GÖTEBORG STUDIES

IN EDUCATIONAL SCIENCES 208

Madeleine Löwing

Matematikundervisningens konkreta gestaltning

En studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar

ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS

Matematikundervisningens konkreta gestaltning

En studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar

GÖTEBORG STUDIES

IN EDUCATIONAL SCIENCES 208

Madeleine Löwing

Matematikundervisningens konkreta gestaltning

En studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar

ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS

ISBN 91-7346-491-0
ISSN 0436-1121

Distribution: ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS
Box 222
SE-405 30 Göteborg, Sweden

ABSTRACT

Title: The concrete formation of mathematics teaching.
A study of communication between teachers and pupils and the educational framework of mathematical classrooms.
Language: Swedish with summary in English.
Keywords: Subject matter for education, pedagogical content knowledge, mathematics education, frame factors, the teaching process, teaching mathematics, learning mathematics, individualization.
ISBN: 91-7346-491-0

Adequate help from the teachers is required in order that the pupils reach the goals that are laid down in the guidelines of the school. It is therefore necessary that they master a mathematical theory relevant for their profession. This means that it must be possible for the teachers to convey their mathematical knowledge in such a way that all pupils learn and develop mathematical knowledge.

In order to communicate a mathematical content, the teachers choose suitable working methods and forms. These choices are in turn dependent on the physical and administrative frames of the school. Against this background, my research question is the following: How do teachers organize the mathematical education and how do they communicate a mathematical content to the pupils?

My method is based on a more modern version of the so-called frame factor theory, where the focus is on the role of the teacher in the classroom situation. It is also based on a theory that shows how the pupils develop their mathematical knowledge that is a theory for mathematics education.

My empirical data consist of seven mathematics lessons from grades 4-9 in the compulsory school. During these lessons all communication around the teacher was documented with the help of a microphone fastened on the teacher. Two independent observers registered all other activity during the classes. I have also analyzed the content of the educational material that was used during the lessons. In order to give a correct framework to their work, all teachers were interviewed before as well as after the classes.

On a macro level, I have studied the teachers' choices of working method and form, which I call the variable frames. As it turned out, the choices of such frames were often less well chosen in relation to other frames and the goal of the education. In several cases these frames even counteracted each other. This contributed to the fact that some pupils did not get adequate instruction and help during the classes.

On a micro level, I noted that most teachers did not find out what pre-knowledge the pupils had. Another observation was that they expressed the goals of the education in terms of ”how to do” not ”how to understand”, something which was also mirrored in their communication with the pupils. Furthermore, most of the teachers did not use an adequate language with regard to the content of the education and the comprehension of the pupils, which caused conflicts in their communication with the pupils. The result was often that the teachers and the pupils talked passed each other, which confused the pupils and caused them to stop working after half the lesson had passed.

By using methodical thinking when analyzing the teachers' choice of frames and their way of communicating a mathematical content, it is possible to understand parts of the complex teaching situation in the school. This gives me an opportunity to explain several of the problems that the pupils in the compulsory school have in learning mathematics, according to recent evaluations.

Innehåll

FÖRORD

Denna avhandling har krävt betydligt mer arbete än jag kunnat förställa mig. Samtidigt känns det som jag tagit ett nytt steg i min ambition att hjälpa elever att lära sig matematik. Det är just detta som har varit drivkraften i mitt arbete under alla år, först som lärare och sedan som lärarutbildare.

En viktig förutsättning för att kunna bedriva en praxisnära forskning är att man har en praktik att beforska. Jag vill därför inleda med att tacka de lärare som givit mig tillgång till sin praktik och låtit mig närgånget studera deras undervisning. Det är genom dessa lärare jag har fått en djupare förståelse och respekt för lärares arbete.

Jag vill också tacka mina båda handledare för att de på olika sätt bidragit till avhandlingsarbetet och samtidigt introducerat mig i en ny och spännande värld. Det är Wiggo Kilborn som övertalat mig att söka till forskarutbildningen och gett mig inspiration och idéer kring matematikdidaktisk teoribildning och en ramfaktorteoretisk forskningsansats. Han har också varit ett ständigt bollplank under avhandlingsarbetet. Berner Lindström har tålmodigt försökt få mig att betrakta denna studie ur ett vetenskapligt perspektiv och inte som undervisande lärarutbildare. Det har inte varit en lätt uppgift vilket sannolikt då och då framskymtar i texten. Jag vill även tacka Leif Lybeck för de goda råd han gav mig inför min ansökan till forskarutbildningen och Berit Askling, som inledningsvis ingick i handledargruppen, för betydelsefulla handledningsdiskussioner.

Ett stort tack också till de som givit värdefulla synpunker på mitt manuskript. Jag tänker då på Aadu Ott och Johan Häggström och inte minst på Jan Wyndhamn som hade läst mitt manuskript mycket noggrant och under slutseminariet gav mig en rad goda synpunkter. I samband med slutseminariet pekade Elisabeth Öhrn på en del brister i mitt manus vilket fick mig att omvärdera mitt sätt att skriva.

I arbetets slutfas har det gällt att ta ställning till en rad språkliga frågor. I detta sammanhang vill jag tacka Lena Ström och Thomas Lingefjärd för hjälp med den engelska sammanfattningen och Ann Boglind som hjälpt mig med övrig språkgranskning.

Ett speciellt tack riktar jag till Mats för hans tålamod. Även han har levt med denna avhandling under flera år och hela tiden med samma positiva entusiasm givit mig uppmuntran och stöd i mitt arbete. Tack också för all hjälp med layouten så att texten slutligen blev en bok. Jag vill även rikta ett varmt tack till min övriga familj som under alla år på olika sätt bidraget till att det blivit en avhandling.

Mölnlycke i februari 2004

Madeleine Löwing

SYFTE, BAKGRUND OCH TIDIGARE FORSKNING

I kapitel 1 beskrivs avhandlingens syfte. I det följande kapitlet ges en bakgrund i form av grundskolans utveckling från 1962 och framåt. I detta kapitel har jag samtidigt valt att presenterat mig själv och min relation till avhandlingsarbetet. I kapitel 3 ges en beskrivning av sådan matematikdidaktisk klassrumsforskning som behandlar såväl lärarens roll i undervisningen som undervisningens komplexitet.

1 Inledning

När jag betraktar svensk skola gör jag två olika iakttagelser. Den ena är att det under min tid i det svenska utbildningssystemet med jämna mellanrum har kommit rapporter om svenska elevers dåliga matematikkunskaper. Matematikundervisningen i Sverige verkar trots alla insatser som gjorts under de senaste trettio åren inte ha lett till tillfredsställande resultat (DsU 1986:5; Murray & Liljefors, 1983; NCM, 2001; Skolverket, 2000a, 2001, 2002, 2003a, 2003b; Skolöverstyrelsen, 1983; Skolöverstyrelsen, 1989). Den andra iakttagelsen gör jag som lärarutbildare vid besök i skolor. Jag har då funnit att lärare har en ambition att hjälpa eleverna att förstå matematik och att de flesta elever verkligen vill lära sig. Det är denna skillnad mellan aktörernas ambitioner och skolans resultat som väckt mitt forskningsintresse.

En förklaring till denna skillnad mellan ambition och resultat ges av Madsén (2002). Han menar att läraren idag har abdikerat genom att ha bytt ut sin tidigare undervisande roll mot en mer handledande. Samtidigt betonar Niss (1994) lärarens viktiga roll i skolans matematikundervisning.

> As the learning of mathematics does not take place spontaneously and automatically, mathematics needs to be taught. (s. 368)

Det är lärarens uppgift att organisera, planera och genomföra undervisningen samt bedöma eleverna. I allmänhet är det också läraren som sätter reglerna för och styr den kommunikation som sker i klassrummet. Avhandlingen handlar om en viktig aspekt av detta, nämligen hur läraren organiserar och kommunicerar ett matematikinnehåll med sina elever. Den handlar alltså om villkoren för och innehållet i denna kommunikation.

1.1 Avhandlingens syfte

Läraren har, genom sin roll som arbetsledare i klassrummet, stor betydelse för inlärningsprocessen. Av det skälet har jag valt att studera och analysera hur lärare i grundskolan hjälper elever att förstå matematik. Det övergripande syftet med mitt arbete är att studera hur lärare under matematiklektioner kommunicerar med sina elever för att stödja deras lärande samt vilka villkor lärandemiljön sätter för denna kommunikation.

Det är speciellt kommunikationen av det matematiska innehållet och lärarnas möjligheter att stödja elevernas lärande som är fokus för mitt intresse, tillsammans med det språk som används för att kommunicera detta innehåll. Relationen mellan det diskursiva språket i klassrummet och det matematiska språkets krav på precision är viktig för att förstå kommunikationens gestaltning och villkor.

I detta arbete är det centralt att studera vilka villkor som gäller för kommunikationen. Utgående från givna förutsättningar, väljer läraren undervisningens innehåll och modeller för att organisera den didaktiska verksamheten/undervisningen. Dessa val sätter i sin tur ramar för hur kommunikationen med enskilda elever och grupper av elever kan gestalta sig.

Målet med avhandlingsarbetet är att synliggöra viktiga komponenter i lärarens undervisning samt vilka betingelser som möjliggör eller försvårar en meningsfull kommunikation. Det är alltså fråga om en praxisbaserad forskning och min förhoppning är att detta avhandlingsarbete skall ge nya kunskapstillskott till det matematikdidaktiska fältet.

Att studera kommunikationen i ett klassrum är en komplex uppgift. Aktörerna i denna kommunikation spelar olika roller samtidigt som det finns mer eller mindre uttalade regler för hur man talar, när man talar och vem som har ordet (Lundgren, 1972; Sahlström, 1999; Anward, 2003). Samtidigt spelar andra faktorer in såsom valet av elevgruppering, arbetssätt, arbetsformer och undervisningsmaterial. När jag studerar hur lärare undervisar/kommunicerar kommer givetvis alla dessa faktorer att på olika sätt påverka vad jag observerar. Det som står i fokus för undersökningen är emellertid hur läraren lyckas synliggöra det matematiska innehåll som är målet för den ämnesinriktade kommunikationen. Elevernas deltagande i och reaktioner på kommunikationen är för mitt syfte sekundärt och används av mig endast som en indikator på hur väl läraren lyckats genomföra sina ämnesinriktade beskrivningar och förklaringar. Läraren är emellertid inte den ende informatören i klassrummet. De flesta elever inhämtar idag, enligt NCM (2001) och Skolverket (2003b), mer information från undervisningsmaterial än från läraren. Det är därför viktigt för mig att studera lärarnas kommunikation med eleverna i relation till den information som ges via olika undervisningsmaterial.

Den undervisning som sker i klassrummet styrs av olika faktorer såsom centrala styrdokument, skolans resurser m.m. Inom ramen för dessa faktorer gör man på den enskilda skolan lokala tolkningar av styrdokumenten och utför viss övergripande planering, såsom val av undervisningsgruppernas sammansättning. Läraren eller lärarlaget har i sin tur frihet att planera och designa undervisningen, till exempel genom att välja arbetsform och arbetssätt. Jag har valt att analysera kommunikationens ämnesmässiga innehåll i relation till dessa villkor som utgör undervisningens ramar.

För att undvika missförstånd vill jag klargöra att jag använder termen kommunikation i enlighet med den definition som ges i *Nationalencyklopedins ordbok* (1995-1996): ”överföra budskap (till ngn) med viss typ av meddelelsemedel”. I många fall blir denna definition av kommunikation för mig synonym med ordet undervisning. Meddelelsemedlen kan vara olika; skrivet och talat språk, artefakter, metaforer, kroppsspråk m.m.. Möjligen kan denna min användning av begreppet kommunikation likställas med uttrycket mediera (Säljö, 2000), men jag har valt att genomgående använda ordet kommunikation i denna avhandling.

1.2 Målgrupp och presentationsform

Mitt arbete har två viktiga målgrupper, nämligen de som bedriver forskning om matematikämnets didaktik och de som utbildar och fortbildar lärare. Samtidigt torde mitt arbete vara av visst intresse även för pedagoger och matematiker samt för lärare och andra som är intresserade av skolutveckling. Detta leder till ett dilemma när det gäller språk och presentationsform. Matematikdidaktiken är fortfarande ett område som präglas av en mångvetenskaplig eller tvärvetenskaplig samverkan (Utbult, 1993). Det betyder att avnämarna för den här avhandlingen kommer från olika språkliga kulturer. Ett av mina dilemman är därför att använda språk och metoder som kan uppfattas och accepteras av såväl matematiker, pedagoger, lärarutbildare som kommuniceras med olika avnämare. Att detta kan vara problematiskt har tagits upp av bl.a. Stigler (2003). Han menar när det gäller lärare på fältet att, ”teachers don't have a shared language” och att de saknar ”a shareable knowledge base för the teaching profession”.

Ett annat dilemma som blir tydligt i Stigler och Hiebert (1999) är att den didaktiska forskningen inte når ut till de viktigaste avnämarna, nämligen till skolorna. Visserligen beskriver Stigler och Hiebert amerikansk forskning, men vad jag förstår så gäller samma förhållanden i Sverige (NCM, 2001; Skolverket, 2003b). Av det skälet har jag valt att så långt det är möjligt använda mig av ett språk som är tolkbart för lärare. Detta hindrar inte att jag ibland introducerar nya termer eller vid behov, för att nå högre precision, använder etablerade termer från ämnena pedagogik och matematik. Jag delar härvid Hills (1998) uppfattning:

> Den vetenskapliga texten har en logik som skiljer sig från annan text. Den innehåller också många lågfrekventa begrepp. En del av dem används slentrianmässigt, trots att lika bra men enklare uttryck finns. (s. 17)

När jag i kapitlen 3 – 7 beskriver sådan forskning som ger en bakgrund till mitt eget arbete är det inte lika lätt att, med precision, använda ett enkelt språk. Dessa kapitel kan således vara något svårare att läsa för en lärare på fältet. Ett annat dilemma med dessa kapitel är att matematikdidaktiska forskare i olika länder använder olika terminologi (Stigler, 2003). Redan termen matematikdidaktik har olika betydelser i olika kulturer. Det kan därför i vissa fall vara svårt att göra korrekta översättningar av innehållet. Jag har då valt att använda citat istället för att översätta texten. För att ge läsaren en adekvat information har vissa av citaten blivit relativt långa.

En avhandling kan skrivas på olika sätt. Enligt Jarrik och Josephson (1988) finns det till exempel två språkliga ideal för hur man skriver en avhandling, engelsk stil och tysk stil. Skillnaden består i att ”I den ’engelska’ uppsatsen är författaren väl synlig, men i den ’tyska’ uppsatsen syns han inte, … . (s. 17)

Jag har i den här avhandlingen försökt använda den engelska stilen.

1.3 Avhandlingens disposition

Avhandlingen har fyra delar. Den första delen, Syfte, bakgrund och tidigare forskning, inleds med en introduktion till avhandlingens syfte. I det följande kapitlet ges en bakgrund i form av grundskolans utveckling från 1962 och framåt. I detta kapitel har jag samtidigt valt att presenterat mig själv och min relation till avhandlingsarbetet. I kapitel 3 ges därefter en beskrivning av olika typer av klassrumsforskning med betoning på sådan matematikdidaktisk klassrumsforskning som behandlar lärarens roll i undervisningen. En del av denna forskning beskriver även undervisningens komplexitet.

I den andra delen redovisas de teoretiska utgångspunkterna för mitt arbete. Teorin byggs upp kring två kompletterande ansatser, en ramfaktorteoretisk och en matematikdidaktisk. Detta behandlas i kapitel 4. Därefter ägnas kapitel 5 åt att utreda matematikundervisningens faktiska villkor ur ett ramfaktorteoretiskt perspektiv samt att beskriva dessa villkor i form av fasta och rörliga ramar. I kapitel 6 avhandlas undervisningens innehåll ur ett matematikdidaktiskt perspektiv. Detta omfattar även kommunikationen av ett matematiskt innehåll. En teoretisk bakgrund till de språkliga problem som därvid uppstår behandlas i kapitel 7.

Den tredje delen inleds med kapitel 8 som omfattar forskningsfrågan, forskningsmetoden samt forskningens genomförande. I de två följande kapitlen redovisas resultaten. Detta sker ur två olika perspektiv. I kapitel 9 sker redovisningen ur ett makroperspektiv, det vill säga hur läraren organiserar sin lektion och hur detta påverkar möjligheterna till kommunikation. I kapitel 10 redovisas resultaten ur ett mikroperspektiv där jag behandlar kommunikationens matematikdiktiska innehåll.

I diskussionen, som återfinns i den fjärde delen, sätter jag resultaten i relation till mina erfarenheter av skola och lärarutbildning. Därefter följer några funderingar om behov och inriktning av framtida forskning inom området.

I slutet av avhandlingen finns en Summary in English.

2 Bakgrund

För att förstå situationen i dagens skola måste man känna till tankarna bakom grundskolan och hur denna har utvecklats. Det är det jag beskriver i det här kapitlet. När man studerar undervisningen i grundskolan kan det ske ur olika synvinklar. Min egen bakgrund och mina erfarenheter som matematiklärare och lärarutbildare i matematik har givetvis präglat de perspektiv jag valt för att tolka vad som händer i klassrummet. Eftersom en stor del av analyserna bygger på just tolkningar av lärares kommunikation med elever är det därför viktigt för läsaren att känna till de erfarenheter utgående från vilka jag valt mina perspektiv.

2.1 Egen skolgång och 1962 års skolreform

Mitt minne av den matematikundervisning jag själv fick, i folkskola, flickskola och gymnasium, är att mina lärare började lektionen med att förhöra läxan, varefter hon eller han gjorde en genomgång av nytt stoff med hela klassen samtidigt. Därefter ägnades större delen av lektionen åt att vi elever övade på att lösa uppgifter av den typ som läraren nyss gått igenom. Under tiden hände det att en elev i sänder fick gå fram till tavlan och lösa en uppgift. Lektionen avslutades ofta med att vi fick en ny läxa. Läroböckerna var i första hand uppgiftssamlingar och det var lärarna som stod för förklaringar och exempel.

Det var den här lektionsbilden man reagerade mot redan i 1946 års skolkommission, när man började arbetet med att bygga upp en demokratisk skola med lika utbildningsmöjligheter för alla. I skolkommissionens arbete tog man klart avstånd från den tidens auktoritära undervisning och den enskilde eleven ställdes tydligt i centrum för skolans mål och verksamhet. Så här sammanfattade Marklund (1980) skolkommissionens syn på skolans undervisning.

> I de mål som allmänt utpekades känner vi igen den nya skolans alla honnörsord: fria och harmoniska människor, allsidig personlighetsutveckling, aktivt sökande efter kunskap och sanning, självständighet och kritiskt sinnelag, motståndskraft mot andliga farsoter, lust och engagemang i skolarbetet, aktning för individualitet och personlighet osv. (s. 79)

I 1957 års skolberedning började grundskolan ta form. Exempel på den syn man då hade på skola och undervisning gavs av Stellan Arvidsson, skolkommissionens sekreterare och ledamot av skolberedningen, i ett antal definitioner. Om den typ av klassundervisning som jag själv mötte under min skoltid menade Arvidsson:

> Den bidrar till passivitet och osjälvständighet hos eleverna; den är till sitt väsen auktoritär. … Den förhindrar samarbete mellan eleverna. (Nämnaren 81/82 nr 2, s.10)

Arvidsson förespråkade istället självverksamhet:

> Självverksamhet motsvarar läroplanens undervisningsprincip aktivitet. All undervisning skall ha karaktären av självverksamhet: eleverna skall arbeta på egen hand. Den fostrar till självständighet… (s. 10)

Någon nivågruppering fick däremot inte förekomma. Anledningen till detta förklarades så här:

> Klassen sönderfaller i delar utan inbördes förbindelser och med utpräglad rangordning sinsemellan. Nivågruppering avvisas intensivt av SIA och varnas för i läroplanen. (s. 11)

Detta ger en bild av hur ledamöter av skolberedningen tänkte sig den grundskola som 1962 genomfördes i Sverige och som blev resultatet av 50-talets intensiva skolutveckling (Marklund, 1980, 1981). Vi fick då en 9-årig sammanhållen obligatorisk skola, en skola för alla. Det var denna, av Arvidsson och Marklund beskrivna, grundskola som jag förväntade mig möta som nyutexaminerad lärare.

2.2 Grundskolan och individualiseringstanken

Riktigt så såg emellertid inte skolan ut när jag i mitten på 70-talet återvände dit som nyutexaminerad lärare. 1969 års kursplan i matematik präglades av den så kallade nya matematiken i kombination med undervisningsteknologin (Myndigheten för skolutveckling, 2003). Under grundskolans första år hade lärare haft uppenbara problem med att individualisera undervisningen i matematik. Samtidigt var det brist på högstadielärare i matematik. Staten hade därför stora förhoppningar på att lösa krisen med hjälp av självinstruerande undervisningsmaterial. Ett sådant material var IMU (Individualiserad MatematikUndervisning) (Larsson, 1973). Förförsöken till IMU startades i Braås (Öreberg, 1964) och under min lärarutbildning gjorde jag lektionsbesök i just Braås. Jag fick på så sätt möjligheter att ”vid själva källan” studera arbetet med IMU. Vad jag såg var en mycket stor grupp elever som under tystnad arbetade var för sig styrda av ett undervisningsmaterial. När jag många år senare studerade erfarenheterna från IMU-projektet i samband med en didaktikkurs förstod jag, att jag som lärarstuderande inte hade förmått uppfatta mycket av det utvecklingsarbete som jag då getts möjligheter att följa.

IMU-materialet blev snart mönsterbildande för en rad andra, mer eller mindre självinstruerande, undervisningsmaterial i matematik. Tyvärr bidrog dessa material, som oftast var av typen ”fylleriböcker” (där eleverna lotsas fram genom att fylla i luckor i texten), knappast till elevernas självständighet. Tvärtom styrdes eleverna hårt av sitt läromedel och hindrades från att ta egna initiativ. I och för sig arbetade eleverna var för sig och i sin egen takt, men detta var säkerligen inte vad Arvidson menade med självverksamhet. Genom att den individualiseringsmodell som oftast användes var av typen hastighetsindividualisering bildades snart grupper inom klassen med klar rangordning sinsemellan, något som man i förarbetena till grundskolan definitivt ville undvika. Vid den här typen av undervisning var läraren i princip underordnad boken och fungerade i första hand som handledare.

Det var i den ovan beskrivna grundskolan, som jag som nyexaminerad lärare började arbeta. Jag hade ett ständigt bekymmer med att ta hand om såväl de lägst presterande eleverna som de duktigaste. Visserligen fanns det alternativa matematikkurser, men eleverna fick själva välja om de skulle läsa allmän (lättare) eller särskild (svårare) kurs och på min skola valde nästan 80% av eleverna att läsa särskild kurs. Detta medförde att det, speciellt i särskild kurs, var stora individuella skillnader inom undervisningsgruppen vad gällde såväl kunskaper som motivation. Under matematiklektionerna kände jag mig ständigt otillräcklig. Uppdelningen i allmän och särskild kurs var på vår skola inte någon lösning på grundskolans individualiseringsproblem.

I det förslag till ny läroplan som kom 1978 (Skolöverstyrelsen, 1978) föreslogs en sammanhållen matematikkurs för alla elever till och med åk 9, alltså genom hela grundskolan. De sista resterna av den organisatoriska differentiering, som blev kvar vid grundskolans införande, skulle således försvinna. Detta förslag väckte emellertid starkt motstånd från matematiklärare på högstadiet. Resultatet blev att en utredning tillsattes och att en femårig försöksverksamhet med projektnamnet GEM (Grupperingar i Engelska och Matematik) startade 1982 (Hellström, 1987). Jag hade redan tidigare initierat och under några år drivit ett av de fyra projekt som kom att studeras inom GEM-projektet. Det man under försöksverksamheten fokuserade uppmärksamheten på var den organisatoriska delen av matematikundervisningen, alltså hur man kunde optimera inlärningen genom att använda sig av olika elevgrupperingar. Däremot ägnades, inom projektet, inget intresse åt hur man individanpassade undervisningens innehåll eller valde undervisningsmetodik relaterat till olika grupper.

Det försök jag själv deltog i (Löwing, 1982) syftade till att göra undervisningssituationen enklare genom att vi grupperade eleverna på ett flexibelt sätt. När det gällde inlärning av begrepp och lösningsmetoder arbetade vi inom kunskapsmässigt homogena grupper, där eleverna själva valt nivå.

När vi tillämpade matematiken och arbetade tematiskt eller med problemlösning var grupperna heterogena. Jag nådde emellertid inte ända fram i min strävan att få alla våra elever att förstå matematik. Att detta med elevgrupperingar, som var syftet att studera inom GEM, var något som skolberedningen en gång hade fördömt, var jag då inte medveten om. Den enda restriktion som gällde var att man inte fick arbeta med fasta elevgrupperingar under någon längre period. Från min horisont som matematiklärare upplevde jag emellertid att någon form av differentiering var helt nödvändig för att min undervisning skulle fungera.

I och med införandet av Lpo 94 har den organisatoriska differentieringen i grundskolan helt försvunnit och vi har fått den sammanhållna bottenskola som skolreformerna strävade efter. Fokus i den pedagogiska diskussionen har därmed flyttats från att gälla olika grupperingar till de arbetssätt och arbetsformer som kan användas när läraren skall individualisera undervisningen inom klassens ram. Alexandersson (1994b) visar i sin avhandling på de problem som då kan uppstå, nämligen att de flesta lärare riktade sin uppmärksamhet mot metoden och eleven, medan innehållet blev sekundärt. Bara en av tolv lärare i hans undersökning utgick från innehållet och eleven, det vill säga tog sin utgångspunkt i hur eleven tänker och lär ett specifikt matematikinnehåll. Alexanderssons iakttagelse, att arbetssättet i skola ofta har blivit överordnat innehållet, har senare beskrivits av bland andra Wyndhamn, Riesbeck och Schoultz (2000), Madsén (2002) och Skolverket (2003b).

2.3 Grundskolan och elevernas matematikkunskaper

Syftet med den nya matematiken, undervisningsteknologin, friheten att gruppera eleverna på olika sätt och variation av arbetssätt, har i samtliga fall varit att optimera elevernas inlärning. Dessa förändringar har emellertid inte lett till avsett resultat. Under 1970-talet, efter problemen med den nya matematiken och undervisningsteknologin, var det allt fler gymnasielärare som klagade på att de elever som kom från grundskolan hade sämre räknefärdigheter än tidigare (DsU 1986:5). Ett av problemen tycktes vara att eleverna saknade grundläggande aritmetiska färdigheter (Kilborn, 1979a; Skolöverstyrelsen, 1983). Inom PUMP-projektet (<u>P</u>rocessanalyser av <u>U</u>ndervisning i <u>M</u>atematik/ <u>P</u>sykolingvistik) kunde man även konstatera att lärare inte var medvetna om de olika elevernas kunskaper och att detta i sin tur ledde till att många elever arbetade med uppgifter som de inte hade förkunskaper för (Kilborn, 1979a).

Genom mitt engagemang i försöksverksamheten med alternativkurser, kom jag även att få delta i den grupp som utarbetade ett nationellt diagnosmaterial för grundskolan, *SÖ:s diagnostiska uppgifter i matematik* (Skolöverstyrelsen, 1983). En avsikt med dessa diagnoser var att hjälpa lärare att kartlägga den enskilde elevens kunskaper. En annan avsikt med materialet var att hjälpa kommunerna att styra resurser till de elever och de områden där resurserna bäst behövdes (Lärarhandledningarna till Skolöverstyrelsen, 1983). Arbetet med SÖ:s diagnostiska uppgifter gav mig en klarare uppfattning om förkunskapens betydelse för inlärningen, vilket lyfts fram av många forskare bland andra Ausubel (1968). Kännedomen om elevresultaten ledde till att många lärare blev frustrerade och kände sig nedslagna och otillräckliga. Som en följd av detta var det många som slutade att använda diagnosmaterialet.

I min lärarutbildning hade jag inte läst något om den matematik som man arbetade med på låg- och mellanstadiet. Att lärare på dessa stadier till exempel ägnade stor uppmärksamhet åt att konkretisera subtraktionsuppställningen med dubbla lån och lån över 0 var främmande för mig. Jag uppfattade subtraktionsuppställningen som en enkel och entydig algoritm (Kilborn, 1979a; Carpenter, Moser & Romberg, 1982; Johansson & Kilborn, 1982). Detta var en viktig erfarenhet som gav mig helt nya instrument i min strävan att förstå och förklara mina elevers problem med de fyra räknesätten. Genom arbetet med SÖ:s diagnoser och utarbetandet av ett uppföljningsmaterial till detta (Jonsson, Löwing & Runesson, 1985) gavs jag också möjligheter att såväl följa grundskolans matematikinnehåll och undervisningsmetoder från skolår 1 – 9 som att ta del av olika lärargruppers syn på matematikämnet.

Varken de insatser som gjordes kring SÖ:s diagnoser eller arbetet med alternativa grupperingar räckte till för att förbättra svenska elevers matematikkunskaper. En larmrapport som kom i mitten av 1980-talet visade att svenska 13-åringar var bland de sämsta i världen i aritmetik och algebra såväl 1964 som 1980 (Murray & Liljefors 1983; DsU 1986:5). För att råda bot mot detta drogs en särskild fortbildningssatsning igång där staten lovade att satsa 12 miljoner kronor per år i fyra år. I samband med denna satsning reste jag landet runt och fortbildade lärare. Den särskilda forbildningssatsningen tog emellertid slut i förtid på grund av att skolorna kommunaliserades. Däremot startade en ny fortbildningssatsning, kompletteringsfortbildningen, med anledning av den då nya lärarutbildningen (Skolöverstyrelsen, 1989) och jag och andra lärarutbildare fortsatte vårt resande (se även NCM, 2001). Trots dessa satsningar visade emellertid olika rapporter från början av 1990-talet att många elever fortfarande saknade grundläggande matematikkunskaper när de lämnade grundskolan (Skolverket, 1993a, 1993b; Grevholm, 1993). Enligt internationella jämförelser (Skolverket, 1996a) har dock svenska elever på senare tid uppvisat något bättre resultat i jämförelse med andra länder.

Problemen med bristande kunskaper i matematik har inte blivit mindre efter införandet av 1994 års läroplan. Kraven på ”en god grund för … fortsatt utbildning och ett livslångt lärande” verkar svåra att tillgodose i undervisningen. Enligt Skolverkets statistik för åren 2000 - 2003 blev till exempel 12%, 16%, 13% respektive 14% av eleverna ej godkända på det nationella provet i matematik i skolår 9. Andelen elever som motsvarande år inte fick betyg i matematik var 6,0%, 6,8%, 6,8% och 6,6%. Samtidigt blev nästan varannan elev på gymnasieskolans yrkesinriktade program ej godkänd på det nationella prov som ges på A-kursen. Det bör noteras att man måste ha godkänt betyg i matematik från grundskolan för att tas emot som sökande till gymnasieskolan (Skolverket, 2000a, 2001, 2002, 2003a).

Många elever lämnar således grundskolan utan att ha sådana kunskaper i matematik ”som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att tolka det ökade flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället” (Skolverket, 2000b s. 26). Ett annat problem är att många elever som börjar gymnasieskolan dels saknar adekvata baskunskaper för att där tillgodogöra sig undervisningen i matematik, dels har svårt att tillämpa sina matematikkunskaper inom karaktärsämnena. Av larmrapporter som kommit från universitet och högskolor framgår det också att dagens studenter, enligt universitetens bedömning, har betydligt sämre ingångskunskaper i matematik än tidigare (DN Debatt, 2003). En viktig orsak till detta är enligt Skolverkets kvalitetsgranskning att elevernas lust att lära minskar i takt med att innehållet inte känns relevant och begripligt (Skolverket, 2003b).

2.4 Att vara matematiklärare

När jag själv gick i skolan erbjöds vi elever ett innehåll som, vad jag nu förstår, utgick från de kursplaner som då gällde. Samtidigt var det jag som elev, som fick ta ansvaret för att jag lärde mig något. De av mina kamrater som inte tillgodogjorde sig undervisningen, och därmed inte fick godkänt betyg, fick läsa extra under sommaren och riskerade att få gå om skolåret. Dessa alternativ fanns inte när jag började som lärare. Då skulle alla elever flyttas till nästa årskurs oberoende av vad de förstått under skolåret.

Under mina första år som lärare fanns det så kallade hjälpklasser där man kunde ta hand om de allra svagaste eleverna. Efter hand som problemen med bristande matematikkunskaper fick större uppmärksamhet, ökade möjligheterna för en elev att få hjälp av en speciallärare. Denna kompensatoriska undervisning fungerade ofta väl, eftersom speciallärarna i allmänhet var utbildade låg- och mellanstadielärare och var väl insatta i de grundläggande problem som förorsakat elevernas svårigheter. I mitten av 1970-talet gavs också ett stöd för särskilda åtgärder till kommuner med speciellt stora problem de så kallade SÅS-pengarna (Särskilda Åtgärder inom Skolområdet) (Kilborn & Lundgren, 1976). När jag som så kallad SÅS-lärare skulle ge elever extra stöd i matematik insåg jag att det inte är så lätt att förklara för eleverna på ett sådant sätt så att alla förstår. Vad jag nu i efterhand inser är att det jag då saknade var didaktiska kunskaper och insikter i det som idag internationellt benämns ”Pedagogical Content Knowledge, PCK” (Schulman, 1986, 1987) och som knyter samman ämnena matematik och pedagogik. Speciellt när jag arbetade med de lägre presterande eleverna, blev det uppenbart att den modell för undervisning i matematik som jag fått med mig från min lärarutbildning var alltför stereotyp. I själva verket överensstämde den i stora drag med den undervisning jag själv fick i skolan: Börja med en genomgång, men den får inte vara för lång för det orkar eleverna inte med. Kontrollera vid behov läxan. Låt därefter eleverna arbeta på egen hand, gärna på två eller tre nivåer. Avsluta med att summera dagens arbete och ge ny läxa.

Den här strategin fungerade inte i min undervisning. Samtidigt kan jag konstatera att dagens matematikundervisning ser ungefär likadan ut. Den enda väsentliga skillnaden är att lärare sällan gör någon genomgång numera, utan enbart går runt i klassen och hjälper eleverna som, enskilt eller i grupp, arbetar utgående från en lärobok (NCM 2001; Skolverket, 2003b; Bentley, 2003). Undervisningen liknar således i många klassrum den som förekom under IMU-tiden. En väsentlig skillnad är emellertid, att dagens böcker inte är lika självinstruerande som IMU-materialet var. Om detta arbetssätt skriver Madsén (2002) att läraren måste återupprättas. Efter att på Skolverkets uppdrag ha gjort en forskningsgenomgång inom området, har han dragit slutsatsen att läraren måste ta ett större ansvar som arbetsledare.

Lärarens arbete påverkas i hög grad av skolans styrdokument. Dessa utgångspunkter för lärarens arbete har emellertid ändrats en hel del under de senaste åren. Fram till och med Lgr 80 innehöll kursplanerna en uppräkning av de moment som skulle behandlas i varje årskurs. Till Lgr 69 och Lgr 80 fanns det dessutom ett supplement respektive ett kommentarmaterial som gav läraren hjälp med att planera och designa sin undervisning. En väsentlig nyhet i Lgr 80 var att differentieringen i allmän- och särskild kurs tagits bort ur kursplanerna (dock fanns en fotnot i timplanen om allmän och särskild kurs). Man skilde istället mellan nödvändiga och önskvärda kunskaper när det gällde att individualisera undervisningen i matematik. En annan nyhet i Lgr 80 var att problemlösning införts som huvudmoment, något som ledde till att problemlösning kom att dominera fortbildningen i matematik under 80-talet och delvis gör det fortfarande. Den nu gällande läroplanen Lpo 94 skiljer sig från de tidigare, genom att den bygger på en mål- och resultatstyrning av skolan. Vidare är målen allmänt formulerade utan den tidigare momentindelningen. Målen och innehållet är inte heller preciserade i något förklarande supplement eller kommentarmaterial. Lärarna förväntas istället tolka målen lokalt och själva välja innehåll, arbetsformer och arbetssätt. Det är som synes ganska stora förändringar som under senare år skett när det gäller beskrivning av lärarens arbetsuppgifter i styrdokumenten. En intressant följdfråga är därför hur förändringar av det här slaget påverkar skola och undervisning.

2.5 Lärarutbildning och lärarfortbildning.

Strävan att hjälpa elever att lära sig matematik var den drivkraft som fick mig att arbeta inom olika utvecklingsprojekt och med fortbildning. När jag 1985 började arbeta med lärarutbildning tvingades jag ändra perspektiv och börja se på undervisning, elever och lärarrollen ur ett metaperspektiv, något som gav mig nya tankeställare. Vid undervisningen av blivande 1-7 lärare, insåg jag betydelsen av att högstadielärare behärskar någon teori för hur man undervisar om grundläggande matematik. Som exempel kan nämnas de båda aspekterna av division: innehållsdivision och delningsdivision. När jag tidigare skulle förklara hur man kan utföra en division som $\frac{1}{2}/\frac{1}{4}$, visste jag att man får rätt svar genom att skriva om detta som $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}$. Det kunde också förklaras, antingen genom att lösa en ekvation eller genom att se divisionen som ett dubbelbråk och förlänga med 4. Problemet var att de flesta av eleverna hade svårt att förstå någon av dessa förklaringar. När jag nu insåg att man kan se den här divisionen som en fråga om hur många kvartar som ryms i en halv, blev detta början till en rad aha-upplevelser. (se till exempel Löwing, 2002.) Jag hade samtidigt fått ett språk för att beskriva kunskaper som tidigare varit intuitiva för mig. Detta språk, och denna syn på kunskapens relation till olika elevers förförståelse, gav mig nya möjligheter att förklara så att fler elever förstår. Jag hade börjat ta ett lärarperspektiv på matematikinnehållet i undervisningen. (se avsnitt 6.7)

Det var också en annan faktor som bidrog till min attitydförändring. På den tiden besökte vi metodiklektorer/matematikdidaktiker samtliga lärarstuderande i matematik under deras praktik, för att hjälpa dem att knyta samman de teorier de studerat med praktisk undervisning. Att observera lektioner och sedan diskutera hur innehållet behandlats, tvingade mig att ta ställning till hur man språkligt, och med precision, kan beskriva matematikdidaktiska fenomen. Jag upptäckte samtidigt hur svårt de studerande hade att för sina elever förklara den matematik de själva behärskade. Detta gällde även för studerande med 60 poäng i matematik. Vad jag fann var att de studerande oftast tog matematikinnehållet för givet och att de inte förmådde knyta samman didaktikens vad- hur- och varför-frågor. Innehållet kopplades sällan samman med elevernas olika förkunskaper och förmåga eller till långsiktiga mål. Alla elever gavs i stort sett samma förklaring. Individualiseringen handlade således inte om att anpassa stoff och förklaring till respektive elevs kunskapsnivå utan till att eleverna, utgående från samma förklaring, fick arbeta i sin egen takt och alltså lösa olika många uppgifter. Läroboken bildade nästan alltid utgångspunkten för såväl genomgångar som övningar. Handledarens uppfattning om undervisning och den undervisning de studerande själva fått i skolan verkade ha påverkat den studerandes förhållningssätt och attityder till ämnet matematik betydligt mer än lärarutbildningen.

Betydelsen av det sätt på vilket undervisningens innehåll kommuniceras av läraren blev ännu tydligare för mig när jag i slutet av 1990-talet började utbilda invandrade lärare (Löwing, 2000, 2001). Jag tvingades då dagligen att diskutera didaktiska frågor med personer från andra kulturer och med en helt annan förförståelse till matematikämnet än min egen. Saker som dittills varit uppenbara för mig måste nu förklaras. Än mer uppenbart blev skolmatematikens kulturberoende när jag under samma period fick möjligheter att delta i en kollegas arbete med kompetensutveckling av sydafrikanska lärare (Löwing, 2000, 2001). De miljöer jag mötte i de sydafrikanska skolorna var mycket olika de miljöer jag var van vid från svensk undervisning. En viktig fråga blev hur jag skulle förstå vad som hände under de lektioner jag studerade. Allt verkade så främmande, irrationellt och ineffektivt. När min kollega och jag diskuterade lektioner som vi observerat, gjorde vi det utgående från undervisningens förutsättningar. Det visade sig då att det inom lärarutbildningen dels funnits olika kulturer för vita, färgade och svarta lärare (Löwing, 2001), dels att utbildningen ofta varit stereotyp och förordat ett enda arbetssätt (Adler, 2001). Detta låste lärarnas möjligheter att improvisera. Till detta kom att de grundläggande idéer som lyftes fram i deras nya läroplan, Curriculum 2005, tillhörde en kultur som var främmande för de svarta och färgade lärarna. En ytterligare faktor var att undervisningsspråket i de svarta och färgade skolorna oftast var ett andraspråk, eller till och med ett tredjespråk, för såväl de flesta av lärarna som för eleverna. Det här betydde att undervisningens betingelser avsevärt begränsade lärarnas möjligheter att välja metodik och att kommunicera ett matematikinnehåll med eleverna. Vad vi också upptäckte var att lärarnas försök att konkretisera undervisningen var starkt beroende av kultur och undervisningsspråk. (se Löwing, 2000) Dessa erfarenheter väckte en viktig fråga hos mig, nämligen hur de byten av undervisningskultur som ofta sker vid byte av läroplan eller kursplan, påverkar skolans undervisning.

2.6 Sammanfattning

I det här kapitlet har jag försökt ge en bakgrund till den undervisningskultur som man idag finner i svensk grundskola. Jag har samtidigt försökt beskriva min egen bakgrund och lite av min egen utveckling från lärare och lärarutbildare till forskare. För mig har denna bakgrund utgjort en viktig förutsättning för att förstå vad som händer i dagens matematikundervisning.

Allt sedan grundskolans första år har lärare haft problem med att individualisera undervisningen i matematik. Från början försökte man lösa detta problem med hjälp av regelstyrning såsom utnyttjandet av alternativkurser och med hjälp av undervisningsteknologi och specialundervisning. Från och med Lpo 94 har denna regelstyrning ersatts av en mål- och resultatstyrning där lösningarna av problemen överlämnats åt lärarna. Fokus i den pedagogiska diskussionen har därmed flyttats från att gälla olika grupperingar till sådana arbetsformer och arbetssätt som kan användas för att individualisera undervisningen inom klassens ram. Detta betyder att förutsättningarna för skolans undervisning gång på gång har förändrats, något som i sin tur kan förklara de problem som enligt NCM (2001) och Skolverket (2003b) råder i svensk matematikundervisning idag.

3 Matematikdidaktisk klassrumsforskning

Avsikten med detta kapitel är att ge en överblick över den matematikdidaktiska forskning som på olika sätt är knuten till undervisning i klassrummet.

3.1 Kort översikt

Den matematikdidaktiska forskningen är mycket mångfacetterad, vilket poängteras av bland andra Biehler, Scholz, Strässer och Winkelmann (1994) och Sierpinska och Kilpatrick (1998). Den kan handla om såväl ren grundforskning och prövning av didaktiska hypoteser som utvärdering eller utarbetande av speciella material eller metoder. Niss (2001) menar emellertid att:

> För ganska många matematikdidaktiska forskare är det främst ”rena” grundforskningsperspektiv som står i fokus. Vi kan emellertid påstå att det övergripande syftet med hela verksamheten i grunden är att främja och förbättra elevers och studenters matematikinlärning och att de skall tillägna sig matematisk kompetens. (s. 25)

Ur denna mångfald har jag valt en praxisnära forskningsansats, nämligen att studera lärares undervisning i klassrummet. Sahlström (1999) skriver i sin avhandling att det finns en mängd rapporter om klassrumsforskning. När jag snävar in området till att omfatta klassrumsstudier av matematikundervisning med fokus på matematikinnehållet, finner jag emellertid relativt få rapporter. Runesson (1999) hävdar till exempel, med hänvisning till Bromme (1994), att, ”Det finns få empiriska studier som behandlar det matematiska innehållet i undervisningen.” (Runesson, 1999 s. 14)

Efter en genomgång av den matematikdidaktiska forskning som beskrivs i Grouws (1992), Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick och Laborde (1996), Kilpatrick, Swafford och Findell (2001) samt Niss och Højgaard Jensen (2002) gör jag nu en översiktlig genomgång av den forskning som berör lärares undervisning. Inledningsvis beskriver jag olika ansatser för matematikdidaktisk klassrumsforskning, för att sedan övergå till att presentera några forskningsprojekt som tangerar mina intressen.

När Bishop (1992) beskriver den internationella utvecklingen inom det matematikdidaktiska forskningsfältet tar han upp några kritiska punkter. Det handlar inte bara om att konstatera situationen som den är, utan även att reflektera över hur den skulle kunna vara.

> The relationsship between: ”What is” and ”what might be”; Mathematics and education; The problem and the research method; The teacher and the researcher; The researcher and the educational system. (s. 714)

Jag delar denna uppfattning. Det räcker inte att kartlägga vad som sker utan man måste också analysera vilka alternativa möjligheter som står till buds. Samtidigt bör man enligt Bodin och Capponi (1996) vara försiktig när man drar sina slutsatser. De varnar för tendensen att dra alltför långtgående slutsatser av den matematikdidaktiska forskning som under de senaste 20 åren blivit alltmer vanlig på den internationella scenen.

> However so far such studies have concentrated on how things work at local (often ”micro”) level. Extrapolations from these observations and conclusions can only be made within the framework of a given system, bearing in mind the initial context, the underlying curriculum, etc. (s. 567)

De menar att en hel del forskningsresultat enbart är lokalt giltiga och att resultaten måste tolkas relativt den kontext och de ramar som varit gällande. Stigler och Hiebert (1999) påpekar, utgående från sina internationella jämförelser, att variationerna i undervisningsprocessen är betydligt större mellan olika länder än inom dessa länder. De beskriver också de stora problem det kan innebära för en person att analysera och dra slutsatser av undervisningen i en annan kultur. Mot denna bakgrund kommer jag längre fram i avhandlingen att ägna speciell uppmärksamhet åt den forskning som skett i svenska klassrum och åt de ramar i den svenska skolkulturen som i hög grad påverkar matematikundervisningen.

Matematikdidaktik är ett relativt ungt forskningsområde. Forskning inom detta område bedrevs tidigare av pedagoger och psykologer som ofta använde matematikämnet som ett ”case” för sina studier. Man kan uttrycka det så att de studerade matematiklärande ur ett utifrånperspektiv (Ball, 2000) och inte som den matematikdidaktiska forskaren inifrån, utgående från ett ämnesperspektiv. Kelly och Lesh (2000) menar emellertid att den matematikdidaktiska forskningen nu mognat och att man därmed har kunnat lämna traditionella experimentella metoder och börjat utveckla nya och egna forskningsmetoder. Beroende på att klassrumsforskningen är komplex och mångfacetterad, menar de vidare, går den inte att på djupet beskriva med äldre, traditionella metoder.

De problem vi upplever inom matematikundervisningen är inte lokala, de är universella. Detta tar Björkqvist (2003) med hänvisning till Niss (1993) upp som ett motiv till att matematikdidaktik bör vara ett eget forskningsfält. Bodin och Cappino (1996) menar att trots att problemet är universellt är många forskningsresultat lokalt kulturberoende. Det är därför inte självklart att internationella forskningsresultat är direkt applicerbara i svensk skola.

Med tanke på forskningsämnets ungdom är det heller inte lätt att finna en färdig forskningsmetod som är direkt användbar för min forskning. Kelly och Lesh (2000) utvecklar det senare på följande sätt: ”Accordingly, the readers will not find in these chapters a silver bullet research methodology.” (s. 38). De uppmanar istället forskaren att utveckla en egen, för forskningsfrågan lämplig, forskningsdesign.

3.2 Olika forskningsansatser vid studier av matematikundervisning

Mycket av den forskning som handlar om lärares undervisning och arbete i klassrummet utgår från forskning kring lärares uppfattningar (Thompson, 1992; Calderhead, 1996). Vid denna typ av forskning observeras och intervjuas lärare kring begrepp och undervisningssituationer. I många fall gör man sedan en jämförelse mellan novisens och expertens uppfattningar. Borko och Putnam (1996) skriver om den typen av forskning att:

> Learning to teach is a complex process. Novice teachers must learn multiple sets of knowledge, skills, and understandings to be well prepared to enter the teaching profession. They must learn enough classroom management, skills and routines to maintain order in classroom, keeping students motivated and productively engaged, they must learn about the subject matter they will teach, their students and how they learn, and a myriad other issues to which teachers must attend. (s. 699)

Vad de framhåller är undervisningens komplexitet. Det är en sak att ha en viss uppfattning eller teoretisk kunskap om något, en helt annan sak att omsätta dessa kunskaper i klassrummets komplexa värld. Ball och Bass (2000) menar emellertid att det inte är alla som uppfattar denna komplexitet:

> We assume that the intergration required to teach is simple and happens in course of the experience. In fact, however, it does not happen easily, and often not happens at all. (s. 86)

Vad Ball och Bass vänder sig emot är den vanliga men enligt dem felaktiga uppfattningen att den som behärskar å ena sidan matematik och å andra sidan pedagogik, med automatik skulle vara en bra lärare i matematik. Men att bli en bra lärare kräver betydligt mer av kunskaper och färdigheter.

Givetvis är det viktigt att kartlägga och analysera lärares och elevers uppfattningar om undervisning och matematik. Men detta är inte tillräckligt. Mitt forskningsfokus riktas därför mot att studera hur lärare omsätter sina uppfattningar i en reell undervisningssituation. För att få en mer trovärdig bild av läraren som aktör och arbetsledare vid undervisning måste man i så fall följa och analysera lärarens arbete i den vardagliga undervisningen. Enligt Calderhead (1996) har allt mer forskning numera inriktats mot det fältet.

> Research also has begun to unravel some of the pedagogical processes involved in classroom teaching and the different types of knowledge that teachers draw on in their efforts to help children to learn and understand. Current research has adopted a diverse range of methodologies to explore these areas and is making considerable progress in unpacking the nature of teachers´ knowledge and expertice. Because of the complexity of the area, diverse methodologies are needed, each contributing its own evidence and perspective to an overall understanding to teaching. (s. 721f)

Den klassrumsforskning som beskrivs i de tidigare nämnda handböckerna är av olika slag, alltifrån sådan där forskare önskar testa en teori i klassrummet till sådan där lärare studerar sin egen praktik, i olika grad handledda av forskare. En annan typ av forskning som beskrivs är den, där lärare deltar i forskningsprojekt där avsikten är att pröva ut nya metoder eller nya undervisningsmaterial. Utgående från denna indelning av forskningsfältet presenterars nedan några olika forskningsansatser.

3.2.1 Läraren som forskare

På senare år har det vuxit fram ett intresse för att studera läraren som den lärande. Denna forskning studerar bland annat hur lärare lär sig att tänka och agera i klassrumssituationer och vad som påverkar denna inlärning. Studier av den egna praktiken har därför blivit ett vanligt forskningsområde. Detta kan innebära att lärare forskar på sin egen praktik till exempel i samband med kompetensutveckling och i avsikt att förändra sitt sätt att undervisa. Forskningen kan då vara av olika slag. Antingen dokumenterar och analyserar läraren sin egen undervisning och reflekterar över den eller också deltar läraren i något forskningsprojekt med liknande syfte. Målet är i båda fallen att på sikt ge eleverna en bättre undervisning. Den här verksamheten kombineras ofta med en utprövning av en ny undervisningsmetod eller ett nytt undervisningsmaterial.

Ball (2000) utreder såväl fördelar som problem som kan uppstå när lärare på det här sättet studerar sin egen praktik. Hon menar att man återfinner denna typ av forskning inom ett större fält, ”inquiry in teaching”, som omfattar ”action research, teachers narratives, teacher research as well as multiple forms of research on teaching” (s. 365). När det gäller för lärare att studera sin egen verksamhet i klassrummet hänvisar Ball till Lampert och skriver:

> Whereas conventional research on teaching looks *in at* teaching and learning, the work in his chapter seeks instead to examine teaching *from the inside*, from what Lampert (1998) called ”the perspective of practice”. Those who do this kind of work blend the construction of practice with its analysis. (s. 366)

Ball (2000) skiljer mellan sådan forskning som en lärare utför på sin egen praktik från forskning som görs av en forskare på en lärares praktik. Denna forskare kan i sin tur vara olika väl insatt i det beforskade territoriet. Forskaren kan ofta vara pedagog, psykolog eller antropolog och inte specialist på matematikämnets teori och didaktik. Ball menar emellertid att man, för att lyckas med matematikdidaktisk forskning, behöver erfarenheter som lärare eftersom mycket av det som händer i undervisningen är osynligt för en ”outsider”. Vad jag förstår räknar Ball sig själv som en forskare som tidigare varit lärare och därmed kan planera och analysera sin forskning från insidan. Detta innebär att lärare som forskar kan vara av mycket skilda slag allt ifrån lärare som för första gången deltar i någon form av forskning till etablerade forskare med lärarbakgrund. Oberoende av vilket som gäller så är det viktigt att den som studerar matematikundervisning är kunnig i såväl matematik som matematikdidaktik. I annat fall blir uppmärksamheten inriktad enbart mot arbetsform och arbetssätt och inte mot undervisningens innehåll. (jfr Alexandersson, 1994b)

3.2.2 Att bli medveten om sin egen praktik

Ett annat problem med sådan forskning, där läraren själv studerar sin praktik, kan vara att det är svårt att se något som man inte själv är medveten om. Enligt Menons paradox om lärande (Marton, 2000) måste man få hjälp med att bli medveten om vad som finns att se. Ett exempel på detta finns i ett skolverksprojekt (Skolverket, 1994) vars syfte var att definiera och beskriva varför vissa lärare var framgångsrika såtillvida att de alltid lyckades med att lära alla sina elever att läsa och skriva under de första skolåren. En av lärarna i studien menade att hon inte gör något speciellt mer än att försöka ta hänsyn till varje enskilt barn. Forskarna kunde emellertid se tydliga mönster i hennes undervisning som även gick igen hos de övriga framgångsrika lärarna, men som var så självklara för dem själva att de inte reflekterade över det.

I den nämnda studien ingick tjugo lågstadielärare som ansågs vara erkänt skickliga och de hade i genomsnitt varit yrkesverksamma i 26 år. Studien använde flera olika undersökningsmetoder såsom lärarenkäter, lärarintervjuer och klassrumsobservationer, för att fånga upp så många faktorer som möjligt som påverkade undervisningen. Lärarenkäten syftade till att kartlägga rena faktauppgifter, medan lärarintervjun och klassrumsobservationerna gav en bild av hur lärarens undervisning gick till. Resultaten visar att dessa framgångsrika lärare kombinerar en målmedveten undervisning med stor flexibilitet i planering och genomförande. De reflekterar också över sin egen undervisning i relation till elevernas inlärning och utveckling. De goda lärarna tar ständigt tillvara elevernas idéer, men de har ändå en klar struktur på sin undervisning. ”De goda lärarna styr med mild men fast hand eleverna mot målet med undervisningen” (s. 11) genom en kombinationen av ordning, struktur och en öppen attityd. Denna typ av klassrumsforskning, där forskare studerar lärarens verksamhet och gör en kartläggning av denna, kan lyfta fram och synliggöra sådant som för läraren själv många gånger är omedvetna, intuitiva handlingar. Att synliggöra sådana handlingar ingår i mitt forskningsintresse.

3.2.3 Lärares delaktighet i forskning

Genom att lärare blir aktivt involverade i klassrumsforskning kan man nå dubbel effekt. Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs och Empson

(1996) konstaterar att såväl elever som lärare därvid utvecklar sitt kunnande.

> This study provides strong evidence that knowledge of children´s thinking is a powerful tool that enables teachers to transform this knowledge and use it to change instructions. These findings, when viewed in conjunction with those of other studies, provide a convincing argument that one major way to improve mathematics instruction and learning is to help teachers understand the mathematical thought processes of their students. It also appears that this knowledge is not static and acquired outside of classrooms in workshops, but dynamic and ever growing, and can probably only be acquired in the context of teaching mathematics. (s. 606)

Det Fennema m.fl. lyfter fram är således vikten av reflektion i yrkespraktiken, men som tidigare nämnts går det inte att se sådant man inte är medveten om. Det är därför betydelsefullt att teoretiska studier av undervisningen sker i nära anslutning till praktisk verksamhet.

En klassrumsforskning av det slag som Ball och Fennema beskriver kan innebära att forskaren leder ett projekt som läraren deltar i. Denna typ av forskning bedrivs ofta i kombination med utvecklingsarbete och forskningen kan då ske som aktionsforskning. Genom att använda lärare som på det här sättet forskar på sin praktik menar Feldman och Minstrell (2000) att såväl införandet av nya kursplaner som annat förändringsarbete inom skolans område kan gå betydligt smidigare än annars. Samtidigt redovisar dessa forskare att det finns vissa bekymmer med aktionsforskningsmetodologin.

> Can teachers generate sufficient warrant to support propositional statements that arise from their research? Can they avoid or overcome the bias that is inherent in doing research on their own practices? (s. 430)

Tillvägagångssättet att via aktionsforskning studera den egna praktiken har stora likheter med såväl ingenjörsvetenskap som medicinsk forskning (jfr. Niss, 2001). Bodin och Capponi (1996) som har studerat den här typen av forskning närmare är emellertid delvis kritiska.

> Studies on mathematics teaching that are actually carried out in class are usually accompanied by didactic engineering of a sort that means that such studies cannot claim to reflect current practice. In many cases the teacher gives his time, his students and his histrionic gifts to a project that is not his own. This means that he is not playing his true role. (s. 567)

De konstaterar således att denna forskning inte alltid handlar om vad som händer i klassrummet under en normallektion, utan att man prövar nya idéer genom att låta läraren spela en i förväg regisserad roll. Forskarna värderar sedan resultatet, modifierar ”manuskriptet” och testar på nytt. Vad Bodin och Capponi vänder sig emot är inte forskningen i sig utan att resultaten ofta används för att beskriva och förklara vad som händer under en normal, ej ”regisserad” lektion.

Den här typen av forskning är ofta mycket målinriktad och inriktad mot speciella stoffområden (se till exempel Kilpatrick m.fl., 2001). Forskningen kan till exempel gå ut på att undersöka hur man kan optimera möjligheterna att nå ett visst givet mål. Detta kräver i sin tur att man som forskare är medveten dels om målet i sig, dels om hur lärare och elever uppfattar målet ifråga. Bodin och Capponi (1996) skiljer därför mellan tre olika typer av kursplaner/arbetsplaner:

> International studies on the teaching of mathematics have lead to the definition of three complementary ways of approaching curricula (Travers & Westbury, 1989, p. 6; Robitaille 1993b, p. 26):
>
> *the intended curriculum*, at the level of the system,
>
> *the implemented curriculum*, at the level of the class.
>
> *the attained curriculum,* a the level of the student.
>
> We intend to add the 'available curriculum', i.e. all the practical means at the disposal of teachers: (textbooks, teaching material, software programs, etc.) (s. 568)

Ett annat syfte för sådan forskning där läraren är delaktig kan vara att initiera ett politiskt eller socialt förändringsarbete. Crawford och Adler (1996) beskriver hur de medverkat till

> …research-like activities by teachers as means to professional development. Such development is viewed as a prerequisite for changes in the process and quality of mathematics education for school students. (s. 1187)

De exempel de tar är hämtade från Australien och Sydafrika och belyser de politiska och pedagogiska spänningar som kan uppstå i samband med en snabb kulturell förändring. Jag har själv varit involverad i denna process i Sydafrika (Löwing, 2001) i samband med introduktionen av en ny läroplan, *Curriculum 2005.*

Med en sådan forskningsansats som jag just beskrivit kan det synliggöras vad som är möjligt för en lärare att utföra i klassrummet. Det här är emellertid en forskning som skiljer sig från min. Vad jag vill studera är hur en vanlig lärare, på egen hand och i en vanlig klass, genomför sin undervisning i matematik.

3.2.4 Forskning i avsikt att utveckla metoder eller material

Forskning som går ut på att utveckla metoder eller material, kallas av Mason och Waywood (1996) för ”Result focused”. Denna forskningsinriktning är enligt dem i första hand koncentrerad till Nordamerika. Den saknar ofta en egen teori utan är ett slags inomparadigmisk forskning som bygger på vad kolleger just arbetar med. Man försöker alltså att utvidga och förfina redan kända resultat. Mason och Waywood menar att det finns en hel del kritik mot denna forskning:

> The theoretical justification for one project is founded on the accumulation of results from other recent projects, to that extent that Kilpatrick (1981) complained about the lack of home-grown theories not borrowed from other disciplines. (s. 1076).
>
> The principle results in a result-focused paper are presented and referenced and so seem unproblematic, but to researchers from other traditions they often seem to miss the point, beeing driven by the available 'tool' rather than the research question beeing pursued. (s. 1077)

Mason och Waywood menar att det är viktigt för forskaren att vara väl påläst på annan forskning än den egna. Risken är annars att man blir hemmablind och bara diskuterar och utför den typ av forskning som råkar bedrivas i den egna forskningsmiljön, vilket kan innebära att man inte ser andra, alternativa möjligheter.

3.3 Forskning om läraren i klassrummet

En stor del av forskningen kring läraryrket handlar om lärares uppfattningar av såväl ämne, kunskap, undervisningsmetod som elever. En relativt liten del av forskningen handlar, såsom Runesson (1999) påpekar, om hur lärare undervisar ett innehåll. En förklaring till detta är enligt Shuell (1996) den komplexa miljön i klassrummet.

> Classrooms are not the neat, orderly place we sometimes imagine them to be. The typical classroom is an active place in which many things happen. (s. 728)

När man studerar ett ämnesinnehåll i undervisningen är det således en rad andra faktorer som samtidigt påverkar hur innehållet kommuniceras. I Shuells artikel konkretiserar han detta med att lyfta fram följande sex faktorer som påverkar undervisningen:

1. *Multidimensionality* - Classrooms are crowded settings with a large number of events and tasks occurring and a limited supply of resources for the attention of both the teacher and the students.
2. *Simultanity* - Many things happens at the same time.
3. *Immediacy* - A large number of interpersonal exchanges and events progress at a rapid pace with little time for reflection.
4. *Unpredictability* - Since classrooms involve social interactions that are jointly produced, it is difficult to predict how a particular activity will turn out on any given day, and unexpected turns of events are common.

5. *Publicness* - Classrooms are public places in which events such as those involving the teacher or disruptive students are witnessed by a large portion of the class. There are few places for either the teacher or students to hide.
6. *History* - Any group that remains together for a period of time accumulates a common history of experiences norms and routines that provide contexts in which current activities are conducted. Former experiences and their outcomes, both good and bad, are not easily modified. (s. 729)

De ovan nämnda faktorerna påverkar alltså på olika sätt villkoren för undervisningen. Men Shuell tar också upp andra viktiga faktorer, sådana som rör behandlingen av innehållet i kommunikationen. Han nämner följande åtta punkter: Tydlighet, variation, entusiasm, ämnesfixering, benägenhet att kritisera, benägenhet att lyssna på eleverna, fokusering av innehåll, strukturerad handledning, mångsidig diskurs.

Ännu en faktor som gör forskningen kring lärarrollen komplicerad är enligt Niss (2001) att matematikens didaktik har en dubbel natur, med beskrivande/förklarande frågeställningar av typen ”Vad är fallet?” och ”Varför är det på det viset?”, samt normativa frågeställningar där de generativa frågorna är ”Vad bör vara fallet?” och ”Varför då?”. Han jämför denna dualitet i diskursen med den som sker inom medicinsk forskning:

> Eftersom undervisningen i och inlärning av matematik alltid äger rum i ett sammanhang, på en viss plats och vid en viss given tidpunkt (och därmed är underkastad flera olika tämligen speciella betingelser och omständigheter), måste vi ta med i beräkningen att generaliserbarheten och det universella i matematikdidaktiken rymmer vissa begränsningar i tid och rum. (s. 31)

Vad Niss här lyfter fram är ramarnas betydelse för undervisningen och hur känslig undervisning och inlärning är för kultur och miljö. Resultat vunna från en viss miljö låter sig inte alltid överföras till en annan miljö. Liknande tankegångar finner man hos Bodin och Capponi (1996) som menar att undervisningen påverkas av en rad andra faktorer än den viktigaste, nämligen hur det går till att överföra kunskap. De menar också att forskningen kring undervisning hittills har koncentrerats till vissa begränsade områden.

3.3.1 Klassrumskulturer

Nickson (2000) gör en genomgång av olika typer av klassrumsforskning om matematikundervisning. Hon menar att man under senare år har haft ett nytt perspektiv på forskningen om skolmatematik, en mer praxisnära ansats:

> … the changes in perspectives on research in mathematics education … have led to an increased focus on classroom research. While learning is seen to be the

> construction of the indivudual child, the emphasis is now placed on the situatedness of learning. (s. 147)

Den matematikdidaktiska forskningen har blivit mer inriktad mot kulturen i klassrummet, en inriktning som också efterlystes av Bodin och Capponi (1996) .

> By the culture in the classroom we mean the invisible and shared meanings that are governed by norms and values that children and teachers bring to the classroom and, in turn, govern their actions and interactions in it. (Nickson, 2000 s. 148)

Det har även skett en annan omsvängning när det gäller klassrumsforskning, från en tidigare fokusering på olika grupperingar, klass- och könsskillnader till ett ökat intresse för lärarens ansvar när det gäller att bedriva en effektiv undervisning (Boaler, 1997; Tomlinson, 1987; Abraham, 1995). Detta beror sannolikt dels på de studier som visat på kvalitativa skillnader i nordamerikansk och japansk undervisning (Hiebert & Stigler, 1999), dels på att matematikdidaktiken numera börjar bli en etablerad disciplin (se till exempel Kelly & Lesh, 2000; Niss 2001; Björkqvist, 2003) med sina egna forskningsfält.

> … first, that mathematics education has emerged as a disciplin in its own rights, and second, that matematics educators have been more aware of the responsiblity of their task in teaching their subject effectivily to young people who must make their way in a technological world. (Nickson, 2000, s. 148)

Nickson tar Watsons (1998) forskning som exempel på hur man väver samman klassrumskultur med ämnets innehåll. När Watson studerade lärares informella utvärdering i klassrummet visade det sig, att många lärare i Watsons studie hade svårt att ändra sin uppfattning om sina elever, i flera fall inte ens efter upprepade indikationer på att uppfattningen inte varit helt korrekt.

> Only two examples are given here but others reported indicate a range of teacher behaviour showing a similar disinclination to change their views even when different evidence arises. This may result in potencially able mathematics pupils being ignored, or conversely, weaker pupils not being given the support they need because teacher is convinced they are stronger then they are, either because of their social skills or occational successes. (s. 170)

Vad Nickson (2000) tar upp är alltså faktorer som har betydelse för hur läraren behandlar elever med avseende på deras förmåga och förkunskaper. Detta är, enligt Ausubel (1968), avgörande faktorer för en meningsfull inlärning.

I *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning*. (Grouws, Ed.,1992) tar Nickson (1992) upp en annan trend nämligen att man allt mer lyfter fram lärarens ansvar för undervisningen, en reaktion mot en omfattande självverksamhet bland eleverna. Hon refererar här till Levitas (1974):

> Every child in every society has to learn from adults the meanings given to life by his society… (s. 101)

Nickson (1992) varnar också för missuppfattningen att det bara finns en klassrumskultur:

> A danger in associating culture with the mathematics classroom is to assume there is only one such culture. However, since key aspects of culture are concerned with unseen beliefs and values, the culture of a mathematics classroom will depend to a very large extent on these hidden perspectives of teachers and pupils in relation to the subjects. (s. 102)

Även om vissa kulturella mönster kan vara gemensamma i de flesta klassrum, så kan de skillnader som finns ändå vara helt avgörande för såväl klassrumsklimat som inlärning.

3.3.2 Andra perspektiv på klassrumsforskning

Ett annat perspektiv på klassrumsforskning ges av Koeler och Grouws (1992) som analyserar olika grader av djup i denna forskning. De delar in forskningen i följande fyra nivåer:

- Nivå 1, där man studerar elevernas resultat i relation till olika karakteristika hos läraren såsom lärarerfarenhet, antal genomgångna kurser eller entusiasm.
- Nivå 2, där man även tar hänsyn till vissa delar av klassrumskulturen såsom lärarens och elevernas aktiviteter och beteende under genomgångar.
- Nivå 3, där man inte bara är intresserad av elevernas resultat utan även av deras attityder till undervisningen. Detta relateras ofta till faktorer som kön och ras.
- Nivå 4, där det viktigaste inslaget är att se lärandeprocessen, alltså undervisning och inlärning, som en helhet. Man studerar till exempel hur elevernas kunskaper och beteende påverkas dels av deras attityder till och uppfattningar om ämnet, dels av vad läraren gör och säger. Ett annat föremål för forskning kan vara hur lärares agerande påverkas av hennes kunskaper om det innehåll som undervisas, om hur elever lär stoffet ifråga och om metoder att undervisa om stoffet.

Det här är enligt författarna ett sätt att göra en kategorisering av forskningens inriktning, där komplexiteten på olika sätt kan byggas på med andra betydelsefulla faktorer såsom olika ramars betydelse för undervisningen eller hur kommunikationen byggs upp utgående från ämnets didaktiska struktur.

En faktor som enligt många källor starkt påverkar undervisningen är lärarens egen uppfattning om ämnet matematik. Här menar till exempel Hersh (1986) att

> … knowing mathematics is making mathematics. What caracterizes mathematics is its making, its creative activities or generative process.

Hersh ser alltså, i likhet med många andra, matematiken mer som en kreativ process än som ett färdigt verktyg. Det förhållandet att olika grupper har olika syn på ämnet matematik, bidrar till att göra tolkningen av forskningsdata komplex. Ernest (1988) försöker reda ut de vanligast förekommande uppfattningarna om matematik. Han skiljer därvid ut tre typer av uppfattningar som han anser vara viktiga inom matematikens filosofi:

> First of all there is a dynamic, problem-driven view of mathematics as a continually expanding field of human creation and invention. … Mathematics is not a finished product, for its results remain open to revision (the problem solving view).
>
> Secondly, there is a view of mathematics as a static but unified body of knowledge, … Mathematics is discovered, not created (the Platonic view).
>
> Thirdly, there is the view that mathematics, like a bag of tools, is made up of an accumulation of facts, rules and skills … Thus mathematics is a set of unrelated but utilitarian rules and facts (the instrumentalist view). (s. 10)

Jag har under senare år som lärarutbildare funnit en glidning i lärares uppfattningar från den tredje kategorin mot den första alltså från instrumentalistens syn på matematik till problemlösarens.

En forskare som på senare tid ägnat stor uppmärksamhet åt forskningsmetoder vid klassrumsforskning, *Classroom Learning Project*, är Clark (2001). Med hjälp av en multidisciplinär ansats strävar han efter att ge en bild av mångfalden och komplexiteten i undervisningen. Han fokuserar uppmärksamheten på två saker, dels på hur man med hjälp av olika tekniker kan samla in så mångsidiga data som möjligt, dels på hur man skall få en så allsidig tolkning av dessa data som möjligt. De tekniker han använder är en dokumentation av lektionerna med hjälp av flera videokameror varav en alltid följer läraren, följt av intervjuer av några elever direkt efter lektionen. Analysen av lektionerna ges en stor allsidighet genom att den genomförs av ett forskarteam vars medlemmar har sin kompetens inom olika kompletterande områden.

> When the single researcher is replaced by a multidisciplinary research team, the reconciliation of alternative meanings becomes a methodological issue of significance. (s. 13)
>
> Differences in the theoretical positions adapted by research team members constitute an important safeguard against methodological monism or myopia. (s. 14)

Clark menar att hans forskning skiljer sig från annan klassrumsforskning på åtminstone följande sätt:

- The nature of the data collection procedures, leading to construction of ”integrated data sets” combining video tape and interview data,
- The inclusion of the reflective voice of participant students and teachers in the data set,
- An analytical approach that utilises a research team with complementary but diverse areas of expertise to carry out a multi-faceted analysis of a common body of classroom data. (s. 14)

För närvarande pågår ett större internationellt projekt där man gör komparativa klassrumsstudier utgående från Clarks metodik: *The Learners' Perspective Study*. I det här projektet är forskarteam från nio olika länder engagerade, bland andra från Sverige. Det man avser att studera med hjälp av den ovan nämnda tekniken är sviter av lektioner, alltså inte bara isolerade lektioner. (Jämför med TIMSS-studierna i nästa avsnitt, Third International Mathematics and Science Study)

Clarke (2004) skriver om det ovan nämnda projektet

> In addition, unlike any previous international study, this project has the capacity to relate identified culturally-specific teacher practices to antecedent student behaviours and to consequent student outcomes. … Another distinguishing feature of the project is the exploration of learner practices. (s. 2)

Det syfte man har med projektet beskrivs i korthet så här:

> In particular, this project will facilitate the comparison of ”quality” mathematics teaching in each country against the practices employed in other countries, by identifying similarities and differences in both teaching practice and in the associated student perceptions and behaviours. (s. 2)

Via Clark kan man sammanfatta det här avsnittet så, att klassrumsforskning är svår att genomföra på grund av dess komplexitet. Det betyder att en stor del av den forskning som hittills bedrivits bara har omfattat delar av denna komplexitet. Att från detta dra generella slutsatser är vanskligt. Vad Clark strävar efter är att genom en mer tvärvetenskaplig ansats och med tillgång till mer detaljerade data kunna se nya aspekter och ge en mer allsidig belysning av vad som händer i klassrummet.

3.4 Internationell matematikdidaktisk klassrumsforskning

Jaworski och Potari (1998) bedriver, enligt traditionellt engelsk mönster, en typ av klassrumsforskning om matematik. Det handlar om aktionsforskning i klassrummet som ofta initieras av en fortbildning och som sedan följs upp i ett samarbete mellan lärare och forskare. Jaworski och Potari har i en studie observerat två lärare som fick undervisa enligt i förväg planerade lektioner. I sin forskning utgår de från.

> 1. that the complexity of teaching/learning situations is such that any attempt to provide holistic description is rapidly seen to be hollow (Bauersfeld, 1988);
> 2. that the essence of teaching/learning processes lies in classroom interactions, the analysis of which provides the key to understanding the complexity acknowledge in (1);
> 3. that teachers work from a position of sincerity and professionalism in seeking for students' mathematical development.
>
> … This involves a *micro*analys of classroom interactions, and a related *macro*analys drawing on the thinking and reflections of participants including students, teachers and researchers. (s. 88)

Deras forskning har som ett av målen att utveckla forskningsmetoden och de utgår därvid från vad de kallar ”The Teaching Triad”.

> The *Teaching Triad* emerged from an ethnographic studie *of investigative mahtematics teaching* by one of the authors (Jaworski 1991). It describes or characterises the *teaching* in the classroom, attempting to provide a framework to capture the essential elements of the complexity involved. It encompasses three domains: the management of learning (ML); sensitivity to students (SS) and mathematical challenge (MC). (s. 88)

Jaworski och Potari försöker synliggöra de viktigaste faktorerna i undervisningens komplexitet. På en nivå, menar författarna, avslöjas lärarens förmåga att balansera de utmaningar eleverna ställs inför mot deras behov och förmåga. På en annan nivå ställs lärarens reflektioner kring olika episoder i undervisningen mot forskarnas tolkning av dessa.

Forskarna pekar också på att ett undersökande arbetssätt innebär mycket mera än att bara låta eleverna på egen hand undersöka och upptäcka. Det är emellertid inte så lätt för eleverna att byta från en inlärningsmetod till annan, som de inte har någon erfarenhet av sedan tidigare. Som exempel, menar de, är det inte så konstigt om eleverna blir konfunderade när de plötsligt tvingas arbeta med ”openended problem-solving”, om de tidigare varit vana vid att arbeta självständigt, utgående från en lärobok.

Ur lärarens perspektiv lyfter Jaworski och Potari fram undervisningsmetodens betydelse. Tyvärr, menar de, visar det sig ofta att läraren tror sig använda en viss metod (som hon till exempel träffat på vid fortbildning) men att hon i själva verket använder en helt annan metod. De pekar också på språkets betydelse dels för att möjliggöra en variation i lärandet, dels för att eleverna skall uppfatta viktiga saker som vad det innebär att definiera något.

Jaworski (2002) menar vidare att vi vet för lite om lärarens komplexa roll i undervisningen.

> In a similar vein we might say that mathematics teacher education is intended to create the learning of mathematics teaching. It sounds easy and straightforward. But can we judge the success or effectiveness of teaching by assessing the learning, which takes place? (s. 37)

En hel del av det Jaworski och Potari tar upp är speciellt intressant: Hur förhåller sig lärare till byte av undervisningsmetod eller arbetssätt? Hur lyckas de ge eleverna en instruktion som lyfter fram deras avsikt med arbetet? Har lärare en så klar uppfattning om didaktikens historia att de kan sätta in ett nytt material eller en ny idé ett historiskt sammanhang eller följer de bara en trend?

Även Hoyles (1988) tar upp liknande teman. Hon menar att

> … pupils want teachers to 'make it easy' or 'tell them the way' … which almost compel an algoritmic approach. We need to find a significantly different mode of education and practice in our classrooms … ”(s. 162)

Under cirka 40 år har man utfört internationella studier där man, utgående från speciella test, jämfört elevers matematikkunskaper i olika länder. De första undersökningarna gjordes inom ramen för IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) åren 1964 och 1970 (Murray & Liljefors, 1983) och den senaste inom ramen för TIMSS år 1995 (Skolverket, 1996). Som en följd av dessa jämförelser har det vuxit upp ett intresse att finna orsakerna till att elever i vissa länder lyckas bättre än i andra på dessa test. Inte minst i USA har detta intresse varit stort. Mot denna bakgrund förutsåg Bodin och Capponi (1996) att det i framtiden skulle göras storskaliga internationella undersökningar, där man jämför undervisning på internationell nivå. De hänvisade därvid till, ”one of the rare studies” *The mathematics classroom in Beijing, Hong Kong and London* (Leung, 1995), där man studerade matematikundervisning ur ett komparativt perspektiv. När man beskriver utfallet i denna studie finner man att lektionerna i Beijing och Hong Kong i stort sett följer samma mönster. Läraren startar med en kort genomgång av tidigare lektions innehåll, gör sedan en ny genomgång varefter eleverna får räkna själva. Mot slutet av lektionen får några elever räkna uppgifter på tavlan varefter deras lösningar diskuteras. Lektionen slutar med att läraren ger en hemläxa. Den här typen av lektion påminner mycket om min egen skolgångs matematiklektioner. I London ser emellertid lektioner, som följer ett individualiseringsprogram, annorlunda ut. Lektionen startar då på administrativ nivå, till exempel med att lärare kontrollerar om eleverna har rätt material för att arbeta med uppgifterna. Därefter arbetar eleverna på egen hand och läraren går runt och handleder dem. Lektionen slutar med att läraren ber eleverna lägga ihop och lämna igen material. Detta är en typ av lektion som idag, enligt Skolverket (2003b), är vanlig även i Sverige.

Ett annat intressant exempel på internationellt jämförande forskning är *TIMSS 1995 Video Study* (Stigler & Hiebert, 1999) där man, utgående från hundratals videobandade lektioner i skolår 8, jämför undervisningen i USA, Tyskland och Japan. Bakgrunden till studien är de internationella TIMSS-undersökningarna (se till exempel *TIMSS, 1996, rapport 14*), där resultatet för USA visade sig vara under det internationella medelvärdet och betydligt sämre än resultatet i till exempel Korea och Japan. Genom TIMSS videostudie sökte man förklaringar till varför undervisningen i USA gav sämre resultat än i andra länder. Den metod man använde gick ut på att studera enskilda lektioner hos slumpvis utvalda lärare. Datainsamlingen och analysen gjordes av samarbetande forskarteam från de tre olika länderna. Resultaten visade på kulturella skillnader när det gäller synen på och genomförandet av undervisningen.

> One of the most striking impressions when watching the videotapes is that students in the United States encounter a different kind of mathematics from that encountered by their peers in Germany and Japan. The content appears to be less advanced and is presented in a more piecemeal and prescriptive way. (Stigler & Hiebert, 1999 s. 56)

Detta var något man ville studera djupare eftersom nivån på, och arten av, det innehåll som studenterna möter sätter gränser för deras möjligheter att lära sig, menar Stigler och Hiebert.

> If the content is rich and challenging, it is more likely that students have the opportunity to learn more mathematics and to learn it more deeply. If the content is fragmented and ordinary, students have less chance of learning important mathematics. (Stigler & Hiebert, 1999, s. 57)

Eftersom eleverna i USA mötte färre utmaningar i matematikundervisningen och fick innehållet presenterat på ett mindre sammanhängande sätt än sina kamrater i Japan och Tyskland, innebar detta att de själva måste arbeta hårdare för att matematiken skulle bli begriplig för dem. I studien kunde man också konstatera att undervisning är kulturberoende och att ”Cultural activities are highly stable over time and they are not easily changed” (s. 97). Stigler och Hiebert beskriver vidare hur man i USA studerar sådana indikatorer som skiljer länderna åt och sedan föreslår förändringar på en punkt i sänder, till exempel vilka uppgifter som skall ingå i ett visst arbetssätt och så vidare.

> But because teaching is a complex system, these attempts to change it generally dont work. It has now been documented in several studies that teachers asked to change features of their teaching often modify the features to fit within their pre-existing system instead of changing the system itself. The system assimilate individual changes and swollows them up. Thus, although surface features apper to change, the fundamental nature of the instruction does not. When this happens, anticipated improvements in students learning fail to materialize and every one wonders why. (Stigler & Hiebert, 1999, s. 98)

Den första videostudien har nu följts upp med en andra studie, TIMSS 1999. Studien har den här gången utvidgats till att omfatta lektioner under det åttonde skolåret i sju olika länder. Det är fyra olika fält som studeras.

> The context of the lesson, including information about the teacher and students; organization and structure of the lesson environment; the kind of mathematics studied; and the way in which the mathematics was studied. (Stigler & Hiebert, 1999, s. 64)

Bland de slutsatser som kunde dras var:

- att man i alla länderna ägnade huvuddelen av matematiklektionerna åt matematik
- att lektionerna i huvudsak ägnades åt problemlösning
- att inlärningsmiljön, trots en rad likheter, var mycket olika i olika länder.

När det gäller de tre länder som lyckades bäst på TIMSS:s matematiktest, betonade man i Tjeckien ”reviewing”, medan man i Japan och Hong Kong betonade ”new content”. I Japan fokuserade man därvid uppmärksamheten mot hur man presenterar ett innehåll medan man i Hong Kong fokuserade mot hur man övar det nya innehållet. Det här är något författarna återkommer till i rapporten. Det är inte så att de länder som lyckas bäst har ett speciellt koncept som leder till framgång. Tvärtom påpekar man att:

> In particular, no country differences were found on the percentage of lessons taught by teachers who identified the different types of goals: using routine operations (40 – 51 percent); rasoning mathematics (5 – 19 percent) applying mathematics to real-wold problems (11 – 16 percent); and knowing mathematical content (11 – 19 percent). (Stigler & Hiebert, 1999, s. 34)

Däremot skiljer sig länderna åt när det gäller inlärningsprocessen, alltså hur och på viket sätt man genomför undervisningen. Man framhåller därför vikten av att man, vid den här typen av studier inte separerar och analyserar olika faktorer var för sig. Framgång hänger snarare ihop med hur man lyckas integrera faktorerna i undervisningen. En annan viktig aspekt är att det inte är helt enkelt att direkt överföra en framgångsrik undervisningsstil från en kultur till en annan, till exempel från Japan till USA. Det sätt man undervisar på är alltför hårt knutet till vad Carlgren och Marton (2000) kallar nedärvt intellekt.

En annan typ av jämförande undersökning utfördes av Ma (1999). Hon undersökte hur lärare i USA och Kina beskrev hur de för sina elever skulle förklara lösandet av ett antal uppgifter. Det visade sig att de amerikanska lärarna, trots betydligt längre utbildning, hade sämre förmåga att förklara lösningarna än de kinesiska lärarna.

Man kan sammanfatta de här studierna så, att Stigler och Hiebert (1999) i första hand beskriver undervisningsmetoder, arbetssätt och vilken typ av uppgifter man arbetar med, medan Ma beskriver lärarnas matematikdidaktiska kompetens. Ingen av dem beskriver emellertid det matematikdidaktiska innehållet i undervisningssituationen i relation till undervisningens ramar. Dessa rapporter är emellertid så intressanta för mitt arbete att jag återkommer till dem senare, vid flera tillfällen.

3.5 Svensk matematikdidaktisk klassrumsforskning

I Sverige är det inte så många som bedrivit klassrumsforskning kring kommunikationen vid matematikundervisning, vilket framgår dels av den kunskapsöversikt och bibliografi som utgetts av Myndigheten för skolutveckling (2003), dels av den sammanställning som gjorts av Björkqvist (2003). Jag väljer här att presentera de arbeten som bedrivits av fyra svenska forskare eftersom de tangerar mitt forskningsintresse.

