traditionell läroboksbunden undervisning, gavs klassrumsstudien en kvasiexperimentell design med för- och eftertest i de deltagande klasserna och i kontrollklasser.

De testresultat som redovisats i kapitel sju visar att det var en signifikant skillnad i gruppmedelvärde på eftertestet mellan den elevgrupp som deltagit i den beskrivna undervisningen och en annan elevgrupp som deltagit i en läroboksbunden undervisning.

Eleverna i de deltagande klasserna löste i större utsträckning än eleverna i kontrollklasserna uppgifterna i eftertestet. Den aritmetiska problemlösningsförmågan utvecklas under lång tid och för somliga elever tar det längre tid än för andra. Testresultaten tyder emellertid på att en undervisning som är utformad på så sätt att eleverna får använda sitt eget språk, utföra olika handlingar och variera sitt perspektiv på aritmetiska problem har positiv effekt på elevernas aritmetiska problemlösningsförmåga.

DIFFERENTIERA, FÖRDJUPA, UTVIDGA OCH INTEGRERA ETT UNDERVISNINGSINNEHÅLL

En sammanfattande analys och tolkning av hur eleverna går tillväga när de ritar, skriver, talar och räknar vid problemlösning visar på en övergripande nivå att de i varierande utsträckning differentierar, fördjupar, utvidgar och integrerar skilda innehållsliga delar av det givna problemet.

Differentiering: Eleverna fokuserar olika innehållsliga delar av det givna problemet och differentierar därigenom problemets innehåll.

Fördjupning: Eleverna fokuserar specifika delar av problemet och fördjupar problemets innehåll genom att ge en ingående beskrivning av en eller flera innehållsliga delar av problemet.

Utvidgning: Eleverna utvidgar problemets innehåll och expanderar den innehållsliga beskrivningen i det givna problemet genom att gå utanför probleminnehållet och tillföra information som inte är given.

Integrering: Eleverna integrerar problemets innehåll genom att relatera problemets innehållsliga delar och integrera dem till en sammansatt enhet.

När eleverna ritar, skriver talar och räknar vid problemlösning differentierar de på skilda sätt problemets innehåll och inriktar sig mot olika innehållsliga delar av problemen. De fördjupar och utvidgar i varierande utsträckning problemets innehåll. Det är emellertid inte i elevernas fördjupning och utvidgning av olika innehållsliga delar av problemet som problemlösningsprocessens utveckling bestäms. Problemlösningens fortskridande är istället beroende av i vilken utsträckning eleverna relaterar problemens olika innehållsliga delar och integrerar dem till sammansatta enheter. I det följande skall vi på se på hur eleverna differentierar, fördjupar, utvidgar och integrerar probleminnehållet när de

använder olika uttrycksformer samt diskutera några didaktiska implikationer av resultaten.

Rita vid problemlösning

När eleverna ritar har deras bilder i samtliga problemlösningsfaser anknytning till det givna problemets innehåll eller till innehållet i den skriftliga berättelsen. En stor andel av eleverna avbildar den lösning de föreslagit på det givna problemet. Vid analysen av bilderna framkommer att de avbildar innehållet på två skilda:

- Eleverna ritar *statiska* bilder. Ett eller flera föremål avbildas.
- Eleverna ritar *dynamiska* bilder. Flera föremål avbildas. De relateras och införlivas i en skildring av en situation eller en händelse.

När eleverna ritar statiska bilder fokuserar de en eller flera innehållsliga delar av det givna problemet eller av sin berättelse. De *differentierar* innehållet genom att teckna isolerade delar av det framställda problemets innehåll. Exempelvis kan en elev teckna en katt genom att rita två ringar, en större och en mindre. På den mindre ringen ritas öron och morrhår. Andra elever kan *fördjupa* bilderna och gör dem inträngande genom att teckna föremålen mycket detaljrikt och omsorgsfullt, t ex kan en katt tecknas mycket detaljerat med bl a ben, tassar, päls och halsband. Vissa elever *utvidgar* sina bilder genom att rita ett mycket stort antal föremål. De ritar då exempelvis en katt, ett hus, ett träd och en gräsmatta. Bilderna beskriver emellertid inte någon rörelse eller förändring och kan betecknas som statiska.

När eleverna ritar dynamiska bilder relateras flera innehållsliga delar av probleminnehållet och föremålen *integreras* och införlivas i en skildring av en situation eller en händelse. Även de elever som skildrar en situation differentierar det givna problemet och avbildar ett antal föremål på sina bilder. Några elever fördjupar sina bilder genom att teckna detaljrika föremål och vissa elever ritar ett stort antal föremål och utvidgar därmed sina bilder. Det som utmärker dessa bilder är emellertid att de är dynamiska i den bemärkelsen att eleverna avbildar en sammansatt enhet genom att relatera föremål på bilden. Exempelvis kan eleven teckna en katt som hoppar upp på ett bord och välter ner en vas (se bild 8.2 s 174. Föremålen integreras i en rörelse eller ett händelseförlopp så att en situation skildras.

I fas fem avbildar ett stort antal elever det matematiska innehållet i problemet genom att teckna index i form av ringar, prickar eller

streck. Eleverna använder index på två skilda sätt. Några elever ritar index enbart för att avbilda föremål, medan andra elever även använder index för att beteckna en rörelse eller förändring. Denna rörelse i bilden framkommer då eleverna med pilar eller med olika streck för samman de index man ritat till sammansatta enheter (se bild 8.14 s 179). Därigenom avbildas inte enbart det numeriska innehållet, utan även den aritmetiska operationen i problemet.

En jämförelse mellan elevernas bilder i de olika faserna visar att eleverna i de två avslutande faserna i större utsträckning än i de tidigare faserna avbildar det aritmetiska innehållet i problemen. I fas fyra avbildar vissa elever problemens numeriska innehåll i bild och i fas fem avbildar ett stort antal elever problemens aritmetiska innehåll genom att ställa upp tal i en tabell eller genom att teckna index i form av ringar, prickar eller streck.

Didaktiska implikationer

Hughes (1986) har studerat barns sätt att teckna bilder och representera kvantiteter när de löser aritmetiska problem. Han visar att barn redan i förskoleåldern kan avbilda ett numeriskt innehåll och även representera talet noll. Emellertid har barnen även vid så pass hög ålder som 9-år mycket svårt att beskriva och representera aritmetiska operationer. Enligt Hughes är det förvånansvärt att barnen när de skall representera operationer med addition och subtraktion inte använder det skrivna symboliska notationssystem som de dagligen använder i skolan. Han menar att att det föreligger en klyfta mellan den formella skolmatematiken och barns spontana begreppsliga förståelse av ett aritmetiskt innehåll. Barnen använder inte de formella symbolerna när de löser problem utanför den kontext i vilken de lärts in.

> There appears to be a serious and disturbing split between their use of symbols in the classroom and their ability to apply them to problems encountered elsewhere. (Hughes, 1986 s 78)

I den inledande matematikundervisningen i årskurs ett använder eleverna ofta manipulativt material vid aritmetiska operationer och problemlösning. Det är mer ovanligt att eleverna i bild ges tillfälle att gestalta sina aritmetiska beräkningar. Om eleverna vid problemlösning utifrån sina egna föreställningar gestaltar det aritmetiska innehållet i bild kan detta frigöra deras tänkande från beroendet av det manipulativa materialet. När eleverna i samband med att de använder sitt eget vardagliga språk utvecklar bilden som uttrycksform kan de upptäcka bildens symbolfunktion, och inse

att bilden kan representera något annat än det som är direkt avbildat (se Johnsen Høines,1990).

I undervisningen i matematik beskriver elever ibland räknehändelser i ett formellt symbolspråk. På motsvarande sätt kan de exempelvis ges tillfälle att gestalta det aritmetiska innehållet i en räknehändelse med bildspråk och teckna kvantiteter och aritmetiska operationer i form av bilder och index. När eleverna ritar bilder får de en visuell upplevelse av problemens innehåll som för många elever kan underlätta förståelsen av det aritmetiska innehållet i problemen. Eleverna kan skildra de olika aritmetiska operationerna i bild och utarbeta egna notationssystem i form av olika typer av index som beskriver kvantiteter och visar förändringar av kvantiteter vid aritmetiska operationer. De olika notationssystemen kan jämföras och diskuteras i grupper och i hela klassen och eleverna kan lära av varandra. När elevernas bildspråk därefter uttrycks i ett formellt matematiskt symbolspråk skapas en förbindelselänk och ett översättningsled mellan det vardagliga språket och det formella symboliska notationsystemet. Genom att rita bilder och skapa egna notationssystem, som de förbinder med det formella matematiska symbolspråket, får eleverna ett verktyg som de kan använda i skilda sammanhang när de löser olika typer av aritmetiska problem.

Skriva vid problemlösning

I de skriftliga framställningarna behandlar eleverna mycket varierande motiv och teman, och det framkommer mycket tydligt att eleverna när de skriver tar sin utgångspunkt i upplevelser från skola och vardagsliv. Elevernas skriftliga framställningar har i samtliga faser analyserats med avsikten att blottlägga elevernas förståelse och uppfattning av de givna problemen. I fas ett (Berättelseproblem utan aritmetiskt innehåll) har analysen av texterna riktats mot att kartlägga hur eleverna inriktar sig mot frågeställningen i problemen.

I några få av de texter som inte ger en lösning på problemet inriktar sig eleverna mot delar av problemets innehåll som inte har relevans för en lösning av problemet. Eleverna *differentierar* problminnehållet och skriver om en innehållslig del. De *fördjupar* även i varierande utsträckning problemens innehåll genom att skriva mycket detaljerat och ingående om en innehållslig del av problemet. Eleverna fokuserar emellertid enbart delar av det givna problemets innehåll och inriktar sig inte mot problemets frågeställning.

I ett större antal av dessa texter behandlas händelser som har relevans för en lösning. I berättelserna *utvidgar* eleverna probleminnehållet då de tillför information, går utanför det givna problemets innehåll och ger en implicit lösning på problemet. Eleverna fokuserar emellertid inte i sin text problemets frågeställning och texterna saknar en fullständig problemlösning.

I ca 70% av samtliga texter i fas ett (Berättelseproblem utan aritmetiskt innehåll) framställs en lösning på problemet. De elever som ger en lösning på problemet *integrerar* problemets frågeställning med innehållet i sina texter. Några av eleverna ger enbart en lösning på problemet och behandlar inte vidare problemets frågeställning och innehåll. Det största antalet elever fördjupar och utvidgar emellertid problemens innehåll när de skriver om den givna frågeställningen.

I det empiriska materialet framkommer att eleverna differentierar, fördjupar och utvidgar problemens innehåll i samma utsträckning, vare sig de ger en explicit lösning på problemet eller inte. Skillnaden mellan de texter som har en explicit problemlösning och övriga texter är att i de texter som ger en lösning på problemet har problemets frågeställning integrerats med innehållet i texten.

Didaktiska implikationer

Skriftspråket ger tid till eftertanke, är ett verktyg för tänkandet och medel för att utveckla begrepp (Donaldson, 1978; Vygotsky, 1962). För att eleverna skall bli förtrogna med det matematiska symbolspråket och förknippa det med formella språket med sitt vardagliga språk måste de reflektera över *vad* som uttrycks och *hur* det uttrycks i ett formaliserat matematiskt symbolspråk. I den studerade undervisningen möter eleverna problem där en situation beskrivs. De skall utifrån sina egna erfarenheter och sitt eget språk berätta om situationen och de händelser som presenteras i problemen samt ge förlag till en lösning. Eleverna använder sina egna ord när de skriver om händelserna i problemet, men de skall dessutom använda det matematiska språket och uttrycka skeendet i ett formaliserat symbolspråk. När eleverna på detta sätt införlivar det formella symbolspråket i skriftliga berättelser, blir skriftspråket ett översättningsled och en förbindelselänk mellan elevernas muntliga, vardagliga språk och det formella matematiska symbolspråket.

Lågstadieelever kan på en mängd varierande sätt skriva om matematik. De kan förutom att skriva om problem på det sätt som

här har beskrivits hitta på egna problem, skriva räknehändelser, skriva om matematik med utgångspunkt från bilder och fotografier, formulera olika matematiska problem i anslutning till de tema som behandlas i orienteringsämnet etc. När eleverna på detta sätt använder skriften som uttrycksform vid matematisk problemlösning får de utökade möjligheter att reflektera över problemen och över olika tänkbara lösningssätt.

Tala vid problemlösning

I den studerade undervisningen samtalade man om problemlösningen både i smågrupper och i hela klassen. I smågrupperna organiserades samarbetet på så sätt att gruppens medlemmar först skulle lösa ett problem individuellt. När samtliga elever försökt lösa problemet framförde de sin egen problemlösning i gruppen. Gruppmedlemmarna bestämde sedan vilken lösning som de ansåg skulle presenteras för de övriga klasskamraterna. Vid gruppsamtalen uppmanades eleverna att jämföra problemen och diskutera likheter och skillnader mellan problemlösningsförslagen.

Det framkom vid analysen av gruppsamtalen att eleverna vid arbetet i smågrupperna antingen var tävlings- eller samförståndsinriktade. När eleverna var tävlingsinriktade var målet med argumentationen att ett av förslagen skulle "vinna", medan målet för de samförståndsinriktade eleverna var att gruppen skulle enas om en lösning.

Vid samtalen inriktade eleverna sig i olika utsträckning mot problemlösningsförslagen. När eleverna inriktade sig mot problemlösningen kunde de fokusera den matematiska lösningen, den skriftliga berättelsen eller bilden. De elever som inriktade sig mot problemlösningen *differentierade* problemlösningsförslaget och fokuserade olika delar av förslaget. Några av eleverna *fördjupade* samtalen och argumenterade ingående om en del av problemlösningsförslaget. Några elever *utvidgade* också samtalen och förde in den person som framställt lösningsförslaget i diskussionen. Det förekom ett mindre antal elever som fokuserade olika delar av förslagen och vid samtalen *integrerade* det framlagda problemlösningsförslagets innehåll.

Vid gruppsamtalen interagerar eleverna och deras uttalande konfronteras i samtal och dialoger, vilket medför att socioemotionella faktorer får stor betydelse för hur samtalen utvecklas. Vid diskussionen hade de flesta av eleverna svårigheter med att relatera de problemlösningsförslag som framlagts i gruppen och

föra en ingående argumentation om de olika problemförslagens innehåll. Detta beror troligtvis på att elevernas medvetande är riktat mot den aktuella situationen och inte enbart mot undervisningsinnehållet, dvs de presenterade problemlösningsförslagen. Eleverna differentierar *samtalskontexten*, och riktar sig mot sig själva, gruppmedlemmarna eller problemet.

Didaktiska implikationer

Matematik är ett kommunikativt ämne, därför borde det vara naturligt att låta eleverna diskutera och argumentera på matematiklektionerna. Enligt resultaten från den nationella utvärderingen i matematik (NU-projektet) förekommer det emellertid inte ofta att eleverna ges tillfälle att samarbeta vid matematiklektionerna (Ljung & Pettersson, 1990).

I den studerade undervisningen fördes samtal om matematik i smågrupper och i hela klassen. Elevernas samarbete i smågrupper kan varieras på många olika sätt. Det är uppgiftens omfattning och innehåll som avgör vilken typ av samarbetsform som skall användas. I den här aktuella undersökningen löste eleverna först de presenterade problemen på egen hand och diskuterade därefter lösningsförslagen i smågrupper. Analysen av elevernas *samtal i smågrupper* visade att samtliga elever inte ständigt inriktade sig mot problemens innehåll vid sin argumentation. Vid intervjuer med de deltagande eleverna uttryckte emellertid samtliga elever att de ansåg att gruppsamtalen bidragit till att de insett att ett problem kan lösas på olika sätt, och att man kan lära sig att lösa problem genom att ta del av andras lösningsförslag. Samtliga intervjuade elever uppger att de var roligt att presentera den egna lösningen för kamraterna och även att se hur de andra i gruppen hade löst problemen.

En stor fördel med samtal i smågrupper är att varje elev vid samtalen redovisar sina tankar och presenterar sin egen lösning. Dessutom skall eleverna lyssna på kamraterna och försöka utvärdera deras lösningar. När gruppen skall välja mellan alternativa lösningsförslag måste gruppmedlemmarna förklara sina ställningstagande, vilket kan hjälpa dem att bli medvetna om sitt eget tänkande.

Problemlösning i smågrupper har även andra fördelar, exempelvis ökar ofta motivationen och eleverna blir engagerade i uppgiften när de tar ansvar för sitt arbete. Samtalen ger dessutom läraren tillfälle att följa elevernas diskussioner och tankegångar och hjälpa

dem när de är direkt engagerade i lösningen av ett problem. Många elever är osäkra på sin egen problemlösningsförmåga särskilt om de upplever att de har svårigheter med matematik. När de ser andra elever kämpa med samma svårigheter som de själva och inser att de inte är ensamma om att tycka att det är svårt, kan något av osäkerheten försvinna. Vid de intervjusamtal som fördes med de deltagande eleverna uttryckte några elever att när de såg hur kamraterna löst ett problem insåg de att problemet inte var så svårt som de först hade tyckt.

