Subjektiva sannolikheter

Helge Malmgren

Filosofidagarna, Umeå 2007

Relativa sannolikheter

$0 \leq P(A) \leq 1$

$P(U) = 1$

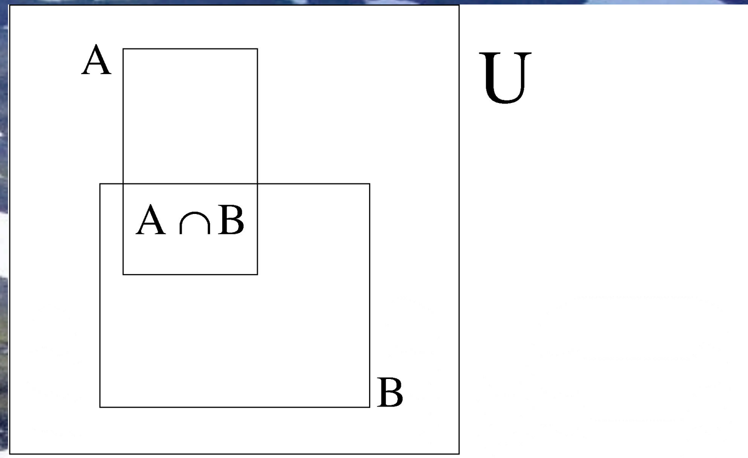
$A \cap B = \varnothing \quad \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Relativ sannolikhet : $\quad P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Bayes sats : $\quad P(A \mid B) = P(B \mid A)\dfrac{P(A)}{P(B)}$

Blandningssatsen: $P(A) = P(A \mid B_1)\cdot P(B_1) + {}$
$\qquad + P(A \mid B_2)\cdot P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n)\cdot P(B_n)$

Sannolikhetsteorins axiom är sanna om *andelar* (proportioner), t.ex. andelar av en total yta



$P(A) = a(A)/a(U) = 15/100 = 0{,}15$

$P(B) = a(B)/a(U) = 30/100 = 0{,}3$

$P(A \cap B) = a(A \cap B)/a(U) = 6/100 = 0{,}06$

$P(A \cap B)/P(A) = 0{,}06/0{,}15 = 0{,}4$

$= a(A \cap B)/a(A) = P(B, A)$

$P(A \cap B)/P(B) = 0{,}06/0{,}30 = 0{,}2$

$= a(A \cap B)/a(B) = P(A, B)$

Bayes’ sats vid hypotesprövning

- Låt H vara en hypotes och e någon observerad händelse (evidensen)
- Bayes sats ger: $P(H, e) = P(e, H) \cdot P(H)/P(e)$
- Vems P, och när? – Epistemiska sannolikheter är mått på en persons grad av kunskap vid en viss tidpunkt. De är alltså personliga och tidsbundna, även om de inte är “subjektiva” i någon annan mening.
- De olika P i formeln ovan refererar *antingen* alla till sannolikheterna innan e har observerats – $P_{före}(H)$, etc, *eller* till sannolikheterna efter, $P_{efter}(H)$ etc.
- I båda fallen saknar formeln direkt kunskapsteoretisk relevans (exempelvis är $P_{efter}(e, H) = P_{efter}(e) = 1$, och $P_{efter}(H)$är trivialt $= P_{efter}(H, e)$
- Idén om konfirmation utifrån Bayes’ sats utgår från att man kan identifiera $P_{efter}(H)$ med $P_{före}(H,e)$, dvs vi har:
- *Konditionalisering:* $P_{efter}(H) = P_{före}(H, e) = P_{före}(e, H) \cdot P_{före}(H)/P_{före}(e)$
- Konditionaliseringsregeln ska *inte* problematiseras här. Men observera att regeln inte kan vara obetingat giltig. Den får t.ex. inte användas om annan relevant information tillkommit samtidigt med e.