En forskning, som på en nivå ligger nära min, är den som bedrivits av Wyndhamn (1988, 1993, 1994). Hans forskning är inriktad, dels mot det språk och de strategier som används av elever under matematiklektioner, dels åt det språk lärare och läromedel använder för att ge instruktioner eller formulera uppgifter åt eleverna. Wyndhamn (1988) analyserar speciellt språket i en problemlösningsmiljö. Han menar:

> Människan vandrar ut och in på olika 'scener' eller 'arenor' som hemmet, arbetsplatsen, skolan, affären, lekplatsen osv. Miljöerna hon uppträder i eller situationerna hon befinner sig i kan beskrivas på olika sätt. Ett sätt är att göra en enkel tudelning i 'vardagliga' och 'formella' eller kanske snarare 'institutionaliserade' miljöer. Skolan räknas i så fall till de institutionaliserade kommunikativa miljöerna med speciella sätt att agera och strukturera verkligheten. (s. 17)

Ett stort dilemma är emellertid att

> Problem eller uppgifter som skall lösas i en vardaglig respektive formell situation har olika karaktär och olika kommunikativa förtecken. Problemen i skolan

> presenteras skriftligt eller muntligt till skillnad från vardagens direktupplevda problem. (s. 17)

Wyndhamns poäng är således att problemlösandet är kontextberoende. Det betyder att när eleverna får ett problem i skolan så löser de problemet så som man brukar lösa problem i skolan, medan de, om de fått samma problem i en situation ute i livet, skulle ha löst uppgiften på ett helt annat sätt. (se även Lave & Wenger, 1991). Wyndhamn (1988) sammanfattar detta så här:

> I analysen hävdas att teoretisk och praktisk förståelse av de svårigheter elever har vid elementär problemlösning, måste grundas på insikter rörande de skillnader i att bygga upp och strukturera inlärningsuppgifter som är typiska för skolan som kommunikativ miljö å ena sidan, och de som är naturliga kontexter å den andra. (s. 17)

Det som enligt Wyndhamn (1988) gör det hela än mer komplicerat är att ”skolan förväntas ge eleverna en abstrakt kunskap (typ läsa, skriva och räkna) som sedan kan omsättas i en rad olika situationer. Denna ”koncentrerade” och kontextfria kunskap erövras genom processerna abstraktion och generalisering” (s. 17). Det är detta Wyndhamn ifrågasätter. ”Tankemodeller förvärvade i en situation överförs inte automatiskt till en annan. Tänkandet är knutet till och underordnat själva situationen” (s. 17). Som jag tolkar detta måste eleverna ges hjälp att utgående från en situation kunna generalisera denna kunskap för att sedan utnyttja den i andra situationer. Vad det handlar om är enligt min uppfattning en bristande förmåga hos många lärare att med sitt språk kunna simulera och gå fram och tillbaka mellan olika miljöer. Jag vill alltså gå ett steg längre än Wyndhamn och undersöka om, och i så fall hur, lärare med språkets hjälp lyckas överbrygga de problem han beskriver.

Även Runessons (1999) forskning belyser undervisningsprocessen, alltså ”lärarens sätt att behandla innehåll i relation till elevers lärande” (s. 17). Detta görs med ”en inlärningsteoretisk utgångspunkt grundad i den fenomenografiska forskningsansatsen” (s. 17). Hennes forskning är av den typ som av Mason och Waywood (1996) klassificeras som att testa en teori. Runesson påpekar att till skillnad från tidigare forskning så är det

> … hur det objekt som eleverna erbjuds att erfara är beskaffat, som utgör forskningsobjektet i denna studie. Lärarens undervisningshandlingar kommer då att ses som en potential för att forma elevernas medvetande, d.v.s. det sätt varpå undervisningens objekt formas, utgör en av eleverna potentiellt erfaren innebörd. (s. 18)

Jag uppfattar detta så att hon undersöker hur olika lärare presenterar och behandlar ett aktuellt undervisningsstoff och hur detta kan vara avgörande för elevernas inlärning, men att hon inte tar reda på om så är fallet. Mer precist studerar Runesson hur

> … variation används i undervisningen för att framställa en innebörd av tal i bråk- och procentform eftersom läraren kan hålla vissa aspekter av dessa konstanta och öppna för en dimension av variation när det gäller andra.” (s. 18)

Beskrivningen görs i termer av:

– vilka aspekter av undervisningsobjektet som är fokuserade resp. icke fokuserade och som elevernas medvetande riktas mot

– vilka aspekter av undervisningsobjektet som hålls konstant resp. vilka som utgör dimensioner av variation.” (s. 18f)

Runesson är således intresserad av variationen i lärarens sätt att presentera och behandla ett visst inlärningsstoff. Jag är å min sida intresserad av att utreda i vilken mån olika variationer att presentera stoffet är matematiskt korrekta och uppfattbara för eleverna. Jag är också intresserad av kvaliteter i lärarens kommunikation av ett matematikinnehåll.

Emanuelsson (2001) undersöker ”klassrumspraktiken med fokus på hur elevernas kunnande kommer till uttryck i det dagliga arbetet i vår skola och hur interaktionen i klassrummet gör sådana uttryck möjlig”.

> Avhandlingen syftar till att beskriva variationen i hur lärares frågor i klassrummet öppnar deras möjligheter att se, förstå, uppfatta, erfara elevernas sätt att förstå inom matematik och naturvetenskap. (s. 7)

Bland resultaten när det gäller matematikundervisningen märks:

> I matematik dominerar istället möjligheterna att bedöma elevernas kunnande i termer av rätt respektive fel svar eller lösningsmetod. Sämre är möjligheterna att avgöra hur eleverna förstår den matematik de hanterar. Lärarna har relativt små möjligheter att bedöma elevernas kunnande när det gäller att presentera eller argumentera för en ståndpunkt, ett resonemang eller en lösningsmetod i matematik. (s. 210)

Emanuelssons forskning uppfattar jag som ett intressant komplement till Runesons forskning. Det jag för min del vill tillföra är bland annat att utforska lärarens möjligheter att ställa relevanta frågor utgående från aktuella ramar. De vanligaste valen av arbetssätt och arbetsform i dagens skola ger enligt min erfarenhet begränsade möjligheter att såväl bedöma, presentera som argumentera för sitt matematiska tänkande.

Förutom den just beskrivna forskningen finns det även en äldre forsknings-tradition om undervisningsprocessen vid matematikundervisning (Lundgren, 1972, 1977; Kilborn 1979a, 1979b). Speciellt Kilborns studier inom PUMP-projektet är intressanta och visar klart hur undervisningen ofta gick över huvudet på eleverna. Till detta fanns två skäl, dels att läraren inte var medveten om elevernas förkunskaper, dels att läraren ofta ”lotsade” eleverna förbi alla problem istället för att utreda problemen. Till skillnad från den ovan refererade forskningen utgår Kilborn från undervisningens ramar för att tolka och förklara resultaten. Dessa studier kom att få stor betydelse såväl för kursplanearbetet 1980, uppbyggnad av läromedel som för planering av lärarutbildningen. Vad som främst skiljer min forskning från Kilborns är att jag är mer inriktad mot lärarens roll som aktör i klassrummet och därmed på olika kvaliteter i lärarens förklaringar. Jag försöker också ge en klarare bild av ramarnas inbördes relationer, inte minst av lärarnas val av konkretiserings- och individualiseringsmodeller.

3.6 Sammanfattning

Det övergripande syftet med den didaktiska forskningen är att främja och förbättra elevers och studenters matematikinlärning (Niss, 2001). Ett problem därvidlag är undervisningens komplexitet som i sin tur leder till problem med att finna bra forskningsdesigner. Ett annat problem är att mycket av det som händer i ett klassrum är osynligt för den som inte själv har erfarenheter som lärare.

Forskning om undervisningsprocessen utförs ofta genom studier av i förväg beställda (regisserade) lektioner. Denna forskning kan givetvis ge värdefull information om vad som är möjligt att utföra under en lektion, men behandlar inte vad som faktiskt händer under en vanlig lektion. Forskaren måste också vara medveten om undervisningsprocessens beroende av de ramar och den kontext som varit aktuella. Det finns inte något givet koncept som alltid leder till framgång i undervisningen utan det handlar om hur detta koncept integreras med en rad andra faktorer.

Clark (2001) menar att klassrumsforskning är svår att genomföra på grund av dess komplexitet. Det betyder att en stor del av den forskning som hittills bedrivits bara har omfattat delar av denna komplexitet. Ett annat dilemma är enligt Niss (2001) matematikdidaktikens dubbla natur, den beskrivande/förklarande som skildrar hur det är och den normativa som skildrar hur det borde vara.

Vad ovanstående översikt visar är att den matematikdidaktiska forskningen gett en hel del viktig information om lärarens förhållningssätt till undervisning och om hennes sätt att undervisa. Någon forskning som syftar till att undersöka hur lärare faktiskt kommunicerar ett ämnesinnehåll under en helt vanlig matematiklektion och utgående från undervisningens ramar, har jag inte funnit, med undantag av Kilborn (1979a).

TEORETISKA UTGÅNGSPUNKTER

Här redovisas de teoretiska utgångspunkterna för mitt arbete. Teorin byggs upp kring två kompletterande ansatser, en ramfaktorteoretisk och en matematikdidaktisk. Detta behandlas i kapitel 4. Därefter ägnas kapitel 5 åt att utreda matematikundervisningens faktiska villkor ur ett ramfaktorteoretiskt perspektiv samt att beskriva dessa villkor i form av fasta och rörliga ramar. I kapitel 6 avhandlas undervisningens innehåll ur ett matematikdidaktiskt perspektiv. Detta omfattar även kommunikationen av ett matematiskt innehåll. En teoretisk bakgrund till de språkliga problem som därvid uppstår behandlas i kapitel 7.

4 Teoretiskt ramverk

I detta kapitel presenteras det teoretiska ramverket för studien. Forskningsansatsen är praxisnära och omfattar klassrumsstudier av lärares matematik undervisning med fokus på matematikinnehållet. Kelly och Lesh (2000) har gjort en genomgång av forskningsdesigner ”aimed at clarifying the nature of principles that govern the effective use of emerging new research designs in mathematics and science.” (s. 9). Eftersom klassrumspraktiken är komplex så menar de att det inte är så lätt att designa klassrumsstudier. Man fokuserar ofta olika delar av problematiken och inte på helheter. De råder därför forskaren att utveckla egna, för forskningsfrågan lämpliga designer. På motsvarande sätt saknas en sammanhållande teori som förklarar komplexitet vid klassrumsforskning. Det krävs därför multipla teorier.

Avsikten med den här avhandlingen är att studera hur lärare kommunicerar ett matematikinnehåll med sina elever under matematiklektioner i grundskolan. Detta kräver att läraren behärskar såväl en för undervisningen relevant matematikteori som ett undervisningsspråk för att kommunicera ett matematikinnehåll med eleverna. När jag studerar detta använder jag mig av den matematikdidaktiska teori som beskrivs i avsnitt 4.2. Samtidigt som denna kommunikation av ett matematikinnehåll har stora frihetsgrader är den begränsad av ett antal faktorer såsom skolans styrdokument, skolans utrustning, undervisningsgruppens storlek, val av läromedel, lärarens utbildning med mera. Dahllöf (1971) kallade sådana faktorer för ramfaktorer. Det jag studerar ur det här perspektivet är hur lärare hanterar undervisningens ramar i relation till dess innehåll. Den ramfaktorteori som därvid används beskrivs i avsnitt 4.1

När det gäller att kartlägga kommunikationens matematikdidaktiska kvalitéer kan jag använda mig av de erfarenheter som byggts upp kring matematikämnets didaktik. Även om man kan lösa ett matematiskt problem på olika sätt så kan man oftast avgöra om lösningen är korrekt eller ej. En svårighet som återstår är emellertid att tolka kommunikationens innehåll. Utgångspunkterna för detta behandlas senare, i kapitel 8.6.

4.1 Ett ramfaktorteoretiskt perspektiv

Ramfaktorteorin introducerades på 1960-talet när Dahllöf (1967) analyserade och modifierade resultaten i en rapport av Svensson (1962). Svensson hade i rapporten jämfört provresultat i klasser som var differentierade enligt olika principer. Resultaten ifrågasattes av Dahllöf som menade att Svensson i sin undersökning inte tagit hänsyn till viktiga bakgrundsfaktorer. Bland annat, menade Dahllöf, hade ett prov som använts i Svenssons undersökning inte gett en rättvisande bild av de olika elevgruppernas faktiska kunskaper. Eleverna hade i själva verket undervisats utgående från olika kursplaner och olika timplaner. När Dahllöf tog hänsyn till sådana ramfaktorer kom han fram till helt andra resultat än Svensson.

Ramfaktorteorin har byggts upp kring fyra faktorer: undervisningens mål, undervisningens ramar, undervisningsprocessen och undervisningens resultat. Vid utvärdering av undervisning studerar man samspelet mellan dessa faktorer. Broady och Lindblad (1999) framhåller, med hänvisning till Lundgren (1984), att ramfaktorteorin har haft en stor betydelse för de senaste årens skolutveckling.

> Den har inte bara tjänat som ett verktyg för att förstå skolans förändring. Den har dessutom bidragit till att forma senare års utveckling mot decentralisering och målstyrning. (s. 1f)

Dahllöf (1976) skiljde i sin forskning mellan två typer av ramar, fysiska och administrativa. Exempel på fysiska ramar är skolans lokalisering, lokalernas utrustningsstandard m.m. Exempel på administrativa ramar är klasstorlek, elevgruppering, läroplanens och kursplanens syften och mål, timplaner m.m.

> Thus these frame factors have in common that they set certain time and space limits for that part of the eductional process that takes place at school. (s. 76)

Dahllöf menade att man måste ta hänsyn till dessa ramar för att förstå undervisningsprocessen och dess resultat. Det är också genom att förändra dessa ramar och anpassa dem till skolans behov som skolpolitiker och skoladministratörer kan förändra skolans undervisning på lång sikt.

4.1.1 Lundgrens analyser av undervisningsprocessen

När Lundgren (1972) arbetade vidare utgående från Dahllöfs ramfaktorperspektiv var han i första hand intresserad av de administrativa ramarna. Han använde dem i sin forskning för två syften: att kartlägga undervisningsprocessens beroende av ramarna och relationen mellan undervisningsprocessen och inlärningsprocessen.

När Lundgen (1972) inom ramen för KOMPASS-projektet (Komparativa processanalyser) skulle studera och analysera undervisningen i matematik på gymnasieskolan behövde han ett analysinstrument för klassrumsobservationer. De analysinstrument som tidigare använts var otillräckliga. Situationen beskrivs så här av Gustafsson och Lundgren (1981):

> I de flesta analyssystem som här använts, har man utgått från klassificeringar av undervisningens innehåll i psykologiska eller socialpsykologiska termer. Få har fokuserats på ett pedagogiskt innehåll, men vi kan ändå tala om ytterligare indelningsgrunder för system, som karaktäriseras av att man sökt frångå socialpsykologiskt och psykologiskt inflytande och istället inrikta sig på:
>
> …
>
> a. undervisningens innehåll – vad som sägs,
>
> b. språkregler i undervisningen,
>
> c. vem som talar till vem. (s. 20)

En sammanfattande beskrivning av det instrumentet som byggdes upp utgående från Dahlöfs ramfaktorteori finns i Lundgren (1977). Han beskriver här ett analysinstrument och utgår från Bellack (1966):

> The study of Bellack and his co-workers (1966) started with the analogy of game, thereby developing a line of thinking emanating from Wittgenstein´s (1958) later work. (Lundgren, 1977, s. 146)

Lundgren väljer utgående från Wittgenstein att behandla klassrumsspråket som delar av ett spel, där olika aktörer står för olika pedagogiska drag. (Jämför de drag spelarna gör när de spelar schack.). Han identifierar därvid fem olika drag:

> STRUCTURING (STR), which sets the context for subsequent behaviour by (1) launching of calling-excluding interactions between teachers and pupils, and (2) indicating the nature of the interaction in terms of the dimension of time, agent, activity, topic and cognitive process, regulations, reasons and instructional aids.
>
> SOLICITING (SOL), moves which are intended to elicit (a) an active verbal response on the part of the person addressed, (b) a cognitive respons e. g.

> encouraging persons addressed to attend something or (c) a physical response. Structuring and soliciting are initiating moves.
>
> RESPONDING (RES), moves which reciprocate soliciting moves.
>
> REACTING (REA), moves which are related directly to the other three moves, but need to be initiated by them. …
>
> In addition to these moves there is a fifth type, INDIVIDUAL HELP (HEP), which occurs when the teacher talks privately to a pupil, leaning over the desk giving individual guidance, for example. (s. 146)

När Lundgren analyserar en lektion delas denna upp i avgränsade ”teman” som omfattar ett speciellt innehåll. Ett sådant tema kan till exempel bestå i att man löser eller diskuterar en uppgift. Ett tema består i sin tur av att antal cykler som inleds med ett drag av typen STR eller SOL. Det kan till exempel innebära att läraren förklarar något steg i lösandet av uppgiften ifråga. Detta steg diskuteras därefter, till exempel genom att läraren ställer en fråga, varefter man tar ett nytt steg i lösandet av uppgiften och så vidare. Redan på den här övergripande nivån kunde Lundgren få en hel del information om undervisningsprocessen, till exempel hur fragmentiserad den var. De mest frekventa cyklerna visade sig vara:

SOL RES REA, som står för 22,4% av materialet
SOL RES som står för 15,5%,
STR för 6,9 %
SOL REA för 6,7%,
SOL för 5,6%
STR SOL RES REA för 5,5%.

Det här betyder att läraren oftast ställde en fråga på vilken hon fick ett svar (SOL RES). På den frågan eller det svaret gav ofta läraren eller en annan elev en reaktion (SOL RES REA). Observera att dessa typer av cykler omfattar drygt 60% av det totala antalet. Samtidigt är enligt Lundgrens undersökning längre cykler, de som omfattar fem eller fler drag, mycket ovanliga:

STR SOL RES REA REA som står för 0,5% av materialet,
STR SOL RES REA RES REA som står för 0,1%,
SOL RES REA RES REA RES 0,2% och
SOL RES REA RES REA RES REA 0,4%.

Detta betyder att längre utredande diskussioner med eleverna eller samtal om matematik sällan förekom.

Lundgrens fem drag beskriver enbart undervisningsprocessens yttre form, inte vad kommunikationen handlar om. För att kunna utreda även den aspekten klassificerar Lundgren dragen utgående från syftet med dem. Han använder sig då av fyra överordnade perspektiv: ”Cognitive process”, ”Analytic process”, ”Empirical process” och ”Evaluative process”. Klassificeringen av dragen sker dessutom ur ytterligare ett perspektiv nämligen en affektiv värdering, ”rating”, i termer av positivt, tillåtande och negativt omdöme.

Lundgren tar därefter upp andra viktiga aspekter såsom undervisningens mål och förkunskapens betydelse för kommunikationen. Däremot ägnar han enligt min uppfattning alltför lite uppmärksamhet åt andra viktiga faktorer såsom

- att en stor del av undervisningen är ”tyst”, beroende på att eleverna arbetar individuellt eller i mindre grupper, ofta styrda av ett läromedel eller övningsuppgifter de fått av läraren. Detta betyder att den kommunikation som sker mellan elev och lärobok (eller uppgiftsblad) ofta är mer frekvent än den kommunikationen som sker mellan lärare och elev(er). Denna för inlärningen så viktiga ”dialog” saknas i Lundgrens analysinstrument
- att det, under den tysta färdighetsträningen sker en viktig dialog mellan lärare och elev. Lundgren klassificerar detta som HEP, men missar såväl innehållet som kvaliteten i den dialogen. Ändå är det sannolikt så att den dialogen, tillsammans men elevernas egna reflektioner under det tysta arbetet, utgör de viktigaste förutsättningarna i inlärningsprocessen.

De stora poängerna med PUMP-projektet ligger enligt min mening i att Kilborn i sina analyser av lektionerna utgick från undervisningens mål och elevernas förkunskaper. Vidare gjorde han kvalitativa analyser av läromedlens innehåll och satte dessa i relation till elevernas prestationer. Han införde också en ny teknik för klassrumsobservationer genom att sätta trådlösa mikrofoner på läraren. Detta innebar att han även kunde följa de individuella dialoger som fördes mellan lärare och elever vid bänken.

4.1.2 PUMP-projektet

En sammanfattning av arbetet inom PUMP-projektet ges av Kilborn (1979a). Avsikten med projektet var att studera matematikundervisning under skolåren 2 – 6. Detta gjorde man genom klassrumsobservationer där all kommunikation som läraren är involverad i tas upp av en trådlös mikrofon samtidigt som en observatör noterar såväl vilka som yttrar sig som vad som händer i klassrummet. Den undervisning som studerades handlade om de fyra räknesätten. För att kunna följa upp nivån på matematikinnehållet i undervisningen hade man konstruerat speciella analysinstrument, så kallade matriser för de fyra räknesätten. Med dess hjälp kunde man före en lektion dels kartlägga elevernas förkunskaper, dels analysera svårighetsgraden av de uppgifter som eleverna skulle arbeta med under lektionen. Efter transkribering av ljudbanden kunde man på motsvarande sätt klassificera den aritmetiska nivån på lärarens kommunikation med eleverna. Det här betyder att de viktigaste ramfaktorerna inom PUMP-projektet blev uppgifterna i läromedlet, elevernas förkunskaper och lärarens matematikdidaktiska kompetens.

Inom projektet gjordes två typer av analyser. För det första analyserades lärarnas förmåga att individualisera undervisningen, dvs. att välja lämpliga uppgifter och ge relevanta förklaringar i relation till elevernas förkunskaper. Detta relaterades till såväl kursplanens mål som till eleverna resultat på en efterdiagnos. För det andra kartlades hur mycket hjälp varje elev fick av läraren under ett antal lektioner i följd. Bland resultaten kan nämnas att man med den här tekniken kunde beskriva den så kallade lotsningen, som innebär att läraren för en dialog framåt genom att ställa ledande frågor till eleven.

En viktig rapport från projektet handlar om elevernas arbetsmiljö. Här analyserar Kilborn (1977) olika elevers roll och deltagande i undervisningen. Han kan därvid konstatera att många av eleverna hade otillräckliga förkunskaper, fick för svåra uppgifter i relation till förkunskaperna och att de inte fick adekvat hjälp av läraren. Ett annat intressant resultat är att bråkiga pojkar fick oproportionerligt mycket hjälp på de tysta flickornas bekostnad.

Ett av målen med PUMP-projektet var att analysera språket i klassrummet. Ett annat mål var att beskriva lärarens arbetsmiljö, alltså att se undervisningen ur lärarens perspektiv. Projektet avslutade emellertid innan dessa två mål förverkligats.

När det gäller mitt eget arbete så har jag kunnat använda en hel del av de metoder som utvecklades inom PUMP-projektet. Eftersom mitt intresse främst är inriktat mot lärarens roll i lärandeprocessen så har jag emellertid ägnat större uppmärksamhet åt kvaliteter i lärarnas kommunikation med eleverna och åt hur läraren agerar i relation till undervisningens övriga ramar.

4.1.3 Ett nytt ramfaktorteoretiskt perspektiv

Under 1980-talet och början av 1990-talet verkade ramfaktorteorin vara bortglömd. Något av en renässans för det ramfaktorteoretiska perspektivet kom emellertid för ett par år sedan, då teorin uppmärksammades i Pedagogisk forskning (Nr 1, 1999): *På återbesök i ramfaktorteorin*. I en av artiklarna *Ramfaktorteori och praktiskt förnuft* (Lindblad, Linde och

Naeslund, 1999) skriver författarna att det har gått ett antal år sedan ramfaktorteorin formulerades och att skolan idag präglas av helt andra ekonomiska, politiska och sociala villkor. Man skulle av det skälet kunna tro att ramfaktorteorin nu är passé. I själva verket har författarna en helt annan uppfattning.

> Enligt vår uppfattning är denna utveckling inget argument för att ramfaktorteorin skulle sakna aktualitet. (s. 94)

De förordar i artikeln en variant av ramfaktorteorin där aktörerna, alltså lärare och elever, ägnas större uppmärksamhet och där aktörernas praktiska förnuft också uppmärksammas.

> Vårt bidrag ska ses som ett försök att problematisera det förhållandet att skolan är en styrd och reglerad institution som vilar på såväl ramar och regler som på aktörer. Vår utgångspunkt för detta är att relationen mellan ramfaktorer och aktörernas praktiska förnuft är viktig för att vidarebefordra pedagogik som samhällsvetenskap. (s. 95)

De hänvisar också till Arno Bellacks (1978) föreläsning när han promoverades till hedersdoktor i Uppsala. Han menade att "… poängen var att förstå innebörden i det som skedde i undervisningen i ljuset av lärares perspektiv och strategier". (Lindblad m.fl. 1999, s. 95)

Lindblad m.fl. hänvisar vidare till von Wrights (1983) handlingsteori där denne behandlar aktörernas praktiska förnuft i sitt historiska och sociala sammanhang.

> Med förnuft menas då att läraren gör rimliga bedömningar av uppdraget som läraren [har] relativt kursens omfattning och tillgång till tid med mera. Den inre logiken i handlandet svarar då mot de begränsningar och möjligheter som den yttre logiken ger upphov till eller konstituerar genom de val läraren gör. (Lindblad m.fl., 1999, s. 97)

Enligt Linde (1993), en av författarna till den ovan nämnda artikeln, kan man urskilja tre beslutsområden när det gäller stoffurval.

> … *formuleringsfältet,* där staten, delstaten, kommunen liksom styrelsen för en skola har makt och myndighet att föreskriva ett visst innehåll kopplat till exempelvis timplaner och utvärderingssystem. *Transformationsfältet* är det beslutsområde där läroplanen tolkas och där tillägg, fråndrag eller ointresse för föreskriften modifierar den formulerade läroplanen och ett detaljerat stoffurval planeras. *Genomförandefältet* består i den faktiska klassrumsdiskursen såsom den förverkligas enligt (eller i strid mot) vad som planerats. (s. 103)

I artikelns avslutning skriver Lindblad m.fl. (1999) att

> Den ramfaktorteoretiska ansatsen har lärt oss betydelsen av kontext i pedagogiska sammanhang. (s. 105)

Sammanfattningsvis kan jag konstatera att författarna betraktar ramfaktorteorin i ljuset av lärarens handlingar och förnuft. Aktörerna, och speciellt då läraren, har således tilldelas en betydligt viktigare roll än tidigare.

> I korthet innebär detta perspektiv att man försöker förklara handlingar genom att undersöka grunden, skälet eller motivet för handlingen, dvs. intentioner, avsikter och kunskapsmässiga inställningar problematiseras liksom de yttre gränserna för vad som är möjligt att göra. (s. 94)

Detta överensstämmer väl med mina intentioner. Läraren arbetar inte i ett vakuum. Tvärtom är lärarens handlingar styrda av en rad faktorer, så kallade ramar och vad som är rationella handlingar eller ej måste tolkas utgående från dessa ramar.

Ännu närmare min forskning kommer Lindblad och Sahlström (1999) i en annan artikel i Pedagogisk forskning.

> Man kan förstå ramfaktorteorin som en teori som enbart handlar om hur vissa yttre faktorer påverkar undervisningsprocessen och därmed sammanhängande resultat. … Emellertid bör en teori om undervisningens villkor, genomförande och resultat även kunna omfatta andra aktörer, begränsningar och resultat än dem som formulerats ovan. Som vi ser det är det fruktbart att förstå undervisning som en lokalt och socialt konstruerad verksamhet, vars konstruktion äger rum relativt vissa ramar, eller ”as a process occurring within limits” för att citera Lundgren (1972 s. 12). Dessa ramar är dock inte nödvändigtvis fastlagda av utbildningspolitiska aktörer eller i form av läroplansbeslut. Begränsningar eller möjligheter för undervisningsprocessen kan uppstå på en mängd olika sätt, genom beslut på olika nivåer inom skolväsendet, genom konstitueringen av bland annat regler och normer av olika art. (s. 75)

Medan Lundgren (1972) i sin forskning i första hand var intresserad av makromodeller väljer alltså Lindblad och Sahlström att ”… fokusera mikromodeller för att fånga de ramar som gäller för interaktion i klassrummet” (s. 76). Man preciserar detta på följande sätt:

> För det första; om rambegreppet kan ses som determinant inrymmande olika begränsningar och möjligheter bör vi också kunna se ett visst mått av flexibilitet.
>
> För det andra; undervisningen kan ses som en socialt konstruerad process som bygger på aktörernas förhandlingar och konstruktioner av verksamheten ifråga.
>
> … Ur denna synvinkel kan det vara en poäng att göra en analytisk distinktion mellan yttre ramar i enlighet med den klassiska ramfaktorteorin, och inre ramar, vilka är en konsekvens av aktörernas gemensamma konstruktioner. (s. 76)

Det finns således ramar av olika slag och dessa ramar blir ur min synvinkel fasta eller rörliga beroende på i vilket tidsperspektiv man ser dem. Vissa ramar kan inte påverkas av läraren, möjligen negligeras, andra ramar kan över tid förändras av lärare eller lärarlag. Samtidigt finns det ramar som är så rörliga att läraren kan förändra dem inför varje lektion. Detta är ett synsätt som ger en helt annan flexibilitet än att som Lundgren bara beakta fasta ramar.

Lindblad och Sahlström tar även upp en annan väsentlig skillnad mellan Lundgrens forskning och deras. De lektioner Lundgren, och även Kilborn (1979a), studerade var så kallade helklasslektioner, där läraren inledde lektionen med en genomgång varefter alla elever färdighetstränade på den typ av uppgifter som just varit föremål för genomgången. Dagens lektioner är ofta av en annan typ, nämligen så kallat bänkarbete där eleverna arbetar med helt olika uppgifter, ofta parvis eller i grupp, styrda av ett undervisningsmaterial. Vid sådant bänkarbete kan man, enligt Lindblad och Sahlström, betrakta eleverna som ramar för varandra. Detta är således en viktig faktor att ta hänsyn till vid gruppering av eleverna. Vid bänkarbete gäller vidare:

> Läraren har ingen teknisk möjlighet att på samma sätt som i en helklassundervisningssituation kontrollera elevernas deltagande ”on-line”. Kontrollen görs istället post-facto, dels genom att läraren går runt och kontrollerar hur det går, dels genom olika kontrollsystem som bland annat inlämning av arbetsböcker och prov, vilket öppnar större möjligheter för elever att göra olika saker. (s. 82)

En intressant fråga blir i det här fallet hur denna kunskapskontroll går till och hur effektiv den är. Emanuelsson (2001) menar till exempel att den kunskapskontroll som sker i skolan oftast ger små möjligheter att bedöma elevernas kunnande. Man kan också undra hur en sådan brist på kunskapskontroll påverkar inlärningen, till exempel när en elev måste vänta en lång stund, kanske till den nästföljande lektionen, för att få hjälp med ett problem eller bli medveten om en felinlärning. Samtidigt måste man vara medveten om att läraren har mycket begränsad tid på sig, i medeltal ett par minuter per lektion, för att reda ut elevers individuella problem. Lindblad och Sahlström (1999) menar också att:

> Det sätt på vilket läroböcker, arbetsboksanvisningar och lärares instruktioner förefaller rama in smågruppsarbetet - snarare än elevers strävan att upptäcka kunskap - gör att det som ser ut som en försvagad inramning snarare rör sig om en förändrad inramning. (s. 88)

Detta är betydelsefullt. Det är inte val av material, metod eller arbetsform i sig som är avgörande för undervisningens kvalitet. Om de är lämpligt valda eller ej kan endast avgöras i relation till de elever som undervisas och undervisningens innehåll.

Ett exempel på en modernare användning av ramfaktorteorin beskrivs av Sahlström (2001). Han skriver i en artikel om

> … den sociala konstruktionens begränsningar och förutsättningar för att skapa jämlikhet i klassrummet. Denna jämlikhetsskapande uppgift har varit en av de

> mest centrala uppgifterna för svenska utbildningsväsendet. Klassrummet, framför allt grundskolans klassrum, skall enligt läroplanerna ge alla elever lika förutsättningar för framgång. Läroplanerna är till och med mer radikala än så: skolan skall ge dem som har svårigheter av olika slag ett större stöd än andra.(s. 91)

Jag delar i stort Sahlströms syn på skolan och på vikten av att skapa jämlikhet i utbildningen. Skillnaderna i våra ansatser består i att vi betraktar klassrumsprocessen ur olika perspektiv. Sahlström studerar klassrumsprocessen från en sociologisk synvinkel och hans arbete påminner närmast om den forskning som tidigare bedrevs i Lund av Callewaert och Nilsson (1980). Sahlström vill förstå lärandet och identitetsutvecklingen i klassrummet utgående från de samtalsprocesser som skapar och konstituerar lärandet. Att nå jämlikhet blir för honom en sociokulturell fråga. Min strävan är att utjämna sociala ojämlikheter vad gäller matematikkunskaper och matematikinlärning. En viktig fråga blir därför om läraren har så goda matematikdidaktiska kunskaper och ett så väl utvecklat språk att hon med sina förklaringar kan nå elever med olika bakgrund och olika förutsättningar för inlärning?

Den metod Sahlström använder är processanalyser av undervisningen. Hans metod består i att, ungefär som Lundgren och Kilborn gjorde, samla in data med hjälp av observatör, videokamera och mikrofon på elevernas bänkar. Dessa data analyseras därefter med hjälp av ett analysinstrument. När det gäller denna forskningstradition konstaterar Sahlström att det inom svensk forskning inte hänt särskilt mycket inom detta fält mellan slutet av 70-talet och slutet av 90-talet (se även Broady & Lindblad, 1999).

4.2 Ett matematikdidaktiskt perspektiv

En viktig del av mitt forskningsintresse är att studera innehållet i lärares kommunikation med eleverna under en matematiklektion. För detta saknas en färdig teori. I det här avsnittet redovisas min syn på en sådan teori och delar av den preliminära teori jag använder (se även Löwing, 2002). Jag börjar med att ge en bakgrund.

I mitten av 1980-talet fördes en ingående diskussion om skolämnesteori. Delar av denna diskussion sammanfattades i en bokserie om *Fackdidaktik*, i tre delar (Marton, 1986). I boken *Fackdidaktik volym III* skriver Thompson (1986) om matematisk teoribildning.

> För det första måste då konstateras att matematisk sanning består i en motsägelsefrihet och fullständighet, att kriteriet med andra ord är ett inre kriterium. En matematisk teori kan med avseende på sin sanning inte avgöras mot något givet yttre kriterium. (s. 16)

Detta rimmar inte särskilt väl med kraven i grundskolans kursplan vad gäller konkretisering och vardagsförankring. Ur en sådan teori kan man knappast renodla varken didaktikens vad- eller hur-frågor. Men Thompson (1986) skriver också följande:

> En mer renodlat evolutionär syn framställs av Toulmin (1972). Han betonar kontinuiteten i den vetenskapliga kunskapens utveckling och menar att alla förändringar är gradvisa. På samma sätt som arter utvecklas ur tidigare arter genom kontinuerliga förändringar, är vetenskapens utveckling en fråga om *begreppsliga omvärderingar …* och omtolkningar av fenomenen. (s. 13)
>
> Men den toulminska uppfattningen om rationalitet i den vetenskapliga processen motsvarar på inlärningsnivå det kategoriska kravet att *eleven måste övertygas om det rationella i att överge eller modifiera en uppfattning till förmån för en annan.* (s. 14,f)

Vad Toulmin menar är att matematiken inte är från början given. Den utvecklas ständigt. Detsamma gäller för den lärandes kunnande. Barn utvecklar på ett tidigt stadium, långt innan de nåtts av matematikundervisning, en första uppfattning om matematiken och dess struktur (Gelman & Galistel, 1983; Carpenter m.fl., 1984). Denna uppfattning är ur barnets synvinkel preliminär. Efter hand som barnet tillägnar sig fler matematiska begrepp sker omvärderingar av och förändringar i kunnandet. Detta är samma syn på kunskap som tas upp i boken *Om lärande* (Marton & Booth, 2000).

Som en konsekvens av en sådan kunskapssyn blir det intressant att klarlägga hur det går till när elever ”förvärvar en del grundläggande fakta” och hur man hjälper dem att få ”den lärandes ursprungliga idéer” till ”helheter”. För att nå det målet krävs en teori som dels ger struktur åt detta lärande, dels beskriver hur barnets matematiska tänkande kan gå från helhet till helhet. Detta är en del av det jag kallar en matematikdidaktisk teori, alltså en teori som beskriver hur barn på olika sätt kan lära sig matematik och hur motsvarande undervisning kan planeras och genomföras (Löwing, 2002).

I *Fackdidaktik volym III* beskriver Johansson och Kilborn (1986) hur en sådan teori skulle kunna se ut.

> Det är vår uppfattning att den grundläggande orsaken till dessa skillnader i val av innehåll ligger i det faktum att vi saknar en *didaktisk ämnesteori*, en ämnesteori för *skolämnet* matematik. Denna teori går inte att härleda ur den akademiska disciplinen matematik.. … (s. 92)
>
> De instrument man på den nivån har utvecklat är mycket trubbiga och okänsliga hjälpmedel för vardagsmänniskan när hon skall försöka greppa sin omvärld. En didaktisk ämnesteori för skolämnet matematik går heller inte att härleda från erfarenheter av några begränsade fenomen, som man ofta arbetar med inom den pedagogiska och inlärningspsykologiska forskningen…. Istället behöver vi en

> teori som innehåller *omvärldsrelaterade* kunskapsstrukturer och som samtidigt är väl anpassad till kunskaper om hur lärare och elever uppfattar detta innehåll. (s. 93)

Johansson och Kilborn ger därefter exempel på konflikter mellan skolans matematik och matematik som akademiskt ämne. En sådan konflikt gäller hur man i skolan definierar begreppet multiplikation.

> Både multiplikation som upprepad addition och som ett rutnät har stora fördelar inom olika delar av matematikämnet. Men de har samtidigt stora begränsningar när vi till exempel kommer till multiplikation av tal i bråkform eller decimalform. Det blir också stora problem när man skall förklara att produkten av två storheter kan ge en helt ny storhet. Detta inträffar t ex när man genom multiplikation av en hastighet och en tid får en sträcka. Samma sak gäller för divisionsbegreppet. … (s. 93)

Beskrivningen av en didaktisk ämnesteori avslutas med orden.

> Vi måste skapa forsknings- och analysmetoder som hjälper oss att bygga upp helhetsstrukturer för skolmatematikens innehåll, giltiga inte bara inom lokala fält eller för enskilda kurser eller stadier. Vi måste utveckla beskrivningskategorier som ger oss kontroll över kvalitativa skillnader mellan olika typer av innehåll. I dagsläget finns enbart fragment av en sådan kunskapsbildning. (s. 93)

De diskussioner som under 1980-talet fördes om grunderna till och förutsättningarna för matematikämnets didaktik avstannade snart och ersattes av mer pragmatiska diskussioner kring elevtänkande, problemlösning och tekniska hjälpmedel. Nu drygt 15 år senare, uttrycks från olika håll, såväl nationellt som internationellt, ett behov av en didaktisk ämnesteori. I Sverige är det i första hand inom NO-sektorn man engagerar sig i frågan. I introduktionen till boken *Kommunicera naturvetenskap i skolan* skriver exempelvis Strömdahl (2002):

> Ett hinder för att teknisk/naturvetenskaplig kunskap skall ses som en kulturyttring utöver en elementär populärvetenskaplig nivå är att den anses vara svår att kommunicera, kall och rationell. Kommunikationsproblemet hänger bl.a. samman med att naturvetenskapens språk och karaktär är av ett slag som ofta inte sammanfaller med det vardagliga sättet att tänka och resonera. Problemet kommer särskilt tydligt till uttryck i skolans undervisning och lärande i NO-ämnena.
>
> …
>
> Sambandet mellan den vardagligt upplevda världen och den naturvetenskapliga modellen av denna värld är nämligen inte så enkel som ofta framhålls i ivern att rättfärdiga att de naturvetenskapliga ämnena med lätthet kan knytas till de studerandes vardagsverklighet. Tvärtom pekar Wolpert (1993) på naturvetenskapens onaturliga karaktär genom att den går utanför vardagsverkligheten och sunt förnuft, bygger på idealiseringar (Nersessian, 1992) är abstrakt och matematisk. (s. 8f)

Vad Strömdahl skriver om teknik/naturvetenskap gäller, enligt min uppfattning, i lika hög grad för ämnet matematik, vilket också bekräftas i rapporten *Lusten att lära* (Skolverket, 2003b).

Inom ett område där terminologin ännu inte är etablerad uppstår det av naturliga skäl tolkningsproblem. Vid diskussioner med kolleger från olika enheter och institutioner har det visat sig att en del av de termer och begrepp som används i Löwing (2002) kan missuppfattas. Avsikten med följande avsnitt är att reda ut och klarlägga innebörden i några sådana termer och begrepp.

4.2.1 Olika typer av ämnesteori

En viktig fråga gäller vad som menas med en ämnesteori i matematik. Om man utgår från den typ av ämnesteori som behövs för att beskriva och förklara vad som händer vid undervisning i matematik så finns det två slag av ämnesteorier. Båda dessa teorier används parallellt vid utbildning av lärare. Den ena av teorierna har till syfte att ge de studerande kunskaper om och en inblick i matematiken som vetenskap och bygger på deduktiv teori. Den andra teorin är en ämnesteori med didaktisk inriktning som avser att ge de studerande ett lärarperspektiv på ämnet matematik. Denna bygger på en empiriskt grundad teori och tar bland annat sin utgångspunkt i forskning om barns och ungdomars inlärning och deras förmåga att tillgodogöra sig olika typer av ämnesinnehåll.

Av dessa två teorier är den förstnämnda etablerad sedan hundratals år tillbaka och tillhör en matematisk/naturvetenskaplig fakultet. Den är utvecklad av och för akademiker som ”… en abstrakt generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling...”, *Nationalencyklopedin* (1989-1996). Som sådan har den rönt stor framgång, inte minst genom att ge modeller till en rad andra vetenskaper. Denna matematiska teori bygger emellertid på en helt annan ontologi och epistemologi än den matematikdidaktiska teorin. Inom den ”abstrakta” matematiken ryms till exempel inte modeller för hur kunskapen är relaterad till individ och situation, till exempel till hur barn och ungdomar utgående från olika förutsättningar kan bygga upp ett matematiskt vetande som är användbart i vardagslivet och för att studera andra skolämnen. För detta behövs en helt annan teori, den som i Löwing (2002) kallas för ”ämnesdidaktisk teori”. Denna senare teori tillhör undervisningsvetenskaperna och har som syfte att förklara och systematisera vår kunskap om barnets, ungdomens och vardagsmänniskans möjligheter och förmåga att tillgodogöra sig matematiska kunskaper och att bygga upp för dem förståeliga matematiska modeller.

Avsikten med den ämnesdidaktiska teorin är i första hand att ge lärare i ungdomsskolan en teori utgående från vilken de kan analysera, planera och utvärdera innehållet i skolans matematikundervisning. Ett dilemma är att olika elever tänker och lär på olika sätt utgående från individuella erfarenheter, intressen och förkunskaper. En förklaring som fungerar för en viss individ och i en viss ålder fungerar inte alltid för andra elever i andra åldrar. En förklaring som av en människa kan uppfattas som korrekt och stringent kan för andra människor vara obegriplig och till och med förvirrande. Syftet med den ämnesdidaktiska teorin är därför att beskriva, systematisera och i möjligaste mån förutsäga vad som kan uppfattas av olika elever i olika åldrar och hur den kunskap som behandlas på det sättet, successivt kan transponeras och efter individuella behov göras allt mer stringent och slutgiltig.

För att komma vidare är det enligt min uppfattning viktigt att skilja mellan en matematikdidaktisk teori och ämnesdidaktik. Ämnesdidaktiken utgår från generella teorier om hur lärare, utgående från givna förutsättningar såsom mål och resurser, kan designa och utvärdera undervisningen samt välja arbetsform och arbetssätt. Om detta är anpassat till undervisning i matematik kan det benämnas matematikdidaktik. Observera emellertid att didaktikens vad-fråga, alltså hur man väljer stoff, planerar och utvärderar undervisningens innehåll, kräver en teori för vad som är möjligt att undervisa om för olika individer i olika åldrar. Inte heller hur-frågan kan besvaras utan en ämnesdidaktisk teori. Det är inte meningsfullt att konkretisera något som saknar innehåll eller relevans och det är inte heller rimligt att välja en form för kommunikation innan man tagit ställning till vad som skall kommuniceras. Det är snarare så att valet av förklarings- och konkretiseringsnivå bör samordnas med målet och syftet för det som skall undervisas och att arbetsform och arbetssätt väljs på ett sådant sätt att möjligheterna till kommunikation och inlärning optimeras. Den matematikdidaktiska teorin utgör således den karta som beskriver vilka innehållsmässiga vägval som är möjliga att göra för olika individer.

Det som hittills beskrivits brukar leda till tre följdfrågor. Den första frågan gäller om det kan finnas flera olika teorier för matematik. All matematik måste väl bygga på samma räknelagar och räkneregler? En matematisk frågeställning kan väl inte ge olika svar? Jag menar att det här inte handlar om *resultatet* utan om *processen*, alltså om hur man utgående från olika förutsättningar kan komma fram till ett resultat. Den andra frågan gäller stringens. Skall man tillåta ett troliggörande av en matematisk modell eller skall man kräva ett stringent bevis? Svaret är givetvis att den som förmår uppfatta ett stringent bevis inte skall hindras från att göra det. Samtidigt anser jag det vara viktigt att alla de som inte förstår ett bevis, eller en formaliserad framställning, erbjuds någon annan form av förståelse till exempel med hjälp av en god metafor. En sådan förklaring är definitivt inte felaktig - den bör snarare betraktas som preliminär. Den tredje frågan gäller om en ämnesdidaktisk teori bara kan finnas för undervisning i ungdomsskolan. På det är svaret att vi hittills bara arbetat med denna typ av teori på grundskole- och gymnasienivå. Samtidigt ser jag det som en självklarhet att man kan utvidga teorin till att gälla även den mer deduktivt inriktade matematikundervisning som inom universitet och högskolor förekommer vid utbildning av till exempel ekonomer, samhällsvetare och ingenjörer. Även inom dessa utbildningar finns det studerande med olika förkunskaper, intressen och mål. Ingen av dessa grupper har som sitt primära mål att forska i matematik utan deras fokus är inriktat mot helt andra yrken och vetenskaper. Vi finner det rimligt att dessa studerande, när de studerar matematik, skall undervisas på ett sätt som anpassats till just deras förkunskaper, förmåga och mål för studierna. För att en sådan undervisning skall fungera väl och för att man skall kunna nå optimala resultat utgående från de studerandes förkunskaper torde det krävas någon form av matematikdidaktisk teori för att även högskolans lärare skall kunna möta olika studerandegruppers behov.

4.2.2 Är detta en teori?

En viktig fråga är om en matematikdidaktisk teori av det slag jag beskrivit verkligen är en teori? Det är i så fall både rimligt och önskvärt att utveckla denna teori. Vänder man sig till *Nationalencyklopedin* (1989-1996) så framgår det att en teori består av

> … en grupp antaganden eller påståenden som förklarar företeelser av något slag och systematiserar vår kunskap om dem. En verksamhet sägs vara *teoretisk* i motsats till *empirisk* om den bygger på teori och därför inte enbart konstaterar fakta utan även förklarar givna fakta och ev. förutsäger nya.

För att visa att den matematikdidaktiska teori som beskrivs i Löwing (2002) verkligen är en teori krävs det konkreta exempel som testas gentemot den ovan givna definitionen. Löwing och Kilborn (2002 kapitel 9) ger fyra exempel som beskriver hur man kan systematisera och konkretisera didaktiska ämneskunskaper: Mätning av area och volym, Procent, Tabeller och diagram samt Bråk och decimaltal. (Fler exempel ges i kapitel 5 i Löwing, 2002). Här följer ett exempel från arbetet med division av tal i bråkform.

En undersökning som presenteras i Löwing och Kilborn (2002) visar att endast 10% av eleverna i skolår 7 och 42% av eleverna i skolår 9 kunde ge ett korrekt svar på uppgiften $\frac{6}{5}/3$ och att endast 12% av eleverna i skolår 7 och 34% av eleverna i skolår 9 kunde ge ett korrekt svar på uppgiften $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$.

Syftet med en undersökning av det här slaget är att kartlägga i vilken utsträckning elever i olika åldrar behärskar ämnesinnehåll av olika slag. Detta kan utföras i två steg. I steg 1 använder man ett test med vars hjälp man kan inhämta kvantitativ information. Ett sådant test måste givetvis bygga på en teori (till en början en preliminär teori) om hur elever kan och brukar uppfatta division av bråk. Genom att analysera testresultaten kan man bilda sig en första uppfattning om tillståndet inom det fält man avser att analysera, till exempel hur vanligt ett visst fel är. För att tränga djupare in i problematiken kan man följa upp testet med så kallade kliniska intervjuer, varvid man kartlägger de kvalitativa orsakerna till problemen. I det aktuella fallet finner man då att de elever som löser uppgifterna korrekt i allmänhet använder sig av en formel med följande innebörd: Om man skall utföra divisionen $\frac{6}{5}/3$ så skall man skriva om nämnaren som $\frac{3}{1}$, invertera detta till $\frac{1}{3}$ och därefter byta ut divisionstecknet mot ett multiplikationstecken. Detta ger $\frac{6}{5}/3 = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3}$, vilket är en av flera möjliga tekniker att lösa uppgiften.

Det visar sig att ytterst få elever har en uppfattning om varför denna formel fungerar. Att de kan lösa uppgiften handlar alltså inte om en matematisk insikt utan om en ren manipulation av siffror. För dem som inte kan lösa uppgiften är orsaken oftast den att de har glömt formeln. Eftersom de flesta av dem inte heller har någon konkret uppfattning om operationens innebörd, eller någon metafor att falla tillbaka på, så kan de inte heller rekonstruera formeln eller finna andra lösningsalternativ. Det här är ett exempel på hur man inom en matematikdidaktisk teori kan samla in och systematisera kunskap i avsikt att kunna förklara orsakerna till ett aktuell fenomen.

Nästa steg i en teoriuppbyggnad kan bestå i att man söker och analyserar olika förklaringsalternativ. En viktig källa för detta är matematikens historia, där man ofta kan finna enkla lösningar som inte har tagit omvägen över algebran. Mot denna bakgrund kan man uppfatta bråket $\frac{6}{5}$ som att det består av 6 stycken av enheten $\frac{1}{5}$. Ur det perspektivet kan den nyss beskrivna uppgiften tolkas som en uppdelning av 6 enheter i 3 delar (på samma sätt som man fördelar 6 plommon på 3 personer). Svaret blir då 2 enheter (vardera) av storleken $\frac{1}{5}$ alltså $2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. Vi har därmed fått en alternativ typ av förklaring. Denna förklaring kan nu användas som en länk i en kedja av erfarenheter som tillsammans bidrar till att systematisera och förutsäga fler fenomen inom matematikundervisningen, till exempel vad som blir följden av olika sätt att presentera ett visst ämnesinnehåll. En annan fördel med denna förklaringsmodell är att den lätt kan konkretiseras, vilket kan bidra till en djupare förståelse av divisionen - även för dem som senare föredrar att använda formeln.

Ett något annorlunda exempel är $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$ där man har ett bråk även i nämnaren. Här visar det sig att de flesta elever försökte fördela $\frac{3}{4}$ på $\frac{1}{4}$ personer (dela $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$ högar). Anledningen till att de försöker använda en sådan strategi är att de under tidigare skolår bara lärt sig division som (för)delning. En lämpligare strategi kan vara att fråga sig hur många ”kvartar” som ryms (innehålls) i 3 kvartar. Om man ställde frågan så, visade det sig att de flesta elever direkt kunde ge svaret 3. Kunskap om den här operationen som kallas innehållsdivision får man genom att studera svensk skolhistoria. Metoden är till exempel beskriven i Nilsson och Wigforss (1951). Det här är ett nytt exempel på hur man kan söka och systematisera kunskap i avsikt att förklara vissa fenomen och förutsäga andra. Man kan därmed genom en systematisk planering förebygga problem som annars skulle ha uppstått senare.

Det som just beskrivits är bara en sida av den matematikdidaktiska teorin. Detta vetande måste därför kompletteras med kunskaper om vilka förkunskaper som krävs för att kunna uppfatta de beskrivna strategierna. Till detta kommer att kunskapen måste kunna kommuniceras till olika individer, vilket i sin tur betyder att man måste analysera såväl det språk som kan eller bör användas som de konkretiseringsmodeller och metaforer som leder till förståelse av den aktuella kunskapen.

För de lärare som saknar teoretiska kunskaper av det här slaget blir problemen i undervisningen ofta så stora att de försöker undvika att behandla kunskapen ifråga. Detta är vad som ofta händer i grundskolans matematikundervisning. En sådan lösning består i att lärare låter sina elever översätta alla tal i bråkform till decimalform varefter de med miniräknarens hjälp kan ge ett approximativt svar. Enligt den matematikdidaktiska teorin begår man därvid två misstag. För det första är bråkräkning en nödvändig förkunskap till algebran. Undviker lärare att behandla bråkräkning på grundskolan får deras elever därför problem med att utföra algebraiska förenklingar när de kommer till gymnasieskolan. För det andra är det viktigt att inse att decimaltalen enbart är ett annorlunda skrivsätt för en speciell typ av bråk. Enligt en äldre tradition (se till exempel Nilsson & Wigforss, 1951) behandlades i själva verket de allmänna bråken före decimaltalen vilket innebar att när man kom till decimaltalen var räkneoperationerna redan förklarade med hjälp av motsvarande operationer med allmänna bråk. När man på detta sätt hoppar över bråktalen och går direkt på decimaltalen missar man därför förklaringarna till hur man dividerar tal i decimalform. Samtidigt saknas det modeller anpassade till denna nya undervisningsstrategi.

Man kan sammanfatta det som hittills skrivits så här: Genom att utföra studier av det just beskrivna slaget och därvid analysera hur olika uppgifter är uppbyggda och vilka strategier elever använder för att lösa uppgifterna, kan man efter hand systematisera de vunna erfarenheterna. Denna kunskap kan därefter dels användas till att analysera hur olika problem uppstår, dels till att förutse problemen och därmed undvika att de uppstår. Detta är dessa kriterier som enligt NE är utmärkande för en teori.

4.2.3 Fler aspekter

Även om en matematikdidaktisk teori är något nytt, så är det inte är ett outforskat område. Genom det arbete som bland annat har utförs av Kilborn, först i svensk skola och därefter under de senaste tio åren i skolor i olika afrikanska länder, har vi en mängd kunskaper att bygga vidare på. De flesta av de exempel som beskrivs i Löwing (2002) är hämtade från Kilborns forskning. Även om Kilborn kom mycket långt på egen hand så är det mycket som återstår att göra för att få teorin mer generell och heltäckande.

En annan viktig aspekt är den ämnesdidaktiska teorins relation till utbildning och inlärning. Teorin är avsedd för lärare och avsikten är att lärare med dess hjälp skall kunna systematisera, förklara och förutsäga vad som händer inom undervisning och inlärning. Eftersom det territorium som beskrivs är skolans matematikundervisning så är det naturligt att relevanta exempel på teorins styrka och användbarhet kopplas till detta territorium. Det är ju eleverna och uppbyggnaden av deras kunskaper som är objektet för teorin.

En tredje aspekt gäller den matematikdidaktiska teorins relation till ämnesdidaktiken i sin helhet. Eftersom didaktikens vad- och hur-frågor tar sin utgångspunkt i det som skall läras, så kommer matematikdidaktisk teori och ämnesdidaktik att vara ömsesidigt beroende av varandra. Det kunskapsstoff som skall kommuniceras har inget värde i sig utan får sitt värde i relation till den individ som skall tillägna sig stoffet. Kommunikationen och formen för denna kommunikation blir därför avgörande för elevernas möjligheter att tillägna sig avsedd kunskap. Den matematikdidaktiska teorin måste omfatta inte bara en systematisering av stoffet i sig utan även vilka val av metaforer eller konkretiseringsalternativ som i olika situationer är rimliga och kan leda till de avsedda målen. Det går därför inte att beskriva en matematikdidaktisk teori utan att relatera den till såväl ämnet matematik som till ämnets didaktik.

4.3 Sammanfattning

Som tidigare nämnts finns det inte någon färdig teori för min forskningsinriktning. För att studera hur lärare kommunicerar ett matematikinnehåll använder jag därför två komplementära teorier. För att studera kommunikationen på en makronivå, alltså i första hand hur lärarna hanterar undervisningens ramar, använder jag en vidareutvecklad variant av ramfaktorteorin. För att studera kommunikationens innehåll utgår jag från en preliminär matematikdidaktisk teori som redovisats i 4.2.2.

5 Undervisningens villkor

Detta kapitel handlar om undervisningens villkor, det vill säga sådana faktorer som påverkar lärarens möjligheter att organisera en god undervisning. Jag kallar detta för undervisningens ramar. Dessa ramar kan delas upp i två grupper, fasta ramar och rörliga ramar. De fasta ramarna består av faktorer som inte låter sig påverkas av läraren själv såsom skolans styrdokument och den rådande kunskapssynen. De rörliga ramarna omfattar faktorer som läraren kan påverka på kortare sikt såsom val av läromedel, elevgruppering, arbetsform och arbetssätt. Lärarens möjligheter att bedriva en god undervisning beror i hög grad av hur dessa ramar möjliggör eller förhindrar undervisningen.

5.1 Ramarna och undervisningens innehåll

Vid den kommunikation som förekommer i klassrummet finns det två typer av aktörer, lärare och elever. Av dem spelar lärarna en central roll eftersom de planerar, leder och utvärderar verksamheten i klassrummet. Som redan beskrivits i kapitel 2, har lärarrollen under senare år genomgått en stor förändring. Anward (2003) menar emellertid att ”Det klassiska mönstret, som låter läraren styra ordet och relevansen hos det som sägs, är ett ganska optimalt sätt att bedriva en sådan verksamhet på” (s. 8).

Under en matematiklektion handlar kommunikationen mellan lärare och elever i första hand om att ett matematikinnehåll skall presenteras för eller diskuteras med eleverna. Presentationen av innehållet sker på i huvudsak två sätt, via läraren eller via ett undervisningsmaterial. Diskussionen sker mellan läraren och en eller flera elever eller mellan elever. Ibland sker diskussionen indirekt, till exempel genom att eleverna skriver ned svaren på sina lösningar i ett räknehäfte. Läraren kan därmed i efterhand följa resultatet av en tyst dialog mellan elever och undervisningsmaterial. Detta möjliggör i sin tur en uppföljande diskussion om innehållet mellan lärare och elever.

Som framgår av till exempel Säljö (2000) så räcker inte den muntliga och skriftliga kommunikationen till för att förklara en inlärning. Man måste även ta hänsyn till kontext, till elevernas förförståelse, till användning av olika artefakter såsom laborativa material och miniräknare m.m.

Undervisningen handlar alltså om att någon vill presentera eller diskutera ett innehåll (budskap) med en eller flera personer. Även om de fysiska betingelserna, alltså undervisningens ramar, fungerar väl så är det ändå inte givet att dess innehåll kan uppfattas på avsett sätt. För att använda en vanlig metafor förutsätter detta att sändare och mottagare är inställda på samma våglängd. Adler (1999) menar att det krävs en ”transparancy” i det språk som används i klassrummet när man förmedlar/förhandlar ett innehåll för att synliggöra matematiken.

I skolans undervisning är det läraren som svarar för att undervisningens innehåll och syfte når fram till eleverna och att det sker en inlärning. Det här kräver i sin tur ett professionellt kunnande från lärarens sida som även innefattar att läraren måste behärska det matematikinnehåll som undervisas. Med behärska menas då inte bara att läraren själv förstår ett innehåll och kan lösa uppgifter med anknytning till detta innehåll. Det räcker inte. Läraren måste behärska innehållet på ett sådant sätt att hon kan möta olika elevers behov av undervisning på just dessa individers villkor. Detta kompliceras av att olika elever har olika förkunskaper och är olika motiverade för att studera matematikinnehållet ifråga. De kan dessutom ha olika mål för sina studier beroende på studieinriktning. Förutom detta bör läraren behärska olika sätt att förklara på, samt vilka metaforer och modeller för konkretisering som är möjliga att välja i olika situationer. Detta är något helt annat och kräver betydligt mer omfattande kunskaper än de som behövs för att själv kunna uppfatta ett begrepp eller att lösa ett givet problem. (se till exempel Ball & Bass, 2000; Kilpatrick m.fl., 2001; Schulman, 1986, 1987.)

Undervisningens innehåll presenteras och diskuteras med hjälp av ett språk. Ett dilemma är att lärare och elever ofta har olika språklig kompetens. Ett annat dilemma är att man i skolans matematikundervisning ofta blandar vardagens språk med ett mycket speciellt fackspråk. Termerna i detta fackpåk har ofta en helt annan innebörd än motsvarande ord i vårt vardagsspråk och en precision som är betydligt högre än i vardagsspråket. Detta leder lätt till konflikter i undervisningssituationen när lärare och elever inte har samma språkliga referenser. ”Det dunkelt sagda är det dunkelt tänkta” skriver skalden Tegnér (1820), men i skolans matematikundervisning är det mer komplicerat än så. Lärarens språk, i kombination med språket i läromedlet, är mönsterbildande för elevernas språkbruk. Om läraren är slarvig med sitt språk, eller inte själv behärskar ett matematikdidaktiskt språk, kan det leda till att eleverna får problem med begreppsbildning och med att tänka och uttrycka sig inom detta språkområde. Detta kan i sin tur leda till oklarhet eller missförstånd i kommunikationen mellan lärare och elever. Språket blir inte ”transparent” och det är då svårt att avgöra vad som är dunkelt sagt eller dunkelt tänkt (se vidare kapitel 7).

5.2 Fasta ramar

Undervisningen är som redan nämnts beroende av olika typer av ramar. Den sker till exempel på fasta tider, i speciella lokaler, med speciella aktörer och i huvudsak med ett på förhand bestämt innehåll. Dessa regler är låsta redan när en lektion börjar och är därför svåra att påverka för läraren. Jag kallar dessa i fortsättningen för fasta ramar (Dahllöf, 1967; Lundgren, 1972). Till de fasta ramarna räknar jag även lärarens professionella kunnande och elevernas aktuella förkunskaper. Dessa ramar är visserligen möjliga att förändra efter hand och på längre sikt, men är givna inför varje enskild lektion. För de ramar som är låsta på längre sikt kommer jag senare att använda namnet konstanter och för de av läraren påverkbara ramarna, namnet parametrar. I detta avsnitt beskrivs dessa båda typer av ramar.

5.2.1 Matematikämnet i kursplanen och läroplanen

Skolans arbete regleras från statens sida av lagar, förordningar och föreskrifter samt anvisningar och allmänna råd. Lagar, förordningar och föreskrifter är tvingande, medan anvisningar och allmänna råd kan betraktas som rekommendationer. Högst dignitet har givetvis Skollagen (1985). I skollagen finns enbart övergripande mål för verksamheten och någon precisering ges inte på ämnesnivå. Av förordningarna styr skolformsförordningarna på en något mer detaljerad nivå, men inte heller här berörs undervisningen i enstaka ämnen i någon nämnvärd grad.

Inte heller i *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet* (SKOLFS 1994:1), som också är en förordning, berörs enstaka ämnen särskilt utförligt, men bland mål att uppnå i grundskolan finner man att ”Skolan ansvarar för att varje elev efter genomgången grundskola … behärskar grundläggande matematiskt tänkande och kan tillämpa det i vardagslivet.” (s. 5).

Den tydligaste styrningen med hjälp av mål och, i viss mån, innehåll finns i kursplanerna, (SKOLFS 1994:3) som också är en förordning och således tvingande, något som kanske inte alla lärare känner till. Målen anger vad som skall nås, men inte vilket innehåll som skall väljas eller hur undervisningen skall gå till.

Till tidigare läroplaner fanns allmänna råd och anvisningar i form av supplement eller kommentarmaterial för olika ämnen (Skolöverstyrelsen, 1969; Skolöverstyrelsen, 1982), vilka på en mer konkret nivå beskrev undervisningens innehåll. Till den nu gällande läroplanen finns inget liknande material utan staten överlämnar till den enskilda läraren att tolka och omsätta kursplanens innehåll i sin verksamhet.

I läroplanen och i kursplanen i matematik beskrivs, på olika nivåer, mål och syften för undervisningen i matematik. I flera fall är de föreskrifter som ges inte förhandlingsbara, vilket uttrycks i termer av ”Skolan skall” och ”Läraren skall”. En lärare som undervisar i matematik måste också vara medveten om att ämnet har en speciell karaktär och uppbyggnad. I kursplanen (Skolverket, 2000b) kan man således läsa: ”Matematik är en levande mänsklig konstruktion som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition.”:

> Matematikämnet utgår från begreppen tal och rum och studerar begrepp med väldefinierade egenskaper. All matematik innehåller någon form av abstraktion. Likheter mellan olika företeelser observeras och dessa beskrivs med matematiska objekt. Redan ett naturligt tal är en sådan abstraktion. (s. 27)

Det här betyder att det i skolans styrdokument har fastslagits vad matematik är och vad som är syftet och målen med matematikundervisningen. Även om matematiska begrepp kan formuleras, och matematiska problem kan lösas, på olika sätt, så kan man ändå avgöra vad som är matematiskt korrekt. När man tolkar undervisningsprocessen i matematik måste man därför vara medveten om att det finns normer för vad som är innehållsmässigt korrekt och acceptabelt.

Kursplanen i matematik (Skolverket, 2000b) inleds med rubriken: Ämnets syfte och roll i utbildningen.

> Grundskolan har till uppgift att hos eleven utveckla sådana kunskaper i matematik som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället. Utbildningen skall ge en god grund för studier av andra ämnen, fortsatt utbildning och ett livslångt lärande. (s. 26)

Inom ramen för detta syfte lyfter man också fram följande:

> Matematiken är en viktig del av vår kultur … att utbildningen syftar till att utveckla elevens intresse för matematik … att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer … att upptäcka estetiska värden … att uppleva den tillfredsställelse och glädje som ligger i att kunna förstå och lösa problem. (s. 26)

Utgående från dessa syften skall läraren arrangera inlärningssituationer på ett sådant sätt att alla elever når uppnåendemålen vid slutet av det nionde skolåret. Några sådana mål är:

> Eleven skall ha förvärvat sådana kunskaper i matematik som behövs för att kunna beskriva och hantera situationer samt lösa problem som vanligen förekommer i hem och samhälle och som behövs för fortsatt utbildning.
>
> Inom denna ram skall eleven
>
> - ha utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform,

> - ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel, … (s. 28f)

Till dessa mål kommer de så kallade strävansmålen. Uppnåendemålen och strävansmålen beskriver tillsammans lärarens ämnesuppdrag, alltså vilket matematikkunnande staten vill att olika elever med lärarens hjälp skall tillägna sig.

Beroende på hur undervisningen bedrivs, i kombination med elevernas motivation och förkunskaper, kan resultatet av undervisningen bli mycket olika för olika elever. Ett viktigt syfte med lärarutbildning och med matematikdidaktisk forskning är att optimera lärandet, med bland annat den avsikten att elevernas kunskaper och attityder till ämnet skall bli alltmer lika de mål och syften som beskrivs i läroplan och kursplan. Med detta menar jag inte att elevernas kunnande skall vara en exakt avbild av den förväntade kunskapen. Visserligen är stora delar av den matematiska kunskapen redan definierad och inte förhandlingsbar, men samtidigt kan den beskrivas och konkretiseras på olika sätt och leda till olika, individuellt anpassat, kunnande. Det jag kommer att analysera i den här avhandlingen är hur detta faktiskt går till under några helt vanliga lektioner.

Utgående från läroplanens och kursplanens syften och mål förväntas lärarna på skolan utarbeta en lokal arbetsplan. En avsikt med detta är att ett sådant arbete förväntas stimulera en mer aktiv och lokalt anpassad planering. Av de direktiv som gavs till Lärarutbildningskommittén i april 1997 (Dir. 1997:54) framgår det således

> … att lärarna förväntas själva utveckla nya sätt att organisera och leda arbetet i skolan. Hur eleverna skall nå målen är det lärarens uppgift att avgöra. (s. 1)

På den här nivån har läraren stora möjligheter att revidera sin planering fram till lektionens början. Därefter är lärarens planering för tillfället låst. Vissa variationer kan finnas i planeringen, men större revideringar innebär risker för att läraren tappar fokus och strukturen i sin undervisning.

Efter att ha beskrivit några viktiga styrdokument är det dags att närmare studera förutsättningarna för att leva upp till målen i dem. Jag har tidigare nämnt Dahllöfs fysiska och administrativa ramar som såväl kan stödja som begränsa möjligheterna att nå målen. I nästa avsnitt beskriver jag en typ av socialt betingade ramar nämligen sådana som styr lärares och lärarutbildares tolkning av styrdokument och förhållningssätt till skola och undervisningen.

5.2.2 Läroplanens kunskapssyn och synen på matematik

Matematiklärarens professionella kunnande omfattar flera komponenter såsom kunskaper om och förhållningssätt till såväl undervisning och lärande i sig, som till undervisning och lärande av matematik. I detta avsnitt ger jag en övergripande syn på matematiklärares behov av pedagogiskt kunnande. I kapitel 6 övergår jag till att betrakta synen på matematiklärares kunnande ur ett matematikdidaktiskt perspektiv.

Redan i kapitel 2 beskrivs hur skolans undervisning genomgått, och fortfarande genomgår, en förändringsprocess där en procedurellt inriktad kunskapssyn successivt övergetts till förmån för en konceptuell. I det betänkande som låg till grund för Lpo94 beskrivs kunskapens olika aspekter på följande sätt:

> För det första kunskapens *konstruktiva* aspekt. Kunskap är inte en avbildning av omvärlden, utan ett sätt att göra världen begriplig. Kunskaper utvecklas i ett växelspel mellan vad man vill uppnå, den kunskap man redan har, problem man upplever med utgångspunkt i denna samt de erfarenheter man gör. För det andra kunskapens *kontextuella* aspekt. Kunskap är beroende av sitt sammanhang, vilket utgör den (tysta) grund mot vilken kunskapen blir begriplig. För det tredje, kunskapens *funktionella* (instrumentella) aspekt, kunskap som redskap. (SOU 1992:94, s. 59)

Denna syn på kunskap är inte minst viktig i ämnet matematik. Många menar till exempel att matematiken finns runt omkring oss, medan andra såsom Niss (2001) menar att vi inte kan uppfatta någon matematik i vår omvärld, om vi inte behärskar sådana matematiska modeller med vars hjälp denna omvärld kan tolkas. I matematikundervisningen blir även den kontextuella aspekten viktig på minst två sätt. Dels vid konkretisering av matematiska begrepp eller modeller, dels vid val av lämpliga matematiska modeller för olika typer av tillämpningar. Samtidigt måste kunskapen vara funktionell, det vill säga färdigheterna måste vara av ett sådant slag att de är tillgängliga och användbara vid behov. Om så inte är fallet uppstår problem med det praktiska hanterandet av den matematiska modellen; det kommer med andra ord att saknas flyt i beräkningsarbetet.

När det gäller lärarens kunskaper så är en del av dem nedärvda i den meningen att de tillhör en tradition som är känd av såväl kolleger som elever. Om detta skriver Carlgren och Marton (2000) i *Lärare av i morgon*:

> Färdigheter och kunskaper, utgörande ett slags kollektivt intellekt som nedärvs från generation till generation genom inlärning, har utgjort mänsklighetens i särklass främsta, och till att börja med enda, vapen i kampen för överlevnad. (s. 13)

Lika ofta som det här nedärvda intellektet kan bli ett stöd för undervisningen, kan det leda till ett reflektionslöst agerande. Många tar ett visst handlande för givet utan att reflektera över dess innebörd och relevans. Detta är till exempel fallet när lärare byter arbetsform eller arbetssätt för att förbättra undervisningen, när problemet i själva verket är att eleverna har problem med att förstå undervisningens innehåll. Enligt Carlgren och Marton handlar detta i hög grad om vilka frågor man som lärare ställer sig själv:

> Vanliga frågor är: ”*Hur* kan jag utveckla barnens förmåga att läsa, skriva, använda de fyra räknesätten?”, ”*Hur* kan jag utveckla deras ekologiska förståelse, deras historiemedvetenhet och att deras insikter i materiens struktur?” Metoder i all ära. Förvisso behövs de, men om jag förstår *vad* det innebär att kunna läsa, skriva, addera, multiplicera etc; om ekologisk förståelse, historiemedvetenhet, insikter i materiens struktur har en djupare och differentierad innebörd för mig, då vet jag också varför jag föredrar ett sätt att försöka lära barnen det, framför ett annat; samt att jag på egen hand själv kan frambringa jämförelsevis välgrundade idéer om vad jag skulle kunna hitta på att göra.
>
> Så i stället för att i först hand fråga, Hur skall jag lära ut division?, Hur skall jag få mina elever att förstå fotosyntes?, Hur skall jag bära mig åt för att höja deras historiska medvetenhet?, bör vi börja med att ställa frågor av typen: Vad innebär det att behärska division, att förstå fotosyntes, att vara historiskt medveten? Vad är det som är viktigast? Vad är nödvändigt? Vad är det som inte får tas för givet? (s. 27)

De menar också att lärarens primära uppgift är knuten till undervisningens innehåll.

> Lärarens professionella objekt är lärande, dvs. utvecklingen av olika förmågor och förhållningssätt hos eleverna. Exempelvis är behärskningen av de fyra räknesätten en del av många lärares professionella objekt i den meningen att deras arbete syftar till att bidra till att åstadkomma det – bland annat. (s. 26)

Det Carlgren och Marton betonar, är en grundläggande didaktisk regel, nämligen vikten att reflektera över undervisningens syfte och innehåll. Att undervisa om decimaltal handlar inte om att låta eleverna räkna ett visst antal uppgifter eller om hur man skall ställa upp dessa uppgifter. En sådan undervisning blir poänglös om man inte först har ställt ett antal viktiga ”begrundelsefrågor” (Niss, 2001).

I *Lärande i praktiken* uttrycker Säljö (2000) liknande synpunkter.

> Med hjälp av en enkel fickräknare med flytande decimalkomma, som idag kan köpas för ett par tior, kan vi utföra mängder av divisioner eller multiplikationer utan att anstränga oss mentalt och med minimal risk att placera kommatecknet fel eller att göra något annat misstag av detta slag. Dessa ’kunskaper’ i form av algoritmer och konventioner har byggts in i apparaten och vi löser problemen snabbt och elegant. Den lärandeprocess som bestod i att vi löste sida upp och sida

> ner av övningsuppgifter med multiplikations- respektive divisionsuppställningar på papper håller i skrivande stund på att bli historia. Algoritmen passar bättre i maskinen och vår mentala energi kan frigöras för annat. Men detta betyder givetvis inte att vi inte längre behöver lära oss vad räknesätten innebär. Tvärtom, ju mer vi tar redskap av detta slag i bruk, desto viktigare är det att vi förstår de principer som gäller för hur matematiska operationer fungerar och hur man skall tänka när man använder dem. Vår uppmärksamhet måste riktas mot de begreppsliga sammanhang och system inom vilka dessa operationer är meningsfulla. (s. 16)

Som framgår av de senaste citaten så sker inte lärandet i ett intellektuellt vakuum. Lärandet har ett innehåll och ett mål. Om lärandet handlar om matematik är det därför viktigt att veta vad som menas med matematik. I *Nationalencyklopedin* (1989-1996) kan man till exempel läsa följande beskrivning:

> **Matematik** …, en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling. Definitionen kan kommenteras på följande sätt. Matematiken är *abstrakt:* den har frigjort sig från det konkreta ursprunget hos problemen, vilket är en förutsättning för att den skall kunna vara *generell* dvs. tillämpbar i en mångfald situationer, men också för att den logiska giltigheten hos resonemangen skall kunna kartläggas.

För en lärare i grundskolan medför denna definition ett dilemma. Definitionen passar bra in på den akademiska disciplinen matematik, men när man försöker applicera den på grundskolans matematik, infinner sig genast en rad problem. Inom grundskolans matematikundervisning spelar just konkretisering en viktig roll. Det gäller således inte att i grundskolan främst frigöra sig från det konkreta ursprunget utan snarare att, för de flesta elever, kunna falla tillbaka på och återförsäkra sitt tänkande i konkreta modeller. Konkretiseringen blir i själva verket, för många elever, just en metod att på en lokal nivå förstå ett matematiskt innehåll för att i nästa steg kunna generalisera det och slutligen abstrahera det till en generellt giltig matematisk modell.

Ett annat problem inom grundskolans matematikundervisning har sitt ursprung i matematikens abstrakta struktur och relativt komplicerade uttrycksformer. Thompson (1986) beskriver detta så här:

> Den naturvetenskapliga undervisningens kris ligger delvis i att modern vetenskap brutits loss från de föreställningar som styrde den grekiska vetenskapens utveckling. Modern naturvetenskap och matematik riskerar att i undervisningen stelna till en rigid symbolism. Å andra sidan är det just denna symbolism som har lett till naturvetenskapens och matematikens exempellösa framgångar, som resulterat i vår moderna teknologi. Men priset får betalas i pedagogiken. (s. 27)

Mot denna bakgrund bör man ställa frågan om hur en undervisning av yngre elever skall gå till i ett ämne som enligt Thompson stelnat i en rigid symbolism. Möjligen står svaret att finna i Marton och Booth (2000):

> Lärande - i bemärkelsen att erhålla kunskap om världen - betraktas ofta som ett framåtskridande, som börjar med att man förvärvar en del grundläggande fakta … och som går vidare genom att man bygger upp mer komplexa och avancerade former av kunskap utifrån, eller på grundval av, enklare former. (s. 9)

> Ur vår synvinkel går lärande i regel framåt från en odifferentierad och mindre sammanhängande förståelse av helheten, till en ökad differentiering och integration av helheten och dess beståndsdelar. På så sätt framskrider lärandet inte så mycket från delar till helheter som från helheter till helheter. För att uttrycka detta mycket enkelt: för att lära sig någonting måste man ha en aning om vad det är man lär sig. … De odifferentierade och osammanhängande helheter som den lärande greppar när han skall börja lära sig något, verkar förmodligen förvirrande och felaktiga när de bedöms utifrån den etablerade kunskapens kriterier. Men vid närmare eftertanke … visar sig dessa helheter, den lärandes ursprungliga idéer, vara ofullständiga snarare än felaktiga. (s. 10)

Man kan också uttrycka detta så att det inte är meningsfullt för läraren att kommunicera ett matematiskt innehåll på en abstraktionsnivå och med ett symbolspråk som inte är uppfattbart för de undervisade individerna. Den direkta följdfrågan blir därför om det är möjligt att bryta ned och förenkla olika delar av matematiken till nya helheter såsom Marton och Booth beskriver. Att detta är möjligt kan man tolka in i vad professorn i matematik Lennart Carlesson (1968) beskriver:

> Det brukar tas som ett axiom att matematik inte kan populariseras, men just denna tes bör man ifrågasätta. Vad som kan förklaras och vad som inte kan förklaras beror på vad som tas som utgångspunkt. (s. 9)

> Vi kan sätta upp invecklade system som ger innebörd åt talet 1, tecknet + o.s.v., helt oberoende av vår vanliga tolkning. … Men vi kan inte tala om systemet eller ge det ett sanningsinnehåll utan att falla tillbaka på vår erfarenhet om vardagligt tänkande. (s. 13)

Vad Carlesson tar upp kan också tolkas ur en annan synvinkel. Lärare som har alltför ytliga kunskaper i matematik (om än på en akademisk nivå) visar ofta en rädsla för att lämna en inlärd, men stereotyp och procedurellt inriktad, undervisningsstil. Man förmår inte lämna tryggheten i givna formler och uttryck för att möta eleverna på deras nivå. I en rapport från NCM (2001) är man bekymrad över följderna av detta när det gäller dagens undervisning i matematik.

> Skolämnet matematik har framstått som färdigutvecklat, regelstyrt och stressande för lärarna – problematiskt och tråkigt för eleverna. … Matematikläraren har inte fått stöd och resurser att utveckla en intresseväckande och stimulerande

> undervisning … utan har fått förlita sig på traditionella arbetssätt och hjälpmedel. (s. 12)

Det man beskriver i rapporten är en kunskapssyn bland lärare som står i bjärt kontrast till den syn som lyfts fram i gällande styrdokument. Det man samtidigt beskriver är att lärare inte har getts det stöd som behövs för att utveckla en sådan matematikundervisning som krävs i dagens skola. Lärare förväntas, menar man, uppnå dagens högt ställda mål med hjälp av traditionella undervisningsmetoder, utvecklade för en helt annan läroplan.

5.2.3 Elevernas förkunskaper och lärarnas kompetens

Två viktiga förutsättningar för god undervisning, kanske de allra viktigaste av dem alla, är elevernas förkunskaper och lärarnas professionella kunnande. Dessa ramar är speciella eftersom de är rörliga i ett längre perspektiv, men när läraren kommer in i klassrummet för att leda en given lektion, är de i huvudsak redan låsta och svåra att för tillfället påverka.

Eftersom elevernas förkunskaper är ett av deras viktigaste instrument för att uppfatta undervisningens innehåll så blir såväl olika elevers förkunskaper i sig som lärarens medvetenhet om dessa förkunskaper viktiga ramfaktorer. Jag vill i det här sammanhanget referera till Ausubel (1968):

> If I had to reduce all of educational psychology to just one principle; I would say this: The most important factor influencing learning is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly. (s. vi)

Ett intressant exempel på förkunskapens betydelse finner man i Kilborn (1979a) som analyserar komplexiteten i multiplikationer av typen $46 \cdot 87$. För att lösa uppgiften rätt, med en konventionell algoritm, måste man fyra gånger i rad få rätt på en kombination från multiplikationstabellen (alltså på $6·7$, $6·8$, $4·7$ och $4·8$). Om en elev på ett relevant test ger rätt svar på 8 av 10 uppgifter från multiplikationstabellen är sannolikheten att få rätt svar på en slumpvis vald sådan tabelluppgift 0,8. Detta medför i sin tur att sannolikheten för att fyra kombinationer i rad blir rätt är $0{,}8^4 \approx 0{,}41$. Det här innebär att sannolikheten för att göra något räknefel på multiplikationen $46 \cdot 87$ blir 100% - 41% = 59% enbart på grund av det nämnda förkunskapsproblemet. Ingen av de lärare som ingick i Kilborns studie var medveten om detta när de började undervisa om multiplikationsalgoritmen.

För att kartlägga elevernas förkunskaper inför ett nytt undervisningsmoment, kan man tänka sig i huvudsak två olika tillvägagångssätt. Det ena innebär att man kontinuerligt följer elevernas kunskapstillväxt informellt, medan man går runt och handleder dem i klassrummet. Det andra går ut på att skaffa informationen formellt genom diagnostiska test eller med hjälp av systematiska elevintervjuer.

Under 1960-talet fick diagnostiska test en extra stor betydelse i svensk matematikundervisning. Anledningen var det självinstruerande IMU-materialet (Larsson, 1973) och de läromedel som kom i IMU:s kölvatten. Elevernas arbete med IMU-materialet, som först var individualiserat på tre, senare på fyra, olika djupnivåer, styrdes av resultaten på diagnostiska test. Beroende på testresultatet hänvisades eleverna till olika, parallella häften i materialet. Diagnostiska test blev på så sätt en integrerad del i lärandet. Även idag, många år efter det att undervisningsteknologin mist sin tidigare betydelse, finns det diagnostiska test i anslutning till de flesta läromedel i matematik. En väsentlig skillnad mellan dagens läromedelsdiagnoser och diagnoserna i IMU-materialet är emellertid att dagens diagnoser snarare används som en formell avslutning på ett läroboksavsnitt än som ett instrument för att kartlägga eleverna förkunskaper inför ett nytt avsnitt. Vidare saknas det i allmänhet såväl anvisningar som material för att följa upp sådana problem som identifierats på diagnosen.

Även i anslutning till Lgr 80 ansågs diagnostik vara ett viktigt inslag i matematikundervisningen. Anledningen till detta var bland annat kursplanens uppdelning i ”nödvändiga” och ”önskvärda” kunskaper, den tidens motsvarighet till dagens strävansmål och uppnåendemål. För att möta kravet på nödvändiga kunskaper (baskunskaper) i matematik utgavs *SÖ:s diagnostiska uppgifter i matematik* (Skolöverstyrelsen, 1983) vilka senare kompletterades med uppföljningsmaterialet *För din räkning* (Johnsson, Löwing & Runesson, 1984). Året dessförinnan hade det utkommit en bearbetning (Johansson & Kilborn, 1982) av ett tidigare utgivet diagnosinstrument i aritmetik som utarbetats i anslutning till PUMP-projektet (Kilborn, 1979a). Ännu en indikation på den vikt man då lade på diagnostik var att ett helt nummer av fortbildningstidskriften *Nämnaren* (nr 4, 83/84) ägnades åt diagnostik och utvärdering.

Även idag finns centralt konstruerade diagnoser i matematik för de tidiga skolåren och för skolåren 2 och 7 (Skolverket, 1996b, c och 2000c), men enligt de intervjuer som gjorts i anslutning till LUPP-projeket (Löwing, Lindström, Fant, Häggström, Kilborn & Engwall, 2003) verkar dessa diagnoser inte användas av lärarna i någon större utsträckning.

En annan källa till information om elevernas förkunskaper är elevintervjun. Denna kan ske formellt i form av en klinisk intervju eller informellt under en lektion. Metoden användes redan av Piaget (1951, 1952) och utvecklades vad gäller skolmatematiken på 1980-talet av bland andra Carpenter och Moser (Carpenter, Moser & Romberg, 1982; Carpenter & Moser, 1984) och Steffe (1984). Sedan dess har det skett en omfattande forskning kring elevers tänkande och den här typen av elevintervjuer har blivit ett vanligt inslag i såväl lärarutbildning som vid kompetensutveckling av lärare.

För att man som lärare skall få en användbar information från en elevintervju, krävs det en hel del kunnande. Först och främst krävs det en viss lyhördhet och skicklighet som intervjuare. Dessutom krävs det kunskap om olika tänkbara variationer i elevernas tänkande och en förmåga att avgöra såväl kvaliteten som generaliserbarheten av detta tänkande. Det verkar emellertid som om de flesta lärare saknar sådana kunskaper, trots en omfattande fortbildning, något som Stigler och Hiebert (1999) uppmärksammat när det gäller amerikansk undervisning.

> Allthough most U.S. teachers report trying to improve their teaching with current reform recommendations in mind, the videos show little evidence that change is occurring. Furthermore, when teachers do change their practice, it is often in only superficial ways. (s. 12)

Stigler och Hiebert menar också att de resurser som satsats på forskning och utvecklingsarbete inte följts upp med motsvarande satsning på att implementera resultaten av satsningarna i skolans undervisning.

> In the United States, little money is spent on educational research - that is, on finding out which educational initiatives work and which do not. (s. 23)

Även detta stämmer väl överens med mina erfarenheter från svensk skola.