Utgångspunkten för *samtalen i klassen* var de lösningsförslag som eleverna framställt när de enskilt löste de presenterade problemen. Innehållet i samtalen utgick därmed från elevernas egna tankar och funderingar, vilka synliggjordes vid samtalen och därigenom bildade ett reellt innehåll i undervisningen. När en jämförande diskussion om de olika lösningsförslagen fördes i klassen, gavs eleverna ytterligare tillfälle att bidra till undervisningsinnehållet, genom att läraren bemödade sig om att införliva deras uttalanden i undervisningskontexten, och låta elevernas synpunkter förklara och tydliggöra matematiska idéer och aritmetisk problemlösning. För att eleverna skulle inse att det finns olika sätt att lösa problem, och att vissa typer av problem kan ha flera möjliga svar, försökte läraren vid klassrumssamtalen att inte fokusera "det rätta svaret" utan istället konfrontera de olika lösningsförslagen och att inrikta elevernas intresse mot de skilda lösningssätt som använts.

När eleverna tar del av kamraternas olika sätt att lösa ett problem blir problemet belyst från olika perspektiv. Eleverna får tillfälle att variera sitt perspektiv på problemet och reflektera över problem-innehållet. Samtal i hela klassen och i smågrupper om de olika sätt som kan användas för att lösa ett problem kan medverka till att elevernas intention i en problemlösningssituation inte är att fortast möjligt komma fram till ett svar på problemet.

Räkna vid problemlösning

När eleverna räknar utför de en procedur som är definierad i en uppgift eller som de vid problemlösning själva väljer. Till skillnad från de andra kommunikationsformerna är således elevernas handlande vid de numeriska operationerna relativt begränsat och givet, och eleverna kan inte i samma utsträckning som när de ritar, skriver och talar använda sin fantasi för att fördjupa och utvidga det givna innehållet. När eleverna utför aritmetiska operationer differentierar de emellertid uppgiften genom att fokusera de tal som ingår i operationen och relatera och integrera dem. När talen i

den aritmetiska operationen integreras till en sammansatt enhet resulterar det i ett numeriskt svar. Som framkommit vid redovisningen av elevernas numeriska beräkningsmetoder i kapitel åtta behandlas denna del-del-helhetsrelation av eleverna på en mängd varierande sätt.

Didaktiska implikationer

När eleverna räknar använder de huvudräkning, fingerräkning och skriftliga notationer som medel. De kombinerar på olika sätt dessa tre medel.

Om eleverna inte har någon effektiv beräkningsmetod som förenklar tankearbetet när de räknar i huvudet, möter de, när beräkningen blir tillräckligt komplicerade oöverstigliga hinder som innebär att problemlösningsprocessen avstannar. Användning av "dubblor" och "talfakta" förenklar beräkningarna. Även de elever som omgestaltar talen har ett verktyg som förenklar och underlättar de numeriska beräkningarna vid huvudräkning.

Det är vanligt att elever använder fingrarna när de räknar. Om eleverna anser att beräkningarna är svåra ökar deras användning av fingerräkning. De går tillväga på två olika sätt. Dels räknar de en finger i taget för att hålla ordning på antal vid uppräkning. Ett finger representerar då ett tal. Dels grupperar de ett antal fingrar på olika sätt och gestaltar ett tal. Ett antal fingrar formar då ett tal. När eleverna på detta sätt använder fingrarna som redskap kan de få en visuell eller förnimbar bild av talen som underlättar vid de aritmetiska operationerna.

Det förekommer att några elever nästan omedelbart glömmer de tal som ingår i de aritmetiska operationerna när de räknar i huvudet. Vid aritmetisk problemlösning kan därför olika former av bilder, index och andra notationer vara användbara redskap vid problemlösningen. Notationerna kan hjälpa eleverna att komma ihåg det numeriska innehållet i problemet och bidra till att elevernas tänkande, istället för att fokuseras på det numeriska innehållet i problemen, inriktas mot problemformuleringen och det givna problemets innehåll.

Kilborn (1989) framhåller betydelsen av att eleverna i den grundläggande aritmetikundervisningen lär sig effektiva tekniker för att utföra aritmetiska operationer. Eleverna bör när de räknar använda behandlingssätt som är utvecklingsbara och som lägger en god grund för den vidare matematikinlärningen.

Ett sätt att i matematikundervisningen medvetandegöra eleverna om sitt eget sätt att räkna, och uppmärksamma dem på att det kan finnas andra mer rationella sätt, är att låta eleverna ta del av varandras olika sätt att räkna. I den studerade undervisningen möjliggjordes detta genom att elevernas problemlösningsförlag diskuterades i klassen och i smågrupper. De skilda sätt på vilka eleverna räknat i huvudet, tecknat uträkningar, gjort uppställningar och utfört deloperationer vid beräkningarna uppmärksammades vid samtalen i klassen. införlivades i undervisningskontexten och användes för att förklara och tydliggöra matematiska idéer och principer.

ATT ANKNYTA TILL ELEVERNAS ERFARENHETER

Problemsekvensen utformades så att eleverna vid den aritmetiska problemlösningen skulle använda sitt eget språk och avsikten var att problemens innehåll skulle anknyta till elevernas erfarenheter och föreställningsvärld. Vad får då anknytningen till elevernas föreställningsvärld för didaktiska konsekvenser? Finns det risk för att problemens anknytning till elevernas föreställningsvärld osynliggör det matematiska innehållet i problemen och att problemens innehåll fångar elevernas intresse i den utsträckning att det aritmetiska innehållet i de givna problemen sjunker undan och försvinner i fantasifulla berättelser med en mängd spännande detaljer? Wistedt (1990) ställer frågan om vardagsanknytningen av matematiska problem under debatt, och diskuterar svårigheten för eleverna att uppmärksamma och nå matematiken i uppgifter med vardagsanknytning. Hon menar att det inte är en framkomlig väg att bemöta kritiken mot skolmatematiken för att den rör sig inom en alltför snäv kontext genom att ersätta skolkontexten med en annan lika snäv kontext av mera praktiskt vardagligt slag. Resultatet blir då att de elever som enbart rör sig inom ett vardagligt sammanhang missar de matematiska poängerna i uppgifterna.

> Men att ersätta skolkontexten med en ny och likaledes snäv kontext av praktiskt vardagligt slag hjälper inte. Snarare tycks det vara så, att eleverna behöver bredda sin repetoar av alternativa tolkningar och de behöver redskap, översättningsregler, som hjälper dem att smidigt röra sig mellan kontexter av olika slag. (Wistedt, 1990 s 23)

När eleverna skriver om problemen i de studerade undervisningssituationerna framkommer mycket tydligt att de i samtliga typer av problem hämtar motiv och tema från sin vardags- och föreställningsvärld, och det är uppenbart att eleverna utgår från sin levda värld när de fritt skriver om matematiska problem. För att undervisningen i aritmetisk problemlösning skall bli framgångsrik för samtliga elever borde den ta sin utgångspunkt i elevernas eget sätt att behandla problemen och därför knyta an till elevernas föreställningsvärld. Det är emellertid inte tillräckligt att anknyta probleminnehållet till elevernas föreställningsvärld, utan eleverna måste även ges matematiska tankeredskap för att lösa problemen. Frågeställningen om i vilken utsträckning problemens innehåll skall anknyta till elevernas erfarenheter och föreställningsvärld bör således omformuleras till att gälla på vilka olika sätt man kan inrikta elevernas uppmärksamhet mot det aritmetiska innehållet i problemen, och på vilka sätt det matematiska innehållet kan lyftas fram.

Ett sätt att fokusera det aritmetiska innehållet i ett givet problem kan vara att ställa frågor till eleverna om detta innehåll eller ge dem redskap i form av skilda problemlösningsstrategier som de skall använda sig av. En ökad teknifiering av problemlösningsprocessen hjälper emellertid inte eleverna att inrikta sin uppmärksamhet mot ett givet probleminnehållet. Tvärtom kan ett utökat regelsystem försvåra elevernas möjligheter att förstå problemens innehåll, eftersom eleverna då inriktar sig mot att ge svar på frågorna eller mot att utföra de givna procedurerna (se Marton, 1976). Ett sätt att motverka en teknifiering av problemlösningsprocessen är att låta eleverna möta problem där det aritmetiska innehållet inte ständigt presenteras på samma sätt. Elevernas tänkande utvecklas därmed i mötet mellan deras föreställningsvärld och problemens innehåll. När eleverna möter olika typer av problem, där det aritmetiska innehållet framställs på olikartade sätt, får de utökade möjligheter variera sitt perspektiv på aritmetiska problem och problemlösning. Om eleverna får upplevelser av aritmetisk problemlösning i skilda innehållsliga kontexter och tillfälle att använda olika uttrycksformer vid problemlösningen, ges de möjlighet att upptäcka att matematik kan förekomma i olika sammanhang och framställas på olika sätt, vilket kan bidra till att de blir medvetna om och uppmärksammar det aritmetiska innehållet i ett givet problem.

PROBLEMLÖSNING - EN RELATION MELLAN BARN OCH PROBLEM

Huvudsyftet med den genomförda undersökningen har varit att beskriva hur eleverna erfar, förstår och uppfattar olika typer av aritmetiska problem och deras upplevelse av problemlösning i en skolsituation. Resultaten har redovisats i form av en beskrivningsmodell där elevernas skilda sätt att erfara aritmetiska problem och problemlösning visar sig i deras förhållningssätt, probleminriktning och uppfattning (se fig 10.4. s 267). Beskrivningen av elevernas sätt att erfara problemlösning avtäcker även problemlösningsprocessens beskaffenhet, och det framkommer att den innefattar de tre komponenterna riktning, referens och rörelse (se fig 11.1. s 268).

Ge ett svar eller söka ett svar på problemen?

Samtliga elever är medvetna om att de befinner sig i en situation där ett problem ska lösas och de har tidigare erfarenheter av problemlösning i en skolsituation. Vid problemlösningen igenkänner eleverna i den aktuella situationen upplevelser och emotioner från tidigare problemlösning i skolan, och dessa erfarenheter avspeglas i deras förhållningssätt i problemlösningssituationen. Om elevens erfarenheter inbegriper tidigare lyckosamma problemlösningsförsök stärker detta elevens målinriktning och självförtroende. I motsatt fall försvagar tidigare misslyckanden elevens tro på sig själv och sin förmåga att lyckas. Elevens tidigare erfarenhet av problemlösning, som i stor utsträckning innefattar emotionella och sociala aspekter, är avgörande för hur eleven i den aktuella situationen förhåller sig till de presenterade problemen och påverkar deras intention i problemlösningssituationen.

Eleverna har olika mål eller intention i en problemlösningssituation. Några elever är huvudsakligen inriktade mot att ge ett svar på problemet vilket betecknas som att de har en produktintention. Andra elever har intentionen att söka ett svar på problemet vilket beskrives i termer av att de har en processintention. När eleverna har en produktintention, har de ett *förgivettaget förhållningssätt*. Eleverna tillämpar ett välkänt lösningssätt som de använt tidigare och löser de givna problemen efter ett bestämt mönster. De fångas inte av problemlösningsprocessen och prövar inte olika lösningsalternativ. Problemlösningen har stelnat i bestämda former.

De elever som har en processintention, och huvudsakligen är inriktade mot att söka ett svar på problemet, har ett *öppet förhållningssätt*. Dessa elever fångas av problemlösningsprocessen. De ställer hypoteser, prövar olika lösningsalternativ och kan variera sitt perspektiv på de presenterade problemen.

Manipulera med tal eller se relationer?

I en problemlösningssituation konfronteras elevernas erfarenheter med det givna problemets innehåll. Det är detta möte mellan elevernas erfarenheter och problemets innehåll som avgör problemlösningsprocessens utveckling. Elevernas förförståelse av det givna problemet ger dem inledningsvis en diffus helhetsuppfattning av problemet. Vid problemlösningen inriktar de sig mot problemet på skilda sätt. De differentierar problemets innehåll och refererar vid problemlösningen till skilda innehållsliga delar av problemet. När eleverna relaterar dessa innehållsliga delar och integrerar dem till en sammansatt enhet tar problemet gestalt för eleverna och de förstår och uppfattar problemet på skilda sätt. Några elever ger lösningsförslag som inte innefattar matematiska aspekter. De allra flesta elever ger emellertid lösningar som innefattar mängder, tal eller aritmetiska operationer. När eleverna ger matematiska lösningarna estimerar de ett svar eller utför beräkningar.

De elever som har ett förgivettaget förhållningssätt inriktar sig mot tal och räknesätt i problemen. När eleverna vid problemlösningen inriktar sig mot tal och utgår från dem vid problemlösningen har de en *operandinriktning*. De estimerar ett numeriskt svar på problemen och utför inte några beräkningar. I andra fall när eleverna är inriktade mot tal och räknesätt vid problemlösningen har de en *procedurinriktning*. De inriktar sig då mot att utföra en räkneoperation för att komma fram till en lösning på problemet.

När eleverna har ett öppet förhållningssätt kan de ha en hypotes- eller gestaltinriktning. De elever som har en *hypotesinriktning* är inte huvudsakligen inriktade mot tal och räknesätt i problemen utan även mot problemets övriga innehållsliga delar och mot att försöka se deras inbördes relationer. Dessa elever relaterar emellertid inte de tal som är givna med de relevanta innehållsliga delarna i problemet. I de fall då eleverna har en *gestaltinriktning* inriktar de sig mot samtliga innehållsliga delar av det givna problemet och mot deras inbördes relation.

Ytstruktur eller djupstruktur?

Om eleverna har ett förgivettaget förhållningssätt till problemlösningen uppfattar de problemens ytstruktur. De ser nivån på problemet som de exempelvis uttrycker i termer av att problemet är lätt eller svårt, och de ser typen av problem, t ex om det är en uppställning eller ett verbalt problem. I andra fall när eleverna har ett öppet förhållningssätt uppfattar de även problemens djupstruktur. De ser relationer mellan problemens skilda innehållsliga delar vilket medför att de även har möjlighet att uppfatta problemens aritmetiska struktur.

Problemlösningsprocessens dynamiska karaktär

När eleverna löser aritmetiska problem kännetecknas problemlösningsprocessen i varierande utsträckning av att processen har en riktning, att referenser tas i problemet, och att processen innefattar en rörelse.

Eleverna har en intuitiv känsla och förförståelse av problemet som medför att problemlösningsprocess kan ta olika *riktning*. Elevernas förförståelse av problemet framkommer i deras intention vid problemlösningstillfället. Eleverna kan antingen ha en produkt- eller en processintention. Vid de tillfällen då eleverna har en produktintention, har de siktet inställt mot att framställa ett svar på det givna problemet, medan de när de har en processintention siktar mot att söka ett svar på problemet. I de fall eleverna har en produktintention får problemlösningsprocessen en annorlunda riktning än i de fall då eleverna har en processintention. När eleverna har en produktintention, uppfattar de att innebörden i aritmetisk problemlösning är att avge ett numeriskt svar eller att utföra en räkneoperation. Problemlösningsprocessens riktning anges då inte av det presenterade problemets innehåll. När eleverna däremot har en processintention och är inriktade mot att söka ett svar på problemet genom att relatera problemets innehållsliga delar, anges riktningen av problemets aritmetiska innehåll och struktur.

Eleverna tolkar ett givet problem mot en yttre och inre referensram. Den yttre referensramen utgöres av elevernas samlade erfarenheter och den inre referensramen av det givna problemets innehåll och form. Elevernas tolkning av problemet mot bakgrund av den yttre och inre referensramen bestämmer problemlösningsprocessens utveckling. Eleverna fokuserar skilda innehålls-

liga delar av problemet vilka bildar deras *referens* vid lösningen av problemet. I vissa fall refererar eleverna till tal eller till tal och räknesätt i problemen, medan de i andra fall refererar till samtliga de innehållsliga delar i problemet som är relevanta för en lösning av problemet. Det aritmetiska innehåll eleverna refererar till vid problemlösningen får konsekvenser för hur lösningsprocessen gestaltar sig och ger därmed en karakteristik av problemlösningsprocessen beskaffenhet.

De skilda sätt på vilka eleverna differentierar, relaterar och integrerar problemens skilda innehållsliga delar ger en bild av hur den *rörelse* som kännetecknar problemlösningsprocessen är beskaffad. Rörelsen som karakteriserar elevernas tänkande vid problemlösningsprocessen är liksom riktningen i problemlösningsprocessen påverkad av elevernas förhållningssätt och intention. För de elever som har ett förgivettaget förhållningssätt till problemlösningen rör sig tänkandet i bestämda banor och rörelsen är fastbunden i ett bestämt rörelseschema. För de elever som har ett öppet förhållningsätt karakteriseras däremot tänkandet av en fri och obunden rörelse.