En enkel tillämpning

- En falskspelare har tre mynt, som ger utfallet krona med sannolikhet 1/3, 1/2 resp. 5/6. Nu tar han ett mynt slumpvis och kastar det.
- Blandningssatsen ger:

$$P(\text{krona}) = 1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 5/6 = 5/9$$

- Kalla utfallet krona för e, och hypotesen att han tog mynt 1 för H_1
- Apriorisannolikheten för $H_1 = 1/3$
- Bayes sats:

$$P_{\text{före}}(H_1, e) = P_{\text{före}}(e, H_1) \cdot P_{\text{före}}(H_1) / P_{\text{före}}(e)$$

ger med konditionalisering aposteriorisannolikheten för H:

$$P_{\text{efter}}(H_1) = P_{\text{före}}(e, H_1) \cdot P_{\text{före}}(H_1) / P_{\text{före}}(e) =$$

$$= 1/3 \cdot (1/3)/(5/9) = 9/45 = 0,2$$

Det gäller alltså:

$$P_{\text{efter}}(H_1) < P_{\text{före}}(H_1)$$

dvs. H_1 har *diskonfirmerats*

Russell-Jeffrey-konditionalisering

- Ibland ger en observation inte säker kunskap om något alternativ, utan resultatet kan snarare representeras som en sannolikhetsfördelning över alternativ (Jeffrey[1)]: "Softcore Empiricism", jämför Russell 1948[2)]).
- Exempel: observation av fläckigt djur x i dåligt ljus:
- e_1: x är en leopard; e_2: x är en hyena; $P_{efter}(e_1) = 0{,}1$; $P_{efter}(e_2) = 0{,}9$
- Här ska P_{efter} tolkas som sannolikheten *efter observerandet*

- Blandningssatsen ger: $P(H) = P(e_1)\, P(H, e_1) + P(e_2)\, P(H, e_2)$

- vilket (jfr ovan) blir intressant först om vi kan dra slutsatsen:
- *Jeffrey-konditionalisering:*
- $P_{efter}(H) = P_{efter}(e_1)\, P_{före}(H, e_1) + P_{efter}(e_2)\, P_{före}(H, e_2)$

- som i sin tur kan expanderas med den vanliga konditionaliseringsregeln.
- Med H = jag blir uppäten strax; $P_{före}(H, e_1) = 0{,}5$; $P_{före}(H, e_2) = 0{,}1$ får vi $P_{efter}(H) = 0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}14$, vilket kanske känns betryggande

1) R. Jeffrey, *Subjective Probability. The Real Thing*. 2004.
2) B. Russell, *Human Knowledge*. 1948

Varifrån kommer $P_{före}(H)$?

- Den vanligaste statistikteorin säger att man inte har någon tillgång till dessa sannolikheter, och alltså inte kan använda konditionalisering till $P_{efter}(H)$
- De enda värden man kan känna till är *troligheter* (likelihoods), dvs. evidensers sannolikhet givet hypoteser. Dessa kan ofta beräknas exakt.
- En vanlig beslutsregel: om e observerats, och $P(H_0, e) < \alpha$, förkasta H_0! Exempel: 3 krona i rad *vs* H_1. ("Signifikanstestning")
- Ett välkänt men otroligt vanligt fel är att identifiera $P(H_0, e)$ med $P(e, H_0)$
- Det visar att den vanliga statistikteorin är svårsmält... vems fel är det?
- Poppers argument mot att använda Bayes regel för hypoteskonfirmation: P(H) måste vara 0 för typiska vetenskapliga teorier. *Men:*
- Detta förhållande kan enkelt hanteras med *densiteter* (derivator av sannolikheter) och fördelningar av sådana.
- Alternativt kan man gå direkt på prediktioner av enskilda fall. Dvs man intresserar sig inte för P(H, e), utan för P(e', e) där e' är en spådom från H om resultatet av nästa observation.
- Det har fördelen att vara mer relevant i diskussionen av induktionsproblemet. (En observation kan konfirmera H utan att konfirmera e som följer ur H).

Den subjektiva sannolikhetsteorin

- Det subjektivistiska alternativet: epistemiska sannolikheter är *bara* grader av tro. Vad innebär det?
- (a): (i) "X har sannolikheten P för mig, nu" *är synonymt* med (ii) "Jag har nu graden P av tilltro till X"
- Men är inte (ii) snarare en analys av "Jag *tror* nu att X har sannolikheten P"?
- Denna föreställning måste en subjektivist-(a) förklara som en villfarelse, om han/hon inte vill hävda att *p* i detta fall är synonymt med *Jag tror att p*.
- (b): (i) *påstår* ingenting men *uttrycker* (ii). "Sannolikheter finns inte" (de Finetti).
- Både (a) och (b) ---> relativism...
- Konvergensargumentet – tillräckligt mycket data kompenserar för de flesta skillnader i tilldelningar av apriorisannolikheter. Men... fortsättning följer!
- (c) (i) påstår att min grad av tilltro nu *borde* vara P.
- Detta låter inte orimligt för en icke-subjektivist. Men hur ska *subjektivisten* förklara det normativa elementet?