När det gäller värdet av att känna till elevernas förkunskaper finns det många olika uppfattningar. I samband med utbildning av matematiklärare brukar jag ägna viss uppmärksamhet åt diagnostisk undervisning som metod. För att vi skall kunna föra en konkret och saklig diskussion om detta, får de blivande lärarna till uppgift att i en skolklass genomföra ett diagnostiskt test och att därefter följa upp testet med diagnostiska intervjuer av ett par elever. Flera av de lärarstuderande kommer varje gång tillbaka utan att ha genomfört uppgiften. De praktiklärare de vänt sig till har inte tillåtit dem att ge diagnosen. Det vanligaste skälet har varit att de menar att det är fel att ge en kunskapsdiagnos till vanliga elever, eftersom diagnoser är något man förknippar med elever med förmodad DAMP, MBD eller liknande. Om detta skriver Stigler och Stevenson (1992).

> … in the United States the most common diagnoses given for children with reading difficulties are minimal brain disfunction (MBD) or attention disorder. … If all the tests come back negative, the diagnosis is likely to be MBD. The reason is that if a child cannot read, there must be something organically or functionally wrong with his brain; otherwise, he would be able to read. (s. 110)

En del svenska lärare verkar ha en liknande uppfattning om diagnostik. En något elak tolkning av detta är att diagnoser är något man ger för att slippa undervisa en elev med problem snarare än för att möjliggöra en meningsfull undervisning av eleven i fråga. I en artikel av skolrådet Ragnar Eliasson (DN Debatt, 2002) redovisas en helt annan uppfattning om diagnosens betydelse. Här beskrivs bland annat vad som kännetecknar skolor med hög måluppfyllelse:

> Man använder tester och diagnoser men har en insikt i att det är den pedagogiska kvaliteten i det stöd som sedan ges som är allra viktigast.

En annan intressant iakttagelse, från skolor, i USA görs av Stigler och Hiebert (1999):

> Practice should be relatively error-free, with high levels of success at each point. (s. 90)

Kanske är detta en förklaring även till många svenska lärarnas motvilja till diagnostik. Problem som iakttas på en diagnos uppfattas snarare som ett misslyckande än som en pedagogisk vägledning i avsikt att eleverna skall nå uppställda mål. Stigler och Stevenson (1992) menar att denna syn på diagnostik är kulturbunden. Efter att ha jämfört matematikundervisningen i USA och Asien konstaterar de till exempel:

> …Americans conceive of errors as a possible precursor of ultimate failure. People should strive to avoid errors and to give the correct response - a routine that fits our culture and has been strengthened by the writings of behaviour psychologists such as B. F. Skinner.
>
> Japanese and Chinese teachers and students have a different view. They regard mistakes as an index of what still needs to be learned. They expect that with persistence and effort, people will eliminate errors and eventually make the correct response. … This experience gave us a new appreciation of how errors, rather than being an index of failure, can be put to positive use in learning. (s. 17)

En sammanfattning av detta avsnitt är att elevernas förkunskaper är en av de viktigaste förutsättningarna för en meningsfull inlärning. Samtidigt förefaller det som om många lärare saknar instrument för, kunnighet i och vilja att analysera elevernas aktuella förkunskaper.

5.3 Rörliga ramar

Utöver de ramar som läraren inte kan påverka annat än i ett längre perspektiv, finns det också ett antal ramar som läraren kan påverka inför en given lektion. Jag kallar dessa för rörliga ramar. Som exempel på sådan rörliga ramar kan nämnas arbetsformer, arbetssätt och undervisningsmaterial. Med arbetsformer menar jag då i huvudsak hur undervisningen organiseras och med arbetssätt den metodik som läraren väljer att använda. Beroende på hur läraren utnyttjar eller väljer ramar för undervisningen kan hon såväl optimera som försvåra olika typer av kommunikation.

5.3.1 Organisering av undervisningen

Bentley (2003) summerar i sin avhandling resultatet av olika elevgrupperingar vid matematikundervisning på följande sätt:

> In current research, several teaching approaches are described. These include interactivity, individual instruction, within-class grouping, whole class instruction, multi-grade and multi-age classes, ability-streamed classes, cross-grade grouping, accelerated and whole class instruction. The norm for comparing different teaching approaches is whole class instruction. Within-class grouping together with cooperative learning affects the teaching outcome positively. … Math teachers seem to have different interactive abilities. … Contradictory to what was commonly thought, there was no or only a very small effect on pupil achievement in multi-grade, multi-age, and ability streamed classes compared to whole class instruction. The effect size increased, however, in accelerated and enrichment classes, in which the content was adopted to the pupils' prior knowledge and abilities. (s. 21)

Dessa grupperingar är enligt min uppfattning av två slag. I ena fallet är det fråga om en differentiering av eleverna som i princip hålls konstant under en längre tid såsom åldersblandning eller nivågruppering. I sådana fall är det enligt min terminologi fråga om fasta ramar. I andra fall, såsom vid instruktion i helklass, arbete i grupp eller vid individuellt arbete utgående från en lärobok, är det snarare fråga om arbetsformer, alltså rörliga ramar, som kan variera från lektion till lektion. Dessa rörliga ramar kan på olika sätt kombineras med de tidigare nämnda, fasta ramarna.

Vad Bentley kommer fram till i sin litteraturgenomgång är att vissa grupperingar leder till bättre resultat än andra. Jag ställer mig något tveksam till en sådan slutsats. Däremot är det säkert så att olika grupperingar ger olika möjligheter att bedriva en optimal undervisning och att vissa grupperingar underlättar eller försvårar genomförandet av olika arbetssätt. Det är till exempel lättare att bedriva ett laborativt arbete om eleverna arbetar i grupper än om de arbetar individuellt i helklass. Samtidigt säger min beprövade erfarenhet att en gruppering i sig inte leder till inlärning eftersom inlärningen i första hand är beroende av hur det innehåll som tas upp under lektionen presenteras och bearbetas i relation till elevernas förkunskaper. Viktigare är kanske att valet av ramar görs utgående från vilket innehåll som skall kommuniceras och att detta sker på ett för eleverna begripligt sätt. Detta kommenteras på följande sätt av Bentley själv:

> If the preconditions for teaching were such that optimal advantage could be taken of the grouping, pupil achievement would increase considerably. Math teachers seem to have different interactive abilities. (s. 21)

När jag under 1980-talet deltog i en försöksverksamhet om för- och nackdelar med olika elevgrupperingar (Löwing, 1982; Hellström, 1987) förstod jag att många lärare valde att gruppera eleverna innan de valde arbetssätt eller undervisningsmetod. Det verkade också som om val av elevgruppering snarare följde aktuella pedagogiska trender än valdes utgående från didaktiskt förorsakade behov. I dagens skola verkar trenden vara den, att eleverna i första hand skall arbeta på egen hand eller i en mindre grupp, styrda av innehåll och uppläggning i en lärobok. I *Hög tid för matematik* (NCM, 2001) beskrivs detta så här:

> Den nedskärning i skolan som blev följden av den ekonomiska krisen drabbade matematikundervisningen mycket hårt. Skolor och lärare förmådde inte svara mot de nya kursplanernas mål och en stor andel ”enskild räkning” har lett till allt fler utslagna elever. Det finns en trend att lärare inte skall undervisa utan handleda och det har drabbat matematiken särskilt hårt på grund av det starka läromedelsberoendet och att många lärare saknar relevant utbildning. (s. 13)

Det som beskrivs är alltså att fasta ramar, i form av antalet elever per lärare och ekonomiska resurser, har begränsat lärarnas möjligheter att uppnå kursplanernas mål. För att komma tillrätta med detta dilemma väljer lärare arbetssättet enskild räkning och handledning. Detta har enligt rapporten lett till nya problem eftersom lärarens professionella kunnande inte är tillräckligt för att under dessa omständigheter matcha läroboken.

Även Madsén (2002) har uppmärksammat dessa problem. Han skriver:

> Under 1990-talet har det varit lätt att se en påtaglig trend mot mera av enskilt arbete och individuell planering i svenska klassrum på alla nivåer. Denna utveckling har ofta fått ett starkt understöd av lokala politiker, som mer än gärna köpt slagordet att ”eleverna ska söka sin kunskap själva - lärarna ska vara handledare”. Om alla elever bara får tillgång till en dator och Internet så kommer läroprocesserna att revolutioneras, har det också sagts. Jag har till och med mött lärare, som på lokal nivå fått tydliga signaler om att det är ”fult” att undervisa! Resultatet har blivit att många lärare mer eller mindre abdikerat och främst administrerar elevernas självständiga klassrumsarbete. (s. 54)

Detta kan sammanfattas så att många lärare, via skolledningen, är utsatta för ett visst tryck från politiker, när det gäller valet av rörliga ramar. Lärares metodiska frihet blir på det här sättet begränsat liksom de reella möjligheterna att välja rörliga ramar.

Madsén kritiserar i samma artikel den ovan refererade synen på undervisning och hänvisar bl.a. till Vygotsky:

> Från Vygotsky kommer också det mycket diskuterade begreppet *den närmaste utvecklingszonen.* … Den närmaste utvecklingszonen består av de aktuella möjligheter eleverna har att utveckla en ny kompetens, som de dock inte kan erövra på egen hand utan hjälp av en lärare eller en kamrat som vet mera. Detta perspektiv är en avgörande orsak till att man så starkt betonar lärarens aktiva roll i undervisningen. (s. 56)

En forskare som långt tidigare tagit upp liknande problem är Alexandersson i en intervju i *Lärarnas tidning* (1994a). Med anledning av att den nya läroplanen (Lpo 94) talar om elevers eget lärande, skriver han:

> Detta är viktigt men inte tillräckligt. Lärarna måste dessutom behärska ett innehåll och inte nöja sig med att det sker en process där eleverna får ta över ansvaret att producera innehållet.

Även han tar alltså upp vikten av att läraren bör spela en mer aktiv roll i klassrummet. Läraren måste ha ett professionellt ämneskunnande, och använda detta på ett aktivt sätt i undervisningen. I slutdiskussionen i sin avhandling skriver Alexandersson (1994b) vidare:

> Goda ämneskunskaper är en förutsättning för att lärarna skall kunna ta utgångspunkt i ett *tänkt* innehåll. Skall till exempel en uppfattning om ett specifikt innehåll urskiljas eller fokuseras hos eleven, måste läraren själv ha tillräckliga kunskaper om ämnet. Först då kan han eller hon veta vad som skall urskiljas, vad som är perifert, hur olika principer inom ämnet är relaterade till varandra och hur dessa grundläggande principer kan presenteras. Genom en djupare ämneskunskap kan läraren förklara och skapa analogier när ett specifikt innehåll diskuteras och skall förmedlas. Men varken gedigna ämneskunskaper i sig eller väl utvecklad metodisk förmåga är tillräckliga. Det är hur dessa två aspekter av undervisning förenas som är central, vilket denna studie visar. (s. 233)

Alexandersson framhåller alltså vikten av att läraren har ett professionellt kunnande inom flera fält samtidigt. Det är samspelet mellan lärarens kunnande om undervisningens innehåll i kombination med val av lämpligt arbetssätt och lämpliga arbetsform som ger resultat.

Problemet med lärarens passiva roll i klassrummet är inget som är speciellt för svensk skola. Från USA:s horisont beskriver Stigler och Hiebert (1999) liknande fenomen utgående från ett stort antal lektioner som dokumenterats på video och därefter analyserats.

> We saw the following sequence of events over and over. Teachers assign students' seatwork problems and circulate around the room, tutoring and monitoring students' progress. Several students ask in quick succession, about the same problem. (s. 92)

De menar att denna lektionsform ger mycket begränsade möjligheter för läraren att arrangera de typer av inlärningssituationer som är önskvärda enligt den svenska kursplanens krav.

Stigler och Hiebert har också gjort en på videobandade lektioner baserad studie, där de jämför undervisningen i USA, Tyskland och Japan (se också avsnitt 3.4). Tanken är att de genom att studera den variation de ser, skall kunna dra slutsatser om hur man kan förbättra amerikansk matematikundervisning. Efter att ha analyserat de amerikanska videobanden konstaterar de emellertid, till sin förvåning, att den omfattande matematikdidaktiska forskning som skett under de senaste decennierna i USA, med åtföljande reformarbete, inte har satt några djupare spår i skolans undervisning:

> When we looked at the videos, we found little evidence of reform, at least as intended by those who had proposed the reforms. (s. 106)

Detta är intressant. De som skriver kursplaner, organiserar fortbildning och förnyar lärarutbildning verkar ta för givet att deras idéer automatiskt leder till en önskad förändring. Men så är det uppenbarligen inte - åtminstone inte i USA.

Från NCM (2001) framförs en liknande kritik mot dagens kursplaner och betygskriterier i matematik:

> Nuvarande kursplaner ger inte direkt vägledning för hur undervisningen i matematik skall gå till och ger inte tillräckligt bra underlag för diskussioner vid till exempel stadieövergångar. … För att lokalt utvecklingsarbete skall kunna ske på ett professionellt sätt krävs kompletterande underlag till kursplanerna. (s. 19)
>
> Det har till exempel diskuterats hur vi skapar balans och integration mellan matematikens kreativa, problemlösande aktiviteter och inslag som stödjer elevernas begreppsbildning och förtrogenhet med matematikens symbolspråk. (s. 2)

Slutsatsen blir att effekterna av didaktisk forskning och nya kursplanereformer lika lite når eleverna i Sverige, som i USA. Ett skäl till detta kan vara att dagens matematikdidaktiska forskning i första hand handlar om inlärning (learning) och mycket lite om undervisning (teaching). Kartläggning av elevers tänkande ger ett nödvändigt men långt ifrån tillräckligt underlag för att förändra lärarutbildningen och därmed skolans undervisning. Skillnaden är alltför stor mellan att utföra en väl förberedd intervju med en enda elev i en laboratoriemiljö och att spontant och momentant utföra intervjuer av motsvarande slag i ett klassrum där ett tjugotal andra elever samtidigt pockar på uppmärksamhet.

Bristen på praxisnära forskning har under senare år poängterats av forskare som Shuell (1996) och Nicksson (2000). Madsén (2002) beskriver problemet på följande sätt utgående från sina studier av amerikansk undervisningsforskning.

> Begränsningarna i att studera tänkandet isolerat från autentiska situationer har också blivit allt mer uppenbara, något som lett till att forskningen allt oftare förlagts till vanliga klassrum, i stället för till laboratorier. Därmed har resultaten på ett helt annat sätt än tidigare blivit relevanta för lärarens yrkesutövande. (s. 55)

Med tanke på ramarnas betydelse för inlärningsprocessen vill jag uttrycka detta på följande sätt. Undervisningens ramar är fundamentalt olika vid laboratoriemässiga intervjuer av elever och vid den praxisnära kommunikation som sker i klassrummet. Eftersom laboratoriemässiga intervjuer handlar om enskilda elevens tänkande i en artificiell miljö kan man endast dra begränsade slutsatser till hjälp för den lärare som leder ett tjugotal olika individers simultana inlärning. Kanske är det bristen på funktionella ämnesdidaktiska strategier som bidragit till att skolundervisningen, såsom tidigare nämnts, blivit så fokuserad på alternativa grupperingar, arbetssätt och arbetsformer.

5.3.2 Arbete i grupp

En hel del av forskningen kring undervisning sker, som redan nämnts, i form av aktionsforskning. Denna forskning är ofta knuten till en kompetensutveckling av de deltagande lärarna och är inriktad mot att utveckla arbetssätt och arbetsformer. Det kan i detta sammanhang vara intressant att analysera ett fortbildningsmaterial kring grupparbete och elevsamverkan som, utgående från deras egen forskning, är skrivet av Artzt och Newman (1990) på uppdrag av National Council of Teachers of Mathematics i USA. Forskarna börjar med att betona vikten av att eleverna inser poängen med att arbeta i grupp.

> For people to cooperate, they should first believe that cooperation has personal value for them. They should then develop certain skills and understandings. School systems that are built largely on recognizing individual accomplishments usually do not help students see the value in cooperation or help them to develop cooperative skills. (s.1)

Det här är viktigt. Enligt min erfarenhet tar lärare alltför ofta för givet att elever kan samarbeta på ett förnuftigt sätt och en hel del grupparbeten sätts igång utan att eleverna lärt sig utnyttja grupparbetets möjligheter.

Det finns enligt författarna många olika sätt att organisera och genomföra grupparbete men de framhåller följande punkter som är gemensamma för allt grupparbete.

> First, group members must perceive that they are part of a team and that they all have a common goal. Second, group members must realize that the problem they will solve is a group problem and that all members will share the group's success or failure. Third, to accomplish the group's goal, all students must talk with one another - to discuss all problems. Finally, it must be clear to all that each member's individual work has a direct effect on the group's success. Teamwork is important. (s. 2f)

Även detta är viktiga synpunkter. Jag anser emellertid att författarna glömmer det viktigaste av allt, nämligen att varje individ i gruppen själv skall lära sig, dels att arbeta i grupp, dels det innehåll som grupparbetet handlar om. De lyfter inte heller fram den viktiga skillnaden mellan process och resultat. Kanske är detta något författarna, som har stor erfarenhet som lärare, tar för givet. Jag har emellertid alltför ofta iakttagit hur vissa elever kommer till korta vid grupparbete och inte ges några reella möjligheter att lära. Vissa elever anses till och med av kamraterna utgöra ett hinder för gruppens arbete. Det är därför viktigt att varje individ i gruppen känner ett ansvar för alla övriga kamrater i gruppen. Författarna diskuterar inte heller när grupparbete kan vara lämpligt eller vilken gruppsammansättning, såsom heterogena eller homogena grupper, som kan vara lämplig i olika inlärningssituationer. Mina farhågor får i det här fallet stöd av Molloy (2003) som angående grupparbete i ämnet svenska skriver:

> Mina resultat visade bland annat att det bland pedagoger allmänt accepterade gruppsamtalet som anses ge eleverna större möjligheter till diskussioner, istället kan fungera hämmande för åtskilliga elever, då det analyseras ur såväl ett didaktiskt perspektiv som ett genusperspektiv. (s. 50)

Artzt och Newman (1990) ger också råd om hur många elever det kan vara i en grupp, hur man motiverar elever att arbeta i grupp etc. Däremot nämner de inget om gruppernas sammansättning i relation till innehållet, alltså vad man skall lära sig under grupparbetet - mer än att arbeta i grupp. Trots detta menar man att vissa strategier leder till bättre resultat än andra. Vad de då menar med resultat framgår inte.

Som jag tolkar det finns det en hel del förgivet-taganden hos de båda forskarna. Alice Artzt som är en skicklig lärarutbildare i matematik är givetvis medveten om innehållets betydelse i undervisningen. Att hon inte framhåller detta i rapporten kan emellertid leda till missförstånd bland lärare med mindre bra didaktiskt kunnande

Det är intressant att jämföra vad Artzt och Newman skriver, med den sammanfattning som görs av Good, Mulryan och McCaslin (1992) i artikeln *Grouping for Instruction in Mathematics*. De menar att man med hjälp av olika elevgrupperingar kan skapa olika möjligheter att optimera undervisningen och därmed elevernas individuella inlärning. Samtidigt varnar de för missuppfattningen att en gruppering eller ett arbetssätt leder till inlärning i sig:

> Various educators have suggested that one way to enhance mathematics instruction is by increased use of small-group instruction. In this chapter we have stressed that increased use of small-group instruction per se is unlikely to be part of the solution. This is because the important issue is not whether individualized instruction, small-group instruction, whole-class instruction, or discovery learning is stressed; the important issue is the *quality* of planning and instruction. (s. 192)

Jag skulle vilja sammanfatta detta så, att man inte löser matematikdidaktiska undervisningsproblem genom allmändidaktiska åtgärder.

5.3.3 Konkretisering av undervisningen

I ”en skola för alla” är det viktigt att alla elever ges möjligheter att lära matematik. Eftersom olika individer lär på olika sätt, och har olika möjligheter, att abstrahera har konkretisering av undervisningen blivit ett viktigt begrepp. I en artikel *Concrete Materials in the Classroom*, beskriver Szendrei (1996) den forskning som bedrivits kring konkretisering av undervisningen. Hon börjar med en historisk tillbakablick:

> John Dewey (1859-1952), in his book The Child and the Curriculum (Dewey 1902), explained his belief that repeated work in gardening, cooking, woodworking, and metalworking yields considerable practical and scientific knowledge. (s. 419)

Hon påminner också om att redan Comenius och Pestalozzi fann det nödvändigt att konstruera speciella material för utbildning:

> According to Comenius the object must come before the rules, the content before the form. Pestalozzi asserted that observation and senses are the first steps in any learning process. (s. 420)

Szendrei nämner även ett antal andra föregångare inom området såsom Montessori, Dienes, Gattegno och Varga. Speciellt de tre först nämnda har periodvis haft visst inflytande på svensk matematikmetodik.

Szendrei tar i artikeln upp de viktiga frågorna om olika materials betydelse för inlärningen. Hon nämner samtidigt tre vanliga invändningar mot att konkretisera nämligen

> 1) how teachers can learn the proper use of the materials;
>
> 2) whether the learning time invested is ever regained;
>
> 3) whether any transfer effect exists and the knowledge gained through the use of the materials will be effective in real life situations as well. (s. 423f)

Hon menar vidare att ”… The same manipulative can be both a useful tool and a harmful enemy of mathematics learning” (s. 424). Som exempel nämner hon Cuisenaires räknestavar.

När man konkretiserar sin undervisning med hjälp av ett material är det viktigt att inse att materialet i sig enbart är en artefakt. Det är läraren som genom sitt sätt att presentera och utnyttja materialet ger det ett liv. Lärarens roll är med andra ord avgörande för om materialet leder till en konkretisering eller ej:

> Indeed, it is not easy to plan a process that can realise the journey from concrete material to abstract mathematical content. The rule of the teacher in this work is crucial. (s. 429)
>
> Concrete materials in the mathematics classroom do not automatically produce either a good or bad effect. A teacher must plan the use of the materials in

> accordance with society's demands, the language of instruction and the philosophy of the school. (s. 433)

Det Szendrei skriver stämmer väl överens med Lave och Wengers (1991) syn på den situationsbundna karaktären hos mänsklig förståelse och kommunikation. Som en egen uppfattning vill jag tillägga att redan termen ”konkret material” är missvisande, eftersom man i den kan läsa in en egenskap hos själva materialet. Men materialet konkretiserar, som redan nämnts, inget i sig.

I grundskolan tar man ofta för givet att det skall ske en konkretisering av undervisningen. Löwing och Kilborn (2002) lyfter fram vissa invändningar mot detta. Matematiken är i sig mångfacetterad. Viss matematik är till för att tolka omvärlden eller användas i vardagens överslag och beräkningar. Den matematiken går givetvis att konkretisera. Men matematiken handlar också om att abstrahera. Det betyder att det konkretgjorda också måste kunna generaliseras, utvecklas till en matematisk modell, som kan återanvändas i andra situationer. Mot slutet av högstadiet studerar eleverna en hel del matematik som bygger på abstraktioner och därför inte alltid kan konkretiseras. På sin höjd kan man som lärare använda väl valda metaforer som stöd för begreppsbildningen. Det här är aspekter som tas upp av Sawyer (1963) Han menar att:

> To teach mathematics successfully, we have to be aware of both the intuitive and the abstract aspects of mathematics, and somehow to unify these. … mathematics questions, as a rule, cannot be settled by direct appeal to experiment. (s. 111)

Som exempel tar han den räta linjen, som aldrig kan ritas eftersom den är oändligt lång och Kants paradox om förfluten tid. Är den förflutna tiden ändlig? Och i så fall, vad hände dessförinnan? Det både Szendrei och Sawyer tar upp är språkets viktiga roll för att konkretisera och abstrahera matematik.

5.3.4 Läromedlens roll

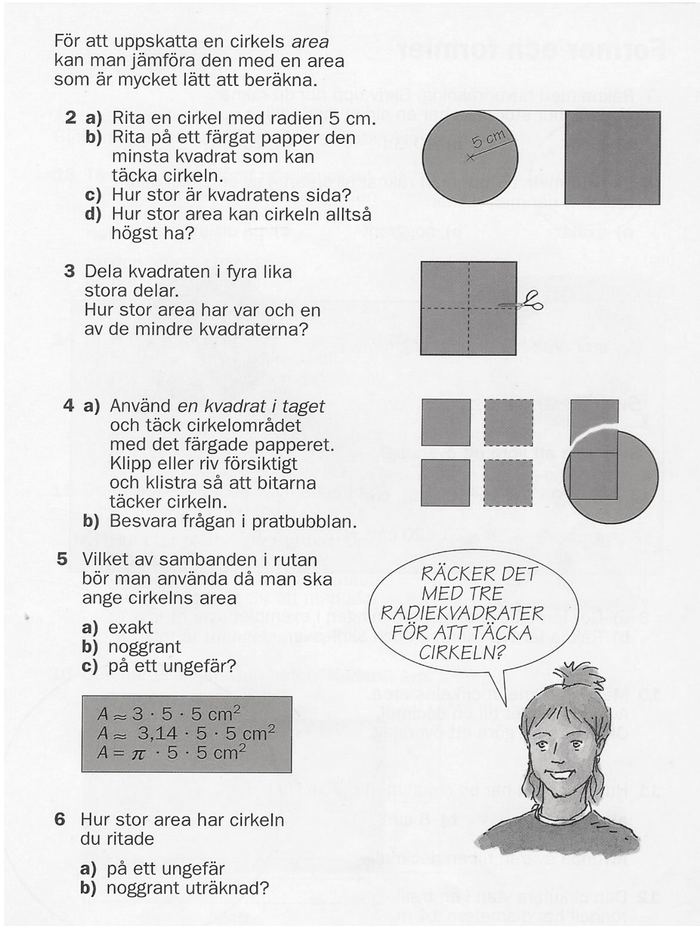
I avsnitt 5.3.1 finns ett citat från NCM (2001) där man analyserar dagens problem inom matematikundervisningen och indirekt lägger en stor del av skulden på lärarnas beroende av läromedel. Man menar uppenbarligen att läromedlet är en alltför dominerande ramfaktor i undervisningsprocessen. För den lärare som är starkt läromedelsberoende blir läromedlet enligt min definition en fast ram som för elevernas del byts ut en gång om året. För andra lärare, som då och då ersätter läromedlets framställning med egna idéer, är läromedlet snarare att betrakta som en rörlig ram som modifieras efter behov.

Den syn på läromedlens användning som lyfts fram av NCM förstärks i *Lusten att lära* (Skolverket, 2003b). När det gäller grundskolans matematikundervisning menar man att det läromedelsbundna arbetet leder till att eleverna satsar på kvantitet i stället för kvalitet. Vidare menar man att eleverna i allmänhet bara får högst två minuters lärarkontakt per lektion.

> Arbetet handlar i hög grad om att ”räkna så många tal som möjligt”, ofta på egen hand med läromedlets diagnosmaterial/facit som hjälp. (s.13)

> Läraren hinner tala i genomsnitt högst två minuter med varje elev per lektion och eleverna kan vara utelämnade till att 95 procent av tiden själva lära matematik genom att arbeta med bokens uppgifter. … då återstår det för eleven att kopiera lärobokens eller lärarens sätt att lösa uppgiften. Diskussionen blir därmed inte meningsfull för eleven. (s. 14f)

Mot den ovan beskrivna bakgrunden blir det extra intressant att studera hur några läroböcker presenterar ett matematikinnehåll. Som exempel har jag valt ut fyra avsnitt, som ledde till dilemman under de lektioner jag har observerat. Under en av lektionerna i skolår 8 introducerades till exempel arean av ett cirkelområde. Så här beskriver läroboken *Möte med matte* (Skoogh, Ahlström, Björlin & Torbjörnsson, 1996) en laboration som eleverna skall utföra under lektionen.



För att uppskatta en cirkels *area* kan man jämföra den med en area som är mycket lätt att beräkna.

2 a) Rita en cirkel med radien 5 cm.
b) Rita på ett färgat papper den minsta kvadrat som kan täcka cirkeln.
c) Hur stor är kvadratens sida?
d) Hur stor area kan cirkeln alltså högst ha?

5 cm

3 Dela kvadraten i fyra lika stora delar. Hur stor area har var och en av de mindre kvadraterna?

4 a) Använd *en kvadrat i taget* och täck cirkelområdet med det färgade papperet. Klipp eller riv försiktigt och klistra så att bitarna täcker cirkeln.
b) Besvara frågan i pratbubblan.

5 Vilket av sambanden i rutan bör man använda då man ska ange cirkelns area
a) exakt
b) noggrant
c) på ett ungefär?

$A \approx 3 \cdot 5 \cdot 5$ cm^2
$A \approx 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5$ cm^2
$A = \pi \cdot 5 \cdot 5$ cm^2

RÄCKER DET MED TRE RADIEKVADRATER FÖR ATT TÄCKA CIRKELN?

6 Hur stor area har cirkeln du ritade
a) på ett ungefär
b) noggrant uträknad?

Den inledande texten i läroboken är viktig. Vad laborationen går ut på är att bestämma storleksförhållandet mellan cirkelområde och ”radiekvadrat”. Det är detta förhållande som brukar betecknas med proportionalitetskonstanten π. Att så är fallet nämns inte. Tanken är emellertid att eleverna skall bestämma detta förhållande, alltså storleken av π, genom att utföra laborationen. Mot denna bakgrund är den fråga som ställs i pratbubblan något märklig: ”Räcker det med tre radiekvadrater för att täcka cirkeln? ” Svaret är givetvis nej. Sedan eleverna gett det svaret följer frågan: ”Vilket av sambanden i rutan bör man använda då man ska ange cirkelns area a) exakt b) noggrant c) på ett ungefär? ” Frågan är hur eleverna, utgående från den information de hittills fått, skall kunna besvara frågorna a och b? Hur skall de veta att det går åt cirka 3,14 radiekvadrater för att täcka cirkelområdet och hur skall de i förväg kunna veta att det handlar om π?

En annan viktig fråga är om konstanten π är en generell konstant eller om den bara gäller för den givna cirkeln med diametern 10 cm. En rimligare strategi för att nå detta delmål hade varit att låta eleverna utföra laborationen på var sin cirkel med olika diameter och därefter jämföra resultaten.

Under en lektion i skolår 7 arbetade man med tal i bråk- och decimalform i läroboken *Matematikboken* (Undvall, Olofsson & Forsberg, 1995). Liknämniga bråk av typen $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ beräknas på sidan 129 i boken som $\frac{3+4}{5}$ $= \frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$, medan oliknämniga bråk som $\frac{1}{6}+2\frac{3}{7}$ på sidan 133 skrivs om till decimalform och beräknas som $\frac{1}{6}+2\frac{3}{7}$ ≈ 0,167 + 2,429 = 2,596 ≈ 2,60. En rimlig fråga är vad som är målet med detta. Strävansmålet i skolår 9 är ju att eleverna skall kunna ”räkna med reella tal”. I så fall bör de väl också kunna addera två oliknämniga bråk och bibehålla bråkformen?

Vid introduktionen till ett avsnitt om procent, ges på sidan 154 i samma bok följande exempel, utan förklaring.

Skriv i decimalform

a) 7,5% = 0,075	b) 40% = 0,4	c) 15% = 0,15

Skriv i procentform

a) 0,09 = 9%	b) 0,043 = 4,3%	c) $\frac{13}{25}=\frac{52}{100}$ = 52%

Borde inte dessa metoder förklaras? En del elever kanske undrar hur det kan komma sig att *andelen* 15% kan vara lika med *decimaltalet* 0,15. De har ju tidigare lärt sig att 15% är olika mycket beroende på vad man tar det av. 15% av 100 är ju 15 medan 15% av 1000 är 150. Återigen blir det intressant att observera hur läraren, med hjälp av lärarhandledning och egen kunskap, lyckas komplettera bokens framställning.

Under en lektion i skolår 6 arbetade man med huvudräkning i läroboken *Alma* (Undvall, Olofsson, Forsberg, Wallin, Bjarneskans & Johansson, 1996). Här introduceras följande metod för addition i huvudet (s. 136).

77 + 58 = 120 + 15 = 135

120 15

En uppgift som 452 + 349 skall på motsvarande sätt lösas, genom att man lägger ihop varje ”talsort” för sig, som 700 + 90 + 11. Denna så kallade skriftliga huvudräkning stämmer dåligt överens med gängse huvudräkningsmetoder där till exempel 77 + 58 snarast skulle beräknas med hjälp av associativa lagen för addition, alltså som 75 + 2 + 58 = 75 + 60 = 135.

På motsvarande sätt skall man enligt *Alma* beräkna 94 - 49 i huvudet med en av följande metoder. (s. 140)

Metod 1: 94 - 49 = 1 + 44 = 45, alltså med utfyllnad från 49 till 94

eller

Metod 2: 94 - 49 = 95 - 50 = 45, alltså med lika tillägg av talet 1.

En analys av bokens övningar visar att de i själva verket är konstruerade på ett sådant sätt att de passar till just de här beskrivna metoderna. Detta kan tolkas på två sätt. Antingen är man ute efter att ge eleverna en metod att addera och subtrahera två tal skriftligt och då bör man ge dem generella metoder, inte metoder som anpassats till vissa speciella uppgiftstyper. Eller också är man ute efter att lära ut huvudräkning. Men huvudräkning är inte algoritmisk till sin natur utan bygger på god taluppfattning och en viss kreativitet, alltså att genom ett smart val av metod kunna finna en för uppgiften lämplig metod (se till exempel Löwing & Kilborn, 2003).

Observera att den information som ges i de ovan beskrivna exemplen oftast sker i termer av ”Hur gör man? ”, inte i termer av ”Vad innebär det?” (Carlgren & Marton, 2002). En viktig följdfråga blir därför vilket förhållningssätt till matematik detta kan tänkas leda till.

5.4 Sammanfattning

Som framgått av detta kapitel så spelar undervisningens olika ramar en viktig roll för kommunikationen i klassrummet. För att ge en sammanfattande bild av den roll ramarna spelar vid skolans matematikundervisning använder jag funktion som metafor för att beskriva lärandet. En funktion består av en definitionsmängd och en värdemängd och en tillordning som avbildar definitionsmängden på värdemängden. Denna tillordning kan ofta beskrivas med hjälp av konstanter, parametrar och variabler. Jag börjar med att beskriva lärandefunktionens definitionsmängd.

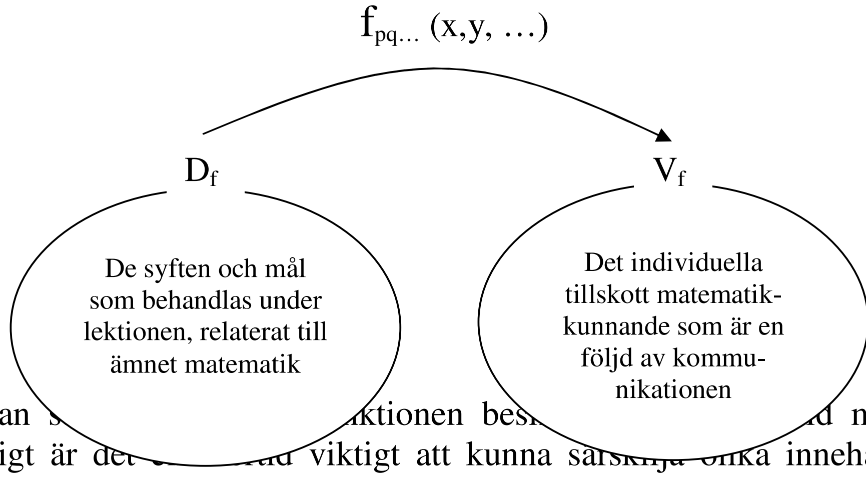
De mål som bör uppnås av alla elever i grundskolan beskrivs i uppnåendemålen för skolår 9. Till dessa mål kommer de så kallade strävansmålen. Uppnåendemålen och strävansmålen beskriver tillsammans lärarens uppdrag när det gäller undervisningen, alltså i det här fallet vilket matematikkunnande uppdragsgivaren vill att eleverna, med lärarens hjälp, skall tillgodogöra sig. Skolans tolkning av detta uppdrag (the intended curriculum) låter jag utgöra definitionsmängden i den funktion som beskriver lärandeprocessen. Det är dessa kunskaper läraren avser att (i matematisk mening) avbilda i elevernas kunnande och som därmed kommer att utgöra lärandefunktionens värdemängd.

Beroende på hur undervisningen bedrivs kan det avtryck lärandefunktionen ger i elevernas vetande bli mycket olika. Ett viktigt syfte med lärarutbildning och med matematikdidaktisk forskning är att optimera lärandefunktionen, med avsikten att få elevernas kunnande och attityder till matematikämnet (funktionens värdemängd) alltmer lika de mål och syften som beskrivs i läroplan och kursplan. Avsikten är alltså att the intended curriculum, the implemented curiculum och the attained curriculum, skall bli så lika som möjligt. Med detta menar jag inte att elevernas kunnande skall vara en exakt avbild av den förväntade kunskapen. Visserligen är stora delar den matematiska kunskapen redan definierad och inte förhandlingsbar, men samtidigt kan den beskrivas och konkretiseras på olika sätt och leda till individuellt anpassat kunnande. Det är hur detta går till, respektive skulle kunna gå till (Bishop, 1992) som jag försöker analysera med hjälp av lärandefunktionen.

Utgående från den ovan beskrivna bakgrunden blir det viktigt för mig att kunna hantera relationerna mellan olika ramar och matematikinnehållet i kommunikationen. För det ändamålet är det lämpligt att se lärandeprocessen som en funktion uppbyggd av konstanter, parametrar och variabler. Denna lärandefunktion avbildar undervisningens kunskapsmål (funktionens definitionsmängd) på elevernas kunnande (funktionens värdemängd).

- Funktionens definitionsmängd utgör alltså de syften och mål som ställts för undervisningen, alltså de kunskaper och attityder som läraren skall bidra till att ”avbilda” i elevernas kunnande.
- Funktionens konstanter är undervisningens fasta ramar. Med dem menar jag i första hand skolans organisation, timplaner och resurser, men också lärarens professionella kunnande och elevernas aktuella förkunskaper. Dessa ramar är föränderliga på längre sikt men får betraktas som för tillfället konstanta vid det tillfället, när den aktuella lektionen detaljplaneras.
- Utöver de fasta ramarna, som läraren inte kan påverka, finns det också ett antal ramar som läraren kan påverka inför en lektion, rörliga ramar. Dessa utgör funktionens parametrar. Som exempel på parametrar kan nämnas val av arbetssätt, arbetsform, visst undervisningsmaterial, val av metaforer etc. Dessa parametrar kan förändras från lektion till lektion men är i allmänhet konstanta när lektionen väl tagit sin början.
- Utgående från nämnda konstanter och parametrar har läraren en viss frihet att utforma sin kommunikation med eleverna. Det är lärarens undervisande drag, alltså förklaringar och användning av metaforer och undervisningsmaterial, som utgör variablerna i lärandefunktionen.

- Resultatet av lektionen är de avtryck lärandefunktionen gör i respektive elevs matematiska kunnande och attityder till ämnet. Detta är funktionens *värdemängd*.



Man kan s[illegible]ktionen bes[illegible]d mening. Samtidigt är det [illegible] viktigt att kunna särskilja olika innehåll och olika aktörer i detta lärande. Det finns en organisatör/regissör av lärandet (a facilitator), det finns en eller flera lärande, och det sker en kommunikation som möjliggör intellektuella möten mellan organisatör/regissör och de lärande. Observera att funktionen beskriver lärarens roll vad gäller att möjliggöra för eleverna att nå uppställda mål. Att funktionen är riktad från syften och mål till elevkunskaper får givetvis inte tolkas som att kommunikationen är en envägskommunikation. Syftet med skolans matematikundervisning är emellertid att eleverna skall tillägna sig skolans mål. Den omvända tanken, dvs. att elevernas aktuella kunskaper skulle ge upphov till (avbildas på) undervisningens mål saknar verklighetsförankring.

6 Matematikläraren och ämnet

Som Niss (1994) påpekar lär sig inte eleverna matematik av sig själva. ”Läraren har en nyckelroll genom att i sista hand bestämma innehåll och uppläggning av matematikundervisningen i skolan.” (Skolverket, 2003b, s. 8). Det är därför viktigt att lärarens ämneskunskaper är relevanta med avseende på undervisningens innehåll. Det här kapitlet ägnas åt ämnesinnehållet i undervisningsprocessen, alltså vad forskningen säger om det matematikinnehåll som lärare kommunicerar med sina elever. Kapitlet inleds med en beskrivning av ämnesinnehållets roll i ramfaktorteorin och avslutas med vad jag menar med att ta lärarperspektiv på ämnesinnehållet.

6.1 Vikten av undervisningsmål

I Dahllöfs (1971) ramfaktormodell för utvärdering analyserar han en kedja av faktorer bestående av undervisningens mål, undervisningens ramar, undervisningsprocessen och undervisningens resultat. Vad han därvid studerar är hur dessa olika faktorer interagerar, alltså vad som händer på vägen från mål till resultat. Jag har i föregående kapitel betraktat två av dessa faktorer, målen för undervisningen och undervisningens ramar.

Anledningen till att man gör en utvärdering enligt Dahllöfs modell kan vara att man inte är nöjd med undervisningens resultat, alltså med undervisningens resultat i relation till de uppställda målen. Jag inleder med ett kort avsnitt om detta innan jag går över till att behandla aktuell forskning om de innehållsrelaterade förutsättningarna för undervisningsprocessen.

Vid en kvalitetsgranskning av svensk matematikundervisning framhålls följande:

> Kunnande i och om matematik för alla är alltså mer än någonsin välmotiverat, både ur samhällets perspektiv och ur den enskilde medborgarens. Matematikundervisningen skall idag lägga grunden för privat- och yrkesliv, för vidare studier och livslångt lärande. (Skolverket, 2003b, s. 7)

För gymnasieskolans del ges följande tillägg:

> Med utgångspunkt i att eleven skall bredda och fördjupa de kunskaper eleven uppnått i grundskolan är utbildningens syfte
>
> att ge kunskaper i matematik för studier inom vald studieinriktning och för fortsatta studier
>
> att ge eleverna förmåga att kommunicera med matematikens språk och symboler och

> att eleven skall kunna analysera, kritiskt bedöma och lösa problem för att självständigt ta ställning i frågor, som är viktiga både för dem själva och samhället, som till exempel etiska frågor och miljöfrågor. (s. 8f)

Att målen inte alltid uppnås i grundskolan framgår av den statistik över resultaten på nationella proven som presenterats i avsnitt 2.3. En liknande beskrivning finns i rapporten *Hög tid för matematik* (NCM, 2001). Där visar man också på att elever som tidigare blivit godkända i grundskolan och kommit in på ett gymnasieprogram inte blir godkända på A-kursen.

> Jämfört med föregående prov på A-kursen och B-kursen så är resultaten för vårterminen 2000 avsevärt sämre. … På A-kursprovet är andelen IG högre än 60% på sju av gymnasieskolans program. (s. 55)

För att finna en möjlig förklaring till att så många elever inte når målen studerar jag hur lärare kommunicerar ett matematikinnehåll med sina elever. En bidragande orsak kan möjligen vara bristen på en matematikdidaktisk teori för undervisning. Som ett led i att utreda detta undersöker jag vad som tidigare har gjorts inom detta område.

6.2 Lärares behov av matematikkunskaper

En vanlig föreställning är att den som är en duktig matematiker därmed också är en duktig lärare i matematik. Detta var kanske ett hållbart argument för 50 år sedan på realskolan och den gamla gymnasieskolan där man undervisade ett mycket selekterat urval av elever och där målen var helt annorlunda än dagens. Idag finns det anledning att ifrågasätta denna föreställning. Elevernas problem är ju enligt tidigare refererade utvärderingar särskilt stora inom gymnasieskolans relativt enkla A-kurs, detta trots att gymnasielärarna i allmänhet har betydligt djupare akademiska matematikkunskaper än lärare på grundskolan. För att undvika missuppfattningar vill jag, innan jag går vidare, understryka att jag inte ifrågasätter nödvändigheten av goda matematikkunskaper för en lärare som undervisar i matematik på gymnasiet. Det jag menar är att detta inte är tillräckligt. Det behövs också andra kunskaper för att genomföra de förändringar för såväl grundskolan som gymnasieskolan som föreslås i sammanfattningen till *Lusten att lära* (Skolverket, 2003b):

> Sammanfattningsvis kan enligt granskningsresultaten, utbildningens kvalitet förbättras genom att den i högre grad karakteriseras av följande:
>
> Mer varierande undervisning …
>
> Ett relevant och begripligt innehåll…
>
> Varierat arbetssätt…
>
> En minskning av lärobokens närmast totala dominans…

> Gemensamma samtal som utvecklar begreppsförståelse …
>
> Ämnesövergripande samarbete …
>
> Allsidig utvärdering …
>
> Adekvat återkoppling …
>
> Tydliga mål…
>
> Större möjligheter för eleverna till inflytande och påverkan av studierna. (s. 40)

Att lärarens kunnande är en viktig faktor för elevernas framgång har beskrivits av Gustafsson och Myrberg (2002) i en forskningsöversikt. De menar till och med att lärarkompetensen är den faktor som har störst betydelse för elevernas resultat. De skriver bland annat:

> Byrne (1993; refererad i Darling-Hammond, 1999) har inventerat studier där samband studerats mellan lärares ämneskunskaper och elevresultat. Av ett trettiotal undersökningar visade 17 på ett positivt samband, medan 14 studier inte visade på något samband. (s. 124)

Det kan finnas olika förklaringar till att detta samband inte är mer entydigt. Darling-Hammond (1999) framför emellertid, enligt Gustafsson och Myrberg, hypotesen att

> Anledningen till de blandade resultaten kan vara att ämneskunskaper är betydelsefulla upp till en viss nivå, men inte betyder så mycket ovanför denna nivå. Denna hypotes får stöd av Monk (1994) som fann att omfattningen av lärares ämnesutbildning i terminer av antal universitetskurser har ett positivt samband med elevresultat inom matematik och naturvetenskap, men också att sambandet var krökt, med avtagande betydelse ovanför en viss nivå av utbildning. (s. 124)

Det framgår inte av forskningsöversikten vilka årskurser som avses eller vad som menas med ämnesteori. En rimlig hypotes skulle kunna vara att såväl behovet av, som typen av, ämneskunskaper är olika beroende på elevernas ålder och utbildningens mål.

Sedan Gustafsson och Myrberg beskrivit ämneskunskapernas betydelse pekar man på sambandet mellan pedagogisk/didaktisk utbildning och elevresultat. Man beskriver bland annat en undersökning utförd av Ferguson och Womack (1993) som omfattar 200 nyutbildade lärare.

> Resultaten visade att den pedagogiska utbildningens omfattning förklarade betydligt mer av variansen i kriterievariablerna än ämneskunskaperna. … Goda ämneskunskaper är inte tillräckligt, det krävs också att lärare har en bred kompetens när det gäller olika undervisningsmetoder. (s. 125)

Frågan är i vilken utsträckning någon samordning mellan undervisningsmetoder och ämneskunskaper hade skett i de ovan beskrivna fallen och vilken betydelse detta haft för resultatet. Den här typen av frågeställningar blir allt vanligare bland dagens matematikdidaktiker. En forskare som ställer sådana frågor är Ma (1999). Hon hänvisar därvid till den forskning som har utförts av bland andra Ball och Leinhardt och som ifrågasätter de matematikkunskaper som traditionellt har erbjudits lärarstuderande. Hon påpekar samtidigt att det inom forskningen numera sker en omvärdering av lärarnas behov av matematikkunskaper från traditionella matematikkunskaper till sådana kunskaper som en lärare kan omsätta i undervisningen.

> As Ed Begle recounts in *Critical Variables in Mathematics Education*, earlier studies often measured elementary and secondary school teachers' knowledge by the number and type of mathematics courses taken or degrees obtained - and found little correlation between these measures of teacher knowledge and various measures of student learning.
>
> Since the late 1980s, researchers have been concerned with teachers' mathematical subject matter knowledge for teaching (Ball 1988b) ”the knowledge that a teacher needs to have or uses in the course of teaching a particular school level curriculum in mathematics”, rather than ”the knowledge of advanced topics that a matematician might have” (Leinhardt et al., 1991, p. 88). (s. xx, xxi)

Vad som också förbryllar Ma är att man, trots alla undersökningar om bristande ämneskunskaper bland amerikanska lärare, inte gett dem något stöd vad gäller att förbättra dessa kunskaper.

> Studies of teacher knowledge abound in examples of insufficient subject matter knowledge in mathematics (Ball 1988a; Cohen, 1991; Leinhardt & Smith, 1985; Putman, 1992; Simon, 1993), but give few examples of the knowledge teachers need to support their teaching, particulary the kind of teaching demanded by recent reforms in mathematics education. (s. xxii)

Innan man kräver goda ämneskunskaper av lärare bör man tydligen ställa frågan *vilka ämneskunskaper* som krävs för att bli en god lärare. Dessa kunskaper torde för övrigt variera en hel del med åldern på de elever läraren undervisar och med målet för undervisningen. I linje med den nämnda internationella forskningen beskriver examensordningen för lärarexamen (Högskoleförordningen, 1993) att studenten skall kunna ”omsätta goda och relevanta kunskaper i ämnen eller ämnesområden så att alla elever lär och utvecklas”. Jag ägnar nu de närmast följande avsnitten åt att belysa lärares behov av ämnesrelaterade yrkeskunskaper.

6.3 Matematiklärare i USA och Kina – kulturella skillnader

I kapitel 4 har jag beskrivit hur didaktikbegreppet utvecklades i Sverige under 1980-talet. Jag skall nu fördjupa mig i matematikämnets didaktik i ett internationellt perspektiv. Ma (1999) visar på skillnaderna mellan matematik som akademisk disciplin och matematik som professionell kunskap för läraryrket. Hon har tidigare varit verksam som lärare i Kina.

När hon kom till USA och observerade hur amerikanska matematiklärare undervisade fick hon något av en kulturchock. Hur kunde det komma sig att till och med erfarna lärare, med god utbildning, verkade ha begränsade kunskaper om den matematik de undervisade om i skolan. Medan amerikanska lärare i första hand syntes vara fixerade vid frågan hur, menar hon, är de kinesiska lärarna betydligt mer intresserad av frågan vad innebär. Så här skriver Ma:

> The more I saw of elementary mathematics teaching and research in the United States the more intrigued I became. Even expert teachers, experienced teachers who where mathematically confident, and teachers who actively participated in current mathematics teaching reform did not seem to have a thorough knowledge of the mathematics taught in elementary school. (s. xix)

Hur, frågar hon sig, kan detta vara möjligt? En kinesisk lärare har i allmänhet inte gått på någon ”high school” utan har endast fått två eller tre års utbildning efter skolår 9. Hur kan de mot denna bakgrund ha en bättre förståelse för skolans matematik än amerikanska lärare som oftast har en ”bachelors’ degree”? Svaret på frågan är, enligt Ma, att kinesiska och amerikanska lärare har olika typer av kunskap. Hon tar som exempel på detta, resultatet av intervjuer om division som hon gjort både i Kina och USA.

> For example my elementary school teacher’s knowledge of the two models of division may not be common among high school or college teachers. This kind of knowledge of school mathematics may contribute significantly to what Shulman (1986) called pedagogical content knowledge – ”the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others” (p. 9). (s. xx)

Det är viktigt att notera att Ma inte värderar de kinesiska eller amerikanska lärarnas matematikkunskaper generellt sett, utan enbart de kunskaper som möjliggör en djupare kommunikation om matematik med skolelever. Den lösning hon ser på problemet ligger i Shulmans (1986, 1987) *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Två års undersökningar gav enligt Ma (1999) följande intressanta resultat:

> I found that although U. S. teachers may have been exposed to more advanced mathematics during their high school or college education, Chinese teachers display a more comprehensive knowledge of the mathematics taught in elementary school. (s. xx)
>
> In concluding, I would like to return to my original concern about mathematics education of children in the United States. Having considered teachers’ knowledge of school mathematics in depth, I suggest that to improve mathematics education for students, an important action that should be taken is improving the quality of their teachers’ knowledge of school mathematics. (s. 144)

En viktig fråga är vad som menas med *school mathematics*, och vad en sådan kunskap innehåller. Skolans matematik ger ju ett intryck av att vara så enkel att vem som helst behärskar den. Detta är enligt Ma inte fallet, tvärtom.

> Elementary mathematics is not superficial at all, and any one who teaches it has to study it hard in order to understand it in a comprehensive way. (s. 146)

Hon fortsätter.

> As we saw in the previous chapter, a teacher's subject matter knowledge of school mathematics is a product of the interaction between mathematical competence and concern about teaching and learning mathematics. The quality of the interaction depends on the quality of each component. (s. 146)

Det Ma skriver är att en lärare behöver betydligt mer kunskaper än enbart eget matematiskt kunnande. En viktig uppgift inom matematikdidaktiken är att kartlägga vad som innefattas i detta kunnande.

6.4 Pedagogical Content Knowledge

När det gäller kravet på matematikkunskaper för skolbruk, går Ball och Bass (2000) betydligt längre än Ma. I artikeln *Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Matematics* utvecklar de sin syn på följande sätt med hänvisning till Dewey.

> On the one hand, to what extent does teaching – and hence learning to teach – depend on the development of knowledge of the subject matter? On the other, to what extent does it rely on the development of pedagogical method? … Subject matter he believed, was the embodiment of the mind, the product of human curiosity, and the search for truth. Teachers who were accustomed to view subject matter from the perspective of its growth and development would be prepared to notice nascent intellectual activity in learners. Such individuals would know subject matter in ways that prepared them to hear and extend students' thinking. To do this, he argued, teachers would need to be able to study subject matter in ways that took it back to its ”psychical roots” (p. 162). (s. 85)

Ball och Bass menar således att läraren behöver kunna mycket mer än just teorin för vad man undervisar om. Läraren måste också behärska teorier för hur dessa kunskaper grundläggs och utvecklas hos barn. Hur skall läraren annars kunna utgå från olika elevers förförståelse för att utveckla deras individuella tänkande? Det krävs mycket mer.

> … most people assume that what the teachers need to know is what they teach. Many would also add to the list, arguing that teachers must know more in order to have a broad perspective on where the students are heading. Nothing is inherently wrong with this perspective. However, to assume that this suffices is to assume

> that the enactment of the curriculum relies on no other mathematical understanding or perspective.
>
> Furthermore the use of mathematical knowledge in teaching is often taken for granted. The mathematical problems teacher confront in their daily work …are left unexplored, the occasions that require mathematical sensitivity and insight unprobed. Hence the content and nature of the mathematical knowledge needed in practice is unsuffiently understood. Moreover, the role played by such knowledge is also left unexamined. (s. 86f)

Vad Ball och Bass förespråkar är en ämnesteori för lärare, som de kallar Pedagogical Content Knowledge, PCK, och som inte bara tar hänsyn till den matematiska strukturen i det som skall läras, utan väver samman denna med inlärningspsykologi. Det handlar alltså om en teori för lärare som beskriver hur det går till när en elev konstruerar en viss kunskap. De menar också att en lärarutbildning där en matematikteori och en pedagogik/inlärningspsykologi lever var sitt liv inte leder till en professionell lärarkunskap. Under utbildningen förmår den lärarstuderande inte själv knyta samman de här delarna till en helhet och många av dem lyckas i själva verket aldrig ta detta avgörande steg.

> The overarching problem across these many examples is that the prevalent conceptualization and organization of teachers' learning tend to splinter practice and leave to individual teachers the challenge of integrating subject matter knowledge and pedagogy in the contexts of their work. We assume that the integration required to teach is simple and happens in course of the experience. In fact, however, this does not happen easily, and often not happens at all. (s. 86)

Ball och Bass menar att läraren dagligen ställs inför en rad viktiga beslutssituationer som kräver en teori för matematikundervisning. Det kan gälla frågor som om lärobokens framställning är den bästa på längre sikt, om hur man kan använda olika laborativa material eller vad det finns för olika modeller för att förklara division eller procentbegreppet. Det de menar är, att den lärare som saknar teorikunskaper av det här slaget inte kan fatta egna beslut utan blir helt beroende av ett läromedel, ett problem som lyfts fram i en rad svenska utvärderingar av matematikundervisningen (NCM, 2001; Madsén, 2002; Skolverket, 2003b). Ball och Bass (2000) skriver så här:

> Teachers also need to puzzle about the mathematics in a student's idea, analyze a textbook presentation, consider the relative value of two different representations in the face of a particular mathematical issue. To do this, we argue, requires a kind of mathematical understanding that is pedagogically useful and ready, not bundled in advance with other considerations of students or learning or pedagogy. (s. 88)

Den kunskap som krävs för att en lärare skall behärska de situationer som dyker upp i undervisningen kallar alltså Ball och Bass för PCK. Jag föredrar att kalla det för en matematikdidaktisk teori för matematikundervisning (Löwing, 2002). En sådan teori beskriver hur barn, istället för att tvingas acceptera färdiga formler och modeller, kan bygga upp ett (såväl i vardagslivet som i olika typer av utbildning användbart) matematiskt vetande utgående från sina förkunskaper och sin förmåga. Ball och Bass (2000) preciserar detta på följande sätt.

> Pedagogical content knowledge is a special form of knowledge that bundles mathematical knowledge with knowledge of learners, learning and pedagogy. These bundles offer a crucial recourse for teaching mathematics, for they can help the teacher anticipate what students have trouble learning, and have ready alternative models or explanations to mediate those difficulties. (s. 88)

Ball och Bass menar att det behövs ett speciellt kunnande som väver samman matematik och pedagogik med elevernas förkunskaper och hur inlärning går till. Den matematikdidaktiska forskning som hittills bedrivits har oftast inriktats mot begränsade områden och inte samordnats till helheter kring undervisning. Forskningsresultaten har inte heller nått ut till skolorna (Stigler & Hiebert, 1999).

Även Ma (1999) tar upp liknande frågor under rubriken: *Understand the key to reform*: Hon citerar där i sin tur Ferrini-Munday och Johnson (1994) som menar att ”superficial efforts can pass for change”.

> Mathematics classrooms can *appear* to be quite Standards-oriented, with calculators in evidence, students working in groups, manipulatives available, and interesting problems under discussion” (p.191), but investigators need a deeper understanding of what is happening in these classrooms. (s. 151)

Är det kanske så att lärare inte alltid uppfattar det fulla syftet med olika förändringar men känner ett tryck på sig att vara progressiva? Detta skulle i så fall leda till att de tillämpar den nya metoden eller arbetssättet på ett procedurellt sätt utan djupare insikt. Det som var avsett att leda till ett steg framåt i utvecklingen blir därför snarare ett hinder som stannar upp eller till och med försvårar ett avsett lärande.

6.5 Matematikundervisning och lärarkompetens

Under de senaste åren har det givits ut två antologier som behandlar matematikundervisning och lärarkompetens. Den ena är framtagen på nationellt uppdrag i USA, Kilpatrick m.fl. (2001) och den andra på danskt nationellt uppdrag, Niss & Højgaard Jensen (2002). Här beskrivs såväl elevernas förväntade matematikkunnande som den kompetens som läraren behöver för att hjälpa eleverna att nå detta kunnande.

I inledningen till *Adding it up* (Kilpatrick m.fl., 2001) redovisas en bakgrund till varför boken skrivits. Man lyfter därvid fram de konflikter som uppstått inom skolmatematiken som en följd av upprepade reformer men som tyvärr inte fört skolmatematiken framåt. Bakgrunden är således den som beskrivs av Stevenson och Stigler (1994), Stigler och Hiebert (1999) och Ma (1999). Vad jag förstår så är situationen på många sätt lik den i Sverige.

> In this report, we have attempted to address the conflicts in current proposals for changing school mathematics by giving a more rounded portrayal of the mathematics children need to learn, how they learn it, and how it might be taught to them effectively. In coming up with this portrayal, we have drawn on the research literature as well as our experience and judgement (Kilpatrick mfl, 1999, s. xiv)

I Kilpatrick m.fl. (2001) har ambitionen varit att synliggöra, och samtidigt göra en syntes av, relevant forskning om matematikdidaktik i avsikt att möjliggöra en utveckling av matematikkunnandet för alla elever. Man vänder sig mot den passiva roll som många av dagens lärare tagit i klassrummet. På den punkten finner jag stora likheter med vad Madsén (2002) och Eliasson (2002) skriver om svensk skola och svenska lärare. Så här beskriver Kilpatrick m.fl. (2001) detta, utgående från en grundsyn som präglar framställningen i hela boken:

> Effective teachers have high expectations for their students, motivate them to value learning activities, can interact with students with different abilities and backgrounds, and can establish communities of learners. A teacher's expectations about students and the mathematics they are able to learn can powerfully influence the tasks the teachers poses for the students, the questions they are asked, the time they have to respond, and the encouragement they are given - in other words, their opportunities and motivation for learning. (s. 9)

I boken beskrivs vilka mål lärare skall hjälpa eleverna att uppnå och detta sammanfattas i fem punkter. Bland dessa punkter återfinns ”procedural fluency” alltså förmåga att effektivt, korrekt och med flyt kunna genomföra nödvändiga beräkningar, till exempel vid problemlösning, något som allt mera fått stå tillbaka för andra prioriteringar i svensk matematikundervisning.

> Mathematical proficiency, as we see it, has five components, or strands:
>
> - conceptual understanding – comprehension of mathematical concepts, operations and relations
> - procedural fluency – skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately
> - strategic competence – ability to formulate, represent, and solve mathematical problems
> - adaptive reasoning – capacity for logical thought, reflections, explanations, and justification

> - productive disposition – habitual inclination to see mathematics as sensible, useful and worthwhile, coupled with a belief in diligence and one´s own efficacy.
>
> …The five strands are interwoven and interdependent in the development of proficiency in mathematics. (s. 116)

De två sista raderna i citatet är särskilt intressanta. I en hel del metodisk litteratur är den här typen av punkter, ofta isolerade från varandra. Här framhålls däremot vikten av att dessa fem aspekter vävs samman för att bilda en helhet.

För en lärare är det inte tillräckligt att behärska samma kunskaper och färdigheter som eleverna. Kilpatrick m.fl. går därför ett steg längre och beskriver vilket kunnande som krävs av läraren för att denne skall kunna bygga upp ett lärarperspektiv kring de fem punkterna. Det ges i boken också exempel på hur det kan gå till när läraren skall omsätta de här fem målen i sin undervisning och hur resultatet av denna undervisning kan utvärderas.

Kilpatrick m.fl. (2001) tar även upp vissa ramfaktorers betydelse för undervisningen, såsom hur läraren i sin planering är beroende av beslut som fattas inom andra instanser i skolsystemet, alltså av det jag kallar för fasta ramar. De påpekar också vikten av att göra en långsiktig planering för att ge undervisningen och innehållet en struktur och en kontinuitet ur elevernas synvinkel och inte enbart att göra en rutinartad planering lektion för lektion.

> What is learned depends on what is taught. Choosing the content, deciding how to present it, and determining how much time to allocate to it are ways in which learning is affected by how the teacher interacts with the content. Furthermore some decisions about the content are made not at the classroom level but at the school, district, or even state levels. (s. 333)
>
> Given that the learning of mathematics develops interactively over time, effective teachers understand that teaching requires considerable efforts at design. Such design is often termed planning, which many teachers think of as a core routine of teaching. (s. 337)

Det jag speciellt har fäst mig vid i den här boken är alltså att de fem målen ovan inte ses som isolerade från varandra utan som intimt sammanlänkade. Det räcker till exempel inte med att läraren själv behärskar den matematik hon undervisar. Hon måste även känna till elevernas förkunskaper och hur elever lär. Men inte heller detta räcker, målen måste kunna förenas i en praktisk undervisningssituation och för att nå det målet måste denna syn på matematikkunnande genomsyra lärarutbildning och lärarfortbildning.

> It is not enough, however, for mathematical knowledge and knowledge of students to be connected; both need to be connected to classroom practice. Teachers may know mathematics, and they may know their students and how they learn. But they also have to know how to use both kinds of knowledge effectively in context of their work if they are to help their students develop mathematical proficiency. (s. 381)
>
> Perhaps the central goal of all the teacher preparation and professional development programs is in helping teachers understand the mathematics they teach, how their students learn that mathematic, and how to facilitate that learning. (s. 389)

Den här synen på matematikundervisning och matematiklärares professionella kunnande påminner mycket om Pedagogical Content Knowledge såsom det framställs av bland andra Ball och Bass (2000) utgående från Shulman (1986, 1987). Kilpatrick m.fl. (2001) skriver vidare:

> Although teachers may understand the mathematics they teach in only a superficial way, simply talking more of the standard college mathematics courses does not appear to help matters. … For example, a study of prospective secondary mathematics teachers at three major institutions showed that, although they had completed the upper-division college mathematics courses required for the mathematics major, they had only a cursory understanding of the concepts underlying elementary mathematics. The mathematics of the elementary and middle school curriculum is not trivial, and the underlying concepts and structures are worthy of serious, sustained study by teachers. … This sort of attention to teachers' mathematical knowledge and its central role in practice is crucial to ensure that their study of mathematics provides teachers with mathematical knowledge useful to teaching well. (s. 373)

I likhet med Ma (1999) understryker Kilpatrick m.fl. (2001) således att den matematik som undervisas på lägre stadier inte är trivial och att den inte direkt låter sig härledas från mer avancerade kurser i matematik. De pekar också på risken med lärare som själva inte har tillägnat sig en tillräcklig god konceptuell kunskap inom området. Sådana lärare kan givetvis inte förmedla en konceptuell syn på ämnet till eleverna.

> In general, the researchers found that teachers with a relatively weak conceptual knowledge of mathematics tended to demonstrate a procedure and then give students opportunities to practice it. Not surprisingly, these teachers gave the students little assistance in developing an understanding of what they were doing. (Ball 1991, Leinhart and Smith, 1985). (s.377)

För att använda terminologin från Utbult (1993) är alltså matematikämnets didaktik inte ett multivetenskapligt område där ämnena matematik och pedagogik ger tillskott oberoende av varandra. Det är inte heller ett tvärvetenskapligt område där matematik och pedagogik förenas. Det är istället en egen disciplin med egna teorier och en egen terminologi, men där man tar tillvara viktiga kunskaper från ämnena matematik och pedagogik. Kilptrick m.fl. (2000) utvecklar detta så här:

> Teaching is a complex activity and, like other complex activities, can be conceived in terms of similar components. Just as mathematical proficiency itself involves interwoven strands, teaching for mathematical proficiency requires similar interrelated components. (s. 380)
>
> The kind of knowledge that make a difference in teaching practice and in students´ learning are an elaborated, integrated knowledge of mathematics, a knowledge of how students' mathematical understanding develops, and a repertoire of pedagogical practices that take into account the mathematics being taught and how students learn it. The implication for teacher preparation and professional development are that teachers need to acquire these forms of knowledge in ways that forge connections between them. For teachers who have already achieved some mathematical proficiency, separate courses or professional development programs that focus exclusively on mathematics, on the psychology of learning, or on methods of teaching provide limited opportunities to make these connections. (s. 381)

Tyvärr, skriver författarna efter detta, ser de flesta lärarutbildningskurser vid universiteten inte ut som de borde göra, utan följer snarare den tradition som kritiseras i citatet.

I boken *Kompetencer og matematiklæring* (Niss & Højgaard Jensen, 2002) behandlas i stort sett samma problematik som i Kilpatrick m.fl. (2001). En skillnad är emellertid att de exempel som ges av Niss och Højgaard Jensen är mer inriktade mot gymnasieskolan medan Kilpatrick m.fl. ger exempel på hur man undervisar yngre barn. Medan Kilpatrick m.fl. beskriver matematikkompetens i form av fem punkter utgår Niss och Højgaard Jensen. från en kombination av åtta och två punkter. Men först definierar Niss och Højgaard Jensen (2002) vad som menas med matematikkompetens.

> … *matematisk kompetence* består i at have viden om, att forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til att indgå. Dette implicerer naturligtvis en mangfoldighet af konkret viden nog konkrete færdigheder inden for diverse matematiske områder, men matematisk kompetence kan ikke, jf. det foregående, reduceres til disse forudsætninger. (s. 43)

Enligt Niss och Højgaard Jensen finns det två grupper av matematikkompetenser.

> De otte kompetencer er inddelt i to grupper, som kaldes *at kunne spørge og svare i og med matematik*, som rummer de første fire kompetencer, og *at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber,* som utgøres af de fire resterende kompetencer. (s. 44)

Den första av de nämnda grupperna består av tankegangskompetence, problembehandlingskompetence, modelleringskompetence och ræsonnementskompetence. Den andra gruppen består av ræpresentations-kompetence, symbol- og formalismekompetence, kommunikationskompetence och hjælpmiddelkompetence. Samtidigt påpekar författarna emellertid att man inte får uppfatta dessa två grupper av kompetenser som åtskilda från varandra. Tvärtom samverkar de till att skapa en helhet.

Niss och Højgaard Jensen beskriver därefter de ”didaktiske og pædagogiske kompetencer”, alltså vad lärare behöver behärska utöver de åtta kompetenserna.

> En god laerare besidder en mangfoldighed af almene laererkompetencer. En god matematiklærer, besidder tillige, uanset undervisningstrin, en raekke specifikke matematikdidaktiske og – pædagogiske kompetencer.
>
> …
>
> Uddannelsen af matematiklærere har til opgave at udstyre dem med folgende didaktiske og pædagogiske kompetencer, som karakteriseres i de folgende afsnit:
>
> - Læseplanskompetence
> - Undervisningskompetence
> - Læringsafdækningskompetence
> - Evalueringskompetence
> - Samarbejdeskompetence
> - Professionell udviklingskompetence. (s. 77)

En jämförelse mellan Niss och Højgaard Jensen och Kilpatrick m.fl. visar att den förstnämnda boken uppvisar en formell och tvärvetenskaplig syn på didaktik medan den andra boken strävar efter att beskriva en ny disciplin som har assimilerat didaktikens hjälpvetenskaper genom det författarna kallar PCK.

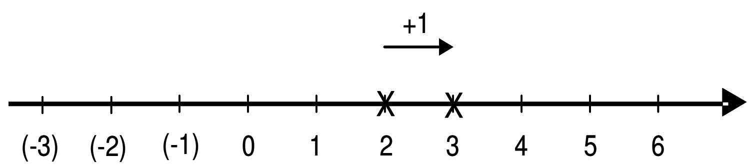
6.6 En matematikdidaktisk teori

I examensordningen för lärarutbildningen (Högskoleförordningen, 1993) skriver man att de blivande lärarna ”skall kunna omsätta goda och relevanta kunskaper i ämnen eller ämnesområden så att alla elever lär och utvecklas”. Detta är enligt min uppfattning grundbulten i den matematikdidaktiska teori för undervisning som jag beskrivit i kap 4. Här följer ytterligare ett exempel på vad en sådan teori kan innehålla.

Exemplet handlar om subtraktion av negativa tal. När jag själv gick i skolan uppfattade jag detta som en enkel procedur. Jag använde bara regeln att lika tecken ger plus och olika tecken minus. Detta innebar att en operation som $a - (-b)$ direkt kunde skrivas om som $a + b$. När jag senare i livet, som lärare, skulle förklara varför det förhåller sig så, gav samma operation upphov till stora problem. Ett av skälen var att de två minustecknen i subtraktionen har helt olika betydelse. Det ena tecknet står för en subtraktion, det andra för att notera ett negativt tal. Efter att ha läst Kilborn (1979b) upptäckte jag emellertid att den här operationen går att förklara för elever i grundskolan. Det är i själva verket en fråga om att se matematiken bakom de grundläggande räkneoperationerna. Så här har jag beskrivit lösningen på detta problem (Löwing, 2002, s.102ff).

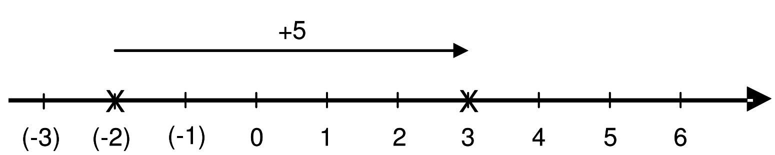
För att undvika de ovan beskrivna problemen föreslår Kilborn (1990) följande modell för subtraktion av negativa tal och utgår därvid från att subtraktion kan anta flera olika ansikten. När man i en vardagssituation söker svaret på uppgiften 3 – 2 är det inte alltid frågan att dra 2 från 3. Det är lika troligt att man avser differensen mellan 2 och 3, till exempel hur mycket som fattas om man har 2 kr och behöver 3 kr.

Det här betyder att en subtraktion som 3 – 2 kan tolkas så här, nämligen som avståndet från 2 till 3 på tallinjen

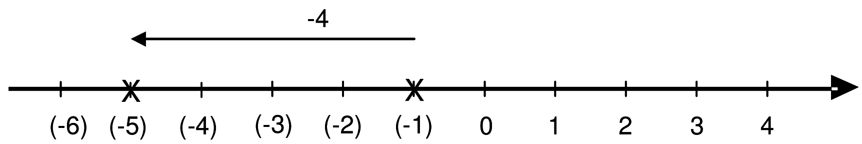


Svaret är pilen 1. Det här är en operation som brukar förekomma redan under skolår 1. Man beskriver då ofta subtraktioner som 3 – 2 med hjälp av en öppen additionsutsaga 2 + __ = 3. Det betyder att en sådan här operation inte är ny för eleverna om de haft en förutseende lärare under skolår 1. Detta visar samtidigt på vikten av kontinuitet i undervisningen, något som måste vara en röd tråd i en ämnesdidaktisk teori.

Nu använder Kilborn samma strategi för att lösa en mer komplicerad uppgift som 3 – (-2). Man kan nu återigen fråga efter differensen (avståndet) mellan de två talen på tallinjen. Lösningen är alltså det tal (den pil på tallinjen) som man skall addera till (-2) för att få (komma till) 3. Observera att det är så här man i själva verket gör när man i vardagssammanhang skall bestämma temperaturskillnader på en termometer.

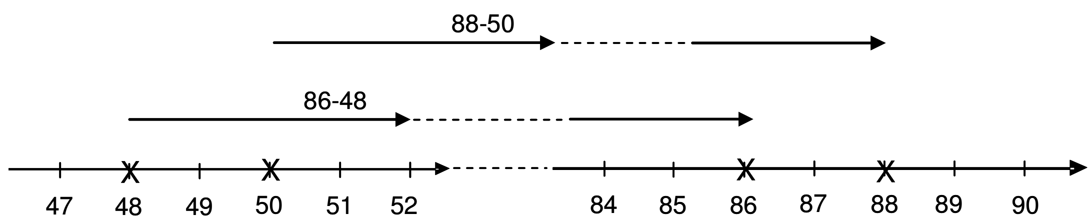


Eftersom pilen (förflyttningen från (-2) till 3) är 5 enheter lång och riktad åt höger så är differensen 3 – (-2) = 5. På motsvarande sätt kan subtraktionen (- 5) – (-1) illustreras som det tal (den pil) man skall addera till (-1) för att få (komma till) (-5). Detta är en operation som svarar mot den öppna additionsutsagan (-1) + __ = (-5).

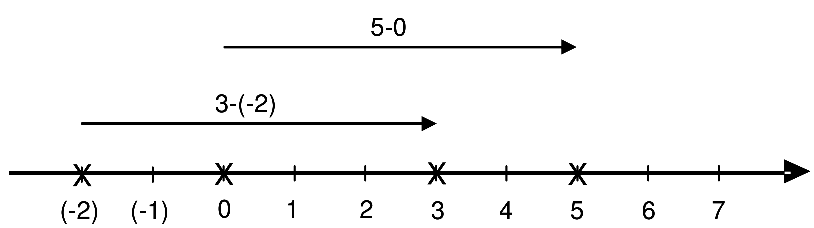


Den här pilen svarar mot talet (-4). Således är (-1) + (-4) = (-5) vilket är ekvivalent med att (-5) – (-1) = (-4).

För den som behärskar en matematikdidaktisk teori finns det ännu fler möjligheter. När man utför en subtraktion som 3 – (-2) kan man till exempel använda en metod som är vanlig när man skall utföra subtraktioner som 86 – 48 i huvudet. Genom att addera samma tal, i det här fallet talet 2, till båda termerna så får man 88 – 50, dvs. en subtraktionen som är betydligt enklare att hantera i huvudet än den förgående. (Se vidare i Löwing & Kilborn 2003.) Vad som händer kan lätt illustreras på tallinjen. Man flyttar (transformerar) bara hela operationen 86 – 48 två steg åt höger, medan differensen blir densamma.



Subtraktionen 3 – (-2) kan utföras med exakt samma teknik genom att man adderar 2 till båda termerna. Man får då den betydligt enklare subtraktionen (3 + 2) – [(-2) + 2] = 5 – 0.



Vad Kilborn hela tiden understryker är vikten av att man vid konkretisering söker den underliggande algebraiska strukturen och försöker förklara den. Han understryker också vikten av att de strategier som används under tidigare skolår skall ha en sådan kvalitet att de låter sig användas (direkt eller efter en modifiering) även under senare skolår.

6.7 Lärarperspektiv på innehållet

Det räcker inte med att läraren behärskar ett ämnesinnehåll för att undervisningen skall fungera. Läraren är arbetsledare för en grupp individer (se till exempel Madsén, 2002) som alla har olika förutsättningar för att studera matematik. En del elever är intresserade och har goda förkunskaper, andra har låg motivation och sämre förkunskaper. Alla har också olika erfarenheter och olika språklig förmåga. Som lärare har man ansvar för att möta alla dessa elevers behov, vilket ställer stora krav på lärarens professionella kunnande när det gäller att hantera ett matematikinnehåll. Det innebär att:

- läraren först och främst måste kunna ta en annan människas perspektiv. Det räcker inte med att man som lärare själv har förstått något. Man måste alltid reflektera över om det man har förstått också kan förstås på ett annat sätt och vilka förkunskaper och erfarenheter som krävs för att förstå ett innehåll på dessa olika nivåer och sätt.
- läraren måste ha ett språk som fungerar inte bara för att förklara något eller för att lösa ett problem på ett formellt sätt. Språket måste också fungera för att konkretisera och verklighetsanpassa det som skall förklaras. Olika formella och informella termer och uttryck som används måste vara knutna till varandra på ett sådant sätt att det man konkretiserar också, vid behov, kan leda till en formell kunskap.
- läraren, oavsett vilket stadium hon arbetar på, måste känna till såväl innehållet, målen som didaktiken på övriga stadier. Faran med att lärare på olika stadier inte behärskar varandras undervisningsinnehåll, mål och didaktik är att undervisningen blir ”ryckig” för eleverna, ibland även obegriplig. Eleverna får helt enkelt inte den kontinuitet som krävs för att de skall kunna konstruera och strukturera sin kunskap.

Läraren måste också vara medveten om att de kunskaper som behövs för att undervisa omfattar mer än enbart praktik och egna erfarenheter. Det finns hundraåriga erfarenheter av vad som hittills fungerat och inte fungerat vid undervisning. Det finns också mångåriga erfarenheter från forskning kring undervisning och inlärning. Dessa undervisningskunskaper fungerar emellertid inte vid undervisning i matematik utan koppling till en matematikdidaktisk teori (Ball & Bass, 2000).

För en lärare som inte har en relevant teori för ett undervisningsinnehåll att falla tillbaka på, utan hela tiden måste improvisera, kan lektionerna lätt bli till ”happenings”. När en elev ställer en fråga måste läraren först kunna avgöra vad eleven menar med frågan, vilket problem eleven har och därefter momentant fatta viktiga beslut utgående från just den elevens fråga. Läraren måste således i förväg känna till olika möjligheter att utgående från just den här elevens förutsättningar, ge olika förklaringar i anslutning till den ställda frågan. Det innebär att läraren bör känna till hur olika elever brukar tänka och vilka olika sätt det finns att besvara den ställda frågan på ett begripligt sätt. Det som för en lärare verkar vara enkelt och självklart kan för vissa elever vara såväl krångligt som obegripligt. Underlag för ett adekvat agerande i de olika undervisningssituationer som kan uppstå måste finnas i en matematikdidaktisk teori.

7 Språket i matematikundervisningen

Det föregående kapitlet behandlade vilka matematikdidaktiska kunskaper en lärare bör ha. För att dessa kunskaper skall bli användbara i undervisningen krävs det dessutom att de kan kommuniceras. Denna kommunikation är inte helt enkel. Dels gäller det för läraren att använda ett språk som både är korrekt ur en matematisk synvinkel och är uppfattbart av eleverna, dels gäller det att bygga upp en undervisningsmiljö som möjliggör en god kommunikation med alla elever. Om detta skriver Anward (2003) i en artikel om praxisnära forskning:

> Undervisningen är i grunden en textreproducerande verksamhet … Vidare är det läraren som har rätten att avgöra vad som räknas som en riktig återgivning av en viss text. Det klassiska mönstret, som låter läraren styra ordet och relevansen hos det som sägs, är ett ganska optimalt sätt att bedriva en sådan verksamhet på. (s. 8)
>
> Den tillämpade, praxisnära forskningen måste komma tillrätta med sjok av rå språklig verklighet som har en komplexitet som teorin aldrig kunnat drömma om. (s. 11)

Det är denna komplexitet som skall avhandlas i detta kapitel. Kommunikationen i klassrummet följer bestämda regler som ofta är relativt oberoende av det innehåll som kommuniceras. Vidare är det språk som används under en matematiklektion mycket speciellt, med ord och uttryck som har en helt annan precision och betydelse än liknande ord i vardagsspråket. En av lärarens svåraste uppgifter är att med hjälp av konkretisering och metaforer bygga en bro mellan elevernas vardag och detta komplexa innehåll. När läraren står vid en elevs bänk för att hjälpa eleven, måste läraren momentant, både tolka elevens behov av hjälp och finna en lämplig förklaringsmodell och uttrycksform. Detta ställer stora krav på såväl lärarens ämneskunskaper som förmåga att använda att adekvat språk.

7.1 Läraren som katalysator

I boken *Inlärning och omvärldsuppfattning* skriver Marton, Dahlgren, Svensson och Säljö (1987):

> Lärarens främsta funktion är att som någon sorts katalysator gå in här och där, när de egna frågorna saknas och skapa konflikter i det felaktiga resonemang som eleven byggt upp. (s. 138)

Det här är en viktig uppgift för läraren, inte minst vid matematikinlärning. Enligt Skolverket (2003b) verkar emellertid detta sällan ske i praktiken. Istället styrs kommunikation i klassrummet i första hand av ett läromedel. Enligt en rad källor verkar det som om de flesta eleverna i grundskolan oftare kommunicerar med ett läromedel än med sina kamrater eller sin lärare (se till exempel NCM, 2001; Skolverket 2003b; Bentley, 2003).

Även om många lärare i dag har ”abdikerat” från sin gamla lärarroll, och närmast fungerar som en handledare vid elevernas inlärning (Madsén, 2002), är det ändå läraren som sätter normen för det språk som används i klassrummet. Pimm (1987) beskriver detta så här.

> The teacher conventionally acts to a considerable extent as an intermediary and mediator between *pupil and mathematics*, in part by determining the patterns of communication in the classroom, but also by serving as a role model of a ’native speaker’ of mathematics. As a consequence, one thing that pupils are learning from the teacher, then, is the range of accepted ways in which mathematics is to be communicated and discussed. (s. xiii)

Den här kommunikationen följer ofta speciella mönster som Pimm kallar för ”gambits”, ett lån från schackspelets öppningsstrategier. Mönstren syftar inte till att underlätta inlärningen utan snarare till att ge läraren kontroll över kommunikationen, en nog så viktig funktion när läraren kommunicerar med ett stort antal elever samtidigt. Ett vanligt sådant mönster är därvid ”triaden” som beskrivs så här av Zevenbergen (2000)

> One of the most documented patterns of interaction in the classroom is that of ”triadic dialogue” (Lemke 1990). … Triadic dialogue consists of three key parts: the teacher initiates a question to which the students usually know the answer; a student responds; and the teacher then evaluates the student’s response (Mehan, 1982; Sinclair & Coulthard, 1975). (s. 212)

Zevenbergen ger följande exempel:

> Teacher: Here is a diagram of a 3D shape – who can tell me what it is?
> Student: A rectangular shape.
> Teacher: Mmm, almost. John?
> Student: A rectangular cube.
> Teacher: Nearly, you are half right. Margaret?
> Student: A rectangular prism.
> Teacher: Good, that’s it. A rectangular prism. Funny word, isn’t it. (s. 212)

Detta är ett mönster vi känner igen från Lundgren (1972, 1979) som beskriver triaden som ett av de vanligaste inslagen i undervisningen. Enligt hans forskning var 22,3% av alla gambits triader av typen fråga-svar-reaktion. (I Lundgrens arbeten kallas Pimms gambits för pedagogiska cykler som i sin tur uppdelas i drag.) I Lundgrens forskning är även cykler med två drag vanliga. Cykeln fråga-svar står för 15,5% och cykeln fråga-reaktion svarar för 6,7% av antalet cykler. En kommunikation som är uppbyggd på det här sättet tillåter knappast någon djupare diskussion om det innehåll som just avhandlas. Läraren ges få möjligheter att, såsom

Marton m.fl. (1987) beskriver, katalysera och skapa konflikter i felaktiga resonemang

Lundgren (1979) visar också på andra implicita regler för kommunikationen. När han studerar meningarnas uppbyggnad finner han följande skillnader mellan olika aktörer vad gäller antalet ord per mening.

Läraren frågar	7 - 8 ord per mening	
Eleven svarar	3 - 4 ord per mening	
Läraren reagerar	4 - 5 ord per mening	(s. 185)

Även Lundgren konstaterar således att det är läraren som svarar för större delen av kommunikationen. Han summerar därefter reglerna för deltagandet i den språkliga interaktionen i klassrummet:

> Om inte läraren har gett någon ordet, har läraren ordet.
> Om läraren ger ordet till A, har A ordet efter läraren.
> Läraren har ordet så snart en elev avslutat sin mening. (s. 185)

Trots att Lundgrens resultat gäller gymnasieskolan på 1970-talet, känner jag igen de här mönstren från lärares genomgångar i dagens grundskola. Anward (2003) förklarar fenomenet så här:

> Lärarens språkliga arbete går därmed inte bara ut på att ge eleverna utrymme för textreproduktion och att värdera den. Det är också viktigt för läraren att upprätthålla de betingelser under vilket detta sker. (s. 9)

Även Zevenbergen (2000) menar att mönster av det här slaget, till exempel triaden, är viktiga instrument för läraren när det gället att skapa kontroll över kommunikationen i klassen.