Utvecklingen av en problemlösningsprocess bestäms av hur eleven upplever och förstår det presenterade problemet. Elevens förståelse av ett problem uppkommer i ett samspel mellan elevens erfarenheter, problemsituationen och det specifika problemet. Denna förståelse visar sig i elevens förhållningssätt i problemlösningssituationen, probleminriktningen och elevens uppfattning av problemet. Elevernas förhållningsätt, inriktning och uppfattning anger hur problemlösningsprocessen kommer att gestalta sig, anger dess riktning, referens och rörelse och därmed dess karaktär och utfall. På en allmän, generell beskrivningsnivå karakteriserar således riktning, referens och rörelse problemlösningsprocessen och bestämmer utfallet av ett problemlösningsförsök.

Hur kan elevernas problemlösningsprocess påverkas?

Elevernas problemlösningsprocess gestaltas i deras förhållningssätt, inriktning och uppfattning. I de studerade undervisningssituationerna framkommer att eleverna vid problemlösningen kan skifta förhållningssätt och övergå från ett förgivettaget förhållningssätt till ett öppet, vilket medför att även deras probleminriktning och uppfattning av problemet förändras. På vilka sätt kan detta skifte befrämjas och elevernas förgivettagna förhållningssätt luckras upp? Hur kan möjligheterna för begreppsliga

skiften utökas, dvs hur kan man underlätta för enskilda elever att övergå från att uppfatta ett problem på ett sätt till att förstå det på ett kvalitativt annorlunda sätt?

Med utgångspunkt i ett antal antaganden om hur undervisningen i aritmetisk problemlösning skall vara beskaffad för att erbjuda en gynnsam miljö, för att utveckla elevers aritmetiska problemlösningsförmåga, har elevers aritmetiska problemlösning i denna undersökning belysts. Undersökningen har avtäckt skilda kontexter i undervisningens uppläggning som tycks befrämja elevernas problemlösningsförmåga. Tre intentioner var vägledande vid planeringen och utformningen. Vid problemlösningen skulle eleverna få tillfälle att använda sig sitt eget *språk*, utföra olika *handlingar* och variera sitt *perspektiv* på aritmetisk problemlösning och de presenterade problemen. Intentionerna har konkret kommit till uttryck genom att aritmetiska problem har tagits som utgångspunkt för undervisningen, och träningen av procedurer har införlivats i problemlösningsprocessen. De presenterade problemen har varit anknutna till elevernas erfarenheter och föreställningsvärld. För att ge eleverna tillfälle att utföra olika handlingar har eleverna ritat, skrivit och talat vid problemlösningen. Varierande typer av problem har presenterats och eleverna har diskuterat likheter och skillnader mellan de olika problemtyperna. Eleverna har arbetat under en längre tid med lösningen av ett problem, fått tillfälle att lägga fram sin problemlösning för kamraterna och diskutera olika lösningsförslag. Vid konfrontationen av de olika lösningsförslagen har eleverna fått möjlighet att reflektera över problemen, se problemet från olika perspektiv och uppmärksamma att ett problem kan lösas på ett antal olika sätt.

En uppläggning av undervisningen i aritmetisk problemlösning där inriktningen mot teknikträning frångås, tycks motverka det manipulerande med tal och räkneoperationer som är kännetecknande för de elever som har ett förgivettaget förhållningssätt till aritmetisk problemlösning. Framkomliga vägar som bidrar till att eleverna skiftar förhållningssätt, överger sin intention att så fort som möjligt komma fram till ett svar på problemet och istället engagerar sig i problemlösningsprocessen, tycks vara att ge eleverna tillfälle att använda de formella matematiska symbolerna i skilda kontexter. En matematikundervisning där eleverna ges tillfälle att se problemen i olika perspektiv och reflektera över dem, ger eleverna utökade möjligheter att inta ett öppet förhållningssätt till problemet. De inriktar sig då mot problemets innehåll, ser

problemets olika aspekter, relationen mellan dem och uppfattar problemets matematiska struktur.

Vissa elever lyckas utomordentligt bra med att lära sig att lösa aritmetiska problem, medan andra elever inte har samma framgång. När man ställer sig frågan vad detta beror på, kan man ge en mängd olika svar och skilda faktorer kan föras fram, som förklarar varför eleverna i olika utsträckning tillgodogör sig ett undervisningsinnehåll. Det är t ex ett faktum att elever har varierande uppväxtmiljö och lever under mycket olikartade sociala förhållanden, vilket påverkar deras möjligheter att tillägna sig undervisningen i skolan. Det förhåller sig också så, att eleverna har skilda intellektuella förutsättningar för att inhämta ett kunskapsinnehåll.

Läraren som möter en elev i en undervisningssituation har begränsade möjligheter att påverka och förändra de bakomliggande faktorerna till elevens lärande. Det som läraren i undervisningen då kan göra är att utgå från och ta tillvara elevernas erfarenheter. Elevernas skilda sätt att erfara aritmetiska problem och problemlösning gestaltas i mötet mellan elevernas föreställningsvärld, undervisningssituationen och undervisningens innehåll. De problem eleverna möter har en innebörd för dem, och de uppfattar problemen i ljuset av tidigare erfarenheter av emotionell, social och intellektuell karaktär. Undervisning i aritmetisk problemlösning bör därför i ökad utsträckning ge eleverna möjlighet att bearbeta sina erfarenheter och utifrån sina egna föreställningar forma relationer och upptäcka matematiska strukturer. För att alla elever skall lära sig att lösa aritmetiska problem och få tilltro till sin egen förmåga, måste undervisningen ta sin utgångspunkt i elevernas sätt att erfara aritmetiska problem och problemlösning.

SUMMARY

The central theme of this thesis considers the ways in which primary school children experience arithmetical problem solving in a school context. The work is divided into four parts. The first part starts with a description of the background to the problem and an introductory orientation to the goal of the study. There follows a delimitation and specification of the phenomenon studied. Then there is a discussion of the didactics of mathematics teaching and a theoretical reference frame is drawn up through a description of how learning to solve mathematical problems has been studied, and is studied, in a number of research traditions.

The second part elaborates on the goals of the study and gives an account of the methods which have been used to collect data and to analyse it. The phenomenographic research approach is in focus. The ways in which the situations inherent to the investigation were planned and achieved, so that the pupils could draw, write and talk when they were solving problems, are described. Earlier research connected with drawing, writing and talking while solving mathematical problems is outlined, in connection with a description of how the teaching was carried out, and finally there is a description of the way in which the project was carried out.

The results of the investigation are given in the third part. Because of the extensive nature of the empirical material collected, the results are given in three sections. The first of these comprises a description and analysis of the lessons, from both the pupils' and the teachers' perspectives. This section also includes the results of a statistical analysis of the pupils results on a pre- and post-test which was given to the participating classes and control classes, with the aim of measuring the pupils' ability to solve arithmetic problems. The second section has a description and analysis of the ways in which the pupils went about solving problems in conjunction with drawing, writing and talking. Finally, the main result, which is a description and analysis of the pupils understanding and conceptions of the arithmetic content of the problems posed, is given in the third section. This section includes an overall descriptive model of the pupils' understanding and conceptions connected with solving arithmetic problems in a school context, and a description of the structural dynamics of problem solving based on this analysis.

The fourth part consists of a summary and discussion of the results, and reflections on the didactic implications of the project.

THEORETICAL FRAMEWORK

In the past decade, research into mathematical problem solving can be said to have had two main directions, within which it has been studied from different perspectives. A minority of this research is characterised as the study of mathematical problem solving in everyday life and in the classroom from a cultural-historic and social perspective (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985; Lave, 1988; Säljö, 1989). This research is influenced by anthropological research and by activity theory, for which many see Vygotsky as the central figure. The second direction comprises very extensive research on problem solving in different content areas of mathematics, for example arithmetic (Carpenter & Moser, 1982; Neuman, 1987; Resnick, 1983; Steffe, 1983), geometry (Schoenfeld, 1985), fractions and proportionality (Hart, 1988). The arithmetic competence which children develop prior to starting school and the solution strategies they make use of in everyday life have also been the object of extensive study (Fuson & Hall 1983; Gellman & Gallistel, 1983; Ginsburg, 1977). Carpenter och Moser (1982) stress the importance of taking notice of the break which formal school mathematics means for the pupils' own informal problem solving methods.

The ways in which pupils think when they solve problems are often the focus of these studies, and pupils' strategies for solving problems in different content areas are charted. Data collection overwhelmingly takes the form of interviews and observations, and various schemes and instruments are developed for analysing interview protocols. An increase in interest can be seen, however, for studying learning to solve problems in classroom teaching (Lampert, 1990). Research carried out into the practice of teaching, with the aim of drawing didactic conclusions from studies, have resulted in a wider view of mathematical competence, in which the individual's ability to solve problems is not only ascribed to cognitive factors, but the pupils' emotions, attitudes, self-awareness and ideas about mathematics are seen as being significant for their ability to solve problems (Baroody, 1987; Lester, 1987; Schoenfeld, 1985).

From a review of the research on problem solving of the past decade it can be seen that a large proportion of research has in recent years turned away from having a basis in general psychological learning theories towards a content-related didactic approach. In those cases where didactic implications are discussed, a large degree of agreement among researchers that pupils' ability

to solve problems should be developed through teaching directed towards understanding. It is pointed out that basic concept formation should be stressed in teaching and that attention must be paid to the qualitative aspects of pupils' learning. Mathematics teaching, however, has been and to a large extent still is directed towards training procedural skills (Ljung&Pettersson, 1990).

AIM, METHOD AND DESIGN

The main goal of the project is to describe and analyse how primary school pupils experience and understand arithmetic problems and problem solving in a school context. In order to optimise the possibility of creating a complete picture of how pupils experience and understand problem solving and verbal, written problems, the research situation has been varied to include three different contexts:

- The pupils problem solving is investigated in an interview study and in a classroom study.
- The pupils' different ways of going about problem solving is investigated when they solve problems with a variety of contents and mathematical structures.
- The pupils use different forms of communication during problem solving and are given the opportunity to draw, to write, to talk, to listen, and to count.

The investigation has been carried out within the framework of the phenomenographic research tradition (Marton, 1982). Phenomenography is an empirical, qualitative research approach which aims to analyse and describe how people experience and understand various phenomena they meet in their world. One main idea in phenomenography is that different people understand phenomena in the world around them in different ways, based on different experiences, perspectives and contexts, and it is as relations between the individual and his or her world that conceptions appear. Phenomenographic analysis aims to describe *what* people understand and *how* people experience, understand or conceptualise various phenomena, thereby describing conceptions as such. The results are presented as carefully described and qualitatively distinct categories in which are captured individuals' conceptions of the phenomenon in focus.

In this investigation, the different ways in which pupils understand and conceptualise the content of specific problems, different types of problem and arithmetic problem solving have been integrated in

an outcome space which describes the variation of experience which has been found to exist.

The project is divided into an interview study and a classroom study. In both of the studies pupils are given the same sequence of problems which includes five different types of problem and 20 problems in all. In the interview study, deep semi-structured interviews are conducted with the pupils while they solve the problems and in the classroom study the pupils' problem solving was studied with initial focus on the communication in the lesson situation. The principal aim and the content studied are the same in both of the studies, thus they are complementary and have both contributed to the results of the research.

One partial goal of the project has been to investigate if pupils who have participated in situations where they have worked with different types of written, word problems and have had the opportunity to draw, write and talk with one another while solving the problems develop their abilities at solving arithmetic problems. The classroom study has therefore a quasi-experimental form with pre- and post-tests for the participating and for control classes.

In the classroom study, the lessons have been documented through tape recordings and observation. The participating pupils have passed comment on the teaching during interviews and written accounts. In interviews, the class teachers have also given their views on the lessons, the pupils' reactions and their learning. Earlier studies of pupils' arithmetic problem solving have mainly been carried out through experiments and interviews. The research interest has generally been directed towards a categorisation mathematical problems with different degrees of difficulty or at analysing how pupils handle information, make plans and choose strategies for their actions (Carpenter & Moser, 1982; Lester, 1985; Schoenfeld, 1985). Research in which pupils different forms of communication during problem solving has also been carried out, for example in the form of drawn representations during elementary arithmetic problem solving, (Hughes, 1988; Janvier, 1987), small group discussion (Barnes & Todd, 1984; Damon, 1989; Noddings, 1985; Resnick, 1988), pupils' counting strategies (Kilborn, 1979; Resnick, 1983; Wigforss, 1946) and also their discussions when the whole class is being taught (Lampert,1986). The distinguishing factor for this study is, however, that these research domains which have previously been studied in isolation have been integrated into a common research context.

THE CONTEXT OF THE INVESTIGATION

In order to have access to as rich and varied a set of material as possible for the study of how pupils experience and understand arithmetic problems in a classroom situation, a number of lessons involving arithmetic problem solving were planned and a sequence of problems including problems of different forms and arithmetic content was devised. The basic idea behind the form and content of the problems was that teaching should relate to the pupils' own experiences. There were therefore three guidelines; that while solving the problems the pupils should have the opportunity to

- use their own language
- carry out different activities while solving arithmetic problems
- vary their perspective on arithmetic problem solving and on the given problems

So that the pupils can use their own different experiences and their own *language*, the problems which they work on in the classroom are related to their everyday life and world of ideas. In the lessons, they carry out different sorts of *activities* when they read, write, talk, listen, and draw while solving arithmetic problems. To make it possible for them to change their *perspectives* on the presented problems, they should be able to employ different modes of expression during problem solving, namely drawing, writing, talking and counting. The pupils should meet different types of problem in which the mathematical content is presented in different ways, and also given the opportunity to observe that there are different ways of solving problems.

Subgoals for arithmetic problem solving

The principal goal, that the lessons should be based in the intentions named above, comprised five subgoals on which the teaching is based. The subgoals are grounded in the ways in which the pupils work and in the form of the different types of problem which they meet in their lessons, and mean that they should realise that:

- there are a number of methods which can lead to the right answer to a problem, and that the confrontation of different methods of solution can contribute to an understanding
- mathematical problems are a subset of all the problems which they meet in everyday life
- their everyday language is connected with the formal language of mathematics, in order to give meaning to the symbols

- drawing, writing and talking about mathematics provide meaningful tools when solving mathematical problems
- it takes time to solve mathematical problems

The problem sequence

To achieve the subgoals named above, a sequence of problems consisting of five phases with different types of problem was designed. The five subsgoal are expressed in the sequence through the content and the form of the problems. There is a progression towards successively more formalised arithmetic problems, and those of the fifth phase are most like the problems met in arithmetic text-books. The problem phases comprise the following types of problem:

Phase 1: *Story problems with no arithmetic content*

The problems are presented in the form of a long story linked to the pupils' own interests. This presents the opportunity for the pupils to identify with the children and events in the story which make up the framework for various problems that have to be solved. There are no numbers or mathematics needed to solve the problems.

Phase 2: *Story problems with an arithmetic content*

Mathematical problems occur in stories, but alternative, non-mathematical solutions are also possible. The stories are long and rich in events, and the characters in the story have to solve problems in different situations.

Phase 3: *Numerical calculations which are elaborated with the pupils own stories*

Calculations such as 18+7=25 are given and the pupils are asked to make up stories involving them.

Phase 4: *Story problems with estimation*

The characters from the earlier stories reappear and face problems which are not logically complete in that certain information is missing. The pupils have to estimate and determine number facts appropriate to a solution.

Phase 5: *Text-book problems*

The problems are of a traditional arithmetical nature, with several stages to the computations.

In the lessons in this investigation the pupils' problem solving is the starting point for the teaching, and is integrated with teaching in basic arithmetic.

The teaching situation

As an introduction, the pupils met the problems in the first phase and thereafter solved the problems in the rest of the phases sequentially. At each lesson, the pupils worked at only one problem, which was given to them in an individual booklet. In solving that problem, the pupils had to write a story, draw a picture and, in all phases except the first and third, make a calculation. The teacher started each lesson by reading the current problem out loud, after which the booklets were handed out and each pupil set to work. They were divided into groups and when all the members of a group were ready they presented their own solutions to one another. Members of the group took it in turns to be the leader, who was responsible for ensuring that each member presented his or her solution, and that the others listened and discussed it. Discussions had to involve listening, putting questions, reacting to answers, and making hypotheses. The group had to come to a joint decision on which solution to present to the rest of the class, and the group leader then presented it. The teacher made notes about the solution on the blackboard, and when all the groups had finished, their solutions were compared and discussed thoroughly. In the class discussions, the teacher tried to get the pupils to note the different ways of going about solving the problems, as well as how the numerical content of the problem had been handled in the suggested solution. When the teacher pointed out the different ways pupils had tackled the problem, mathematical ideas and principals were highlighted, and rather than focus on the possible correct answer, the pupils attention was directed towards the range of different methods of solution in the presentation. In this way the pupils were given the opportunity to find out that different methods and approaches can be used to solve a problem and they had the chance to reflect over the variation by sharing one another's suggestions for solution and discussing them in small groups or in the whole class. In this investigation the pupils' problem solving is the starting point for the teaching, and is integrated with teaching in basic arithmetic. In contrast to what often is the case in teaching from the text-book, where problem solving is often seen as a way of pupils getting practice in algorithms and mathematical procedures which they have already learned, the aim is that the pupils in this investigation should have the chance to discover and learn mathematical procedures in connection with problem solving. In comparison with mathematics teaching driven by the text-book, where pupils are primarily

involved with numerical calculations (Ljung & Pettersson, 1990), in this investigation the studied context of pupils' arithmetic problem solving has been extended to embrace the ways of working as well as the content of the lessons.

