GÖTEBORGS UNIVERSITET

”Det var enklare att slå ihop 4 hjärnor än att tänka själv”

En fallstudie om gruppdiskussionens betydelse för elevlösningar av rika matematiska problem hos elever i årskurs 8

Ulrihca Malmberg

LAU690

Handledare: Mikael Holmquist

Examinator: Biörn Hasselgren

Rapportnummer: HT08-2611-05P

Abstrakt

Examensarbete inom lärarutbildningen

Titel: ”Det var enklare att slå ihop 4 hjärnor än att tänka själv”
En fallstudie om gruppdiskussionens betydelse för elevlösningar av rika matematiska problem hos elever i årskurs 8

Författare: Ulrihca Malmberg

Termin och år: Höstterminen 2008

Kursansvarig institution: Sociologiska institutionen

Handledare: Mikael Holmquist

Examinator: Biörn Hasselgren

Rapportnummer: HT08-2611-05P

Nyckelord: rika matematiska problem, problemlösning, grupparbete

Studiens övergripande syfte är att analysera vilken roll några betydelsefulla faktorer har på hur högstadieelever i gruppsamverkan kommer till konsensus om lösningen för ett rikt matematiskt problem. De faktorer som studeras är grupp-processens och tidsramens betydelse samt för- och nackdelar med en kunskapsmässigt heterogen gruppkonstellation.

Undersökningen har genomförts som en fallstudie, där triangulering använts för att studera frågeställningarna utifrån olika perspektiv. Elever i två högstadieklasser har vid tre tillfällen arbetat med problemuppgifter där tre lektioner avsatts per problem. Datainsamling och analys har skett utifrån insamlade enskilda elevlösningar och grupplösningar, audio- och videoinspelade observationer, enkäter samt audioinspelade intervjuer.

Resultaten visar att gruppen vid framtagande av grupplösningen i första hand strävar efter att få alla i gruppen att förstå de enskilda lösningarna. Därefter utgår gruppen från de elevlösningar som löst flest av deluppgifterna och som är mest lättbegripliga. I de fall då gruppen löser fler deluppgifter än vad gruppmedlemmarna enskilt klarat, bygger gruppen som regel vidare på de lösningsstrategier som eleverna enskilt har påbörjat. Studien indikerar att mycket tid bör avsättas för gruppdiskussionen, då observationer visar att eleverna efter att de bedömer sig vara klara med uppgiften, börjar analysera problemet och sin egen lösning mer på djupet. Arbete i heterogena grupper visar att högpresterande elever ofta får förklara sina lösningar för övriga elever men inte själva får motsvarande kunskapsmässiga utmaning. Studien indikerar att dessa elever kunskapsmässigt skulle få ut mer av att arbeta i homogena grupper, vilket avviker från den refererade forskningen. Inte heller forskningens syn att medelpresterande elever blir passiva i heterogena grupper bekräftas i studien då dessa deltar lika aktivt som övriga i gruppen.

Studien visar att denna arbetsform i hög utsträckning uppfyller de ledord om kommunikation och lärande genom problemlösning som återspeglas i skolans styrdokument och att den är ett bra komplement till övrig matematikundervisning.

Förord

Detta examensarbete har utförts enskilt under höstterminen 2008.

Ett särskilt tack vill jag rikta till mina underbara elever i årskurs 8 som beredvilligt har ställt upp på att arbeta i påtvingade grupper med mikrofon under näsan och videokamera rakt i ansiktet. De har utan att knota fyllt i enkät efter enkät och med bara mindre suckar ställt upp på intervjuer. Utan er alla hade det inte blivit något av med detta examensarbete och jag hoppas att ni åtminstone fått ut bråkdelen av det som jag har av det vi gått igenom denna termin.

Jag vill också sända ett tack till min handledare Mikael Holmquist, som haft förmåga att strama upp alla mina vildflugna tankar för att fokusera på några få och som fått mig att inse att arbetet lämpligen borde utformas som en fallstudie, trots att det inledningsvis var det sista jag önskade. Nu i efterhand är jag dock mycket tacksam över att så blev fallet.