> Triadic interactions serve the purpose of controlling students behaviour while also prescribing the content of the lesson. … Triadic dialogue is common in the introductory phase of a lesson where the teacher attempts to keep tight control of the content and students. (s. 213)

Ett annat fenomen, som lyfts fram av Pimm (1987), är att läraren ofta ägnar mer uppmärksamhet åt formen än åt innehållet i sin undervisning. Från svensk skola känner man igen detta i form av uppmaningar som: Skriv ett antagande, Redovisa fullständig lösning, Drag två streck under svaret, Glöm inte enheten etc. Pimm menar att detta kan dra uppmärksamheten från innehållet i det som studeras.

> The teacher may be too concerned with the *form* of what is being said, at the expence of the *meaning* which the pupil is trying to convey. (s. 32)

När det gäller elevernas språk påpekar Pimm att de använder språket på två olika sätt.

> …namely talking to communicate with others and talking for themselves. … *Talking for others*, in an attempt to make someone else understand something or

> to pass on some piece of information … *Talking for themselves* … to help organize their own thoughts. Barnes (1976) offers similar categories which he terms *explanatory* and *exploratory* talk respectively. (s. 23f)

Både dessa språkanvändningar är viktiga, det interna språket för att själv kunna resonera sig fram till en slutsats, det externa språket för att kunna dela med sig av egna erfarenheter och tillgodogöra sig andras. Som framgår av tidigare citat är det läraren som genom sitt sätt att använda språket formar den språkliga miljön i klassrummet. Läraren är därvid elevernas språkliga förebild. Men det räcker inte med att läraren är ett gott föredöme. Lika viktigt är det att hon hjälper eleverna att tillägna sig och hantera det matematiska språket. Detta kan ske genom ett aktivt deltagande från elevernas sida och genom att de tillåts använda språket vid olika typer av kommunikation i klassrummet.

Vikten av att eleverna successivt tillägnar sig ett funktionellt matematiskt språk genom att använda det, är något som fått stor uppmärksamhet i svensk skola. Man skall ”tala matematik”. Läraren har därvid en viktig funktion som katalysator, men det gäller enligt Pimm att se upp. Med hänvisning till en artikel av Brown (1982), framhåller han vikten av att skilja mellan form och innehåll. Ökade möjligheter att kommunicera leder inte i sig till en bättre måluppfyllelse.

> She contrasts two different functions of spoken language, *message-oriented* and *listener-oriented* speech, and argues that the former needs to be explicitly taught in schools. In message-oriented speech, the speaker is goal-directed and wishes to express a particular message, to ’change the listener’s state of knowledge’. … With listener-oriented speech, the primary aim is the ’establishment and maintenance of good social relations with the listener’. (s. 38, 39) …. Brown believes that all pupils are fluent in listener-oriented speech, but that message-oriented speech needs to be overtly practised. (s. 40)

Det här är viktigt att observera vid till exempel grupparbete. Om avsikten med grupparbetet är att lära sig ett bestämt innehåll, så krävs det att man i gruppen dels kommunicerar kring just detta innehåll, dels äger ett språk som möjliggör detta. Elevers förmåga att använda språket på det här sättet är något som man försöker testa i den muntliga delen av det nationella ämnesprovet i matematik i år 9 (Skolverket, 2003c).

Jag vill i det här sammanhanget lyfta fram ännu en aspekt som jag närmare utrett i Löwing (2000). Det gäller klassrumsspråkets två huvudsyften, att reglera verksamheten och att undervisa. Vid dessa två typer av kommunikation används olika språkbruk och spelreglerna är också olika.

- Det *reglerande* språket används för social kontroll i klassrummet. Till denna kategori hör tillsägelser, frånvarokontroll, indelning i grupper inför att grupparbete etc.

- Det *undervisande* språket som används för att till exempel demonstrera, förklara och exemplifiera matematiska begrepp eller sammanhang.

Det reglerande språket är inte alltid verbalt. Stora delar av den sociala kontrollen sker istället utgående från en, för alla känd, praxis.

> Vi kunde också iaktta att en del av det *reglerande språket* var icke-verbalt. Eleverna kände redan till de rutiner som skulle följas, till exempel vilken arbetsbok som skulle användas och hur uppgifterna skulle ställas upp. (Löwing, 2000 s. 47)

Vad som beskrivits i det här avsnittet är en viktig bakgrund för mina analyser av undervisningsprocessen. Det gäller för en observatör att vara så väl insatt i det territorium som studeras att såväl verbala och icke-verbala spelregler som olika språkbruk kan kännas igen och tolkas. Detta gäller såväl det reglerande som det undervisande språket.

7.2 Det matematiska språket och vikten av entydighet

Vid all undervisning, inte minst i matematik, är det viktigt att språket är klart och entydigt. Att använda ord som ”fyrkant” när man menar kvadrat, ”runda grejer” när man menar cirklar eller att beskriva en division som ”den delat med den” eller ”den delat på den” kan leda till missförstånd av viktiga begrepp eller strategier. När Zepp (1989) tar upp detta problem, som under senare år blivit allt större, hänvisar han bland andra till Bernstein (1961).

> Elaborated code uses complex sentence structure, grammatical order, prepositions to show logical and sequential ordering, and a high degree of hierarchical organization. Restricted code uses shorter sentences and much is more limited in its choice of adjectives, adverbs, and prepositions. … However according to Bernstein, lower-class children have little access to the elaborated code, which is the code used in school. (s. 198)

Matematikämnet, med sitt ordknappa och exakta språkbruk, är speciellt känsligt. Detta gäller inte minst för elever som har ett annat hemspråk än undervisningsspråket. Det Wellros (1998) skriver om elever med annat modersmål än svenska gäller i lika hög grad för svenska elever som följer matematikundervisningen utifrån en egen ”restricted code”:

> Att inte kunna urskilja kända mönster och förstå orsaken till andra människors handlingar skapar en mycket stor osäkerhet och ofta en kronisk trötthet. Kognitionen går på högvarv, men man hittar inga samband mellan det man observerar och det man tidigare vet om människor och världen. (s. 45)

Relaterat till Bernstein kan man också se Reuterberg och Svenssons forskningsresultat (Svensson, 1995) i en annan belysning. Hur mycket bidrar arbetarbarnens språk till deras relativa misslyckande i ämnet matematik. Följdfrågan blir givetvis hur man på sikt skall kunna korrigera för detta.

I sina senare arbeten byter Bernstein (1971-75) terminologi och talar istället om position-oriented och person-oriented families:

> For example, position-oriented language tends to use pronouns whose antecedents are not clear to the outside listener, … A person-oriented child, on the other hand, will end to use the noun or person's name in order to make it explicit to home he is referring.
>
> The implications for the classroom are the same as those of Bernstein's earlier theory; the position-oriented students will not be used to the explicit language of school. This would be especially true of the mathematics classroom, where the precision of language is particulary important. (Zepp, 1989 s. 199f)

Jag har konstaterat att det problem Zepp tar upp har blivit allt mer tydligt även när det gäller språket i de lärarstuderandes inlämningsuppgifter och på tentamina vid lärarutbildningen. Det verkar som om många av våra lärarstuderande inte tillägnar sig en tillräckligt bra 'personal-code', varken under sin skoltid eller under sin lärarutbildning. De har vid sitt skrivande speciellt problem med syftningar och användandet av pronomina. Jag, och mina kolleger, har också konstaterat att många av de lärarstuderande inte behärskar den matematikterminologi som är vanlig på grundskolan. Att vi inte uppmärksammat problemet förrän nu beror sannolikt på att en äldre grupp högstadielärare och gymnasielärare behärskade en korrekt terminologi och förde den vidare till sina elever. De studerande hade därför ett elaborerat språk redan när de kom till utbildningen. I dag är det inte så och de lärarstuderande hinner inte heller tillgodogöra sig denna språkliga kultur under den korta utbildning i matematik som de får under sin lärarutbildning (Löwing & Fant, 2003).

Pimm (1987) ägnar också stor uppmärksamhet åt språket i matematikundervisningen, dels som kommunikationsmedel, dels som budskap. Han illustrerar detta genom att referera till den så kallade Cockcroftrapporten (HMSO, 1982).

> '… it is the fact that mathematics can be used as a powerful means of communication which provides the principal reasons for teaching mathematics to all children.' (s. xvii)

Pimm menar emellertid att Cockcroft i sin rapport glömt att tala om en viktig sak, nämligen vad det är som skall kommuniceras.

> The report, unfortunately, did not then discuss in detail *what* it was that was to be communicated, but mathematics can be profitably seen as both medium and message, with the two often inextricably and deliberately mixed. (s. xvii)

Matematiken används i första hand som ”medium” när man till exempel diskuterar arean av ett cirkelområde i termer av radie, area och pi och som ”message” när man konstaterar att arean av ett cirkelområde med radie 5 cm är $\pi \cdot 5^2$ cm^2? Det är väl här många gör misstaget att endast se till budskapet (”the message”). För att tolka budskapet $\pi \cdot 5^2$ cm^2 krävs det emellertid att man behärskar ett medium som gör det möjligt att göra tolkningen. Om man inte förstår att cirkelområdets area är proportionell mot ”radiekvadraten” (närmare bestämt π gånger större), är det då möjligt att genomskåda vad som händer med arean om man ändrar på radien? Detta resonemang leder till följdfrågan vad som är det primära syftet med matematikundervisningens språk, förståelsen eller stringensen. Pimm (1987) tar här ställning genom att citera Thom (1973) som menar att

> … the construction of meaning rather than the question of rigor is the central problem facing mathematics education. (s. 7)

En hel del matematik kan givetvis beskrivas med hjälp av ett enklare språk eller ett vardagsspråk. Problem uppstår emellertid när språket tappar precision såsom när en kvadrat eller en rektangel kallas för fyrkant eller när både cirkeln och klotet beskrivs som runda. Samtidigt kan speciella matematiska termer associera till en vardagsbetydelse av motsvarande ord såsom i högtalarens *volym*, *förlängning* av *bråk* eller en *godtycklig* punkt. Detta är något som Pimm ägnar stor uppmärksamhet.

> Many confusions occur as a result of differing linguistic interpretations, where the teacher, for instance, might be employing terms from what has been loosely called a mathematical ’dialect’, with the pupils interpreting everything they hear as ordinary English, thus trying to use non-mathematical meanings in the mathematical context. (s. 75)

Ett annat dilemma med skolans matematikundervisning är att terminologin på samma gång måste vara exakt och begriplig. Reglerna för detta kan ibland vara svåra att uppfatta för eleverna. Zepp (1989) skriver:

> Finally, mathematics language is very precise about assigning words to special classes of concepts. For example, a circle is a special case of an ellipse. But if you show a circle to a child and ask whether it is an ellipse, the child is likely to say: ”No it is not an ellipse; it is a circle”. (s. 47)

På en nivå är elevens svar bra. Varför ge en cirkel det svaga namnet ellips när det finns ett exaktare namn nämligen cirkel? Samtidigt blir relationer av det här slaget allt viktigare efter hand som man studerar mera matematik.

Ett annat problem med matematikens språk är att det är så exakt. Man har rationaliserat bort den extra information som många elever skulle behöva för att undvika missförstånd. Några exempel:

Prioriteringsregler leder ofta till problem för eleverna i grundskolan, eftersom en uppgift som $3 + 4 \cdot 5$ kan missuppfattas. Eleverna uppfattar den som $12 \cdot 5$ och inte som $3 + 20$. För att undvika detta kan uppgiften i ett inlärningsskede skrivas som $3 + (4 \cdot 5)$.

På motsvarande sätt kan ett bråk som $\frac{2x}{x+3}$ skrivas $\frac{2x}{(x+3)}$. Genom att till en början skriva en parentes om nämnaren blir det lättare att se den som en helhet. Det konventionella skrivsättet, utan parentes, leder till att många elever förkortar med x och därvid får svar som $\frac{2}{3}$ eller $\frac{2}{4}$.

Zepp fortsätter att utveckla detta.

> In mathematics, hierarchies can become quite complex, piling up many levels of abstraction, and culminating in such notations as category theory, which groups together already highly abstract concepts such as groups, vector spaces, or topological spaces, into the higher order of abstraction of 'categories'. … Jerome Bruner (1973) argues that language is especially important in labelling these higher order concepts, since it facilitates the transfer from one category into another. … it is the role of the teacher to foster the use of higher order conceptual words, according to Bruner, in order to develop the ability to transfer from one classification scheme to another. (s. 53)

Att kunna abstrahera och bygga upp en mer komplex matematik är ett viktigt, långsiktigt mål för skolans matematikundervisning. En förutsättning för att detta skall ske är emellertid att eleverna behärskar speciella begrepp och ett speciellt språk. Samtidigt skall eleverna kunna tillämpa matematiken i olika praktiska situationer. Det innebär att de också måste kunna gå fram och tillbaka mellan olika språkliga miljöer.

> Teachers should also be aware of that real life concepts and mathematical concepts may be very different and that students may learn them in different ways. When using a word care must be taken that students understand in just which 'register' (mathematical or otherwise) the term is being used. (s. 57)

Redan i skolan möter eleverna problemet med att översätta från ett vardagsspråk till ett formellt vetenskapligt språk och åter. I skolan blir problemet särskilt viktigt när man som lärare skall förklara något genom att konkretisera, dvs. gå från konkret till abstrakt. För att en konkretisering skall fungera måste läraren synliggöra kopplingen mellan den konkreta modellen och den matematiska och även mellan de två språkbruk (register) som används. I Löwing (2000) ges exempel på svårigheter som kan uppstå för lärare när det gäller att knyta samman en konkretiserande beskrivning med det fenomen eller begrepp som skall konkretiseras.

7.3 Begreppet register

För att öka precisionen i beskrivningar av matematikundervisningens språk införs ofta begreppet *register*. Så här beskrivs detta av Pimm (1987).

> *Register* is a technical linguistic term which Halliday (1975a, p. 65) describes as ’a set of meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structures which express these meanings’. Hence, unlike a dialect, individuals may adopt a particular register on certain occasions and not on others. (s. 75)

Det handlar alltså om ord och uttryck som används av en speciell grupp och för ett speciellt syfte. För att precisera begreppet börjar Pimm med att ta upp pedagogisk terminologi som ofta är knuten till en politisk åskådning eller en pedagogisk ”ism”.

> … Words such as ’childcentered´, ’unstreamed’ and ’creativity’ on the one hand and ’basics’, ’core curriculum’ and ’excellence’ on the other have become the property of left and right respectively, serving to label the political and social affiliations of those who employ them. (s. 76)

För att kunna utveckla ett matematiskt vetande och kommunicera detta vetande gäller det att behärska ämnets speciella *register*.

> Part of learning mathematics is learning to speak like a mathematician, that is, acquiring control over the mathematics register.
>
> … The requirements of the expressions of mathematical ideas in natural languages lead to the development of mathematics register in which discourse about mathematical ideas, objects and process can take place. (s. 76)

I matematikens *register* finner man enligt Pimm termer av olika slag, de som är specifikt matematiska och de som lånats in från vardagsspråket och samtidigt givits en annorlunda, ofta mer precis, betydelse.

> … A familiar feature of the language employed in mathematics classrooms is the widespread use of specialist terms such as *quadrilateral*, *parallelogram*, *hypotenuse* and *multiplicand*, words which are unlikely to be encountered outside them. … In mathematics, the register’s most striking characteristic is the number of terms it contains which have been ’borrowed’ from more everyday English. Examples of such words include: *face, degree, relation, power, radical, complete, integrate, legs, product, moment, mean, real, imaginary, rational* and *natural*.
>
> … More problematic in many ways, partly because the alteration in meaning is less apparent, are differences regarding the meaning and use of words such as *some*, *all* or *any*. … for many students the words *some* and *all* are contrastive rather than inclusive, i. e. *some* entails not *all*. Thus, for instance, the statement ’some rational numbers are real numbers’ was regularly judged to be face, because *all* rational numbers are real numbers. (s. 78f)

De flesta känner säkert igen detta från sin egen skoltid. När man till exempel skall visa att en triangel har vinkelsumman 180^{O}, betyder inte *en* triangel *en enda* triangel eller *en speciell* triangel utan *en godtycklig* triangel dvs. i det här fallet *alla* trianglar (Mason, 1996). Ett annat exempel är kuben som har *sex sidor*. Varje sådan sida har formen av en kvadrat som i sin tur har *fyra sidor*. Dessa sidor är i sin tur *kanter* i kuben.

Även Zevenbergen (2000) tar upp begreppet register.

> Increasingly, mathematics educators are recognizing that mathematics is a language (Ellerton & Clemens, 1991). Although it may be based on the language of instruction, such as French or English, it has its own internal logic and relationships between words and structure (grammar). In this light, it is most productive to consider it as a register, and as such, certain aspects of that language need to be controlled. … Students must come to learn this register if they are to become effective speakers, listeners and communicators in mathematics classrooms. … I argue that students must come to learn mathematics as a language equally as a discipline of knowledge. (s. 202)

När Zevenbergen behandlar begreppet *mathematics register* talar hon om *a specialized vocabulary*. Hon menar därmed ord som i matematiska sammanhang har en helt annan betydelse än i vardagsspråket såsom *ruler, prime, odd, mean, rational, root* och *mass*. Hon ger också exempel på ord som kan misstolkas och förväxlas såsom ordparen *sum/some, whole/hole, off/of* och *tens/tenths*. Även användningen av prepositioner, menar hon, kan vara förvirrande.

> The temparature fell to 10 degrees … by 10 degrees… from 10 degrees; and the effect of omitting the preposition: the temperature fell 10 degrees. (s. 206)

Liknande problem förekommer i svensk skola till exempel vid division där ”delat med”, ”delat i” och ”delat på” används synonymt. En orsak till detta torde vara de upprepade byten av disvisionsalgoritmer som gjordes från 1960-talet och framåt i kombination med förekomsten av två divisionsstrategier, innehålls- och delningsdivision. (Se till exempel Kilborn, 1989, kapitel 7.)

Ett annat problem som nämns av Zevenbergen är så kallade *trigger words*, såsom mer, mindre, fick och gånger. Uppgiften ”Olle har 10 kr och Anna har 12 kr. Hur mycket mer pengar har Anna?”, leder lätt till addition på grund av ordet *mer*. På motsvarande sätt leder ofta uppgifter som ”Hur många gånger kan du ta åka buss om du har 24 kr och en bussresa kostar 6 kr?” till multiplikation på grund av ordet *gånger*. Min uppfattning är emellertid att det här problemet, som ofta förekommer i en viss form av lotsning, delvis är förvållat av lärarna själva. Om lärare är slarviga med språket, inte ägnar uppmärksamhet åt elevernas användning av språket eller inte problematiserar innehållet i de uppgifter som ges, söker eleverna enkla och snabba lösningar. Detta är särskilt påtagligt om läraren i sin undervisning prioriterar att eleverna löser många uppgifter framför att de fördjupar sig i och analyserar ett färre antal uppgifter.

Med utgångspunkt i Bourdieus arbeten ser Zevenbergen en språklig komplikation med matematikens register.

> When the students enter the school context, their out-of-school language practices, which have been embodied in their habitus, provide a lens for interpreting and acting with the school context. (s. 202)

Hon vill emellertid inte gå lika långt som Bourdieu i sina slutsatser.

> This is not to suggest a deterministing reading of social background (as is commonly made in Bourdieu's works) but rather to recognize that differences exist between home and school languages and these have an impact on a student's performance in the classroom. (s. 203)

Uppenbarligen är språket och matematikens speciella register ett viktigt, och för många elever kanske helt avgörande, filter för möjligheterna att lära matematik. En av lärarens viktigaste uppgifter måste därför vara att uppmärksamma detta och underlätta det för eleverna att tillägna sig ett funktionellt språk.

När jag, vid mina studier av invandrade lärares arbetssituation (Löwing 2000 s. 45 ff.), studerade kommunikationen i klassrummet fann jag att lärare använde åtminstone fyra typer av register när det gäller det undervisande språket:

- Ett formellt undervisningsspråk som i sin tur kan indelas i ett beskrivande (algoritmiskt) språk och ett förklarande språk. Det förra används till exempel när läraren löser en uppgift på tavlan, det senare när läraren skall förklara eller motivera de operationer som då utförs.
- Ett informellt undervisningsspråk som kan delas in i ett tillämpande (ofta vardagsanknutet) språk och ett laborativt språk. Det första används när lärare tar en vardagshändelse som utgångspunkt för att förklara ett matematiskt begrepp eller modell och det senare när motsvarande förklaringar sker med hjälp av ett laborativt material.

Det jag kunde iaktta var, inte bara att dessa språkbruk använde olika register, utan dessutom att de flesta lärare i studien hade problem med att gå från ett register till ett annat.

7.4 Metaforer och semantiska strukturer

När språket inte räcker till för att förklara ett begrepp kan man ofta ta hjälp av en metafor. Pimm (1987) ger exempel på olika typer av metaforer inom matematikundervisningen. Han skiljer speciellt mellan två typer av metaforer, extra-mathematical där man tar stöd från vardagsspråket och structural där man tar stöd från ett annat område av matematiken som har samma strukturella uppbyggnad.

> Extra-mathematical metaphors are sometimes employed overtly in classrooms. The terminology of *having* and *owing* is used in the context of positive and negative numbers. *A function is a machine or* an *equation is a balance* provide two further very common pedagogic instances. (s. 99)

Hans exempel på strukturella metaforer är en linjes *lutning,* en *sfärisk* triangel och att ett komplext tal är en *vektor*.

Lakoff och Johnsson (1980) har ägnat en hel bok åt metaforer. De skriver så här:

> Metaphor is for most people a device of the poetic imagination and the rhetorical flourish - a matter of extraordinary than ordinary language. …We have found, on the contrary, that metaphor is pervasive in everyday life, not just in language but in thought and action. Our ordinary conceptual system, in terms of which we both think and act, is fundamentally metaphoric in nature. (s. 3)

Som ett inledande exempel på metafor väljer de att betrakta argumentation som ett krig. Exempel på detta är ”Dina argument är inte försvarbara”, ”Han sköt mina argument i sank” och ”Jag har aldrig vunnit en argumentation med honom”. Vi använder oss också av termer som ordkrig. Författarna menar att avsikten med denna metafor är att (åtminstone delvis) strukturera vad vi gör, och hur vi uppfattar vad vi gör, när vi argumenterar.

> The essence of a metaphor is understanding and experiencing one kind of thing in terms of another. (s. 5)

De menar vidare att metaforer inte bara handlar om ord utan att mänskligt tänkande till stor del är just metaforiskt.

> The most important claim we have made so far is that metaphor is not just a matter of language, that is, of mere words. We shall argue that, on the contrary, human *thought processes* are largely metaphorical. (s. 6)

Lakoff och Johnson går till och med ett steg längre och menar att de flesta av våra begrepp bygger på metaforiska strukturer.

> Are there any concepts at all that are understood directly, without metaphor? If not, how can we understand anything at all? (s. 56)

En annan viktig tanke de lyfter fram är metaforens beroende av erfarenhet.

> In actuality we feel that no metaphor can ever be comprehended or even adequately represented independently of its experiental basis. (s. 19)

Vuxenskolans ”Vill du gå framåt, gå i cirkel” (Säljö, 2000, s. 15) är ett bra exempel på detta. För den som inte är bekant med metaforen cirkel för studiegrupp, är denna slogan oförståelig.

Lakoff och Johnson (1980) delar upp metaforerna i tre grupper: den *strukturella* metaforen av typen ”Argument is war”; den *orienterande* metaforen såsom ”Wake up”, ”He sank into coma” och ”His helth is declining”; den *ontologiska* metaforen såsom ”That was a beautiful catch” eller ”He did it out of anger”.

Inom matematikämnets didaktik kan det vara lämpligt att använda andra klassificeringar av metaforer. När jag nyligen gjorde en ny analys av data i Kilborns (1979b) rapport om undervisning av negativa tal, kunde jag urskilja flera olika användningar av metaforer. När lärarna i studien använde lån-skuld eller termometern som metaforer för negativa tal, visade det sig att metaforerna ofta användes på ett sådant sätt att de inte belyste den matematiska operation som avsågs. För detta har jag i Löwing (2002) använt termen *falsk metafor*. I andra fall användes metaforen på ett korrekt sätt för att lyfta fram en matematisk poäng, till exempel en matematisk modell. Om eleverna, efter det att man använt metaforen arbetar med den matematiska modellen, kallar jag detta för arbete *via metaforen*. I de flesta fall användes metaforen emellertid inte för att lyfta fram en matematisk modell, utan lärare låter elever fortsätta att arbeta med metaforen i sig. För detta använder jag uttrycket att arbeta *inom metaforen*. Jag kan på detta sätt studera, inte bara om metaforer används i en kommunikation eller i vilket syfte den används, utan även hur funktionell den är med avseende på de mål den skall bidra till att uppnå. (se vidare Löwing, 2002, s. 93ff.)

I föregående avsnitt behandlades begreppet register och de problem som kan uppstå för den elev som inte behärskar matematikämnets speciella register. En annan typ av komplikation som tas upp av Zevenbergen (2000) är vad hon kallar ämnets *semantiska struktur* alltså betydelsen av tecken eller symboler och deras inbördes relationer. En utsaga av typen $3 + 2 = 5$ kan till exempel formuleras som ett problem, på flera olika sätt. Ett exempel är $3 + 2 = x$ där det är summan som söks såsom i ”Du har 3 kronor och får 2 kronor till. Hur många kronor har du då?” En betydligt krångligare variant är $x + 2 = 5$, där en av termerna är okänd såsom i ”När Ola fått 2 kronor av sin syster hade han sammanlagt 5 kronor. Hur många kronor hade Ola från början?” Efter att ha studerat Carpenter m.fl. (1982) skrev Johansson (1983) en artikel i *Nämnaren* där han beskrev en ”grammatik” för de semantiska strukturerna hos grundläggande additions- och subtraktionsutsagor. Zevenberger fördjupar sig inte i detta problem, men enligt min uppfattning är det är just den här typen av semantiska komplikationer som ger så många elever problem vid naturvetenskapliga tillämpningar såsom beräkningar av hastighet, strömstyrka eller tryck. I en traditionell ekvation såsom

$$(p =)\ \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

utgår man till exempel från att trycket i ett slutet system är konstant. I bromssystemet på en bil är därför trycket på huvudcylindern (alltså kraften F_1 dividerat med tvärsnittsarean A_1) lika stort som trycket på en hjulcylinder (dvs. kraften F_2 delat med tvärsnittsarean A_2). En sådan här ekvation ger upphov till problem för många elever, speciellt om de skall bestämma A_1 eller A_2 eftersom det leder till en ekvation med en obekant i nämnaren. Om man istället utgått ifrån formeln $F = p \cdot A$, dvs. enkel proportionalitet, skulle den matematiska modellen bli betydligt enklare att förstå. Den nya formeln kan lättare ges en vardagstolkning som att en dubbelt så stor area ger ett dubbelt så stort tryck, och att hälften så stor area ger hälften så stort tryck. Detta gäller oberoende av trycket. (se även Löwing, 2002 s. 87ff).

När Zepp (1989) diskuterar motsvarande företeelser uttrycker han en viss skepsis inför nödvändigheten att alltid använda ett matematiskt språk.

> … but for now it suffices to emphazise that traditional mathematics, with its set-theoretical bias, represents just one way of looking at the world, one which may not always be the most appropriate for analyzing a situation, one which may not be psychologically natural for most people, and one which may be very foreign to peoples of non-Western cultures. (s. 3)

Vad Zepp menar är att olika kulturer ser på, och därmed uppfattar, omvärlden på olika sätt. I vår västerländska kultur har det i skolan utvecklats en tradition där även vardagens eller yrkeslivets matematik uttrycks med hjälp av matematikerns modeller och språk. Istället för att hjälpa vardagsmänniskan eller yrkesmannen att finna enklast möjliga lösning på ett problem i en given kontext, så har detta språk och dessa matematiska modeller snarare bidragit till att komplicera vardags- eller yrkesmänniskors värld. Inom det här området finns ett stort och viktigt fält att studera för den matematikdidaktiska forskningen.

7.5 Språket som bärare av innebörd

Under senare år har språket fått en ökad betydelse i skolans matematik-undervisning. Orsaken är den fokusering på problemlösning som infördes som ett huvudmoment i Lgr 80 och sedan dess getts ett allt större utrymme i svensk matematikundervisning. Problemlösningen kombineras ofta med två andra aspekter, nämligen vikten av att eleverna ”talar matematik” och att matematiken konkretiseras genom att anknytas till elevernas vardag. Pimm (1987) konstaterar emellertid att den här verksamheten ofta har blivit ett självändamål och därmed saknar såväl tydliga mål som relevans.

Problemlösning har därvid snarare blivit ett medel att sysselsätta eleverna än en metod att lära dem matematik. Wyndhamn m.fl. (2000) tar också upp detta problem och redan titeln på boken är belysande: *Problemlösning som metafor och praktik.*

Ett av de exempel Pimm refererar till är vad som hände under en lektion där eleverna skulle ta beräkningen 4,6 + 5,3 = 9,9 som utgångspunkt för att konstruera egna uppgifter. Uppgifterna blev av olika karaktär och kvalitet. Vissa uppgifter blev intressanta, men de flesta av dem blev rutinartade och triviala upprepningar av vad eleverna redan kunde. Pimm (1987) ger följande exempel med kommentarer:

> * James had 4.6 sweets. His best friend gave him 5.3 sweets and he has 9.9 sweets altogether.
>
> * John had 4.6 videotapes he sold them and had enough money to buy 5.3 bags of sweets and he then calculated up how much he had and he had 9.9.
>
> * John had 4.6 pages of a book left to read and his father had 5.3 pages to read so between them they had 9.9 pages left to read.
>
> … these stories all exhibit the apparent irrelevace at one level of the surrounding story in mathematics classes. The stories do not have to be plausable or even make sense provided they contain the requisite numbers and guide to the operation. (s. 12ff)

Exemplen kommer från engelsk skola men enligt min erfarenhet är det lätt att finna liknande exempel i svensk skola. En intressant fråga i anslutning till detta är vilken uppfattning elever får av ämnet matematik och dess användning genom en sådan här aktivitet och vilken precision det språk får som eleverna bygger upp på det här sättet.

Även Zevenbergen (2000) ser vissa problem med hur man idag försöker underlätta den matematiska förståelsen genom att bädda in matematiken i en miljö med vardagsproblem. Detta har, menar hon, inte gett önskat resultat.

> The movement in mathematics education to embed mathematical tasks in word problems, with the intention of making them more meaningful (and supposedly more accessible) has not met with the success that was hoped for. Cooper and Dunne (1998) have found that students from different socioeconomic groups perform equally well on decontextualized tasks but differ when the tasks become contextualized. They contend that the language-richness of the contextualized tasks make readability and comprehension difficult for working-class students. (s. 211)

Frågan är också vems vardag man beskriver och vems vardagsspråk man använder. Man kan anknyta detta till vad jag tidigare refererat till från Bernstein (1961, 1971-75) och Svensson (1995).

En annan viktig fråga är hur generalisering av begrepp går till. Ofta introducerar man i lägre årskurser ett ord eller ett begrepp som just då har en begränsad innebörd (ett begränsat register). När begreppet sedan utvidgas är det viktigt att läraren är medveten om såväl den gamla som den nya innebörden och de nya begränsningarna. Pimm (1987) tar som exempel multiplikationen 6,23 · 0,48, där elever får svaret till ”slightly taller than the 6.23” eller ”about twelve … But multiplication still makes it bigger” (s. 9). Vad Pimm inte reder ut är emellertid när och hur innebörden förändras. När elever första gångerna möter en multiplikation, är det frågan om en upprepad addition, alltså i meningen 6 · 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3. Om man istället multiplicerar 3 med ett tal som är större än 6 ökar resultatet alltid med en multipel av 3 och (summan) blir således större. Om uppgiften ovan hade varit 6 · 0,48, hade betydelsen fortfarande varit densamma, alltså 0,48 + 0,48 + 0,48 + 0,48 + 0,48 + 0,48, och om man multiplicerar 0,48 med ett större tal så blir produkten återigen större. Detta förutsätter emellertid att eleven kan skilja mellan termerna multiplikand och multiplikator. För att multiplikationen skall kunna uppfattas som en upprepad addition måste multiplikatorn vara ett naturligt tal. Tyvärr gör man inte längre denna distinktion i svensk skola. Båda multiplikand och multiplikator kallas numera faktorer. Pimm (1987) är inte helt tydlig när han formulerar sig på följande sätt:

> At an elementary level, ’multiplication makes bigger’ expresses a valid generalisation about the operation of multiplication when applied to whole numbers. (s. 9)

Generaliseringen är i själva verket möjlig även om multiplikanden är ett reellt tal, till exempel ett bråktal eller ett negativt tal. När multiplikatorn inte längre är ett naturligt tal uppstår emellertid problem. Då är det inte längre så att begreppet multiplikation generaliseras utan då krävs istället en helt ny definition av operationen multiplikation – en operation som samtidigt omfattar den tidigare definitionen, alltså upprepad addition (se även Löwing, 2002, kapitel 7.2).

När Zevenbergen (2000) mot slutet av sin artikel gör en sammanfattning menar hon att många av de problem vi idag har med matematikundervisningen och dess språk är lösbara. Det borde gå att göra undervisningen mer tillgänglig för eleverna utan att därför urvattna den.

> By considering the teaching of mathematics as a cultural event, we can see that there are aspects of pedagogy and curriculum that can exclude some students. By understanding how the patterns of language, work and power are implicated in the construction of mathematics, it becomes possible to understand how we can change our practices in order that they become more accessible and equitable for our students. This is not to suggest that the mathematics be watered down. Rather we should consider the practices within which mathematics is embedded –

> linguistic, social, and contextual – in order that it becomes more accessible to more students. (s. 219)

Jag delar den uppfattningen. Innehållet i skolans matematik har under de senaste 50 åren bytt karaktär från att ha varit ytterst formell och abstrakt till att numera vara ett verktyg för att tolka och förstå omvärlden. Av olika skäl har emellertid inte det språk och de modeller som används i matematikundervisningen hängt med i den utvecklingen.

I samband med mitt arbete med invandrade lärares yrkessituation (Löwing, 2000, 2001) fick jag en hel del impulser från Adlers (1999) forskning. Även om Adler i första hand studerade undervisning i mångkulturella klasser i Sydafrika, kan jag se stora likheter mellan de språkliga problem hon iakttog och vad jag har iakttagit i svensk matematikundervisning. Ett viktigt begrepp för Adler är vad hon kallar *a dilemma of transparency*.

> How does one pay attention to appropriate ways of speaking mathematically without conflating medium and message? and How does a mathematics teacher focus attention to the form of speach in class without losing mathematical meaning and conceptual focus. (s. 115)

Det Adler här lyfter fram är viktigt även i svensk skola och detta av olika skäl. Ett dilemma, speciellt i grundskolan, är att ett matematiskt korrekt språk genom sin komplexitet kan lägga hinder för elevernas möjligheter att uppfatta innebörden i det läraren vill kommunicera med dem. Ett annat dilemmat är att vid val av laborativt material (artefakter) eller metaforer se till att dessa verkligen bidrar till att genomlysa de begrepp som behandlas och att det språk som då används låter sig omtolkas till ett matematiskt korrekt språk. På den här punkten hänvisar Adler till Lave och Wengers (1991) ”the dual characteristics of invisibility and visibiliy”:

> … invisibilty in the form of unproblematic interpretation and integration (of the artefact) into activity, and visibility in the form of extended access to information. This is not a simple dichotomous distinction, since these two crucial characteristics are in a complex interplay. (Lave & Wenger, 1991, p. 102) (s. 116)

Adler menar med detta att man måste synliggöra den osynliga matematiken. Men matematik handlar inte bara om vardag, metaforer och artefakter utan har dessutom en egen struktur. Ett viktigt mål med matematikundervisningen är därför att abstrahera, vilket är ett mål i sig.

> Discussion of a task should enable the mathematical learning and so be invisible. It is the window through which the mathematics can be seen. (s. 117)

7.6 Forskning om språket i undervisningen

En hel del forskning uppmärksammar språkets viktiga roll i undervisningen. Ellerton och Clarkson (1996) menar att kommunikation är väsentlig för att överföra kunskap från en generation till en annan. När det gäller matematikundervisning är emellertid denna kommunikation inte alltid vad den borde vara:

> If, however, ideas in mathematics remain enshrined in language which is only accessible to a few chosen academics, then those same ideas will remain inaccesible to the majority of learners. (s. 993)

Författarna skiljer mellan tre forskningsfält inom det här området: classroom discourse, language and assessment och semantic structure. Vad gäller klassrumsdiskursen lyfter de fram två huvudriktningar:

- Atweh (1993) som antog ett ”social critical sociology perspective” i sina etnografiska studier av matematiklektioner och Kanes (1992, 1993) som utgick från Wittgensteins begrepp ”language game”. De menade att matematik snarare medieras med hjälp av ett språk än genom tänkande.
- Under de senaste årtiondena har det kommit fram litteratur som lyfter fram klassrumskulturens viktiga roll för den matematiska diskursen. Här nämns forskare som Voigt (1985, 1994, 1995), Bauersfeld (1988, 1994, 1995), Nickson (1992), Mellin-Olsen (1993) och Alrø och Skovsmose (1996).

> These writers have emphasised that it is the culture of the classroom which effectively determines how meanings are negotiated between learners and teachers. (s. 994)

De senast nämnda forskarna betraktar undervisningen som en förhandling mellan lärare och elever och talar såväl om undervisningens (ofta dolda) ramar som det pedagogiska kontraktet.

När det gäller semantisk struktur inleder Ellerton och Clarkson med att referera till en tidig artikel av Brune (1953):

> … he predicted that semantics is likely to become 'the science explaining how *language affects other behaviour, especially thinking*' (p.170). (s. 1004)

Forskningen inom detta område har främst handlat om semantiska strukturer hos benämnda uppgifter (word problems) som har additiv, subtraktiv eller multiplikativ struktur. Här nämns bl.a. Fuson (1992), Carpenter och Moser (1984), Vergnaud (1982), Nesher (1988) och Bell, Greer, Grimison och Mangan (1989). Jag har tidigare i detta avsnitt beskrivit Zevenbergens (2000) syn på begreppet.

En annan viktig forskning om kommunikation i klassrummet bedriver Adler (1999, 2001) tillsammans med sin kollega Setati (1998). Deras forskning har i huvudsak rört undervisning i multikulturella miljöer. (Se även Löwing 2000). Denna forskning är emellertid inte bara intressant för oss med tanke på det stora antalet svenska elever med annat hemspråk än svenska. Adlers begrepp ”transparency”, alltså tolkbarheten av det läraren undervisar om, kan lika väl tillämpas på det förhållande att matematikens formella språk kan betraktas som ett främmande språk för de flesta elever. (Se även Zepp, 1989; Pimm, 1987 m.fl.) Adler och Setati tar även upp språket som kulturbärare och hänvisar därvid till Vygotsky (1978, 1986), Wertch (1991) och Mercer (1995).

När Setatai (1998) analyserar klassrumsspråket delar hon (inspirerad av Sfard m.fl. 1998) in det i tre typer av diskurser:

Calculational discourse, när språket används för en beräkningsprocess.

Conceptual discourse, när språket används för att utreda begrepp eller förklara/förtydliga en beräkningsprocess.

Procedural discourse, när språket används för att hantera (manipulera) symboler.

Hon skiljer också mellan två huvudsakliga syften för kommunikationen

Explanation, varvid läraren använder språket för att förklara, illustrera eller exemplifiera ett matematiskt innehåll och

Regulation, varvid språket används för social kontroll, för att påkalla uppmärksamhet eller för att utdela reprimander.

Setatis kategorisering har utgjort en av mina utgångspunkter när det gäller att analysera klassrumsspråket (Löwing, 2000).

Man kan givetvis uppfatta den matematiska kommunikationen som en diskurs som ”består av ett begränsat antal utsagor för vilka man kan definiera en mängd existensvillkor” (Foucault 1972, s. 13). Den matematiska diskursen är, som tidigare beskrivits, inte bara mycket speciell, diskursen är också väldigt olikartad i olika klassrum, för elever i olika åldrar och i olika utbildningar. En hel del av den diskurs man finner i dagens skola är i själva verket nedärvd från tidigare lärargenerationer och är därför dåligt anpassad till dagens didaktiska krav. Schoultz (2000) beskriver detta så här utgående från NO-undervisningens perspektiv:

> Med diskurs menar jag inte bara språket utan olika sätt att tala, ställa frågor, att agera som är karakteristiskt för den naturvetenskapliga praktiken. En naturvetenskaplig diskurs innefattar även användningen av historiskt utvecklade strategier som experiment, användningen av material, diagram och grafer. (s. 26)

7.7 En sammanfattning

I en artikel tar Emanuelsson (2001) upp den märkliga paradoxen *Svårt att lära - lätta att undervisa*? Fastän ämnet matematik alltid har betraktats som ett svårt ämne, där många elever misslyckas, anses det vara lätt att undervisa i matematik. Orsaken är att man inte skiljer mellan innehåll och arbetssätt/arbetsform. Det är lätt att sätta eleverna i arbete med hjälp av en lärobok och det är lätt att tala om för dem hur man själv skulle lösa en uppgift. Problemet är att detta sätt att undervisa långt ifrån alltid leder till inlärning. Den i paradoxen beskrivna uppfattningen får enligt Emanuelsson särskilt allvarliga konsekvenser när man beaktar att en stor del av de lärare som undervisar i matematik saknar utbildning för detta (Bentley, 2003).

Till skillnad från den ovan beskrivna uppfattningen menar Kilpatrick m.fl. (2001) och Niss och Højgaard Jensen (2002) att matematikundervisning är en mycket komplex aktivitet. Jag har redan tidigare försökt att ge en bild av denna komplexitet och hur olika forskare ser på faktorer som arbetssätt, förkunskaper, lärarkompetens, språk med mera. En hel del av de problem som idag beskrivs inom skolans matematikundervisning har, vad jag förstår, sina rötter i denna komplexitet.

Som ett bidrag till att utreda detta och samtidigt ge ett tillskott till den matematikdidaktiska forskningen har jag valt att i denna avhandling analysera matematikinnehållet i den kommunikation som sker i klassrummet. För att få en helhetsbild av undervisningen har jag valt att studera kommunikationen i relation till undervisningens ramar. Vissa av dessa ramar är givna och åtminstone på kortare sikt oföränderliga. Andra ramar är möjliga att byta ut eller modifiera på kortare sikt. Det är dessa ramar jag i de senaste kapitlen försökt kartlägga. Mot denna bakgrund vet jag vad jag vill studera - nu återstår att beskriva hur jag går tillväga och vilka resultat jag kommer fram till. Detta beskrivs i de följande kapitlen.

DEN EMPIRISKA STUDIEN

Kapitel 8 omfattar forskningsfrågan, forskningsmetoden samt forskningens genomförande. I de två följande kapitlen redovisas resultaten. Detta sker ur två olika perspektiv. I kapitel 9 sker redovisningen ur ett makroperspektiv, det vill säga hur läraren organiserar sin lektion och hur detta påverkar möjligheterna till kommunikation. I kapitel 10 redovisas resultaten ur ett mikroperspektiv där jag behandlar kommunikationens matematikdidaktiska innehåll.

8 Forskningsmetod och genomförande

Detta kapitel inleds med min forskningsfråga och går därefter över till att beskriva min forskningsmetod och undersökningens genomförande.

8.1 Forskningsfrågan

Språket är lärarens viktigaste verktyg vid kommunikationen med eleverna. Den kommunikation läraren är engagerad i indelar jag i två huvudgrupper: reglerande och undervisande. Med reglerande kommunikation menar jag samtal av icke ämnesrelaterat slag, såsom allmän information, frånvarokontroll och tillsägelser av disciplinära skäl. Med undervisning menar jag aktiviteter som direkt eller indirekt syftar till inlärning av matematik. Det jag primärt är intresserad av är kvaliteten i den undervisande delen av kommunikationen. Kommunikationens didaktiska kvalitet bygger på tre komponenter: lärarens egen kunskap om det hon skall undervisa om, hennes förmåga att lyfta fram poängerna i det hon skall undervisa om och att då ta hänsyn till elevens förförståelse och abstraktionsförmåga.

I kursplanen för matematik (Skolverket, 2000b) finner jag två viktiga utgångspunkter för grundskolans matematikundervisning.

- Den skall leda till att eleven kan fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer,
- Läraren skall genom konkretisering eller vardagsanknytning av stoffet kunna nå alla elever så att de successivt kan bygga upp ett mer abstrakt matematiskt tänkande.

Utifrån dessa perspektiv skall strävan vara att eleven bl.a.

> utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer, … utvecklar sin förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik, samt tolka, jämföra och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen (Skolverket, 2000b, s. 26)

Detta betyder att läraren måste behärska ett så rikt didaktiskt språk att hon kan beskriva samma matematiska problem på olika sätt och på olika språkliga och intellektuella nivåer. De ord och meningar som används vid laborativt arbete och de tankeformer detta skall leda till, liksom det språk läraren använder för att vardagsförankra matematikämnets innehåll, måste på sikt kunna överföras till ett mer formellt språk och en mer formell (abstrakt) kunskap. Den lärare som inte behärskar dessa språkliga kvaliteter kommer att bedriva en undervisning på helt olika abstraktionsnivåer samtidigt, utan koppling till varandra.

När läraren planerar och senare genomför sin undervisning sker detta inom ramen för ett visst regelsystem, det jag kallar för undervisningens fasta ramar. Samtidigt har läraren en viss metodisk frihet i val av material, metod m.m. Detta kallar jag för undervisningens rörliga ramar. Beroende på hur läraren kan anpassa sin undervisning till, respektive välja, rörliga ramar ges olika möjligheter att genomföra och optimera en viss typ av undervisning. Möjligheterna att kommunicera blir på så sätt i olika grad beroende av undervisningens ramar.

Mot denna bakgrund blir min forskningsfråga hur lärare under matematiklektioner kommunicerar med sina elever för att stödja deras lärande samt vilka villkor lärandemiljön sätter för denna kommunikation. Fokus för mitt intresse är kommunikationen av det matematiska innehållet och lärarnas möjligheter att stödja elevernas lärande, tillsammans med det språk som används för att kommunicera detta innehåll. Relationen mellan det diskursiva språket i klassrummet och det matematiska språkets krav på precision är viktig för att förstå kommunikationens gestaltning och villkor. En central fråga blir då att studera vilka villkor som gäller för kommunikationen. Utgående från givna förutsättningar, väljer läraren undervisningens innehåll och modeller för att organisera den didaktiska verksamheten/undervisningen. Dessa val sätter i sin tur ramar för hur kommunikationen med enskilda elever och grupper av elever kan gestalta sig.

När man studerar hur lärare kommunicerar ett matematikinnehåll med sina elever under en lektion, är det inte enbart en fråga om att studera och analysera de yttranden som kan observeras. Det är minst lika viktigt att iaktta och analysera vilken roll läraren tilldelar respektive elev. Läraren väljer kanske att ägna mer uppmärksamhet åt vissa elever än åt andra, samtidigt som en del elever helt glöms bort. Med en del elever blir kanske kommunikationen mer formell, med andra elever mer informell. Med vissa elever för läraren kanske en mer målinriktad kommunikation medan andra bara lotsas förbi de aktuella problemen. För att kunna uppfatta detta och för att kunna tolka hela den kommunikation som sker mellan läraren och elever måste man enligt min uppfattning ha ett grepp om helheten, alltså vad som kännetecknar en matematiklektion i termer av vem läraren kommunicerar med och vilket syfte och vilken didaktisk kvalitet kommunikationen har. Det är också viktigt att kunna följa elevernas respons på lärarens undervisande drag för att den vägen analysera om kommunikationen lett till önskat resultat.

Med kommunikationens didaktiska kvalitet avser jag två dimensioner. Den ena är kvaliteten i det matematiska innehåll som kommuniceras och den andra begripligheten ur elevernas synvinkel av det formella eller informella språk som används för att beskriva eller förklara ett innehåll eller en procedur.

8.2 Val av forskningsmetod

I kapitlen 4 har jag givit de teoretiska ramarna för min forskning och i de följande kapitlen 5 - 7 har jag redogjort för sådana teoretiska överväganden som är relevanta för min egen forskning. Det framgår då att lärare i USA, trots en intensiv forskning kring skolans matematikundervisning och trots en rad reformer, inte lyckas omsätta resultaten av detta i elevkunskaper (Stigler & Hiebert, 1999). En liknande uppfattning redovisas för svenskt vidkommande i Skolverket (2003b). En orsak till detta verkar vara att en stor del av den forskning som förekommit handlat om lärares uppfattningar om undervisning och inlärning eller om elevers tänkande. Samtidigt har mycket lite forskning handlat om hur de på det sättet vunna kunskaperna har omsatts i skolans undervisning (Artigue, 2000; Ball, 2000). Min egen forskning är inriktad mot att undersöka hur lärare omsätter didaktiska idéer i sin undervisning.

För att analysera innehållet i matematikundervisningen utgår jag från att lärarna är rationella varelser som i grunden strävar efter att ge eleverna en god matematikundervisning. Holme och Solvang (1986) diskuterar frågan om människor i grunden är rationella eller ej. De menar att den rationella människan har

> … en total överblick över sina handlingsalternativ och konsekvenserna av dem. Människan har också en frihet att välja den handlingsinriktning som gagnar henne mest. (s.34)

Samtidigt finns det ett avstånd mellan ideal och praxis. De anför två faktorer som är orsaker till detta:

> För det första komplexiteten i den situation man lever i, för det andra kontinuerliga förändringar beträffande grunderna för ens handlingsalternativ som samspelet mellan människor, grupper av människor och det sociala systemet leder till. (s. 34)

Detta stämmer väl överens med min uppfattning. Lärare försöker att arbeta enligt gällande styrdokument och nya pedagogiska idéer. Situationen i klassrummet är emellertid mycket komplex och det är många faktorer som måste samordnas (se till exempel Shuell, 1996; Ball & Bass, 2000). Det gäller för läraren att utgående från aktuella mål och ramar, välja metodik, arbetssätt och arbetsform. Detta måste ske utgående från lärarens professionella kunskaper och med hänsyn tagen till olika individers motivation, ambitioner och förkunskaper. Min avsikt är alltså att studera hur lärare i den komplexa miljö som klassrummet utgör, ofta med hjälp av ett läromedel, kommunicerar ett matematikinnehåll med sina elever och om detta är begripligt och utvecklingsbart sett ur ett elevperspektiv. Studierna sker med hjälp av observationer av matematikundervisning i ett antal klasser. För den som är bekant med territoriet är det oftast möjligt att, utgående från en analys av kommunikationen, avgöra om en elev begripit eller ej. De observationer som görs kombineras med att de undervisande lärarna intervjuas.

Tekniskt sett går detta till så att alla de kommunikationssituationer som läraren deltar i under lektionerna tas upp på ljudband. Samtidigt noterar två observatörer, oberoende av varandra, såväl vilka som är aktörer vid respektive kommunikation som vad som i övrigt händer under lektionen. Banden transkriberas därefter och den då erhållna texten kompletteras med observatörernas anteckningar.

För att på djupet förstå vad som sker i klassrummet måste mina tolkningar av lärarens kommunikation sättas i relation till undervisningens ramar. På en övergripande nivå utgår jag då från en modernare version av ramfaktorteorin. Detta ger mig möjligheter att analysera olika ramars betydelse för undervisningen. Inom den moderna ramfaktorteorin ägnas stor uppmärksamhet åt aktörerna i klassrummet. Huvuddelen av uppmärksamheten ägnas därför åt en av aktörerna, nämligen läraren. För att tolka och förstå hennes handlande använder jag en hermeneutisk forskningsmetod. Det blir således via lärarna jag kan studera för matematikundervisningen betydelsefulla faktorer.

Sammanfattningsvis har jag alltså valt att göra en kvalitativ studie med några kvantifierande inslag. Studien kan betraktas som naturalistisk enligt

Patton (1990). Eftersom läraren har ett uttalat uppdrag, blir min forskning till viss del normativ. Den blir också delvis normativ av det skälet att det oftast går att avgöra om ett matematiskt begrepp är korrekt framställt och om ett problem är korrekt löst eller ej. Samtidigt har läraren stor frihet att välja metod, arbetsform och arbetssätt. Den kvalitativa delen av min forskning går ut på att förstå lärarens val av metod, arbetsform och arbetssätt i relation till gällande ramar samt hur läraren mot denna bakgrund kommunicerar ett matematikinnehåll. En del av vad som händer under matematiklektion kan också kvantifieras såsom hur läraren fördelar sin tid mellan olika elever eller mellan reglerande och undervisande kommunikation.

För att förstå lärarens agerande i klassrummet krävs det god kännedom om den miljö i vilken undervisningen förekommer. Jag förlitar mig därvid på min långa beprövade erfarenhet som matematiklärare och lärarutbildare. Givetvis kan jag inte i alla situationer vara helt objektiv. För att i god hermeneutisk anda redovisa ur vilket perspektiv jag gjort olika tolkningar har jag i kapitel 2 beskrivit min egen bakgrund och i kapitel 6 min syn på lärarperspektivet i förhållande till ett innehåll dvs. den kompetens en matematiklärare bör ha. Tolkningen sker således utgående från såväl vetenskapliga teorier som beprövad erfarenhet.

8.3 Analysinstrument

Vid analys av data utgår jag från två tidigare nämnda instrument, lärandefunktionen (se 5.4) och lärarperspektivet (se 6.7). När jag på en *makronivå* skall beskriva lärarens val av och utnyttjande av undervisningens ramar utgår jag från lärandefunktionens konstanter och parametrar. När jag på en *mikronivå* skall beskriva undervisningens innehåll i relation till undervisningens ramar behöver jag utgå från båda instrumenten. För att beskriva undervisningens innehåll ur en matematikdidaktisk synvinkel utgår jag från lärandefunktionens variabler medan jag för att beskriva lärarens förhållningssätt till innehållet utgår från lärarperspektivet.

Poängen med ramfaktorteorin är att den visar hur ett antal ramar påverkar undervisningsprocessen. I sin doktorsavhandling beskriver Lundgren (1972) hur han använde bandspelare och observatör för att samla information om vad som händer i undervisningsprocessen. Han använde därefter ett sofistikerat kodningssystem för att klassificera kommunikationen. Genom att använda denna kodning kunde han finna vissa mönster och regler i kommunikationen. Han kunde också notera om kommunikationen var ämnesrelevant, dvs. om den handlade om matematik. Vad som för mina syften saknades i hans forskning var huruvida den matematik som kommunicerades också var relevant och uppfattbar ur olika elevers synvinkel. Jag vill alltså, till skillnad från Lundgren, lägga ett matematikdidaktisk perspektiv som grund för mina analyser.

Något närmare mina syften ligger den forskning i samma tradition som utfördes av Kilborn (1976, 1979a). I sin forskning studerade han bland annat undervisning i aritmetik. De viktigaste ramfaktorerna i hans studie var å ena sidan kursplaner och läromedel och å andra sidan elevernas förkunskaper. Genom ett speciellt utprövat testpaket kunde Kilborn

- i förväg göra en mycket detaljerad diagnos av elevernas förkunskaper inom det område undervisningen behandlade
- i förväg klassificera varje uppgift i det använda läromedlet med hjälp av samma instrument som användes för att bygga upp diagnoserna
- i efterhand och med samma instrument klassificera relevansen av det matematikdidaktiska innehållet i lärarens kommunikation med eleverna.

Kilborn kunde mot denna bakgrund konstatera att många av de uppgifter som behandlades under en lektion var orimliga att lösa för vissa elever utgående från deras aktuella förkunskaper. Han kunde även konstatera att lärarna var omedvetna om elevernas förkunskaper i relationen till lärobokens uppgifter. För att lösa den akuta kris detta ledde till tvingades lärarna ”lotsa” eleverna förbi de problem som uppstod i undervisningen istället för att reda ut dem för eleverna. Konsekvensen blev att vissa elever, trots att de fick en hel del ”hjälp” av läraren, inte lyckades förstå det matematikinnehåll de undervisades om.

Genom att klippa isär de transkriberade utskrifterna och därefter foga samman dem på elevnivå, kunde Kilborn (1976) gör helt nya tolkningar av vad som hände i klassrummet. Detta gällde inte minst genderperspektivet. Han visade på ett enkelt sätt hur ett fåtal pojkar, när de inte förstod hur man löste uppgifterna, blev bråkiga och krävde mycket uppmärksamhet samtidigt som flickorna fick allt mindre uppmärksamhet eller helt glömdes bort. Detta är exempel på hur några av undervisningens ramar skapade problem i kommunikationen och därmed försvårade elevernas lärande.

Till skillnad från Kilborns arbete, som på en nivå ligger nära mitt eget, är det inte eleverna som är mitt primära forskningsobjekt, utan deras lärare. Jag vill studera lärarens sätt att kommunicera ett matematikinnehåll utgående från vad jag kallar fasta och rörliga ramar. Elevernas deltagande i kommunikationen blir för mig enbart en indikator på om lärarens och lärobokens instruktioner är ”transparenta” alltså uppfattbara och tolkbara av eleverna. Det är ju eleverna som är måltavlan för kommunikationen.

Liksom Kilborn intervjuade jag lärarna före lektionen, om hur de hade planerat undervisningen och efter lektionen, för att få reda på hur de uppfattade vad som hände under lektionen. Jag är också intresserad av vilka uppgifter respektive elev löser under lektionen. Som Kilborn påpekar är nämligen elevens kommunikation med ett läromedel oftast mer frekvent än kommunikationen med läraren.

8.4 Urval och genomförande

För att studera undervisningen under matematiklektioner valde jag sammanlagt nio lärare från olika stadier inom grundskolan. Mina kriterier för valet av dessa lärare var att de skulle vara utbildade under de senaste tio åren och att skolledaren ansåg dem vara relativt duktiga lärare. Lärarna undervisade vid tiden för studien i fyra olika kommuner i Västsverige. Lärarna fick några dagar i förväg besked om att de skulle besökas och att jag ville följa en helt vanlig matematiklektion. Jag kan tänka mig att lärarna förberedde sig lite extra inför dessa lektioner men att de i övrigt genomförde dem som en helt vanlig lektion.

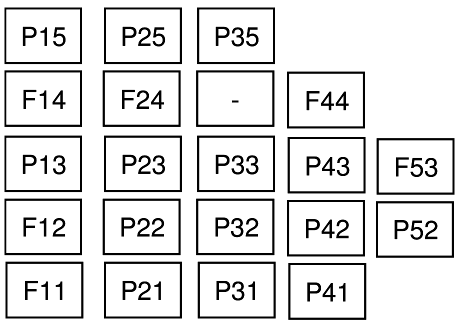
Efter den inledande intervjun fick läraren en liten bandspelare som bars i fickan eller i ett speciellt bälte. Till bandspelaren var kopplad en känslig mikrofon som fästes i lärarens skjorta eller tröja. När lektionen startade slogs bandspelaren på. Detta betyder att all den kommunikation läraren var inblandad i under lektionen togs upp på bandet.

För att få kontroll över vilka elever läraren kommunicerade med vid olika tidpunkter under lektionen tilldelades varje elev en tvåsiffrig kod relaterad till deras placering i klassrummet. I början av lektionen fick varje elev ett kort med denna kod. På kortet skrev eleverna direkt sitt namn, eller vad läraren kallade dem, samt numret på den första uppgiften eleven i fråga arbetade med under lektionen. Mot slutet av lektionen, innan eleverna lämnade klassrummet, fick de dessutom anteckna numret på den uppgift som var den sista de arbetade med under lektionen. För en pojke som satt på tredje platsen i andra raden blev koden P23. För en flicka som satt på fjärde platsen i andra raden, blev koden F24 och hennes kort kunde efter lektionen se ut så här.

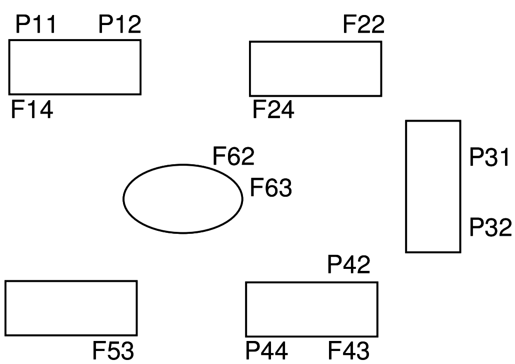
24 Namn: *Lina*
Första uppgift: 31
Sista uppgift: 35 b

Dessa data blev viktiga när det gällde att efter transkribering av ljudbanden kunna följa vilka aktörer som deltog i olika dialoger och i förkommande fall avgöra vilken uppgift läraren diskuterat med eleven.

Innan lektionen påbörjades gjordes en skiss över bänkarnas eller bordens placering i klassrummet och varje plats fick en tvåsiffrig kod. Det var utgående från den koden de ovan beskrivna korten delades ut. Skissen användes under lektionen av observatörerna som med dess hjälp kunde hålla reda på de aktuella aktörerna. I Annas klass i skolår 4 var eleverna placerade en och en vid var sin bänk och den skiss som användes hos Anna i skolår 4 hade följande utseende:



Hos David i skolår 7 var eleverna placerade i grupper runt sex bord. Motsvarande skiss såg då ut så här:



Besöket hos en lärare inleddes alltid med en kort intervju. Läraren fick då berätta vad lektionen skulle innehålla och vad läraren hade för mål med lektionen. Detta följdes upp med några kompletterande frågor. Dessa frågor blev ofta olika beroende av lektionens typ och innehåll. Avsikten med intervjun var att förbereda mig inför vad som skulle ske under lektionen och för att ge mig en beskrivning av lärarens syfte och mål med den. Detta kunde senare jämföras med lektionens utfall.

Under varje lektion deltog, förutom jag själv, ytterligare en observatör med mångårig erfarenhet av klassrumsobservationer. Vi två antecknade oberoende av varandra vad som hände under lektionen, till exempel vad läraren skrev på tavlan och koden för de elever som successivt deltog i kommunikationen. Med cirka en minuts mellanrum gjordes dessutom en anteckning om tiden. Denna tidsangivelse koordinerades senare med ljudbandet. För att vara säkra på vilken uppgift lärare och elever talade om kontrollerade vi vid behov detta i elevens räknehäfte, men givetvis enbart om detta var möjligt utan att störa lektionen.

Direkt efter lektionen kompletterade vi placeringslistan med den första och sista uppgiften respektive elev arbetade med. Från placeringslistan kunde man därefter få en hel del information, till exempel att elev P32 arbetade med en diagnos under hela lektionen och att F11, som var en av klassens långsammaste elever, bara hann med att räkna två uppgifter under hela lektionen. Så här såg placeringslistan från Annas lektion ut efter det att uppgifterna förts in:

P15 195-202	P25 208-229	P35 208-222		
F14 207-208	F24 239-243	-	F44 184+Dia3	
P13 197-198	P23 209-210	P33 208-214	P43 172-176	F53 211-225
F12 207-208	P22 207-210	P32 Dia 2	P42 sid 287	P52 256-259
F11 173-174	P21 207-210	P31 195-197	P41 193-197	

Så snart som möjligt efter lektionen gjordes en transkribering av ljudbandet. Detta utfördes i två steg. I steg ett noterades endast själva dialogen, tidpunkten för när en cykel, alltså en sammanhängande kommunikation startade, och om det var läraren eller en elev som talade. I steg två koordinerades den nu nedskrivna dialogen med observatörernas anteckningar om vilka som var aktörer och vad som hände ”utanför” själva dialogen. I en del fall kunde det bli en viss tvekan om vem som talade eller vilken uppgift som löstes. I så gott som samtliga fall kunde vi lösa problemet med hjälp av uppgifterna på placeringslistan. Eftersom eleverna i allmänhet arbetade i sin egen takt kom nämligen de uppgifter som angavs på elevkortet att bli något av ett fingeravtryck för eleven.

Av de nio inspelade lektionerna var två omöjliga att transkribera. Under en av lektionerna blev det ett kontaktfel på bandspelaren och stora delar av ljudet försvann. I ett annat fall viskade lärare och elever på ett sådant sätt att delar av kommunikationen inte kunde rekonstrueras. Med hjälp av våra anteckningar och med stöd av de intervjuer som gjordes med dessa lärare före och efter lektionen, kan jag emellertid konstatera att dessa två lektioner i stort följde sett samma mönster som dokumenterats för de övriga sju lektionerna. Det fanns därför inga skäl att komplettera studien genom att dokumentera fler lektioner.

En intressant erfarenhet var den stora skillnaden i kvalitet som vi som observatörer upplevde när vi diskuterade och bedömde en lektion direkt efter observationen jämfört med den uppfattning vi fick efter att ha analyserat samma lektion efter transkriberingen. Efter många års tjänstgöring som metodiklärare trodde vi oss kunna bedöma en lektions kvalitet genom att observera undervisningsprocessen. Detta visade sig senare vara alltför optimistiskt.

8.5 Analys av data

Sedan transkriberingen kompletterats med förtydligande kommentarer och koden för respektive aktör gjordes en indelning av kommunikationen i cykler och drag. Med ett drag menar jag en individs inlägg (replik) i en diskussion eller förklaring. Man kan jämföra detta med dragen i ett schackspel. (se till exempel Lundgren, 1979). En sammanhängande svit av drag som behandlar en viss situation eller frågeställning, till exempel hur man uppför sig, skriver ett svar eller löser en viss uppgift, kallas en cykel. Varje cykel har därvid ett bestämt innehåll eller ett bestämt syfte. En sammanhängande kommunikation mellan en lärare och en elev kan ofta innehålla flera cykler, till exempel när kommunikationen byter innehåll från en uppgift till en annan eller från en tillrättavisning till en förklaring. För varje cykel finns således ett bestämt syfte. Ett sådant syfte kan vara att eleven vill ha hjälp med en uppgift. Ett annat syfte kan vara att läraren vill förklara något, meddela något eller kanske lugna ner en elev som stör.

För att få en första överblick över materialet klassificerades de olika replikerna (dragen) i kommunikationen utgående från vad som var syftet med draget ifråga. En lektion inleddes och avslutades i allmänhet med information av allmän (alltså inte ämnesinriktad) karaktär. Det kunde gälla kommunikation av mera socialt slag såsom kontroll av frånvaro, uppföljning av sena ankomster etc. Jag kallar den typen av drag för *reglerande* och gav dessa drag koden SOC. Under ett par av lektionerna inledde läraren undervisningen med en gemensam genomgång av hur elevernas skulle arbeta under lektionen. Den typen av genomgång kunde vara av två slag. Om ett drag enbart handlade om vilka uppgifter man skulle lösa, vilket material man skulle använda, hur man skulle skriva, vem man skulle samarbeta med och så vidare så klassificerade jag detta som *reglerande genomgång* vilket kodades som GAR. Om däremot cykeln handlade om matematikinnehållet, alltså om strategier för att lösa en uppgift, om metaforer eller om hur man kan tänka, så klassificerade jag det som *instruerande genomgång* med koden GAD.

Större delen av lektionerna bestod i allmänhet av *självständigt arbete* (bänkarbete). Läraren gick då runt bland eleverna och kommunicerade med dem en och en eller i mindre grupp. Denna kommunikation kunde vara av tre olika slag

- *allmänt reglerande* varvid lärare och elever kommunicerade något som inte var knutet till ämnesinnehållet. Syftet var ofta rent socialt. Detta kodades HIS.
- *reglering av undervisning* vilket innebär att man diskuterade vilka uppgifter man skulle lösa, vilket material man skulle använda, hur man skulle skriva i boken etc. Detta kodades HIR.
- *undervisande*, vilket innebär att kommunikationen var direkt kopplad till förståelsen av ett matematiskt innehåll såsom ett begrepp, en beräkningsstrategi eller dylikt. Denna klassificering gav en första information om hur framgångsrikt valet av rörliga ramar (parametrar) hade varit. Detta kodades HID.

Jag ger nu några exempel på denna kodning från en av lektionerna. Tidsangivelserna utgår från 00.00 vid lektionens start.

00.20	L12	F12, varför är inte din mamma här?	SOC
	F12	Jag vet inte …	SOC
	LAE	Ja, ni har fått sådan här information om åhörardagar va?	SOC
3.45	LAE	Om vi skall räkna ut arean nu … så kommer det en uppgift … där man får klippa litet och rita lite cirklar. Jag har 10 saxar med, så ni får samsas om dom. Passare har jag några fler, men … dom är inte så bra så har ni tur så får ni tag på en som fungerar. Men det går nog att lösa.	GAR
		Men uppgiften bygger på att man ritar en cirkel med radien 5. (Skriver r = 5 cm.) …Och diametern är då,	GAD
	L45	P45?	GAD
	P45	Öh, öh 10	GAD
	LAE	10 ja. …(Ritar en kvadrat kring cirkeln.) Så ritar vi in cirkeln i en fyrkant…. en kvadrat. Hur stor är kvadraten? Hur stor area har kvadraten?	GAD
	P14	En kvadratdecimeter	GAD
	P33	100%	GAD
	P13	100	GAD
	P14	10, …. 10 cm	GAD

	LAE	Nej du räcker upp en hand om du vill säga något.	GAR

9.50	P23	Finns det någon mer sådan där…?	HIR
	L23	Passare? …. Kommer ni igång?	HIR
		…	
	F42	Du, L, När du ändå står där, kan du dra ner persiennerna lite. Solen är rätt irriterande.	HIS
	L42	Det kan jag väl fix… Nej det går inte. Den sitter fast.	HIS
	F42	Du kan ta ner den då?	HIS
		…	
	L41-43	Varför var ni sena nu? … Ute på uppdrag?	HIS
	F41	Jaoa.	HIS
	L41	Vad då för något?	HIS
	F41	Vi skulle hämta hennes vantar i kyrkan.	HIS
	L41	… Och det var ni tre stycken för?	HIS
	F41	Ja, dom följde med mig. Vi trodde inte det skulle ta lång Så F43 och F41 bar var sin vante åt dig då?	HIS
	L41	…	HIS

14.35	P23	Nej, L, nu måste du hjälpa oss lite grand som du brukar göra.	HIR
	L23	Ja, men det är ingen ide att jag hjälper dig om ni inte jobbar.	HIR
	P24	Ja, men det är inte så lätt när vi har problem.	HIR
	L23-24	Ja, men jobba nu annars så kommer ni inte till några problem som jag kan hjälpa er med.	HIR
	P23	Du L.	HIR
	L23	Du har du läst ordentligt nu.	HID
	P23	L.	HIR
	L23	Rita en cirkel med …	HID
	P24	Han försöker med en sådan här…	HID

Analysen av data inleddes med att utgående från denna kodning klassificera den övergripande avsikten med respektive drag och cykler. Detta gav en första, kvantitativ, uppfattning om undervisningens effektivitet om man därmed menar andelen cykler och drag som hade ett matematiskt innehåll i förhållande till andelen drag som hade ett administrativt eller reglerande innehåll. Resultatet av detta kunde sedan jämföras med lärarens val av ramar för undervisningen och hur dessa ramar utnyttjades. Detta gav viktig information om lektionen på vad jag kallar en makronivå.

Efter att ha fått en övergripande information genom den just beskrivna klassificeringen vidtog tolkningar av varje enskild cykel, alltså varje sammanhängande svit av drag. Det gällde då att utgående från elevernas respons avgöra lärarens syfte med kommunikationen, om kommunikationen var relevant med avseende på deras behov och om de hade tillräcklig förförståelse för att ta till sig innehållet i kommunikationen. Under de flesta lektioner hämtades större delen av elevernas instruktioner från ett läromedel eller en stencil. Det blev därför också intressant att tolka samspelet mellan lärare och läromedel.

När man tolkar ett material av detta slag är det viktigt att man analyserar materialet ett flertal gånger, varje gång ur en ny aspekt och utgående från dittills vunna erfarenheter. Som ett exempel på hur man kan se och analysera hur läraren individualiserar använde jag bland annat den teknik som beskrivs av Kilborn (1976). Jag klippte isär allt det transkriberade materialet och klistrade därefter ihop det igen utgående från hur respektive elev eller elevgrupp deltog i kommunikationer med läraren. På så sätt kunde jag finna nya mönster om vilka elever som deltog i kommunikationer med läraren och om denna undervisning gav en kontinuitet sett ur respektive elevs synvinkel.

8.6 Att tolka aktörerna

En viktig del av analyserna av materialet sker på vad jag kallar en mikronivå och omfattar matematikinnehållet i lärarens kommunikation med eleverna. Den kommunikation som då skall analyseras är som tidigare nämnts mycket komplex. Det händer mycket på olika nivåer samtidigt under en lektion. Dessutom kan man i de flesta av de drag som görs även läsa in andra avsikter än att enbart förklara eller diskutera ett innehåll. I det här avsnittet redovisas mot vilken bakgrund mina tolkningar görs.

I Lindblads m.fl. (1999) tillämpning av ramfaktorteorin spelar aktörerna och tolkningen av deras aktiviteter en viktig roll. I denna studie är det läraren som är huvudaktören och en av de viktigaste uppgifterna blir därför att tolka lärarens kommunikation i klassrummet. En kvalitativ analys av lärarens kommunikation med eleverna måste därför göras. Att detta inte är helt lätt uttrycker Liberg (2003) så här:

> Praktiknära material är vidare ofta rika, på så sätt att man kan återvända till dem med nya frågeställningar och nya infallsvinklar. En noggrann analys av frågeställningarna i ljuset av dessa perspektiv har vidare möjliggjort utvecklandet av relevanta analytiska redskap. (s. 37)

Tobin (2000) som arbetat med *Interpretiv Research in Science Education* uttrycker en liknande syn på följande sätt:

> The ”re” in research is important in that researches not only seek to know but also are sceptical about what is learned; therefore, they look again in a search for evidence to counter the assertion of a study. (s. 488)

Den kvalitativa analysens mål är att upptäcka *variationer, strukturer* och/eller *processer* hos ännu inte kända eller otillfredsställande kända företeelser, egenskaper och innebörder. Detta görs inom hermeneutiken och fenomenologin. För att belysa skillnaden mellan hermeneutik och fenomenologi citerar Barbosa da Silva och Wahlberg (1994) följande uttalande av Kierkegaard:

> a) det är möjligt att förstå kristendomen utan att vara kristen, men
>
> b) det är inte möjligt att förstå vad det innebär att vara kristen utan att själv vara det. (s. 58)

De förklarar skillnaderna så här:

> Utsaga a) kan tolkas så att man rent fenomenologiskt kan förstå kristendomens ”väsen”, fundamentala egenskaper eller ”struktur” (mening) utan att vara kristen. Utsaga b) syftar på en djupare mening som man kan komma åt genom en hermeneutisk - fenomenologisk analys eller, rättare sagt, en existensanalys. (s. 58)

Barbosa da Silva och Wahlberg menar att hermeneutiker utgår från fem grundläggande förutsättningar.

1. Förståelse av mening sker alltid i en kontext.
2. I varje tolkning eller förståelse är delar beroende av helheten och vice versa.
3. Varje förståelse förutsätter eller bygger på en bestämd förförståelse.
4. Varje tolkning föregås av vissa förväntningar eller förutfattade meningar.
5. Den finns en nivå i tolkningsprocessen där man inte hundraprocentigt kan skilja mellan subjekt och objekt.

Detta innebär att man måste förstå kontexten, alltså klassrumskulturen under en matematiklektion. Det är då inte bara det enskilda yttrandet som skall analyseras utan dess relation till en helhet. Detta går inte att göra utan förförståelse, utan att ha en beprövad erfarenhet inom fältet.

Förförståelsens betydelse tas också upp av Rudestam och Newton (1992):

> What sets hermeneutics apart from more empirical or rational orientations is the belief that a particular activity can only be understood in conjunction with

> understanding the context in which it occurs rather than as an abstraction or a set of causal relationships. (s. 35)

De menar också att skillnaden mellan ”a rationalist or empirist explanation and a hermeneutic interpretation” är som skillnaden mellan att känna en stad genom dess karta och att känna den genom att bo där och promenera på gatorna.

Enligt Sjöström (1994) studerar hermeneutiken ”hur *innebörder och intentioner* hos unika människor och företeelser sedda i sitt sammanhang av tid, rum och mening kan förstås” (s. 73). Hermeneutik söker ett budskap. Man talar om hermeneutikens *good-reason-assay*. Med det menas att man söker rimliga skäl för ett handlande. Dessa skäl söker man inte i blindo utan utgående från en förförståelse. Sjöström uttrycker detta på följande sätt med stöd av Heidegger:

> Heidegger lade begreppet *den hermeneutiska cirkeln* till grund för tolkning och förståelse. Det bygger på att varje fråga i sig innefattar både det frågan handlar om, frågan om det man söker genom frågan. Därför finns det alltid någon föreställning om svaret redan då frågan ställs. Man har alltså redan då man väljer undersökningsmetoden en uppfattning om vad det är för slags fenomen man söker. (s. 82)

Sjöström tar också upp vikten av att det klart framgår på vilka grunder man gjort de redovisade tolkningarna. Man måste i det sammanhanget ha klart för sig skolans roll och lärarens uppgifter. Utbildningen har normer som klargörs i styrdokumenten för skolan. Observera att det här innebär att vissa av mina tolkningar blir normativa i den meningen att de utgår från de krav samhället ställer på skola och lärare samt från en matematikdidaktisk teori. Det är detta som Bishop (1992) uttrycker genom att jämföra ”what is” med ”what might be”. Samtidigt som en svensk lärare har vissa krav på sig, har de stor metodisk frihet och stor frihet vad gäller val av stoff, arbetsform och arbetssätt. Inom det här fältet gäller mina tolkningar huruvida lärarens strategier är lämpligt valda utgående från syftet med undervisningen och i vilken utsträckning hans eller hennes kommunikation kan tänkas leda till de centralt respektive lokalt uppställda målen. Att tolka vad läraren gör under en matematiklektion kräver således god kännedom om skola och undervisning.

När man tolkar de olika lärarnas undervisning ur ett mikroperspektiv gäller följande utgångspunkter:

- Man kan oftast ur ett matematikdidaktiskt perspektiv avgöra såväl vad som är mer eller mindre godtagbart i en lärares behandling av ett matematikinnehåll liksom vad som är en rimlig eller mindre rimlig förklaring. Det finns en omfattande forskning och beprövad erfarenhet att falla tillbaka på.

- För att kunna tolka den matematikdidaktiska innebörden i en kommunikation krävs det att man är väl insatt i territoriet. Det krävs också att man har en god överblick över situationen i sin helhet. Jag ser det därför som min skyldighet som forskare, och med min detaljkännedom om materialet, att inte bara referera dialogen utan även att hjälpa läsaren att tolka innebörden i vad som sägs och görs. För att synliggöra vissa tillkortakommanden ger jag ibland, som kontrast, exempel på andra möjligheter att lösa eller förklara ett visst problem.

8.7 Undersökningens trovärdighet och tillförlitlighet

Undersökningen omfattar sju lärares undervisning i skolåren 4, 6, 7, 8 och 9. Det jag studerar är hur dessa sju lärare, utgående från givna och valda ramar, kommunicerar ett ämnesinnehåll med eleverna. I studien förekommer som tidigare nämnts ett bortfall på två lärare. Detta bortfall är relaterat till tekniska problem och kan av det skälet inte anses vara systematiskt. De intervjuer och anteckningar som gjordes i samband med de observerade lektionerna styrker emellertid att dessa lärares undervisning, och deras val av ramar, inte skiljer från de övriga lärarnas.

Utgående från sju lärares undervisning kan jag givetvis inte dra slutsatser som är allmängiltiga. Å andra sidan visar det sig att flera av de mönster jag finner i dessa lärares undervisning och val av ramar också beskrivs av andra forskare. När så är fallet vågar jag förmoda att dessa mönster är vanligt förekommande i svensk grundskola.

Det jag på det här sättet vill studera är hur en vanlig, relativt duktig lärare, utbildad efter lärarutbildningsreformen 1989, undervisar. Ett problem är därvid att de lärare jag studerat varit förberedda på mitt besök och att de av det skälet förberett sig lite extra. Man skulle därför kunna hävda att det inte är helt vanliga lektioner jag studerat. Å andra sidan kan jag hävda att de lektioner jag studerat motsvarar vad en väl förberedd lärare kan prestera. Det betyder att jag ser vad som motsvarar dessa lärares uppfattning av en väl genomförd lektion. Detta betyder i sin förlängning att det val av ramar och problem som kunde iakttas under dessa lektioner knappast kan hänföras till slarv från lärarnas sida. Jag ser således inga allvarliga validitetsproblem på den punkten.

Ett annat problem är hur närvaron av två observatörer och förekomsten av mikrofon och bandspelare har påverkat validiteten. Jag bedömde emellertid att en så gott som osynlig kassettbandspelare skulle påverka undervisningen mindre än en videokamera. Samtidigt skulle inte videokameran ha gett mer information för mitt syfte än den jag kunde få med hjälp av ljudband och två oberoende observatörer. Vad jag kunde iaktta så var alla lärarna professionella nog för att kunna genomföra en helt normal lektion. Möjligen kan de ha varit lite mer noggranna än vanligt under dessa lektioner. På motsvarande sätt har eleverna sannolikt varit mer disciplinerade än vanligt. När det gäller det ämnesmässiga innehållet i kommunikationen, är det knappast möjligt för lärare och elever att prestera något som inte redan finns i deras kunnande.

Transkriberingen av ljudbanden är en annan felkälla. De sju band som transkriberades var emellertid tydliga nog och det är få ord som fallit bort. Större delen av det kroppsspråk som förekom har vi också strävat efter att notera. Banden har avlyssnats och lästs mot den transkriberade texten av båda observatörerna oberoende av varandra. När vi vid enstaka tillfällen varit oense om vad som sägs eller innebörden i vad som sägs har vi gemensamt diskuterat situationen och enats om den rimligaste tolkningen. Under varje lektion förekommer det några enstaka yttranden där aktören inte kunnat identifieras. Det gäller i samtliga fall en kort kommunikation på ett eller ett par ord som en elev säger från en obestämbar plats i klassrummet. Dessa repliker är så få att en identifiering av aktörer knappast kunnat påverka helhetsbedömningen av lektionerna.

När det gäller den didaktiska tolkningen av kommunikationen har den skett utgående från min beprövade erfarenhet som lärare och lärarutbildare och med den tidigare beskrivna matematikdidaktiska teorin som bakgrund. Alla de slutsatser jag dragit har i efterhand analyserats av min biträdande observatör som har stor internationell erfarenhet av att bedriva klassrumsstudier och att utvärdera matematikundervisning. Jag menar därför att den tolkning som utförts är väl förankrad i vår gemensamma syn på undervisning och matematikdidaktisk teori för undervisning. Givetvis skulle andra forskare med en annan syn på lärare och matematikdidaktik kunnat komma till andra slutsatser, men detta ligger i hermeneutikens natur.

8.8 Några etiska överväganden

Det är givetvis ett etiskt problem med att beskriva och analysera material av detta slag. Jag har emellertid varit noga med att dölja såväl på vilken skola som hos vilken lärare klassrumsobservationerna har skett. Endast läraren själv, men knappast varken skolledare eller kolleger, skulle kunna identifiera vem som undervisat under vilken lektion. När det gäller de elever som deltagit i kommunikationen, torde det vara omöjligt för någon annan än läraren själv att identifiera en individ. Aktörerna är med andra ord i det närmaste helt anonyma och förekommer aldrig med sitt eget namn.

Ett annat etiskt problem är hur transkriberingen skett. När en lärare kommunicerar med en elev använder läraren ett talspråk. Skulle man skriva ned exakt vad läraren då säger skulle texten bli av typen ”åsså sen gå du te nettifura se”. Det är inte rimligt att beskriva kommunikationen på det sättet. Jag har därför strävat efter att översätta vad läraren avser att säga till ett, ur lärarens och elevernas synvinkel, adekvat skriftspråk. I det här fallet skriver jag alltså ”och sedan går du till 94c”. Undantag mot detta görs i de fall när till exempel läraren faktiskt uttrycker sig på ett sätt som medför tolkningsproblem ur en elevs synvinkel. I sådana fall försöker jag beskriva sådana språkliga eller innehållsmässiga oklarheter så tydligt som möjligt. Min uppgift är ju till syvende och sist att göra en så relevant och rättvisande tolkning som möjligt av undervisningsprocessen.

8.9 Formalia

Den kommunikation som sker i klassrummet har alltid ett syfte och ett innehåll. Man kan därför dela upp kommunikationen i olika ”paket” som sinsemellan är homogena med avseende på aktörer, syfte och innehåll. Ett sådant ”paket” kallar jag, som tidigare nämnts för en cykel och de olika, avgränsade yttranden som ingår i en cykel kallar jag drag.

När lärare planerar och därefter genomför en lektion så styrs hon av olika ramar (Dahllöf, 1967, Lundgen, 1972). Bland dessa ramar kan nämnas läroplanens timplan, skolans resurser och lokaler samt antal elever i klassen. Utgående från dessa överordnade ramar gör läraren själv ett antal val av antal ramar (parametrar) som även de blir styrande för undervisningen. Dessa ramar är av två olika slag. Dels reglerande ramar som styr ordningen i klassen, dels undervisningsramar som styr undervisningens utformning. De här ramarna påverkar lärarnas möjligheter att kommunicera med eleverna. Om man studerar de kommunikativa drag som görs av lärarna i denna studie kan de inordnas i följande grupper. (Se även Löwing, 2000)

Reglerande inledning och *Reglerande avslutning* som omfattar sådan allmän information som inte har med innehållet i den aktuella undervisning att göra. Det kan gälla hur eleverna uppför sig eller en information om ett kvartssamtal eller en schemaändring.

Genomgång som omfattar en för alla elever gemensam instruktion inför dagens arbete.

Självständigt arbete (bänkarbete) varvid eleverna sitter ensamma eller i grupp och arbetar på egen hand.

Genom att analysera kommunikationen utgående från denna typ av kommunikativa drag, kan man bilda sig en god uppfattning om lärarens roll som arbetsledare och hur stor del av lektionen som ägnas åt att avhandla ett ämnesinnehåll.