THE INVESTIGATION AND THE EMPIRICAL DATA

In order to create a rich and varied set of data, where problem solving could be studied from the perspective of the pupils, an interview study and a classroom study were carried out. The data collection includes observations and tape recordings of the lessons, interviews with the pupils and the participating teachers, as well as the collected documentation of the pupils' attempts to solve the problems.

The investigation was carried out in the autumn term of 1988. The pupils who took part in it were in the third grade of the lower compulsory school, and were around nine years of age. There were altogether 66 pupils in the participating classes, comprising 28 girls and 38 boys in three classes.

The project started with a pre-test in all of the participating and control classes, and finished with a post-test. The interview study was carried out before the classroom study was begun. In each class the lessons studied were disposed in two 80 minute periods per week, and comprised a total of 68 teaching periods.

A summary of the time schedule for the project is as follows:

Weeks	34-35	Pre-test in three participating classes and control classes
	34-36	Interview study in two classes
	37-49	Classroom study in three participating classes
	50	Post-test in three participating classes and control classes

Data from the classroom study comprises; *Results of the pre- and post-tests; Pupils' documentation*: (written stories, pictures and arithmetic calculations, a total around 1300 suggestions for solutions); *Observation notes:* (verbal interaction between pupils and between pupils and teacher from problem solving sessions and tests); *Tape-recordings:* (Teachers' introductions and summaries; pupils' discussions in small groups; interviews with participating teachers: interviews with pupils, mostly transcribed to text).

Data from the interview study comprises; *Interview transcripts* (38 interviews plus 10 pilot interviews); *Written documentation* (the pictures and arithmetic calculations from working with the different problems).

This collection of data is summarised in Figure 1.

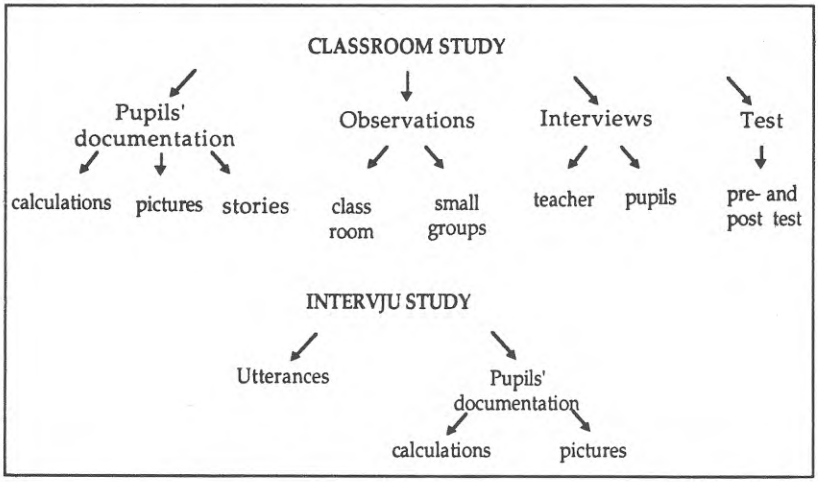


Figure 1. *Schematic picture of the empirical data collected.*

THE RESULTS

Interviews with the teachers and pupils indicated that the teaching which had been carried out had contributed to an improvement in the pupils' problem solving ability. This assumption was confirmed by the analyses of the pre- and post-test. A covariance analyses has been carried out to control for the initial differences between the participant and control classes. The result shows that the difference between the two groups were statistically significant ($F= 30.06$ $df = 118/1$ $p< .01$).

The use of different forms of communication during problem solving

The investigation has resulted in a description of how pupils set about solving arithmetic problems when they draw, write and talk. To summarise the analysis and interpretation of how pupils behave when they draw and write, talk and count while solving arithmetic problems is that to varying extents they differentiate, deepen, expand and integrate various parts of the content of the problem when using different forms of communication.

Differentiating: The pupils focus on different parts of the given problem's content and thereby differentiate the content of the problem.

Deepening: The pupils focus on specific parts of the problem and go more deeply into the content of the problem by making a detailed description of one or more parts of the problem's content.

Expanding: The pupils expand the content of the problem and expand the description of the content by going outside the content of the problem and adding information which is not given.

Integrating: The pupils integrate the problem's content by relating the parts of the content to one another and integrating them to a composite entity.

When the pupils draw, write and talk about a given problem, they differentiate the content of the problem in different ways and focus on different parts of the problem's content. They deepen and expand the problem's content to varying extents. However, it is not the deepening and expanding of the content of the problem which determines the success of problem solving. The outcome of problem solving depends instead on the extent to which the pupils relate the parts of the content to one another and integrate them to a composite entity.

Drawing while solving problems

When the pupils draw, in all the phases of problem solving their pictures have some connection with the content of the problem or the content of the written story. A large proportion of the pupils depict the solution they have suggested to the given problem. When their pictures are analysed, it is seen that they depict the content in two different ways:

- *they draw static pictures;* one or more objects are depicted
- *they draw dynamic pictures;* several objects are depicted which are related to and incorporated in a drawing of a situation or event, thereby illustrating movement or change

When the pupils produce static pictures they focus on one or more parts of the content of the given problem or of their story. They *differentiate* the content by drawing isolated bits of the content of the illustrated problem. Some pupils *deepen* the pictures and they introduce a lot of detail with great care. Certain pupils *expand* their pictures by drawing a large number of objects. The pictures do not, however, show any movement or change.

When the pupils draw dynamic pictures, several bits of the content of the problem and the objects are related and integrated in a depiction of a situation or event. Even the pupils who depict a situation differentiate within the given problem and draw a number of objects in their pictures. Some pupils deepen their pictures by drawing detailed objects; other pupils draw a large number of objects, thereby expanding their pictures. What distinguishes these pictures, however, is that they are dynamic in the sense that the pupils depict a composite entity by relating the objects in the picture to one another. The objects are integrated in the movement or a sequence of events, so that a situation is depicted.

The pupils' pictures can be categorised according to the above model for all types of problem. A comparison between pupils' pictures in different phases, however, show that in the final two phases they depict the arithmetic content in the problem is drawn to a larger extent than in the earlier phases. In phase five, a large number of the pupils depict the arithmetic content of the problem by drawing indexes in the form of circles, dots or lines. The pupils make use of indexes in two different ways. Some of them draw indexes only to depict objects, while others also use them to denote a movement or a change. Such movement in the picture is shown by, for example, the pupils linking indexes with arrows or other lines to make composite entities, thereby depicting not only the arithmetic content but also the arithmetic operation in the problem.

Hughes (1986) claims that children up to the age of nine find it very difficult to describe And represent arithmetic operations and that there is a gap between the formal school mathematics and the pupils' spontaneous conceptual understanding of arithmetic content. The children do not make use of the formal symbols when they solve problems outside the context they were learned in. If while solving problems pupils depict the arithmetic content in picture form, in their own terms, they can discover the symbolic function of the picture and realise that the picture represents something other than that which they have drawn. The pupils' picture-language then forms a link in a chain of translation between everyday language and the system of formal symbolic notation, and they thereby get a tool which they can use in different situations when they solve different types of arithmetic problems.

Writing while solving problems

The pupils written work is varies considerably, both in form and content. The texts take up different themes, which are influenced by the pupils' experiences in school and in their everyday lives. In all the phases the pupils' written work has been analysed with the goal of revealing the pupils' understanding and conceptions of the given problems. In phase one (Story with no arithmetic content), the analysis has been aimed towards mapping the pupils' orientations to the issues in the problem. The pupils *differentiate* the problem content and write mainly about a part of the content of the problem. To varying extents that also *deepen* this part of the problem's content by writing in great detail and at length. The pupils focus, however, only on one part of the content of the given problem and fail to consider the issues in the problem.

In a greater number of the texts the events which are relevant for a solution are taken up. In their stories, the pupils *expand the* content of the problem in that they add information, go outside the bounds of the given problem's content and give an implicit solution to the problem.

The pupils who give an explicit solution to the problem *integrate* the issues of the problem with the content of their texts. Some of the pupils only give a solution to the problem and do not take up the problem's issues and content further than that. The largest number of pupils, however, do take up the issues, and deepen and expand the content of the problem.

The pupils differentiate, deepen, and expand the content of the problems to the same extent, whether or not they give an explicit solution to the problem or not. The difference between the texts which have an explicit solution to the problem and the rest is that the issues of the problem have been integrated with the content of the text.

In all phases of problems, pupils who behave in the ways described above can be seen. In phases two to five, however, they also write about the arithmetic content of the problem, and incorporate calculations and arithmetic operations in their stories.

In contrast to the pupils' informal mathematical language, mainly a verbal language, stands the formal mathematical language, mainly a written language. In order for the pupils to become familiar with the symbolic language of mathematics they must reflect over *what* is being expressed and *how* it is being expressed in the formal

symbols. Writing can become a medium for thought because it allows time for reflection, and enables one to go back and think about what one has written. According to Vygotsky (1962), written language s a tool for thought and a medium for developing concepts. When the pupils write about different arithmetic problems and incorporate the formal symbol language in their stories, writing can act as a link in the chain of translation between the pupils' everyday lives and the formal symbolic language.

Talking while solving problems

The pupils talked together about the problems, both as a whole class and in small groups, generally of four pupils. The basis for the discussions in *the whole class* were the suggested solutions which each group had decided to present from those suggested by its members. In order for the pupils to realise that there are different ways of solving problems, and that certain types of problem can have several different answers, interest was not focused on "the right answer" but rather on confronting the different suggestions and discussing the different ways the pupils had gone about solving the problems. When comparison is being made between the different suggestions, the teacher directs the conversation in the classroom by putting questions or by encouraging the pupils to think about an issue. The teachers meet what the pupils say by repeating, reformulating, or explaining the pupils' statements, and thus evaluate what the pupils say. Thus the lessons are different in this respect from the question and answer pattern which occurs so frequently in the classroom (Gustavsson, 1984; Lundgren, 1983). A decisive difference from the traditional way of teaching is, however, that in the situations studied the starting point for the class discussions consists of the suggested solutions which the pupils themselves have produced. The content of the discussion therefore springs from the pupils' own thoughts and questions, which are made visible and thereby form a genuine lesson content. When the suggested solutions are discussed and compared, the pupils are given yet another chance to contribute to the lesson, in that the teacher takes pains to incorporate what they say in the teaching context, and to make use of the pupils' points of view to explain and clarify mathematical ideas and arithmetic problem solving. During these discussions the teacher pointed out that there are many ways of arriving at a solution to a problem, and encouraged the pupils to explain how they had thought while solving the problems. The different ways in which the pupils had illustrated a calculation or used algorithms were discussed, and the

different ways of going about sub-operations while making calculations were also observed and discussed.

When the pupils' discussions in *small groups* were analysed it was seen that the pupils were driven by either competition or consensus. For those who were competitive, the goal of the argumentation was that one of the suggestions should "win", while those who sought consensus aimed for the group to make a united decision.

During these small group discussions the pupils focussed to different degrees on the suggested solutions. When they did focus on them, they might focus on the mathematical solution, the written story or the picture. During the discussions the pupils differentiated the suggested problem solution and discussed different parts of it. Some of the pupils *deepened* their argumentation on one part of the suggestion and talked a good deal about just that part. Some of the pupils also *expanded* the content of the discussion by, for example, talking about the person who had made the suggestion. There were a smaller number of pupils who argued about different parts of a suggestion and who during the discussion integrated its content and argued about it as a composite entity.

During these discussions the pupils had certain difficulties in relating the suggested solutions which members of the group suggested and in reasoning thoroughly about the content of the different suggestions. This is presumably because of the complex nature of a group discussion. When the pupils interact and confront one another in debate, then socio-emotional factors have great importance for the discussion's development. In small group discussions, the pupils differentiate in the *conversational context* and turn their attention on the things which make up that context, namely the problem, the members of the group or themselves.

Mathematics is a communicative subject, so it would be natural to allow pupils to discuss and debate during mathematics lessons. According to the results of the Swedish National Evaluation project (NU), however, it is not often that pupils are given the chance to work together in mathematics teaching (Ljung & Pettersson, 1990). A typical pattern for a mathematics lesson is that the teacher goes through and explains or revises some item for the pupils. Then the pupils work alone at solving the relevant problems in the text-book for the greater part of the lesson. During mathematics lessons of this type the communication and discussion which occur are limited to the dialogue which takes place between the teacher and pupils who put direct questions.

The analysis of pupils' discussions in small groups showed that none of the pupils constantly focussed on the content of the problem during discussion. During interviews with both pupils and teachers in the participating classes, however, it came out that they considered that the group discussions had contributed to the pupils realising that problems can be solved in different ways, and that one can learn to solve problems when one listens to the suggestions of others. When pupils talking in small groups and in the whole class find out their classmates' different ways of solving a problem, they have the opportunity to reflect over the content of the problem and vary their perspective on the problem presented.

Counting while solving problems

While solving problems the pupils make use of mental arithmetic, finger counting and written notation in a varying and often complementary way. When they do calculations they carry out the procedure which is defined in the task or which they have chosen themselves while solving the problem. Their actions when they carry out numerical operations, therefore, are relatively limited in comparison with when they draw, write and talk, which means that they use their imaginations to a lesser degree to deepen and broaden the given content. When they carry out arithmetic operations, however, they differentiate within the calculation by focusing on the numbers and relating them to one another. The numbers in the arithmetic operations are integrated by a part-part-whole relationship to a composite entity which results in a numerical answer. The pupils have many ways of handling this part-part-whole thinking, using the media of mental counting, finger counting and written notation, in various combinations.

When using mental counting the pupils do sums in their heads without using finger counting or written notation. The pupils can then count on the number line, and they might even count on two parallel number lines. They use *doubles* such as 6+6 or 8+8, and they make use of remembered knowledge such of *number facts*. With bigger numbers, they often count the tens and the units separately. Some pupils visualise an algorithmic set-up and think of the sum written out in front of them. It also occurs that pupils make *transformations* of the numbers in the sums.

Pupils use their fingers in two different ways when finger counting. Sometimes they keep track of the numbers in the calculation, whereby one finger represents one number, and sometimes they group a number of fingers which together represent a number.

When pupils make use of written notation, they generally combine it with mental calculation, but they also combine the use of notation and finger calculation. Occasionally pupils make marks on the numerals with their pencil, more often they draw indexes such as lines, circles and arrows. They write out their sums in various ways, set out as algorithms or on a line, or simply note down the numbers involved.

The way in which a problem is formulated and its arithmetic content influence the method the pupils use. If a pupil does not have an effective method of calculation, which simplifies their thinking when they count in their heads, then when calculations become sufficiently complicated they meet unavoidable difficulties which means that the problem solving process comes to a halt. The use of doubles and number facts simplifies making calculations. Pupils who transform numbers also have a tool for simplifying and making numerical calculations easier to do in the head. Kilborn (1989) emphasises the importance of pupils learning effective techniques for carrying out arithmetic operations in their earliest mathematics teaching. Pupils should use methods which are capable of development, and which provide a firm foundation for learning further mathematics.

If pupils have difficulties with making mental calculations, it can be a hindrance which hampers the development of the problem solving process. Therefore the use of different sorts of representations such as indexes can be a useful tool for arithmetic problem solving. These notations can help the pupils to the pupils thinking being directed towards the problem formulation and the content of the given problem, instead of focusing on the numerical content of the problem.

Linking the content of teaching to the pupils' experience

The sequence of problems was shaped so that the pupils would be able to use their own language while solving arithmetic problems, and it was intended that the content of the problems would be linked with the pupil's experience and their own ideas. This raises the question, is there a risk that linking the problems to the pupils' everyday world and imagination might hide the mathematical content of the problem and that the content of the problem capture the pupils' interest to such an extent that the arithmetic content fades to disappear in a mass of exciting details.