Normativa subjektiva sannolikheter?

- Jeffrey: “Your ’subjective’ probability is not something fetched out of the sky on a whim, it is what your actual judgment *should* be, in view of your information to date and of your sense of other people’s information...”.
- Och vad betyder nu detta – särskilt i de fall som rör de *första* sannolikhets-tilldelningarna P(H)? (Givet att vi inte har *någon* information ‘to date’.)
- Förslag 1: Man tager vad man haver. Inkonsistent med normativitet.
- Förslag 2: endast grader av tro i ett trossystem som uppfyller sannolikhets-teorins axiom kvalificerar som subjektiva sannolikheter. Men:
- Subjektiva sannolikheter är då tämligen sällsynta. Och räknefel blir omöjliga.
- Värre: Villkoret underdeterminerar valet radikalt, och är för varje kontingent påstående X konsistent med vilken sannolikhetstilldelning som helst till X.
- Förslag 3: aprioriska, intuitivt rimliga villkor på apriorifördelningar. Vanligt i Bayesiansk statistik. Men *varför* välja dessa fördelningar?
- Förslag 4: välj apriorifördelningar som överensstämmer med de som är vanliga bland experter. Kanske vettigt, men kan subjektivisten motivera det?
- Förslag 5: härled sannolikhetstilldelningar från andra villkor på en persons trosföreställningar (de Finetti m.fl.). Men varifrån kommer *de* villkoren?
- Nu till dagens ämne... som handlar om P(e).

Varifrån kommer $P_{efter}(e)$?

- En subjektivistisk sannolikhetsuppfattning utan tillräcklig normativitet implicerar att även *kunskap* bara är en m.e.m. godtyckligt vald övertygelse
- Varför *bör* vi acceptera vissa $P_{efter}(e)$ snarare än andra?
- Utan normer för P(e) är vi fria att t.ex. istället hålla P(H) fix över tiden – och vägra att ändra P(e) efter observationen, eller ändra P(e, H) på lämpligt vis
- Hur ska en subjektivist kunna blockera dylika anti-empiriska strategier?
- Förslag 1. Varseblivning innehåller konditionalisering utifrån någon ännu mer grundläggande evidens – sinnesdata, perceptionen som en inferensprocess. *Men:* det flyttar förstås bara problemet ett steg.
- Dessutom är det fel. (Jag bygger dock inget på detta.)
- Förslag 2. Observationer fixerar faktiskt vår grad av tro, så vi behöver inte bekymra oss över hur vi ska tilldela sannolikheter. *Men:* Detta är ett fall av "man tager vad man haver" och saknar normativitet.
- Dessutom är det fel. Vi ändrar inte sällan våra "observationella" grader av tro utifrån våra tidigare hypoteser. Det verkar dessutom rationellt att göra i många fall.

Icke-subjektivistiska lösningsförslag

- För att skilja omedelbar kunskap (kunskap utan skäl) från omedelbara övertygelser som inte är kunskap krävs en externalistisk kunskapsteori
- Detsamma gäller för omedelbart givna sannolikheter av typ $P_{efter}(e) < 1$
- Reliabilistisk kunskapsteori identifierar kunskap med *övertygelser som producerats genom en generellt pålitlig (sanningsproducerande) metod*
- Den bör naturligt kunna utvidgas (och har utvidgats) till att identifiera *den grad av tro man bör ha* med *den sannolikhet (!) med vilken den använda metoden producerar sanna åsikter*
- I en sådan teori är det lätt att skilja mellan *den personliga sannolikheten* (den grad av tro jag bör ha) och *personens subjektiva uppskattning av sin personliga sannolikhet* (den grad av tro jag har).
- Det externalistiska kriteriet tycks förutsätta ett icke-epistemiskt, objektivt sannolikhetsbegrepp. Ett sådant är de flesta teoretiker, även många subjektivister (och kanske framförallt de!), inte sällan benägna att godta.
- Men det externalistiska kriteriet kan kanske istället uppfattas som en kvasi-cirkulär, implicit definiton av *ett enda* sannolikhetsbegrepp, det epistemiska.
- Eller, något svagare, som ett kriterium som varje precisering av detta begrepp måste uppfylla.
- Vi väntar med spänning på en fortsättning!