Vid transkriberingen av lektionerna har jag i huvudsak använt de normer som anges i Linell (1994). I följande exempel kan man se de viktigaste notationerna jag har använt:

F22	Ja det måste bli 4. Tar man väl 4 delat i-.
L22	Säg färdigt din mening.
F22	ÄNDRAR SIG. 200 delat med 4.
L22	(2s) Och det blir?
F22	Och det blir-. (2s) Usch.
…	
L22	Du måste kunna räkna 200 delat med 4 i huvudet.

F22 betyder att det är en flicka, som sitter i andra raden eller vid andra bordet. När läraren talar med F22 noteras detta L22. Om läraren talar med hela klassen noteras det LAE och om läraren talar både med F22 och P23 (pojke) noteras det L22,23.

I det första draget ovan avslutas meningen med delat i-. Det betyder att eleven sväljer resten av ordet eller meningen. I det tredje draget vill jag kommentera att eleven ändrat strategi. Sådana kommentarer till läsaren skrivs alltid med versaler. I fjärde och femte draget återfinns notationen (2s). Det innebär att det är en paus på ca 2 sekunder. Ovanför lärarens sista drag återfinns tre punkter (…). Det markerar att det har förekommit ett antal drag mellan detta drag och det föregående. Dessa drag tillför enligt min uppfattning ingen ny information och har därför hoppats över.

För att kunna följa kommunikationen mellan läraren och en elev måste man ibland känna den uppgift som diskuteras och hur den formulerats. Uppgifterna anges alltid inom parentes och i cyklerna med kursiv skrift såsom i följande exempel.

L63	Varför blir det 3 här, 3%? (*874 a Skriv i procentform 0,03*)
F63	För att den står på 100 där, det är tiondel, hundradel.
L63	Just det, det ska bli lika många procent som hundradelar. Och hur många hundradelar är det?

Allt tal har, så noggrant som möjligt, transkriberats till begriplig normalprosa. I den sista meningen i det övre citatet skriver jag alltså inte att läraren med sitt göteborgsidiom egentligen säger något i stil med: ”Dö måsste könna räkna två höndra dela me fura i hövvet. ”

9 Resultatredovisning ur ett makroperspektiv

Redovisningen av studiens resultat görs ur två perspektiv och presenteras i detta och följande kapitel. Inledningsvis redovisas en analys av hur lärarna organiserat för sin kommunikation med eleverna under de studerade lektionerna; detta utgör studiens makroperspektiv. I nästa kapitel redovisas analysen av innehållet i kommunikationens undervisande drag; detta utgör studiens mikroperspektiv.

I ett makroperspektiv beskrivs de olika val läraren gjort vid planering och genomförande av undervisningen. Undervisningsbeskrivningarna görs med utgångspunkt i ramfaktorteorin och den i teoridelen (avsnitt 5.4) beskrivna lärandefunktionen, utgör analysredskap. Genom denna analys har det varit möjligt att synliggöra hur lärarnas val av ramar interagerar och hur detta påverkar de möjligheter som erbjuds eleverna att utveckla ett matematikkunnande.

Analysen grundar sig på såväl klassrumsobservationerna som de intervjuer som gjordes med lärarna före respektive efter lektionerna. För att illustrera mina tolkningar använder jag citat från lektionerna. Presentationen av resultatanalysen är gjord i form av ”berättelser” som illustrerar de analyserade lektionssekvenserna. Samma citat kan återkomma vid flera tillfällen beroende på att samma situation kan belysa flera olika aspekter.

Studien omfattar som tidigare nämnts sju lektioner, tre på mellanstadiet och fyra på högstadiet. De lärare som observeras är alla utbildade efter lärarutbildningsreformen 1989 och har av skolledningen ansetts som duktiga och bra lärare.

Berättelserna om undervisningen görs lärare för lärare och inleds med en presentation av läraren och klassen. Avsikten är att ur ett makroperspektiv ge en bild av hur lektionen gestaltar sig. En viktig utgångspunkt för att kunna tolka undervisningens gestaltning är att känna till hur läraren planerat lektionen och hur hon tänkt sig individualisering och val av undervisningsmaterial. Som en bakgrund för att analysera undervisningen används uppgifter från intervjuerna som därvid relateras till händelseförloppet i klassrummet. Beskrivningen visar hur lektionen förlöpte främst på en organisatorisk nivå, hur läraren ledde arbetet, vilka elever hon besökte samt hur kommunikationens innehåll var fördelat på olika syften, alltså på hur många drag som var allmänt reglerande, reglerande av undervisning respektive undervisande.

Studien synliggör de val läraren gör för att ge eleverna möjligheter att lära sig matematik. Dessa valmöjligheter utgörs av de rörliga ramarna. I praktiken är dessa ramar inte alltid rörliga ur lärarens synvinkel. Val av lärobok är ett exempel på beslut som läraren, i ett kortare perspektiv, inte alltid kan påverka.

Data från studien visar på betydelsen av hur de rörliga ramarna väljs när det gäller förutsättningarna för elevernas lärande. Det som framträder vid analysen är att de val läraren gjort avseende rörliga ramar skapade en positiv social miljö för eleverna men i många fall utgjorde ett hinder när det gäller inlärningsmiljön ur ett elevperspektiv. Det visade sig ofta att de olika valen var i konflikt med varandra och det som läraren avsåg skulle bli till fördel för elevernas inlärning, i själva verket skapade hinder. Studiens samtliga lärare gav intryck av att vara engagerade i sitt arbete och måna om att eleverna skulle lära sig matematik. Flera av de samband som synliggörs vid analysen var i stort sett osynliga vid klassrumsobservationen och framträdde först när lektionsutskrifter, läroböcker och elevkort analyserades och jämfördes med varandra.

9.1 Lärarna och deras undervisning.

Här följer en beskrivning av de olika lärarnas arbete tolkat på en makronivå. Eftersom min avsikt är att beskriva sådana dilemman som kan uppstå under en lektion kan man få ett negativt intryck av undervisningen som bedrivs. Detta är inte mitt eget intryck av lektionerna utan en bild av den komplexa situation som råder i skolans verklighet.

9.1.1 Anna, skolår 4

Anna är utbildad till MaNO-lärare 1 - 7 och arbetade nu som klasslärare i skolår 4 på en grundskola. Under en eller två lektioner i veckan fick Anna hjälp av en resurslärare. De delade då klassen mellan sig. Det framgick under den aktuella lektionen att Anna inte visste hur resursläraren arbetat utan måste fråga eleverna. I klassen fanns det den här dagen 20 elever och de var placerade vid var sin bänk. Det förekom inget organiserat samarbete mellan eleverna. Anna använde läroboken *Räkneresan X2001* (Skoogh, Nilsson & Johansson, 1995).

Vid intervjun före lektionen underströk Anna vikten av att individualisera undervisningen. Detta, menade hon, gör man bäst genom att låta eleverna arbeta i sin egen takt. ”De snabba eleverna skall inte behöva vänta på att de långsammare eleverna skall bli klara och de långsammare eleverna skall få den tid de behöver.” Hon hade valt att låta eleverna sitta var för sig, vid var sitt bord. Anledningen, sade hon, var att de i annat fall bara skulle prata med varandra eftersom de, enligt henne, ännu inte var mogna att samarbeta under matematiklektionerna. Hon ansåg vidare att det var viktigt att hjälpa varje enskild elev under lektionen och att hon av det skälet strävade efter att besöka alla elever under lektionen. Hon kallade detta för att ”gå rond”. På frågan om vad målet var med lektionen svarade Anna genom att visa vilka avsnitt i boken eleverna för närvarande arbetade med och säga att de skulle fortsätta att ”räkna några sidor i boken”.

Anna ägnade de första sju minuterna åt allmänna frågor som inte var relaterade till ämnet matematik. Det är det jag kallar för reglerande kommunikation. Hon inledde till exempel med att gå igenom dagens schema. Därefter delade hon ut ”veckans problem”. Anna gav inte eleverna några anvisningar inför dagens arbete och hon hade inte heller någon gemensam genomgång. Efter det att Anna var klar med de allmänna frågorna fick eleverna börja direkt med det enskilda arbetet.

LAE Tag fram matteböckerna. Jag kommer att gå runt nu.

Av intervjun med Anna framkom det att eleverna sedan tidigare visste vilka uppgifter de skulle lösa och kände till de kommunikativa regler som gällde för lektionen. De började därför arbeta där de slutade förra matematiklektionen. Avslutningen av lektionen kom mycket abrupt utan någon återsamling eller sammanfattning. Efter att ha hjälpt en elev i ca tre minuter sade Anna helt enkelt:

LAE Vi lägger ned matten nu.

Vid analysen av elevkorten och observationsanteckningarna gjordes följande kartläggning. Eleverna arbetade vid lektionens början med två olika innehåll.

- Nio elever arbetade med längdmätning och de var spridda mellan uppgift 172 där man skall rita eller mäta sträckor i cm, uppgifterna 192 - 198 där man skall mäta olika föremål i klassrummet och uppgifterna 205 - 206 där man skall göra enhetsbyten mellan decimeter, centimeter och millimeter. Arbetet var delvis laborativt eftersom eleverna använde sig av linjal och måttband.
- Elva elever arbetade med tid. De var spridda från uppgift 207 som handlar om olika tider på dygnet, uppgift 211 där klockslagen skall skrivas med digital tid fram till uppgift 286 som handlar om tidsdifferenser.

Den form av individualisering som Anna valt var så kallad hastighetsindividualisering. Det gick så till att eleverna arbetade i sin egen takt utgående från en lärobok. Några andra uppgifter än lärobokens förekom inte under lektionen. Om man utgår från elevernas arbetstakt under den här lektionen kan man konstatera att de två långsammaste eleverna för tillfället låg två till tre veckor (20 sidor i boken) efter de två snabbaste eleverna.

Inför den här lektionen var det sex elever som skulle börja arbeta med tid och fler blev det efter hand. Läraren hade inte gjort någon genomgång och därför fick dessa elever sina arbetsinstruktioner skriftligt genom läroboken. Eleverna ställde en rad frågor angående den första uppgiften, 207, inom området tid. Vid närmare analys konstaterades att alla eleverna som kom till den uppgiften körde fast och behövde hjälp av läraren för att komma vidare. Vissa elever fick därvid vänta mycket länge innan de fick denna hjälp. Detta framgår av tidsangivelserna i anslutning till följande tre citat. (Enligt angivelserna i placeringslistan i kapitel 8, hade alla de tre eleverna som förekommer i citaten kommit till uppgift 207 redan vid lektionens början.)

Efter 18.40 min

P22	Äh, jag förstår inte.
L22	Du ska titta på de här bilderna på sidan 48 …
…	
P22	Var ska jag skriva det då?

Efter 21.00 min

P21	Hur ska vi göra denna konstiga?
L21	Den här, vilken siffra står i bilden. Dom här bilderna ska du titta på.
…	
L21	Ja, dom har gett exempel här. Svar a 6.
P21	Ska jag skriva a?

Efter 38.00 minuter

L25	Titta här. Klockan är 11 på förmiddagen. Petra äter skollunch. …
P25	Jo, men jag har inte gjort så. Jag har gjort så här.

De här tidsangivelserna visar att det tog lång tid innan vissa av eleverna fick någon hjälp av läraren. Observationsanteckningarna visar också att flera elever som väntade på hjälp började prata och stöka. Andra elever som väntade på hjälp avbröt ideligen lärarens kommunikation med en kamrat.

Genom att analysera innehållet i de drag som gjordes under lektionen kan man få en uppfattning om hur ofta eleverna hade problem med att förstå bokens instruktioner och behövde ny instruktion av läraren. Av de 472 drag som gjordes under det enskilda arbetet handlade bara 97 drag (21%) om undervisningens innehåll. Övriga drag var reglerande drag varav, 298 (63%) handlade om att beskriva för eleverna vad de skulle göra, till exempel hur text och bilder (som fanns på olika sidor i boken) skulle kombineras och/eller hur de skulle skriva svaren i sina räknehäften. Inget av dessa drag handlade således om matematikinnehållet i uppgifterna till exempel vilka strategier som kunde användas för att lösa dem eller hur man kunde resonera om dem.

För de elever som skulle mäta under lektionen blev tillgången till mätverktyg av stor betydelse. Det visade sig att de flesta av eleverna saknade linjal och att det bara fanns ett enda måttband i klassrummet.

L11	Har du ingen linjal?
F11	Sönder.

P41	Jag behöver ett måttband.
L41	Du kan vänta tills dom andra är färdiga.
L12	Är du färdig F12 med måttbandet?

L41	Är du färdig med den?
P41	Nej, man ska göra den med måttband.

När man skulle mäta vissa kroppsdelar eller storleken på klassrummet så tillkom ytterligare en faktor, nämligen att man måste vara två som mäter, en i varje ända på måttbandet.

P41	Vad är famn. Är detta famn?
L41	Famn, hela famnen, din famn. Så.
P41	Jaha.
L41	Du behöver att någon ska hjälpa till. Du måste fråga P25.

Detta är ett exempel på de konflikter som kunde uppstå. P41 behövde hjälp för att kunna mäta men P25 ville absolut inte arbeta med P41. Dels hade P25 ännu inte kommit så långt i boken, dels ville han själv ha hjälp men med ett helt annat problem. Det visade sig 11 minuter senare att P41 ännu inte hade funnit någon som kunde hjälpa honom utan läraren fick då hjälpa till:

P41	Anna, kan du hjälpa mig? Armen.
L41	Du ska mäta armen. … så, (2s) nej, nej, (2s) så. LÄRAREN MÄTER.

P52	Kan vi mäta två och två?
L52	Nej vi har inte tid för det här P52 för vi slutar om några minuter nu.

Man kan konstatera att det sätt på vilket eleverna var placerade i klassrummet, i kombination med hastighetsindividualisering och tillgång till material, försvårade möjligheterna att genomföra arbetet. När en elev kom till uppgifterna med mätning kunde det till exempel dröja en lång stund innan ytterligare en elev kommit fram till dessa uppgifter och kunde eller var villig att hjälpa till att mäta. När eleven väl fick hjälp av en kamrat kunde de få vänta ytterligare en stund innan måttbandet var ledigt. Under tiden erbjöds dessa elever inget alternativt arbete utan var sysslolösa. Detta är ett exempel på konflikt mellan de av läraren valda ramarna.

När man på en kvantitativ nivå analyserar hur Anna har genomfört lektionen finner man följande fördelning av dragen.

Reglerande inledning	39	drag
Genomgång	0	drag
Självständigt arbete	472	drag
Varav *Allmänt reglerande*	77	drag
Reglering av undervisning	298	drag
Undervisning	97	drag
Reglerande avslutning	4	drag

En uppföljning på elevnivå av denna analys visar att Annas ambition att hjälpa alla elever under lektionen inte fungerade så bra. Antalet störande inslag var många. Det visade sig till exempel att en av eleverna inte hade haft någon kontakt med läraren under hela lektionen och att åtta av eleverna enbart deltagit i reglerande kommunikation. En av de allra svagaste eleverna deltog i åtta reglerande cykler, en annan elev i nio. Ingen av dessa båda elever deltog i någon undervisande cykel (jfr Kilborn, 1979). En annan iakttagelse är att det endast vid nio tillfällen under lektionen förekom cykler som omfattade 10 drag eller mera. Alla övriga cykler handlade om kort reglerande kommunikation eller att värdera eller korrigera ett felaktigt svar eller en felaktig eller utelämnad enhet. (jfr Emanuelsson, 2001.) Huvuddelen av kommunikationen var alltså av typen:

L31 Var är din skrivbok?

P52 Kan jag få papper?

L11 Är du färdig med den
F11 Ja, jag tror det.

L41 Hur mycket är det?
P41 65.
L41 65 vad?
P41 Centimeter.

En stor del av Annas kommunikation ägnades åt att administrera undervisningen. Som tidigare nämnts ansåg Anna att det var viktigt att svara på alla elevers frågor oavsett typen av fråga. Antalet elever som behövde hjälp visade sig emellertid vara betydligt fler än Anna hann med att hjälpa. När hon försökte förklara något för en elev, blev hon ofta avbruten av en annan elevs fråga. Genom att direkt svara på denna nya fråga, blev den ursprungliga kommunikationen störd. Vid sådana avbrott tappade Anna vid flera tillfällen tråden i sin förklaring och glömde till och med bort att avsluta hjälpen till den första eleven. Det uppstod således en konflikt mellan ambitionen att svara på alla elevers frågor och att ge en adekvat hjälp till en elev i taget, alltså mellan av läraren valda ramar.

Anna hade valt att låta läromedlets beskrivning definiera uppgifterna för eleverna. Många elever förstod emellertid varken hur de skulle genomföra uppgifterna eller det innehåll som de, utifrån bokens beskrivningar, skulle lära sig. Detta val innebar att hon om och om igen blev tvungen att svara på samma fråga, på samma uppgift, för en elev i taget.

Anna hade också valt att eleverna skulle arbeta individuellt, medan det i boken förekom uppgifter som krävde samarbete med en kamrat. Bokens uppgifter förutsatte dessutom tillgång till material i form av måttband, linjaler m.m. som inte fanns i tillräcklig omfattning i klassrummet. Detta ledde till en mängd administrativa frågor till Anna.

Det dilemma som uppstod som en följd av hur Anna hade organiserat undervisningen var att det ledde till en mängd frågor till henne, vilket i sin tur ledde till långa väntetider för eleverna. Anna gav allt eftersom lektionen förflöt allt snabbare förklaringar och hon lotsade allt oftare eleverna fram till svaren.

Efteråt, när jag bad Anna kommentera lektionen, förklarade hon, att hon var relativt nöjd med den, men att eleverna var lite pratigare än vanligt. Hon menade också att båda momenten, alltså tid och mätning, var svåra för en del elever och att det därför var svårt för henne att hinna med alla elever, vilket hade varit hennes avsikt. Däremot kommenterade hon inte att eleverna hade svårt att förstå lärobokens instruktioner och att de därför inte förstod vad de skulle göra och hur de skulle skriva.

9.1.2 Barbro, skolår 6

Barbro är utbildad till MaNO-lärare 1 - 7 och arbetade på en skola i en kommun där arbetslivet domineras av ett större industriföretag. Detta var Barbros andra långtidsvikariat sedan hon blev klar med utbildningen. Hon hade ännu inte fått någon egen klass utan gick in i olika klasser som resurslärare. Under den aktuella lektionen hade hon hand om fyra elever i skolår 6 som hade kommit efter i matematikundervisningen. Barbro använde läroboken *Alma* (Undvall, m.fl., 1995).

Barbro berättade före lektionen att man på hennes skola satsat extra resurser på elever som hade problem med matematik. De fyra eleverna hon nu skulle arbeta med hade föregående vecka kommit efter kamraterna. Hennes uppgift var att se till att de kom ikapp. Målet för dagens lektion var att eleverna skulle bli bättre på så kallad skriftlig huvudräkning. Men det fanns också ett indirekt mål, nämligen att de skulle kunna visa sin klasslärare att de arbetat bra, det vill säga att de hade löst ett visst antal uppgifter. Barbro framhöll att det är viktigt att eleverna får ”tala matematik”. Hon avsåg därför att under lektionen diskutera med en elev i sänder medan övriga elever räknade.

Vid observationstillfället skulle Barbro arbeta med sina fyra elever skilt från de övriga eleverna i klassen. Hon hade för detta syfte tilldelats ett klassrum som tillhörde en annan klass. Hon fick börja lektionen med att köra ut några elever som inte skulle vara i lokalen och det tog ett par minuter i anspråk.

LAE	Nu får ni gå ut. Skynda på!

Efter cirka fem minuter blev Barbro på nytt störd. Nu var det en lokalvårdare som kom för att städa och efter ytterligare ett tiotal minuter kom några elever för att hämta en fotboll. Vid varje sådant avbrott blev det någon minuts diskussion innan besökarna avlägsnade sig. Valet av lokal innebar således att hennes undervisning stördes upprepade gånger.

Barbro startade lektionen direkt utan någon genomgång av det innehåll som skulle behandlas.

LAE	Vi börjar på sidan 138 i boken. (12s)
L01	P1, kan du räkna 780.

När det var cirka fem minuter kvar var det dags att öva på multiplikationstabellen och eleverna fick en stencil med 50 uppgifter som skulle lösas på tid.

LAE	Här är multiplikationstabellen. Glöm inte skriva namn. Ni har fem minuter på er som vanligt.

Eleverna räknade sina uppgifter, lämnade sedan sina papper och gick ut.

Det innehåll som behandlades under lektionen var addition och subtraktion som ”skriftlig huvudräkning” enligt Rockströms (2000) modell. Arbetet gick så till att en av eleverna successivt talade om hur respektive uppgift skulle lösas medan Barbro stod vid tavlan och skrev ned vad eleven sagt. Om eleven svarade fel följdes detta aldrig upp med någon diskussion eller utredning, utan frågan gick direkt över till en annan elev. Medan en av eleverna räknade ville Barbro att de andra skulle räkna samma uppgift på egen hand. Ingen elev gjorde emellertid så, utan alla lyssnade på den kamrat som löste uppgiften och skrev bara passivt av det Barbro skrivit på tavlan.

L03	F03, nu är det du. 475 + 284. Hur tänker du?
F03	Först tar man 400 + 200 = 600. Och 70 + 80 = 150.

L03	Ja.
F03	Och 5 + 4 = 9.
L03	Och det blir?
F03	759.

Uppgiften var därmed löst och så här hade Barbro under tiden skrivit på tavlan.

475+284 =	400+200	=	600
	70+80	=	150
	5+4	=	9
			759

Den övre raden i beräkningen är inte matematiskt korrekt. 475 + 284 inte är lika med 600. Jag återkommer till detta i den innehållsliga analysen i kapitel 10.

Lektionen fortsatte på detta sätt med att Barbro lät eleverna räkna högt, en efter en i tur och ordning. Det arbetssätt hon hade valt var tidskrävande och man hann bara med 163 drag under hela lektionen. Dessa drag var i huvudsak av två slag. Ett tiotal drag var allmänt reglerande, i det här fallet tillsägelser. Resten av dragen var undervisande, där läraren från tavlan kommunicerade med en elev i sänder medan de övriga elever lyssnade och skrev av tavlan. Undervisningen kan beskrivas som procedurell i den mening att man helt följde givna rutiner. De flesta av Barbros drag var lotsande i den meningen att hon hjälpte eleverna framåt mot rätt svar genom att successivt ställa korta, ledande frågor.

Vid en analys av data framkommer att den kommunikation som förekom under lektionen mestadels var kollektiv. Med det menar jag att Barbro förde en dialog som alla elever var engagerade i samtidigt. Eleverna fick i tur och ordning en uppgift att lösa och lösningen skulle beskrivas högt. Varje gång en elev gav ett felaktigt svar på en delfråga, gick frågan direkt över till nästa elev som således förväntades hänga med på dialogen och kunna ta över. Barbro behandlade alltså gruppen som ett kollektiv, inte som fyra individer med olika förkunskaper och olika behov. Hon redde till exempel aldrig ut något av de problem eller de missförstånd som uppstod under lektionen, utan frågade istället en annan elev. På det sättet fick man kollektiva lösningar på ett stort antal uppgifter. Man kan tänka sig att Barbro antog att när eleverna fick höra hur en annan elev tänkte skulle detta leda till att denna elev utvecklade sitt eget kunnande.

Vid samtalet efter lektionen var Barbro inte helt nöjd med lektionen. För det första brukade hon alltid bli störd när hon undervisade i detta klassrum.

För det andra, menade hon, är det svårt att gå in som resurslärare med kort varsel om man inte är ajour med vad den andre läraren tidigare gjort. Ett annat problem, menade hon, var att hon sällan hann sätta sig in i bokens uppläggning före lektionen. I den här boken förutsatte man till exempel att eleverna skall arbeta med ”skriftlig huvudräkning” med så kallade ”mellanled”, alltså med en slags algoritm där man separerar tiotal och ental. Barbro var från sin utbildning van vid en annan form av huvudräkning där man diskuterar olika strategier med eleverna. En möjlig tolkning är att det var just dessa förutsättningar som skapade de dilemman som ledde till att undervisningen fick en procedurell karaktär och till att Barbro gjorde en rad formella fel vid tavlan.

9.1.3 Cecilia, skolår 6

Även Cecilia är utbildad till MaNO lärare 1 - 7 och hon hade därefter undervisat i fyra år. Hon arbetade nu som klasslärare i skolår 6. Klassen bestod av 18 elever som under lektionen var fördelade vid fem bord.

Vid intervjun före lektionen, beskrev Cecilia hur hon i samband med en fortbildningskurs hade fått en stencil om decimaltal. Den skulle hon använda under lektionen. Hon ansåg det vara viktigt att eleverna fick tala matematik och därför hade hon placerat dem i grupper om tre till fyra elever. Enligt Cecilia förväntades eleverna i dessa grupper samarbeta och diskutera under lektionen. Vem som satt bredvid vem hade eleverna själva fått bestämma. För de elever som blev färdiga med stencilen under lektionen fanns det tre val. Antingen kunde de fortsätta att räkna i boken eller så kunde de arbeta med problemlösning, som i detta fall bestod av att konstruera egna uppgifter eller räkna uppgifter som en annan elev tidigare hade konstruerat. Målet för lektionen var att eleverna skulle lära sig att storleksordna tal i decimalform.

Lektionen inleddes med orden

LAE	In med läxorna och sedan sätter ni er.

Sedan diskuterade man när eleverna skulle lämna in nästa matteläxa. Därefter gick Cecilia igenom hur eleverna tekniskt skulle arbeta med stencilen, men hon sade inget om hur de kunde tänka när de löste uppgifterna. Genomgången tog ca två och en halv minut. Under resten av lektionen ägnade sig eleverna åt självständigt arbete, tills en elev ansåg att lektionen borde vara slut.

P61	Får vi springa på rast?
LAE	Alla måste vara färdiga först.

Den stencil Cecilia byggde upp lektionen kring är en översättning av ett engelskt diagnosmaterial tillverkat vid Shell Centre i England (Swan, 1983). Den bygger på att eleverna i en klass har fått en diagnos och på stencilen kan man se hur två elever, Lisa och Petter, har löst uppgifterna på diagnosen. Den övre delen av stencilen såg ut så här:

Rätta hemarbete
Din lärare har samlat in ett hemarbete som eleverna har utfört. Här är Lisas och Petters svar. Rätta dem. Skriv det rätta svaret där de har gjort fel. Kan du förklara hur Lisa och Petter har tänkt.

Lisa

1. Sätt en ring runt det största talet
   3,521   3,6   3,75
   Förklara varför det är störst.
   Svar: För att 521 är större än 6 och 75

2. Skriv talen i följd, från det största till det minsta.
   1,86   1,9   2,07   2,5   1,842   2,10   1,7756
   Svar: 2,10   2,07   2,5   1,7756   1,842   1,86   1,9

3. Skriv ett tal som är större än det första, men mindre än det andra:
   a) 4,2   *4,3*   4,5
   b) 0,9   *0,10*   1
   c) 1   *1,1/2*   1,1

För att eleverna skulle kunna arbeta med stencilen valde Cecilia att göra en gemensam genomgång. Hon inledde genomgången på följande sätt:

LAE	”Rätta hemarbete” skall ni hålla på med idag. Det betyder att ni skall vara lärare åt er själva eller rättare sagt, vi leker med tanken att ni har en klass elever och så skall ni rätta ett arbete som dom har gjort. Det är två elever som ni skall rätta och det är Lisa och det är Petter som har fått några uppgifter i läxa och i första uppgiften som Lisa gör så står det så här: ”Sätt en ring runt det största talet”. Då har Lisa satt en ring runt det största talet som hon tycker är rätt. Då skall ni tänka efter är det rätt eller är det fel. Och kommer ni fram till att nej, (2s) Lisa har nog fel här, så skall ni också skriva vad är det rätta svaret på den här uppgiften.
P62	Kan inte Lisa göra det själv?
L62	Nej, Lisa finns inte här så ni får hjälpa Lisa. Ni skall skriva en liten kommentar till Lisa.
P61	Vi skriver att det är fel?

LAE	Ni skriver en kommentar, alltså ni skriver hur hon skulle ha tänkt. Är ni med? Om hon har rätt, då skriver ni bara att det är rätt och så.
F31	Ska vi jobba enskilt eller i grupp?
LAE	Nej, ni gör som vanligt, vi tar dom grupperna som ni sitter i nu.
L32	Ja P32.
P62	Ska du skriva in kommentarerna i våra böcker då?

Många av eleverna ställde nu en rad frågor under en dryg minut innan Cecilia lät dem arbeta på egen hand. Elevernas frågor och kommentarer visade att de inte förstod vad de skulle göra efter Cecilias genomgång.

Den här genomgången visade sig vara helt avgörande för vad som skulle hända senare under lektionen. Vid genomgången beskrev Cecilia enbart arbetssättet, alltså vad eleverna formellt skulle göra och hur de skulle skriva svaret. Däremot problematiserade hon inte uppgifterna eller förklarade hur uppgifterna på stencilen skulle kunna lösas. Cecilia synliggjorde alltså inga strategier som kunde användas för att storleksordna tal i decimalform. När Cecilia gick runt och hjälpte eleverna visade det sig att de flesta inte hade förstått instruktionen. De körde därför fast redan på den första uppgiften. Cecilia valde då att successivt göra en ny genomgång för en grupp i sänder. Detta återspeglades i att 55% av alla dragen under det självständiga arbetet handlade om en enda sak, nämligen hur man skulle skriva svaren till de uppgifter som fanns på stencilen. Så här lät det ofta:

F14	Ska vi ringa in dom som är rätt?
L14	Hm, men gör så, att om det är något som du inte känner till … skriv då ett frågetecken här så länge …
F11	Men hur ska jag skriva här då?
L11	Har ni diskuterat i gruppen?
F11	Nej, för jag fattar ändå inte hur man ska göra.
F31	Men jag tycker det är svårt. Hur ska man skriva kommentarer. Jag vet inte
F34	Jag tror inte Lisa skulle fatta vad vi menar.
F62,63	Vi fattar ingenting.
L62,63	Vi gör så här, vi gör då så här på den här uppgiften. …

Ännu efter 34 minuter fanns det fortfarande elever som inte visste hur de skulle lösa de här uppgifterna. Cecilia hade vid den tidpunkten ändrat på sina krav för uppgiftens genomförande.

L32	… P32, skriv bara det svar som är rätt.
P32	Ska jag inte göra som du sa där?
L32	Skriv bara det som är rätt.
F31	Stackars lärare …

F34	Jag fattar, det är bara det att jag fattar inte hur man ska skriva så här, äh … För jag fattar inte riktigt hur han tänker.

Det var inte bara instruktionen som var svår för eleverna att uppfatta. Stencilen är, som redan nämnts, avsedd att ges som en efterdiagnos. Cecilia använde den emellertid i inlärningssyfte, för att eleverna skulle ”lära sig att storleksordna tal i decimalform”. En genomgång av elevernas frågor och kommentarer visar att de flesta av dem saknade förkunskaper för att arbeta med denna stencil. Kommunikationen blev därför inte bara begränsad till sin form utan även till sitt innehåll.

F11	Hur kan det bli så här?
L11	Nu är det så F11 att eftersom du inte varit här så gör du så gott du kan på de här uppgifterna va. Men jag tror du fixar dom.
L31-33	Kommer ni ihåg vad den kallas? Den delen?
P32	Hundradel, (2s) tusendel …
L22-24	… hur mycket större är det talet än det? GÄLLER TALEN 2,5 OCH 2,07.
P23	Lite mindre än en halv.
P24	Ungefär 4,3.
P23	43 hundradelar.
…	
L24	Förstår du varför P24?
P24	Ah, nej.
L31-33	Detta är det första talet och det är det sista. TALEN ÄR 4,2 OCH 4,5. Och så skulle hon skriva något som var mitt emellan dom två. Och då svarar hon 4,3.
P32	Och då blir det också fel.
P33	Nej.
P32	Jo, men det är mindre än det andra.

Det faktum att flera elever hade svårt att förstå instruktionen och därmed inte visste vad de skulle göra, ledde efter hand till att en del av dem öppet visade sin frustration.

L32	Om det hade stått 1 där. Vad skulle du då ha skrivit för tal som är mittemellan där?
P32	Va, vadå mellan. IRRITERAT.
L32	Ja, du ska skriva ett tal som är större än 0,9.
P32	Ja.
L32	Sedan ska du skriva ett tal som är mindre än 1.
P32	Ja, men det var ju det. ÄNNU MER IRRITERAT OCH NU BÖRJAR P32 GRÅTA.
…	
P32	TVÅ MINUTER SENARE. Jag kommer inte ihåg något.

F63	Cecilia, jag får fel (2s) alltihop. Jag vill inte gör fler såna här.

Av elevernas frågor och sätt att reagera kan man konstatera att såväl valet av arbetsuppgift som Cecilias instruktion skapade problem för de flesta eleverna. Detta ledde i sin tur till en mängd reglerande kommunikation mellan lärare och elever samt till frustration bland eleverna. Ett nytt exempel på konflikt mellan av läraren valda ramar.

De flesta av de elever som blev klara med stencilen övergick till ett nytt moment, problemlösning. Vissa av dem konstruerade egna uppgifter, andra löste uppgifter som redan hade konstruerats av en kamrat. Spelreglerna för hur uppgifterna skulle konstrueras var att de skulle handla om något eleverna var intresserade av och att detta skulle leda till beräkningar med decimaltal. Nu uppstod ett nytt dilemma, nämligen att elevernas ambitioner att konstruera intressanta uppgifter inte harmonierade med deras matematiska kunnande. Elev P61 som var intresserad av bilar hade till exempel valt att konstruera en uppgift om bildäck.

L61	… Finns det Nokia-däck, nej?
P61	”Nååkia” heter dom.
…	
P61	Dom är världens kassaste däck.
L61	Vad innebär dom här siffrorna i era uppgifter?
P61	165 är storleken. 165 ÄR DÄCKETS BREDD I MM.
…	
P61	14 det är däcket- är… 14 ÄR FÄLGENS DIAMETER I TUM.
…	
L61	65 vadå, 65 är det inne här eller?
P61	Över så. … 65 ÄR DÄCKETS HÖJD I PROCENT AV DESS BREDD.

Den här dialogen visar att eleven inte visste vad de angivna måtten står för. Inte heller Cecilia kände till detta.

Att konstruera egna problem (textuppgifter) används oftast som en efterdiagnos för att se hur eleverna har uppfattat ett visst område till exempel decimaltal. Här använder Cecilia det i inlärningssyfte. Eleverna får därvid utgå från sina egna intressen, vilket är positivt, men ger i detta fall läraren stora svårigheter att förstå problemet och i med detta också begränsade möjligheter för henne att hjälpa eleven.

Cecilia hade under lektionen använt två pedagogiska idéer som ramar för sin undervisning: en stencil om decimaltal och att låta eleverna konstruera uppgifter på egen hand. Båda dessa idéer hade hon mött i samband med sin egen kompetensutveckling. Som framgår av exemplen ovan hade hon emellertid problem med att hantera dessa idéer och omsätta dem i sin undervisning. Målet med lektionen, att eleverna skulle lära sig att storleksordna tal i decimal form, och syftet med stencilen, att kontrollera dessa kunskaper, stod i konflikt med varandra. Följande fördelning av dragen ger en uppfattning om hur kommunikationen fungerade:

Reglerande inledning		20	drag
Genomgång, reglerande		39	drag
Självständigt arbete		585	drag
Varav	*Allmänt reglerande*	22	drag
	Reglering av undervisning	329	drag
	Undervisning	234	drag
Reglerande avslutning		34	drag

Cecilia samtalade under lektionen med alla elever utom en. Vid fyra av de fem borden var det uppenbart att en av eleverna hade tagit över initiativet. Även om hela gruppen deltog i kommunikationen, så var det med den eleven läraren förde i stort sett all innehållslig kommunikation. När övriga elever deltog i kommunikationen var innehållet i allmänhet på en reglerande eller lotsande nivå.

Cecilia var relativt nöjd efter lektionen. Hon fick visserligen reda ut en del missförstånd i början, men ansåg att de flesta av grupperna lyckades lösa uppgifterna till belåtenhet. På frågan om alla eleverna i grupperna förstod, svarade Cecilia att de som hade problem säkert hade fått hjälp av kamraterna i gruppen.

9.1.4 David, skolår 7

David är MaNO-lärare 4 - 9. Efter sin lärarutbildning hade han genomgått en didaktisk påbyggnadskurs. Den aktuella lektionen undervisade han 13 elever i skolår 7. Eleverna satt vid fem bord och detta gav dem enligt David möjligheter att samarbeta. Eleverna hade själva valt vem de ville sitta tillsammans med. Placeringen var alltså gjord på social grund, inte på pedagogisk. David använde läroboken *Matematikboken* (Undvall, m.fl., 1995).

Före lektionen berättade David att skolan satsat på matematik och att undervisningsgrupperna därför var små. Något speciellt mål hade han inte för denna lektion utan eleverna arbetade vidare, var och en i sin takt, utgående från en långtidsplanering som byggde på lärobokens uppläggning. David gick under lektionen runt och handledde dem. Organisationen av undervisningen byggde således på hastighetsindividualisering. De elever som inte förmådde hålla en, som David ansåg, rimlig arbetstakt uppmanades att hoppa över uppgifterna i slutet av respektive avsnitt för att komma ikapp kamraterna.

Lektionen inleddes med följande korta instruktioner.

LAE	Ni är fortfarande en del som jobbar med bråk … ni kan hoppa och gå till procent för att klara av planeringen. Ni jobbar som ni brukar … Jag kommer till er.

Lektionen avslutades så här kortfattat.

LAE	OK, vi slutar nu.

Davids sätt att organisera klassrumsarbetet innebar att han lät bokens uppläggning och metodik styra elevernas arbete. Planeringen som de följde hade lett till att eleverna vid lektionens början var spridda från uppgift 817 till uppgift 957, vilket motsvarar cirka 20 sidor i boken eller minst två veckors normal arbetsinsats. Några av de elever som låg efter i planeringen följde inte Davids råd att hoppa över resten av kapitlet om bråkräkning och börja på procenträkning vilket innebar att de därmed kom ännu mer efter sina kamrater.

Ett annat problem som uppstod under Davids lektion och komplicerade kommunikationen orsakades av att han hade en annan syn på räkning med bråk och procent än författarna till läroboken (Undvall m.fl, 1995). När det gällde procentberäkning ser bokens strategi ut så här:

Skriv i decimalform 7,5% = 0,075 (s. 154)
Skriv i procentform 0,09 = 9% (s. 154)
7% av 6350 kr = 0,07 · 6350 kr = 444,50 kr. (s. 159)

I bokens exempel ges således enbart en procedurell förklaring till hur man bestämmer en procentandel, nämligen genom att skriva procentsatsen som ett decimaltal och därefter multiplicera. David använde en annan strategi. För att bestämma 7% av 6350 kr, ville han att eleverna först skulle bestämma 1% av 6350 kr och därefter multiplicera resultatet, alltså 63,50 kr, med 7, en metod som eleverna med stor sannolikhet använt sig av på mellanstadiet.

F62	Jag behöver hjälp här. (*Uppgift 950. Magnus tjänade under ett år 142 400 kr. Av detta fick han betala 31,5% i skatt. Hur mycket betalade Magnus i skatt?)*
…	
L62	OK, (2s) men om du gör så här istället. Om du säger att du räknar 1 procent först och sedan tar den gånger 31 (2s), varför kan du inte ta den gånger 31,5?

F63 Äh, den. (*912. Svennes lön höjdes med 6%. Innan löneökningen tjänade han 12 000 kr per månad. Med hur många kronor steg hans lön?*) Jag tänkte först (1s) men sedan kom jag på att det är gånger tänkte jag. Men sen kom jag på att de är- (2s). Och sen tänkte jag så här att man måste räkna ut hur mycket 1% är (L63: Hm) alltså en krona, (L63: Hm) och på 10 tusen kronor så går det ju 100.

L63 Hm.

Både bokens strategi och Davids är flitigt använda i svensk matematikundervisning - men de är olika och kräver helt olika förklaringsmodeller och förkunskaper. I den mån David var medveten om denna skillnad så tydliggjorde han emellertid inte detta för eleverna. Konflikten mellan Davids och bokens motstridiga budskap kan vara en bidragande orsak till de missförstånd som upprepade gånger uppstod i kommunikationen mellan lärare och elever.

Även i samband med bråkräkning uppstod flera konflikter förorsakade av att David hade en annan åsikt om hur eleverna bör arbeta med matematikinnehållet än det som presenteras i läroboken. Vid addition och subtraktion av tal i bråkform vill man på sidan 133 i boken (Undvall m.fl., 1995) att eleverna skall gå över till tal i decimalform och arbeta så här: $5\frac{5}{9}-3\frac{7}{11}\approx 5{,}556-3{,}636=1{,}92$: Detta blir lite arbetsamt om man, som i det här fallet, inte använder miniräknare. Om man arbetar enligt boken så blir till exempel en uppgift som 1/2 + 0,7 lätt att beräkna som 0,5+0,7. I annat fall kan denna blandning av bråk och decimaltal bli förvirrande för eleverna, speciellt om alla uppgifterna runt om är av typen $2\frac{1}{4}\pm 1\frac{1}{2}$. Även i det här fallet använde David alltså en annan förklaringsmodell än den som beskrivs i boken. David och läroboksförfattarna hade sannolikt tolkat målen i kursplanen på olika sätt. David ville lära eleverna att addera och subtrahera tal i bråkform, medan läroboken valt att utföra operationerna i decimalform. Skillnaden i förklaringsmodell ledde till problem under lektionen eftersom David inte förklarade för eleverna att han använde en annan modell än den i boken. Eleven fick på så sätt två motstridiga budskap samtidigt.

För att kunna arbeta med procent krävs det en hel del förkunskaper. Saknas sådana kunskaper, till exempel på grund av att de långsammare eleverna hade hoppat över uppgifter som omfattar dessa förkunskaper, kan detta leda till att läraren och eleverna talar förbi varandra och att kommunikationen därigenom blir ineffektiv. Här följer ett exempel på hur en elev som saknade viktiga förkunskaper fick problem med att följa lärarens resonemang.

F63	Den här, se där, jag fattar inte den. (*880c. Skriv i procentform 0,045.*)
L63	Du ska skriva den, 0,045, i procentform. Hur många hundradelar har vi här? (2s) Vilken siffra står för hundradelar här?
F63	Den, eller va? (2s) Dom?
L63	Dom, alltså den, 4an, faktiskt.
…	
F63	Så det kvittar om det är en där förut därför det blir 45%?
L63	Nej. 44% blir det, (2s) vänta 40. Det är 4 hundradelar eller hur? Och 4 hundradelar är lika med? (2s) 4%.
F63	Ja.
…	
L63	Alltså inte 45 eftersom det är 45 tusendelar inte 45 hundradelar.
F63	Så blir det 40,5.
L63	4,5! (2s) 4,5 procent.

Man kan konstatera att F63 hade problem med hundradelar och tusendelar vilket sannolikt är orsaken till att hon inte förstår hur man skriver tal som 0,045 i procentform. Enligt David betyder ju procent hundradelar.

Som en följd av att David förklarar på ett annat sätt än boken utan att tydliggöra detta för eleverna, var det många som inte förstod Davids förklaringar och av det skälet körde fast på uppgift efter uppgift. Detta kan vara en orsak till att de flesta av eleverna slutade arbeta efter halva lektionen och istället satt i grupper och pratade och fnissade, dock utan att störa alltför mycket.

En sammanställning av dragen under Davids lektion ser ut så här:

Reglerande inledning	1	drag
Genomgång	0	drag
Självständigt arbete	792	drag
Varav *Allmänt reglerande*	4	drag
Reglering av undervisning	51	drag
Undervisning	737	drag
Reglerande avslutning	1	drag

En intressant iakttagelse är att David ägnade över 90% av alla drag åt undervisning. Av denna beskrivning kan man få intrycket att undervisningen var mycket effektiv eftersom nästan all kommunikation ägnades åt innehållet. Analysen visar däremot att kommunikationen snarare var ineffektiv eftersom David och eleverna ofta talade förbi varandra.

Trots att eleverna satt i grupper förekom ytterst lite samarbete kring matematikuppgifterna dem emellan. När eleverna kommunicerade med varandra handlade det mest om livet utanför skolan. David stimulerade inte heller till samarbete och talade sällan med mer än en elev samtidigt. En orsak till detta var att eleverna i samma grupp ofta arbetade med olika uppgifter, ofta till och med i olika kapitel i boken. Så här såg det ut då lektionen började:

- I en grupp arbetade en elev med uppgift 819 och de övriga två med 889 respektive 890,
- i en annan grupp arbetade en elev med uppgift 885 och den andra med 769,
- i en tredje grupp arbetade en elev med uppgift 952 och den andra med 873 och
- i en fjärde grupp arbetade två elever med diagnosen (och kikade på varandras uppgifter) och den tredje med 893.
- Endast i en grupp räknade man uppgifter inom samma område. Man började där med att räkna uppgifterna 954 respektive 957.
- Två av eleverna satt för sig själva.

Eftersom de elever som satt bredvid varandra oftast arbetade med helt olika uppgifter förekom det sällan något organiserat samarbete. Vad gäller individualiseringen i klassen kunde man konstatera att två av de duktigaste eleverna räknade mycket men att de bara fick ett kort besök vardera av läraren (cykler omfattande 4 respektive 6 drag). De fick också fem tillsägelser för att de pratade och störde. De här två eleverna visade också vid två tillfällen att de helst inte ville bli störda av läraren och att de inte ville diskutera alternativa lösningsmetoder med honom. Trots att det bara var 13 elever i gruppen blev en av eleverna helt utan hjälp och en annan elev satt för andra lektionen i rad med en diagnos som inte blev klar under den här lektionen heller.

David konstaterade efter lektionen att det här var en pratig grupp och att de flesta av eleverna inte var intresserade av matematik. Samtidigt var han nöjd med gruppens storlek som gjorde att ”han hinner hjälpa alla elever under lektionerna”. David såg inga problem med att bokens behandling av bråk och procent inte stämde överens med hans egen uppfattning om hur eleverna skulle hantera de här begreppen.

Vid en närmare analys ser man exempel på den konflikt mellan ramar som kan uppstå när läroboken styr elevernas arbete, samtidigt som läraren har en annan uppfattning än bokens författare om hur uppgifterna skall lösas.

Orsaken till dessa konflikter bestod ofta i att eleverna, vid kommunikation med läraren, behövde andra förkunskaper än de som förutsätts i boken. Samtidigt är uppgifterna i boken sekvenserade på ett sätt som inte passade den här lärarens sätt att undervisa, men givetvis blir logiskt om man helt följer bokens uppläggning.

9.1.5 Erik, skolår 8

Erik är MaNO-lärare 4 - 9 och hade sex års lärarerfarenhet. I Eriks klass fanns det 26 elever. De var placerade vid tio bord, oftast två och två, men vid två av borden satt fyra respektive sex elever. Eleverna förväntades samarbeta. Erik använde läroboken *Möte med Matte D och E* (Skoogh, Ahlström, Björlin & Thorbjörnsson, 1996).

Före lektionen beskrev Erik att han skulle introducera cirkelområdets area. Detta gör man, enligt Erik, bäst med hjälp av en laboration. En sådan laboration finns i läroboken. Eftersom han förutsåg att en del elever kunde få problem med att läsa bokens instruktion var det, enligt Erik, viktigt att inleda med en gemensam genomgång. ”På så sätt slipper man upprepa samma instruktion tio gånger.” Målet med laborationen var, enligt läroboken, att eleverna skulle förstå innebörden av π och hur man kan bestämma en cirkels area med olika god precision.

Erik inledde således lektionen med en genomgång på drygt fem minuter och inledde med att repeterade enheterna för area och hur man bestämmer kvadratområdets area.

LAE	Vi skall börja på ett nytt kapitel som börjar på sidan 52. (1s) Cirkelns area och kroppars volym. Det börjar med area …Kommer ni ihåg vad man använder för enheter för att ange area? Någon? (1s) P13?
P13	Så här i kvadratmeter eller m-två.
P53	Eller centimeter.
LAE	Kvadrat (1s) meter. P21, vad var en kvadratmeter?
P21	Det är … en meter … gånger en meter.
LAE	En meter åt varje håll ja. Hm, en kvadratmeter. Vad hade vi mer för enheter då? P53?
P53	Centimeter och millimeter.
…	
LAE	Vi skall börja idag och tala om kvadratcentimetrar. … Och en kvadratcentimeter är en centimeter åt varje håll. En ruta alltså som är en centimeter åt varje håll. (1s) Och på fyrkantiga saker, rektanglar och kvadrater, kan ni räkna ut på. (1s) Hoppas jag. På runda saker har vi inte lärt oss än.
P14	Har inte vi gjort det?
L14	Nej.
P14	Det där med diametern och 3. Vad var det då?

Erik började således med en repetition som knöt samman dagens laboration med elevernas tidigare kunskaper om areabegreppet. Han påminde eleverna om att de redan kunde räkna ut arena på en kvadrat och att de nu skulle gå vidare och beräkna arean av en cirkel.

Efter repetitionen följde en instruktion för hur eleverna skulle arbeta laborativt för att ta fram en formel för cirkelområdets area.

LAE	Om vi skall räkna ut arean nu (1s) så kommer det en uppgift (1s) där man får klippa litet och rita lite cirklar. Jag har 10 saxar med, så ni får samsas om dom. Passare har jag några fler, men (1s) dom är inte så bra så har ni tur så får ni tag på en som fungerar. Men det går nog att lösa. Men uppgiften bygger på att man ritar en cirkel med radien 5. SKRIVER r = 5 CM PÅ TAVLAN. (4s) Och diametern är då, P45?
P45	Öh, öh 10
LAE	10 ja. RITAR EN KVADRAT RUNT CIRKELN. (3s) Så ritar vi in cirkeln i en fyrkant (1s) en kvadrat. Hur stor är kvadraten? Hur stor area har kvadraten?

Erik ritade såväl cirkeln som den omskrivna kvadraten för hand, vilket gjorde att figuren inte blev särskilt exakt. Han delade därefter upp den omskrivna kvadraten i fyra mindre kvadrater med sidan 5 cm, vilka i läroboken kallas för radiekvadrater. Erik konstaterade därefter, med elevernas hjälp, att varje sådan radiekvadrat har arean 25 kvadratcentimeter.

LAE	Jag tror det räcker. Ni får köra igång med den uppgiften direkt.

Lektionen avrundades med att man samlade in saxar och miniräknare. Därefter sammanfattade Erik lektionen med orden:

LAE	P14 här, han kom fram till det man skulle komma fram till …

På detta påstående följde direkt replikerna:

P13	Vad skulle man ha kommit fram till?
L13	Det får du komma fram till nästa lektion.
LAE	Nu får ni gå och äta.
F61	Vad var det man skulle komma fram till då?

Efter en hel lektion var det bara en elev som enligt Erik hade kommit fram till ett resultat. Följer man dialogen på en individnivå, så framgår det att de flesta av eleverna i själva verket inte förstod vad laborationen gick ut på.

Erik byggde alltså upp lektionen kring en laboration. Hur laborationen skulle utföras var helt styrt av läroboken. Erik hade förberett laborationen genom att vid sin genomgång välja de mått som eleverna senare skulle använda. Därmed fanns det bra förutsättningar för en god kommunikation om cirkelområdets area. Det visade sig emellertid att Erik inte hade allt under kontroll. Ett övergripande problem var att de flesta av eleverna saknade linjal och att de dessutom hade problem med att hantera en passare. En ytterligare komplikation var att de flesta av passarna inte fungerade som de skulle. Dessa båda hjälpmedel var i själva verket helt avgörande för om en elev skall kunna utföra laborationen eller ej. En elev som inte kunde rita en cirkel vars radie var 5 cm och en kvadrat vars sida var 10 cm kunde inte ens påbörja laborationen.

P55	Du, denna är sönder va? GÄLLER PASSAREN.
L55	Nej.
P65	Vadå nej. Hur gör man då för att få fast den? Den åker ju loss.
P14	Finns det inga linjaler? Vanliga (xx).
L14	Linjaler, det ingår i begreppet elev.
P14	Ja, men det är någon som har tagit min.
P13	Ja, det är någon som har tagit min med.
L64	Vad är det? Vad är det för fel på den?
F64	Den gick inte runt.
L64	Har du använt en passare till den?
F64	Ja. FNISSAR.
L23,24	Kommer ni igång?
P23	Finns det någon mer sådan här?
L23	Passare? (2s) Kommer ni igång?

Man kan konstatera att det inte är så lätt att genomföra laborationen om man inte har en passare eller om passaren inte fungerar. Ännu efter 30 minuter satt bland andra P23 och P24 och fumlade med passaren och hade således ännu inte kommit igång med laborationen.

P23	Den är sönder va?
L23	Den är sönder, hm. Men ni har inte fått gjort något än.

Det är inte så lätt att rita en cirkel med radien 5 cm om man inte har en passare som fungerar. Men det var inte bara tillgången till fungerande passare och linjaler som skapade problem. En annan viktig omständighet var att Erik inte helt hade koordinerat sin genomgång med bokens uppläggning. Under sin genomgång hade Erik presenterat en cirkel med radien 5 cm och den cirkeln utgjorde ett viktigt underlag för laborationen om cirkelområdets area. När eleverna, efter Eriks genomgång, skulle börja arbeta med laborationen om cirkelområdets area, så skulle de, enligt läroboken, först lösa en uppgift som handlar om *omkretsen* av en cirkel.

1 a) Rita en cirkel med radien 3 cm.

b) Markera cirkelns medelpunkt (m), radie (r) och diameter (d).

c) Ungefär hur stor omkrets har cirkeln?

d) Skriv ett noggrannare uttryck för cirkelns omkrets.

e) Räkna ut omkretsen och avrunda svaret till en decimal.

Nu stämde ingenting för eleverna. Man förväntades enligt Erik att bestämma *arean* av en cirkel med *radien 5 cm* och nu kom det i boken en uppgift där man skulle bestämma *omkretsen* av en cirkel med *radien 3 cm*. Författarna till läroboken hade säkert en tanke med detta, men under den här lektionen skapade det enbart problem. Flera av eleverna protesterade.

F14	Det är rörigt!
L14	Vadå?
F14	Det är rörigare än vanligt. Jag fattar inte. Här står 3 cm. Du sa 5 cm

De olika konflikter som just beskrivits hade till följd, att de flesta av eleverna, efter halva lektionen, ännu inte börjat med laborationen. Flera av dem arbetade fortfarande med cirkelns omkrets.

Bristande kunskaper om begrepp och grundläggande terminologi ledde också till upprepade kommunikationsproblem. Redan när Erik inledde lektionen med en repeterande genomgång kunde jag iaktta detta problem. Han anpassade emellertid inte sin undervisning därefter. Här följer några exempel:

P14	Vad är en medelpunkt?

P52	Erik, medelpunkten, är det i mitten eller?

F11	Vad är det då? Pricken i mitten.
L11	Pricken i mitten, medelpunkten brukar man kalla det.
F11	Vad är pi med för då?

F11	Ja man tar radien gånger 3.
L11	Vilket gånger 3?
F11	Diametern.
L11	Gånger 3 eller gånger pi.
F11	Ja, men det är samma sak, 3,3 eller … 3,9 ….

Erik motiverade den gemensamma genomgången med att han, genom att hålla klassen samlad, skulle slippa att ge samma instruktion vid flera olika tillfällen. Samtidigt drabbades han således av andra kommunikationsproblem som förorsakades av att flera av eleverna hade bristande förkunskaper, i kombination med att de hade problem med att tolka Eriks och lärobokens instruktioner. Återigen kan jag konstatera hur en lärares val av ramar skapar konflikter i undervisningen.

En översikt över dragen under Eriks lektion är:

Reglerande inledning	31	drag
Genomgång	84	drag
Självständigt arbete	579	drag
Varav *Allmänt reglerande*	42	drag
Reglering av undervisning	207	drag
Undervisning	330	drag
Reglerande avslutning	31	drag

Av Eriks elever var det två som inte deltog i någon kommunikation och ytterligare fyra elever som inte deltog i någon undervisande kommunikation. Av alla undervisande cykler var det bara nio som omfattade mer än tio drag. Det betyder att huvuddelen av undervisningen handlade om cykler med få drag, oftast en värdering av typen rätt eller fel eller om man skulle använda närmevärdet 3 eller 3,14 för π. De vanligaste cyklerna bestod av 1 - 4 reglerande drag och omfattade dels tillsägelser såsom att eleverna skulle börja arbeta och/eller sluta prata, dels klagomål från elevernas sida på arbetsuppgiften eller på problemen med passare och linjaler.

Efter lektionen konstaterade Erik att det ofta blir lite stökigt under en laboration, men att det ändå är viktigt att laborera. Han framhöll också att vissa av flickorna i klassen var väl pratiga. De problem som uppstod under lektionen, menade han, berodde på att eleverna, med ett par undantag, var ”lata och slarviga”.

9.1.6 Frida, skolår 8

Frida hade en filosofie ämbetsexamen med 60 poäng i matematik, cirka tio års lärarerfarenhet och hade läst en didaktisk påbyggnadsutbildning. Frida hade i flera år arbetat på den här skolan och undervisade den här lektionen elever i skolår 8. I klassrummet fanns det 15 elever. Några elever hade valt att sitta i en korridor och fick sporadisk hjälp av Frida. Ytterligare andra elever fick den här lektionen hjälp av en speciallärare.

LAE Dom som ska följa med Helen följer med henne va (2s) och så sätter ni er där ni ska sitta när ni jobbar.

Av de 15 eleverna var fyra placerade runt ett större bord, åtta elever satt parvis och de övriga tre eleverna satt ensamma vid var sitt bord. Visst samarbete förväntades ske mellan eleverna. Frida använde liksom Erik läroboken *Möte med Matte D och E* (Skoogh, m.fl., 1996).

Före lektionen beskrev Frida att eleverna skulle arbeta individuellt utgående från läroboken. Vid behov brukade hon göra en kort genomgång av ett nytt avsnitt, men det behövdes inte idag. När en elev kommit efter eller hade varit sjuk uppmanades eleven att hoppa över ett antal uppgifter eller ett avsnitt i boken för att komma i kapp: ”Hoppa över dom uppgifter som du tycker att du kan.”

Frida ansåg det vara viktigt att besöka alla eleverna under en lektion, men också att stanna så länge vid varje elev att hon verkligen kunde reda ut deras problem. Eftersom eleverna var på olika sidor i boken fanns det inte något specifikt innehållsligt mål för den här lektionen. Målet var istället att lösa ett rimligt antal uppgifter.

Frida satte igång lektionen direkt utan att ge någon instruktion eller göra någon genomgång. Eleverna visste emellertid vad de skall göra. De fortsatte helt enkelt att räkna där de slutade under den förra matematiklektionen. Den individualiseringsform Frida hade valt var hastighetsindividualisering och alla eleverna arbetade i sin egen takt utgående från läroboken. De två duktigaste eleverna i klassen arbetade i en extrabok eftersom de redan var klara med uppgifterna i grundboken och ett par andra elever fick hoppa över ett antal uppgifter i slutet på ett kapitel eftersom de kommit efter enligt planeringen.

Frida hade alltså valt att låta läroboken styra verksamheten. Detta innebar att eleverna den här lektionen var spridda från uppgift 8 på sidan 55 till uppgift 59 på sidan 62. Två elever var som nämnts redan klara med dessa uppgifter och arbetade i en extrabok. Under lektionen uppstod det ett problem som Frida inte verkade hade förutsett i sin planering. Sex av eleverna kom under lektionen fram till ett nytt moment som handlar om en typ av geometriska kroppar som eleverna ännu inte behärskade. Dessa elever måste nu stanna upp och göra något annat.

F33	Men jag kan inte det.
L33	Men gör så här. Börja med diagnosen istället.
F51	Där.
L51	Där? Ja, men gör så här att (2s) hoppa över den sidan så länge då. Jag ska gå igenom det i morgon.
F32	Jag vet inte vad jag ska gör nu …
L32	Alltså jag ska gå igenom det här i morgon.

De flesta av de här eleverna uppmanades att göra diagnosen så länge. Tyvärr råkar även diagnosen omfatta en uppgift av den typ som Frida ännu inte gått igenom, vilket ledde till ny frustration.

Fridas lektion avslutades så här.

LAE Nu ställer vi oss på våra platser va. (3s) Hörde ni. Kan ni bara ställa upp er och sätta er så att vi kan avsluta lite grand (2s) Symötesgänget därnere … Ni jobbade jättebra i dag - tror jag. Det verkar så. Hej då.

Eftersom Frida oftast stannade mycket länge hos respektive elev, fick hon problem med att hinna med att hjälpa alla de elever som bad om hjälp. Hon ägnade till exempel större delen av sin uppmärksamhet åt tre elever. Frida ansåg inte att detta innebar något problem eftersom eleverna kunde hjälpa varandra.

F54 Dom där då?
L54 F54, kan du inte fråga om någon av dom andra där kan hjälpa dig?

F54 Det är ingen annan som är där.
L54 Dom kanske kan hjälpa henne ändå?
F54 Jag kan fråga F41. Tror det alltså.

Strategin att eleverna kunde hjälp varandra fungerade inte så bra. I det här fallet var det ingen lösning för F54. Hon hade problem med uppgift 55, som handlar om pannkakssmet och ml, medan F41 bara kommit till uppgift 25, som handlar om rätblockets volym och enheten 1cm^3. I det fallet fungerade det alltså inte att elev F41 hjälper F54. Här följer ytterligare ett exempel på ett sådant problem:

F25 Kan du förklara det här för jag kan inte. Jag fattar inte. Det är F33 som tror att det blir så, inte jag.
L25 Hur stor är en kubikmeter?

F25 hade ingen aning, men blev sufflerad av P34 som måttade med händerna. Frida försökte nu få P34 att hjälpa F25.

L25 Se på P34 där, han har fattat detta här nu.
L34 Du kanske kan förklara för F25.
F25 Ja, men det är bättre att-.
P34 Jag har inte fattat (1s) något.

Men F25 ville inte ha hjälp av P34 och han ville inte hjälpa F25. P34 hade egna problem som han ville ha hjälp med. Trots elevernas protester gick Frida därifrån för att hjälpa en annan elev. Det innebar att varken F25 eller P34 fick någon hjälp. Det dröjde därefter cirka 11 minuter innan Frida blev medveten om att P34, som hon ville skulle hjälpa F25, själv inte fattat något. Det visade sig då att han hade varit sjuk och därmed missat en tidigare genomgång.

L34 Vad? (1s) Vad är det du inte förstår?
P34 Det är ingenting, ingenting över huvudtaget.

Även F33 hade varit sjuk och nu gällde det för henne att komma ikapp igen.

L33 Hm. (1s) Nu är-. Dom här är ju ganska mycket samma så du kan ju (1s) du kan ju se här om du skall hoppa över någonting.

Frid överlät i det här fallet ansvaret på eleven att avgör vilka uppgifter som skulle hoppas över för att komma ikapp kamraterna. En intressant fråga blir nu vilka konsekvenser detta får för elevens senare behov av förkunskaper.

De elever som under den här lektionen arbetade med "överkursen" stötte där på några uppgifter där de skulle lära sig att använda miniräknarens minnesfunktioner. Så här löd en av uppgifterna.

135. a) Mata in 3,14 i miniräknarens minne M+.

b) Vilken figurs area beräknar man, när man gör följande tangent-nedtryckningar på miniräknaren? 6 x = x MR =.

P23 hade problem med uppgiften, sannolikt beroende på att det var ett tag sedan han arbetade med cirkelområdets area. Han försökte göra som det stod i texten men fattade inte poängen. Frida gav enbart procedurella förklaringar såsom vilka tangenter man skulle trycka ned, inte varför detta skulle göras. Hon gav således inte P23 någon hjälp att förstå de operationer han gjorde. Efter en stund gav Frida upp och gick därifrån med repliken:

L23 Ja, men så kan du ju inte ta det där, då får du inte 3,14. OK.

Efter cirka två minuters hjälp hade således P23 inte komma någon vart med uppgiften ifråga. Att även nästa uppgift gav liknande problem ledde till frustration.

En översikt över Fridas drag ser ut så här:

Reglerande inledning	1	drag
Genomgång	0	drag
Självständigt arbete	447	drag
Varav *Allmänt reglerande*	48	drag
Reglering av undervisning	96	drag
Undervisning	303	drag
Reglerande avslutning	4	drag

Den här statistiken visar att Frida ägnade större delen av sin tid åt undervisning. Det visade sig emellertid att hon förde mycket långa samtal med några få av eleverna. Kommunikationen med tre elever stod för nästan 70% av alla undervisande drag. Detta orsakade långa väntetider för övriga elever. Fem av de femton eleverna fick inte någon hjälp över huvud taget under lektionen. Medan de väntade på hjälp började eleverna ofta prata med varandra och mot slutet av lektionen förekom betydligt mera prat än arbete.

På en organisatorisk nivå fungerade lektionen bra, utan några större problem och Frida var också relativt nöjd efter lektionen. Hon påpekade bland annat den stora fördelen med att en resurslärare kunde ta hand om de svagaste eleverna, vilket gjorde det mycket lättare för henne att individualisera undervisningen för de elever som var kvar. Ett problem som Frida lyfte fram var att en del av eleverna hade svårigheter med rymdgeometri, att uppfatta tre dimensioner. Det är därför viktigt, menade hon, att konkretisera när man förklarar, att knyta an till vardagen.

9.1.7 Gunnel, skolår 8/9

Gunnel blev klar med sin utbildning till MaNO-lärare 4-9 för två år sedan och arbetade nu på en friskola. Hon hade redan före denna utbildning 60 poäng i matematik och några års erfarenhet av undervisning. Den klass hon arbetade i bestod av tolv elever, hälften från skolår 8 och hälften från skolår 9. Eleverna satt fyra i bredd vid långa bänkar i en kemisal och förutsattes samarbeta två och två. Gunnel använde under den här lektionen bland annat kopior från läroboken *Möte med Matte D och E* (Skoogh, m.fl., 1996).

Gunnel beskrev före lektionen att hon ansåg den här gruppen vara mycket slarvig och att flera av eleverna var ovilliga att arbeta. Jag förstod att hon ville undervisa om matematik medan de flesta av eleverna helst ville slippa. Lektionen innan hade eleverna klippt ut och klistrat ihop ett antal modeller av geometriska kroppar såsom kuber, pyramider, cylindrar och koner. Målet för den här lektionen var att eleverna skulle upptäcka relationen mellan vissa kroppars volym genom att laborera. Metoden var att fylla kropparna med puffat ris och därigenom jämföra dess volymer.

Efter att Gunnel hade kontrollerat närvaron genom att räkna upp alla elever vid namn började den egentliga lektionen.

LAE Idag fortsätter vi den här laborationen som vi har börjat. Kommer ni ihåg. Vi har börjat med att tillverka olika rymdgeometriska kroppar. …jag har gjort lite ordning, för ni har lämnat dem lite huller om buller här. Inte alla på sin bricka. …Och jag vill att ni skall alltså titta där borta efter era rymdgeometriska kroppar. …Så ni får gå dit och välja ut den brickan som tillhör er. …Alltså om du har gjort alla sorter så måste du ha sex stycken.

Gunnel hade valt att låta alla elever göra samma laborationer. Innehållet var således detsamma för alla elever. Redan vid början av lektionen uppstod ett problem. Efter den förra lektionen hade de flesta elever gått sin väg utan att städa efter sig och utan att sätta de kroppar de tillverkat på en speciell bricka. Gunnel hade därför förberett den här lektionen genom att sortera de tillverkade kropparna och ställa dem på rätt brickor. Trots detta tog det cirka fem minuter av lektionen innan alla eleverna hade hämtat sina rymdgeometriska kroppar. Under tiden tappade Gunnel för en stund kontrollen över lektionen. De flesta av eleverna sprang runt och bråkade och ropade.

L31	P31, jag vet att du inte har gjort alla, eller hur? Dom där som ni har ritat och klistrat.
L12	Ska vi se. (3s) Här finns också några, så om jag har missat så hittar ni…
P31	Jag och P41 jobbar tillsammans.
L31	(2s)
P31	Jag och P41 jobbar tillsammans.
L11	F11, du har alla sex stycken? (F11: Ja) OK.
P31	Jag och P41 jobbar tillsammans. Han har ju dabbat sig.
L31,41	Nu säger jag att ni sitter bredvid varandra.
L33	Men P33!
L21	F21, du kommer och (2s) F21du har dina saker här.
L33	P33, du har också tre stycken som tillhör dig.
P32	Var då? Jag kan inte finna dom.
LAE	Sen finns. (2s) P32 är inte här idag
L33,43	Kasta inte! …
P43	Så så.
P33	Det var han …
L33	Jaja, men du behöver inte kasta. OK då tar du din bricka …
P12	Kolla var har du, var är min då?
L12	Den finns där nog.
P44	Den är inte min.

Lektionen avslutades något mer organiserat.

LAE	Alltså vi städar nu. Dom som har gjort färdigt alla uppgifterna dom har fått en extrauppgift från mig som vi ska göra nästa gång. Det är alltså ett bevis på ett påstående som dom har kommit fram till. NU FÖLJER STORT KAOS.
LAE	Gå inte än! Hemläxorna … Jag vill ha läxböckerna i morgon.

Under det laborativa arbetet som i huvudsak utfördes i grupper om två elever gick Gunnel runt och handledde eleverna. De flesta av dem visade sig emellertid vara dåligt motiverade. Vissa av dem sade rent ut att de tyckte det här var ett barnsligt sätt att arbeta på och de tog uppenbarligen inte laborationen på allvar.

P33	Jag fattar, vi fattar inte.
L33	Vilken uppgift var det?

P43	Jag fattar liksom. OK, hej då.
L43,33	Du fattar det? Han kanske fattar men inte du?
P43	Men han fattar det och jag fattar det också jättebra.
L33	Vilken uppgift var det som
P43	Jag sa ju till dig att vi fattar det nu …

Eleverna hade själva valt vem de ville arbeta med. De här två eleverna hade emellertid helt olika viljor. Den ena eleven fattade inte och ville ha hjälp. Den andra eleven fattade inte heller men ville ändå inte ha någon hjälp. Gunnel lät sig inte nöja med det. Istället valde hon att ställa några kontrollerande frågor.

L33,43	Hur mycket större volym har cylindern? ÄN KONEN.
P43	Inte någonting, inte mycket i alla fall.
L43	Inte mycket?
P33	Två gånger kanske.
L33,43	Två gånger. Hur kan man pröva om det är två gånger?
P43	Vi har redan gjort det en gång.

Elevernas reaktion tyder på att det för dem handlade om att ha gjort något, inte att ha förstått. De hade sannolikt inte alls prövat, som de påstod, eftersom de då skulle ha fått svaret tre gånger. En annan elev visade upp en liknande attityd.

L23	… Diametern är alltså en sträcka som går genom cirkelns medelpunkt och går till dom här, dessa kanter här, ena sidan och andra kanten. Nu tar du och mäter i olika riktningar. (3s) Kan du göra det?
P23	Nej.
L23	Varför det?
P23	Vill inte.
L23	Vill inte. Vad skulle du vilja göra istället.
P23	Räkna matte.

Gunnel lyckades emellertid inte få den eleven att göra den här uppgiften. Hon löste detta genom att P23 fick sluta laborera och istället räkna i boken. En annan av eleverna var också ovillig att laborera och han störde samtidigt så mycket att han blev utkörd. Ytterligare en annan elev, P34, gick självmant sin väg efter en stund och kom inte tillbaka.

L13	P13. Du tar din mattebok nu. Du går ned i (P13: Aulan) Aulan.
LAE	Vart tog P34 vägen?

Även under Gunnels lektion uppstod konflikter mellan de valda ramarna

Valet av uppgifter och hur de skulle genomföra laborationen kombinerat med att de inte hade tillräckliga förkunskaper, till exempel avseende geometriska kroppars benämning, ledde inte bara till svårigheter för eleverna att tolka uppgifterna, utan även till problem i kommunikationen mellan lärare och elever.

L44	… Du har tillverkat den här. Vad heter den?
P44	Vad var de?. Vad var som?
L44	Vad heter den?
P44	Kommer inte ihåg det.
L44	Cylinder heter den, eller hur?
…	
L44	Hur räknar man ut arean av en cirkel?
P44	Man tar den här halva grejen först och delar den halvan.

L21	…Hur räknar man ut cirkelns area?
F21	(2s) de gånger (2s) det (mummel).

P23	Jag kan inte.
L23	Kan du inte den?
P23	Nej vi har aldrig lärt oss sånt.

De problem som uppstod under lektionen kan bland annat bero på två faktorer. Gunnel hade inte förklarat syftet med det laborativa arbetet för eleverna samtidigt som många av dem saknade såväl förkunskaper som terminologi för att arbeta med rymdgeometri.

En översikt över dragen under Gunnels lektion är:

Reglerande inledning		4	drag
Genomgång, reglerande		1	drag
Självständigt arbete		371	drag
Varav	*Allmänt reglerande*	20	drag
	Reglering av undervisning	90	drag
	Undervisning	261	drag
Reglerande avslutning		15	drag

Vid observationstillfället verkade den här lektionen vara den mest röriga och ineffektiva av de studerade lektionerna. Det var hela tiden en hög ljudnivå och mycket småbus. Vid en närmare analys framträder dock en annan bild. Trots all stökighet i klassen och trots många elevers ovilja att laborera blev, som framgår av tabellen, antalet undervisande drag relativt många. Gunnel besökte faktiskt alla de tio eleverna som var kvar under hela lektionen, minst fyra gånger per grupp, och vid varje grupp stannade hon, vid minst ett av tillfällena en längre stund (cykler om ca 20 drag). Därvid kontrollerade hon individuellt vad eleverna kunde.

Efter lektionen var Gunnel lite besviken. Det hade blivit betydligt stökigare än hon förutsett. Hennes ambition var att lära eleverna geometri och det visade sig att hon hade en klar uppfattning om hur man skulle kunna strukturera det aktuella stoffet. Hon visade till exempel hur man kan anknyta innehållet till matematikens historia. Samtidigt hade hon under sin utbildning lärt sig att det är viktigt att laborera. Problemet var emellertid att hon själv inte trodde på den här typen av laboration. Detta framgick av vårt samtal efter lektionen och även av några av hennes repliker under lektionen.

9.2 Sammanfattning av resultaten ur ett makroperspektiv

När lärarna planerade sin lektion var ett antal övergripande (fasta) ramar redan givna såsom tid, plats, antal elever etc. Andra (rörliga) ramar kunde läraren själv bestämma över genom att göra olika val, såsom av innehåll, arbetsform och arbetssätt I denna sammanfattning redovisas mönster och dilemman som kunnat iakttas i samband med dessa val.

9.2.1 Lektionens uppläggning

Hur en lektion planeras och genomförs beror i hög grad på de resurser som står till förfogande. Ett problem, som ofta lyfts fram av lärare (Skolverket, 2003) är de alltför stora undervisningsgrupperna. Med ökade resurser menar man att man skulle hinna handleda alla elever. I flera av de skolor som ingår i studien hade skolledningen avsatt extra resurser för matematik och i fyra av undervisningsgrupperna fanns endast 12, 13, 15 respektive 18 elever. I åtminstone tre av dessa grupper hade lärarna trots detta svårt att hinna hjälpa alla elever.

De extra resurserna som tilldelats matematik hade använts på olika sätt vid de skolor och klasser som ingick i studien.

- Barbro som arbetade som resurslärare fick information om vad hon skulle undervisa om och vilka elever hon skulle undervisa i direkt anslutning till den aktuella lektionen. Hon hade därför inte någon rimlig chans att förbereda sig och därmed begränsades hennes möjligheter att utnyttja resursen på ett effektivt sätt.
- När Anna förklarade för eleverna hur man arbetar med tid visade det sig att hon inte visste vad som hänt i halva gruppen under den föregående lektionen då de undervisats av en resurslärare. En ineffektiv planering ledde i det här fallet till en ineffektiv undervisning
- David och Frida arbeta i små grupper genom att extra resurser hade avsatts. Det mönster som framträder vid deras lektioner skiljer sig

> emellertid inte från de övriga. Trots den lilla gruppen gav sig David inte tid att lyssna på eleverna och Frida ägnade så lång tid åt att prata med ett fåtal elever att andra blev helt utan hjälp. I båda fallen ledde detta till att många elever fastnade på en uppgift i boken och inte kunde komma vidare. Resultatet blev att allt fler elever satt och pratade och störde istället för att arbeta.

Sett ur såväl lärarperspektiv som elevperspektiv var arbetet trots de gynnsamma ramarna ineffektivt av olika skäl. Barbro gavs inte möjligheter att förbereda sig ordentligt genom att hon direkt i samband med lektionsstarten får reda på vad hon förväntas hjälpa eleverna med. Anna har inte full kontroll över vad eleverna arbetar med genom bristande kommunikation med den lärare med vilken hon delar ansvaret för undervisningen. Att David och Fridas undervisning inte heller är effektiv, trots gynnsamma ramar, framgår av analysen ur ett mikroperspektiv. Studien visar även på andra faktorer som påverkar undervisningen. Den arbetsform, de uppgifter eleverna arbetade med och det arbetssätt respektive lärare valt visade sig spela en större roll för möjligheterna att kommunicera med alla elever än undervisningsgruppens storlek.

Även läroboken framträder som en överordnad organisatör och sätter agendan för lektionen. Detta framträder på olika sätt i studien.

De flesta lärarna uttryckte *målen med lektionen* i form av att något skulle ”göras” inte vad eleverna skulle lära sig under lektion. Målen beskrevs såsom ”jobba med volym” och ”arbeta med bråk och procent”. I andra fall talade man bara om vilka sidor i boken eller vilken stencil eleverna skulle arbeta med. Två av lärarna hade mer uttalade mål såsom ”att storleksordna decimaltal” eller ”förstå π och cirkelns area”. Det sätt på vilket lärarna ledde lektionen visade, i linje med målbeskrivningarna, att de var mer fokuserade på att eleverna skulle lösa ett visst antal uppgifter rätt, än att de på djupet skulle förstå de begrepp de arbetade med. Sättet att uttrycka sig kan vara kopplat till att läraren valt att organisera sitt arbete utgående från läroboken.

Även *lektionernas inramning* kan ses som en konsekvens av lärobokens roll. Inledningen och avslutningen av de studerade lektionerna var i de flesta fall likartad. Eleverna började direkt räkna där de slutade föregående lektion. Endast i två fall inleddes lektionen med ett gemensamt samtal och ingen av lärarna avslutade lektionen med en återsamling där man diskuterade dagens arbete. Mönstret som framträder visar på att det finns olika kulturer i klassrummen (Nickson, 1992). Anna hade aldrig gemensamma genomgångar. David och Frida hade genomgångar ibland och eleverna jobbar i övrigt enligt beting, alltså med vissa bestämda uppgifter under en viss tidsperiod. Erik och Cecilia startade lektionen med en gemensam genomgång utgående från ett läromedel och därefter arbetade eleverna med samma uppgifter. Hur arbetet i de respektive klasserna gick till var väl känt av eleverna och de tog i flera fall utan några kommentarer från läraren upp sina böcker och började räkna och vid lektionens slut slog de ihop boken. En nackdel med detta arbetssätt kan vara att eleverna genom detta sätt att arbeta inte får befäst de kunskaper de arbetat med under lektionen; det kan ju dröja flera dagar innan de fullföljer arbetet inom ett nyss påbörjat område.

När det gäller lärarnas *val av arbetssätt*, utgick alla lektionerna på olika sätt från ett skriftligt material. Fem av lärarna lät eleverna arbeta utgående från läroboken medan två av dem vid observationstillfället utgick från stenciler. Lärarna valde därigenom att låta läromedlet definiera uppgifterna för eleverna. En konsekvens blev att lärarna fick anpassa sig till bokens eller stencilens framställning. Detta val innebar att de inte kunde förebygga uppkomsten av problem utan fick handleda eleverna efter hand som problemen uppstod. För Anna, David och Erik ledde detta till en rad konflikter. Annas elever förstod inte hur de skulle arbeta med bokens uppgifter. Anna fick därför lägga mycket tid på att förklara detta för en elev i sänder. Davids problem var att han hade en annan syn än läromedelsförfattarna på hur man arbetar med bråk och procent. Erik slutligen verkade inte inse att den laboration boken beskrev inte ledde till det avsedda målet.

För att undvika att behöva upprepa samma sak enskilt till varje elev valde två av lärarna att starta lektionen med en gemensam genomgång. Tre av lärarna lät däremot eleverna starta det självständiga arbetet direkt. I det senare fallet fanns det klara rutiner för arbetet och eleverna fortsatte helt enkelt där de slutade under föregående lektion. Båda strategierna visade sig emellertid vara tidsineffektiva. De lärare som inte gjorde någon genomgång fick ägna mycket tid åt att gång på gång ge samma instruktion till elev efter elev, efterhand som dessa kom fram till ett nytt avsnitt eller en speciellt svår uppgift. De båda lärarna som valde att starta med en gemensam genomgång ville undvika individuell upprepning av sina instruktioner men var inte tydliga nog vid sina instruktioner. De genomgångar dessa lärare gjorde var huvudsakligen procedurella och beskrivande och innehöll ingen information om hur eleverna skulle kunna tänka när de arbetade med de givna uppgifterna. Den information dessa lärare gav vid genomgången visade sig snart vara bristfällig, vilket ledde till att de flesta eleverna efter hand fick ställa kompletterande frågor. Den tid de två lärarna hade tänkt vinna genom den gemensamma instruktionen gick således förlorad eftersom de ändå använde en stor del av lektionstiden till att korrigera för en rad missuppfattningar bland eleverna.

De dilemman som framträder är att när elever arbetar självständig kräver de många individuella förklaringar för att förstå och när läraren gör en genomgång och den inte är tillfylles går det åt mycket tid att individuellt tillrättalägga och förtydliga.

En annan intressant aspekt är att de lärare som undervisade yngre elever ägnade betydligt mer tid åt att beskriva hur eleverna skulle arbeta med formalia, medan de lärare som undervisade äldre elever satte fokus på undervisningens innehåll. Vidare uttryckte lärarna som undervisade yngre elever att de ansåg det viktigt att alla elever fick komma till tals. Detta medförde att de själva sällan fick tala till punkt. Eleverna tilläts att ställa frågor till läraren, som också svarade på frågan, trots att hon just då var upptagen med att hjälpa en annan elev med ett, för den eleven, viktigt problem. När det gällde de äldre eleverna är intrycket snarare att många av dem inte ville ha kontakt med läraren, som av dessa elever verkade uppfattas som ett störande moment i deras arbete. Arbetet verkade i första hand gå ut på att komma fram till svaret på ett lämpligt antal uppgifter oavsett hur detta gick till.

9.2.2 Organisera för förståelse

Alla de sju lärarna ansåg att de individualiserade undervisningen. De organiserade sitt arbete så att eleverna (eller grupperna), under längre eller kortare perioder, fick möjligheter att arbeta i sin egen takt. Den individualisering som förekom under sex av de observerade lektionerna var av typen hastighetsindividualisering. Alla elever arbetade i princip med samma uppgifter, fast vid olika tillfällen, och fick samma typ av instruktion via boken eller stencilen. Som motiv för hastighetsindividualiseringen nämnde lärarna vikten av att varje elev skall kunna arbeta i sin egen takt för att förstå det aktuella innehållet. Långsamma elever skall till exempel få den tid de behöver. Analysen visar emellertid att de långsammaste elevernas problem med att hinna med i kamraternas takt delvis berodde på att de stor del av tiden fick vänta på hjälp från läraren. I två av klasserna doldes de långsammaste elevernas tillkortakommanden bakom en kollektiv kommunikation med en grupp elever. Den hjälp eleverna därigenom fick medförde att de fick rätt svar på uppgiften och kunde gå vidare. I övriga klasser fick de långsammaste eleverna hoppa över att antal uppgifter, oftast i slutet av ett avsnitt. I flera fall fick eleverna själva bestämma vilka uppgifter de skulle hoppa över. Det stora dilemmat blev att om en elev inte hoppade över uppgifter så kom hon mer och mer efter. Om hon å andra sidan hoppade över uppgifter så riskerade hon att gå miste om viktiga förkunskaper inför ett senare moment.

När läraren valde att låta eleverna arbeta framåt i boken i sin egen takt fick de svårt att hinna med att hjälpa alla elever. Flera hade bl.a. av den anledningen låtit eleverna sitta i mindre grupper för att eleverna i viss utsträckning skulle kunna hjälpa varandra. En annan fördel med att låta eleverna sitta tillsamman uppgavs vara att de därigenom fick möjlighet att prata matematik med varandra. Något organiserat samarbete eleverna emellan förekom emellertid inte. Samarbetet visade sig främst bestå i att eleverna emellanåt kontrollerade varandras svar. I allmänhet hade eleverna själva valt vem de ville sitta tillsammans med. Det visade sig vid en närmare analys att elever som satt tillsammans i de flesta fall arbetade med helt olika moment i boken, vilket kan förklara bristen på samarbete dem emellan. Placeringen av eleverna hade således skett utgående från sociala skäl, inte utgående från deras arbetskapacitet, förkunskaper eller intresse för matematik. Denna placering av eleverna ledde i de flesta fall inte till att eleverna talade matematik eller hjälpte varandra, vilket var tanken med placeringen. Istället förekom en hel del privata samtal, fniss och skoj bland eleverna. Det som kunde ha blivit ett stöd i inlärningen blev snarare ett hinder i arbetet.

De tre lärare som har valt att hastighetsindividualisera, hade gjort en tidsplanering som eleverna följde. I övrigt var eleverna styrda av lärobokens instruktioner. Redan efter några veckor, när studien genomfördes, kunde de snabbare eleverna vara 10 - 20 sidor före sina långsammare kamrater.