When the pupils write about problems in the teaching situations which have been studied, however, it appears very clearly that they draw motifs and themes from their everyday world and their world of make believe, and it is quite clear that pupils base their writing about mathematical problems in the world they live in. In order for teaching in arithmetic problem solving to succeed for all pupils, therefore, it should take as its point of departure the pupils' own ways of handling problems and relate to their world of ideas. However, it is not sufficient just to link the content of problems to the pupils' own ideas; pupils must also receive the mathematical mental tools for solving problems. The question of the extent to which the content of a problem should be linked to the pupils' experience and make believe should thus be reformulated to refer to the different ways in which their attention can be focused on the arithmetic content of a problem, and in which ways the arithmetic content can be brought to the fore.

One way of focusing on the arithmetic content of a given problem might be to put questions to the pupils about just that content, or to give them the tools to use, in the form of various problem solving strategies. An increase in technification of the problem solving process, however, is of no help in directing attention towards the content of a given problem. On the contrary, an extensive system of rules can reduce a pupil's chances of understanding a problem's content because they focus rather on giving an answer to the question or to applying a given procedure (Marton, 1976). One way of counteracting such technification of the problem solving process is to let pupils meet problems in which the arithmetic content is not constantly presented in the same way. The pupils' thinking develops thereby, as their world of ideas meets the problem's content. When pupils meet different types of problem in which the arithmetic content is presented in different ways, their chance of varying their perspective on arithmetic problems and problem solving. By experiencing arithmetic problem solving in a variety of content-related contexts, and by comparing, discussing and reflecting over the content of different types of problem, pupils can discover that mathematics can appear in different contexts and in different ways, which makes it simpler for them to observe and become aware of the arithmetic content in a given problem.

Problem solving: A relation between child and problem

The data from the classroom study and the interview study has been the basis for a phenomenographic analysis and interpretation of how pupils understood and conceptualised the different types of problem which comprised the problem sequence. This analysis has resulted in a description of the pupils' relation to arithmetic problems and arithmetic problem solving, which constitutes the main result of the investigation. The pupils' relation to arithmetic problems and arithmetic problem solving in a school context appears in their orientation, approach, and conceptions.

All pupils are aware of being in a situation where a problem has to be solved, and they have earlier experience of solving problems in a school situation. While solving a problem, pupils recognise in the current situation the experience and emotions from earlier problem solving in school, and these are reflected in their orientation to the situation. If a pupil's experience includes earlier successful attempts to solve problems, that pupil's ambition and self-confidence is so much the stronger. On the other hand, earlier failure will weaken the pupil's trust in him/herself and his/her ability to succeed. A pupil's earlier experience of problem solving, which to a large extent involves emotional and social aspects, is decisive for his/her orientation to the presented problem in the given situation, and influences their intention in the problem solving situation.

Pupils have different goals or intentions in a problem solving situation. Some are primarily directed towards giving an answer to the problem, which is referred to as having a product-intention. Others have an intention to search for an answer to the problem, and that is referred to as a process-intention.

Pupils with a product-intention have a *taken-for-granted orientation*. They apply a well-known method of solution which they have used before and solve the given problem according to a definite pattern. They are not captured by the problem solving process nor do they try alternative methods of solution. The problem solving process has set into a definite shape.

Pupils with a process-intention and are mainly directed towards finding an answer to the problem, have an *open orientation*. These pupils are captured by the problem solving process. They put forward hypotheses, try different alternatives way of solving problems, and can vary their perspective on presented problems.

In a problem solving situation, the pupils' experience is confronted with the content of the given problem. It is this meeting between pupil's experience and the content of the problem which determines the development of the problem solving process. A pupil's preconception of a given problem gives them a diffuse understanding of the whole problem from the outset. The analysis of the problems presented in all the phases showed that pupils approach the content of a problem in different ways while solving the problems. The pupils differentiate within the problem and while solving it they relate different parts to one another. When the pupils relate these parts and integrate them to a composite entity, the problem takes shape for the pupils and they understand and conceptualise the problems in different ways. Some pupils make suggestions for solutions which lack any mathematical aspects. The majority, however, give solutions which include sets, numbers and arithmetic operations. When pupils give mathematical solutions they either estimate an answer or that perform calculations.

The pupils who have a taken-for-granted orientation focus on the numbers and operations in a problem. When they focus on numbers and base their solution attempt on them they have an *operand-approach*. They estimate an answer to the problem and fail to make any calculations. In other cases, where pupils are focussed on numbers and operations in the problem they have a *procedure-approach*. They focus on carrying out calculations to arrive at a solution to the problem.

Pupils with an open orientation can have either a hypothesis approach or a gestalt approach. Pupils with a *hypothesis approach* are not principally directed towards numbers and operations in the problem, but towards the parts of the problem's content, and towards trying to see their internal relationships. These pupils, however, do not relate the given numbers to the relevant parts of the content of the problem. In cases where pupils have a *gestalt approach* they are directed towards all the parts of the content of the problem and the internal relationship between them.

An analysis of the pupils' different conceptions of the five different types of problem shows that the pupils with a taken-for-granted orientation to problem solving experience the problem's surface structure. They see the level of difficulty of the problem, for example, expressed as easy or hard, and they see the type of the problem, for example, a calculation or a verbal problem. In other cases, pupils with an open orientation in a problem solving situation experience the problem's deep structure. They see the

relations between the different parts of the content of the problem, which means that they also are able to experience the problem's arithmetic structure. A summarising description of pupils' orientation, approach and conceptions can be illustrated as in Figure 2.

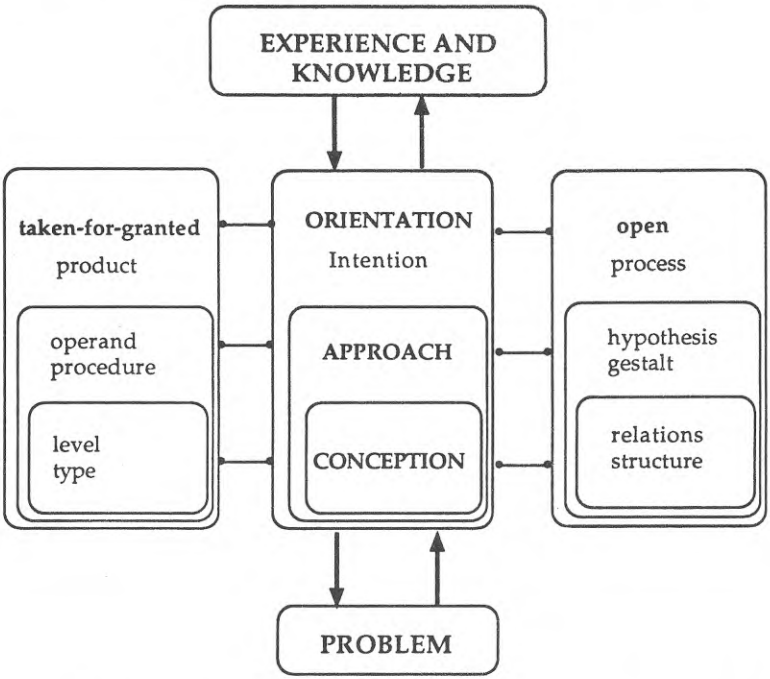


Figure 2. *Pupils' experience and understanding of arithmetic problems in a school context*

It must be emphasised that it is not the pupils as individuals who have been categorised here, but it is the various ways in which pupils go about the problems and the conceptions which appeared while they were solving them which have formed the basis of the analysis. In the problem solving situation, a pupils can shift between orientation and might go from a taken-for-granted orientation to an open orientation. There is a degree of simultaneity in pupils' orientation, approach and conceptions which means that they are mutually related. As is seen from the figure above, pupils can not have, for example, a taken-for-granted orientation and a hypothesis approach. If a pupil's orien-

tation to a problem shifts, then the pupil might change conception of the problem's content as well; and in cases where a pupil's conception of a problem changes it can happen that his or her orientation changes too.

The dynamic nature of the problem solving process

The aim of the phenomenographic analysis has been to describe how pupils experience, understand and conceptualise different types of arithmetic problem which they meet in a school situation. The result is a descriptive model, a composite pattern, or a chart of the pupils' various ways of understanding the given problems and arithmetic problem solving. This map of how the pupils experience, understand and conceptualise problem solving gives at the same time a characterisation of the nature of the problem solving process.

When pupils solve arithmetic problems, the problem solving process is to varying degrees characterised by the fact that the process has a direction, reference is taken in the problem, and that the process includes a movement. Direction, reference and movement have a dialectic relationship and do not characterise the problem solving process merely in a sequential order.

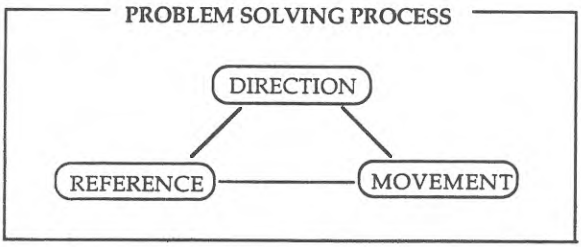


Figure 3. *The dynamic nature of the problem solving process*

The pupils have an intuitive sense and understanding of the problem which means that the problem solving process can take different *directions*. The pupils' preconception of the problem appears in their intention on the occasion of solving it. Pupils can have either a product-intention or a process-intention. On the occasions when pupils have a product-intention they have their

sights on producing an answer to the given problem, while when they have a process-intention they have their sights on finding an answer to the given problem. In the cases where a pupil has a product-intention, the problem solving process takes another form than when they have a process-intention. When pupils have a product-intention their conception of the arithmetic content of the problem is to give a numerical answer or to perform an arithmetic calculation. The direction of the problem solving process is not therefore given by the content of the problem under consideration. When, on the other hand, pupils have a process-intention and are directed towards finding an answer to the problem by relating the parts of the problem to one another, the direction is given by the arithmetic content and structure of the problem.

Pupils interpret a given problem with respect to an external and an internal reference frame. The external reference frame is constituted of the pupils' collected experience and the inner reference frame of the given problem's content and form. The pupils' interpretation of the problem against the background of the external and internal reference frames determines the development of the problem solving process. The pupils focus on different parts of the content of the problem which then make up the *reference* for solving the problem. In some cases pupils refer to numbers or numbers and operations in the problems, while in other cases they refer to all the parts of the content which are relevant for a solution of the problem. Which parts of the arithmetic content the pupils refer to carry consequences for how the problem solving process takes shape, and thereby characterises the nature of the problem solving process.

The different ways in which the pupils differentiate, relate and integrate the different parts of the content gives a picture of the nature of the *movement* which characterises the problem solving process. This movement which distinguishes the pupils' thinking during the problem solving process is, in common with the direction, influenced by orientation and intention. For pupils with a taken-for-given orientation to problem solving thinking moves along a predetermined path and movement is tied to a fixed movement-schema. For pupils with an open orientation, on the other hand, thinking is marked by a free and unfettered movement.

The development of the problem solving process is determined by how pupils experience and understand the presented problem. A pupil's understanding of a problem arises in an interplay of former experience, the problem situation and the specific problem. This

understanding appears in the pupil's orientation and in the problem solving situation, the problem approach and the pupil's conception of the problem. The pupils' orientation, approach and conception indicate how the problem solving process will take form, indicate its direction, reference and movement, and thereby determine its character and outcome. At a general level of description, the problem solving process is characterised by direction, reference and movement, and determines the outcome of the a problem solving attempt.

HOW CAN PUPILS' PROBLEM SOLVING PROCESSES BE INFLUENCED?

The pupils' problem solving process takes form in their orientation, approach and conception. In the teaching situations which have been studied here it is seen that while solving problems pupils can shift their orientation and go over from a taken-for granted orientation to an open orientation, which means that their approach to the problem and their conception of the problem also changes. How can this shift be encouraged, thereby breaking down their taken-for-granted orientation? How can the opportunity for a conceptual shift be promoted, or in other words, how can it be made possible for the individual pupil to go from understanding a problem in one way to understanding it in another qualitatively different way?

In this investigation pupils' problem solving has been illuminated on the basis of a number of assumptions about how teaching of arithmetic problem solving should be constituted in order to offer a favourable environment for developing their problem solving capability. The investigation has considered different teaching contexts which are believed to favour this capability. There were three intentions which guided the planning and formulation of the lessons. The pupils should be able to use their own language while solving problems, carry out different actions, and vary their perspectives on arithmetic problem solving and on the presented problems. These intentions have been expressed in concrete terms by taking arithmetic problems as the basis for teaching and incorporating the practice of procedures in the problem solving process. The problems presented have been linked to the pupils' own experiences and worlds of thought. To give pupils the opportunity to carry out different actions they have drawn, written and talked while solving problems. Various types of problem have been presented and the pupils have discussed the similarities and differences between them. The pupils have worked for longer than

usual at solving individual problems, had the opportunity to present their solutions to their friends and discuss different suggestions. When confronted by the different suggested solutions the pupils have been able to reflect on the problems, look at a problem from different perspectives and observe that a problem can be solved in a number of different ways.

Teaching of arithmetic problem solving which departs from the traditional training of techniques is believed to militate against the number and operation manipulation which characterises the pupils with a taken-for-granted orientation to arithmetic problem solving. Giving pupils the opportunity to use the formal mathematical symbol language in different contexts is believed to offer a contribution to pupils shifting their orientation, giving up their intention to get an answer as quickly as possible and getting involved in the problem solving process. Mathematics teaching which gives the pupils the chance to look at problems from different perspectives and reflect over them increases their possibilities of assuming an open orientation to a problem. They then focus on the content of the problem, see the different aspects of the problem and the relations between them, and experience the problem's mathematical structure.

Certain pupils are extremely good at learning to solve arithmetic problems while others are not as successful. When one asks why that is, there are many different answers and different factors can be put forward to explain why pupils profit from a teaching content to different degrees. For example, it is a fact that pupils grow up in different environments and live in very different social conditions, and these influence the extent to which they gain from teaching in school. It is also true that pupils have different intellectual capabilities with respect to learning a particular sort of knowledge. When a teacher meets a pupil in a teaching situation, however, there is little that can be done about these factors which underlie the pupil's learning. What the teacher can do, on the other hand, is to base teaching on how the pupils experience it. The pupils' different ways of experiencing arithmetic problems and problem solving are formed in the meeting between their own way of thinking, the teaching situation and the content of the lessons. The problems the pupils meet have a meaning for them and the problems present themselves to the pupils' consciousness in the light of their earlier experiences of an emotional, a social and an intellectual nature. Teaching of arithmetic problem solving should therefore to an increased extent give the pupils the opportunity to work from their own experiences and to form relations and

mathematical structures on the basis of their own ideas. This can be achieved by increasing the variation in the content and form of the teaching. In teaching of arithmetic problem solving pupils should be given the opportunity to use different expressive media and forms of activity. In addition, the possibilities offered by the teaching content should illuminate mathematical ideas and concepts in the teaching situation.

To enable the pupils to shift from a taken-for-granted orientation to an open orientation to a larger extent, so that instead of having the intention of getting an answer to problems as quickly as possible they go over to one of actively seeking answers, teaching should take its point of departure in the pupils' own ways of experiencing arithmetic problems and problem solving.

REFERENSER

Ahlberg, A., Emanuelsson, L., & Olsson, L-G. (1992). Sammanfattning av Standards för K-4 (5-9 år). I G. Emanuelsson, B. Johansson, & T. Lingefjärd, (Red.). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning* (s 109-146). (Rapport 1992:0). Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.

Ahlberg, A. (1990). Att lösa problem i grupp. I G. Emanuelsson, B. Johansson, & R. Ryding, (Red.). *Problemlösning* (s 85-99). Lund: Studentlitteratur.

Ahlberg, A. (1981). *Hur ser barn på läsning?* 60-poängsuppsats i pedagogik, Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet.

Annerstedt, C. (1990). *Idrottslärarna och idrottsämnet. Utveckling, mål, kompetens - ett didaktiskt perspektiv.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Barnes, D., & Todd, F. (1984). *Communication and learning in small groups.* London: Routledge & Kegan Paul.

Baroody, A. J. (1987). *Childrens Mathematical Thinking.* New York: Teachers College Press.

Bengtsson, J. (1987 a). *Edmund Husserls filosofi: En introducerande översikt över hans fenomenologi och dess inflytande* (Rapport 90). Göteborg: Göteborgs universitet, Sociologiska institutionen

Bengtsson, J. (1987 b). *Maurice Merleau-Pontys filosofi. Några grunddrag* (Rapport 91). Göteborg: Göteborgs universitet, Sociologiska institutionen,

Bengtsson, J. (1988). Fenomenologi: Vardagsforskning, existensfilosfi, hermeneutik. I P. Månson (Red.). *Moderna samhällsteorier* (s 1-35). Stockholm: Bokförlaget Prisma.

Bell, A. W., Costello J. & Kuchemann, D. (1983). *A review of Research in Mathematical Education. Part A. Research on Learning and Teaching.* Windsor: NFER-NELSON.

Bellack, A. A. (1978). Metoder för observation av lärares och elevers klassrumsbeteende. I C. Westin, (Red.). *Pedagogisk observation* (s 101-132). Stockholm: PAN/Norstedts.

Bishop, A. J., & Nickson, M. (1983). *A review of research in Mathematical Education Part B. Research on the social Context of Mathematics Education.* Windsor: NFER-NELSON.

Bishop, A. J. (1988). Mathematical Education in it's Cultural Context. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 179-191.

Boden, M. (1979). *Piaget.* London: Fontana Press.

Brown, A, (1978). Knowing when, where and how to remember: A problem of metacognition. I R. Glaser (Ed.). *Advances in instructional psychology*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Charles, R. & Lester, F. (1982). *Teaching Problem Solving:What Why & How*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Carpenter, T., Moser, J. & T. Romberg, (Eds.). (1982). *Additon and subtraction; A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T. & Moser, J. (1982). The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills. I T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg, (Eds.). *Additon and subtraction; A cognitive perspective* (s 10-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T. (1985). *Children's learning: A critical variable in curriculum reform in mathematics*. Wisconsin-Madison: University of Wisconsin-Madison.

Carraher, T., Carraher, D. & Schliemann, A. (1985). Mathematics in the Streets and in Schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*, 21-29.

Comte, A. (1979). *Om positivismen*. Göteborg: Bokförlaget Korpen.

Curcio, F. R. (Ed.). (1987). *Teaching and Learning. A problemsolving focus*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Lawrence Erlbaum.

Dahlgren, L. O. (1986). Vetenskaplig och vardaglig vardagsuppfattning: Om det didaktiska värdet av en svårigheternas grammatik (s 108-119). I F. Marton (Red.). *Fackdidaktik I*. Lund: Studentlitteratur.

Dahlgren, L. O. (1989). Undervisningen och det meningsfulla lärandet. I R. Säljö m.fl. *Som vi uppfattar det. Elva bidrag om inlärning och omvärldsuppfattning*. Lund: Studentlitteratur.

Dahlgren, G. & Olsson, L-E. (1985). *Läsning i barnperspektiv*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Dahlin, B. (1989). *Religionen, själen och livets mening*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and it's Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the learning of Mathematics, 5*, 44-48.

Damon, W. & Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International Journal of Educational Research, 13* (1), 9-19.

Donaldson, M. (1978). *Hur barn tänker*. Lund: Liber.

Doverborg, E. (1992). *Förskolans matematik*. Dokumentation av 7:e Matematikbiennalen. Göteborg: Matematikavdelningen, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In Janvier, C. (Ed.). *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics* (s 109-123). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Easley, J., Stake, B. & Johnson, W. (1984). *Development and Evaluation of Dialogic Teacher Education in Primary Mathematics and Science Problem Solving*. Urbana-Champaign: College of Education, University of Urbana-Champaign.

Ekholm, M., & Runesson, U. (1990). *Matematikprov och Lärarprestation*. Linköping: Fortbildningsnämnden, Linköpings universitet.

Fennema, E. & Peterson, P. (1985). Autonomous Learning Behavior: A possible Explanation of Gender-related Differences in Mathematics. I L.Wilkenson (Eds.). *Gender influences in classrom interaction*. London: Academic Press.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. I L. Resnick (Ed.). *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flegg, G. (1984). *Numbers: Their History and Meaning*. Harmondsworth: Penguin.

Franke, A. (1990). *Handledning i Praktiken: En studie av handledares och lärarkandidaters uppfattningar av handledning i lärarutbildningens praktikdel*. Linköping Studies in Education. Dissertation No. 30. Linköpings universitet.

Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting on solution procedure in additon. I T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg. (Eds.). *Additon and subtraction; A cognitive perspective* (s 9-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fuson, K. C., & Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. I H. P. Ginsburg (Ed.). *The development of matehematical thinking* (s 49-107). New York: Academic Press.

Garofalo, J. & Lester, F. K. (1985). Metacogniton, Cognitive monitoring and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education 16*, (3), 163-176.

Garofalo, J., Kroll, D. L. & Lester, F. K. (1987). Metacogniton and mathematical problem solving: Preliminary research finding. I J. C. Bergeron, N. Herscovies. & C. Kieran (Eds.). *Proceedings of the Eleventh International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2*. Montreal: PME.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1983). The child's understanding of number. I M. Donaldson, R. Grieve. & C. Pratt (Eds.). *Early childhood development and education*. Oxford: Basil Blackwell.

Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic: The learning process*. New York: Van Nostrand.

Ginsburg, H. (1982). The development of Addition in the Contexs of Culture, Social Class, and Race. I T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg. (Eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s 191-209). New York: Lawrence Erlbaum.

Ginsburg, H. (Ed.). (1983). *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

Goldin, G.A. (1985). Thinking Scientifically and Thinking Mathematically: A discussion of the paper by Heller and Hungate. I E. A. Silver. (Ed.). *Teaching and learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. (s 113-122) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Greeno, J. G., Riley, M. S. & Gelman, R. (1984). Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology, 16*, 1-49.

Groen, G. & Kieran, C. (1983). In search of Piagetian mathematics. In H. P. Ginsburg (Eds.). *The development of mathematical thinking*. (s 351-375). New York: Academic Press.

Gustafsson, C. (1984). *Några huvuddrag i klassrumsforskningens utveckling och nuvarande inriktning*. Pedagogisk forskning i Uppsala 60. Pedagogiska institutionen, Uppsala universitet.

Hart, K. (1988). Ratio and Proportion. I J. Hiebert & M. Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Vol 2*. (s 198-219). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Hayes, J.R. (1973). On the function of visual imagery in elementary mathematics. In W. Chase (Ed.). *Visual Information Processing*. (s 177-214). New York: Academic Press.

Hempel, C. (1966). *Vetenskapsteori*. Lund: Studentlitteratur.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1982). Piagetian tasks as readiness measures in mathematical instruction: A critical review. *Educational Studies in Mathematics, 13*, 329-345.

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and Procedurial knowledge: The case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedurial Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis: I J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and Procedurial knowledge. The case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J. & Behr, M. (Eds.). (1988). *Number Concepts and Operations in the Middle Grade*. National Council of teachers of Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Holmberg, L. & Petersson, A. (1985). *Datorer på låg-och mellanstadiet?* Lund: Studentlitteratur.

Hughes, M. (1986). *Children and number. Difficulties in Learning Mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.

Husserl, E. (1970) *The Crises of the European Sciences and the Transcendental Phenomenology*. Evanston: Northwestern University Press.

Husserl, E. (1982). *Logical investigations, Vol I-II*. London: Routledge & Keagan Paul.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jaworski, B. (1990). "Is" versus "seeing as": constuctivism and the mathematics classroom. I D. Pimm, (Ed.). *Mathematics Teachers and Children*. (s 273-287). London: Hodder and Stoughton.

Johansson, B., Marton, F. & Svensson, L. (1985). An approach to describing learning as change between Qualitatively different conceptions. I A. L. Pines & L. H. T. West (Eds.). *Cognitive structure and conceptual change*. New York: Academic Press.

Johnsen Høines, M. (1990). *Matematik som språk*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Jonsson, K.G. (1919). *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*. Uppsala: Almkvist&Wiksell.

Johnson, D. & Johnson, R. (1989). *Cooperative Learning in Mathematics Education*. (s 234-245). New Jersey: NCTM Yearbook 1989.

Kaput. J. (1987). Representations Systems and Mathematics. I C. Janvier (Ed.). *Problems of Representation in the teaching and learning of mathematics*. (s 19-26). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Kerlinger, F. N. (1970). *Foundations of Behavioral Reserach: Educational and Psychological Enquiry*. London: Holt Rinehart & Winston Inc.

Kilborn, W. (1979). *Pump-projektet. Bakgrund och erfarenheter*. (Utbildningsforskning. FoU Rapport 37). Stockholm: Liber.

Kilborn, W. (1989). *Didaktisk ämnesteori i matematik*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Kilpatrick, J. ((1985). A retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. I E. A. Silver. (Ed.). *Teaching and learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. (s 1-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, J. (1987). *What Constructivism Might Be in Mathematics Education*. I J. C.Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran. (Eds.). *Proceedings of The Eleventh International Conference of Psychology of Mathematics Education. PME- XI. Vol I*, (s 3-27). Montreal.

Kroksmark, T. (1987). *Fenomenografisk Didaktik*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Krutetskii, V.A. (1976). An analyses of Individual Cases of Mathematical Giftedness in Children (s 193-223) I J. Kilpatrick & I. Wirszup, (Eds.). *The Psychology of Matematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Kvale, S. (1989). To validate is to question. I S. Kvale (Ed.). *Issues of validity in the qualitative research.* (s 73-92). Lund: Studentlitteratur.

Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, 3 (4), 305-342.

Lancy, D. F. (1983). *Cross-cultural studies in cognition and matematics.* New York: Academic Press.

Larsson, I. (1973). *Individualiserad matematikundervisning: En bok om IMU-projektet.* Malmö: Hermods.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lester, F. (1985). Methodological Considerations In Research in Mathematical Problem-Solving Instruction. I E. A. Silver (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* (s 41-67).Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lester, F. (1986). Why is problem solving such a problem? I J. C. Bergeron, N. Herscovies & C. Kieran (Eds.). *Proceedings of the Eleventh International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2.* Montreal: PME.

Lester, F. (1988). Reflections about matehematical problem solving research. In R. Charles & E. Silver (Eds.). *The teaching and asessing of mathematical problemsolving..* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Lawrence Erlbaum.

Lester, F. (1989). *The role of Metacognition in Mathematical Problemsolving: The study of Two Grade Seven Classes.* (Final Report) Bloomington, IN: School of Education Indiana University.

Ljung, B-O. (1990). *Matematiken i nationell utvärdering. Vad barnen tycker om matematik i årskurs 5.* (Primgruppen Rapport 3). Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.

Ljung, B-O., & Pettersson, A. (1990). *Matematiken i nationell utvärdering. Kunskaper och färdigheter i årskurserna 2 och 5.* (Primgruppen Rapport 5). Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.

Lundgren, U. P. (1983). *Att organisera omvärlden.* Stockholm: Liber.

Lybeck, L. (1981). *Arkimedes i klassen. En ämnespedagogisk berättelse.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lybeck, L., Strömdahl, H., & Tullberg, A. (1985). *Student´s conception of amount of Substance and its SI unit 1 mol. A Subject Didactic Study.* (Rapport,1985:4). Göteborg: Institutionen för pedagogik, Göteborgs universitet.

Lybeck, L. (1986). Om didaktisk kunskapsbildning i matematik och naturvetenskapliga ämnen. I F. Marton (Red.). *Fackdidaktik III* (s 149-189). Lund: Studentlitteratur.

Malmer, G. (1984). *Matematik - Ett ämne att räkna med.* Solna: Esselte studium.

Marton, F. (1975). On non-verbatim learning: level of processing and level of outcome. *The Scandinavian Journal of Psychology 16*, 273-279.

Marton, F. (1976). On non-verbatim learning: the erosion effect of a task-induced learning algorithm. *The Scandinavian Journal of Psychology, 17*, 41-48.

Marton, F., Dahlgren, L.O., Svensson, L., & Säljö, R. (1977). *Inlärning och omvärdsuppfattning*. Stockholm: AWE/Gebers.

Marton, F. (1981). Phenomenography - Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science, 10*, 177-200.

Marton, F. & Säljö, R. (1984). Approaches to learning. I F. Marton, D. Hounsell & N. Entwistle (Eds.). *The experience of learning* (s 56-70). Edinburgh: Schottish Academic Press.

Marton, F. (1986). Vad är fackdidaktik? I F. Marton (Red.). *Fackdidaktik I* (s 10-54). Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. (1988). Describing and Improving Learning. I R.R. Schmeck (Ed.). *Learning strategies and learning styles* (s 53-82). New York: Plenum.

Marton, F. (1988). Phenomenography: Exploring Different Conceptions of Reality. I D. Fetterman (Ed.). *Qualitative Approaches to Evalution in Education* (s 153-176). New York: Praeger.

Marton, F. & Neuman, D (1989). Constuctivism and Constitutionalism. Some Implications for Elementary Mathematics Education. *Scandinavian Journal of Educational Research, 33*, 35-46.

Marton, F. & Neuman, D (1990). *The perceptibility of numbers and the origin of arithmetic skills* (Report 1990:05) Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.

Mellin-Olsen, S. (1989). *Techer's didactical concepts of knowledge*. Paper presenterat vid Human Science Research Conference. Århus, Danmark.

Mellin-Olsen, S. (1991). *Hvordan tenker lærere om matematik-undervisning?* Bergen Lærerhøgskole Landås, Norge.

Merleau-Ponty, M. (1976). *Phenomenology of Perception*. London: Routhledge & Keagan Paul.

NCTM, National Councils of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

Neisser, U. (1978). *Kognition och verklighet. Den kognitiva psykologins principer och konsekvenser*. Stockholm: Wahlström och Widstrand.

Nesher, P. (1982). Levels of Description in the Analysis of Additon and Subtraction Word Problem. I T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg. (Eds.). *Additon and subtraction; A cognitive perspective* (s 25-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills. A phenomenographic approach.* Göteborg:Acta Universitatis Gothoburgensis.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter.* Stockholm: Liber.

Noddings, N. (1985). Small groups as a setting for research on matematical problem solving. I E. A. Silver (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Norman, D. A. (1982). *Learning and memory.* San Francisco: Freeman.

Osborne, R. & Wittrock, M. (1983). Learning Science: A generative process. *Science Education, 67,* 489-508.

Palincsar, A., Stevens, S. & Gavelek, J. (1989). Collaborating with teachers in the interest of student collaboration. *International Journal of Educational Research, 13* (1), 42-53.

Piaget, J. (1969). *The child's conception of number.* London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1970). *Structuralism.* New York: Basic Books.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pramling, I. (1983). *The child's conception of learning.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Pramling, I. (1987). *Metainlärning i förskolan: En fenomenografisk studie.*(Publikation 1987:09). Göteborg: Institutionen för pedagogik, Göteborgs universitet.

Pramling, I. (1988). *Att lära barn lära.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Renström, L. (1988). *Conceptions of matter. A phenomenographic approach.* Göteborg: Acta Universitatis Gothobergensis.

Resnick, L. (1982). Syntax and Semantics in Learning to Subtract. I Carpenter, T. Moser, J. Romberg, T. (Eds.). *Addition and Subtraction* (s 137-156). New York: Lawrence Erlbaum.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. I H. Ginsburg (Ed.). *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press.

Resnick, L. (1987). Learning in School and Out. *Educational Researcher, 16* (9), 13-20.

Resnick, L. (1988). Treating Mathematics as an Ill-Structured Discipline. I R. Charles & E. Silver. (Eds.). *The teaching and Assesing of Mathematical Problem Solving* (s 32-59). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics Lawrence Erlbaum.

Romberg, T. A. (1982). An emerging paradigm for research on adddition and subtraction skills. I T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (s 1-7). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). *Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving. Education and Mathematics*. Berkeley, CA: University of Califonia.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the Fuss about Metacognition? I A. Schoenfeld (Ed.). *Cognitive Science and Mathematical Education* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1988). Problemsolving in context(s). I R. I. Charles, & E. A. Silver (Eds.). *The teaching and assessing of Mathematical Problem Solving* (s 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Scribner, S. (1984). Studying Working Intellligence. I B. Rogoff & J. Lave, (Eds.). *Everyday Cognition: It's development in Social Context* (s 9-40). Cambridge, Ma: Harward University Press.

Siegler, R. S. & Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. I H. W. Reese & L. P. Lipsitt, (Eds.). *Advances in child development and behavior, Vol 16*. New York: Academic Press.

Silver, E. A. (1981). Recall of mathematical problem information: Solving related problems *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 54-56.

Silver, E. (Ed.). (1985)., *Teaching and Learning Mahematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Skinner, B. S. (1965). *Science and human behavior*. New York: Free Press.

Skolöverstyrelsen. (1980). *Läroplan för grundskolan*. Allmän del. Stockholm: Liber Utbildningsförlag.

Snow, R. E. & Yalow, E. (1982). Education and intelligence. I R. J. Sternberg (Ed.). *Handbook of Human Intelligence* (s 493-585). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1987). *Historical Perspectives on Problem Solving i the Mathematics Curriculum*. Paper presenterat vid The Problem solving Research Conference, San Diego, USA.

Steffe, L. P., von Glaserfeld, E., Richards, J. & Cobb, P. (1983). *Children's counting types*. New York: Praeger.

Steiner, H-G. (1980). (Ed.). Comparative Studies of of Mathematical Curricula. Change and Stability 1960-1980. *IDM-Mat.Stud. Vol 19*. Bielefeld: IDM.

Steiner, H-G. (1987). Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education. *FLM. 7* (1), 7-13. Bielefeld: IDM

Steiner, H-G. & Vermandel, A. (Eds.). (1988). Foundations and Methodology of the Dicipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics). *Proceedings of the 2nd TME- conference*. Bielefeld: IDM.