Denna form av individualisering ledde enligt analysen till olika typer av dilemman:

- När eleverna i Annas klass kom till avsnittet om tid, förstod de inte bokens instruktion och visste inte vad och hur de skulle göra. Eftersom eleverna var spridda på olika avsnitt i boken, var det inte rimligt att samla dem till en gemensam genomgång. Anna valde därför att gå runt bland eleverna och efter hand ge dem samma instruktion. En stor del av lektionen fick av det skälet ägnas åt reglerande instruktion. Samtidigt fick flera elever sitta sysslolösa medan de väntade på att få instruktion från läraren. Den individualisering som var tänkt att ge de långsammaste eleverna gott om tid ledde i själva verket till långa väntetider och begränsade möjligheter för dem att få hjälp med sina problem.
- För att hålla tidsplaneringen uppmanades flera av eleverna i Davids och Fridas klasser att hoppa över uppgifter i boken. Detta skedde

osystematisk. I några fall fick eleverna själva välja ut vilka uppgifter de skulle hoppa över, i andra fall uppmanades eleverna att hoppa över resten av ett avsnitt eller kapitel. Eftersom de inte kunde veta om de uppgifter som hoppades över i boken var viktiga som förkunskaper till ett senare avsnitt, blev risken stor att de långsammare eleverna på det här sättet drog på sig en växande ”förkunskapsskuld”. De riskerade därmed att få nya inlärningsproblem och komma ännu mer efter.

9.2.3 Laborera för förståelse

Under fyra av lektionerna förekom laborativt arbete i någon form. Inget av de laborativa inslagen genomfördes på ett sådant sätt att den matematik-didaktiska idén synliggjordes för eleverna. De fick därför svårt att ”upptäcka” det matematiska begrepp eller den idé som skulle belysas. Dessutom hade flera av lärarna problem med att administrera det laborativa arbetet:

- Annas lektion var inte planerad för det laborativa moment om mätning som flera av eleverna kom fram till. Dessutom hindrades arbetet av att det bara fanns ett måttband. När det gällde mätning av tid, vilket de flesta elever fick problem med under lektionen, använde Anna aldrig den laborationsklocka hon hade med sig. Det hade troligen underlättat för eleverna att förstå, om hon med hjälp av den hade synliggjort tids-differenser eller digital tid.
- Eriks laboration om cirkelområdets area innebar ett procedurellt arbete där klippandet och klistrandet stod i fokus. Detta manipulativa arbete ledde inte fram till det förväntade resultatet att ett cirkelområdes area alltid är π gånger större än radiekvadratens, oberoende av cirkels radie. Dessutom hade Erik inte tagit med sig allt material som behövdes till laborationen och de flesta av passarna var inte funktionsdugliga. Endast en elev lyckades, enligt Erik, genomföra laborationen rent manipulativt.
- Gunnels laboration om kroppars volym blev något eleverna bara gjorde. Hon uttryckte själv att hon inte trodde på metoden, men att det här var något man förväntades göra. Efter föregående lektion hade eleverna lämnat de geometriska kroppar de då tillverkat i papper vind för våg. I början på den studerade lektionen tog det därför mycket lång tid att distribuera materialet till rätt individer. Det kaos som då uppstod kom Gunnel aldrig tillrätta med under resten av lektionen. Den laboration som utfördes var dessutom, enligt eleverna, i barnsligaste laget. Det puffade riset man skulle fylla kropparna med användes oftare till att kasta på en kamrat än till att fylla de geometriska kropparna.

Dessa beskrivningar visar att lärarna, fast de hade goda intentioner och avsåg att eleverna via laborativt arbete skulle lära sig matematik, hamnade i olika dilemman beroende på hur deras instruktioner interagerade med material och med bokens uppläggning och förklaring.

På skolorna hade man organiserat för att försöka ge eleverna goda möjligheter att lära sig matematik. Detta hade gjorts genom att extra resurser användes till att på olika sätt skapa mindre grupper. Lärarna vill inom dessa ramar ge alla elever möjligheter att lära sig matematik genom att låta dem arbeta i sin egen takt utgående från ett läromedel. Dessutom lät de dem sitta tillsammans i grupper för att ge dem möjligheter att prata matematik med sina kamrater. För att ytterligare öka elevens möjligheter att förstå presenteras en del matematikinnehåll med hjälp av laborationer. Man hade således organiserat och planerat för att skapa goda villkor för elevernas lärande. När undervisningen betraktades ur ett ytligt organisatorisk perspektiv ser man att den följer modern pedagogik och man får intrycket att den är funktionell. Studien visar emellertid att de olika val som gjorts ofta samverkade negativt. Det som framkommer vid analysen är att det inte går att göra olika val var för sig utan att ta hänsyn till hur att dessa påverkar varandra. Man måste ha ett systemtänkande vid planering av undervisning.

10 Resultatredovisning ur ett mikroperspektiv

När man närmare studerar den kommunikation som förekom under de sju lektionerna i studien framträder ett antal mönster. Dessa beskriver olika villkor för kommunikationen såsom dess innehåll och elevernas möjligheter att tolka detta innehåll utgående från deras aktuella förkunskaper och förmåga att uppfatta det speciella språk som används vid matematikundervisning.

Vid analysen av de undervisande cykler som förekom under lektionerna framkommer att flera av de ramar läraren valt vid planering av undervisningen inte ledde till det avsedda syftet att optimera elevernas möjligheter till lärande. Resultatet blev snarare en fragmentarisk och ineffektiv kommunikationen. De reaktioner och svar som eleverna gav på lärarnas förklaringar och frågor speglar kommunikationens effektivitet. Samtidigt framträder även orsaker till elevernas svårigheter att tillgodogöra sig det kommunicerade matematikinnehållet. Det rörde sig oftast om bristande förkunskaper eller att eleverna hade gjort en felaktig tolkning av de grundläggande begrepp som var nödvändiga för att förstå den uppgift de arbetade med. På motsvarande sätt kan man i allmänhet, genom att studera kommunikationens innehåll, sluta sig till om läraren hade uppfattat elevens egentliga problem och anpassat sina förklaringar till elevens intellektuella kapacitet.

Redan vid analysen av lärarnas undervisning ur ett makroperspektiv kunde man iaktta hur ett system av ramar för undervisningen inverkade på förutsättningarna för den kommunikation som ägde rum. En del av denna information kan man få redan när man observerar undervisningen i klassrummet. Vad som däremot är omöjligt att uppfatta, utan en betydligt djupare analys av materialet, är kommunikationens didaktiska kvalitet, och vilka förutsättningar som ges för eleven att förstå den matematik som erbjuds dem.

Kommunikationens didaktiska kvalitet framträder först vid en analys av materialet ur ett mikroperspektiv. Det går då att urskilja ett antal komponenter som är centrala för en meningsfull kommunikation. Vid analysen av det empiriska materialet har jag valt att separera dessa komponenter för att därigenom kunna synliggöra den matematikdidaktiska kvaliteten i lärarnas kommunikation. Dessa olika komponenter är emellertid starkt beroende av varandra och interagerar. Det är vid observationstillfället svårt att urskilja i vilken utsträckning läraren kommunicerar det aktuella matematikinnehållet på ett för eleverna förståeligt sätt.

Ur de vid analysen framkomna mönstren kan man urskilja ett antal komponenter som kan inordnas i följande kategorier:

- Instruktioner: Sådan övergripande information angående elevernas arbete som ges via läraren eller läromedlet.
- Individanpassning av innehållet: Kommunikationens anpassning till den enskilde elevens förkunskaper och förmåga.
- Synliggörande av matematiken: Läraren sätt att konkretisera och strukturera undervisningens matematiska innehåll.
- Språk och terminologi: Lärarens bruk av språk och terminologi vid genomförande av kommunikationen.

10.1 Komponenternas innebörd

Resultatredovisningen inleds med en beskrivning som syftar till att förse läsaren med ”glasögon” vilka gör det möjligt att urskilja de olika komponenterna som ”berättelserna” från de studerade lektionerna avser att illustrera. Avsikten är att genom analysen synliggörs sambanden mellan de instruktioner som lärarna gav och vad de avsåg med dem. Detta har gjorts genom att yttrandena i cyklerna och de olika dragen har satts i relation till det undervisningsmaterial som användes och avsikten med den aktivitet som pågick.

Instruktionerna till de aktiviteter som pågick under lektionerna gavs i första hand genom ett läromedel. Av det skälet har de aktuella avsnitten i läroböcker och stenciler analyserats ur såväl ett matematikdidaktiskt som ur ett tänkt elevperspektiv. I två fall kompletterade läraren läromedlets instruktioner vid en gemensam genomgång, i övrigt skedde kompletterande instruktioner individuellt.

En instruktion har oftast två syften. Ett syfte är att klargöra vad eleverna skall göra, alltså vilka uppgifter de skall lösa, hur de skall redovisas m.m.. Ett annat syfte är att förklara aktuella matematiska begrepp, struktur och lösningsstrategier. Instruktioner kan också vara olika till sin karaktär. Det kan vara en beskrivning av vad eleverna tekniskt sett skall göra. Det kan vara en procedurell förklaring, alltså hur eleverna skall lösa en uppgift. Det kan också vara en förklaring som synliggör innebörden av ett matematiskt begrepp eller operation.

När lärarna kompletterade en instruktion eller förklarade en oklarhet i boken för en enskild elev eller grupp var det vanligt att läraren enbart upprepade de anvisningar som redan stod i boken och som eleverna inte hade förstått.

Vid mina intervjuer med lärarna framgick det att de såg individualisering antingen som en fråga om att ge alla elever tillräckligt mycket tid för att lösa sina uppgifter eller som en åtgärd att minska undervisningsgruppernas storlek. Som en konsekvens av detta lät de eleverna arbeta i egen takt utgående från ett läromedel och hjälpte dem allt eftersom de fick problem med uppgifterna. En analys av den hjälp de gav visar att lärarna i stort sett hjälpte alla elever på samma sätt utan att ta hänsyn till individuella förutsättningar och tänkande. En annan iakttagelse är att lärarnas hjälp inte i första hand styrdes av elevernas behov av hjälp utan av vem som bad om hjälp. Oftast var det de duktigaste och de svagaste eleverna som blev utan hjälp.

För att få en uppfattning om undervisningens gestaltning är det avgörande att betrakta den ur elevernas perspektiv. Min tolkning av detta kan sammanfattas så här: Eftersom många elever oftast krävde hjälp samtidigt gav sig lärarna sällan tid att lyssna på elevernas egentliga problem. Följden blev att de ofta gjorde en felaktig tolkning av elevernas problem. Detta ledde antingen till att lärare och elever pratade förbi varandra eller till att läraren lotsade eleverna förbi problemen istället för att reda ut dem.

Undervisningen i matematik handlar inte bara om att få rätt svar på ett antal uppgifter utan om att synliggöra viktiga matematiska egenskaper och strukturer. Dessa strukturer bör även kunna förklaras eller konkretiseras för eleverna. När det gäller matematiska strukturer så uppstod vid flera tillfällen intellektuella dilemman. Speciellt i samband med bråk- och procenträkning visade det sig att lärare och läromedelsförfattare hade olika uppfattningar om vilken struktur som var att föredra. Eftersom ingen förklarade innebörden i dessa uppfattningar utan endast gav procedurella beskrivningar av tillvägagångssätten, fick eleverna problem med att särskilja dessa motstridiga instruktioner.

När det gäller språk och terminologi använde de flesta lärarna ett oprecist språk i sin kommunikation med eleverna. Med detta vardagsbetonade språk blev det ofta svårt att lyfta fram abstrakta begrepp. Även eleverna använde ett oprecist för att inte säga slarvigt språk när de kommunicerade med läraren. Eftersom få av lärarna korrigerade detta språk uppfattade sannolikt eleverna att deras sätt att uttrycka sig var acceptabelt, inte minst med tanke på att lärarna själva använde ett liknande språk. Möjligen kan detta vara en förklaring till varför många av eleverna hade problem med att förstå läromedlens mer korrekta språk. I detta sammanhang bör också nämnas att lärarnas sätt att uttrycka sig liksom deras kroppsspråk relativt klart signalerade deras attityd till såväl det innehåll som kommunicerades som till de elever de kommunicerade med.

10.2 Lärarberättelser

Att observera en lektion är en sak och att analysera kommunikationens innehåll en helt annan. I det första fallet betraktar man undervisningen utifrån, dvs. lärarnas val av arbetsformer och arbetssätt. I det senare fallet betraktar man undervisningen inifrån alltså hur läraren försöker synliggöra matematikens innehåll för eleverna. I följande ”berättelser” från de olika lektionerna har jag strävat efter att ge en noggrann bild av det senare perspektivet.

10.2.1 Annas kommunikation

För Anna var individualisering en fråga om att alla elever skulle få möjligheter att arbeta i sin egen takt. Hennes ambition var att besöka alla elever under lektionen och svara på alla frågor som ställdes. Dessa ambitioner ledde under lektionen till ett antal konflikter. En sådan konflikt består i att hon sällan kan stanna till hos en elev ens under en halv minut utan att bli avbruten av andra elever en eller flera gånger. Ett exempel på detta är när Anna just hade börjat hjälpa F11 men upprepade gånger störs av P41.

F11	Jag har ingen linjal.
L11	Du behöver en linjal förstås för du ska mäta.
P41	Anna, Anna.
L41	P41 KOMMER MED EN LAPP. Du kan lägga den på bordet.
F11	Linjal behöver jag ju.
L41	Lägg den på bordet.
F11	Linjal behöver jag ju.
L41	OK. Lägg den på bordet.
F11	Linjal behöver jag.
L11	Har du ingen linjal. Var är den?
F11	Sönder.

Ett annat exempel är när Anna under en stund hade hjälpt F44 med ett problem och det verkade som om F44 hade börjar förstå. Då kom P52 och störde kommunikationen:

L44	… Nej det här räcker. Det är 2 och sedan?
P52	Får jag säga något till P25?
L44	Vad sa du? Vi börjar här. Hur mycket-?
F44	4.
P52	Får jag säga något till P25?
L44	Vad sa du?
P52	Får jag säga något till P25?
L52	Ja.

Anna lät P52 fortsätta att fråga trots att hon var upptagen av att hjälpa F44 och hon avbröt till slut detta samtal för att besvara P52:s fråga. Direkt efter detta kom ytterligare en elev, P31, och ville diskutera sina problem. Anna valde då att svara på P31:s frågor och inväntade således inte svaret på den fråga hon just hade ställt till F44. När hon besvarat frågorna från P31 lämnade hon F44:s bänk och vände sig till en annan elev vilket innebar att F44 inte fick sina problem utredda. Detta mönster upprepades flera gånger under lektionen. Ambitionen att svara på alla elevers frågor ledde oftast till att den som sannolikt bäst behövde ett svar blev utan.

Anna hade valt att låta boken styra elevernas arbete. Det var alltså från boken eleverna fick sina instruktioner. Eleverna hade emellertid problem med att tolka lärobokens instruktioner på egen hand. I stort sett alla eleverna behövde därför kompletterande förklaringar från Anna, när de mötte ett nytt innehåll eller nya uppgiftstyper. När Anna hjälpte eleverna med texten visade det sig emellertid att hon i stort sett aldrig förklarade hur eleverna skulle förstå och behandla det matematiska innehåll boken tog upp. Hon beskrev nästan uteslutande formalia, alltså hur eleverna skulle läsa instruktionerna och hur de skulle skriva svaren i sitt räknehäfte.

L14	Tja, du ska titta på bilderna som finns här på sidan 48. Och dom här berättar om vad som händer här på bilden. Till exempel a: Klockan är sju på morgonen. Petra vaknar. Vilken bild berättar eller säger så här?
L22	Petra vaknar. Klockan är 7 ja.
P22	Vad händer? Jag vet inte det.
P23	Men titta här då.
L23	Var är hon? Hon med ljust långt hår.
P23	Är <u>det</u> Petra?

Eleverna fick således sällan förklaringar till uppgifternas innehåll, vilket ledde till att deras problem med hur de skulle lösa uppgifterna blev allt större. Fler och fler elever behövde därför hjälp allteftersom lektionen fortskred. Av det skälet fick Anna efter hand svårt att hinna svara på alla frågor och därför blev svaren ofta av det här slaget:

L31	Gå vidare med andra frågor tills jag kommer.

Denna uppmaning ledde emellertid till nya problem eftersom det var svårt för eleven att gå vidare när hon inte förstått den tidigare uppgiften. Uppgifterna i matematikboken de använde byggde på att eleverna hade löst och förstått tidigare uppgifter.

Att allt fler elever successivt fick problem under lektionen ledde till att Anna hade svårt att organisera sin hjälp till dem. Hon glömde till exempel bort att fullfölja hjälpen till F44 och att komma till P31 som hon hade lovat. Men eleverna glömde inte och efter en stund blev P31 arg och ropade:

P31	Nej, du ska hjälpa mig!

I den analys som redovisats i avsnitt 9.1.1 framgick att Anna ägnade huvuddelen av sin kommunikation åt reglerande undervisning. En intressant fråga är därför hur individualiseringen fungerade när Anna väl tog upp ett ämnesinnehåll. Följande kommunikation med F24 är ett typiskt exempel. Uppgiften utgår i det här fallet från att klockan är 04.30 och man skall bestämma vad klockan är tre kvart senare. F24 hade kört fast på den uppgiften och Anna försökte under en stund reda ut hennes problem.

L24	Sen, tre kvart senare, när det ha gått tre kvart till? Hur mycket är klockan då?
F24	Tre kvart?
L24	Tre kvart. (4s) Du måste räkna, titta på bilden.

När de kommit så långt dök P23 upp med sin bok och Anna valde då att hjälpa honom. Vid analys av lektionsutskriften framgår att det därefter dröjde 23 minuter innan F24 fick hjälp med att lösa uppgiften. Hon hade under den tiden försökt lösa en annan uppgift, utan att lyckas.

F24	Hur mycket var klockan 15 minuter tidigare? (2s)
L24	Nu är klockan 16.
F24	Är det den klockan som tillhör den (1s) eller den?
L24	Det är (2s) det är den tror jag.
…	
F24	Den är kvart över 4.

Med hjälp av elevkortet för F24 tillsammans med tidsangivelserna på lektionsutskrifterna på elevnivå, framgår det att hon har arbetat med dessa två uppgifter under större delen av lektionen utan att ha förstått avsikten med de illustrationer som finns i boken. Anna förtydligade emellertid inte uppgiftens innebörd och inte heller kommenterade hon det felaktiga svaret, utan hon fortsatte med att ställa nya frågor.

L24	Men om vi går tillbaka 20 minuter. Du säger att det är 16 och 15. Om vi går tillbaka 20 minuter tidigare, om vi går tillbaka 20 minuter. Hur mycket blir det då?
F24	5 i 4.
L24	5 i 4. Hur skriver man det med siffror? Med digitala.
F24	Det är ju det jag inte vet.

För att tolka detta måste man se kommunikationen ur elevens synvinkel. När F24 i början av lektionen hade problem med den här uppgiften, tog

Anna inte reda på vari elevens problem egentligen bestod. Inte heller nu verkade hon uppfatta att F24 hade problem med att använda digital tid. En möjlig tolkning är att Anna tog för givet att detta är enkelt vilket skulle kunna förklara varför hon på nytt lämnade F24 utan att ha rett ut problemet. Mot slutet av lektionen hade F24 fortfarande samma problem, nämligen hur man tolkade bokens illustrationer och skrev tid digitalt. Det tog då drygt två minuter för Anna att med hjälp av ledande frågor lotsa fram F24 till ett korrekt svar. Flera av de andra eleverna hade också problem med uppgifter om tid och tidsdifferenser. När Anna hjälpte dem pekade hon på en statisk figur i boken och förutsatte att eleven utgående från denna skulle skapa en mental bild av ett tidsförlopp, vilket kanske inte var så lätt för dem. Med hjälp av den laborationsklocka som Anna tagit med till klassrummet hade det möjligen blivit lättare att beskriva fem minuter i fyra digitalt.

Någon individualisering på elevnivå, alltså i meningen att reda ut och ta hänsyn till olika elevers individuella inlärningsproblem, förekom inte under lektionen. För att göra detta behöver man utgå från de olika elevernas förkunskaper. Anna verkade inte göra detta. Inte en enda av hennes frågor under lektionen gick ut på att ta reda på hur en elev tänkte eller hur eleven hade kommit fram till ett visst svar för att på så sätt få en utgångspunkt från vilken hon kunde förklara uppgiften. Inte heller gav hon en enda gång en elev något exempel på en strategi för hur man skulle kunna lösa en uppgift.

Till den lärobok Anna använde finns det diagnostiska test. Dessa test fyllde emellertid inte den funktion, som Anna skulle vara hjälpt av för att kunna individanpassa undervisningen. Bokens test var så kallade eftertest och är till för att kontrollera om eleverna, efter att ha arbetat med ett visst avsnitt, behärskar det. Testen gav alltså inte besked om vilka förkunskaper eleverna hade inför ett nytt avsnitt. I Annas klass hanterades testen på ett sådant sätt att hon aldrig kunde veta vem som löst uppgifterna på testet. Det kunde mycket väl ha varit en kamrat eller en familjemedlem som hade gjort det.

P32	-fråga bara om diagnosen.
L32	Diagnos. Har du jobbat hemma?
P32	Jag gjorde dom båda.
...	
L32	Varför är du inte färdig med den?
P32	MUMLAR.
L32	Nej, men du vet. Du ska ta den hem, i dag också.

När Anna handledde de elever som arbetade med omkrets utgick hon från läroboken och omkretsen på en figur i den. Det är tveksamt om eleverna uppfattade bilden som ett konkretiserande stöd för att förstå begreppet omkrets. Så här förklarar Anna hur F12 skulle mäta:

L12	Omkretsen är längden runt omkring den här, till exempel. … Man mäter först den sidan, sen den här sidan-.
F12	Runt om hörnet också då?
L12	Nej för den här bara, har man ritat för att underlätta, men egentligen ska du mäta den här sidan, den här linjen för det är rakt ser du, så du ska mäta den sidan och den sidan ska du mäta sedan och sen du plussar dom ihop och får omkretsen. Så omkretsen är längden runtomkring.

Att mäta omkrets blev för F12 härigenom till en procedur där hon mätte sidorna var för sig, och att därefter adderade dem. Jag tolkar elevens fråga ”runt om hörnet också” som att hon förstått begreppet. Läraren svarade ”nej” och fortsatte sin procedurella ”mättanke”, istället för att låta eleven få utveckla sin ”runtomtanke”.

När Anna sedan vände sig till F11 gav hon även henne en procedurell förklaring.

L11	Ja (2s) ja, du ska plussa ihop dom. (*174b*) Du kan inte skriva dom så här, på det här sättet utan skriva 4, den här sidan, den långa sidan är 4 plus den sidan och så plus den och plus den, då får du?
F11	4 (2s) plus- (2s)
L11	Du ska ha plus mellan alla fyra sidor, för du vill ha omkretsen. Du vill ha hur längden är av omkretsen. Hur mycket är den runtomkring? Hur lång den är runtomkring?
F11	plus 4 är lika med. Man räknar ut det då?
L11	Hur många sidor blev dom nu 4 plus 2 plus 4 Hur många sidor har du räknat att jobba? (2S) Hur många sidor?
F11	En, två, (2s) tre, fyra.
L11	Men du har här bara tre, en, två, tre.
F11	Oj. Den här också.

Anna inledde handledningen procedurellt men frågade efter en stund hur lång figuren var runt om. F11 svarade följaktligen procedurellt och Anna fullföljde på samma sätt och hjälpte eleven att få rätt svar.

Det språk Anna använde när hon beskrev geometriska figurer eller räkne-operationer var varken klart eller entydigt. När hon i citatet ovan förklarade begreppet omkrets för F12, var det sträckor de mätte och inte linjer. F11 skulle inte plussa ihop sidorna, möjligen lägga ihop dem eller addera. När läraren, som i exemplen, inte använder ett adekvat matematikspråk kan det bli svårt för eleverna att utveckla sitt matematiska språk, och därmed efterhand få ökad precision i begreppen, vilket är nödvändigt för fortsatta studier.

Även när Anna beskrev en rektangel och en kvadrat blev hennes språk flertydigt.

L15	Den här, är det inte en rektangel, där två sidor som är mot varandra är lika långa?
…	
L15	… I en kvadrat är alla fyra sidor lika långa. (*Ge exempel på kvadrater.*)

Det Anna uttryckte i det här fallet är inte fel, men det är heller inte tillräckligt. Det hon beskrev först är en parallellogram. För att det skall vara en rektangel måste även alla vinklar vara räta. När hon i det andra fallet skulle beskriva en kvadrat, beskrev hon istället en romb. Hon tog för givet att vinklarna också var räta. Det är emellertid inte säkert att eleverna delade Annas bakgrundskunskap angående de räta vinklarna.

Under lektion var Anna till en början noggrann med terminologin, till exempel med enheterna vid längdmätning:

F12	En meter och fyrtiotvå.
L12	Centimeter. En meter och fyrtiotvå centimeter.
L41	Men den här- (2s). Ja, hur mycket är det?
P41	65.
L41	Ja, 65 vad?
P41	Centimeter.

Efter halva lektionen var Anna inte längre lika noggrann. Hon tappade i skärpa och accepterade då mätetal utan enhet.

L41	… Det är den, men det ska vara rakt så här.
P41	Äh, 58.
L41	Ja.
L41	Vad är den här då?
P41	18.
L41	Och den här?
P41	80.

I vardagliga sammanhang utelämnar man ofta enheten när den är given genom sin kontext. Men i skolan kan man inte alltid ta förståelsen av denna kontext för given. Man bör kanske därför göra som Anna gjorde i början av lektionen vid kommunikationen med P41, nämligen att acceptera svaret i stort, men be att få det kompletterat: ”Ja, 65 vad? ”. Målet för matematik-undervisningen är inte enbart att hantera vardagens matematik utan att på sikt även kunna förädla sitt tänkande till en mer formell nivå. För att göra detta krävs en adekvat terminologi och ett språk som är tydligare än vardagsspråket. Det är möjligt att Anna och eleverna delade kontexten och den underförstådda enheten centimeter, men i en inlärningssituation kan man inte ta detta för givet. I exemplen nedan (se avsnitten 10.1.5 och

10.1.6.) där mätningen gällde area och volym framkommer konsekvenserna av att acceptera att eleverna inte har dessa begrepp klara för sig. Innehållet som Annas klass arbetade med utgör ju samtidigt förkunskaper för senare årskursers arbete med geometri.

10.2.2 Barbros kommunikation

Barbro undervisade under den studerade lektionen fyra elever som kommit efter kamraterna i klassen. Hennes uppgift var att hjälpa klassläraren att individualisera genom att hjälpa dessa elever att komma ikapp sina kamrater. Barbro valde att lösa alla uppgifter kollektivt och stå vid tavlan som sekreterare. Medan hon diskuterade en uppgift med en av eleverna förväntade hon sig att övriga elever räknade i sina räknehäften. Alla elever skulle därmed, enligt Barbro, ges möjligheter att tala matematik och lyssna på sina kamraters lösningar samtidigt som de skrev ned en egen lösning.

Den första uppgiften man löste under lektionen var 722 + 198 och den löstes på följande sätt med så kallad skriftlig huvudräkning: (700 + 100) + (20 + 90) + (2 + 8). Metoden är korrekt, men man kan ifrågasätta om detta är huvudräkning eller endast ett omständigare sätt att utföra en traditionell algoritm. Ett alternativt sätt att lösa uppgiften skulle vara att använda sig av den associativa lagen för addition och räkna 722 + 198 = 720 + 2 + 198 = 720 + 200, vilket är en rimlig operation att utföra i huvudet.

Nästa uppgift man löste var 475 + 284 och även i det här fallet kom man fram till rätt svar, men på tavlan fanns då den felaktiga räkneoperationen 475 + 284 = 400 + 200 = 600.

Efter en stund övergick Barbro till subtraktion och hon fortsatte att successivt skriva det eleven sagt på tavlan. Frågan gick först till P02, som inte svarade. Utan någon kommentar gick då frågan direkt över till P01.

L02	P02, 108 – 93. (2s) Ja.
L01	P01.
P01	100 – 90 = 10 och 8 – 3 = 5.
L01	Och vad blir det?
P01	15.

Så här såg det ut på tavlan:

$$\begin{array}{rcr} 100-90 & = & 10 \\ 8-3 & = & 5 \\ \hline & & 15 \end{array}$$

Detta kommunikativa mönster upprepades under hela lektionen. Eleverna löste uppgifter i tur och ordning och när en elev inte svarade eller svarade fel, så gick frågan direkt över till en annan elev. Det innebar att Barbro i princip förde en kollektiv kommunikation med eleverna i den meningen att det var svaret som prioriterades inte vem som kom fram till svaret. På det viset hann man med att lösa ett antal uppgifter under lektionen, men Barbro stannade aldrig upp och tog reda på vad respektive elev faktiskt hade uppfattat av undervisningen. Hon redde heller aldrig ut vad som var orsaken till att en elev svarade fel. Någon egentlig individualisering förkom således inte.

I läroboken ges även en alternativ lösningsmetod till subtraktionen 108 – 93. Barbro övergick nu till den metoden.

LAE	Nu ska vi lära oss ett annat sätt. Hur långt är det mellan 93 och 100? SKRIVER 93 ⟶ 100.
P02	7.
LAE	Och mellan 100 och 108? SKRIVER 100 ⟶ 108
P01	8.
LAE	Och 7 och 8 blir 15. LOTSNING!

Så här såg det ut på tavlan:

$$\begin{array}{rcrcr} 93 & \longrightarrow & 100 & = & 7 \\ 100 & \longrightarrow & 108 & = & 8 \\ \hline & & & & 15 \end{array}$$

Barbro använde i det här fallet bokens notation som fungerar väl för subtraktion som utfyllnad. Detta var en relativt lätt uppgift med enkla tiotalsövergångar. När uppgifterna sedan blev mer komplicerade uppstod emellertid problem med denna metod. Barbro gjorde nämligen inte klart för eleverna vikten av att välja lämplig metod till respektive uppgift och när de löste nästa uppgift blandade P01 samman de två metoderna.

L01	207 – 194, P01.
P01	200 – 190 = 10 och 4 – 7 = 3..
L01	Och vad blir svaret?
P01	10 och 3 blir 13.

På tavlan såg det ut på följande sätt:

$$207 - 194 = 200 - 190 = 10$$

$$\begin{array}{rrcr} 4 & -7 & = & 3 \\ \hline & & & 13 \end{array}$$

I det Barbro skrivit förekommer två formella fel, dels att 207 – 194 = 10, dels att 4 – 7 = 3. Visserligen fick uppgiften ett korrekt svar, men detta skrivsätt är inte lämpligt och Barbro borde åtminstone ha reagerat på subtraktionen 4 – 7 = 3 och rättat till det felet.

Problemen blev ännu större med de följande uppgifterna där det förekom tiotalsövergång i entalsledet. Uppgiften var nu 65 – 19, en uppgift som är lätt att lösa i huvudet om man till exempel utgår från närmevärdet 65 – 20 = 45, ungefär som när man köper något för 19 kr, betalar med en 20-kronorssedel och får en krona tillbaka. Med bokens algoritmiska metod blev det istället så här:

L04	F04, du tar 65 – 19. Hur tänker du?
F04	(2s) Jag vet inte.
L03	F03 då?
F03	60 – 10 = 50.
L03	Ja.
F03	9 – 5 = 4.
L03	Och då blir det 54.

Barbro hade skrivit följande på tavlan:

$$\begin{array}{rrrcr} 65 - 19 = & 60 & -\ 10 & = & 50 \\ & 9 & -\ 5 & = & 4 \\ \hline & & & & 54 \end{array}$$

Hon reagerade inte inför att uppgiften var felräknad. Hon kommenterade inte heller att bokens andra alternativ, det vill säga att räkna uppåt från 19 till 65, i detta fall hade varit att föredra.

Barbro visade därefter hur samma uppgift kan lösas med ytterligare en metod.

LAE	Det var den andra metoden. Man kan göra så här också. Om man lägger 1 till 19 så får man 20. Men då måste man lägga till 1 på 65 också.

$$65_{+1} \;-\; 19_{+1}$$

66 – 20

L03	Vad blir det, F03?
F03	Det blir (2s) 46

Denna senare metod motsvarar vad som vanligen brukar benämnas huvudräkning. En elev upptäckte nu att svaren blev olika och att den första uträkningen var felaktig. Barbro suddade då, utan kommentar, bort den felaktigt lösta uppgiften och gick vidare till nästa uppgift.

Om man betraktar Barbros undervisning som en kollektiv verksamhet, kan man konstatera att de flesta uppgifterna löstes korrekt. Man kan även konstatera att P02 och F04 hade problem med att lösa sina uppgifter på egen hand och att frågan oftast gick över till P01 respektive F03. Under lektionen gjorde P01 två grova felräkningar och P02 och F04 vardera en. Bara F03 räknade allting rätt. Som redan nämnts följde Barbro aldrig upp en felaktig beräkning utan hon gick hela tiden framåt och frågade tills hon fick rätt svar. Därefter gick hon direkt vidare med nya uppgifter. Det är oklart om P01, P02 och F04 förstått hur man skulle utföra de här beräkningarna. Gruppen hade tillsammans löst uppgifterna, men vad hade den enskilda eleven lärt sig?

I början av Barbros lektion förekom följande dialog

L02	Hur gör vi nu?
P02	Man ställer upp den.
L02	Nej, det är huvudräkning.

Barbro menade alltså att man arbetade med huvudräkning och hon frågade ofta hur eleverna tänkte. Eleverna däremot följde givna ritualer nämligen de algoritmiska metoder som används i boken. Det blev därigenom svårt för eleverna att vara kreativa och att tänka fritt, vilket är en fördel när man arbetar med huvudräkning. Barbro frågade å ena sidan hur eleverna tänkte, men å andra sidan fokuserade hon på proceduren. Detta kom att innebära att Barbro, genom lotsning, ledde eleverna framåt steg för steg.

En utförligare analys visar att den metod boken förordar för subtraktion fungerar bra när det gäller att beräkna de uppgifter som finns i boken. Däremot uppstår det problem när man skall lösa andra typer av uppgifter, som inte är valda för att passa till just dessa metoder. (jfr Löwing 2002, s. 62 ff)

Barbro arbetade under den här lektionen med addition och subtraktion. Eleverna som gick i skolår 6 använde under lektionen inte korrekta termer såsom addition och subtraktion utan uttryckte sig på ett naivt nybörjarspråk.

L01	Och vad gör man sedan?
P01	Sedan plussar man.
L02	Vad gör du nu?
P02	Man plussar.

Genom att inte korrigera eleverna har Barbro indirekt accepterat detta språk, vilket kan leda till att det blir normgivande för eleverna.

Ett annat språkligt problem är den skillnad som ofta uppstår mellan hur man tänker när man löser ett problem och hur man skriver ned samma lösning. I det här fallet använde man sig av så kallad skriftlig huvudräkning. När man skall beräkna 661 + 268 med den metoden börjar man med att addera hundratalen 600 + 200. Men detta betyder inte att 661 + 268 = 600 + 200 = 800. Barbro skiljde alltså inte mellan de olika tankesteg som tas för att utföra en beräkning och hur man skriver (tecknar) de räkneoperationer som utförs. Hon skrev även ned beräkningar som:

$$207 - 194 = 200 - 190 = 10$$

och till och med $4 - 7 = 3$

Logiken bakom detta felaktiga skrivsätt är att man för att bestämma differensen 207 – 194 kan börja med att beräkna 200 – 190 = 10 respektive att man kan beräkna 7 - 4 genom att räkna upp från 4 till 7. Den intressanta följdfrågan är vad en sådan tolkning av likhetstecknet som här gjorts får för konsekvenser när eleverna längre fram kommer i kontakt med ekvationslösning, funktionslära eller algebraiska förenklingar.

10.2.3 Cecilias kommunikation

I Cecilias klass satt eleverna i grupper om tre, fyra elever. Tanken med detta var enligt Cecilia att de skulle samarbeta och tala matematik med varandra. Ett sådant samarbete elever emellan kan vara till stor hjälp för läraren under det självständiga arbetet. Ju mer eleverna kan hjälpa varandra desto mindre hjälp behöver de från läraren. När Cecilia skulle handleda en grupp kommunicerade hon oftast med gruppen, inte med individerna i gruppen. Här följer några exempel på sådan kollektiv kommunikation.

F34	Man kan strunta i den siffran för den är ju nästan ingenting.
P33	Men jag tror hon har tänkt så att bara för att det står 521 (xx) att hon tror att det är större då för det är hundra där.
P32	Det är väl miljondel det?
L31-34	Nej, vad kallas den delen som är längst bort här.
F34	Tusendel.

F31	Ja.
L31-34	Kommer ni ihåg vad den delen kallades? Den delen?
P32	Hundradel, (1s) tusendel.

Alla de fyra eleverna i gruppen var med i kommunikationen. Men vem av dem kunde vad? Eleverna gav ju olika svar. En viktig fråga blir därför vilka elever i gruppen som förstått och på egen hand kunde lösa dessa eller liknande uppgifter. Denna kommunikation pågick i fyra minuter och avslutades på följande sätt:

L33	Hur går det P33, är det svårt? Gör nu så här.
L32	P32 har förstått va?

Sedan gick Cecilia till en annan grupp, utan att ha hjälpt P33, som såg bekymrad ut och utan att veta om P32 verkligen hade förstått. Svaret på frågan om P32 hade förstått kom senare under lektionen när han bad om hjälp med en liknade uppgift.

När hon en stund senare kom till en ny grupp, följde Cecilia samma kommunikationsmönster. I gruppen fanns tre elever, men bara två av dem deltog i kommunikationen. Man skulle i det här fallet jämföra talen 2,07 och 2,5.

L22-24	Om ni jämför det talet där med det talet som är där, vilket tal-. (1s) Hur mycket större är det talet än det där.
P23	Lite mindre än en halv.
P24	Ungefär 4,3.
L24	Vad sa du, 4,3?
P23	43 hundradelar.
P24	4,03.
P23	43 hundradelar.
L23	Ja.
P24	Va?
P23	43 hundradelar.
L24	Förstår du varför, P24?
P24	Ah, nej.

På nytt gav eleverna olika svar på uppgiften. P24 talade till slut om att han inte förstod och vad den tredje eleven, P22, förstod framgick inte. Trots att P24 talde om att han inte förstod gick Cecilia därifrån efter att återigen ha nöjt sig med ett kollektivt svar på uppgiften.

Drygt åtta minuter in på lektionen hade ännu en grupp fått problem.

P62,F63	Vi fattar ingenting.

Cecilia hade inte tid med den gruppen just då utan återvände till den ett par minuter senare. Hon tog då inte reda på vad det var eleverna inte fattade utan hjälpte dem att gemensamt komma fram till svaren på de olika uppgifterna.

L61-63	Hur går det för er?
P61	Jag hade visst två rätt …
…	
L61-63	Vad är det man ska göra i uppgiften? *(Rita en ring runt alla tal som är mindre än 0,75: 0,706 0,6 0,815 0,9 0,085*)
P61	Mindre än 0,75 ja.
F63	Ja.
P62	815 är väl inte mindre är 75?
P61	Jag menar 706. 706 är mindre.
P62	Ja.
F63	706 är väl inte med?
…	
L61-63	Hur var det nu med det här noll komma åttahundrafemton? Vad sa ni, var det rätt eller fel?
F63	Rätt.
P62	Fel.
L61-63	Är det rätt eller fel, vilket är det?
P61	Fel, fel, fel.
L61-63	Varför?
P61	För att 815 är mer än 750. Det är 750.
F63	Det är (1s) också (1s) fel.

Den här kommunikationen inleddes med att P62 och F63 talade om att de inte fattade någonting. En trolig orsak till att Cecilia inte reder ut elevernas problem eller diskutera kriterier för hur man kan avgöra talens storleksordning framträder vid analysen. Cecilia hade vid intervjun förklarat att en av orsakerna till att hon lät eleverna arbeta i grupp var att de skulle diskutera uppgifterna och hjälpa varandra. Jag tolkar denna avsikt så, att om någon i gruppen har kommit fram till ett korrekt svar, skulle man inom gruppen se till att alla förstod. Vad som kunde iakttas var istället, att när eleverna gemensamt kommit fram till ett svar på en uppgift, övergick de direkt till nästa uppgift. Av elevernas samtal, och utgående från deras kontroll av övriga gruppers arbete, framgick det att ett viktigt mål för dem var att så snabbt som möjligt bli färdiga med stencilen, helst före de andra grupperna.

Den metod Cecilia själv använde för att jämföra tal i decimalform bestod i att först jämföra entalen, därefter tiondelarna och om det så behövs även hundradelarna etc. Detta diskuterade hon i början av lektionen med två grupper. När andra grupper bad om hjälp med samma sak gav hon dem inte någon förklaring Hon diskuterade således inte hur det går till att jämföra två decimaltal med någon av de övriga grupperna.

När Cecilia besökte den första gruppen för dagen försökte man där avgöra vilket av talen 3,521, 3,6 och 3,75 som är störst. P33 försökte då förklara för kamraterna varför stencilens Lisa tror att 3,521 är störst. Han menade att Lisa tror att 3,521 är större än 3,75 eftersom 521 är större än 75. Detta är en vanlig typ av fel som även förekom bland klassens elever flera gånger under lektionen. Felet kan ha sin förklaring i hur man läser bråken. P32 löste emellertid problemet så här.

P32	Om man sätter en nolla bakom dom andra två talen så blir det tre komma sjuhundrafemtio.
L32	Du sa att du satte en nolla bakom alla andra talen? Vad då nollor, hur många nollor då?
P32	En nolla där och en nolla där. Då blir det större än det.
F31	Och det också större än det.

Det var således en av eleverna som funnit denna lösningsstrategi. Cecilia lyssnade och beskrev sedan sin metod.

L31-34	Titta här: Om jag håller för dom två talen där, dom där två, så står det 3-
P32	komma 5.
L31-34	och där står det?
F34	3,6 och 3,7.
L31-34	Vilket av dom här talen är störst?
F34	Det.
L34	Varför?
F34	För att det är en 7:a.
P32	7 tiondelar.
	…

Denna grupp hade nu två olika strategier för att lösa uppgifterna på stencilen. Den ena innebar att man fyllde ut med nollor så att det blev lika många decimaler i båda talen och den andra att man successivt jämförde entalen, tiondelarna respektive hundradelarna tills man såg skillnaden.

I svensk skola brukar man uttrycka decimaltal på åtminstone tre olika sätt. Ett exempel på detta är talet 3,521 som under den här lektionen uttrycktes på följande sätt:

- som tre komma fem två ett
- som tre komma femhundratjugoett
- och som tre hela och femhundratjugoen hundradelar.

Dessa tre olika sätt att uttrycka talet beskriver i själva verket tre olika egenskaper hos talet. Om man skall jämföra det här talet med 3,75 och om man läser talen tre komma femhundratjugoett respektive tre komma sjuttiofem så uppstår ett språkligt problem. Eftersom 521 är större än 75 så är det lätt att dra den felaktiga slutsatsen att 3,521 är större än 3,75. Detta är ett vanligt fel som eleverna gör i skolan. Det är således av viss betydelse hur eleverna läser och benämner tal i decimalform. Här följer exempel på hur eleverna i en grupp läste några av talen från stencilen.

P22	Två komma tio.
L22-24	Och sedan har hon svarat?
P22	Två komma sju- (2s) två komma noll sju.
L22-24	Och sedan har hon svarat?
P22	Två komma fem.
L22-24	Ja? Och sedan?
P22	Ett komma sju tusen sjuhundra femtiosex.
L22-24	Ja?
P22	Och ett komma åttahundra fyrtioåtta, ett komma åttiosex och ett komma nio.

Cecilia kommenterade aldrig de olika sätt att språkligt uttrycka decimaltal som förekom under lektionen. Hon undanhöll därmed ett viktigt instrument för att kunna jämföra decimaltal.

Vikten av att använda ett matematikdidaktiskt relevant språk blev tydligt i följande kommunikation. Det gällde i det här fallet att finna ett tal mellan 0,9 och 1.

P32	Va, vadå mellan?
L32	Ja, du ska skriva ett tal som är större än 0,9.
P32	Ja.
L32	Sedan ska du skriva ett tal som är mindre än 1.
P32	Ja, men det var ju det!
L32	Ja, men strunt i det nu. Men P32 vänta lite nu här.

Cecilia hade, som framgår av texten ovan, redan talat med P32 och hans grupp flera gånger under lektionen utan att ta notis om att P32 inte hängde med. P32 hade efter hand blivit allt mer frustrerad och började nu gråta. Cecilias sätt att beskriva vad P32 skall göra är otydligt. Vad man sökte var ju inte å ena sidan ett tal som är större än 0,9 och å andra sidan ett tal som är mindre än 1 utan ett tal *mellan* 0,9 och 1. Den här kommunikationen är intressant såtillvida att Cecilias förklaringar är av typen *vad* eleven skall göra, inte av typen *hur* eleven skall göra eller *vilka strategier* som han kan använda.

Cecilia, som följer med i den metodiska utvecklingen och prövar nya idéer lät även eleverna konstruera egna problem. Mot slutet av denna lektion var det fyra elever som ägnade sig åt problemkonstruktion. Tidigare har beskrivits hur P61 försökte konstruera uppgifter om bildäck utan att varken han eller Cecilia visste vad siffrorna för däckets dimensioner betyder. Det visade sig att Cecilia fick ägna orimligt lång tid åt sådana uppgifter, samtidigt som de flesta av eleverna i klassen fortfarande hade stora problem med att hantera decimaltalen på stencilen.

När eleverna vid konstruktion av uppgifter låter sin fantasi flöda visar det sig ofta, såsom under denna lektion, att uppgifterna snart överstiger deras matematiska kunnande. Vid analysen framgick det också att Cecilias egna kunskaper inte alltid räckte till när hon hjälpte eleverna. Cecilia visste inte hur man anger dimensioner på bildäck, men ”höll masken”. Hon hade även problem med en elevkonstruerad uppgift om ”Cirkusfamiljen” som F63 behövde hjälp med att lösa. Uppgiften handlade om att en man skulle skjutas ut från en kanon och att det därvid behövs 1,65 kg krut. En påse med krut innehöll 25 kg och frågan löd: hur många gånger kan man avfyra kanonen med krutet från en sådan påse. F51 som hade konstruerat uppgiften menade att 1,65 går jämt upp i 25.

F63	… ja men kolla här. Hon säger att det går, att man skall få precis 1,65, men det går ju inte
L63	Då får du be F51 förklara hur hon har tänkt.
F63	Nej det går inte, inte ens-. För man kan ju kontrollera och ta 165 delat med 25 och det blir 6,6 … så det gå inte.
L63	Får jag se.

Cecilia studerade uppgiften i nästan en minut, men upptäckte inte att F63 dividerade 165 med 25 istället för att dividera 25 med 1,65. Hon kunde därför inte hjälpa F63 utan uppmanade henne än en gång att fråga F51 till råds. Cecilia hjälpte därefter en annan elev, men F63 gav sig inte.

F63	Du ser att det inte blir jämnt.

Nu tvingades Cecilia studera uppgiften ytterligare en minut, men kunde inte ge någon hjälp:

L63	Gör så här. Gå till författaren så får hon förklara för dig.
F63	Ja, men hon säger att det ska bli jämnt.

Efter detta slutade F63 arbeta med uppgiften i fråga och övergick istället till att arbeta med en diagnos. Cecilia insåg alltså inte vari problemet med uppgiften bestod och kunde därför inte hjälpa eleven. Istället för att beräkna hur många gånger 1,65 går upp i 25, försökte F63 bestämma hur många gånger 25 går upp i 165. Men även F51 som konstruerat uppgiften hade gjort en felaktig beräkning. Eftersom 165 innehåller faktorn 3 så kan talet 1,65 inte gå jämnt upp i 25. (Detta framgår till exempel av att siffersumman 1 + 6 + 5 = 12 är delbar med 3.)

Under lektionen framträdde Cecilias engagemang för sina elever genom att hon försökte tala med alla. Hon strävade efter att de skall förstå matematiken genom att ge dem möjligheter att arbeta med uppgifter som hon ansåg vara bra. Det visade sig emellertid att innehållet i hennes kommunikation inte alltid svarade mot elevernas behov av hjälp. Flera exempel på detta har givits ovan och här följer ytterligare ett. F11 som varit sjuk vet inte hur hon skall lösa de uppgifter hon just skall arbeta med.

L11	Nu är det så F11 att eftersom du har varit sjuk så gör du så gott du kan på de här uppgifterna va. Men jag tror du fixar det.

Notera att eleverna under denna lektion arbetade med en stencil som vållade problem även för elever som varit friska och närvarande under föregående lektioner. När nu F11 plötsligt blir ställd inför decimaltal, som hon inte behärskar och behöver hjälp med, replikerade Cecilia att det kan F11 nog fixa själv.

10.2.4 Davids kommunikation

David organiserade sin undervisning som en form av hastighetsindividualisering. Även om de flesta elever i hans grupp satt bredvid en kamrat hjälpte de sällan varandra beroende på att de oftast arbetade med helt olika uppgifter. Som ett led i att följa elevernas inlärning använde sig David av lärobokens diagnoser. Under den aktuella lektion var det två elever som arbetade med en sådan diagnos. David kontrollerade att eleverna verkligen förstått uppgifterna på diagnosen genom att förhöra en av dem på ett par av uppgifterna.

L42	Är du klar? Det tog lång tid innan du blev klar med det här. Hm, kan du förklara hur det blir 1/6 här?

Mot slutet av lektionen besökte David för första gången P44 som då, för andra lektionen i rad, arbetade med samma diagnos.

L44	Så nu måste du växla mellan dom här … Fortsätt. Men du måste växla med dom- (1s) storleken. (1s) Varför det? P44 GÖR INGET. (2s) Vill du inte?
P44	Men jag tycker det går jämnt ut eller vad?
L44	Man kan inte lägga- (xx) dom som är olika. Dom måste vara av samma storlek. INGET HÄNDER. Du kan väl göra diagnosen väl?
P44	Öh.
L44	Är det rimligt, två lektioner för att göra en diagnos?

Att P44 hållit på så länge som två lektioner med samma diagnos innebar troligen att det var mycket av det som förekommer på diagnosen som han inte förstod. Av någon anledning hade David inte tidigare hjälpt P44 med hans problem. Nu hade emellertid diagnosen gett ett besked nämligen att P44 inte förstod och behövde hjälp. Ändå fick han ingen hjälp.

Även om David endast hade en liten grupp elever, var det ändå många som behövde hjälp samtidigt. Detta kan vara en av orsakerna till att han inte gav sig tid att lyssna på elevernas egentliga problem. Analysen visar hur han upprepade gånger började förklara, utan att i förväg ha tagit reda på vari elevens problem bestod. I och med att eleven signalerade att hon behövde hjälp med "den" eller "840" så började David direkt att förklara. Det fanns troligen underliggande förgivettaganden från hans sida om vari problemet bestod. Detta ledde emellertid till en rad missförstånd i kommunikationen. Två exempel får belysa detta.

L63	Vad var det du tvekade- här? Där har du 0,06. VILKET ÄR FEL. DET STÅR 0,60
F63	Det blir 60%. VILKET ÄR RÄTT ENLIGT UPPGIFTEN I BOKEN.
L63	Varför det?
F63	(1s) För att- (2s).
L63	Det var det vi förklarade igår.
F63	Nej. FÖRSTÅR INTE VAD LÄRAREN ÄR UTE EFTER.

P12	Den (*888. Eva och Göran hade tippat V75 tillsamman med sex kusiner. Insatsen hade delats lika mellan deltagarna. … De vann över 3000 kr. Hur många procent av vinsten skulle Eva ha.*)
L12	LÄRAREN LÄSER UPPGIFTEN. Hm. Hur många procent av vinsten skulle Eva ha? (2s) Hur många stycken är dom?
P12	8.
L12	8 stycken. Och vinsten, hur mycket var den?

Den senare uppgiften går inte ut på att räkna ut Evas andel, vilket David utgick ifrån i sin förklaring, utan på att skriva andelen 1/8 i procentform. Hur mycket var och en får i kronor räknat frågas inte efter och det vet man inte heller, eftersom vinsten inte var *exakt* 3000 kr som David utgick ifrån utan *över* 3000 kr.

P12	3000. ÄVEN ELEVEN LEDDES NU IN PÅ DEN FELAKTIGA TOLKNINGEN.
L12	Om du dividerar den på den får du?
P12	8.
L12	En åttondel eller hur? Och den, då måste den var lika med Evas vinst.
P12	Hm.
L12	Alltså, om man nu ska ha en åttondel så räknar man delen som man har vunnit tillsammans på åtta, då får man en åttondel. Det motsvarar så många kronor som ska hon få.
P12	Hur många procent, hm, ska jag få ut?
L12	Hur många procent av vinsten? Ja, den delen ska jämföras med det hela.
P12	Hur menar du nu?

L12	Så mycket pengar av 3000 vann hon eller hur? Och man skriver den här och jämför den med den för att komma åt hur många hundradelar blir det.
P12	(2s) Nej, jag fattar inte.

Som framgår av citatet talade lärare och elev hela tiden förbi varandra och språkbruk som att ”dividera den på den” gjorde inte kommunikationen tydligare. När kommunikationen med P12 efter en lång stund körde fast agerade David på samma sätt som flera av de övriga lärarna; han lämnade helt enkelt eleven.

På makronivån redovisades att David hade en annan modell för hur man arbetar med procent än den som finns i läroboken. Detta ledde till en rad problem under lektionen. David utgick i sina förklaringar från att procent betyder hundradel.

L63	Varför blir det 3 här, 3%? (*874 a Skriv i procentform 0,03*)
F63	För att den står på 100 där, det är tiondel, hundradel.
L63	Just det, det ska bli lika många procent som hundradelar. Och hur många hundradelar är det?
F63	3.
L63	Det är 3 hundradelar, det blir 3%.

Davids utgångspunkt fungerade i den ovan citerade cykeln. Men regeln, att procent betyder hundradelar, är inte alltid så lätt att följa. F63 skulle något senare lösa uppgiften *880c. Skriv i procentform 0,045*. Att 4 är en hundradel kanske inte är så svårt, men förklaringen att procent betyder hundradel säger inget om hur man hanterar tusendelen 5.

L63	Du ska skriva den, 0,045, i procentform. Hur många hundradelar har vi här? (2s) Vilken siffra står för hundradelar här?
F63	Den, eller va? (2s) Dom?
L63	Här har vi, kolla 0,045. Vilken siffra är hundradelar?
F63	Dom.

För F63 var alltså även 5 en hundradel. Förklaringen ”procent betyder hundradelar”, har sina begränsningar.

L63	Alltså inte 45 eftersom det är 45 tusendelar inte 45 hundradelar.
F63	Så blir det 40,5.
L63	4,5! (1s) 4,5 procent.
F63	Ja.

F63 förstod fortfarande inte när David talade om svaret och lämnade henne. Av den ovan beskrivna cykeln framgår att F63 inte hade de förkunskaper som krävs för att använda regeln om att procent är hundradelar.

Ytterligare ett exempel på vikten av att ha relevanta förkunskaper är följande:

L63 … och här? (*886c. Skriv i decimalform 7/4*)
F63 Den, det är annorlunda. Det är större där uppe än vad det är där nere.
L63 Ja men kan du inte skriva om det här talet så att du får heltal för sig och bråk för sig? (2s) Om du har fjärdedelar, hur mycket har du då?
F63 Ja, eh-.
L63 Om du försöker att uttrycka det med ett annat (1s) tal eller siffra eller det finns ju olika sätt. Tänk på någonting som du har 7/4 av någonting (1s) och försök att uttrycka den med andra tal. (2s) Om du har sju fjärdedelar äpplen?
F63 Hm.
L63 Hur många äpplen har du?

Återigen körde F63 fast troligen beroende på bristande förkunskaper. Sannolikt hade hon hoppat över, eller inte förstått, det föregående avsnittet i boken som handlade om bråk i blandad form. För att hjälpa henne försökte David att förklara genom att konkretisera. F63 förstod emellertid inte och Davids fråga om äpplen var onekligen något märklig i sammanhanget.

Under lektionen framkom det att många av eleverna hade problem redan med relativt enkla uppgifter. Därför var det inte förvånande att problemen blev större när uppgifterna efter hand blev mer komplicerade. Mot slutet av lektionen hade F63 kommit fram till en betydligt svårare uppgift än dem hon fått hjälp med tidigare: *912. Svennes lön höjdes med 6%. Innan löneökningen tjänade han 12 000 kr per månad. Med hur många kronor steg hans lön?*

F63 Äh, den. Jag tänkte först- (2s) men sedan kom jag på att det är gånger tänkte jag. Men sen kom jag på att de är- (2s). Och sen tänkte jag att man måste räkna ut hur mycket 1% är-
L63 Hm.
F63 alltså en krona-
L53 Hm.
F63 och på 10 tusen kronor så går det ju 100-
L63 Hm.
F63 så går det hundra (2s) tvååå (1s) kan det inte gå.

F63 delade alltså upp 12 000 kr i 10 000 kr och 2 000 kr och beräknade sedan 6% på vardera beloppet.

L63 Du sa 10 000. Hur mycket är kvar av lönen? Hur mycket?
F63 Ungefär 2000,
L63 Hur mycket är 1% av 2000?
F63 10 (2s) nej 20
L63 20, och det blir?
F63 120.

David försökte nu få F63 att byta strategi och ta 6 % av hela beloppet.

L63 Ja, eller, du kan säga så, men på ett annat sätt att tänka (2s) tänka hur många hundringar finns det?
F63 20 (2s) nej FNISSAR Äh-
L63 Hur många?
F63 (3s) 20%.

F63 hängde inte med utan gissade och David avslutade hjälpen genom att lotsa.

L63 Om du backar två steg här, vad får du då?
F63 100. (2s) eller 120.
L63 Där har du svaret.
F63 Jaha.
L63 Så många hundringar finns i det här. OK?

F63 var den elev som, enligt den fördjupade lektionsanalysen, fick mest hjälp under Davids lektion. Det verkade emellertid som David inte insåg hennes problem med de olika uppgifterna. Detta kan vara en orsak till att han inte upptäckte hennes bristande förkunskaper. Han verkade utgå från ett förgivettagande när det gällde vilket hennes problem var och lotsade fram henne till rätt svar på de uppgifter hon fastnade på. Trots att hon är den elev som fick mest hjälp av David framgår det, när man följer kommunikationen i de olika cyklerna, att hon inte har förstått särskilt mycket.

Vid analysen av de undervisande cyklerna kan man konstatera hur bristande förkunskaper upprepade gånger ledde till en omständlig och ineffektiv kommunikation. De svar som eleverna gav på Davids frågor avslöjar till exempel att de ofta lade en felaktig innebörd i grundläggande begrepp som är nödvändiga att förstå för att lösa den uppgift de arbetade med. David verkade inte genomskåda elevernas problem. Ofta missade han också poängen med en uppgift eller tappade tråden när han förklarade. En bidragande orsak till detta kan vara att David ofta var alltför snabb att välja strategi och inte gav sig tid att lyssna på elevernas egentliga problem. Här är ett nytt exempel på detta:

F22 Och så betalar Helge 2/5 i skatt och 1/4 går till hyra och 1/8 går till andra utgifter. Hur många procent av sin lön har Helge kvar. (*889*) Men här, 2 gånger- (2s) om jag säger så här, 40% då?
L22 Hm, OK
F22 Eller för det är-, 1/5 är 20%.
L22 Hm ja det stämmer (2s) och ¼?
F22 Det är 25%.

När David och eleven kommit så här långt var de nästan färdiga med uppgiften. Nu återstod bara att skriva andelen 1/8 i procentform, en procentandel som är hälften av1/4, alltså hälften av 25%. David menade emellertid att detta var svårt och valde strategin att behandla 1/8 som divisionen 1 delat med 8.

L22	Och 1/8? Det är svårt. Så, då kanske du skall tänka om på ett annat sätt. Om du tänker så mycket, så mycket dom här delarna är sammanlagt, hur mycket blir det tillsammans – jag menar inte i procent – som delar.
F22	Som delar?
L22	Hur blir den här?
F22	¼ blir 0,25.
L22	Hur blir den det? På vilket sätt?

I det här läget var F22 riktigt konfunderad. Vad menade David och vad gick detta ut på? Eftersom David inte hade informerat F22 om vad hans strategi gick ut på, blev avsikten med frågorna inte synliga för F22 och kommunikationen fungerade därför inte.

F22	Men, vi får väl dela 4 i (2s) 4?
L22	4 i 4?
F22	Nej 4 i 1.
L22	4 i 1. Hur mycket blir det, 4 i 1?
F22	Det blir 4
L22	Men du sa ju 0.
F22	Nej vänta, det blir ju …

Nu hade F22 helt tappat tråden. David och hon missförstod dessutom varandras sätt att uttrycka division.

L22	Ja, (1s) du skall använda den här (2s) korta divisionen. Du gör samma sak här. Det är exakt på samma sätt. Du kommer till en decimal. Om det står till exempel hur stor del du pratar om- du pratar om att en åttondel är lika med någonting då får man utveckla den till procent.

Efter att i flera minuter ha försökt lotsa fram ett korrekt svar avslutade David kommunikationen med en sammanfattning där han beskrev att man genom division kan skriva om 1/8 som procent. Men det var ju detta som var F22 problem och hon hade inte fått svar på vad det blir.

Davids hjälp till eleverna bestod, som redan nämnts, av en hel del lotsning. Här följer ett exempel:

F53	Hur blir det där då? (962. *I en klass fanns 30 elever. Av dem var 12 pojkar. Hur många procent av eleverna var pojkar?*
L53	Den som jag sa, jag försöker förklara här. Du kan utveckla den till hundradelar eller man kan dela den på den, göra en vanlig division.
F53	Ja men den (1s) det kan- (1s).
L53	Hur blev det?
F53	4%.
L53	Nej.

F53	0,4.
L53	Ja, och hur många hundradelar blir det?
F53	40.
L53	Ja (2s) och det blev 40%.

Ett annat exempel på lotsning följde på en ovan citerad dialog mellan David och F63. Det gällde uppgiften 886c: *Skriv i decimalform 7/4* där de efter en stunds diskussion hade konstaterat att 7/4 = 1 3/4. Frågan var nu hur man kan skriva andelen 3/4 som procent. David bestämde sig för att använda en strategi som är så banal att eleven inte fattade vad han var ute efter. Eftersom David inte inledde kommunikationen med att delge F63 sin strategi förblev den osynlig för henne och dialogen övergick snart i lotsning.

L63	Hälften av 100 vad är det?
F63	50.
L63	Och hälften av 50?
F63	Ja vänta öh (1s) vad heter det (2s) 25.
L63	Ja, (1s) och den gånger den? (2s) Nej, kom igen.
…	
L63	25 plus 25 hur mycket är det?
F63	25 plus 25? ELEVEN ÄR KONFUNDERAD.
L63	Hm.
F63	50.
L63	Och 25?
F63	Va? FÖRSTÅR INTE FRÅGAN.
L63	Plus 25?
F63	Jaha, är 75.
L63	75 … tänk så här först, vi har en hel. (1s) sen 75 (2s) Om du skriver det i procent, hur mycket blir det?
F63	175
L63	Har du fattat?
F63	Ja.

Den sista frågan är retorisk och kan enligt skolans oskrivna lagar bara besvaras med ja. Fråga är emellertid *vad* F63 hade fattat. Hade hon till exempel fattat att eftersom 1/4 = 25% så kan 3/4 skrivas som 3 · 25%? Hade hon som ett alternativ förstått att 3/4 = 0,75, vilket enligt bokens strategi kan skrivas som 75%.

Under denna lektion fanns många exempel på hur David och eleverna inte möttes i sin dialog ofta beroende på att David omedelbart började förklara utan att ta reda på vari elevens egentliga problem bestod. Detta kan ha olika orsaker. En kan vara att eleverna inte var tydliga när de bad om hjälp. Med deras många gånger kryptiska sätt att uttrycka sig när de bad om hjälp, var det inte lätt för läraren att förstå problemet.

En annan orsak till att David och eleverna talade förbi varandra var att eleverna inte behärskade de termer som användes. Termerna för bråk och division var speciellt viktiga under den här lektionen. Varken David eller eleverna uttryckte sig särskilt precist när det gällde matematisk terminologi vilket ledde till upprepade missuppfattningar. I det här fallet tolkade han och eleven uttrycket ”den på den” på helt olika sätt.

L12	Om du dividerar den på den får du?
P12	8.
L12	En åttondel, eller hur?

Vad var det som skulle divideras med vad? Det gäller att förstå vilket tal som är täljare och vilket som är nämnare.

För att eleverna skall kunna växla mellan bråk- och decimalform, vilket är en förutsättning för att genomföra vissa beräkningar med procent, måste språket fungera mellan de olika representationssätten. Följande exempel (taget ur en cykel som redovisats ovan) handlar om hur David hjälpte F63 att skriva 7/4 i decimalform. Eleven hade just med Davids hjälp lotsats fram till att 7/4 kan skrivas som 1 3/4.

L63	Ja, en hel och tre fjärdedelar. Kan du skriva det som decimalform nu?
F63	1,3.

Efter den repliken gav David upp och lotsade F63 fram till rätt svar. Detta tog ytterligare en dryg minut.

En annan iakttagelse vid lektionsanalysen var att flera elever gissade och prövade sig fram till rätt svar bakvägen. Detta går ofta till så att de prövar olika räkneoperationer tills de hittar ett mönster som stämmer med svaret i facit. Under Davids lektion fanns flera exempel på detta sätt att lösa bokens uppgifter. Ett exempel är följande: Uppgiften är *164a. Hur många procent är 14 kr av 200 kr?*

F53	14 gånger 7 är 100 och procent är ju delat med 100 tänkte jag.

F53 hade på detta sätt fått fram svaret 7, som i 7%, men löste inte den givna uppgiften. Hon gissade sannolikt räknesätt och fann genom prövning att $7 \cdot 14$ nästan blir 100 samt att 7 stämde med facit. David försökte utgående från detta förklara att 7/100 svarar mot 7%, vilket sedan användes för att på nytt lösa uppgiften bakvägen.

När F53 kom till nästa uppgift*, 164b. Hur många procent är 13 kr av 25 kr*, gick det bättre. Hon förstod att man kan lösa uppgiften genom att förlänga, men hon använde inte ett adekvat språk.

F53	Då få man väl ta gånger 4? HON AVSER FÖRLÄNGA MED 4.

L53	Ja, för att komma upp till hundradelar. … Och sen-. Lika många procent blir det.
F53	Är det? Jag fattar att det är hundra. Då blir-, då måste man förstora det. ALLTSÅ FÖRLÄNGA.

David fortsatte nu dialogen och ville diskutera konsekvenserna av hennes sätt att tänka, när hon löste uppgiften ovan. Han gjorde det genom att visa på en liknande uppgift där nämnaren valdes till 205.

L53	Men om du hade till exempel 205?
F53	Då hade det inte blivit-
L53	Då måste du dela, tänka på division i så fall.

”Då måste du dela” säger David. Dela vad? När F53 sade ”ta gånger 4” och ”förstora det”, menade hon förlänga. Så vad uppfattade F53 när David sa dela? Att man skall förkorta eller ställa upp en division? Den här typen av språkliga oklarheter dök upp gång på gång under lektionen. Ytterligare ett exempel på detta är F22:s problem med språket för division. Uppgiften var *891b. 25% av 200 kr.*

F22	Ja, det måste bli 4. Tar man väl 4 delat i-.
L22	Säg färdigt din mening.
F22	ÄNDRAR SIG. 200 delat med 4.
L22	(2s) och det blir?
F22	Och det blir- (2s) Usch.
...	
L22	Du måste kunna räkna 200 delat med 4 i huvudet. …

En stund därefter kom David återigen till F63. Uppgiften var nu 907a*. 50% av 21 kr*.

F63	21 delat på 2-.
L63	Är lika med?
F63	1,5.
L63	Stämmer det?
F63	Jag tror inte det.
…	
F63	Men kolla här. 2 i 2 blev en gång och den går inte. Då måste man sätta ett kommatecken här tycker jag.

När F63 förklarat sin felaktiga tankegång försökte David att konkretisera.

L63	Alltså du har 21 kronor, 21 kronor och du ska dela dem i mitten. Hur mycket blir det? MENAR FÖRMODLIGEN DELA 21 KR PÅ TVÅ PERSONER.
F63	Oj det kan jag inte heller. Det är väldigt konstigt det här.
…	
L63	21 delat med 2 kan aldrig bli 1 eller hur?
F63	Nej.
L63	Hur mycket blir det?

F63	Hi, hi, hi. Det vet jag inte.
…	
L63	Det är 10,5, inte 1,5.

Davids var inte helt tydlig när han konkretiserade divisionen 21/2. Genom att i analysen studera kommunikationen med F63 finner man, av hennes sätt att uttrycka sig, att hon varken behärskade divisionsalgoritmen eller enkel huvudräkning. Under lektionen fick hon mycket hjälp av David, men man kan samtidigt konstatera att han inte en enda gång försökte utreda hennes problem. Hon löste inte en enda uppgift på egen hand under den här lektionen.

David och hans elever talade således ständigt förbi varandra under lektionen, dels beroende på att eleverna saknade relevanta förkunskaper dels på grund av att man saknade ett gemensamt språk för att uttrycka begrepp som knyter samman procent, decimaltal, bråk och division

10.2.5 Eriks kommunikation

Under Eriks lektion skulle eleverna utföra en laboration. Den instruktion Erik gav för att introducera laborationen för eleverna följde i stort sett bokens framställning.

LAE	Om vi skall räkna ut arean nu (1s) så kommer det en uppgift (2s) där man får klippa litet och rita lite cirklar. Jag har tio saxar med, så ni får samsas om dom. Passare har jag några fler, men (2s) dom är inte så bra så har ni tur så får ni tag på en som fungerar … Läs noga. Här är det sedan klipp och klistra.

Eriks genomgång handlade i huvudsak om vad eleverna skulle göra, inte vad laborationen avsåg att förklara för dem. Han kommenterade således inte de förklaringar som fanns i läroboken utan beskrev endast hur de skulle göra procedurellt. (se 5.3.4) I boken inleder man med att beskriva att eleverna under laborationen skall jämföra cirkelområdets area med en area som är lätt att beräkna. Därefter övergår man till den konkreta frågan om tre radiekvadrater räcker för att täcka cirkelarean. Svaret på frågan är enkel, nämligen nej, men leder inte till målet för laborationen vilket var att bestämma cirkelområdets area. Denna oklarhet i instruktionen vållade stora problem under lektionen. Här följer några exempel på hur eleverna missförstod bokens instruktion:

P32	Kan jag inte klippa ut här och lägga dom under istället.
L32	Det kan du göra lika gärna.
P32	Ja.
L32	Men,du skall täcka dom här. (2s) Så du får inte lägga massor utanför så.

P32	Nej
L32	Utan du får se hur många som- och då får du klippa sönder den, så den kan du inte lägga in någonstans, utan att den hamnar utanför. Så om du lägger den så och skall lägga den där, Så får du klippa bort lite på kanterna här. Sedan får du lägga det här nere.

L42	Hur många gick det åt? (Uppg. 4b)
F42	Nästan 4 stycken. Det blev lite småplock kvar.
L42	Hur mycket är det där småplocket då?
F42	En halv skulle jag säga.
L42	Det bästa hade varit om du tagit tre rutor först.
F42	Det gick ju inte!

Vid sin genomgång beskrev Erik således enbart proceduren, alltså hur man skulle lägga eller klistra de urklippta bitarna, inte vad eleverna därigenom skulle upptäcka. Två av eleverna reagerade på detta. P14 ifrågasatte laborationen i sig.

P14	Det går ändå åt alla 4.
L14	Vad sa du?
P14	Det går ändå åt alla 4. Ja, det går åt 3 och så en liten del av den här.
L14	3 och så en liten del. Lite mer än 3 alltså.
P14	Var det det enda man skulle få ut av det?

F62 ifrågasatte logiken.

F62	Den kan vara högst -.
L62	Den kan ju inte vara större än den.
F62	Nej, nej det kan den inte -.
L56	Vad tror <u>du</u> det ska bli?
F56	Den kan högst ha-. (2s) Jag tror ja skiter i det.
L56	Om det är nästan 3 vad tror du det kan vara för tal då?
F62	Ja, men alltså, du ska fråga om det <u>räcker</u> med 3.

Eriks fick problem genom att han valde att följa lärobokens instruktioner vilka i princip gick ut på att lotsa eleverna fram till ett π. F62 visste samtidigt att boken bara frågar efter om 3 radiekvadrater räckte och därför fungerade inte Eriks kompletterande lotsning.

Vad den här laborationen gick ut på var alltså att finna ett förhållande mellan cirkelområdets area och radiekvadratens. Om laboration utförs på ett korrekt sätt kan man komma fram till att detta förhållande är lite mer än 3, om man utgår från ett visst givet cirkelområde med radien 5 cm. Däremot är det inte rimligt att ens i detta speciella fall dra slutsatsen att förhållandet är lika med π eller 3,14. Ännu viktigare är det faktum att π är en universalkonstant, och att den ger ett förhållande som gäller för *alla* cirkelområden. Denna slutsats kan man inte dra från laborationen. Istället lotsar man i boken fram formeln $A = \pi \cdot 5 \cdot 5\ \text{cm}^2$ genom ett antal ledande frågor. På lärobokens fråga om det räcker med tre radiekvadrater, och där svaret alltså är nej, följer frågan:

> ***5*** *Vilket av sambanden i rutan bör man använda då man ska ange cirkelns area* ***a)*** *exakt* ***b)*** *noggrant* ***c)*** *på ett ungefär?*

$A \approx 3 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^2$
$A \approx 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^2$
$A = \pi \cdot 5 \cdot 5 \text{ cm}^2$

Som redan nämnts är det inte möjligt att utgående från laborationens ”att tre inte räcker”, kunna härleda att 3,14 är ett exaktare svar och att man, när man bestämmer cirkelområdets area, kan använda sig av samma π som används för att bestämma cirkelns omkrets. Mot denna bakgrund är det lätt att förstå vissa elevers förvirring.

När eleverna efter genomgången började arbeta individuellt, uppstod direkt en ny komplikation. Den första uppgiften i boken handlade inte om cirkelns area utan om dess omkrets. Dessutom hade denna cirkel en annan radie än den cirkel Erik just hade ritat på tavlan och som man skulle utgå från i laborationen. Förutom detta fick eleverna problem med hur den första uppgiften var formulerad, i kombination med att flera av dem inte förstod innebörden av π.

> *1 a) Rita en cirkel med radien 3 cm.*
> *b) Markera cirkelns medelpunkt (m), radie (r) och diameter (d).*
> *c) Ungefär hur stor omkrets har cirkeln?*
> *d) Skriv ett noggrannare uttryck för cirkelns omkrets*
> *e) Räkna ut omkretsen och avrunda svaret till en decimal*

Du kan använda närmevärdet $\pi \approx 3{,}14$ i hela det här kapitlet.

När det i uppgift 1c) frågas efter ett närmevärde använde eleverna närmevärdet 3,14, medan Erik och läroboken ville att de skulle använda närmevärdet 3.

L46	c) har du räknat ut på ett ungefär?
P46	Ja.
L46	Eller vad har du räknat med?
P46	Ja, 3,14.
L46	3,14. Ja, äh (1s) där skulle du räkna på ett ungefär bara. Då räcker det om du tar 3 och räknar i huvudet.

När det i uppgift 1 d) frågas efter ett noggrannare uttryck, ville eleverna fortfarande använda 3,14 och de blev konfunderade när Erik och läroboken där ville ha π.

F21	Den.
L21	Du räknar ut omkretsen och avrundar till en decimal. GÄLLER e). Det har du gjort på d).
F21	Hm.
L21	Där skulle du skriva ett uttryck bara. Hur räknade du ut det?
F21	Hm, jag tog (1s) den gånger 3,14.
L21	Hm, där skulle du bara skriva upp uttrycket, hur du har räknat.

När eleverna i uppgift 1 e) skulle avrunda svaret till en decimal blev de som använt konstanten π förvirrade. Hur avrundas π?

L64	Mer exakt den där. Det är exaktast om man använder den där. AVSER π.
F64	Varför det?
L64	Jo, för då får man med alla siffror.
F64	Men vi har ju inget pi på vår miniräknare.

Eriks val att följa lärobokens uppläggning utan några speciella kommentarer, fick konsekvenser för lektionens förlopp. Läroboken inledde avsnittet med en beräkning av en cirkels omkrets. Många elever fastnade redan på den uppgiften och det ledde till att de flesta kom igång med laborationen alltför sent samtidigt som många elever tappade motivationen för arbetet. De började prata och bråka istället för att arbeta.

Under lektionen använde Erik vid flera tillfällen matematiken som ett disciplinerande verktyg. Den som inte hade lyssnat på genomgången eller som kommit för sent fick ingen hjälp.

F11	Är radien halva den här?
F12	Är radien halva-?
L11-12	Det skrev vi på tavlan förut.
F11	Men jag glömde ju av det.
F12	Är det radien. Säg bara.
L11-12	Ja, ja.

F42	Vad ska vi göra med det här?
L42	Kommer man i tid så får man reda på sådant.
F42	Nej, nu var du elak.

Ibland kunde man få associationer till boken *Moment 22* (Heller, 1961). Eleverna fick bara hjälp av Erik om de arbetade. Om de inte förstod eller om passaren inte fungerade kunde de inte arbeta och då fick de ingen hjälp så att de kunde arbeta! Eleverna i följande citerade cykel brukade kanske vara lata. Observationen visade emellertid att de under en längre tid hade försökt rita en cirkel med radien 5 cm men misslyckats. Av det skälet kunde de inte komma vidare.

P23	Nej Erik, nu måste du hjälpa oss lite grand som du brukar göra.
L23	Ja, men det är ingen idé att jag hjälper dig om du inte jobbar
P23	Ja, men det är inte lätt när vi har problem.

Vid analysen av Eriks kommunikation i samband med genomgången eller handledningarna finner man inte enbart ett budskap om hur eleverna skall arbeta utan hans sätt att uttrycka sig speglar samtidigt hans attityder till elever och undervisning. Om man som Erik beskriver att nu ”kommer det en uppgift där man får klippa litet och rita lite cirklar” eller ”Här är det sedan klipp och klistra”, så har han indirekt uttryckt att det är klippandet och klistrandet som är det primära och att man inte behöver vara så noga.

Ett annat exempel på attityder är följande. De här flickorna hade inte förstått hur de skulle genomföra arbetet utan fick fråga Erik.

F65	Du, arean i en cirkel, är det radien gånger 3.
F64	Nej, vad är area-? (1s) eller-? (2s)
L65	Area, det är det du ska göra nu.
F65	Ja, men hur gör man det?
L65	Det sa jag aldrig utan det kommer här.
F65	Men säg inte att jag ska göra det då.

Det var fler än dessa flickor som inte kom ihåg vad area var. De förstod inte heller hur de skulle utföra laborationen. Utgående från detta är Eriks svar intressant. Laborationen handlade inte om att bestämma vad area är, utan att utgående från kvadratområdets area, som är känd, kunna bestämma en formel för cirkelområdets area. Man skulle alltså söka en relation mellan två områdenas areor. Det är denna relation som beskrivs med hjälp av π. Men det var inte detta Erik ville säga. Hans kroppsspråk och tonfall visade tydligt att han vill sätta dessa lite stökiga flickor på plats.

En annan iakttagelse under Eriks lektion var att han egentligen inte förklarade det som eleverna hade problem med. Han lotsade i allmänhet fram de elever som frågade ett par steg och gick sedan sin väg innan de hade fått grepp om vad laborationen i sin helhet gick ut på. Kommunikationen avbröts således för det mesta innan eleven fått tillräckligt med hjälp för att kunna komma vidare.

L21-22	EFTER 33 MINUTER. Hur går det för er? Har det varit bra?
F22	Ja.
L22	Semester?
F22	Ja, det har varit bra, men jag fattar ingenting.
L22	Om vi börjar här. Rita en cirkel med radien 5 cm. Det fattar du?
F22	Hm, det fattar jag.
L22	Ja. Rita på ett färgat papper den minsta kvadrat som kan täcka cirkeln.
F22	Då ska man rita en sådan här vet du.

L22 Hm. (2s) Men det där tror jag inte är riktigt rätt. (1s) Nej, rita en cirkel med radien 5.

När eleven i det här fallet inte fattade läste Erik bara innantill vad som redan stod i boken. Sedan gick han och F22 fick inget mer besök under denna lektion, och hon kom heller inte längre med laborationen.

Det är ofta svårt att se Eriks mål med kommunikationen. Som svar på elevernas frågor brukade han, som redan visats, upprepa de enkla anvisningar som står i boken och vilka eleverna inte hade förstått. Detta är ett typiskt exempel från Eriks lektion.

P52 Är det rätt?
L52 Ja, du har ju-. (2s) Du ska klippa ut- (1s) Du ska klippa ut den.
P52 Den?
L52 Och sedan ska du dela den i fyra.
P62 Ska det vara rutigt papper här eller?
L52 Vasa?
P52 Ska jag ha rutigt papper nu?
L52 Nej det spelar ingen roll. … Du ska ha en cirkel så och så ska du ha en kvadrat, där kvadraten precis täcker cirkeln. Och sedan skall man dela den kvadraten i fyra delar.

Efter detta gick Erik därifrån. Att man skulle dela kvadraten i fyra delar står i boken. Vid det här laget hade flera elever genom sina frågor visat att de inte förstod hur de skall gå vidare. Eriks tolkning av detta vara att ”eleverna är lata och de inte ids läsa texten”. Såväl observationen som genomgång av data visar emellertid att de flesta eleverna verkligen försökte arbeta. Deras frågor tyder på att de inte förstod vad de skulle göra.

En annan elev, F64, hade mot slutet av lektionen kommit till den uppgift där man skall sammanfatta resultatet av laborationen. Problemet var nu, som redan nämnts, att de slutsatser Erik och läromedelsförfattarna vill komma fram till inte kan dras med hjälp av laborationen såsom den är upplagd. Från laborationen kan man endast dra den enkla slutsatsen att cirkelområdets area är mer än $3 \cdot 5 \cdot 5$ cm^2 och mindre än $4 \cdot 5 \cdot 5$ cm^2, inget annat. Ur detta vill boken lotsa fram formeln $A = \pi \cdot 5 \cdot 5$ cm^2, vilket alltså inte är rimligt. Erik försökte i följande kommunikation att lotsa fram åtminstone närmevärdet 3,14, en slutsats som man inte heller kan dra av laborationen.

F64 Det där förstår inte jag. *5. Vilket av sambanden i rutan bör man använda då man ska ange cirkelns area a) exakt b) noggrant c) på ett ungefär?*
$A \approx 3 \cdot 5 \cdot 5$ cm^2 $A \approx 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5$ cm^2 $A = \pi \cdot 5 \cdot 5$ cm^2)
L64 Vilket?
F64 Det där.
L64 Där? Hur många sådana där gick det åt för att täcka den.

F64	Det vet jag inte för det blev inte bra. Det gick inte bra.
L64	Ungefär hur många gick det åt?
F64	Mer än 3.
L64	Mer än 3? (1s) 4?
F64	Nej.
L64	Men det är mer än 3.
F64	Ja men FNISSAR.
L64	Mer är 3? (1s) 3,5?
F64	Nej, 3,14. FNISSAR IGEN.

Det var på denna nivå de flesta eleverna hade tillgodogjort sig laborationen. Men varifrån kom 3,14 och varifrån kom π? Jo, det listade man lätt ut genom att tolka texten i en sammanfattande ruta i boken. Det var alltså genom bokens lotsande frågor kring laborationen som det var möjligt för eleverna att komma fram till det förväntade svaret. Däremot var det knappast möjligt för dem att förstå innebörden.

Erik är som tidigare nämnts omväxlande noggrann och oprecis med sitt språk.

L21	P21, vad är en kvadratmeter.
P21	Det är (2s) en meter (1s) gånger en meter.
LAE	En meter åt varje håll va.

Erik tog här för givet att det gällde arean av en kvadrat och möjligen gjorde också eleverna det. Oklarheten ligger i att även en triangel eller en cirkel kan ha arean $1m^2$. Är man korrekt så gäller väl förklaringen 1m åt varje håll enbart för en cirkel med diametern 1m.

När man under genomgången diskuterade enheter för area och eleverna skulle ge exempel lät det så här:

P45	Kvadratkilometer.
L45	Kvadratkilometer.
P53	Ja, men det finns ju centimeter, millimeter-.
L45	Kvadratcentimeter.
P53	Millimeter.

Erik korrigerade P53 en gång men korrigerade inte att det också borde vara kvadratmillimeter. Det var inte bara enheter som Erik var mindre noggrann med, det gällde även andra termer.

LAE	Och på fyrkantiga saker, rektanglar och kvadrater, kan ni räkna på … Runda saker har vi inte lärt oss än.

Det kan ibland vara lämpligt att använda ett vardagsspråk om man på så sätt kan underlätta elevernas förståelse. Samtidigt är risken stor att eleverna uppfattar detta språk som en norm för det språk de skall använda inom matematiken. Vad menar man med att räkna på fyrkantiga saker?

Ett annat problem under lektionen, som blev av avgörande betydelse för att förstå laborationen om cirkelområdets area, var innebörden av π. Vad betyder egentligen π? Är det kanske 3 eller är det egentligen 3,14? Så här lät det vid genomgången.

P62	F62. Hur räknar vi ut omkretsen på en cirkel?
F62	Man tar (2s) diametern (1s) diametern av- (2s).
LAE	Någon som kommer ihåg, förutom P14?
F21	- INGET SVAR.
LAE	Diametern gånger 3.
PFXY	Komma 43…komma 15… komma 15. FLERA ELEVER I MUNNEN PÅ VARANDRA.
LAE	Ja, 3 komma ja?
P14	14 är det. Ha, ha.
LAE	Ja, 14 15 92 tror jag och så vidare.

Decimalerna är rätt, men en viktigare fråga var vad talet π står för och dess innebörd i relation till cirkelns omkrets. Efter detta ritade Erik på fri hand en kvadrat som omskrev en cirkel med radien 5 cm.

LAE	Så ritar vi in cirkeln i en fyrkant. (2s) en kvadrat. … Hur stor area har kvadraten?
P13	100.
P14	En kvadratmeter.
LAE	Det är den sidan.
P14	En kvadratdecimeter.
P33	100%.
P13	100.

Eleverna gick i skolår 7 och undervisningen innehåller då mer abstrakt matematik än tidigare. När Erik beskrev att han ritade in en cirkel i en fyrkant är det tveksamt om eleverna förstod vad han menade med det. I såväl det språk Erik använde som den figur han ritade fanns ett underliggande förgivettagande om att en inskriven cirkel tangerar sidorna i den omskrivna kvadraten. Figuren på tavlan visade emellertid inte denna precision.