Sternberg, R. J. (1982). A componential approach to intellectual development. I R,J, Sternberg (Ed.).*Advances in the psychology of human intelligence: Vol.1* (s 413-463). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Svensson, L. (1984). *Människobilden i INOM-gruppens forskning: Den lärande människan* (Rapport 1984:03). Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogisk.

Svensson, L. (1986). Färdighet i att lära. I F. Marton, D. Hounsell & N. Entwistle. (Red.). *Hur vi lär* (s 81-101). Stockholm: Rabén & Sjögren.

Svensson, L. (1989). Fenomenografi och kontextuell analys. I Säljö, R. m. fl. *Som vi uppfattar det. Elva bidrag om inlärning och omvärldsuppfattning* (s 33-52). Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (1982) *Learning and understanding*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Säljö, R. & Wyndhamn, J. (1987). The Formal Setting as Context for Cognitive Activities. An Empirical Study of Arithmetic Operations under Conflicting Premisses for Communication. *European Journal of Psychology of Education, 11* (3), 233-245.

Säljö, R. (1989). Kommunikativ praktik och institutionell inlärning. I Säljö, R. m. fl. *Som vi uppfattar det. Elva bidrag om inlärning och omvärldsuppfattning* (s 1-18). Lund: Studentlitteratur.

Sörbom, G. (1984). *Bildvärldar*. Stockholm: Liber.

Theman, J. (1983). *Uppfattningar av politisk makt*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Thompson, J. (1988). *Historiens matematik. Finit del*. Karlstad: Högskolan i Karlstad.

Thorndike, E. (1922). *The psychology of arithmetic*. New York: The Macmillan Company.

Threadgill-Sowder, J. (1985). Individual Differences and Mathematical Problem Solving. I E. Silver, (Ed.). *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (s 331-344). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Thurstone, L. (1960). *The nature of intelligence*. New York: Paterson.

Uljens, M. (1988). *Fenomenografi - forskning om uppfattningar* (Publikation 1988:07). Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.

Unenge, J. (1989). *Skolmatematik - För vem och till vad?* (Alm-projektet Rapport 1). Jönköping: Högskolan i Jönköping.

Webb, N. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Educational Research, 13* (1), 89-98.

Wenestam, C. G. & Wass, H. (1987). Swedish and U.S children´s thinking about death: A qualitative study and cross-cultural comparison. *Death studies, 11*, 99-121.

Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems.I T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg, (Eds.). *Addition and Subtraction* (s 39-59). New York: Lawrence Erlbaum.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper & Row.

Wigforss, F. (1946). Barnens färdighet i räkning vid skolgångens början. *Pedagogiska skrifter 191*. Stockholm: Svensk lärartidnings förlag.

Wistedt, I. (1990). *Vardagskunskaper och Skolmatematik*. (Vardagskunskaper och skolmatematik. Rapport 1). Stockholm: Stockholms universitet, Pedagogiska institutionen.

Wistedt, I. (1991). *Att se matematiken i vardagen*. (Vardagskunskaper och skolmatematik Rapport 2). Stockholm: Stockholms universitet, Pedagogiska institutionen.

von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. I C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (s 3-19). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Vygotsky, L.S. (1962). *Thought and Language: The devolopment of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Ma: M. I. T. Press.

FAS 1

Problem 1.1
Lena och Per är på hemväg från skolan. De bor i samma hus och har samma dagmamma. Hon heter Karin och bor längst ner i huset. Från hennes kök kan man gå rakt ut på den gröna gräsmattan genom en balkongdörr som ofta står öppen.

När barnen kommer från skolan brukar Karin alltid vara hemma och vänta på dem med mjölk och goda smörgåsar. Lena och Per är hungriga på eftermiddagen och ser fram emot att få äta. dag kommer Lena och Per något tidigare än vanligt, eftersom de har varit på utflykt i skogen med klassen. När de går över gräsmattan ser de en stor, svart katt som sakta smyger in bakom ett träd. Per försöker locka på katten, men den försvinner in bland buskarna.

När barnen kommer in i hallen och ropar på Karin, är det ingen som svarar. Karin är inte där. De tar av sig jackorna, hänger upp sina skolväskor på kroken och går sedan ut i köket. På tröskeln stannar Per förfärad. Det är en förskräcklig röra i köket. På bordet ligger smörgåsar huller om buller. I fönstret är en blomma omkullvält och skräppåsen ligger på golvet med allt skräp, kaffesump och äggskal utspritt på golvet.

Lena ropar på Karin och rusar in i vardagsrummet. Där är det också rörigt. En blå vas som brukar stå på glasbordet ligger trasig på golvet. Lena och Per tycker att det är konstigt och lite otäckt. De blir förvånade och oroliga.
-Vi måste försöka hitta Karin, säger Lena.
-Ja, vi måste ta reda på vad som har hänt, svarar Per.

Problem 1:.2
Skogen var tät. Ljuset silade ner mellan granarnas täta grenar. Per och Lena gick långsamt framåt. De tittade ner på marken och lyfte försiktigt på nedfallna grenar. De letade efter ett blåsippsställe som Lena hade hittat i skogen förra våren. Lena kom mycket väl ihåg hur glad och förvånad hon blivit när hon plötsligt stod framför blåsipporna mitt inne i skogen. Blommorna lyste så intensivt blått och de växte tätt samlat invid kanten av ett berg.
Nu ville Lena visa Per var blåsipporna växte, därför hade barnen gått långt in i skogen. De hade letat ganska länge, men ännu inte hittat några blommor.
-Vitsippor finns det hur mycket som helst, sa Per
- Blåsipporna kanske inte har kommit upp ännu, sa Lena Det kanske är för tidigt.
-Vi får ändå inte plocka blåsipporna, sa Per. De är fridlysta.
- Men de är så fina att titta på, sa Lena
Plötsligt stannade Lena. Skogen blev glesare och de kom fram till en glänta Det var en liten öppen plats, där det var ljust och varmt.
-Vad är det som står där? frågade Lena
-En barnvagn, svarade Per. Det ligger en bäbis i den.
Barnen smög fram och kikade ner i barnvagnen.
- Hur har den kommit hit? Det finns inga vägar så här långt in i skogen, sa Per
- Det verkar konstigt, sa Lena.
-Var är mamman? undrade Per. Hon kan väl inte ha övergivit sitt barn mitt inne i skogen?.
-Vi måste se oss omkring och undersöka saken, sa Lena.

Problem 1.3

Vinden som ligger högst upp i huset, där Per och Lena bor, är stor och spännande. Där finns förråd i vilka man kan förvara saker som man inte använder. Förråden ser ut som små burar. De är avdelade med nät, så att Lena och Per kan se in i varje förråd. Det är mycket spännande att titta in i förråden och se vad människor förvarar på vinden.
Där finns gamla soffor, stolar, lampskärmar, gamla pjäxor, en trasig skida och skridskor. Barnen kan se kläder och en gammal barnvagn och många lådor i olika storlekar. I ett av förråden står en gammal kista. Den är mörk, ganska stor och tung med ett kraftigt lås. Lena och Per har tittat på den varje gång de varit med mamma på vinden.
Barnen tycker inte om att gå upp på vinden själva eftersom ljuset slocknar efter en liten stund och det blir mörkt som i en säck. Idag hann inte mamma gå med dem för att hämta skridskorna som ligger i en påse, så de är ensamma. De har tagit med sig en ficklampa ifall ljuset skulle slockna, så att de kan hitta till ljusknappen. När de kommer till förrådet med den gamla kistan, stannar de och tittar länge på den..
-Vad tror du att det finns i den? frågar Lena.
-Kanske gamla kläder, svarar Per.
Båda barnen lyssnar intensivt. De hör ett tickande ljud.
-Vad är det? frågar Per.
-Hör du? säger Lena. Jag undrar vad du kan vara?
-Vi måste försöka ta reda på vad som finns i kistan, säger Per

Problem 1.4

Det var mörkt och kallt.Per var på hemväg från en kamrat. Det var ganska sent på kvällen. Gatorna låg tomma och ödsliga, och det hade börjat blåsa en isande vind.
När Per närmade sig det gamla rivningshuset, som stått obebott en lång tid, började han småspringa. Han frös i sin tunna, blåa jacka. Det övergivna huset var alldeles förfallet. Fönsterrutorna var sönder och dörren gick inte att stänga. Barn brukade leka i huset och de kunde ibland se katter som slank in genom den halvöppna dörren. Per och Lena hade gömt ett skrin med hemligheter i husets källare. De var mycket noga med att ingen skulle få veta om deras hemliga gömställe.
Plötsligt stannade Per. Ett svagt ljus fladdrade till och lyste upp gatan. Per stod stilla och spanade ivrigt in i huset. Vad var det som lyste i källaren?
Skulle han våga gå in och se efter? Nej det var nog bäst att hämta Lena.
Per sprang hem och berättade andfådd för Lena vad han hade sett. Lena som var ensam hemma letade fram en ficklampa och barnen sprang iväg till det gamla huset. Ljuset från källaren syntes fortfarande och Lena och Per stannade utanför. Det tittade på varandra.
-Vi måste gå in i huset och undersöka vad som pågår, sa Lena
-Jaa, viskade Per.

FAS 2

Problem 2.1
Per och Lena är på landet. Solen skiner och det är en vacker dag. Det känns riktigt varmt i luften.
- Skall vi bada? föreslår Lena.
- Jag har inga badbyxor, svarar Per Vi kan väl gå till hästarna istället?
Barnen går långsamt ner till hagen. Där går hästar och betar. Lena tycker mest om den svarta hästen. Ibland har hon fått rida på den. Det tycker hon är jätteroligt. Lena har gått i ridskola i två år och rider ganska bra. Per däremot vill inte rida. Han har försökt en gång, men det gick inte så bra. Han föll av hästen. Som tur var slog han sig inte, men han kan inte glömma den upplevelsen och vill inte försöka igen.
Det står ett gammalt äppleträd vid hagen. På äppleträdet finns fullt av röda äpplen som alla får plocka. Per klättrar upp i trädet och stoppar äpplen i fickorna.
-Vi går till stallet och ger äpplen till de hästar som inte får gå ute, föreslår Per och hoppar ner från trädet.
Lena vill alltid följa med till stallet. Hon tar två äpplen i handen och går efter Per. Pers fickor putar ut, för han har tre äpplen i varje ficka.
På vägen till stallet stannar de en stund vid den gamla ladan och tittar på en liten grå kattunge. Den är så söt att Lena och Per nästan glömmer av hästarna, men efter en stund går de vidare.
När barnen kommer in i stallet ser de sig förvånade omkring. Där är så många hästar. Det har alltid varit åtta hästar i stallet förut, men nu räknar Per till sexton stycken.
-Hur skall vi nu få äpplena att räcka till alla hästarna? frågar Per.
Jaa, hur skall vi göra? undrar Lena.

Problem 2.2
Idag fyller Lena år. Hon skall ha födelsedagskalas och har bjudit tio av sina klasskamrater. Lena och hennes mamma håller på att baka en tårta. Det är Lenas älsklingstårta med maränger och grädde. Per hjälper till och dukar bordet. Han sätter fram tallrikar och glas. Det ser fint ut med rosa duk och rosa servetter.
Barnen skall äta och sedan skall de leka olika lekar. Lena har skrivit upp lekar på en lapp så att hon inte skall glömma dem. Vid en av lekarna skall barnen ha ballonger. Lena går och hämtar de ballonger som hon har kvar sedan förra gången hon hade kalas, och Martin börjar blåsa upp dem. Varje barn skall ha en stor och två små ballonger, så Martin blåser och blåser. Han får ont i munnen. "Pang" nu smäller en ballong. Lenas hund Nicke blir rädd och kryper under sängen. Lena försöker lugna hunden, men nu smäller det igen.
-Ballongerna räcker inte om du håller på så där, säger hon argt till Per
-De räcker ändå inte svarar han. Det finns bara nio små och tolv stora ballonger här.
-Oj då, vi måste genast lösa detta på något sätt, säger Lena.

Problem 2.3

Per är på fotbollsplanen för han skall träna fotboll. Han är med i ett pojklag som tränar en gång i veckan. Per tycker det är kul att träna, men han tycker det är ännu roligare att spela match. När träningen börjar kommer deras tränare Martin med en jättestor nätkasse full med fotbollar. Varje pojke får var sin fotboll.
Fotbollsplanen är så stor att fyra pojklag med sju pojkar i varje lag kan träna samtidigt. Pojkarna springer så att de blir alldeles slut. De skall dribbla med bollen och sedan skjuta den i mål.
Lena och hennes kamrat Susanne står vid sidan av planen och tittar på. De tar upp två bollar som finns kvar i nätkassen och börjar sparka mot ett plank vid sidan av den stora planen.
Per går fram till dem och pratar en liten stund. Då hör han hur Martin ropar på honom.
Han vänder sig om och ser en boll komma farande. Han sparkar till den och bollen flyger iväg långt utanför fotbollsplanen.
När han springer för att hämta den, hittar han en annan fotboll som ligger kvarglömd i buskarna. Han tar med sig bollen och ger den till Martin.
Martin ber Per samla in alla bollarna och lägga dem i nätkassen medan han och de andra pojkarna springer ett sista träningsvarv runt planen. Per ropar på Lena för att hon skall ge honom sin boll, och hjälpa till att samla in bollarna.
-Vi måste se till att vi hittar alla bollarna, säger Per till Lena.
-Ja, men hur många skall vi ha? frågar Lena.

Problem 2.4

Lena och Per pratar högt och otåligt med varandra. Barnen sitter hemma i Lenas rum och planerar klassens timme som de skall ha på fredag. Två andra klasskamrater, Susanne och Martin är också där. De tittar på varandra och skakar på sina huvuden.
-Vi kan inte bara ha tävlingar, säger Lena.
-Det är roligast, tycker Per.
-Nu måste vi skynda oss, så att vi blir klara någon gång. Vi måste bestämma oss, säger Lena. Vi kan ha discotävling förstås, men det är nog bäst att ta sist.
-Ja och så har vi frågesport. Det är roligt, säger Per.
-Vi kan ha två lag med fyra barn som får svara på var sin fråga. Susanne och jag kan skriva upp frågorna, säger Martin.
-Jag kan en bra rebus som man kan rita på tavlan, säger Lena och så så tittar vi i min gåtbok efter några svåra gåtor..
-Kan vi inte ha en sångtävling? föreslår Susanne.
-Jag tror inte att någon ställer upp, svarar Per.
-Vi måste ha några priser,.tycker Martin.
-Kan vi inte rita diplom till alla som vinner? frågar Lena.
-Jo det blir bra, tycker Martin. Det kan vi göra, men hur många skall vi rita?
-Det måste vi ta reda på säger Lena.

FAS 3

3.1 18+7=25
3.2 180-78=102
3.3 3·7=21
3.4 16:4=4

FAS 4

Problem 4.1

Barnen i Pers och Lenas klass har sått blomsterfrön. I varje kruka växer nu en fin blomma. För att få pengar till en skolresa skall de sälja blommorna. Vad skall de ta betalt för varje blomma?

Problem 4.2

Klassen skall ha fest. Många syskon och minst en förälder från varje klass skall komma. Per och Lena skall låna stolar i klassrummet bredvid. Hur många stolar skall de hämta?

Problem 4.3

För att samla in pengar till en skolresa skall barnen i Pers och Lenas klass ordna ett lotteri.De har gjort många vinster själva, men dessutom köpt vinster för 100 kronor. Hur mycket skall de ta betalt för varje lott?

Problem 4.4

Lena skall ha födelsedagskalas och köpa drickor och chips. Hon har bjudit 12 barn på kalaset. Hur mycket skall hon betala?

FAS 5

Problem 5.1

I klassen med 19 barn delar fröken ut två skrivböcker och en räknebok till varje barn. Hur många böcker delar hon ut?

Problem 5.2

I klassrummet finns 6 runda bord. Vid 5 av borden sitter 4 barn och vid ett bord sitter 3 barn. Hur många barn är det i klassen?

Problem 5.3

Lena har 28 bokmärken och Maria har 16. Lena vill att hon och Maria skall ha lika många. Hur många bokmärken måste hon ge till Maria?

Problem 5.4

Per sparar till en boll som kostar 16 kronor och 50 öre. När han diskade efter maten fick han 50 öre av sin mamma. Om mamma fortsätter att betala när Per diskar, hur många gånger till skall Per diska för att kunna köpa bollen?

FÖRTEST

1. Bo har 25 kronor. Han köper en bil som kostar 7 kronor.
   Hur mycket har han sedan kvar?

2. Du köper ett par byxor som kostar 63 kronor och en tröja som kostar 25 kronor.Hur mycket ska du betala?

3. Bo har 128 frimärken och får 35 till.
   Hur många frimärken har han då?

4. Evas bok har 318 sidor. Hon har läst 106 sidor.
   Hur många sidor har hon kvar att läsa?

5. Åsa, Eva och Bo köper en glass var. Varje glass kostar 4 kronor.
   Hur mycket ska de betala tillsammans?

6. Åsa, Eva och Bo delar lika på 15 kronor.
   Hur mycket får var och en?

7. En bok om katter kostar 25 kronor. En bok om hundar kostar 30 kronor.
   Hur mycket kostar böckerna tillsammans?

8. Du har 58 kronor och vill köpa ett par handskar. Handskarna kostar 99 kronor.
   Hur mycket fattas?

9. 4 glassar kostar 16 kronor.
   Hur mycket kostar en glass?

10. Du har 18 kronor och vill köpa drickor. En dricka kostar 5 kronor.
    Till hur många drickor räcker pengarna?

11. Barnen i en skola med 214 elever och barnen från en skola med 130 elever ska gå på teater. Hur många biljetter ska man köpa?

12. Lena har lånat en bok med 30 sidor på biblioteket. Hon bestämmer sig för att läsa 5 sidor varje dag. Hur många dagar tar det för Lena att läsa boken?

EFTERTEST

1. Per räknar sina pengar. Han har 67 kronor i sin plånbok. Han tar 25 kronor i handen och går till affären. Han köper en glass som kostar 7 kronor. Hur mycket pengar har han med sig hem?

2. Lena och mamma är i affären. Lena provar en blus som kostar 50 kronor, en tröja som kostar 25 kronor och ett par byxor som kostar 63 kronor. De köper en tröja och en blus. Vad ska de betala?

3. Lena, Per och Martin räknar sina frimmärken. Per har 120 frimärken, Martin har 128 frimärken och Lena har 135 frimärken. Lena ger 35 frimärken till Martin och 20 till Per. Hur många frimärken har Martin sedan?

4. På biblioteket lånar Eva en bok som har 318 sidor. Hon läser 42 sidor hemma och 64 sidor i skolan. Hur många sidor måste hon läsa för att läsa ut boken när hon har läst 106 sidor tillsammans?

5. Lena, Eva, Per och Martin går till godisaffären.Lena köper en glass som kostar 4 kronor. Eva köper ett tuggummi för 3 kronor. Per och Martin köper en glass för 4 kronor var. Hur mycket ska barnen betala för glassarna?

6. Eva köpte frimärken som kostade 9 kronor. Vad ska Per, Lena och Martin betala var om de tillsammans köper en påse frimärken som kostar 15 kronor?

7. Per köper 5 pennor som tillsammans kostar 25 kronor och 2 skrivböcker som tillsammans kostar 30 kronor. Vad ska han betala?

8. Hur mycket pengar fattas om du har 59 kronor och vill köpa ett spel och en fotboll som tillsammans kostar 99 kronor?

9. Per ska köpa klistermärken. 4 stora klistermärken kostar 20 kronor och 4 små klistermärken kostar 16 kronor. Vad ska Per betala för ett litet klistermärke?

10. Lena ska köpa ställ till sina 18 kasettband. Det får plats 5 band i varje ställ. Hur många ställ ska hon köpa?

11. Från en skola med 312 elever kommer en dag 214 elever till simhallen. Från en annan skola med 250 elever kommer 130 elever. Hur många elever finns i simhallen?

12. Lena har lånat en bok med 50 sidor. Hon har läst 30 sidor. Hur många dagar har hon läst i boken om hon läser 5 sidor varje dag?

GÖTEBORG STUDIES IN EDUCATIONAL SCIENCES

ISSN 0436-1121

Editors:

Ingemar Emanuelsson, Jan-Eric Gustafsson and Ference Marton

1. *Karl-Gustaf Stukát:* Lekskolans inverkan på barns utveckling. Sthlm 1966. Pp. 148.
2. *Urban Dahllöf:* Skoldifferentiering och undervisningsförlopp. Sthlm 1967. Pp. 306
3. *Erik Wallin:* Spelling. Factorial and experimental studies. Sthlm 1967. Pp. 180.
4. *Bengt-Erik Andersson:* Studies in adolescent behaviour. Project Yg. Youth in Göteborg. Sthlm 1969. Pp. 400.
5. *Ference Marton:* Structural dynamics of learning. Sthlm 1970. Pp. 112.
6. *Allan Svensson:* Relative achievement. School performance in relation to intelligence, sex and home environment. Sthlm 1971. Pp. 176.
7. *Gunni Kärrby:* Child rearing and the development of moral structure. Sthlm 1971. Pp. 207.
8. *Ulf P. Lundgren:* Frame factors and the teaching process. A contribution to curriculum theory and theory on teaching. Sthlm 1972. Pp. 378.
9. *Lennart Levin:* Comparative studies in foreign-language teaching. Sthlm 1972. Pp. 258.
10. *Rodney Åsberg:* Primary education and national development. Sthlm 1973. Pp. 388.
11. *Björn Sandgren:* Kreativ utveckling. Sthlm 1974. Pp. 227.
12. *Christer Brusling:* Microteaching – a concept in development: Sthlm 1974. Pp. 196.
13. *Kjell Rubenson:* Rekrytering till vuxenutbildning. En studie av kortutbildade yngre män. Gbg 1975. Pp. 363.
14. *Roger Säljö:* Qualitative differences in learning as a function of the learner's conception of the task. Gbg 1975. Pp. 170.
15. *Lars Owe Dahlgren:* Qualitative differences in learning as a function of content-oriented guidance. Gbg 1975. Pp. 158.
16. *Marie Månsson:* Samarbete och samarbetsförmåga. En kritisk granskning. Lund 1975. Pp. 158.
17. *Jan-Eric Gustafsson:* Verbal and figural aptitudes in relation to instructional methods. Studies in aptitude–treatment interactions. Gbg 1976. Pp. 228.
18. *Mats Ekholm:* Social utveckling i skolan. Studier och diskussion. Gbg 1976. Pp. 198.
19. *Lennart Svensson:* Study skill and learning. Gbg 1976. Pp. 308.
20. *Björn Andersson:* Science teaching and the development of thinking. Gbg 1976. Pp. 180.
21. *Jan-Erik Perneman:* Medvetenhet genom utbildning. Gbg 1977. Pp. 300.
22. *Inga Wernersson:* Könsdifferentiering i grundskolan. Gbg 1977. Pp. 320.
23. *Bert Aggestedt och Ulla Tebelius:* Barns upplevelser av idrott. Gbg 1977. Pp. 440.
24. *Anders Fransson:* Att rädas prov och att vilja veta. Gbg 1978. Pp. 188.
25. *Roland Björkberg:* Föreställningar om arbete, utveckling och livsrytm. Gbg 1978. Pp. 252.
26. *Gunilla Svingby:* Läroplaner som styrmedel för svensk obligatorisk skola. Teoretisk analys och ett empiriskt bidrag. Gbg 1978. Pp. 269.

(cont.)

GÖTEBORG STUDIES
IN EDUCATIONAL SCIENCES
ISSN 0436-1121
Editors:

Ingemar Emanuelsson, Jan-Eric Gustafsson and Ference Marton

(Continuation)

27. *Inga Andersson:* Tankestilar och hemmiljö. Gbg 1979. Pp. 288.
28. *Gunnar Stangvik:* Self-concept and school segregation. Gbg 1979. Pp. 528.
29. *Margareta Kristiansson:* Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69. Gbg 1979. Pp. 160.
30. *Britt Johansson:* Kunskapsbehov i omvårdnadsarbete och kunskapskrav i vårdutbildning. Gbg 1979. Pp. 404.
31. *Göran Patriksson:* Socialisation och involvering i idrott. Gbg 1979. Pp. 236.
32. *Peter Gill:* Moral judgments of violence among Irish and Swedish adolescents. Gbg 1979. Pp. 213.
33. *Tage Ljungblad:* Förskola-grundskola i samverkan. Förutsättningar och hinder. Gbg 1980. Pp. 192.
34. *Berner Lindström:* Forms of representation, content and learning. Gbg 1980. Pp. 195.
35. *Claes-Göran Wenestam:* Qualitative differences in retention. Gbg 1980. Pp. 220.
36. *Britt Johansson:* Pedagogiska samtal i vårdutbildning. Innehåll och språkbruk. Gbg 1981. Pp. 194.
37. *Leif Lybeck:* Arkimedes i klassen. En ämnespedagogisk berättelse. Gbg 1981. Pp. 228.
38. *Biörn Hasselgren:* Ways of apprehending children at play: a study of pre-school student teachers' development. Gbg 1981. Pp. 107.
39. *Lennart Nilsson:* Yrkesutbildning i nutidshistoriskt perspektiv. Yrkesutbildningens utveckling från skråväsendets upphörande 1846 till 1980-talet samt tankar om framtida inriktning. Gbg 1981. Pp. 442.
40. *Gudrun Balke-Aurell:* Changes in ability as related to educational and occupational experience. Gbg 1982. Pp. 203.
41. *Roger Säljö:* Learning and understanding. A study of differences in constructing meaning from a text. gbg 1982. Pp. 212.
42. *Ulla Marklund:* Droger och påverkan. Elevanalys som utgångspunkt för drogundervisning. Gbg 1983. Pp. 225.
43. *Sven Setterlind:* Avslappningsträning i skolan. Forskningsöversikt och empiriska studier. Gbg 1983. Pp. 467.
44. *Egil Andersson och Maria Lawenius:* Lärares uppfattning av undervisning. Gbg 1983. Pp. 348.
45. *Jan Theman:* Uppfattningar av politisk makt. Gbg 1983. Pp. 493.
46. *Ingrid Pramling:* The child's conception of learning. Gbg 1983. Pp. 196.
47. *Per Olof Thång:* Vuxenlärarens förhållningssätt till deltagarerfarenheter. En studie inom AMU. Gbg 1984. Pp. 307.

(cont.)

GÖTEBORG STUDIES IN EDUCATIONAL SCIENCES

ISSN 0436-1121

Editors:

Ingemar Emanuelsson, Jan-Eric Gustafsson and Ference Marton

(Continuation)

48. *Inge Johansson:* Fritidspedagog på fritidshem. En yrkesgrupps syn på sitt arbete. Gbg 1984. Pp. 312.
49. *Gunilla Svanberg:* Medansvar i undervisning. Metoder för observation och kvalitativ analys. Gbg 1984. Pp. 194.
50. *Sven-Eric Reuterberg:* Studiemedel och rekrytering till högskolan. Gbg 1984. Pp. 191.
51. *Gösta Dahlgren och Lars-Erik Olsson:* Läsning i barnperspektiv. Gbg 1985. Pp. 272.
52. *Christina Kärrqvist:* Kunskapsutveckling genom experimentcentrerade dialoger i ellära. Gbg 1985. Pp. 288.
53. *Claes Alexandersson:* Stabilitet och förändring. En empirisk studie av förhållandet mellan skolkunskap och vardagsvetande. Gbg 1985. Pp. 247.
54. *Lillemor Jernqvist:* Speech regulation of motor acts as used by cerebral palsied children. Observational and experimental studies of a key feature of conductive education. Gbg 1985. Pp. 146.
55. *Solveig Hägglund:* Sex-typing and development in an ecological perspective. Gbg 1986. Pp. 267.
56. *Ingrid Carlgren:* Lokalt utvecklingsarbete. Gbg 1986. Pp. 299.
57. *Larsson, Alexandersson, Helmstad och Thång:* Arbetsupplevelse och utbildningssyn hos icke facklärda. Gbg 1986. Pp. 165.
58. *Elvi Walldal:* Studerande vid gymnasieskolans vårdlinje. Förväntad yrkesposition, rollpåverkan, självuppfattning. Gbg 1986. Pp. 292.
59. *Eie Ericsson:* Foreign language teaching from the point of view of certain student activities. Gbg 1986. Pp. 275.
60. *Jan Holmer:* Högre utbildning för lågutbildade i industrin. Gbg 1987. Pp. 358.
61. *Anders Hill och Tullie Rabe:* Psykiskt utvecklingsstörda barn i kommunal förskola. Integrering belyst ur ett socialpsykologiskt perspektiv. Gbg 1987. Pp. 112.
62. *Dagmar Neuman:* The origin of arithmetic skills. A phenomenographic approach. Gbg 1987. Pp. 351.
63. *Tomas Kroksmark:* Fenomenografisk didaktik. Gbg 1987. Pp. 373.
64. *Rolf Lander:* Utvärderingsforskning - till vilken nytta? Pedagogiska röster och två exempel från forskningsfältet skolutveckling. Gbg 1987. Pp. 280.
65. *Torgny Ottosson:* Map-reading and wayfindning. Gbg 1987. Pp. 150.
66. *Mac Murray:* Utbildningsexpansion. Jämlikhet och Avlänkning. Studier i utbildningspolitik och utbildningsplanering 1933 - 1985. Gbg 1988. Pp. 230.
67. *Alberto Nagle Cajes:* Studievalet ur den väljandes perspektiv. Gbg 1988. Pp. 181.

(cont.)

GÖTEBORG STUDIES IN EDUCATIONAL SCIENCES

ISSN 0436-1121

Editors:

Ingemar Emanuelsson, Jan-Eric Gustafsson and Ference Marton

(Continuation)

68. *Göran Lassbo:* Mamma - (Pappa) - Barn. En utvecklingsekologisk studie av socialisation i olika familjetyper. Göteborg 1988. Pp. 203.
69. *Lena Renström:* Conceptions of matter. A phenomenographic approach. Göteborg 1988. Pp. 268.
70. *Ingrid Pramling:* Att lära barn lära. Göteborg 1988. Pp. 115.
71. *Lars Fredholm:* Praktik som bärare av undervisnings innehåll och form. En förklaringsmodell för uppkomst av undervisningshandlingar inom en totalförsvarsorganisation. Göteborg 1988. Pp. 364.
72. *Olof F. Lundquist:* Studiestöd för vuxna. Utveckling, utnyttjande, utfall. Göteborg 1989. Pp. 280.
73. *Bo Dahlin:* Religion, själen och livets mening. En fenomenografisk och existensfilosofisk studie av religionsundervisningens villkor. Göteborg 1989. Pp. 359.
74. *Susanne Björkdahl Ordell:* Socialarbetare. Bakgrund, utbildning och yrkesliv. Göteborg 1990. Pp. 240.
75. *Eva Björck-Åkesson:* Measuring Sensation Seeking. Göteborg 1990. Pp. 255.
76. *Ulla-Britt Bladini:* Från hjälpskolelärare till förändringsagent. Svensk specialläraru tbildning 1921 - 1981 relaterad till specialundervisningens utveckling och förändringar i specialläraren yrkesuppgifter. Göteborg 1990. Pp. 400.
77. *Elisabet Öhrn:* Könsmönster i klassrumsinteraktion. En observations- och intervjustudie av högstadieelevers lärarkontakter. Göteborg 1990. Pp. 211, XXI.
78. *Tomas Kroksmark:* Pedagogikens vägar till dess första svenska professur. Göteborg 1991. Pp. 285.
79. *Elvi Walldal:* Problembaserad inlärning. Utvärdering av påbyggnadslinjen Utbildning i öppen hälso- och sjukvård. Göteborg 1991. Pp. 130.
80. *Ulla Axner:* Visuella perceptionssvårigheter i skolperspektiv. En longitudinell studie. Göteborg 1991. Pp. 293.
81. *Birgitta Kullberg:* Learning to learn to read. Göteborg 1991. Pp. 352.
82. *Claes Annerstedt:* Idrottslärarna och idrottsämnet. Utveckling, mål, kompetens - ett didaktiskt perspektiv. Göteborg 1991. Pp. 286.
83. *Ewa Pilhammar Andersson:* Det är vi som är dom. Sjuksköterskestuderandes föreställningar och perspektiv under utbildningstiden. Göteborg 1991. Pp. 313.
84. *Elsa Nordin:* Kunskaper och uppfattningar om maten och dess funktioner i kroppen. Kombinerad enkät- och intervjustudie i grundskolans årskurser 3, 6 och 9. Göteborg 1992. Pp. 253.
85. *Valentín E. González:* On human attitudes. Root metaphors in theoretical conceptions. Göteborg 1992. Pp. 238.

(cont.)

GÖTEBORG STUDIES
IN EDUCATIONAL SCIENCES

ISSN 0436-1121

Editors:

Ingemar Emanuelsson, Jan-Eric Gustafsson and Ference Marton

(Continuation)

86. *Jan-Erik Johansson:* Metodikämnet i förskollärarutbildningen. Bidrag till en traditionsbestämning. Göteborg 1992. Pp. 347.
87. *Ann Ahlberg:* Att möta matematiska problem. En belysning av barns lärande. Göteborg 1992. Pp. 353.

Subscriptions to the series and orders for single volumes should be addressed to: ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS, Box 5096, S-402 22 Göteborg, Sweden.

ISBN 91-7346-250-0