L46	Hur lång är diametern däri?
P46	10. UTAN ENHET.
L46	Då måste en sidan I KVADRATEN vara 10 va?
P46	11 är den. Den är inte målad så bra.
L46	Ja, men den ska vara inskriven precis i.

Erik talade aldrig om vad det innebar att cirkeln är inskriven i kvadraten. Han ritade dessutom slarvigt, så att sträckan 11 (cm) i själva verket stämde rätt bra med den figur som fanns på tavlan.

För att förstå cirkelns geometri och för att beskriva viktiga begrepp krävs en speciell terminologi. Studien visar att elever som inte behärskade denna terminologi fick svårt att följa med i såväl resonemanget vid tavlan som när de senare läste instruktion i läroboken. Här följer några exempel:

F11	Så, och det där då? I mitten där? Är det pi eller vad det heter?
L11	Nej.
F11	Vad är det då? Pricken i mitten?
L11	Pricken i mitten, medelpunkten brukar man kalla den.
F11	Vad är pi med för då?
L11	Nej, pi är inte med där-.
F11	Jag fattar inte det här?
L11	Pi använder man för att beräkna omkretsen.

F11 hade uppenbara problem med grundläggande termer. Även en annan elev, P14, hade liknande problem.

P14	Vad är en medelpunkt?
L14	Ja, vad tror du?
P13	Det är här i mitten.
P14	Det där?
L14	Jag satte aldrig ut medelpunkten där. PÅ TAVLAN.
P14	Det är mitten. Så man ska dra ett streck i mitten på den här?
L14	Nej, punkten i mitten är en medelpunkt. Strecket som du drar där, rakt igenom, det kallas för-?
P14	Diameter.

Eleverna i denna klass hade stora brister när det gällde grundläggande geometriska termer. Frågan vad π egentligen innebär dök upp gång på gång under lektionen. Speciellt vållade bokens definitioner problem. Där menar man att 3 är ett ungefärligt värde, att 3,14 är ett mer exakt värde och att π är det exakta värdet.

P51	Är det alltså 3 gånger-, är det 6 gånger 3?
L51	Ja, Där skulle du räkna ut ungefär ja. Hm. Ska man räkna ungefär ska man använda 3.
P51	Ja, annars 3,1416- och så vidare eller?
L51	3,1415 tror jag, eller pi kan du säga bara, så får du med alla siffror i ett kör.
P51	Hur räknar man ut det då?
L51	Vilket?
P51	Pi. Tar man en miniräknare då?

En stund senare fick F64 samma problem.

F64	Vänta lite. 3 fick jag.
L64	Mer exakt den här. ALLTSÅ π. Det är exaktast om man använder den där.
F64	Varför då?
L64	Jo för då får man med alla siffror.
F64	Men vi har ju inget pi på vår miniräknare.

Det var ingen lätt situation för Erik att få eleverna att förstå cirkelområdets area och det av flera orsaker. Brister i elevernas förkunskaper, läromedlets framställning och det sätt på vilket Erik kompletterade läroboken med figurer och beskrivningar är några skäl.

När en lärare ger en instruktion är det viktigt både att instruktionen går att följa och att den motiverar eleverna att utföra arbetet. I följande dialog märker man elevens attityd till laborationen genom hennes ordval.

F41	Ska man klistra och ha sig?
L41	Nja, klistra behöver du inte göra, men du ska klippa och se hur många det går åt.
F41	Ja, men då flyttar dom bara på sig.
L41	Ja, då får du ta och klistra då.
F41	Jag har ju inget klister.

Attityden hos P14 (eleven som hade problem med medelpunkten), övergick efter hand till frustration.

L14	P14, hur går det?
P14	Nej, men det-
…	
P14	Sitta så här och rita och klippa ut och så där.
L14	Du ska ta en i taget
P14	Men det var ju det jag gjorde.
L14	Först klistrar du in den där.
P14	Där?
L14	Nej, den ska vara inuti.
P14	Jaha.
…	
P14	Men då kan jag väl lika gärna lägga dom så här ALLA FYRA PÅ CIRKELN och klippa bort varje hörn så?
…	
P14	Det går åt allihop.
L14	Nej, lägger du dom så, så kommer det ju att gå åt allihop ju. Men du ska bara precis täcka den cirkeln.
P14	Ja, men det är inte så lätt att fatta det.
L14	Vad sa du?
P14	Nej, skit i det. Det var inget.

Hos de övriga lärarna i studien förkommer inte så många exempel på konkretisering. Det har därför varit intressant att studera denna laboration lite närmare. En av poängerna med att laborera är att eleverna därigenom kan erfara eller lista ut viktiga sammanhang. Dessa kan sedan läggas till grund för att upptäcka generella samband eller generella formler. I det här fallet hade eleverna svårigheter med att förstå bokens och lärarens instruktion. Delvis berodde detta på bristande kunskaper inom den grundläggande geometrin och de termer som används för att beskriva den. Laborationen blev på detta sätt enbart en procedurell aktivitet utan logisk koppling till den formel man avsåg att belysa.

10.2.6 Fridas kommunikation

Frida hade valt att låta eleverna arbeta i egen takt. Hon brukade när så behövdes, samla dem till en gemensam genomgång dock inte under den aktuella lektionen. Frida visade sig, i likhet med de övriga lärarna i studien, vara omedveten när det gällde elevernas förkunskaper. En bidragande orsak till detta kan vara att hon, när eleverna kommit efter, lät dem själva bestämma vilka uppgifter de skulle hoppa över. Problemet med detta förfaringssätt är att det är svårt för eleverna att på egen hand avgöra om dessa uppgifter är viktiga för progressionen av undervisningen och följaktligen för deras lärande.

L33	Nu är det lite enheter som är med här och det kanske också är busenkelt och då kan du också göra så att du hoppar lite grand va. Eller?

En förkunskap som flera elever saknade inför lektionen var namnen och egenskaperna hos ett antal rymdgeometriska kroppar. Detta medförde att ett antal elever körde fast när de i början av lektionen kom till ett avsnitt om rymdgeometri.

L33	Pyramid, cylinder, kon och prisma. Ja det är rätt. … Det blir lite knasigt där va, för jag skulle gå igenom det med er allihopa på en gång. Jag hade tänkt att jag skulle göra det i morgon ser du.
F33	Men jag kan inte det.
L33	Men gör så här då. Börja med diagnosen istället.

F51	Där?
L51	Ja, men gör så här att (2s) hoppa över den sidan så länge då. Jag skall gå igenom det i morgon. Utan…
F51	Jag hoppar över den sidan …
…	
F53	Den här … här skall man göra grejs.
L53	Ja, precis. Utan då är det bättre att ni. … Ja. det kommer ni att få göra. Ni skall bygga grejer sen i bilden.

Lägg märke hur Frida och F53 uttryckte sig. Man skulle alltså inte arbeta med att undersöka geometriska kroppar utan med att ”göra grejs” och ”bygga grejer”.

Frida löste det akuta problemet med elevernas bristande förkunskaper i rymdgeometri genom att låta de som skulle ha arbetat med dessa uppgifter istället göra bokens diagnos. I likhet med övriga lärare lät Frida eleverna göra diagnoserna bland kamraterna och/eller hemma och hon kunde därför inte avgöra om eleven själv hade löst uppgifterna. Under denna lektion blev diagnosen i själva verket en ”buffertuppgift”, något eleverna fick göra i brist på annan sysselsättning.

F32 Jag vet inte vad jag ska göra. …
L32 Alltså jag ska gå igenom det här i morgon.
F32 Ja.
L32 Hm. Så att gör så här att du börjar med diagnosen här.

F33 fick emellertid problem även med diagnosen.

F33 12:an. AVSER UPPGIFT 12 PÅ DIAGNOSEN.
L33 Hm, nu kom du in på det som jag skulle gå igenom i morgon.
F33 Ska jag inte fortsätta då?
L33 Nej, vänta med det.

Det visade sig att även diagnosen innehöll uppgifter av det slag eleverna ännu inte hade arbetat med.

Ett annat problem som blev synligt i Fridas klass var att eleverna saknade facit. Detta innebar att eleverna räknade på under en hel lektion, utan att veta om de var på rätt spår eller ej.

F53 Frida. Facit till D-boken. Har du det?
L53 Nej.

När eleverna inte kan kontrollera om svaret är rätt innan de lämnar uppgiften blir det också svårt för dem att avgöra om de lärt sig något.

För Fridas del kunde man redan på makronivå konstatera att hon stannade länge, ofta flera minuter, hos en del elever. Samtidigt var det många elever som inte fick någon egentlig hjälp under hela lektionen. En annan intressant fråga är vad Frida kommunicerade med de elever som hon besökte speciellt länge. En närmare analys visar att Fridas strategi byggde på att hon ville tala matematik och gå tillbaka till och bygga vidare utifrån det som hon uppfattade som elevens grundläggande problem. Denna strategi visade sig emellertid suboptimal. Ett av skälen till detta var att Frida blev så omständlig att hon under tiden ofta glömde bort att svara på den fråga eleven hade ställt. Samtalet blev därför inte på elevernas villkor och ofta fick de därför inte sina problem utredda.

F25 Kan du förklara det här för jag kan inte. Jag fattar inte, det är F33 som tror att det blir det, inte jag. (*12. Den cirkulär ytan i en trafikrondell har diametern 14 m. Hur många kvadratmeter är dess area?*)
L25 Hur stor är en kubikmeter? (2s) Måtta med händerna. (2s) Vad står kubikmeter för?
F25 FNISSAR. Jag vet inte
L25 Hur stor är en meter?
F25 MÅTTAR.

L25	En kvadratmeter då. Hur ser en kvadratmeter ut?
F25	P34 MÅTTAR MED HÄNDERNA. Ja, jaha.
L25	Se på P34 där han har fattat detta här nu.
L34	Du kanske kan förklara för F25.

F25 ville veta hur man bestämmer arean av ett cirkelområde. I sin ambition att gå till botten med F25:s problem började Frida prata om meter och kubikmeter. När hon kommit så långt blev hon störd av P23 och hjälpte honom en stund. När hon återigen vände sig till F25 övergick hon till att tala om en kub, för att därefter övergå till att tala om enheterna kvadratmeter och kvadratdecimeter.

…	
L25	En kub, hur ser en kub ut?
…	
L25	… En kvadratmeter, då har du en kvadrat som är en meter åt alla håll. Har du en kvadratdecimeter då har du något som är en decimeter åt varje håll. … Hur stor är en kvadratmeter då.
F25	En meter på varje sida.
L25	Ja. Och så ska du ha reda på hur många kvadratdecimetrar som får plats i den.
F25	Det är en decimeter på varje-.
L25	Ja, så du börjar med en kvadratmeter för det är lättast.
F25	Hur räknar man ut det då? ALLTSÅ AREAN PÅ TRAFIKRONDELLEN.
L25	Då får du använda ditt sunda förnuft här. Tänk dig här nu. Du har en meter, en stor kvadrat som är en meter åt alla håll. Ja, och så skall du se hur många kvadratdecimetrar som är så stora, som får plats i den.
F25	Hur stora?
L25	Nej du kanske kan klura ut det? (1s) Ta hjälp utav P34. Han kommer dit snart också.

Det hade nu gått nästan en och en halv minut och då lämnade Frida F25 utan att ha besvarat hennes fråga. Frida hade således fört ett långt samtal med F25 utan att med ett ord beröra det F25 egentligen behövde ha hjälp med. Istället ville hon att F25 skulle vänta in att P34 kom fram till samma uppgift. Jag tolkar denna cykel så att Frida hade en idé som hon ansåg vara viktig att lyfta fram, men att hon inte förmådde att knyta den till elevens problem.

F53, en annan av Fridas elever hade problem med enhetsbyten och bad därför om hjälp. Uppgiften var: *54. Skriv först som centiliter och sedan som milliliter a) 1 l   b) 5 dl   c) 0,5 dl.*

F53	Jag gjorde inte-.
L53	Ja, varför inte då?
F53	För hur får man veta det? Du sade att det blev någonting med-.

Flera elever ropade nu samtidigt på Frida och nästan alla elever i klassen pratade i munnen på varandra. Frida visade en viss frustration över detta, men fortsatte dock att kommunicera med F53. Än en gång visade det sig att Frida var så fokuserad på en idé, nämligen volymen av en matsked, att hon glömde bort att ge svar på elevens egentliga problem.

L53	Men vänta lite här nu. Hur många matskedar går det på en liter? Vad säger jag, på en deciliter?
F53	6.
L53	6 ja, ungefär 6. Om du vet att de går 6 stycken matskedar på en deciliter, ja? Hur många milliliter är en deciliter då? (4s) Hur många milliliter på en deciliter?
F53	100.

F53 ville veta hur hon skulle översätta 1 liter och 5 deciliter till centiliter respektive milliliter. Frida diskuterade däremot matskedar, men någon sådan uppgift finns inte i boken. Man hade emellertid pratat om matskedar tidigare och F53 hade då lärt sig att det går 6 matskedar på en deciliter. I själva verket går det snarare 7 eftersom $7 \cdot 15 = 105$! Mot denna bakgrund var Fridas fråga lite märklig. Svaret på den är ju 90 och inte 100. Frida fortsatte nu ytterligare en stund att prata om matskedar.

L53	Och så visste du att det gick 6 matskedar ungefär-
F53	På en deciliter.
L53	Ja Hur mycket blir det för varje matsked då?
F53	(3s) Ja då är det bara att dela det. (4s) Ja, 16.
L53	Alltså nu är det inte 16, nej utan 15. För 15 milliliter är en matsked. Om man tar 15 gånger 6, hur mycket blir det då?
F53	90.
L53	90 ja. Då man säger att det går 6 matskedar på en deciliter då får man inte riktigt en deciliter utan bara nästan.
F53	Då blir det 15 milliliter
L53	Hänger du med på det här nu, hur vi fick fram det?

Det är svårt att tolka Fridas avsikt när hon talar om matskedar i detta sammanhang när F53 hade problem med enhetsbyten. Att det går 15 ml på en matsked kunde hon läsa sig till på en illustration i boken och därför går det 6 matskedar (eller snarare 7 matskedar) på en deciliter. Vad Frida uttryckte var istället att det går 15 ml på en matsked eftersom det går 6 matskedar på en deciliter! Denna kommunikation var inte särskilt givande för eleven och hon fick inte något svar på sin fråga.

Det är viktigt för läraren att ha ett klart mål för kommunikationen men det är lika viktigt att den svarar mot elevens behov av förklaring så att innehållet kan bli förståeligt för henne. Citatet nedan visar hur positivt Frida bemöter en elev när hon kontrollerar hur eleven löst en uppgift

F32 Jag vet inte om jag har gjort rätt.
L32 48an. Hur många …hur gjorde du då? (*48. Pia har köpt en påse med 25 liter blomjord för 20 kr. a) Hur många sådana påsar motsvarar 1 m^3? b) Hur många 10-literspåsar kan man fylla av 1 m^3 jord?*)
F32 Jag tog 25 för de är 1000. Så tog jag 25 gånger 40 så det blev 1000. Då blev det 40 säckar.
L32 Ja det ser bra ut.
F32 Och där tog jag 10 gånger 1000 nej 100.
L32 Helt rätt. Det är jättebra.
F32 100 va?

Frida var genomgående uppmuntrande gentemot eleverna, man att i detta sammanhang säga ”jättebra” ger fel signaler till eleven när det gäller matematikkunskapen. I själva verket hade F32 med hjälp av en öppen multiplikation gissat sig fram till rätt svar. Men den generella strategin här handlar om innehållsdivision. Fortsätter hon med den strategi hon här valt kommer hon sannolikt att få problem senare när talen blir så komplicerade att hon inte längre kan gissa sig fram. Hur ska F32 då finna den felande faktorn? Med hjälp av en öppen multiplikation kan det bli nog så komplicerat att pröva sig fram till ett korrekt svar, även om man använder en miniräknare.

Frida använde det jag uppfattar som ett ungdomsspråk och hade en kamratlig ton när hon kommunicerade med eleverna. Detta ledde emellertid till att det matematiska språk hon använde tappade i precision. Frida var inte heller noga med hur eleverna använde enheter och det var sällan hon rättade felaktigheter. F54 var en snabb elev som hade varit sjuk och därför inte lärt sig hur enheten cm^2 uttalas.

F54 CM3 eller 2 är väl den….
L54 Ja men det är olika enheter vet du. En CM2 hur säger man det?
F54 Det är hur det är när det är uppåt. Ja, eller åt alla håll då. Nja, inte då det är CM2.
L54 Då är det bara när det är rakt så. Detta är CM2.

I följande fall uttryckte sig Frida på samma sätt som Erik när han beskrev en kvadratmeter.

L25 Så en (2s) en kubikmeter då har du en meter som (2s) en kub som är en meter åt alla håll. En kvadratmeter då har du en kvadrat som är en meter åt alla håll. Har du en kvadratdecimeter då har du något som är en decimeter åt alla håll. Nu har du kvadratmeter och kvadratdecimeter där. Hur stor är en kvadratmeter då?
F25 En meter på var sida.

Frida accepterade svaret. En logisk följdfråga blir om en kubikmeter är samma sak som en kvadratmeter och om arean av en romb med sidan 1 m alltid är en kvadratmeter - eller till och med en kubikmeter?

Frida vinnlade sig om att konkretisera för att hjälpa eleverna att förstå.

L52	Ja just det, eftersom man frågar efter liter här alltså så är det smart att räkna i decimeter, så att man får kubikdecimeter.
L51	Ja, visst, det är det. När man räknar va, som när man räknar här, då får man ju måttena i decimeter. Då får man ju automatiskt kubikdecimeter.
F33	Centimeter och centiliter är typ samma?
L33	Nej, det är rätt så lurigt va. Titta här. Kan du något som är lika stort om man håller på med kubik och liter? Kan du några mått, mått som är värda lika mycket?
F33	Ja en kubikdecimeter och en liter.
L33	Hm det är lika mycket. En kubikdecimeter är en liter. Hm och så sa du, hur många milliliter gick det på en liter?
F33	De va 1000.
L33	Hm. Hur många kubikcentimeter går det på en kubikdecimeter?
F33	(5s) 1000.
L33	Kan man dra några slutsatser av det här?
F33	(2s) Ja att det går en milliliter (3s) på (2s) en kubikcentimeter.
…	
L33	Om du tänker dig en (1s) äh (2s) en milliliter det är ett kryddmått va. Då kan du tänka dig att det är lika stort som en kubikcentimeter, en tärning med sidan en centimeter.

Under lektionen var det två elever som arbetade med minnesfunktionerna på en miniräknare. Det procedurella språk som används i läroboken ledde då till problem. En uppgift löd till exempel så här.

*135 a) Mata in 3,14 i miniräknarens minne, **M+**. b) Vilken figurs area beräknar man, när man göra följande tangentnedtryckningar på miniräknaren?* ***6 x = x MR =***

L23	Det där är bara liksom en uppgift för att lära sig lite finlir på miniräknaren då va.
…	
L23	Ja. Varje gång du trycker på MRC va (1s) så kommer det (2s) så kommer det nu upp 3,14 i rutan. Och nu är det då- (2s) Vad händer om du trycker 6, ”gånger”, ”lika med”, ”gånger”, ”minne”, ”är lika med”?

Den här överkursuppgiften passade mindre bra för tillfället eftersom det var ett tag sedan P23 arbetade med cirkelområdets area. Det betydde att han inte riktigt förstod innebörden i de beräkningar han skulle utföra. Han gjorde emellertid sitt bästa för att, på en procedurell nivå, trycka på rätt tangenter på miniräknaren.

P23	(3s) gånger (4s). SITTER OCH PRÖVAR.
L23	Vänta vad hände nu. När du tryckte på 6 ”gånger”, ”lika med”, ”gånger”, ”minne”, vad hände då?
P23	Det blev lika- (2s) det blev 36 (3s).
L23	Varför blir det det? (2s) Alltså om man trycker ”gånger” och så ”lika med” så tar man och multiplicerar med samma tal igen. Så att om du tar 2 ”gånger, ”lika med” vad skall det då komma upp i rutan då? (2s) Om du testar det? (3s) Nej tryck 2 ”gånger”, ”lika med”.
P23	Då kommer det 6.
L23	Ja, ja, nej, nej testa: 2 ”gånger”, ”lika med” vad kommer det upp då?
P23	(3s) 4.
L23	Och 3 ”gånger”, ”lika med”?
P23	(2s) 6.
L23	Nej.
P23	9 då?
L23	4 ”gånger”, ”lika med”
P23	12, (2s) 8.
…	
L23	LÄSER HÖGT MEDAN P23 ARBETAR MED MINIRÄKNAREN. 6 ”gånger”, ”lika med”, ”gånger”, MRC (2S) Berätta vad som hände nu. (2s) Att här har du tryckt 6 gånger 6 gånger 3,14 är lika med.
P23	Jag tar 6 gånger 6 gånger denna.
L23	Ja, som är 3,14.
P23	Hm.
L23	Vilkens figurs area beräknar man gör dom beräkningarna på miniräknaren.
P23	(2s) Kvadrat.
L23	Nej, vadå?
P23	(2s) Nej, sexkant.

Den här typen av procedurell och lotsande kommunikation fungerade som synes inte så bra. P23 lotsades till slut fram till ett svar som han inte förstod innebörden av. Så här fortsatte dialogen ytterligare en stund.

Mot slutet av lektionen behövde P23 hjälp igen. Uppgiften är då: *Räkna ut* r^3*, om r = 3,2. Med miniräknaren kan du göra så här: 3 • 2 X = = .*

L23	3,2.
P23	Det står ju gånger 2.
L23	Men på miniräknaren är det ett sådant (2s) komma.

Skall man vara korrekt så är det inte ett ”komma” utan ett decimaltecken. En ännu viktigare fråga är emellertid om det är meningsfullt att laborera med miniräknaren om man inte förstår vad man gör. Kanske kunde man i boken också ha använt ett klarare språk och skrivit 3,2 X = = istället? Det var ju inte operationen 3 · 2 som skulle utföras utan en operation med talet

3,2. Sådana detaljer kan vara nog så avgörande när eleven vid en hastighetsindividualisering skall få all instruktion från läromedlet.

10.2.7 Gunnels kommunikation

För Gunnels klass var den observerade lektionen den andra i rad där eleverna skulle laborera sig fram till olika kroppars volym. Gunnel inledde arbetet med en kort introduktion

LAE	Idag fortsätter vi den här laborationen som vi har börjat. Kommer ni ihåg? Vi har börjat med att tillverka olika rymdgeometriska kroppar….Och när ni började laborera med dessa har jag delat ut sådana laborationspapper, en ensidig, en tvåsidig och en med lite extrauppgifter.

Gunnel hade valt att låta elevernas arbete utgå från tre stenciler, kopierade ur olika läromedel. Eleverna arbetade parvis och Gunnel besökte varje elev upprepade gånger och kontrollerade därvid hur de använde aktuella termer och begrepp.

P23	Jag har inte den där andra, runda grejen. Gunnel, vad heter den där runda grejen?
P13	Ja, det minns jag.
L13	Vad heter den P13?
P13	Cylinder.
L13	Cylinder, OK.

L33	Du har tillverkat en cylinder. Ungefär hur stor är cylinderns volym i kubikcentimeter?

L44	Hur räknar du ut volymen för ett rätblock?
P44	Basen gånger höjden gånger bredden.
L44	OK men då tar du den där nu. Så mäter du kanterna. Hur lång är längden, bredden och höjden?

Under lektion skulle eleverna undersöka sambandet mellan olika geometriska kroppars volymer genom att fylla dem med puffat ris. Detta är en vanlig metod för att åskådliggöra förhållande mellan kroppars volymer. De flesta eleverna var emellertid inställda på en helt annan våglängd. En elev bråkade och blev utkörd, en annan ledsnade och lämnade klassrummet, en tredje ville inte laborera och han fick arbeta med läroboken istället. Av sammanhanget framgick det att de här tre eleverna, på olika sätt, protesterade mot laborationen. Det var intressant att konstatera att även Gunnel var tveksam till denna typ av laborativt arbetssätt. Det framgick under den inledande intervjun att hon egentligen lät eleverna utföra denna laboration för att hon ”vet att det är så man skall göra”. Följande dialog gör inte situationen bättre.

F21	Varför ska vi ha boken?
L21	Jo, om ni har varit duktiga, har gjort färdig dessa laborationsuppgifter, då fortsätter ni i boken.

Syftet med att laborera uppfattades inte av alla elever. P44 såg till exempel inte vad det var för poäng med att fylla kroppar med puffat ris.

L34,44	Hur har ni här?
P44	Det är 2 deciliter.
L44	2 deciliter om du har uppmätt ris. Men om du vill uttrycka volymen i kubikcentimeter och kubikdecimeter hur blir det? (1s) Om vi tar kubikcentimeter?
P44	Äh, 125.
L44	Hur räknar du då ut volymen?
P44	Kollade formeln i den.

P44 påstår alltså att han använde en formel istället för att mäta. Men vilken formel använde han egentligen för att skriva om 2 dl som 125 cm^3? En rimlig tolkning är att han inte är intresserad av laborationen utan bara gissar.

Även eleverna P33 och P43 signalerade klart att de inte ville laborera och att de inte ville att Gunnel skulle komma och hjälpa dem. Gunnel var emellertid målinriktad och fortsatte att fråga.

L33,43	… Dom frågar ju inte efter precis, exakt men ni har svarat exakt. Men hur stor del är-
P43	9 någonting.
L33,43	cylinderns volym jämfört med konens volym. Var har vi cylindern och var har vi konen?
P33	Här någonstans och där borta.
L33,43	Dom två. Om ni jämför så här, dom två, vilken har större volym?
P33	Cylindern.
L33,43	Cylindern. Hur mycket större volym har cylindern?
P43	Inte någonting, inte mycket i alla fall.
L43	Inte mycket?
P33	2 gånger kanske.
L33,43	2 gånger. Hur kan man pröva om det är 2 gånger?
P43	Vi har redan gjort det en gång.
L33	Om du gör så här att du fyller konen istället.
P33	Va?
L33	Du fyller konen istället med ris och häller sedan över till cylindern. (2s) Pröva då!
P33	Nej.

Gunnel gav sig således inte och så småningom fyllde eleverna konen med ris tre gånger, fyllde därmed cylindern och fick den vägen fram svaret 3 gånger.

Även Gunnel hade problem med att flera av eleverna saknade de förkunskaper som behövdes. I följande fall skulle en elev beskriva en pyramid.

L21,22	Pyramid. Och sedan har vi en kon här.
…	
L11,12	… Vilken geometrisk form-
P12	Ska jag veta vad det heter?
L12	Vilken geometrisk form- (2s) Men läs vidare.
P12	(2s) Rund.
L12	har basytan hos din pyramid?
P12	Den är ganska rund.
P22	Trekantig.
L22	Vi ska se på pyramiden. TAR FRAM EN PYRAMID.
P22	Fyrkantig.
L22	Fyrkantig, men vad heter den, vilken sorts fyrkant?
P22	Kvadrat.

Gunnel inledde med att nämna såväl kon som pyramid vilket kan vara den troliga orsaken till att P12 anger basytan som rund, medan P22 säger trekantig och ändrar sig till fyrkantig. En rimlig tolkning är att de båda eleverna fokuserar olika kroppar när de svarar medan Gunnel utgår från pyramiden. Detta sätt att tala förbi varandra utan att Gunnel uppmärksammade det var ovanligt under lektionen. Hon ställde oftast sina frågor till en av eleverna och krävde ett svar från den eleven. Detta gjorde det möjligt för henne att få en uppfattning om vad varje individ kunde. Hennes kommunikationen med eleverna i en grupp skedde oftast omväxlande med än den ena och än den andra.

L11,21	Ja, alltså den här uppgiften 35. Ni har tillverkat den här lilla asken. Det är den. Hur får ni sen-
F11	Den blir 2000, men hon har inte gjort den.
L11	Vad har hon inte gjort?
F11	b.
L11,21	… Vilken kropp studerar ni. Vad heter den?
F21	Cylinder.
L11,21	Cylinder, Hur ser bottenarean ut? VÄNDER SIG TILL F21.
F21	Rund.
L21	Vilken form har den?
F21	Cirkel.

Det visar sig att F11 och F21 i stort sett fick lika mycket uppmärksamhet från Gunnel under lektionen. Man kan emellertid iaktta att F21, som verkar vara den svagare eleven av de två, fick fler innehållsliga frågor än F11. Kommunikationen med F11 var mer av typen ”Hur går det? ” och ”Ni måste anteckna”.

Gunnel var noggrann med sitt språk och även med att korrigera slarv eller felaktigheter i elevernas språk.

P22	200 centimeter
L22	200 kubikcentimeter.
P22	Kubikcentimeter

L44	Hur räknade du ut volymen för ett rätblock?
P44	Basen gånger höjden gånger bredden.
L44	… och så mäter du kanterna …

L34	… Hur mycket rymmer den här lilla asken? … Du ska uttrycka volymen i kubikcentimeter.

L44	Hur räknar man ut cylinderns volym.
P44	Man räknar ut det här (2s) först botten.
L44	Bottenarean. Vilken form har botten?
P44	Cirkel.

Trots att Gunnel hade en stökig grupp hindrade det henne inte från att vara korrekt i sin egen terminologi och kräva detsamma av eleverna. Och eleverna accepterade detta.

L23	Vilken rymdgeometrisk form? Om vi tar a, första bilden.
P23	Denna?
L23	Ja, det var den. Vad heter den?
P23	Ingen aning.
L23	Men titta på papperet då?
P23	Pyramid.
L23	Ja, pyramid.
…	
L23	Var har du ditt prisma.

Gunnel var alltså hela tiden konsekvent och använde ett adekvat språk.

L33	Du fyller konen i stället med ris och häller sedan över till cylindern.

L33,34	Hur stor är cylinderns volym jämfört med konens?

L23	… Diametern är alltså den sträcka som går genom cirkelns mittpunkt och går till dom här, dessa kanter här.

L33,34	Vad har ni kommit fram till när ni har jämfört pyramidens volym med rätblockets volym?

Gunnel försökte alltid klargöra alla begrepp och ta reda på hur eleverna hade förstått det objekt de talade om.

L44	Hur räknar man ut cylinders volym?
P44	Man räknar ut den här (2s) först botten.

L44	Bottenarean. Vilken form har botten?
P44	Cirkel
L44	Cirkel. Hur räknar man ut arean för en cirkel?
P44	Man tar den här halva grejen först och delar den halvan- (3s)
L44	Här har vi. Vad var den där halva grejen som du menade?
P44	Diametern.
L44	Ja, vi tar hälften av diametern och vad heter-?
P44	Radien.

L21	Alltså, när vi räknar arean, då behöver vi radien. Vi måste veta hur lång är radien. Då ska vi se på det här. Vad betyder pi här?
F21	3,14.
L21	3,14. Och vad betyder r upphöjt till 2?
F21	Radien upphöjt till 2.
L21	Och vad betyder det, radien upphöjt till 2?
F21	Radien gånger radien.

Genom sina frågor redde Gunnel ut innebörden i olika begrepp. Hon accepterar dock här att π är 3,14 men hade tidigare noga förklarat innebörden av π.

L44	Radien upphöjt till 2 betyder radie gånger radie. Vad betyder pi?
P44	Pi?
L44	Hm. Det som jag har pratat om, det märkliga talet.
P44	MUMLAR NÅGOT.
L44	3, 14.
P44	Ja, just det.
L44	Så du har 3,14 gånger radie gånger radie och du har miniräknare där som du kan använda för att räkna ut bottenarean.

Gunnel ville också att elevernas skulle se matematiken bakom det de gjorde. Hon tog under lektionen även upp matematikens historia, ett av de nya målen i kursplanen.

L33,43	Det var Euclides sätt att visa det här påståendet. Så han tillverkade tre stycken pyramider, som han kunde alltså (2s) öh (1s) öh (2s) pussla ihop till ett rätblock och i vårt fall är det ett speciellt rätblock som är en kub

Hon återförsäkrade dessutom termer och begrepp i dess definitioner.

L23	Diametern är alltså en sträcka som går genom cirkelns mittpunkt.

Som tidigare nämnts var Gunnel skeptisk till den här typen av laborationer. Vid båda intervjuerna framgick det att hon såg på laborerandet enbart som en rituell handling, något man skulle göra i skolan. Sedan kunde man gå över till ”riktig matematik”. I början av lektionen sade hon t.ex:

L21	Jo, om ni har varit så duktiga och gjort färdigt dessa laborationsuppgifter, då fortsätter ni i boken

Vid lektionens slut, när olika grupper hade konstaterat att en cylinders volym är tre gånger så stor som motsvarande kons volym, sade hon följande:

L33,43	Men det är i matematiken inte bara att säga så här… utan man skall bevisa det.
L31	Men det här påståendet måste ni bevisa. Det var Euklides som bevisade det.

Eleverna såg något konfunderade ut. Sannolikt undrade de vad laborationen gick ut på om de ändå skulle bevisa vad de just hade kommit fram till.

10.3 Sammanfattning ur ett mikroperspektiv

I det föregående kapitlet beskrevs ur ett makroperspektiv hur lärarna i studien hade organiserat sin undervisning. I detta kapitel görs en analys av innehållet i lärarnas kommunikation med eleverna. Fokus sätts på hur lärarna försökte göra matematiken förståelig för den enskilde eleven. Kommunikation används här i den betydelse som redovisas i kapitel 1.

En förutsättning för att läraren skall kunna nå eleverna med en god undervisning är att hon gjort lämpliga val när det gäller undervisningens ramar. Viktiga ramar är läromedlet, sättet att individualisera, medvetenheten om olika elevers förkunskaper och tillgången till undervisningsmaterial.

10.3.1 Lärarnas instruktioner

En god lärandemiljö, i betydelsen att nå eleverna med relevanta instruktioner, är beroende av de val läraren gjort av undervisningens ramar. Ett mindre genomtänkt val av ramar kan försvåra lärarens möjligheter att nå eleverna med sina instruktioner.

Större delen av de observerade lektionerna genomfördes i form av enskilt arbete och ofta i form av hastighetsindividualisering. Eleverna fick större delen av sina instruktioner i skriftlig form, via en stencil eller ett läromedel. I sådana fall innebar lärarens handledande arbete att efterhand ge kompletterande instruktioner till varje enskild elev. Vid denna handledning kunde jag urskilja ett antal komplikationer.

I flera fall utgick lärare och läromedelsförfattare från olika strategier för hur elevernas uppgifter skulle lösas. Detta ledde till konflikter i kommunikationen Läraren och eleven talade förbi varandra, eftersom lärarens instruktion inte stämde överens med den instruktion eleverna fått genom boken. I flera av fallen krävdes dessutom olika förkunskaper för att förstå de olika strategierna. Lärarna löste i allmänhet dessa konflikter, genom att lotsa eleverna förbi problemen genom att tala om hur de skulle göra, istället för att förklara hur de skulle tänka. Ur elevernas synvinkel innebar detta inte något klargörande av deras problem.

Eftersom eleverna fick huvuddelen av sin instruktion från ett läromedel som inte är avsett för självstudier, fick många av dem problem med att tolka texten. Av det skälet behövde så många elever hjälp med texten att lärarna inte hann hjälpa alla. För att hinna med så många elever om möjligt gällde det för lärarna att snabbt sluta sig till vilket problem respektive elev hade och hur de skulle hjälpa eleverna. Analysen av data visar att läraren oftast började sin förklaring direkt efter det en elev sagt ”123 c” eller pekat på ”den”. Eftersom läraren inte gav sig tid att ta reda på vad det var som eleverna inte förstod och ofta inte kände till deras förkunskaper, hände det upprepade gånger att lärare och elever talade förbi varandra. Ofta avslutades kommunikationen när man väl kommit fram till elevernas egentliga problem.

När lärarna skulle utreda ett problem vid handledning av en elev uppstod ofta en speciell komplikation. Läraren som hade en färdig idé om hur man skulle kunna lösa problemet i fråga tog ofta denna idé som utgångspunkt för sin förklaring, men synliggjorde den aldrig för eleven. Detta ledde till att eleven inte förstod lärarens frågor eller förklaringar och att läraren som en följd av detta övergick till att lotsa eleven.

Två av lärarna inledde sina lektioner med en genomgång med hela klassen samlad. I båda fallen visade sig den instruktion som lärarna gav vara otillräcklig. Ett gemensamt drag vid dessa genomgångar var att de enbart procedurellt beskrev vad eleverna skulle göra, inte vad som avsågs med uppgifterna eller vilken matematik de skulle lära sig. Eftersom läraren senare måste ge de flesta eleverna en sådan information individuellt motverkades syftet med att spara tid.

Lika viktigt som det är att ge en bra instruktion, är det att nå de elever som är i behov av instruktion. Även om lärarnas intention var att ge alla elever den hjälp de var i behov av, så lyckades detta mindre bra. Det var snarare de eleverna som aktivt sökte hjälp än de som var i behov av hjälp som fick den. Många av de svagare eleverna blev av det skälet utan hjälp och många av de duktigare eleverna ville inte ha hjälp. Ett annat mönster var att läraren ofta blev avbruten av en annan elevs fråga under sin handledning av en elev. Istället för att be den störande eleven vänta på sin tur svarade läraren ofta på denna elevs fråga och glömde samtidigt ofta bort den eleven hon först hjälpte. Följden av detta blev vid flera tillfällen att en fråga från en kamrat ledde till att en handledning blev avbruten och fick påbörjas på nytt eller inte återupptogs alls.

10.3.2 Individanpassning av innehållet

I skoldebatten (NCM, 2001; Skolverket, 2003b) framställs ofta läromedlet som ett hinder för en god undervisning. Min studie visar emellertid att lärarnas problem med undervisningen inte berodde på läroboken i sig utan snarare på hur läraren använde sig av läroboken. De flesta av lärarna i studien hade valt att hastighetsindividualisera vilket förutsätter att eleverna har tillgång till sådana uppgifter som gör det möjligt för dem att arbeta på egen hand. Det här sättet att arbeta kräver till exempel tillgång till ett skrivet undervisningsmaterial. Problemet med de material som användes i de studerade klasserna var att det inte förkom någon individuell anpassning av uppgifterna utan alla elever räknade i stort sett samma uppgifter fast vid olika tidpunkter.

Studien visar på den betydelse undervisningens ramar har för möjligheterna att individanpassa undervisningen. Även om ramarna i sig inte leder till inlärning så skapar de förutsättningar för en effektiv undervisning. En annan viktig ramfaktor är lärarens didaktiska kunnande och förmåga att i sina förklaringar utgå från respektive elevs förkunskaper. Analysen tyder på att det matematiska innehåll som eleverna i studien arbetar med inte var individanpassat, främst beroende på att lärarna saknade relevant information om elevernas förkunskaper. Konsekvensen blev att alla elever fick i stort sett samma instruktion och handledning oberoende av individuella behov och förutsättningar.

Att läraren saknade relevant information om elevernas förkunskaper, leder inte bara till problem för stunden. Eftersom ett visst stoffområde ofta utgör förkunskaper till andra stoffområden betyder det att förkunskapsskulden med tiden blir allt större, vilket in sin tur gör möjligheterna att individualisera svårare. Detta kunde iakttas under några av de observerade lektionerna där små problem som uppstod i början av lektionen ledde till betydligt större problem i slutet av lektionen.

De diagnoser som användes i de studerade klasserna kom aldrig att påverka undervisningens uppläggning. Detta berodde på flera skäl. Ett skäl var att alla lärarna i studien använde sig av lärobokens diagnostiska test på ett sätt som ofta gjorde information otolkbar. Testen genomfördes nämligen bland kamraterna eller hemma, vilket innebar att läraren inte kunde avgöra om eleven själv eller någon annan hade löst uppgifterna. Ett annat skäl var att ingen av lärarna vidtog någon åtgärd i avsikt att reparera en brist som framkommit på ett test. Det saknades således en koppling mellan diagnosresultat och individuell anpassning av undervisningen.

Att individualisera undervisningen innebär att läraren gör en avvägning mellan att ta hänsyn till gruppen eller individen. Ett problem för läraren är att när hon hjälper en individ, har hon samtidigt ett arbetsledaransvar för en större grupp. Hon kan därför sällan ägna hela in uppmärksamhet åt att handleda en enstaka individ. Jag kunde iaktta att lärarens val av ramar ofta ledde till en inlärningsmiljö där störande inslag från gruppen drog stor uppmärksamhet från arbetet med en individ. Ett liknande dilemma uppstod när undervisningen bedrevs som en kollektiv dialog. Eftersom läraren oftast var nöjd om gruppen kunde ge korrekta svar på hennes frågor så glömdes individen i gruppen bort. Att en eller två individer i en grupp för gruppens talan betyder inte att alla elever i gruppen har förstått vad som diskuteras. Argumentet att eleverna i gruppen skulle ta ansvar för att alla skulle förstå visade sig inte stämma med verkligheten. I själva verket gick gruppen direkt vidare, utan hänsyn till att alla individer i gruppen hade förstått, så fort gruppen presterat ett korrekt svar på en uppgift.

10.3.3 Synliggörande av matematiken i undervisningen

Det krävs att läraren har ett klart mål för undervisningen och att eleverna är medvetna om detta mål om de skall få syn på matematiken i uppgiften eller laborationen. De flesta av lärarna beskrev inte några tydliga mål vid intervjun före lektionen utan lät undervisningen följa lärobokens uppläggning. Man litade sannolikt på denna uppläggning och lät boken få rollen som organisatör av undervisningen. Konsekvensen blev att alla eleverna utförde samma aktiviteter med viss tidsförskjutning och att de löste ett antal uppgifter som inte hade någon koppling till deras individuella förmåga eller deras långsiktiga behov av strategier och generaliserbara matematiska modeller. Detta innebar att eleverna i allmänhet arbetade utifrån ett kortsiktigt perspektiv, dvs. att lösa uppgifter för stunden, istället för att bygga upp en kunskapsstruktur som är användbar på länge sikt. Att till exempel fylla geometriska kroppar med puffat ris för att på så sätt jämföra kropparnas volymer ger en mycket begränsad kunskap, om man inte samtidigt reflekterar över orsakerna till de samband man iakttagit. På motsvarande sätt är det inte meningsfullt att klippa isär kvadrater och klistra dem på ett cirkelområde om man inte samtidigt synliggör poängerna med arbetet och inte använder resultatet för att förklara innebörden i π.

Ett sätt att synliggöra matematiken är att konkretisera den med hjälp av lämplig artefakt eller genom att knyta an till en gemensam erfarenhet. Detta förekom sällan under de observerade lektionerna och när det förekom, var kopplingen mellan det konkreta och det abstrakta mycket oklar.

Matematik handlar till stor del om att se generella mönster och strukturer i det man gör. Detta förutsätter dels en variation dels en sammankoppling av idéer. För att detta skall ske måste olika aspekterna lyftas fram och diskuteras. Någon sådan typ av reflektion eller diskussion förkom i stort sett aldrig under de studerade lektionerna. Lektionerna handlade således snarare om räkning än om matematik.

10.3.4 Språk och terminologi

En ytterligare förutsättning för en meningsfull kommunikation är att lärare och elever har ett gemensamt språk och är överens om innebörden i de matematiska termer och begrepp som används i undervisningen. Detta är inte fritt från konflikter. Samtidigt som vissa begrepp inom matematiken blir oklara eller tvetydiga om man inte använder ett exakt språk, så kan det exakta språket medföra problem för en del elever. Mitt intryck är att de flesta lärarna inte hade tänkt igenom detta dilemma. De flesta använde sig, oftast alldeles i onödan, av ett tvetydigt vardagsspråk, vilket i in tur torde utgör ett hinder för eleverna när det gäller att bygga upp ett mer korrekt och för framtida studier i matematik nödvändigt språk. Som exempel på sådana språkliga problem som uppstod kan nämnas

- att flera av lärarna inte skiljde mellan en fyrkant, fyrhörning och kvadrat och eller att en fyrhörning med parallella sidor inte behöver vara en rektangel. Det senare kan lika gärna vara en parallellogram utan räta vinklar. På motsvarande sätt är inte alla fyrhörningar med lika stora sidor kvadrater. De kan lika gärna vara romber.
- att tre av lärarna inte klargjorde skillnaden mellan konstanten π och decimaltalet 3,14. Framför allt är π så mycket mera än ett tal. Det är en universalkonstant som öppnar dörren till flera viktiga begrepp.
- att det knappast skapar något förtroende för geometriska former när lärare låter eleverna mäta på ”burkar och grejer”. Det man mäter skall ju ändå generaliseras till klart definierade egenskaper hos de geometriska formerna och begreppen.
- att man måste skilja mellan hur man skriver matematik och hur man tänker. Att dra 4 från 7 skrivs inte 4 - 7 eftersom detta har en helt annan betydelse. För att beräkna 475 + 284 kan man givetvis börja med att addera hundratalen. Men detta skriver man inte 475 + 284 = 400 + 200 eftersom man med detta menar att 759 = 600, vilket ju inte är sant.
- att det sätt på vilket man uttalar decimaltalen kan vara avgörande för hur man utför vissa beräkningar. Den som uttalar 2,75 som två komma

sjuttiofem och 2,9 som två komma nio kan lätt få för sig att 2,75 > 2,9 eftersom 75 > 9.

- att det förkom en hel del språkligt slarv kring division av bråk och behandlingen av tal i bråkform. Lärare och elever var inte ense om hur man uttalar divisionen 1 / 4. Är det ”4 i 1”, ”1 i 4”, ”4 delat på 1” eller ”1 delat på 4”? Det är heller inte lätt att kommunicera förlängning av bråk om eleverna kallar detta för ”gångra”.
- att nästan alla lärare och elever var slarviga med enheter. Jag menar då inte att man skall kräva enheter i onödan. Att en glass kostar 10, 50 (”tie och femti”) utan att ange enhet är givetvis OK i vardagen, liksom att man springer 100 meter på 11 och 6 och hoppar 2 och 12 i höjdhopp. Här är enheten given genom kontexten. Däremot bör man vara noggrannare till exempel vid undervisningen i geometri, speciellt om kontexten växlar. Att en liter är lika med 1000, eller att volymen av en matsked är 15, duger inte. Det är först sedan eleven har angett enheten som man vet om eleven har förstått innebörden. För att man skall kunna kräva detta av eleverna bör man som lärare själv förgå med gott exempel. Detta förekom, på ett konsekvent sätt, bara under en av lektionerna.

När eleverna skulle läsa sig till instruktioner i läroboken eller texten i de uppgifter som ges i boken, så mötte de oftast en korrekt terminologi. I flera fall visade det sig att elever missuppfattade sådana instruktioner. Orsaken till elevernas bristande förmåga att läsa bokens text kan bero på att eleverna sällan mötte eller begagnade ett korrekt språk vid samtal med läraren. Speciellt vid hastighetsindividualisering blir det språkliga utbudet mycket begränsat. Det hörde till sällsyntheterna i flera av klasserna att en elev kommunicerade matematik med någon. När en kommunikation väl kom tillstånd skedde den ofta på ett torftigt språk. Det är inte så lätt för eleverna att under sådana omständigheter tillägna sig ett relevant matematisk språk.

DISKUSSION

I diskussionen sätter jag mina resultat i relation till den teoretiska analysen och mina erfarenheter av skola och utbildning. Därefter följer implikationer för lärarutbildning och fortbildning samt några utmaningar när det gäller framtida forskning inom området.

11 Diskussion

En fråga jag ofta funderat över är varför svenska elevers matematikkunskaper inte ser ut att förbättras trots alla insatser som gjort (NCM, 2001; Skolverket, 2003b) och varför idéer i olika reformer inte når eleverna varken i Sverige eller USA (Stigler, 2003). I detta avhandlingsarbete har strävan varit att finna sådana kritiska situationer i lärares planering och genomförande av matematikundervisningen som kan bidra till att förklara dessa fenomen. Avhandlingen handlar om hur lärarnas formella och informella kunnande kommer till uttryck i undervisningen. Genom att studera kritiska situationer som uppstår under en matematiklektion och därefter analysera dess orsaker, hoppas jag också att kunna bidra till att utveckla en mer professionell lärarutbildning och lärarfortbildning.

I samband med denna typ av processinriktade klassrumsstudier är det viktigt att klargöra vissa begränsningar och att göra några reservationer. Jag kan till exempel inte uttala mig om vad läraren förmår att göra utgående från sitt samlade kunnande. Det jag utgår ifrån i min diskussion är vad som varit möjligt att iaktta och hur lärarens agerande i undervisningssituationen framträdde. Detta är emellertid den del av lärarens kommunikation som är mest avgörande ur elevernas synvinkel och som ger avtryck i hennes kunnande. Det går inte att utgående från denna studie göra generella beskrivningar av hur matematikundervisning ser ut. Däremot blir en rad olika mönster och samband tydliga. I de fall dessa mönster och samband finner stöd inom den matematikdidaktiska forskningen kan man förmoda att de är av generellt intresse. Det är sådana observationer jag har beskrivet i resultatkapitlen.

Bach (2001) lyfter i sin avhandling fram skillnaden mellan en bra lärare och god undervisning. De lärare som medverkade i studien var ur en synvinkel bra lärare. De hade en modern lärarutbildning, de ansträngde sig att utföra ett bra arbete, de försökte följa de senaste pedagogiska trenderna och visade en hög social kompetens. Ur en social aspekt satte de eleven i centrum och strävade efter att ha goda relationer till dem och ett trivsamt undervisningsklimat. Detta intryck bekräftades av deras skolledare. Samtidigt kunde jag konstatera att flera av dessa lärare hade stora problem med att synliggöra matematiken för eleverna. Ett viktigt skäl till detta var den komplexitet som råder vid undervisningen i ett klassrum (Borko & Putnam, 1993; Calderhead, 1996) och som har sitt ursprung i hur olika faktorer, så kallade ramar för undervisningen, samspelar. Det var i denna komplexa miljö lärarna kom till korta när det gällde att nå eleverna med undervisningens matematikinnehåll.

En intressant fråga är varför undervisningens ramar kan leda till så uppenbara konflikter med tanke på att lärarna själva valt flera av dem. Det svar studien ger är att det saknas ett systemtänkande när det gäller att koordinera valet av ramar. Det räcker således inte med att alla ramarna är utmärkta var för sig och följer accepterade pedagogiska idéer. Det avgörande är hur de samverkar såväl inbördes som med det matematikinnehåll som skall synliggöras för olika individer utgående från deras personliga behov och förkunskaper.

11.1 Pedagogiska idéer och undervisningen

I de två förgående kapitlen har jag ur olika perspektiv beskrivit en rad tillkortakommanden som kunde iakttas i undervisningen. Av resultaten skulle man kunna dra slutsatsen att de studerade lärarna gör ett dåligt arbete. Jag vill istället hävda att de lärare jag observerat i allmänhet gör vad de tror man förväntar sig av dem. Problemet är emellertid att matematikundervisningen är en mycket komplex aktivitet (Kilpatrick m.fl., 2001; Niss & Højgaard Jensen, 2002). Det gäller för lärarna att integrera olika typer av teoretiskt och praktiskt kunnande, ofta under stressande villkor, där det gäller att hålla uppsikt i klassen samtidigt som många elever behöver hjälp med matematikinnehållet. Ball och Bass (2000) menar att man ägnat alltför lite uppmärksamhet åt detta i lärarutbildningen och att man därigenom överlämnat åt lärarna själva att göra denna integration. De framhåller emellertid att detta är så komplicerat att många lärare aldrig lyckas göra det.

En annan faktor som kan förklara lärarnas problem är att pedagogiska idéer är känsliga för trender. Madsén (2002) menar att många problem har sin grund i att lokala politiker ”gärna köpt slagord” som att eleverna skall söka kunskaper själva. Det har därför, menar han, blivit ”fult att undervisa”. Detta framgår även av min studie där eleverna i flera klasser får huvuddelen av all information från ett läromedel och där läraren spelar en underordnad roll som handledare när det uppstår behov av hjälp. Flera av lärarna i min studie motiverade detta med att det skulle vara så ”för att eleverna konstruerar ju sin kunskap själva”. Det faktum att eleverna bara kan konstruera den kunskap som de exponeras för (Marton & Booth, 2000) och att läraren därvid har ett avgörande ansvar, var det ingen av lärarna som lyfte fram. Min förklaring till detta är att lärarna tagit till sig intentionerna i läroplanen och den pedagogiska debatten på en ytnivå (Stigler & Hiebert, 1999). Läroplanen lyfter fram inlärningens konstruktivistiska perspektiv, något som lärarna inte verkade uppfatta eller åtminstone inte förmådde överföra till praktisk undervisning.

När det gäller att dra slutsatser från forskningsresultat varnar Bodin och Capponi (1996) för risken att dra för långt gående slutsatser av de senaste årens matematikdidaktiska forskning. Det är svårt att överföra slutsatser från en kultur till en annan. Samtidigt påpekar Björkqvist (2003) att även om lösningarna är kulturberoende så är många av problemen universella. Mot denna bakgrund är det viktigt att studera vad som händer i svenska klassrum. Min studie omfattar observationer av sju lärares lektioner, vilket kan tyckas vara i minsta laget. Det framträder emellertid mönster och en rad likheter i de sju lärarnas sätt att agera och resonera. När sådana likheter överensstämmer med resultat från annan forskning vågar jag dra slutsatsen att de av mig observerade fenomenen är av generellt intresse. (se till exempel Ma, 1999; Kilpatrick m.fl. 2001)

En fråga är om forskaren, när det gäller matematikdidaktisk forskning, enbart skall redovisa vad som observeras alltså enligt Bishop (1992) ”what is” eller om man också skall reflektera över hur det skulle kunna vara ”what might be”. Bishop menar liksom Niss (2001) att båda borde redovisas. Jag delar denna uppfattning och menar att det kan vara svårt att tolka en problematisk situation utan att veta om det finns alternativ eller hur dessa alternativ skulle kunna se ut. Jag har av det skälet försökt ställa vad läraren gjorde mot vad hon enligt min uppfattning skulle kunnat göra utgående från de aktuella resurserna och förutsättningarna.

När jag tolkar och beskriver olika situationer gör jag detta utgående från ett matematikdidaktiskt kunskapsperspektiv. Jag betraktar således inte situationerna utifrån utan ”from the inside” det som Lampert (1998) kallar ”the perspective of practice”. På det sättet har jag försökt beskriva den kultur som enligt Bodin och Capponi (1996) till stor del är tyst och osynlig men som samtidigt styr normer och värderingar i klassrummet. Ett exempel på detta är mina omtolkningar av lektionerna från observationstillfället till mina analyser ur ett makro- och mikroperspektiv. Under de flesta av lektionerna uppfattade både min biträdande observatör och jag undervisningen som funktionell. Vad vi kunde observera vid dessa tillfällen var emellertid i första hand de arbetssätt och de arbetsformer som lärarna valt och ett socialt samspel mellan lärare och elever. Eftersom vi då inte kunde följa kommunikationen mellan läraren och enskilda elever var det bara möjligt att studera undervisningens ramar separerade från sitt innehåll. När vi senare hade tillgång till data om undervisningens innehåll fick vi en helt annan bild av samma lektioner. De flesta av lärarna visade sig ha en dåligt fungerande logistik när det gällde att handleda eleverna. Många elever blev utan hjälp och den handledning som gavs var förhållandevis ineffektiv i relation till elevernas behov av förklaring och deras förutsättningar att förstå.

Från mitt ramfaktorteoretiska perspektiv är det viktigt att vid analyserna följa undervisningens väg från mål till resultat. För att kunna göra detta är det viktigt att skilja mellan en ”intended”, en ”implemented” och en ”attained curriculum” (Bodin & Capponi, 1996). Kilpatrick m.fl (2001) menar att ”what is learned depends on what is taught”, men att det finns även andra hinder på vägen. Enligt läroplanen (Skolverket, 2000b) skall eleverna utveckla intresse för matematik, kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer, uppleva estetiska värden, tillfredsställelse och glädje med mera. De flesta matematikdidaktiker önskar också att undervisningen skall vara ”rich and challenging” (Stigler & Hiebert, 1999). Detta stämmer dåligt med vad jag kunde observera. Inte ens de duktigaste eleverna i de studerade klasserna fick utmaningar eller gavs möjligheter att utveckla ett intresse för matematik, ett matematiskt språk etc. De visade inte heller något intresse för att diskutera alternativa lösningar och lärarna verkade snarast nöjda med att de duktigare eleverna inte krävde så mycket hjälp. Därmed blev det ju mer tid över för övriga elever. Samtidigt glömdes många av de svagare eleverna bort, de som var tysta och inte krävde uppmärksamhet. Inte heller de fick den stimulans de behövde. De möjligheter att göra begreppsliga omvärderingar som beskrivs av Toulmin (1972) erbjöds sällan eller aldrig till någon av eleverna. För att detta skall ske krävs en helt annan typ av undervisning än den hastighets-individualisering som var det vanligaste arbetssättet under de observerade lektionerna.

Det är intressant att jämföra den observerade undervisningen med den som Dahllöf (1971) beskriver. Enligt hans styrgruppshypotes spelar de elever som kunskapsmässigt ligger på 15:e till 25:e percentilen ”nerifrån” räknat en viktig roll vid lärarnas löpande planering. Det är genom den gruppen läraren känner av om undervisningen fungerar eller ej. Denna elevgrupp blir alltså viktig för lärarens planering av undervisningen. Dahllöf kunde utgående från styrgruppshypotesen konstatera att de duktigaste eleverna utsattes för en improduktiv överinlärning. De bara räknade fler uppgifter av samma slag och nådde därför inte, trots tid och kapacitet, andra mål än eleverna i styrgruppen. De duktigaste eleverna i de klasser jag studerade arbetade på samma improduktiva sätt. När det gäller de svagare presterande eleverna, de under styrgruppen, så nådde de aldrig målet eftersom undervisningen planerades efter styrgruppens förmåga. När styrgruppen nått målet gick man över till ett nytt avsnitt. I dagens hastighetsindividualisering består styrgruppen av de elever som kan arbeta enligt en för lärarens långtidsplanering idealisk arbetstakt. De elever som i min studie inte kunde hålla den takten erbjöds inte något alternativ utan fick istället, på ett osystematiskt sätt, hoppa över uppgifter. De riskerade därmed att dra på sig en växande förkunskapsskuld, som på sikt kan leda till nya misslyckanden. Skillnaden mellan dagens ramar och de ramar som gällde för 1970-talets undervisning är stora. En stor överensstämmelse har jag emellertid kunnat iaktta, nämligen att lärare i båda fallen haft problem med att utnyttja eller välja undervisningens ramar på ett för alla elever adekvat sätt. Varken de duktigaste eller de svagaste eleverna fick en undervisning anpassad till sina villkor och sin förmåga.

11.2 Kommunikationens villkor

Lärares sätt att leda kommunikationen i klassrummet kan såväl möjliggöra som begränsa möjligheterna att föra djupare och mer utmanande samtal med eleverna. Zevenbergen (2000) tar den så kallade triaden som exempel. Med triad menas i detta sammanhang en cykel som består av tre drag: fråga - svar - reaktion. Zevenbergen menar att triaden är den dominerande kommunikationsformen vid matematikundervisning i klassrummet. Inom ramen för en sådan kort dialog är det emellertid inte möjligt att föra några djupare samtal om matematik. Lundgren (1972) fann i sin forskning att cykler med tre drag eller färre svarade för mer än 50% av samtliga cykler. Mina observationer visade något annat. Cyklerna var oftast betydligt längre än triaden. Problemet var snarare att dialogen ofta saknade precision eftersom lärare och elever ofta talade förbi varandra. Emanuelsson (2001) ligger närmare mina erfarenheter när han beskriver att det är lärares bedömningar av rätt eller fel svar eller lösningsmetod som dominerar i matematikundervisningen. Mot denna bakgrund är det givetvis svårt för lärarna att utmana, argumentera, resonera eller diskutera alternativa lösningsmetoder.

En viktig förutsättning för att föra mer djupgående samtal med en elev är att läraren känner till elevens förkunskaper. I annat fall är risken stor att lärare och elever pratar förbi varandra. Ett sätt att skaffa sig sådan information är att man använder diagnostiska test. Tyvärr finns det en spridd uppfattning att diagnoser är något man använder för att fastställa förmodad dyskalkyli, MBD eller liknande. Många lärare vill av detta skäl inte ge diagnoser till ”normala” elever. Det finns också en uppfattning att det är fel att lyfta fram elevers problem. Man vill som Stiger och Hiebert (1999) uttrycker det att undervisningen skall vara ”error free”. Alla lärarna i min studie använde sig av diagnostiska test. Problemet var att de inte utnyttjade testen som ett underlag för att individualisera. Jag såg heller inte ett enda exempel på att diagnosresultaten användes för att korrigera för förkunskapsbrister eller inlärningsproblem. Kanske berodde det på att de tillängliga diagnoserna inte var uppbyggda på ett sätt som möjliggjorde detta.

Vad jag kunde iaktta var att lärarna vid kommunikation med sina elever oftast saknade kännedom om deras förkunskaper. De ägnade heller ingen tid åt att ta reda på vad eleverna egentligen hade för problem innan de började handleda dem. Även detta innebar att lärare och elev pratade förbi varandra och att eleven inte fick någon hjälp med sitt problem. Ofta avslutades handledningen när man efter en stund kommit fram till den fråga eleven först ställde och då lämnade läraren eleven.

Ett annat problem som gör matematikundervisningen ineffektiv är den uppfattning många elever verkar ha om matematikundervisning. Hoyles (1988) beskriver detta som att eleverna vill att lärare skall göra förklaringarna enkla och helst på en algoritmisk nivå tala om hur de skall lösa den aktuella uppgiften. Någon djupare förklaring ville inte ens de duktigaste eleverna i min studie ha. Detta förhållningssätt hos eleverna och som lärarna verkar acceptera, leder till en omfattande lotsning av eleverna fram till ett svar utan förklaring av viktiga samband. Detta förklarar också en attityd som förekommer bland de duktigare eleverna, nämligen att det är viktigare att räkna många uppgifter än att reflektera över lösningsmetoderna. Elevernas framsteg blir av det skälet mer styrda av bokens facit än av en god handledning från läraren (Skolverket, 2003b).

Jag känner också igen lärarnas agerande i vad Carlgren och Marton (2002) skriver om lärares förhållningssätt till undervisningens innehåll. De viktigaste frågorna blir *hur* man skall undervisa, ofta med tonvikt på arbetssätt och arbetsform. Istället menar Carlgren och Marton bör lärarna ställa sig frågor som: Vad innebär, vad är viktigast, vad är nödvändigt och vad får inte tas för givet. Detta verkade lärarna i min studie inte ha gjort. I själva verket hade egentligen ingen av dem ett klart mål för sin lektion. Marton och Booth (2000) beskriver vidare vikten av att lärandet går ”från en odifferentierad och mindre sammanhängande förståelse av helheten, till en ökad differentiering och integration av helheten och dess beståndsdelar" (s. 10). Inte heller detta kunde jag se några spår av detta i min studie. När man behandlade områden som mätning eller arbete med decimaltal, så gick det till på ungefär samma sätt och med samma metoder oberoende av skolår. Ett exempel på vad detta kan leda till beskrivs av Löwing och Kilborn (2002). De redovisar hur resultaten på ett test om räkning med decimaltal gav i stort sett samma nedslående resultat när det gavs i skolår 6 som i skolår 8.

När NCM (2001) beskriver situationen i dagens svenska skola menar man att lärarna inte har fått det stöd de behöver för att ”utveckla en intresseväckande och stimulerande undervisning”. Detta stämmer väl med mina erfarenhet och med vad Ball och Bass (2000) beskriver. NCM förklarar också lärarnas problem med att de har fått ”förlita sig på traditionella arbetssätt och arbetsformer”. På den punkten kan jag inte hålla med. Tvärtom visade det sig att de lärare jag studerade på olika sätt följde pedagogikens senaste trender: Arbete i egen takt, arbete i grupp, skriftlig huvudräkning, elever konstruerar egna problem etc. Problemet var snarare att lärarna inte var medvetna om hur de skulle hantera dessa nya arbetssätt och arbetsformer och hur de skulle knyta samman dessa nyheter med sina tidigare erfarenheter. Stigler och Hiebert (1999) beskriver ungefär samma sak från amerikansk horisont och menar att de lärare som förändrar sitt sätt att undervisa utgående från nya reformer och rekommendationer, ofta gör det på en ytnivå.

Ett av de viktigaste instrumenten för ett framgångsrikt lärande är språket. Pimm (1987) skiljer här mellan att tala för andra och att tala för sig själv. I båda fallen krävs det av eleverna att de har ett funktionellt språk. Frågan är i vilken utsträckning de tillägnar sig en sådan språklig kompetens i skolan. Lärarna spelar här en viktig roll. De flesta av de lärare jag studerade använde själv en oklar terminologi vilket ofta ledde till problem och missförstånd. Jag kunde också iaktta att eleverna använde en liknande terminologi, vilket kanske inte är så konstigt med tanke på att det är läraren som sätter normen för elevernas språk. Utgående från att elevernas matematikspråk i allmänhet är mycket torftigt kan man fråga sig hur dessa elever förmår läsa och förstå all den text som krävs av dem vid en hastighetsindividualistering styrd av ett läromedel. Pimm sammanfattar detta med att en viktig del av matematikinlärningen handlar om att eleverna måste lära sig prata som en ”matematiker”.

En annan fråga är vad elever får ut av en gruppdiskussion om de saknar ett adekvat språk för vad de diskuterar. Pimm skiljer här mellan ett beskrivande och ett förklarande språk. Det visar sig vid de genomgångar som görs av två av lärarna att båda har problem med det beskrivande språket. Eleverna förstod inte deras instruktioner och i stort sett alla behövde därför kompletterande instruktioner för att komma vidare i texten. Vid en analys av innehållet i de individuella handledningar som förekom under lektionerna blev det tydligt att de flesta av lärarna inte heller hade ett förklarande språk som nådde fram till eleverna.

Pimm framhåller också vikten av att observera att vardagens termer och begrepp kan skilja sig väsentligt från matematikens termer och begrepp. När eleverna arbetar med vardagsproblem i matematikundervisningen så gäller det inte bara att lösa ett antal problem för stunden. Målet måste vara att man från denna erfarenhet skall kunna bygga upp matematiska modeller, med vars hjälp eleverna kan generalisera sina lokala kunskaper så att de kan användas till att omfatta nya dittills olösta problem. Detta kräver en förädling och förändring av språket från ett vardagsspråk till ett mer matematiskt förankrat språk. Detsamma gäller vid konkretisering eller när man drar slutsatser från en laboration. Endast en av lärarna i min studie hjälpte eleverna att på detta sätt förädla sitt språk och sina matematiska modeller. I själva verket hade de flesta av lärarna ”abdikerat” (Madsén, 2002) och låtit ett läromedel styra en hastighetsindividualiserad verksamhet.

Pimm (1987) varnar också för en oreflekterad problemlösning, till exempel en sådan där eleverna konstruerar uppgifter på egen hand. I stället för att leda till nya erfarenheter och nya idéer, leder arbetet ofta till rutinartade och triviala upprepningar av det eleverna redan kan. Jag kunde konstatera att den lärare i min studie som tillämpade denna metodik, själv hade stora problem med att förstå och reda ut de uppgifter eleverna konstruerade.

På en nivå har lärare ändrat sin inställning till matematik. Ernest (1988) menar att lärare idag har gått från en uppfattning om matematik som en mängd regler som skall följas till att matematik inte är en färdig produkt utan att det är något dynamiskt och som konstrueras och utvecklas. På en nivå kan jag hålla med, men för de flesta av de lärare jag observerat, är detta snarare retorik än realitet. Det förekom endast i ringa omfattning verksamhet av karaktären skapa och upptäcka matematik under de lektioner jag observerade, utan snarare gällde det att se till att eleverna lotsades fram till rätt formel eller svar.

11.3 Arbetssätt och arbetsformer

När Ma (1999) skriver att ”Elementary mathematics is not superficial at all” menar hon att även om räkneoperationerna är triviala för en vuxen, så är det inte så lätt för läraren att ta barnets perspektiv och förklara matematiska samband för ett barn. Detta kräver att man är väl bevandrad i en matematikdidaktisk teori och har ett språk för att använda den. Detta visade sig vara ett problem för de flesta lärarna, inte minst när det gällde den kommunikation som förekom om decimaltal, bråk och procent där lärare och elever många gånger talde förbi varandra. Samtidigt gjordes få försök från lärarnas sida att förklara ett problem genom att konkretisera i någon form.

För att förklara ett matematiskt begrepp eller sammanhang är det vanligt att konkretisera, till exempel genom att låta eleverna laborera. När Szendrei (1996) analyserar vad konkretisering innebär menar hon att lärarna bjuder eleverna på en resa från konkret till abstrakt. Detta förutsätter emellertid att det finns en klar relation mellan användandet av artefakter och det aktuella matematiska begreppet eller den definition man med dess hjälp vill konkretisera (Löwing & Kilborn, 2002). Det räcker då inte att ha tillgång till transportmedlet. Man måste också vara medveten om resans mål. De laborationer som utfördes under de studerade lektionerna levde emellertid sitt eget liv utan någon synliggjord relation till det matematiska begrepp eller sammanhang som den avsåg att konkretisera. Lärarna saknade dessutom ett språk för att knyta samman den konkreta och den abstrakta representationsformen. De två laborationer jag observerade handlade snarare om aktivitet än inlärning. Eleverna hölls sysselsatta under lektionen, snarare än att de lärde sig nya begrepp. Jag delar Szenderis uppfattning när hon skriver att lärarens planering av konkretiseringen är helt avgörande för dess resultat.

Det var inte bara planering och uppläggning av laborationerna som fungerade mindre bra. I själva verket hade alla lärarna problem med logistiken i undervisningen. De ramar som valts, såsom grupparbete, konstruktion av egna problem, hastighetsindividualisering, gemensam genomgång med mera, levde ofta ett eget liv isolerat från varandra och med mycket lite koppling till det aktuella innehållet eller till elevernas individuella förmåga och behov av hjälp.

Ett sätt att aktivera eleverna är att låta dem arbeta i grupp. De flesta lärarna i min studie hade placerat eleverna i mindre grupper för att de skulle kunna arbeta tillsammans. Tanken var att eleverna då skulle tala matematik och genom att hjälpa varandra avlasta läraren i hennes individuella handledning. När denna rörliga ram för undervisningen kombinerades med en annan rörlig ram, nämligen hastighetsindividualisering, uppstod emellertid konflikter. Eftersom eleverna ofta var på olika ställen i boken hade de inte så mycket gemensam matematik att tala om. Jag kunde således sällan iaktta några exempel på samarbete om ett ämneinnehåll. Vad jag istället kunde iaktta var att elever som körde fast i texten och inte kunde få hjälp på en stund ledsnade, slutade räkna och började föra privata samtal med sina grannar. Vad som var tänkt som ett stöd blev därför snarare ett hinder för inlärningen.

I ett par fall satt inte bara eleverna i grupper, de utförde också ett grupparbete. I speciellt ett av dessa fallen förde läraren kollektiva samtal med eleverna, det vill säga talade med gruppen som om den vore en enda individ. När läraren på det sättet diskuterat sig fram till ett för gruppen gemensamt svar lämnade hon alltid gruppen utan att kontrollera om alla elever i gruppen förstått. Detta överlämnades åt gruppen som förmodades ta ett ansvar för alla individer. Vid analys av de data som blev synliga efter det att jag klippt om materialet och fogat samman det på en individnivå kunde jag konstatera att så inte var fallet. När eleverna i en grupp, med eller utan lärarens hjälp, diskuterat sig fram till ett gemensamt svar på en uppgift, övergick de direkt till att lösa nästa uppgift. Någon reflektion kring uppgiften eller någon kontroll av att alla elever i gruppen förstått förekom inte. Av elevernas diskussioner framgick det att de prioriterade att arbeta fort och bli färdig före vissa andra grupper.

När Artzt och Newman (1990) utreder förutsättningarna för grupparbete pekar de på vikten av att läraren har ett klart mål för arbetet i grupp och att de dessutom lär eleverna att arbeta i grupp. I annat fall blir arbetet ineffektivt. De framhåller också vikten av att alla medlemmar i gruppen är medvetna om att de tillhör ett team, att de har ett gemensamt mål att stäva mot och att alla har ett ansvar för att övriga medlemmar i gruppen förstår och lär. Mina intervjuer tyder på att någon sådan diskussion eller en sådan inskolning inte förekommit i den ovan beskrivna klassen.

11.4 Hastighetsindividualiseringen

Det problem som jag uppfattade som mest allvarligt var lärarnas oreflekterade användning av hastighetsindividualisering. Den förklaring jag fick till att de valde denna form av individualisering byggde på att de utgick från antagandet att eleverna konstruerar sin kunskap på egen hand. Detta gör eleverna, menade lärarna, i olika takt. Vissa elever behöver lång tid på sig för att lära, andra lär fortare. Mot denna bakgrund, beskrev lärarna under intervjun, är det viktigt att eleverna arbetar på egen hand och att lärarens roll blir att stödja elevernas inlärning vid behov. Det jag kunde iaktta var något annat. Om man uppfattar individualisering som att anpassa undervisningen till olika individers mål, förkunskaper och förmåga, så kom hastighetsindividualiseringen bara att ta hänsyn till elevernas olika arbetshastighet. Att eleverna skulle kunna lära på kvalitativt olika sätt nämnde ingen av lärarna. Vad jag kunde iaktta var också att alla elever fick samma instruktion från ett skrivet material om än i olika takt. Inte under någon av de studerade lektionerna fick en elev någon extra utmaning eller fick diskutera alternativa lösningsmetoder. De löste i princip bara fler uppgifter av liknande slag. Inte heller kunde jag en enda gång observera att en elev som inte förstod fick en annan förklaring än sina kamrater eller andra, mer tillrättalagda uppgifter att arbeta med. Om detta är representativt, och den uppfattningen får man av NCM (2001) och Skolverket (2003b), så kan man förstå en viktig orsak till den kris inom skolmatematiken som dessa rapporter beskriver. Än mer problematisk upplever man denna situation när man tar del av Bentleys (2003) statistiska genomgång av olika individualiseringssätt, som visar att hastighetsindividualisering är det dominerande arbetssättet i svensk matematikundervisning. Den extra tid de långsamma eleverna skulle få på detta sätt gick i själva verket åt till att vänta på lärarens hjälp.

En intressant aspekt av matematiklärandet lyfts fram av Hersh (1986) som menar att ”knowing mathematics is making mathematics”. Detta blir speciellt intressant när det kopplas till hastighetsindividualisering. En förutsättning för att hastighetsindividualisering, såsom den bedrivs i svensk skola i dag, skall fungera är att ett nytt avsnitt inleds med ett eller flera lösta exempel som eleverna sedan kan ”kopiera” när de löser de efterföljande uppgifterna. Detta procedurella arbetssätt saknar oftast den variation som krävs för att leda till en djupare inlärning. De få minuter en genomsnittselev kan få av lärarens tid per lektion räcker heller inte till för djupare matematiska samtal. Att konstruera matematisk kunnande (make mathematics) torde vara svårt vid den typ av hastighetsindividualisering som jag tog del av.

Två av lärarna i min studie var tveksamma till en hastighetsindividualisering som sträckte sig över en längre tid. De menade att man i så fall, helt i onödan, behövde upprepa samma instruktion ett stort antal gånger för elev efter elev. På så sätt förlorar man bara en mängd dyrbar tid. Om man istället gör en genomgång, menade de, så räcker det att ge instruktionen en enda gång, för alla elever samtidigt. Deras form av hastighetsindividualisering sträckte sig således enbart över ett par dagar i sänder. De kunde på det sättet utnyttja fördelarna med att ha klassen samlad kring ett enda tema i sänder. Eleverna kunde inom denna ram arbeta i sin egen takt. I praktiken fungerade inte denna idé såsom lärarna tänkt sig. För det första lyckades ingen av dem ta elevernas perspektiv i den meningen att de förutsåg deras problem. De instruktioner som gavs handlade i första hand om formerna för hur eleverna skulle arbeta. Ingen av dem beskrev målet för vad eleverna skulle göra eller vilka strategier eleverna skulle kunna använda när de arbetade. Det visade sig efter hand att de flesta av eleverna inte hade lyckade uppfatta den instruktionen som gavs, vilket innebar att lärarna trots genomgången måste besöka i stort sett alla eleverna och ge samma instruktion individuellt. Orsaken till detta skulle kunna vara att lärarna saknade adekvata kunskaper i matematikdidaktisk teori eller att de saknade ett adekvat matematikdidaktiskt språk. Återigen var det en konflikt mellan ramar som skapade problem för lärarna.

11.5 Undervisningen sedd ur elevernas perspektiv

När jag efter att ha observerat en lektion intervjuade läraren kunde jag bilda mig en uppfattning om lärarens egen syn på lektionen. Denna kretsade i första hand kring den kommunikation läraren själv varit delaktig i. Jag uppfattar detta så, att lärarna som varit mycket aktiva under lektionen och koncentrerat sig på att diskutera ett matematikinnehåll inte förmådde att samtidigt betrakta sin egen undervisning ur ett metaperspektiv (Lund, 1992). Av det skälet kan det vara intressant att reflektera över hur eleverna kan ha uppfattat samma lektioner.

En uppfattning om hur eleverna kan ha uppfattat lektionerna får man genom att studera de transkriberade lektionerna sedan texten klipps om på elevnivå. Det blev då möjligt att följa respektive elevs deltagande i kommunikationen minut för minut. Man upptäcker då att den kontakt eleverna får med sin lärare är mycket fragmentarisk. Med utgångspunkt från den sporadiska och relativt slumpmässiga kommunikation de flesta elever deltog i, finns det anledning att reflektera över vilka möjligheter dessa elever har att bygga upp ett matematiskt språk och ett matematiskt kunnande. Följande exempel visar på en mer konkret nivå hur några av eleverna kan ha upplevt matematiklektionen.

Elever som varit sjuka under ett par dagar och hade missat en genomgång eller glömt vad de gjorde senast, fick ofta vänta en lång stund innan läraren uppmärksammade problemet. En av dessa elever hade då upprepade gånger sökt kontakt med läraren. När han väl fick hjälp av läraren lotsades han fram till ett korrekt svar på den första uppgiften. Eftersom han inte fick reda på någon lösningsstrategi fick han problem även med den följande uppgiften. Än en gång blir han nu lotsad av läraren till rätt svar. Han ger därefter upp och går under resten av lektionen omkring i klassrummet och pratar med olika kamrater.

I en grupp arbetar fyra elever tillsammans. De skall jämföra decimaltal som finns på två stenciler. De försöker då räkna så fort de kan för att bli färdiga med stencilerna före en av de andra grupperna. Två av eleverna löser uppgifterna snabbt och ringar in respektive skriver ned rätt svar. När läraren kommer dit och kontrollerar hur de arbetar får hon snabbt rätt svar från de två duktigare eleverna. De båda andra är med i diskussionen men svarar i allmänhet fel. På lärarens fråga om de har förstått ger de ett nekande svar. Trots detta går läraren därifrån utan att hjälpa dem eller ta reda på vad de inte förstått. Efter lärarens besök har gruppen kommit efter den konkurrerande gruppen. De två duktiga kamraterna börjar då arbeta på egen hand utan att bry som om de två långsammare kamraterna. Eftersom de långsammare eleverna inte förstått hur de skulle lösa uppgifterna blir de nu sittande utan att göra något. De klagade vid ett tillfälle för läraren som inte tog deras problem på allvar utan menade att de skulle lösa det inom gruppen. Vad skulle de nu göra? De fick ingen hjälp av läraren och inte heller av kamraterna.

Två elever försökte rita en cirkel med radien 5 cm. De är lite pratiga av sig och något högljudda, men de försökte arbeta. Problemet var att det fanns för få passare i klassrummet och den passare de hade fått var trasig. När de försökte rita en cirkel ändrade sig den inställda radien hela tiden. Efter att ha försökt en lång stund bad de läraren om hjälp. Läraren som tydligen uppfattade de här eleverna som lata och ovilliga att arbeta, ville inte hjälp dem. Den som inte arbetar får inte någon hjälp, menade läraren. De båda eleverna försökte en liten stund till att rita cirkeln, men misslyckas. Deras problem var nu att det inte gick att genomföra laborationen om de inte kunde rita cirkeln. De gav därför upp och ägnade resten av lektionen åt att prata och störa sina kamrater. Läraren i sin tur tog ingen notis om dem.

De exempel jag just gett är inte exceptionella. Så här kan en matematik-lektion se ut för många elever. Lärarna hinner inte med att hjälpa alla elever. När elever väl får hjälp av läraren så får hon i allmänhet bara hjälp med svaret på en enstaka uppgift. Ofta förstår elever inte lärarens förklaringar eftersom hon i många fall saknar lämpliga förkunskaper. Den följande uppgiften är ofta något svårare och bygger på den tidigare. Om eleven får hjälp även med den uppgiften är det ofta i form av en ny lotsning. Efter det är det inte lönt att fråga en gång till. Förmodligen känner sig eleven i det läget bara dum. Detta är en bild av skolans verklighet som ligger mycket långt från styrdokumentets ”Eleven i centrum” och att eleverna skall utveckla ”intresse för matematik … estetiska värden … uppleva … tillfredsställelse och glädje” (Skolverket, 2000b). Sådana mål förutsätter helt andra ramar för undervisningen och ett helt annat innehåll än det jag observerat under de studerade lektionerna.

11.6 Den empiriska studien och den teoretiska bakgrunden

Matematikämnets didaktik är ett relativt nytt forskningsområde, speciellt om man väljer att studera det ämnesinnehåll som kommuniceras i klassrummet. Det är också en mycket tidskrävande forskning eftersom man från det transkriberade materialet måste ”återskapa lektionerna” och därefter analysera dem ur en rad olika synvinklar. Till skillnad från den forskning som beskrivs av Clark (2001) där hela team av forskare analyserar olika aspekter av lektionerna har jag arbetat med detta på egen hand. Materialet är mycket rikt (Liberg, 2003) och med andra resurser skulle man kunna få ut betydligt mera av den typ av studie jag gjort.

Ett annat problem med min forskning är att det saknas etablerade designer och instrument att falla tillbaka på (Kelly & Lesh, 2000). Det är också så att en stor del av den matematikdidaktiska kunskapen är praktikbaserad och därmed delvis en tyst kunskap som många delar men som ännu inte är verbaliserad och därmed svår att delge någon annan. Lärarperspektivet är ett exempel på detta. I många år har vi uppmanat de studerande att ta ett lärarperspektiv och tagit dess innehåll för givet, vilket inte varit fallet.

Vad som är en rimlig eller mindre rimlig handling från lärarens sida kan sällan uttryckas i termer av rätt eller fel. Däremot kan man bedöma handlingarnas resultat utgående från elevernas reaktioner och från beprövad erfarenhet av vad som tidigare visat sig vara mer eller mindre funktionellt. För den som inte har en beprövad erfarenhet inom området kan det emellertid vara svårt att uppfatta vad som på djupet händer under lektionerna och att sätta det i relation till tidigare vetande inom området. Jag har därför sett det som min skyldighet att inte bara beskriva vad som observerats utan även vid behov sätta det i relation till andra alternativ. Detta uttrycks av (Bishop, 1992; Niss, 2001) i termer av ”What is” och ”What might be”. Det här innebär inte att jag klassificerar lärares handlingar i termer av rätt eller fel utgående från en personlig norm, utan att jag sätter dem i relation till möjliga alternativ som tar sin utgångspunkt i samlad erfarenhet från forskning och beprövad metod.

Ett viktigt skäl för mig att bedriva matematikdidaktisk forskning är att ta fram instrument med vars hjälp man kan utveckla en på forskning och beprövad erfarenhet grundad matematiklärarutbildning. Sådana instrument bör även kunna användas till att utvärdera utbildningen. Eftersom jag parallellt med mitt avhandlingsarbete arbetat på heltid som lärarutbildare och därvid reflekterat över mina forskningsresultat i relation till mitt yrkesarbete så har dessa två roller ofta interagerat. Detta är naturligt med tanke på forskningens praxisnära karaktär, speciellt med tanke på att ett nytt forskningsområde är på väg att utvecklas ur ett tidigare tvärvetenskapligt tillstånd (Utbult, 1993).

Det arbete lärare utför i klassrummet är sannolikt rationellt ur lärarens egen synvinkel (Holme & Solvang, 1986). Vid mina analyser försöker jag därför ta lärarens perspektiv samtidigt som jag måste ta hänsyn till målgruppen för deras arbete nämligen eleverna. En del av lärarnas agerande under lektionerna kan bedömas i termer av rätt eller fel. Det går att avgöra om lärares beskrivningar av innebörden av π eller definitionen av en kvadrat är rätt eller fel. I andra fall kan man utgående från elevernas reaktioner avgöra om en förklaring från lärarens sida kunnat uppfattas av eleven eller ej. Om så inte är fallet tar jag mig friheten att klassificera denna förklaring som mindre lyckad ur elevens synvinkel. Denna klassificering är då inte grundad på eget tyckande utan på en noggrann analys av data. Den här typen är ställningstaganden är enligt min uppfattning viktiga i en praxisnära forskning.

11.7 Implikationer för lärarutbildning och fortbildning

Av denna studie har jag lärt mig mycket som är viktigt vid utbildning och fortbildning av lärare. Först och främst måste läraren ha klara mål med sin undervisning. Flera av de lärare jag observerade saknade konkreta mål för det innehåll de undervisade om. Detta gällde såväl för den aktuella lektionen som på längre sikt. Sannolikt var detta en konsekvens av sättet att använda läromedlet och en bidragande orsak till att många elever saknade nödvändiga förkunskaper. För att göra en god planering och för att kunna individualisera undervisningen krävs kunskaper i matematikdidaktisk teori. Med hjälp av en sådan teori kan lärarna finna olika vägar att strukturera undervisningen och anpassa den till olika elevers förkunskaper och förmåga. Utgående från denna typ av teori blir det även möjligt för lärare att uppfatta de matematiska strukturer som ligger bakom ett begrepp eller en formel. Detta gör det i sin tur möjligt att konkretisera begrepp och formler samt att bygga upp laborationer som hjälper eleverna att upptäcka och tillägna sig den avsedda matematiken. En stor del av det manipulerande som i dag sker är, menar jag, följden av bristande kunskaper i av matematikdidaktisk teori.

I dagens lärarutbildning möter de studerande, inte minst på VFU (VerksamhetsFörlagd Utbildning), en rad pedagogiska idéer och olika arbetssätt och arbetsformer. Rätt tillämpade fungerar sannolikt dessa var för sig. Vad jag däremot kunde iaktta i min studie var att dessa goda idéer inte alltid fungerar tillsammans. Det kan istället bli en konflikt mellan de olika ramarna vilket i sin tur försvårar kommunikationen av ett ämnesinnehåll. Detta är något som bör uppmärksammas inom lärarutbildningen, inte minst när det gäller att samordna de teoretiska och praktiska delarna av utbildningen.

Under de observerade lektionerna visade sig lärarna ha stora problem med att nå eleverna med sina förklaringar. De flesta av dem saknade att språk med vars hjälp de kunde presentera ett innehåll utgående från elevernas individuella behov och förmåga att lära. Detta måste uppmärksammas vid lärarutbildningen. Det gäller då inte bara att användandet av ett korrekt och för eleverna uppfattbart språk. Det gäller i lika hög grad att kunna ta elevernas perspektiv och strukturera sina förklaringar på ett för eleverna logiskt sätt, att kunna gå från det konkreta till det abstrakta. Men inte heller detta räcker. Lärare måste också ta ett större ansvar för elevernas språkutveckling. Detta var något som försummades under de observerade lektionerna där eleverna i huvudsak fick arbeta på egen hand utgående från skriftlig information och sällan hade möjligheter att lyssna till eller själv använda ett matematiskt språk. Detta är något som borde ägnas betydligt större uppmärksamhet inom lärarutbildningen.

11.8 Utmaningar för fortsatt forskning

Det är lätt att finna brister i undervisningen men något svårare att finna bättre lösningar. Om man följer upp vad som har hänt i matematikundervisningen under de senaste 40 åren så ser man vissa mönster (Se till exempel Skolverket, 2003c). Man kan till exempel konstatera att det inte saknats idéer om hur undervisningen skall förändras och förbättrats. Vad som saknats är däremot en uppföljning av dessa idéer på fältet och en utprövning och utvärdering av dess funktion i undervisningen. En väl planerad aktionsforskning skulle inte bara ge funktionsprövade modeller för undervisningen utan även ge underlag för en mer professionell lärarutbildning.

Ett uppslag till en sådan aktionsforskning utgår från Ball och Bass (2000). De menar att det inte räcker med att utbilda lärare i teori och förutsätta att lärarna på egen hand förmår omsätt detta i sin undervisning. Detta är vad som händer vid lärarutbildningen där ämnesteori och VFU inte knyts samman på ett ändamålsenligt sätt. Ma (1999) och Stigler (2003) ger utgående från erfarenheter från kinesisk och japansk skola exempel på lärare som har ett annorlunda förhållningssätt till matematikundervisning. En avgörande aspekt i detta är dessa lärares syn på matematikinnehållet i relation till eleverna. Att direkt överföra en sådan kultur till Sverige är emellertid inte helt okomplicerat. Att via aktionsforskning utveckla en till svensk kultur anpassad version av detta skulle däremot kunna ge en ny injektion till svensk matematikundervisning.

För att kunna förändra den typ av undervisning jag beskrivit i denna avhandling krävs det ett nytänkande inom lärarutbildningen. Detta måste bygga på ett målinriktat forsknings- och utvecklingsarbete. Samtidigt är det viktigt att arbeta vidare på att bygga upp en matematikdidaktisk teori av den typ som beskrivits av Löwing (2002). Denna teori måste i sin tur kopplas till fungerande arbetssätt och arbetsformer. Detta kräver en kontinuerlig fätutprövning. Om en sådan fältutprövning sker i lärarutbildningens regi skulle man samtidigt kunna engagera de lärarstuderande i processen och på så sätt få den förankrad i aktuellt forskning- och utvecklingsarbete.

Inom lärarutbildningen finns en kultur som innebär att man inte skall påverka de lärarstuderande genom att ge exempel på hur man skulle kunna göra. För några år sedan gjordes en undersökning på uppdrag av Skolverket (1994) som kartlade hur de lärare undervisade, vars elever blev duktiga på att läsa och skriva. En sådan utvärdering borde göras även i matematik. Det finns lärare som lyckas bättre än andra. Genom att studera dessa lärare, och reflektera över vad som gör att de lyckas, skulle vi i en framtid kunna ge de lärarstuderande sådana exempel på bra undervisning som de idag saknar.

SUMMARY IN ENGLISH

The concrete formation of teaching mathematics:

A study of communication between teachers and pupils and the educational framework of mathematical classrooms

Introduction and Aim of Thesis

When I, as a mathematics educator from Göteborg university, visit schools and talk to teachers and pupils, I normally find that the majority of the teachers have the ambition to help the pupils learn mathematics and that most pupils have a true desire to learn. This does not correspond very well with the result of their educational practice. As a mathematics educator, it therefore became important for me to try to find out what factors that might cause this unfortunate difference between ambition and result. This, I want to do by observing how the teaching of mathematics is actually carried out in the mathematical classroom.

As organizer in the classroom, the teacher has a very important role to play in the learning process. I have therefore chosen to focus my work on studying and analyzing how teachers, during the mathematics lessons, help the pupils understand the mathematics that is taught. The aim of the thesis is to illustrate important components in the teacher's instruction and show which conditions facilitate or obstruct a meaningful communication with the pupils. It is consequently a question of a praxis-based research, which I hope will contribute to new knowledge in the field of mathematics education.

To study communication in a classroom is a complicated task, since the participants in this complex communication play different roles, at the same time. There are more or less pronounced rules of to who do you speak, when do you speak and how do you speak (Lundgren, 1972; Sahlström, 1999; Anward, 2003). My focus is on how the teacher manages to manifest the mathematical content that is the aim of the subject-related communication. However the teacher is not the only informant in the classroom. In recent years, education has been influenced more and more by the contents of textbooks (National Agency for Education). It is therefore important to study the teachers' communication in relation to the information that is given through different teaching material.

It is well-known that education is influenced by many factors such as the central governing documents, the resources of the school etc. Within this framework the teacher or a team of teachers have a certain liberty to plan and design the education. I have chosen to analyze the subject-related content in relation to these conditions, which I call the teaching frames of education.

In order to be able to understand the teaching process in a Swedish school, it is vital to know certain facts. In 1962, an important school reform was introduced in Sweden. One of the fundamental ideas was to create a democratic school, ”a school for everyone”. Among many other things, this phrasing means that the pupils stay together in the same class, independent of aptitude for studies or sphere of interest, up to grade 9. The individualization that is needed to handle different study situations is expected to take place within the framework of the class. This has not always worked out particularly well and methods of individualization as well as the result of the instruction have often been debated.

Matematikdidaktik, Mathematics education and Classroom Research

Mathematics education means a domain of knowledge about how to teach, learn and study mathematics on all levels. It also concerns the historical background, the cultural development, and the social reasons for the mathematics education arranged or organized by any community or country throughout the world.

Matematikdidaktik in the Swedish sense of the word has internationally a number of different notations. Primarily should be mentioned *mathematical education* (UK), *mathematics education* (USA), *Didaktik der Mathematik* (Germany), and *didactique de mathématique* (France). The expressions are significant to identify literature and correctly to comprehend the place of residence of a certain researcher. As noted by Kilpatrick (1995), there is a difference between, for instance, the German *Didaktik der Mathematik* and the American *mathematics education.* Where the German expression refers to the academic field, the Americans, in order to avoid the unpleasant word *didactic,* use *mathematics education* to refer to both the activity and the field. I will use the concept of “didactics of mathematics” as well as “mathematics education” in my text, thereby addressing the same field.

In this chapter, I will further summarize, in broad outline, the on-going classroom research in the area of mathematics education with a special focus on my own research area. Many researchers, among others Bieler, Scholz, Strässer and Winkelmann (1994) and Sierpinska and Kilpatrick

(1998) show how complicated this research is. The existing research is also very varied. It can be a question of pure basic research as well as testing didactical hypotheses for evaluation, or creating specific material or methods. Niss (2001), however, writes that:

> For a fair number of mathematical didactic researchers the focus is mainly on ”pure” perspectives of basic research. We can however claim that the overall aim of the whole activity basically is to enhance and ameliorate the pupils' and students' mathematical learning and help them acquire mathematical competence. (p. 25)

From this multitude of research, I have chosen a praxis orientated research approach, namely to study the teachers’ instruction in the classroom. When I restrict my attention and focus on the mathematical content in education, I find relatively few reports of interest to my research. Bromme (1994) means that there are few empirical studies, which deal with the ”didactical” content in mathematics education.

When Bishop (1992) describes the international development within the research field of mathematics education, he brings up a few critical points. It is not just a question of assessing the situation as it actually is, it is also important to reflect upon how it might be: ”The relationship between: ’what is’ and ’what might be’”. Niss (2001) shares this view, and underlines that what makes the research around the role of the teacher complicated, is that the didactic of mathematics is of a dual nature, including problems of a descriptive/explanatory nature as well as problems of a normative nature where the generative questions are ”What should be the case? ” and ”Why? ”. He compares this dualism in the mathematics education discourse with the discourse, which exists within medical research. I share this opinion. It is not sufficient to establish what takes place but it is also necessary to analyze the other alternatives that exist.

Bodin and Capponi (1996) pay attention to a different problem, namely the necessity to be cautious when drawing conclusions. They warn of the tendency to draw too far-reaching conclusions from certain studies on mathematics teaching since it is heavily influenced by culture.

> However so far such studies have concentrated on how things work at local (often ”micro”) level. Extrapolations from these observations and conclusions can only be made within the framework of a given system, bearing in mind the initial context, the underlying curriculum, etc. (p. 567)

Bodin and Capponi write that a number of research results are only valid locally and that the results must be interpreted in relation to the context and the frames that existed.

Mathematics education is a relatively recent area of research. Research within the area was previously conducted by pedagogues and psychologists who often used the subject of mathematics as cases studies. One might say that they studied the teaching of mathematics from an outside perspective and not like the mathematics education researcher from the inside, from the perspective of the subject matter (Ball, 2000). Kelly and Lesh (2000) claim, however, that the mathematics education research has now matured, left traditional experimental methods behind and have started to develop its own research methods. Due to the fact that classroom research is complex and multifaceted, it is not possible to describe it in detail using old, traditional methods. It is consequently not easy to find already existing research methods, which are directly applicable to my own research. Kelly and Lesh develop this idea in the following way: ”Accordingly, the readers will not find in these chapters a silver bullet research methodology.” (p.38) They instead encourage researchers to develop their own research design, suitable for the research question.

Ball and Bass (2000) object to the common, but according to them, erroneous view, that a person who masters on the one hand mathematics and on the other pedagogy, should automatically be a good teacher of mathematics. To become a good teacher demands considerable more knowledge and proficiency but not everyone understands this complexity:

> We assume that the integration required to teach is simple and happens in course of the experience. In fact, however, it does not happen easily, and often not happens at all. (p. 86)

My survey of the research on the teaching profession shows that it mainly deals with the teachers' views on the subject matter, knowledge, teaching methods and also pupils. On the contrary, a relatively small part of the research deals with the actual events in the classroom, that is to say how a teacher makes use of the acquired knowledge when he/she teaches the mathematical content. One explanation to this is, according to Shuell (1996), the complex environment in the classroom.

> Classrooms are not the neat, orderly place we sometimes imagine them to be. The typical classroom is an active place in which many things happen. (p. 728)

Clark (2001) has devoted much attention to interdisciplinary research methods where the education is studied from several aspects simultaneously. At present, there is an ongoing important international project in which comparative classroom studies in accordance with Clark’s methodology are conducted: *The Learners’ Perspective Study*. In this project, researchers from nine different countries, including Sweden, study sequences of lessons. Clark aims in his research, through an interdisciplinary approach and with access to available detailed data, to see new aspects and to give a more comprehensive illustration of what is going on in different classrooms.

Jaworski and Potari (1998) conduct a type of classroom research in mathematics education in accordance with a more traditional English model. One of the goals of their research is to develop a research method based on what they call ”The Teaching Triad”.

> The *Teaching Triad* emerged from an ethnographic study *of investigative mathematics teaching* by one of the authors (Jaworski 1991). It describes or characterizes the *teaching* in the classroom, attempting to provide a framework to capture the essential elements of the complexity involved. It encompasses three domains: the management of learning (ML): sensitivity to students (SS) and mathematical challenge (MC). (p. **3**-88)

The authors try to manifest the most important factors in the complexity of the teaching. At one level, the teachers' ability to balance the challenges that the pupils are facing with their needs and abilities is revealed. At another level, the teacher's observations on different episodes in the teaching are compared with the researchers' interpretations of the events.

Relatively little research has been carried out in Sweden on how the teaching of mathematics in a compulsory classroom is carried out. Some significant research of the teaching process of mathematics took place during the 1970s (Lundgren, 1972, 1977; Kilborn 1979a, 1979b). In particular, Kilborn's studies within the PUMP-project are of interest and clearly show how the instruction often went above the pupils' heads. Kilborn found two reasons for this, one was that the teacher was not aware of the pupils' pre-knowledge; the other was that the teacher often piloted the pupils past all problems instead of analyzing them. Kilborn also looked at the frames of the teaching when interpreting and explaining the results. The main difference between my research and Kilborn's study is that I concentrate more on the role of the teacher in the classroom situation and consequently on the different qualities of the teacher's explanations.

Theoretical Frames

There is no coherent theory that explains the complexity of the mathematical classroom. I use mainly two complementary theories, the frame factor theory and theory for teaching.

Dahllöf (1967, 1971) created the frame factor theory around four factors: the goals of the education, the frames of the education, the teaching process and the result of the education. When evaluating the instruction in a classroom, the interaction between these factors is studied. When Lundgren

(1972) continued his work, based on Dahllöf's frame factor theory, he was primarily interested in the administrative frames. He uses them in his research for two ends: to establish the dependence of the teaching process upon the frames and the relationship between the teaching process and the learning process.

The instruments used by Lundgren are however not sufficient if one is interested in, and wants to study, the subject content in education. Lundgren's methods were complemented by Kilborn's (1979a) classroom observations. Kilborn observed the communication between the teacher and the pupils by using a cordless microphone. At the same time an independent observer noted down who spoke and which events took place in the classroom. In order to be able to follow up the level of the mathematical content in the education, special instruments of analysis were created, the so-called matrixes for the four fundamental rules of arithmetic. With the help of these, it was possible to establish the pupils' pre-knowledge as well as to analyze the degree of difficulty of the problems that the pupils had to work with during the lessons. The most important frame factors in this case turned out to be the tasks given in the textbooks, the pre-knowledge of the pupils and the teacher's didactical competence.

During the 1980s and in the beginning of the 1990s the frame factor theory seemed to be forgotten. Something of a renaissance for the frame factor theory perspective however occurred a few years ago, when the theory was discussed in the Swedish journal ”Pedagogical research” (1999): ”*På återbesök i ramfaktorteorin*” [Frame Factor Theory Revisited]. In one of the articles ”*Ramfaktorteori och praktiskt förnuft*” [Frame Factor Theory and Practical Reason] *by* Lindblad, Linde and Naeslund, a variant of the frame factor theory is advocated for, in which the participants, that are the teacher and the pupils, are closely observed.

> Our contribution should be seen as an attempt to problemize the fact that the school is a governed and regulated institution, which rests on frames and rules, as well as on participants. Our basis for this is that the relationship between the frame factors and the participants' common sense is important to forward pedagogy as social science. (p. 95)

In the middle of the 1980s there was an in-depth discussion about school subject theory. Parts of this discussion were summarized in a series of books called ”*Fackdidaktik*” [Subject Didactics], consisting of three different books by Ference Marton (Marton, 1986). A similar discussion takes place in the book ”*Kommunicera naturvetenskap i skolan*” [To communicate science in school] in which for example Strömdahl (2002) writes:

> The problem of communication is among other things linked to the fact that the language and character of science is of a kind that seldom coincide with the everyday way of thinking and reasoning. The problem is particularly obvious in the teaching of the school and the learning of the science subjects. (p. 8)

What Strömdahl writes on science is, in my opinion, equally true for the subject mathematics.

Within the teacher training today, we work with two mathematical theories. One, the theory of academic discipline, has been well established for hundreds of years and belongs to a faculty of mathematics and science. It is developed for and by academics as "an abstract general science for problem solving and development of methods" (Swedish National Encyclopaedia, 1994). Within this epistemological subject theory, there are however no models as to how the knowledge is related to an individual and a situation, for example how children and young people, based on different prerequisites, can build up a mathematical knowledge that is useful in everyday life and when studying other subjects. For this purpose, a totally different theory is needed, for instance the one that in Löwing (2002) is called a mathematics education theory. This latter theory comes from educational science and its aim is to explain and systematize our knowledge about the possibilities and abilities of children, young people and ordinary persons to acquire mathematical knowledge and to develop mathematical concepts that they can understand.

The Frames of Teaching

The work in the Swedish compulsory school system is regulated by the Swedish government by means of acts, ordinances and regulations as well as directions and general advice. Acts, ordinances and regulations are compulsory, while directions and general advice can be considered as recommendations. In the Education Act you will find the overall goals of the activity but there are no specifications for different subjects. Among the ordinances, those regulating the activities of the school are slightly more detailed, but the teaching and learning of any individual subject is not covered here in any great detail.

The syllabus for mathematics (National Agency for Education, 2000b) describes the aim of the subject and its role in education.

> The compulsory school has the task of providing pupils with the knowledge in mathematics needed for them to be able to make well-founded decisions when making different choices in everyday life, in order to be able to interpret and use the increasing flow of information and to be able to follow and participate in decision-making processes in society. The subject should provide a sound basis for studying other subjects, for further education and for lifelong learning. (p. 23)

The description of the content that follows is written in very general terms and the main idea is that the teachers themselves have the responsibility to specify the goals in a local plan.

The mathematics teacher's professional knowledge comprises several components such as knowledge about and attitudes to teaching and learning in general as well as teaching and learning of mathematics. In this part I will give an overall view on the mathematics teacher's need for pedagogical knowledge.

In the report on which Lpo 94 (the national curriculum for compulsory education) was based, knowledge is described from three different aspects: the constructive, the contextual and the functional aspect.

In order to be able to interpret the national curriculum, it is important to clarify the meaning of the term mathematics. The following description is, for example, given in Swedish National Encyclopaedia (1994).

> **Mathematics**…, an abstract and general science for problem solving and method development. The following comments can be made on this definition. Mathematics is abstract: it has liberated itself from the concrete origin of the problem, which is a prerequisite to make it general, i.e. applicable to a series of situations, but also in order to establish the logical validity of the reasoning.

This definition might cause a problem for teachers in the compulsory school. Within the mathematics education in the compulsory school, concretization plays an important role.

It is therefore not reasonable to *liberate oneself* from the concrete origin but instead *fall back on* and reinsure one's thinking in concrete models. In fact, the concretization turns out to be a method, for many pupils, to understand a mathematical content on a local level and from there go on to generalize and finally abstract the content to a generally valid mathematical model. Marton and Booth (1997) write that:

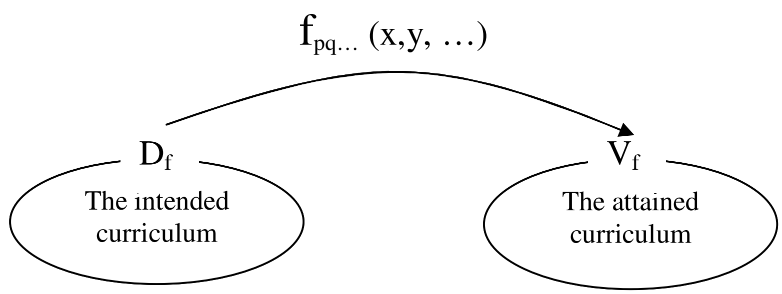
> The initial undifferentiated and unintegrated wholes that learner grasps when embarking on learning something are likely to appear confused and erroneous when judged against the criteria of received wisdom. But on closer examination – and such closer examinations will be going on throughout this book – these wholes, the learner´s initial ideas, turn out to be partial rather than wrong. These are the seeds from which valid knowledge can grow. (p. viii)

With the aim to individualize, it is today common that teachers allow the teaching material to rule the work of the pupils. The main role of the teachers is then to assist their pupils when problems occur. Madsén (2002) has drawn attention to this problem and writes ”many teachers have more or less abdicated and mainly administer the independent work of the pupils in the classroom” (p. 54).

The problem with the teacher's passive role in the classroom is nothing that is specific for the Swedish schools. From the horizon of the United States, Stigler and Hiebert (1999) describe a similar phenomena based on a large number of lessons that were documented on video and thereafter analyzed.

> We saw the following sequence of events over and over. Teachers assign students' seatwork problems and circulate around the room, tutoring and monitoring students' progress. Several students ask in quick succession, about the same problem. (p. 92)

In order to be able to manage and get an overview of which role different frames play in school mathematics, I think of learning as a "function." This function is described by constants, parameters and variables and maps the intended curriculum (the domain of definition) on the attained curriculum (the range).



Depending on how the teaching is done, the imprint the *learning function* leaves in the pupils' knowledge can be very different. An important aim of teacher training and of research on mathematics education is to optimize the *learning function*. The object is to make the pupils' knowledge and attitudes to the subject of mathematics (the domain of values of the function) correspond to the goals and aims described in the curriculum and in the syllabus. The object is consequently to get the intended curriculum, the implemented curriculum and the attained curriculum as similar as possible. This does not mean that the pupils' knowledge should be an exact copy of the expected knowledge. Certainly, large parts of the pupils' mathematical knowledge are already defined and not negotiable. At the same time it can be described and made concrete in different ways and lead to a knowledge that is adapted to the individual. I will try to analyze, with the help of the *learning function*, how this is done and how it could be done (Bishop, 1992).

I consequently consider the learning process to be a function built up by constants, parameters and variables. This learning function reproduces the aspired knowledge of the education (the rule of the function) in the pupils (the output of the function).

- The *domain of definition* consequently consists of the aims and goals set out in education, which is the knowledge and attitudes that the teacher shall help to ”reproduce” in the knowledge of the pupils.
- The *constants* are the frames of education. I primarily describe them as the organization of the school, timetables and resources, but also the teacher’s professional knowledge and the pupils’ pre-knowledge. These frames are variable in a long-term perspective, but are to be considered as constant at the time when the lesson in question is being carefully planned.
- Apart from the fixed frames, which the teacher cannot influence, there are a number of circumstances or frames, which the teacher can influence when planning a lesson. These frames constitute the *parameters* of the function. Examples of parameters are working method, working form, certain teaching material, choice of metaphors, etcetera. These parameters can be changed from lesson to lesson but are generally constant once the lesson has started.
- Using the above mentioned constants and parameters as a starting point, the teacher has a certain liberty to work out a plan for his communication with the pupils. It is the teacher’s choice of methods, i.e. explanations and use of metaphors and teaching material that constitute the variables in the *learning function*.
- The result of the lesson is the result the learning function leaves in each pupil’s mathematical knowledge and attitude to the subject. This constitutes the *range* of the function.

The Mathematics Teacher and the Subject

It is obvious that the pupils do not learn mathematics by themselves. ”The teacher has a key role by ultimately deciding the content and the planning of the mathematics education in the school” (Skolverket, 2003b, p.8). It is therefore important that the teacher’s knowledge of the subject matter is relevant with regard to the content of mathematics education. Why, then, do the results of the school education not correspond with the goals of the school? Can it be the case that teachers lack adequate knowledge to teach mathematics? In the Degree Ordinance for Universities (Högskoleförordningen, 1993) it is required that the student shall possess “good and relevant knowledge of the subject or groups of subjects in order that all pupils learn and develop”. An important question that follows is what the meaning of relevant knowledge is. This is a problem that Ma (1999) repeatedly refers to. For example she writes:

> The more I saw of elementary mathematics teaching and research in the United States the more intrigued I became. Even expert teachers, experienced teachers who were mathematically confident, and teachers who actively participated in current mathematics teaching reform did not seem to have a thorough knowledge of the mathematics taught in elementary school. (p. xix)

She finds the solution to the problem in Shulman's (1986, 1987) *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). An important question is what *school mathematics* means, and the content of such knowledge. The mathematics taught in school gives the impression to be so simple that anybody can master it. According to Ma this is not the case.

> Elementary mathematics is not superficial at all; any one who teaches it has to study it hard in order to understand it in a comprehensive way. (p. 146)

Ball and Bass (2000) state that the teacher needs to know much more than just the academic theory of the subject that is taught. The teacher must also master theories for how this knowledge is established and developed by children.

> The overarching problem across these many examples is that the prevalent conceptualization and organization of teachers' learning tend to splinter practice and leave to individual teachers the challenge of integrating subject matter knowledge and pedagogy in the contexts of their work. We assume that the integration required to teach is simple and happens in course of the experience. In fact, however, this does not happen easily, and often not happens at all. (p. 86)

Ball and Bass define this in the following manner

> Pedagogical content knowledge is a special form of knowledge that bundles mathematical knowledge with knowledge of learners, learning and pedagogy. These bundles offer a crucial recourse for teaching mathematics, for they can help the teacher anticipate what students have trouble learning, and have ready alternative models or explanations to mediate those difficulties. (p. 88)

During the past few years, two anthologies have been published that discuss mathematics education and the competence of teachers. The books were commissioned by national bodies and edited by Kilpatrick, Swafford and Findell (2001) and Niss and Højgaard-Jensen (2002). In both these books, similar issues are brought up and an attempt is made to describe the pupils expected mathematical knowledge as well as the competence needed by the teacher to help the pupils achieve this knowledge.

It is consequently not sufficient for the teacher to have a good grasp of a subject matter content to make the education work. The teacher is the master of a group of individuals (see for example Madsen, 2002) who all have different prerequisites to study mathematics. Some pupils are interested and have good pre-knowledge; others have a low degree of motivation and a lesser degree of pre-knowledge. They all also have different experiences behind them and different language abilities. It is the responsibility of the teacher to meet the need of *all* these children, which makes great demands on the teacher's professional knowledge. The teacher must look at the mathematical content from a teacher's perspective. This means that:

- The teacher must be able to look at things from another person's perspective. It is not enough that a teacher has understood something. He must always reflect upon whether the problem can be understood in a different way and what pre-knowledge and experiences that are needed to understand all the different aspects and levels of the content.
- The teacher must also use a language that is working not only to explain something or to solve a problem in a formal way. The language must also work to explain the problem in a concrete manner and be true to real life. Different formal and informal terms and expressions that are used must be interconnected in such a way that what is made concrete can also, if needed, lead to formal knowledge.
- The teacher must furthermore, irrespective of the level of the education, have a good knowledge of the content and the goals as well as the didactics of mathematics at other levels. There is a danger that teachers at different levels do not master each other's education content, goals and didactics of mathematics with the result that the teaching becomes ”disjointed” for the pupils, sometimes even incomprehensible. The pupils simply do not get the continuity that is needed for them to construct and structure their knowledge.

This knowledge of education does however not work when mathematics is taught without the combination of a theory on the teaching of mathematics (Ball & Bass, 2000). When a pupil asks a question, the teacher must first of all decide what the question means, what is the pupil's problem and thereafter instantaneously make important decisions based on the pupil's specific question. In order to be able to give different explanations to the asked question, the teacher must consequently know in advance the different possibilities that exist, based on this particular pupil's prerequisites. This means that the teacher must know how different pupils usually think and which different ways exist to answer the asked question in a comprehensible manner. A problem, which for a teacher seems simple and obvious, can for certain pupils, be difficult as well as incomprehensible. Mathematics education must provide theories that form the basis for adequate handling of the different teaching situations that may arise.

The Language used in Mathematics Education

The language that is used in mathematics education is described in different ways in the literature. On a comprehensive level, a common pattern is the so-called ”triad” (Zevenbergen, 2000):

> One of the most documented patterns of interaction in the classroom is that of ”triadic dialogue” (Lemke, 1990). … Triadic dialogue consists of three key parts: the teacher initiates a question to which the students usually know the answer; a student responds; and the teacher then evaluates the student’s response (Mehan, 1982; Sinclair & Coulthard, 1975). (p. 212)

This is a pattern we know from Lundgren (1972, 1979), who describes the triad as one of the most common elements of teaching. According to his research 22,3% of all gambit triads were of the type question-answer-reaction. (In Lundgren’s work, Pimm's gambits are called pedagogical cycles which in turn are divided into moves.) In Lundgren’s research even cycles with two moves are common. The cycle question-answer constitutes 15,5 % and the cycle question-reaction accounts for 6,7 % of the number of cycles. A communication that is built in this manner hardly allows for any deep discussion about the content that is being dealt with.

Pimm (1987) writes that the linguistic form used in the education can draw the attention away from the content that is being studied.

> The teacher may be too concerned with the form of what is being said, at the expense of the meaning which the pupil is trying to convey. (p. 32)

It is also important to note that the language used in the classroom has two main aims, to regulate the activity and to teach. Two different types of language are used for these different types of communication and the rules are also different (Szetatai, 1998; Löwing, 2000).

A *regulating* language is used for social control in the classroom. Included in this category are orders, checks for non-attendance, dividing into groups for group projects etc.

A *teaching* language is among other things used to demonstrate, explain and exemplify mathematical concepts and methods.

The regulating language is not always verbal. A large part of the social control is based on praxis and body language, known to all.

Regarding the mathematical language and the unequivocalness, Zepp (1989) writes:

> Finally, mathematics language is very precise about assigning words to special classes of concepts. For example, a circle is a special case of an ellipse. But if you show a circle to a child and ask whether it is an ellipse, the child is likely to say: "No it is not an ellipse: it is a circle". (p. 47)

On one level the pupil's answer is good. Why give a circle the less precise name ellipse when there is a more exact name, circle? At the same time, relations such as knowing that a concept is a special cases of a general class of objects become more and more important the further mathematics is studied.

Another problem with the language of mathematics is that it is so exact and precise. The extra information that many pupils would need to avoid misunderstandings has been rationalized. One example:

The law of priority often leads to problems for the pupils in the compulsory school; since a problem such as $3 + 4 \cdot 5$ can be misunderstood. The pupils see it as $12 \cdot 5$ and not as $3 + 20$. To avoid this problem it should at a learning stage be written as $3 + (4 \cdot 5)$.

In order to increase the precision in the description of the language of mathematics the concept *register* is often used. Pimm (1987) describes it in the following manner:

> *Register* is a technical linguistic term which Halliday (1975a, p 65) describes as a 'set of meanings that is appropriate to a particular function of language, together with the words and structure which express these meanings'. Hence, unlike a dialect, individuals may adopt a particular register on certain occasions and not on others. (p. 75)

It is consequently a question of words and expressions that are used by a specific group for a specific purpose.

In the mathematics *register* you find, according to Pimm, different terms, those that are specifically mathematical and those that have been borrowed from everyday language and that at the same time have been given a different, often more precise, meaning.

> In mathematics, the register's most striking characteristic is the number of terms it contains which have been 'borrowed' from more everyday English. Examples of such words include: *face, degree, relation, power, radical, complete, integrate, legs, product, moment, mean, real, imaginary, rational and natural.* (p. 78)… More problematic in many ways, partly because the alteration in meaning is less apparent, are differences regarding the meaning and use of words such as *some, all* or *any*. … (p. 79)

When Zevenbergen (2000) discusses the term *mathematics register* she talks about *a specialized vocabulary*. With this she means words that in a mathematical context have a totally different meaning compared to everyday language, words such as *ruler, prime, odd, mean rational, root* and *mass*. She also gives examples of words that can be misinterpreted and mixed up, such as the word *pairs*, *sum/some, whole/hole, off/of* and *tens/tenths.* The use of prepositions, she states, can also be confusing.

What I want to show is the complexity of the language that is used during a mathematics lesson. It is however not the language per se that I am interested in but the content which the teacher communicates.

Research Strategy and Design of the Study

The overall aim of my work is to study how teachers, during mathematics lessons, communicate with their pupils in order to support them in the learning process and also to establish the conditions that should exist in the learning environment in relation to this communication.

It is, in particular, the communication of the mathematical content and the teachers' opportunities to support the pupils in their learning that is the focus of my interest together with the language that is used to communicate this content. It is important to establish the relation between the discursive language in the classroom and the precise language of mathematics to be able to understand the formation and conditions of the communication.

In carrying out this work, it is central to study the conditions laid down for the communication. Based on given prerequisites, the teacher chooses the content and models of education in order to organize the didactical activity/instruction. These choices in turn set the frames for how the communication with individual pupils and groups of pupils can turn out.

My methodology was that I used a tape recorder to collect data. All communication the teacher participated in during the lessons was recorded. At the same time, two observers, independent of each other, noted down who were involved in the respective communication as well as what took place during the lesson. The tapes were then transcribed and the observers' annotations were added to the text from the tapes.

In order to be able to understand what took place in the classroom, my interpretation of the teacher's communication must be related to the educational frames. On a general level, my starting point is a modern version of the frame factor theory. This gives me the possibility to analyze the significance of different frames for the educational enterprize. The modern frame factor theory pays considerable attention to the participants in the classroom. Most of the attention in my research is focused on one particular participant, namely the teacher. To be able to interpret and understand the teacher's actions, I use a hermeneutic research method. It is consequently via the teacher that I study the factors that, in my view, are of importance to the teaching of mathematics.

To sum it up, I have chosen to conduct a qualitative study intermingled with some quantifying elements. The study can be considered as naturalistic, according to Patton (1990). Since the teacher has a definite mission, laid down in the guidelines of the school, my analyses are partly normative. They can also be considered normative for the reason that it, in most cases, is possible to decide whether a mathematical concept is correctly described and if a problem is adequately solved or not. At the same time, the teacher is at great liberty to choose working methods and working manners. The aims of the qualitative part of my research it to understand the teacher's choice of working forms and working manner in relation to centrally decided frames, and also, how the teacher against this background communicates a mathematical content. Some of the events during a mathematical lesson can also be quantified. An example of this is how the teacher shares his time between different pupils or between the communication relating to regulation or teaching.

To be able to understand the teacher's actions in the classroom, it is necessary to have a good knowledge of the environment in which the teaching takes place. In this case, I rely on my long experience as a mathematics teacher and teacher trainer. For obvious reasons, I cannot always be objective. In order to describe, in a good hermeneutic spirit, from which perspective I have interpreted events, I have earlier given an account of my own background and my view on the teacher perspective in relation to the qualifications that a mathematics teacher should have. My interpretations are consequently based on scientific theories as well as long personal experience.

The teachers that were observed were interviewed before the class and asked about their plans for the lesson. They were also interviewed after the class in order to establish what they considered had actually occurred during the lesson. I am also interested in what problems the different pupils solved during the lessons. As Kilborn (1979a) points out, the pupil's communication with a textbook is in most cases more frequent than the communication with the teacher.

The teachers that I studied were chosen after a discussion with the headmaster of the schools. They were told a couple of days ahead that they could expect a visit and that I wanted to follow a normal mathematics lesson. After the initial interview the teacher was provided with a small tape recorder that can be carried in a normal pocket. A sensitive microphone, which could be fastened on the teacher's shirt or sweater, was connected to the tape recorder. When the lessons started, the tape recorder was turned on. This means that all the communication, in which the teacher was involved during the lesson, was recorded.

To be able to check which pupils the teacher communicated with at different times during the lesson, each pupil was given a two-digit code related to his or her seat in the classroom. In the beginning of the lesson each pupil received a card with this code. On this card, the pupils immediately wrote down their name, or what the teacher called them, as well as the number of the first problem the pupil worked on during the lesson. At the end of the lesson, before the pupils left the classroom, they were asked to write down the number of the last problem they worked on during the lesson. These data were important, in order to establish, after the transcription of the tapes, which participants in the class took part in different dialogues and which problem the teacher had discussed with the pupil in question.

Apart from me, another observer with extensive experience of classroom observations participated during each lesson. The two of us, independently of each other, noted down what happened during the lesson, for example what was written on the blackboard by the teacher and the specific code of the pupils that participated in the communication. Every second minute, the observer made a note of the time. The notes were later co-coordinated with the tapes. To be certain of which exercises the teacher and the pupils talked about, we checked, when necessary, this information in the pupil's exercise book, but obviously only if this was possible without disturbing the lesson. As soon as possible after the lesson, a transcription of the tape was made. This was done in two stages. In stage one, we noted down only the dialogue, the time when a cycle, that is a continuous communication, started and if it was the teacher or the pupil who spoke. In stage two, the transcribed dialogue was compared with the observers' notes relating to which the participants were and what happened "outside" the dialogue itself.

In the paper by Lindblad, Linde and Naeslund (1999), in which they describe an application of the frame factor theory, the participants and the interpretation of their activities play an important role. This situation is not always easy to handle, something that Liberg (2003) describes in the following manner:

> Practice base materials are often very rich, in the sense that new issues can continuously be brought up and they can be approached from different angles. A

> careful analysis of the issues in the light of these perspectives has furthermore made possible the creation of relevant analytical tools. (p. 37)

Tobin (2000) who has worked with interpretive research in science education expresses a similar view in the following way:

> The "re" in research is important in that researches not only seek to know but also are sceptical about what is learned; therefore, they look again in a search for evidence to counter the assertion of a study. (p. 488)

In order to be able to read and interpret my empirical data in this way, the transcribed text was read several times, each time from a new perspective. For example, the material could be approached from a different angle by cutting the transcribed text into pieces and putting them together again from different pupils' points of view. This gave me a completely new perspective of the teachers' work.

Results from a macro perspective

In this and the following sections, the results of my study will be presented. I have divided up the presentation into two sections. In the first section, I intend to show how the teachers organized their communication with the pupils on an overall level. I call this a *macro perspective*. In the next section I will show the content of the communication. I call this a *micro perspective*.

The macro perspective consequently deals with how a teacher on an organizational level makes different choices, for example choice of working methods and working manners, when planning a lesson and teaching a class. In my analysis, I look upon this from a frame factor theory perspective and analyze how the teacher's choices of frames interact and how this influences pupils' possibilities to develop mathematical knowledge.

In my analysis, I am particularly interested in the types of dilemmas that can arise as a consequence of the teachers' choices of working manners and working methods. I will consequently describe situations that are of crucial importance to the pupils' learning.

During the interviews that I had with the teachers before the lessons, I asked about the teachers' aims and goals for the lessons in question. The answers were often vague and of procedural nature. The teachers mainly described which exercises and which pages in the textbook the pupils should work with. When they described the content it was of the type work with percentages, decimal numbers or the area of the circle. It was never mentioned how this was to be done or which were the partial goals.

The most common organization of the classroom used by the teachers in my study was the so-called *individual pace learning*. It means that the teacher thinks the pupils are working at their own pace. The teachers let the pupils' work be ruled by textbooks and teaching aids and chose to act just as tutors when the pupils needed help. A result of this was that in three of the classes, some pupils were about 20 pages ahead of others, which for an average pupil was equivalent to the work of 10 - 12 lessons. With this type of individualization, it is not reasonable for the teacher to give instructions to the class or a large group of pupils working with different chapters in the books. This means that the pupils get their introduction successively to new chapters in written form from the textbooks. When the pupils find the instructions difficult to understand, the teacher must later give a more detailed explanation, often to one pupil at a time. In all the classes where the teacher had chosen individual pace learning, there were so many questions asked by the pupils that the teacher did not find time to help everybody. This meant that the pupils had to wait a long time before they got help when they had difficulties with a problem or an exercise, and several pupils did not get help at all during that specific lesson. Another common observation was that pupils who had had to wait a long time to get help started to talk to their friends.

The teachers who used individual pace learning had often determined how far the pupils should have progressed in the book at different dates. It turned out that for many pupils it was not possible to keep to that timeframe. The most common measure was, in those cases, that the teacher asked the pupils to skip a number of exercises and go on to the next chapter. This was mostly done spontaneously and without any individual planning. A dilemma, which can easily arise as a consequence of this, is that the pupils miss some important knowledge, which is needed for the following chapters. This would explain why so many pupils lacked the adequate knowledge and terminology in order to be able to understand the teachers' explanations. A description of this can be that these pupils built an increasing ”debt of pre-knowledge”.

An important prerequisite in order to be able to individualize the teaching is that the teacher is aware of different pupils' pre-knowledge. A diagnostic test can be used to obtain this information. The diagnoses used were those in the textbooks and they were carried out at the end of the chapter. No teacher carried out a diagnosis before the instruction in order to evaluate the pupils' knowledge. The diagnoses either carried out during the lessons, when the pupil in question could confer with his friends, or at home, where the pupil could get help from family members. The obtained information consequently lacked precision. During the lessons that I studied, none of the problems that had appeared in a diagnosis were followed up. To carry out a diagnostic test rather seemed to be a ritual at the end of each chapter, and really not much of a diagnosis.

In two of the classes, the pupils were placed one by one. In the rest of the classes they sat together in small groups. The idea was that the pupils in these groups should cooperate. They should talk about mathematics. Furthermore, the idea was that by helping each other, they would to a lesser degree need any assistance from the teacher. Initially, the groups were formed for social reasons, that is, the pupils were seated with their friends. When this situation was analyzed, it turned out that the pupils that sat beside each other worked with totally different problems and often with different chapters in the book. They had consequently not much common mathematics to discuss and I experienced that mathematics was hardly discussed at all. On the contrary, a fair amount of private conversation took place and, gradually, as one of the pupils in a group ran into problems and had to wait for the teacher's assistance to be able to go on, the sporadic conversations turned into long conversations and no mathematical work took place.

When interviewing the teachers, it transpired that they had all chosen their working methods a long time before the lessons, independent of the content that was going to be treated. This can cause a problem, when using individual pace learning where the pupils often reach a certain exercise with different intervals. When, for example, one pupil faced an exercise involving measuring, two pupils were actually needed to solve the problem. As the pupil had to wait for a peer to help him, this led to long delays, in particular since only one measuring tape was available. When the teacher in another class discovered that she had overlooked the fact that the pupils lacked pre-knowledge necessary for an exercise, she did not want to change her planning. Instead she asked the pupils to do a diagnostic test, which was intended to be used at the end of this chapter.

In three of the classes, the teacher had, what I call, ”collective conversations” with groups of pupils. In this case, the teachers communicated with several individuals at the same time, as if the group consisted of only one individual. In two of these classes, the teachers took it for granted that all the pupils in the groups understood the solution the pupils had reached. In reality, they could only be certain that one of the pupils in the group had understood. At an interview, after a lesson, one of the teachers meant that the pupils in the group ought to follow up the discussion until all the pupils in the group had understood the problem. I did not see that any such discussion took place. On the contrary, it turned out that the pupils soon went on to a new problem, as soon as they had reached a collective answer to the previous one.

Only two of the teachers instructed all the pupils at the same time. Their reasons for this were that they, in this way, could save time and avoid having to repeat the same instruction to one pupil or a group at a time. In both cases, the instructions that these teachers gave turned out to be of a descriptive nature, not of an explanatory nature. They only described what the pupils should do, for example how they should write down the solutions to the problems in their books or which material should be used. None of them described the purpose of the activity or how to think when solving the problems. As it turned out, the pupils in these classes soon ran into difficulties with the mathematical problems they faced. The teachers consequently had to explain the necessary content and meaning of the exercise over and over again to pupil after pupil.

When analyzing which pupils got help from a teacher during the lessons, it turns out that only one of the teachers tutored the pupils in a systematic way. It was another teacher's intention to do so, but her second intention, to answer all the questions that were asked, made this impossible. Her communication with the pupils with the intention to find out where the difficulties lay was constantly interrupted by repeated "personal questions" from other pupils. This teacher was consequently not allowed to finish her communication with several of the pupils.

In most of the classes, there were several pupils who did not get any help at all. This was mainly the case when it came to the fastest pupils, who were anxious to solve as many as possible of the problems. These pupils were in general not interested in getting help from the teacher and in all cases declined to discuss alternative solutions to the exercises with the teacher. In a similar manner, the slowest pupils did not try to enter into contact with the teacher. These pupils were rarely approached, since the teachers were busy answering other pupils' questions. To sum up, it was mainly the pupils that put up their hands, or asked for assistance in other ways, that were helped by the teachers. The teachers were on the whole quite busy trying to assist these pupils.

To summarize, all teachers had high ambitions to individualize the instruction and to have time for all the pupils. The working methods they chose often counteracted their aims. The conclusion I reached, when I interviewed the teachers after the lessons, was that they were so busy assisting the pupils who asked for help that there was no time left for the rest of the class. During my interviews, it also transpired that none of the teachers seemed to have considered that the educational frames could constitute an obstacle for a carefully prepared communication. Strategies like *individual pace learning* were taken for granted and they had not reflected on the consequences for the pupils' possibilities to learn.

Results from a Micro Perspective

On a micro level, I studied the content of the teachers' communication with the pupils. We, who observed the lessons, now discovered a huge discrepancy between the impressions that we formed during the actual lessons and the impressions that we formed when we analyzed the content of the communication. Some of the lessons were, on an organization level, very well carried out and the teacher appeared to be competent. On a micro level we discovered however that the same teacher could have difficulties forming a meaningful communication with their pupils when it came to the subject matter. Not least, was it difficult for them to understand the pupils' problems and to see things from the pupils' perspective. On the other hand, the teacher whose lessons were periodically chaotic turned out to be the teacher who, on a mathematical level, was most skilled at communication and followed up on the pupils' work.

I have, in the theoretical background, described the discussion about pedagogical content knowledge and the teachers' use of mathematical language. The picture that I get from this discussion corresponds well with my experiences on a micro level. Only one of the teachers used a correct language in his communication with the pupils. The same teacher was the only one to demand that also the pupils should use a correct language. It should be observed that the pupils accepted this. The rest of the teachers often expressed themselves in a careless manner, without precision. Instead of asking the pupils to study the properties of geometrical objects, one teacher wanted them to measure ”cans and things”. When one teacher was to inscribe a circle in a square, he described it as “drawing” a circle in a square. The result was that one pupil's interpretation was that the side of the square was longer than the diameter of the circle. Most teachers and pupils were also rather careless when it came to the use of units.

In spite of the fact that several of the teachers had completed three full semesters of mathematics at university, they had severe problems in expressing the mathematical content in the pupils' work. One of the teachers let the pupils carry out an experiment whose aim was to understand that the formula for the area contained in a circle is πr^2. For this aim, the pupils should, by cutting and gluing, compare the area of the circle with a quarter of the surrounding square. Instructions how to do this were found in the textbook and in teaching aids. Through this experiment, it can be shown that the area of the circle can be covered by slightly more than three quarters of the square. However, the illogical conclusion that was drawn, from this experiment, was that the area for an arbitrary circle is π times larger than the small square. Neither the teacher, nor the book explained the significance of π. Most of the pupils had problems carrying out the experiment, in fact only one of the pupils managed to carry out the whole experiment during the lesson.

Other problems of a linguistic/mathematical didactical nature appeared in the classes where the pupils worked with fractions or decimal numbers. As an example, the pupils described the number 3.541 in three different ways:

as three point five four one

as three point five hundred and forty-one

as three whole and five hundred and forty-one hundredths.

The three ways of expressing this number describe different characteristics and qualities of the number. If you are to compare this number with 3.75 it can be less suitable to read the first number as three point five hundred and forty one and the second one as three point seventy-five. Since the number 521 is larger than 75 it leads to confusion. In a similar way, many pupils had problems with division. Pupils in Grade 7 got the answer 4 when simplifying 1/4 and 1.5 when simplifying 21/2. Many pupils furthermore lacked a suitable language for extend a fraction which they called multiplying.

Different types of experimental work were carried out during the lessons in this study. Apart from the experiment regarding the area contained in a circle, some pupils were to measure different distances and perimeters. Another lesson carried out experiments calculating the volumes of geometrical bodies by filling them with puffed rice. In all cases, it could be established that the experiments kept the pupils manually busy but that there was very little correlation between the experiments and the mathematically interesting properties of the bodies or geometrical objects. During this lesson, the pupils clearly showed that they thought the experiment was “childish” and several protested that they did not want to do it. At the same time, the teacher turned out to be sceptical about the experiment and had the pupils carry it out because she felt there was a general school demand to let the pupils conduct experiments.

Some of the teachers showed, in the classroom situation, that they follow the pedagogical discussions and they tried to put into practice what they had learnt through inservice training. At the same time it can be established that they used the material in a superficial way. My interpretation of this is that the teachers lacked the mathematical didactical knowledge that would have made it possible for them to use the ideas in an adequate way. To exemplify this, one teacher had found some teaching material from the Shell Centre in Nottingham. The material consists of a diagnosis that two imaginary pupils had undergone. The pupils in the class are to comment on the solutions of the imaginary pupils. The use of this material for diagnosis is certainly excellent in order to diagnose knowledge after the instruction. However, in this case the pupils had only just started to learn decimal numbers. The pupils lacked strategies to be able to compare the numbers and most of them received no help with this from the teacher.

Another working method which teachers have learnt trough inservice training was to let the pupils create their own problems and thereafter let their friends solve these problems. In both cases where the teacher discussed such problems with the pupils, it turned out that the exercises covered areas that the pupils themselves did not master. The teacher also had difficulties with the invented problems and had difficulties to see through an erroneously created problem or an erroneous solution.

During most lessons, the pupils faced many problems and consequently so many questions were asked that the teacher did not have time to help all pupils. As a consequence, the teachers were often in a hurry when assisting the pupils and did not give themselves time to listen to the reasons for the pupils' problems. None of the teachers tried to establish the pupils' real problems but instead decided very quickly what they considered to be the pupils' problems. Over and over again, this lead to that the teachers and the pupils talked past each other, one of the reasons being that the pupils lacked relevant, acquired pre-knowledge. Often the teacher stopped assisting the pupil when it finally had been established what the pupil's problem really was. A common final answer from pupils was of the type "But that was exactly my problem". To be able to continue and speed up the communication with a pupil in these circumstances, the teachers chose to formulate their questions in such a way that the pupils could not avoid giving the right answer. Kilborn called this piloting (Kilborn, 1979a).

To sum up, the teachers in general had difficulties in communicating the mathematical content in a didactically correct way – suitable for different pupils. The lesson plans concentrated on working methods and working manners and not on the mathematical content, i.e. what the pupils were to learn during the lesson.

Discussion

An important question for me is why Swedish pupils' acquisition of the desired knowledge does not seem to improve, in spite of all the efforts that are made throughout the educational system (NCM, 2001; Skolverket (2003b) and why ideas put forward in different reforms do not seem to reach the pupils (Stigler, 2003). My aim has therefore been to find crucial factors in the teachers' planning of a mathematics lesson and in the way it is carried out in the classroom.

I have described various shortcomings that were noticed in the teaching. From this, the conclusion could be drawn that the teachers in the study do an unsatisfactory job. On the contrary, I would like to state that the teachers that I observed generally did what they thought was expected of them. In reality, they managed quite well from a social point of view but less well when it came to convey the mathematical content. The problem is that the teaching of mathematics is such a very complex activity (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001; Niss & Højgaard Jensen, 2002). It is a question of integrating different types of theoretical and practical knowledge, often in stressful conditions where the discipline has to be maintained, at the same time, many pupils' need help simultaneously. Bass and Bass (2000) mean that this situation is so complicated that many teachers never manage to deal with it.

Another factor that can explain teachers' problems is that the educational discourse is so susceptible to trends. Madsén (2002) means that many problems are caused by the fact that local politicians have been prone to "buy slogans", an example of which is that pupils should seek out knowledge themselves. As a result of this, it has become "bad to teach". The teacher has "abdicated" and plays a subordinate role as tutor to the pupils.

When I interpret and describe different situations in the teaching of mathematics, I do it based on a mathematical didactical perspective of knowledge. I consequently do not look at the situations from the outside but from the inside, what Lampert (1998) calls "the perspective of practice". In this way, I try to describe the culture that, according to Bodin and Capponi (1996), to a large extent is silent and invisible but at the same time decides the norms and the values in the classroom. My re-interpretations of the lessons from the time of observation to my analyses from a macro- and micro perspective are examples of this. During the lessons in question, I regarded the teaching as functional. However, what I mainly observed was the working methods and working manners that the teachers had chosen and the social interaction between the teachers and the pupils. When I later had access to data about the content of the teaching, I got a totally different picture of the same lessons. Most of the teachers turned out to have less satisfactory logistics when it came to assisting the pupils progression in mathematics. Many pupils did not get any help at all and the assistance that was given was relatively inefficient in relation to the pupils' needs and prerequisites.

From my frame factor theory perspective, it is important to analyze the course of the education from goal to result. To be able to do this, it is important to differ between an intended, an implemented and an attained curriculum (Bodin & Capponi, 1996). According to the curriculum (Skolverket, 2000b), the subject aims at developing the pupils' interest in mathematics, as well creating opportunities for communicating in mathematical language and expressions and to discover aesthetic values and experience satisfaction and joy etc. The education should be rich and challenging (Stigler & Hiebert, 1999). This does not correspond very well with what I was able to observe. Not even the best pupils in the classes I studied, were given opportunities to develop an interest in mathematics or a mathematical language.

An important prerequisite to be able to carry out a more profound conversation with a pupil is that the teacher is aware of the pupil's pre-knowledge. Using diagnostic tests can provide this information. All the teachers in my study used diagnostic tests, but the tests were carried out in such a way that a friend or a family member could have helped the pupil solve the problems. The teachers could consequently not be sure of how the respective pupils had performed on their own. Nor did I see a single example of how the results of the diagnostic tests were used to correct the low level of desired knowledge or problems with learning mathematics. The test was consequently used only as a formal ending to a chapter.

One of the most important instruments for successful learning is the language. I could observe that most of the teachers that I studied used an unclear terminology, which often led to problems and misunderstandings. I also observed that the pupils themselves used a similar terminology, which was perhaps not so strange considering that it is the teacher who sets the norm for the pupils' language. Assuming that the pupils' language is normally quite undeveloped, you can ask yourself how the pupils will manage to read all the required text in their textbooks, when using individual pace learning.

When Szendrei (1996) analyses the signification of concretization, she means that the teachers invite the pupils to make a journey from concrete to abstract. A prerequisite for this is however that there is a clearly defined relation between the use of a situation or an artefact and what is to be made concrete (Löwing & Kilborn 2002). During the lessons that I studied, I noted that the experiments or the concretization attempts often lived a life of their own separate from the mathematical concept or the connection that should be made concrete. The teachers furthermore lacked adequate language to make a connection between concrete and abstract. The experiments that I observed were more a question of activity rather than learning.

It was not only the planning and the carrying out of the experiments that worked less well. In reality, all the teachers had problems carrying out their instruction in accordance with their plans. The frames that were chosen, for example group work, the creation of own exercises, individual pace learning, explaining a chapter with the whole class et cetera, often lived a life of their own, isolated from each other and with very little connection with the content or the pupils' needs and abilities.

The teacher meant that when using individual pace learning, it can be an advantage that the pupils sit together in small groups so that they can help each other and this reduces their own workload since the pupils can solve many of the problems themselves. The fact that the pupils had often reached different stages in the book however meant that they did not have a lot of common mathematics to discuss. I did rarely notice any examples of cooperation. What I instead noticed was that pupils, who ran into difficulties and after a while got tired of waiting for help, stopped working and instead started private conversations with the pupils sitting next to them. What was meant to be a support turned out to be more of a hindrance for learning.

In a few cases, the pupils did not only sit together in groups, they also had a group work to do. In one of these cases, in particular, the teacher had collective conversations with the pupils, that is, spoke to the group as if it was one individual. When the teacher, in this manner and after discussion, had reached a collective answer, she left the group without checking that all pupils in the group had understood. Instead, it was left to the group, who was expected to take responsibility for all its individuals. I noted that the groups did not take any such responsibility. When the pupils collectively had found a solution to a problem, with or without the help of the teacher, they went on directly to the next problem. They did not discuss various options or check that all members of the group had understood the problem.

The predicament that I considered to be the most serious was the teachers' indiscriminate use of individual pace learning. The explanation that was given to me was that by this way of working, the pupils construct their own knowledge. The teachers meant that the pupils do this at a different pace. Some pupils need a considerable time to learn, others learn quickly. Against this background, the teachers meant that it is important that the pupils are allowed to work on their own and that the teacher's role is to assist the pupils' learning when it proves necessary. However, what I observed was something different altogether. If you understand individualization to mean that the teaching is adapted to different individuals' goals, previous knowledge and ability, the individual pace learning that took place did not work. It only took into consideration the pupils' different pace when working through the textbook. None of the teachers mentioned that the pupils should be able to learn in different qualitative ways. What I noticed was that all pupils had the same written instructions, although they had reached different stages in the material, and the same type of help from the teachers when this proved necessary.

What I learned from this work, and what is of importance to us who work with mathematics teacher education, can be summarized in the following manner. Two things are necessary in order for the teachers to structure the content of the education and plan their lessons in a satisfactory manner. Their teaching must have a distinct goal, and they must have sufficient mathematical didactic knowledge to be able to adapt the content of the education to different pupils' previous knowledge and ability. It is furthermore important that the teachers can understand the mathematical structures behind concepts or a formula. If this is not the case, concretization and experiments turn out to be manipulative activities without any connection to mathematical models.

To be able to accomplish a good lesson, it is necessary to be able to communicate. The communication consists of a logistical part, where it is question of choosing the frames of the education in an optimal way with regard to the possibilities to communicate. However, there is also a need for a language, and a way, to present a particular content that takes into consideration the pupils' individual abilities to learn. The mathematical lessons must also arouse more enthusiasm and be more challenging than those that I observed. A situation where the pupils sit by themselves and solve a great number of similar problems does not lead to pleasure in their work, nor does it create a curiosity for the subject. Totally different efforts are required from the teachers, for the pupils to be able to understand the richness of the mathematical subject and to be able to use its instruments, language and forms of expression. Pupils are not able to develop this on their own. To be able to do this they need a well-educated and well-trained active teacher.

Referenser

Abraham, J. (1995). *Divide and School: Gender and Class Dynamics in Comprehensive Education*. London: Falmer Press.

Adler, J. (1999). The Dilemma of Transparency: Seeing and seeing Through Talk in the mathematic Classroom. *Journal for research in Mathematics Education,* 30(1), 47-64.

Adler, J. (2001). *Teching Mathematics in Multilingual Classrooms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Alexandersson, M. (1994a). *Lärarnas tidning 1994 (19),* 19.

Alexandersson, M. (1994b). *Metod och medvetande*. (Göteborg Studies In Educational Sciences 96) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Alrø, H., & Skovmose, O. (1996). On the Right Track. *For the Learning of Matematics* 16(1), 2 - 22.

Anward, J. (2003). Språkutveckling i skolan: praktik, teoretisk praxis och praktisk teori. I *Forskning om denna världen - praxisnära forskning inom utbildningsvetenskap*. Stockholm: Vetenskapsrådets rapportserie.

Artigue, M. (2000). Didactic engeneering and the complexity of learning processes in classroom situations. In C. Bergsten, G. Dahland, & B. Grevholm (Red.), *Research and Action in the Mathematics Classroom*. Proceedings of MADIF 2, Göteborg.

Artzt, A., & Newman, C. (1990). *How to Use Cooperative Learning in the Mathematics Clasroom*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Atweh, B. (1993). A Sociolinguistic Perspective in the Study of the Social Context in i Mathematics Education. In B. Atweh, C. Kanes, M. Carrs, & G. Booker (Eds.), *Contexts in Mathematics Education* (pp. 57-63). Brisbane: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Ausubel, D. (1968). *Eduction Psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Bach, F. (2001). *Om ljuset i tillvaron. Ett undervisningsexperiment inom optik*. (Göteborg Studies In Educational Sciences 162) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Ball, D. (2000). Working on the Inside: Using One's Own Practice as a Site for Studying Teaching and Learning. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Sciene Education* (pp. 365-402). Mawa, NJ: Laurence Erlbaum.

Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 83-104). Westport: Ablex Publishing.

Barbosa da Silva, A., & Wahlberg, V. (1994). Vetenskapsteoretisk grund för kvalitet och metod. I B. Starrin, & P-G. Svensson (Red.), *Kvalitativ metod och vetenskapsteori* (s. 41-70). Lund: Studentlitteratur.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction, and Knowledge: Alternativ Perspectices for Mathematics Education. In D. A. Grouws, & D. Cooney (Eds.), *Effective Mathemathics Teaching* (pp. 27-46). Reston VA: Erlbaum.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical Perspectivs on Interaction in the Mathematics Classroom. In Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific discipline* (pp. 133-146). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bauersfeld, H. (1995). Language games in the Mathematics Classroom: Their Function and their Effects. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergency of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L., & Mangan, C. (1989). Children's Performance on Multiplicative Word Problems: Elements of a Descriptive Theory. *Journal for Research in Mathematics Education 20,* 434 - 449.

Bellack, A. (1978). *Competing ideologies in research on teaching*. (Uppsala reports on eduction No 1:1978). Uppsala: Uppsala university, Department of Education.

Bentley, P-O. (2003). *Mathematics Teachers and Their Teaching. A Survey Study*. (Göteborg Studies In Educational Sciences 191) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bernstein, B. (1961). Social structure, language and learning. *Educational Research, 3*, 163-176.

Bernstein, B. (1975). *Class, Codes and Control: theoretical studies towards sociology of language*. New York: Scocken Books.

Biehler, R., Scholz, R. W., Strässer, R., & Winkelmann, B. (Eds.). (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Bishop, A. (1992). International Perspektives on Research in Mathematics Education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning* (pp. 710 – 723). New York: Macmillan Publishing Company.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.). (1996). *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Björkqvist, O. (2003). *Matematikdidaktiken i Sverige: En lägesbeskrivning av forskningen och utvecklingsarbetet*. Stockholm: Kungliga vetenskapsakademien.

Boaler, J. (1997). Setting, social class and survival of the quickest. *British Educational Research Journal*, *23*, 575-95.

Bodin, A., & Capponi, B. (1996). Junior Secondary School Practices. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 565- 614). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Borko, H., & Putnam, R. (1996). Learning to Teach. In D. C. Berliner, & R. C. . Calfee (Eds.), *Handbook of Eductional Psychology* (pp. 673-708). New York: Macmillan.

Broady, D., & Lindblad, S. (1999). På återbesök i ramfaktorteorin: Temaintroduktion. *Pedagogisk forskning i Sverige* 4(1), 1 - 4.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific discipline* (pp. 73-78). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, G. (1982). The spoken language. In R. Carter (Ed.), *Linguistics and the Teacher* London: Routledge & Kegan Paul.

Brune, I. (1953). Language in Mathematics. In H.F. Fehr (Ed.*), The Learning of Mathematics: Its Theory and Practice* Washington DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and Knowledge. In D. C. Berliner, & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of Eductional Psychology* New York: Macmillan.

Callewaert, S., & Nilsson, B-A. (1980). *Skolklassen som ett socialt system: Lektionsanalyser*. Lund: Lunds bok och tidskrift.

Carlesson, L. (1968). *Matematik för vår tid*. Stockholm: Prisma.

Carlgren, I., & Marton, F. (2002). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbundet.

Carpenter, T., Moser, J., & Romberg, T. (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, N J: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T., & Moser, J. (1984). The aquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15(3),* 179-202.

Clark, D. (2001). Complementary Accounts Methodology. In D. Clark (Ed.), *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms* (pp. 13-32). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Clark, D. (2004). *The Learners´ Perspective Study: Research Design*. Retrieved February 8 2004 from University of Melbourne, Australia. http//extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/lbs/assets/lps/pdf.

Crawford, K. P., & Adler, J. (1996). Teachers as Researchers in Mathematics Education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborade (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp 1187-1205) Dordrecht: Kluwer

DN. Debatt. (2003) Studenterna allt sämre i matematik. *DN. Debatt*. Tisdag 18 februari 2003.

DsU 1986:5. *Matematik i skolan. Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Dahllöf, U. (1967). *Skoldifferentiering och undervisningsförlopp*. (Göteborg Studies In Educational Sciences 2) Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Dahllöf, U. (1971). *Ability grouping, content validity and curriculum process analysis*. New York: Columbia University, Teachers College Press.

Darlingt-Hammond, L. (1999). *Teacher quality and student achievement: A review of state policy evidence.* Seattle: Center for the Study of Teaching and Policy, University of Washington.

Dir 1997:54. Lärarutbildningen. Stockholm:Utbildningsdepartementet.

Ellerton, N., & Clarkson, P. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching and Learning. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp 987-1033). Dordrecht: Kluwer

Eliasson, R. (2002, januari 28). För många klarar inte skolans krav. *Dagens Nyheter*, s 2.

Emanuelsson, J. (2001). *En fråga om frågor*. (Göteborg Studies In Educational Sciences 168) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Ernest, P. (1988). *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. Paper prepared for the ICME VI, Budapest Hungary.

Feldman, A., & Minstrell, J. (2000). Action Research as a Research Methodology for the Study of the Teaching and Learning of Science. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 429-455). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A Longitudinal Study of Lerning to Use Children´s Thinking in Mathematics Instruction. *Journal for research in Mathematics Education,* 27:403-434.

Ferguson, P., & Womack, S.T. (1993). The impact of subject matter and education coursework on teaching performance. *Journal of Teacher Education*, *44*(1), 55-63.

Ferrini-Munday, J., & Johnson, L. (1994). Recognizing and recording reform in mathematics: New questions many answers. *Mathematics teacher*, *87*(3), 190 - 193.

Foucault, M. (1993). *Diskursens ordning*. Stockholm: Brutus Öslings Bokförlag.

Fuson, K. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Gelman, R., & Galistel, C. R. (1983), The child's understanding of number. In M. Donaldson, R. Grieve, & C. Pratt (Eds.), *Early childhood development and education*. Oxford: Basil Blackwell.

Good, T., Mulryan, C., & McCaslin, M. (1992). Grouping for Instruction in Mathematics: A Call for Programmatic Research on Small-Group Processes. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 165-196). New York: Macmillan.

Grevholm, B. (1993). *Naturvetenskap och teknik i Sverige*. Stockholm: Verket för högskoleservice.

Grouws, D. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Gustafsson, C., & Lundgren, U.P. (Red.), (1981). *Pedagogisk processanalys: noteringar om metodik.* Stockholm: Högskolan för lärarutbildning i Stockholm, Institutionen för pedagogik.

Gustafsson, J-E., & Myrberg, E. (2002). *Ekonomiska resursers betydelse för pedagogiska resultat*. Stockholm: Skolverket.

HMSO. (1982). Mathematics Counts: report of the Committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of W.H. Cockcroft. London: HMSO.

Heller, J. (1961). *Moment 22*. Stockholm: Wahström & Widstrand.

Hellström, L. (1987). *Olika lika. Försök att hantera differentieringens problem i matematikundervisningen på högstadiet. Slutrapport från GEM-projektet*. Pedagogisk-psykologiska problem nr 477. Malmö: Institutionen för pedagogik.

Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of matematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics,* Boston: Birkhauser.

Hill, M. (1998). *Kompetent för ”det nya arbetslivet”?*. (Göteborg Studies In Educational Sciences 126) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Holme, M., & Solvang, B. (1986). *Forskningsmetodik. Om kvalitativa och kvantitativa metoder*. Lund: Studentlitteratur.

Hoyles, C. (1988). From fragmentation to synthesis: An integrated approch to research on the teaching of matematics. In D.A. Growes, & T.J. Coony (Eds.), *Perspective on research on effective mathematics teaching.* Reston, Virginia:NCTM/Lawrence Erlbaum Associates.

Högskoleförordningen. SFS 1993:100, Bilaga 2, 23

Jarrick, A., & Josephson, O. (1988). *Från tanke till text*. Lund: Studentlitteratur.

Jaworski, B. (2002). The Student-Teacher-Educator-Researcher in the matematics Classroom. In C. Bergsten, G. Dahland, B. Grevholm (Red.), *Research and Action in the Mathematics Classrrom.* Proceedings of MADIF, The 2:nd Swedish Mathematics Education Research Seminar. Linköping: UniTryck.

Jaworski, B., & Potari, D. (1998). Characterising mathematics teaching using the teaching triad. *Procedings of the 22nd Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 3. 88-95.

Johansson, B. (1983). Problem med problemlösning. *Nämnaren* (3), 1982/83.

Johansson, B., & Kilborn, W. (1982). *Räkning*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Johansson, B., & Kilborn, W. (1986). Om matematikämnets innehåll och didaktik. I Marton, F. (,). *Fackdidaktik volym III.* (s. 87-101). Lund: Studentlitteratur

Johnsson, K., Löwing, M., & Runesson, U. (1984). *För din räkning*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

Kanes, C. (1992). Knowing and Meaning in Mathematics. In B. Sothwell, B. Perry, K. Owens (Eds.*), Proceeding of the Fifteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 349-361). Richmond, NSW: Mathematics Education Research Group of Australalsia.

Kanes, C. (1993). Language, Speech and Semiosis: An Approach to Postconstructivistic Theories of Learning Mathematics. In B. Atweh, C. Kanes, M. Carrs & G. Booker (Eds.), *Contexts in Mathematics Education* (pp. 361-368). Brisbane: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Kelly, A., & Lesh, R. (Eds.), (2000). *Research and Design in Mathematics and Science Education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kilborn, W. (1976). *Elevernas arbetsmiljö*. (Forskningsrapport från MAP-gruppen 1976:10). PUMP-projeket nr 12. Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.

Kilborn, W. (1979a). *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter.* (Utbildningsforskning, FoU rapport 37). Stockholm: Skolöverstyrelsen.

Kilborn, W. (1979b). *Ämnesmetodiska processanalyser i matematik inom KomVux*. Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.

Kilborn, W. (1989). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1: Grundläggande aritmetik.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2: Rationella och irrationella tal.* Stockholm: Liber – Hermods.

Kilborn, W., & Lundgren, U.P. (1976). *SÅS medlen. En åtgärdsinvestering*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up*: *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Koeler, M., & Grouws, D. (1992). Mathematics Teaching Practices and Their Effects. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 115-126). New York: Macmillan.

Lakoff, M., & Johnson, M. (1980). *Methaphors we live by*. Chicago: The University Of Chicago Press.

Lampert, M. (1998). The techer's role in reinvening the meaning of mathematical knowing in the classroom. In *Proceedings of the North American Chapter of the Psychology of the Mathematics Education Group* (pp. 433 – 480). De Kalb: Northern Illinois University Press.

Larsson, I. (1973). *Individualized Mahtematics Teaching.* Akademisk avhandling. Lund: CWK Gleerup.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Levitas, M. (1974). *Marxist perspectives in the sociology of education.* London: Routledge & Kegan Paul.

Leung, F. (1995). The mathematics classroom in Beijing, Hong Kong and London. *Educational Studies in Mathematics,* 29(4), 297 - 325.

Liberg, C. (2003). Hur använder vi språket i verkligheten. *Forskning av denna världen*. Stockholm: Vetenskapsrådets rapportserie.

Lindblad, S., Linde, G., & Naeslund, L. (1999). Ramfaktorteori och praktiskt förnuft. *Pedagogisk forskning i Sverige* 4(1), 93 - 109.

Lindblad, S., & Sahlström, F. (1999). Gamla mönster och nya gränser: Om ramfaktorer och klassrumsinteraktion. *Pedagogisk forskning i Sverige* 4(1), 73 - 92.

Linde, G. (1993). *On curriculum transformation: Explaining selection of content for teaching*. Stockholm: HLS Förlag.

Linell, P. (1994). *Transkription av tal och samtal: teori och praktik.* Linköping: Linköpings universitet, Tema kommunkation.

Lund, L-G. (1992). Minnet. I L-G. Lund, H. Montgomery, & Y. Waern. *Kognitiv psykologi* (s. 83-123). Lund: Studentlitteratur.

Lundgren, U.P. (1972). *Frame Factors and the Teaching Process. A contribituion to curriculum theory on teaching*. Stockholm: Almquist & Wiksell.

Lundgren, U.P. (1977). *Model Analysis of Pedagogical Processes.* Lund: Liber/CWK Gleerup.

Lundgren, U.P. (1979). *Att organisera omvärlden. En introduktion till läroplansteori.* Stockholm: Liber Publica.

Lundgren, U.P. (1984). Ramfaktorteorins historia. I D. Broady & U.P. Lundgren (Red.), *Rätten att tala*. Stockholm: Symposium.

Löwing, M. (1982). Vår matematik på Bodaskolan. *Nämnaren 1, 82/83.*

Löwing, M. (2000). *Kartläggning av utländska lärares utbildning och arbetssituation.* (IPD-rapport nr 2000:04) Göteborg: Göteborgs universitet. Institutionen för pedagogik och didaktik.

Löwing, M. (2001). *Kartläggning av invandrade lärares yrkessituation. Delrapport 2: Lektionsstudier och resultat* (IPD-rapport nr 2001:01) Göteborg: Göteborgs Universitet, Institutionen för pedagogik och didaktik.

Löwing, M. (2002). *Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning*. (IPD-rapport nr 2002:11) Göteborg: Göteborgs universitet. Institutionen för pedagogik och didaktik.

Löwing, M., & Fant, C. H. (2003). *Lärarstuderandes uppfattningar av grundläggande geometriska begrepp. En studie i anslutning till kursen LMN 100 vt 02.* Opubliserat manuskript. Göteborgs universitet. Institutionen för pedagogik och didaktik.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning. En inkörsport till matematiken.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M., Lindström, B., Fant, C-H., Häggström, J., Kilborn, W., & Engwall, M. (2003). *LUPP-projektet. Lärares uppfattning av baskunskaper i matematik: Rapport 1: Lärarintervjuer.* Opubliserat manuskript. Göteborgs universitet. Institutionen för pedagogik och didaktik.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahawa NJ: Lawrence Erlbaum.

Madsén, T. (2002). Återupprätta läraren. *Pedagogiska magasinet, 3,* 54-59.

Marklund, S. (1980). *Från reform till reform. Skolsverige 1950-1975. Del 1*. Stockholm: Liber UtbildningsFörlaget.

Marklund, S. (1981). *Från reform till reform. Skolsverige 1950-1975. Del 2*. Stockholm: Liber UtbildningsFörlaget.

Marton, F., Dahlgren, L. O., Svensson, L., & Säljö, R. (1977). *Inlärning och omvärldsuppfattning*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Marton, F. (Red.). (1986). *Fackdidaktik volym III.* Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In N. Bednarez, C. Kierran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra.* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J., & Waywood, A. (1996). The Role of Theory in Mathematics Education and Research. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborade (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 1055-1089). Dordrecht: Kluwer

Mellin-Olsen, S. (1993). *Dialogue as a Tool to Handle Various Forms of Knowledge*. Paper presented at the Political Dimensions of Matehmatics Education Conference, Johannesburg.

Mercer, N. (1995). *The Guided Construction of Knowledge: Talk Among Teachers and Learners*. Clevedon: Multilingual Matters.

Molloy, G. (2003). Traditioner och nya idéer inom svenskämnet. I *Forskning om denna världen - praxisnära forskning inom utbildnings-vetenskap*. Stockholm: Vetenskapsrådets rapportserie.

Murray, Å., & Liljefors, R. (1983). *Matematik i svensk skola. Utbildnings-forskning, FoU-rapport 46.* Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget.

Myndigheten för skolutveckling. (2003). *Baskunnande i Matematik.* Stockholm: Fritzes.

Nationalencyklopedin (1989-1996). Höganäs: Bra Böcker.

Nationalencyklopedin Ordbok (1995-1996). Höganäs: Bra Böcker.

NCM. Nationellt centrum för matematikutbildning. (2001). *Hög tid för matematik.* NCM – rapport 2001:1. Göteborg: NCM.

Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approaches and Empirical Findings. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, vol 2*. Reston VA: National Council of Teachers of Matematics.

Nickson, M. (1992). The Culture of the Matematics Classroom: An Unknown Quantity?. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 101-114). New York: Macmillan.

Nickson, M. (2000). *Teaching and Learning Mathematics*. London: Cassel.

Nilsson, H., & Wigforss, F. (1951). *Aritmetik.* Stockholm: Geber.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific discipline* (pp. 367-378). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status. I B. Grevholm (Red.), *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv* (pp. 21-47). Lund: Studentlitteratur.

Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* Köpenhamn: Uddannelseministeriet.

Nämnaren nr 2 1981/82 s. 10-11. Vad är individualisering? Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

Nämnaren nr 4 1983/84. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

Patton, M. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. Newbury Park: SAGE Publications.

Pedagogisk forskning i Sverige nr 1. (1999). *På återkomst i ramfaktor-teorin.* Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.

Piaget, J. (1951). *The language and thought of the child.* London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of the World*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (1987). *Speaking Matematically. Communication in Mathematics Classroom.* London: Routledge.

Rockström, B. (2000). *Skriftlig huvudräkning: Metodbok.* Stockholm: Bonnier Utbildning.

Rudenstam, K., & Newton, R.R. (1992). *Surviving your dissertation: A Comprahensive Guide to Content and Process.* Newsbury Park: SAGE Publications.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* (Göteborg Studies in Educational Sciences 129) Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Sahlström, F. (1999). *Up the Hill Backwards. On Interactional Constraints and Affordances for Equity-Constitution in the Classrooms of the Swedish Comprehensive School*. (Uppsala Studies of Education, 85). Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis.

Sahlström, F. (2001). Likvärdighetens produktionsvillkor. I S. Lindblad & F. Sahlström. *Interaktion i pedagogiska sammanhang.* Stockholm: Liber AB.

Sawyer, W. W. (1963). Abstract and concrete. In F. E. Land (Ed.), *New approacches to mathematics teaching* (pp. 111-118). London: Macmillan.

Schoultz, J. (2000). *Att samtala om/i naturvetenskap: Kommunikation. kontext och artefakt*. Linköping: Filosofisk fakulteten, Linköpings universitet.

Schulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4 - 14.

Schulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*.* *Harvard Educational Review, 57*(1), 1 - 22.

Setati, M. (1998). *Innovative Language Practices in Multilingual Mathematics Classrooms*. Johannesburg: Joint Education Trust.

Sfard, A., Necher, P., Streifland, L., Cogg, P., & Mason, J. 1998. Learning Mathematics Through Conversions: Is it as good as they say? *For the Learning of Mathematics*, 18, 41 - 45.

Shuell, T. (1996). Teaching and Learning in a Classroom Contex. In C. Berliner, & R. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology*. New York: Macmillan.

Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (Eds.), (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity – An ICMI Study*, Vol 1-2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sjöström, U. (1994). Hermeneutik - att tolka utsagor och handlingar. I B. Starrin, & P-G. Svensson (Red.), *Kvalitativ metod och vetenskapsteori* (s. 73- 90). Lund: Studentlitteratur.

SKOLFS 1994:1. Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, Lpo 94.

SKOLFS 1994:3. Kursplaner för grundskolan.

Skollagen (1985).

Skolverket. (1993a). *Matematik åk 9.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (1993b). *Matematik åk 5.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (1994). *Rum för lärande. En studie av skickliga lärares arbete.* Skolverksrapport nr 71. Stockholm: Liber Distribution.

Skolverket. (1996a). *TIMMS. Svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationells perspektiv*. Rapport nr 114. Stockholm: Liber distribution.

Skolverket. (1996b). *Diagnostiskt material i matematik skolår 2.* Stockholm: Liber distribution.

Skolverket. (1996c). *Diagnostiskt material i matematik skolår 7.* Stockholm: Liber distribution.

Skolverket. (2000a). *Barnomsorg och skola i siffror 2000*. Del 1 Betyg och utbildningsresultat. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2000b). *Grundskolan. Kursplaner och betygskriterier 2000*. Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2000c). *Analysschema i matematik för åren före skolår 6.* Stockholm: Liber Distribution.

Skolverket. (2001). *Barnomsorg och skola i siffror 2001*. Del 1 Betyg och utbildningsresultat. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2002). *Barnomsorg och skola i siffror 2002*. Del 1 Betyg och utbildningsresultat. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2003a). *Barnomsorg och skola i siffror 2003*. Del 1 Betyg och utbildningsresultat. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2003b). *Lusten att lära - med fokus på matematik*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2003c). *Studiehanledning till filmen ”Tala om Kunskap”*. Stockholm: PRIM-gruppen.

Skolöverstyrelsen. (1969). *Läroplan för grundskolan. Supplement. Matematik.* Stockholm: Svenska Utbildningsförlaget Liber AB.

Skolöverstyrelsen. (1978). *Förslag till förändring av grundskolans läroplan.* Stockholm: Liber UtbildningsFörlaget.

Skolöverstyrelsen. (1982). *Kommentarmaterial till läroplanen. Att räkna – en grundläggande färdighet.* Stockholm: Liber Utbildningsförlaget

Skolöverstyrelsen. (1983). *SÖ:s diagnostiska uppgifter i matematik*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

Skolöverstyrelsen. (1989). *Kompletteringsfortbildningen – ett servicematerial*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Skoogh, L., Ahlström, R., Björlin, J-O., & Torbjörnson, L. (1996): *Möte med matte*. *För grundskolans senare årskurser.* Stockholm: Liber.

Skoogh, L., Nilsson, B., Johansson, H. (1995). *Räkneresan X2001.* Stockholm: Almqvist&Wiksell.

SOU 1992:94. *Skola för bildning.* Betänkande av Läroplanskommittén. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Steffe, L.P. (1984). The Teaching Experiment Methodology in a Constructivist Research Program. In M. Zweng (Ed.), *Proceeding of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 469-471), Boston: Birkenhauser.

Steffe, L., & Cobb, P. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Stratgies*. New York: Springer-Verlag.

Stevenson, H., & Stigler, J. (1992). *The Learning Gap*. New York: Touchstone.

Stigler, J. (2003). http://lessonlab.com/research/TIMSSHighlights.pdf

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: The Free Press.

Strömdahl, H. (2002). Kommunicera naturvetenskap i skolan - en introduktion. I H. Strömdahl (Red.), *Kommunicera naturvetenskap i skolan* (s. 7-17). Lund: Studentlitteratur.

Svensson, A. (1995). *Att välja eller välja bort naturvetenskap och teknik. En årskull från grundskolan – förutsättningar och utbildningsval.* Stockholm: Skolverket och Verket för Högskoleservice. Nothäfte Nr. 3.

Svensson, N-E. (1962). *Ability grouping and scholastic achievment: report on a fiveyear follow-up study in Stockholm.* (Stockholm studies in educational psychology) Stockholm: Stockholms universitet.

Swan, M. (1983, Shell Center for Mathematical Education Publishing Limited). *The meaning and Use of Decimals: Calculator based diagnostic test and teacing materials (pilot version).* Avialable from http://www.mathshell.com/scp/decimal62.htm

Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborade (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 411-434). Dordrecht: Kluwer

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Bokförlaget Prisma.

Tegnér, E. (1820). *Epilog vid magisterpromotionen i Lund den 22 junii. Af promotorn. Tryckt uti Berlingska boktryckeriet.* Lund: (Berling)

Thom, R. (1973). Modern mathematics; does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Thompson, A. (1992). Teachers´ belifs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Thompson, J. (1986). Historiens roll i matematikundervisningen eller retorikens återkomst. I F. Marton (Red.), *Fackdidaktik volym III* (s. 9-42). Lund: Studentlitteratur.

Tobin, K. (2000). Interpreted Research in Science Education. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Sciene Education* (pp. 487-515). Mawa, NJ: Laurence Erlbaum.

Tomlinson, S. (1987). Curriculum option choices in multi-ethnic schools. In B. Tryona (Ed.), *Racial Inequality in Education* (pp. 92-108). London: Tavistock..

Toulmin, S. (1972). *Human understanding*. Oxford: Clarendon.

Undvall, L., Olofsson, K-G. & Forsberg, S. (1995). *Matematikboken X. För grundskolans senare del.* Stockholm: Liber Utbildning.

Undvall, L., Olofsson, K-G., Forsberg, S., Wallin, F., Bjarneskans, I., & Johansson, E. (1996). *Alma: Almqvist&Wiksells matematik C, Grundbok.* Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Utbult, M. (1993). *Forskning på tvären*. MDA-rapport 1992:15. Uppsala: Ord & Form AB.

Vergnauld, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thougt Involved in Addition and Subtraction Problems. In T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Voigt, J. (1985). Patterns and Routines in Classroom Interaction. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 6,* 69 - 118.

Voigt, J. (1994). Negotiation in Mathematical Meaning and Learning Matematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275 - 298.

Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical norms. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematics Meaning. Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

von Wright, G. (1983). *Practical reason*. Oxford: Blackwell.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society*. Cambridge: Harvard University.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. Cambridge: MIT Press.

Watson, A. (1998). What makes a mathematical performance noteworthy in informal teacher assessment? *Proceedings in the 22nd Conference of the International Group for the Psycholgy of Mathematics Education. 4,* 169-76.

Wellros, S. (1998). *Språk, kultur och social identitet*. Lund: Student-littertur.

Wertch, J. (1991). Sociocultural Setting and the Zone of Proximal Development: The Problem if Text-Based Realities. In L. Landsmann (Ed.), *Culture, Schooling and Psychological Development.* New Jersey: Alex Publishing.

Wyndhamn, J. (1988). *Tankeform och problemmiljö: skolan som kontext för tänkande i elementär matematik.* (Licentiat avhandling) Linköping: Linköpins universitet, Institutionen för pedagogik och psykologi.

Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited. On school mathematics as a situated practice*. (Linköping Studies in Arts and Science, No 98.). Linköping: Linköping universitet.

Wyndhamn, J. (1994*). Matematiska samtal i klassrummet - tvärkulturella studier*. (Arbetsrapport, nr 1994:7) Linköping: Linköpings universitet, Tema kommunikation.

Wyndhamn, J., Riesbeck, E., & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Linköping: Linköpings universitet. Institutionen för tillämpad lärarkunskap.

Zepp, R. (1989). *Language and Mathematics Education*. Hong Kong: API Press.

Zevenbergen, R. (2000). "Cracking the Code" of Mathematics Class-room: School Success As a Function of Linguistic, Social and Cultural Background. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 201-223). Westport CT: Ablex Publishing.

Öreberg, C. (1964). *Individualiserad matematikundervisning: Rapport från pågående försök.* Pedagogisk-psykologiska problem Nr 8. Malmö: Pedagogisk-psykologiska institutionen. Lärarhögskolan i Malmö.