Uppsatsens titel är ett direkt citat från en elev där denne i en av enkäterna skulle ange några fördelar med den gruppdiskussion som eleverna precis haft;

”Det var enklare att slå ihop 4 hjärnor än att tänka själv”

Innehållsförteckning

Figur- och tabellförteckning

Figurförteckning

Tabellförteckning

1 Inledning

Som praktiserande matematiklärare på högstadiet har jag vid ett flertal tillfällen arbetat med matematiskt rika problem i mina klasser. Problemen har hämtats från litteraturen, bl.a. *Rika matematiska problem* (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005) och *32 rika problem i matematik* (Larsson, 2007). Lektionerna har varit upplagda enligt rekommendationer från litteratur och forskning, där eleverna inledningsvis arbetar enskilt med problemen för att därefter i grupp diskutera olika lösningsförslag och avslutningsvis i helklass diskutera lösningarna och deras för- och nackdelar. Trots detta, och trots de positiva ord om arbete med rika problem och gruppdiskussioner som tas upp inom forskningen, har inte alltid fördelarna som framhålls i litteraturen varit uppenbara i min egen undervisning. Några kritiska punkter som identifierats är att diskussionerna i grupperna inte alltid varit konstruktiva och lett till en fördjupad förståelse hos eleverna, att tiden för arbetet varit för kort, samt att jag som lärare känt att jag inte hunnit med att stötta grupperna på det sätt som forskningen rekommenderar.

Därför har jag i detta examensarbete valt att fokusera på vad som sker i elevgrupper när de arbetar med rika matematiska problem utan stöd av lärare. Trots de svårigheter jag själv mött i min lärarroll, ser jag stora fördelar med att ha gruppdiskussioner om rika matematiska problem i min undervisning. Detta kopplar också till läroplanens (Utbildningsdepartementet, 1994) och kursplanens (Skolverket, 2000) skrivningar om problemlösning som ett medel för lärande och elevers samtal för utveckling av den matematiska diskursen samt förmågan att analysera och värdera olika lösningar.

Både inom forskning och examensarbeten har olika frågeställningar analyserats och diskuterats rörande rika matematiska problem och elevers arbeten med dessa. Som exempel kan nämnas Taflin (2007) som i sin avhandling behandlar vad som avses med ett rikt matematiskt problem samt Ahlberg (2000; 1995; 1991) som bl.a. fokuserar på arbete med problemlösning i grupp. Vidare relateras till forskning om hur en undervisning utgående från problemlösning lämpligen struktureras (Bell, Burkhardt, Crust, Pead & Swan, 2007; Lester & Lambdin, 2007, 1996; Taflin, 2007; Emanuelsson, Wallby, Johansson & Ryding, 1996; Ahlberg, 1995; Wyndhamn, 1991). I examensarbeten från lärarstuderande diskuteras bl.a. elevers strategival vid lösning av matematiska problem (Niclasson & Sandén, 2007; Runborg Johansson & Moberg, 2006; Helmertz 2007; Shkala & Zdrnja, 2007), hur grupper samarbetar och löser uppgifter (Fyrhag & Himanen, 2007) och hur lärare använder sig av problemlösning inom matematiken (Fälth & Svensson, 2006).

Dock saknar jag i ovanstående texter mer specifika studier om hur enskilda lösningar utvecklas när de tas upp i grupp. Kunskap om detta är till stort gagn för den enskilde läraren vid planering och genomförande av arbete med problemlösning i klassrummet. Därför har jag valt att i mitt examensarbete fokusera på några faktorer som jag i min undervisning identifierat som betydelsefulla för hur högstadieelever i gruppsamverkan kommer till konsensus vid framtagande av en gemensam lösning för ett rikt matematiskt problem. Faktorerna är i vilken utsträckning enskilda lösningar utvecklas vid gruppdiskussion, hur avsatt tid för diskussionen påverkar resultatet samt vilka för- och nackdelar som kan ses med en heterogen gruppsammansättning.

2 Forskningsanknytning

Vid val av referenslitteratur har utgångspunkten varit primärkällor av etablerade och välrefererade forskare, som i sina studier fångar upp de faktorer som denna studie fokuserar på.

2.1 Styrdokumentens syn på problemlösning

2.1.1 Lärande genom problemlösning

I *läroplanen för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet* [Lpo 94] står i strävansmålen angivet att eleverna ska kunna använda erhållna kunskaper för att ”formulera och pröva antaganden och lösa problem; reflektera över erfarenheter och kritiskt granska påståenden och förhållanden” (Utbildningsdepartementet, 1994). Detta återspeglas även i den nationella kursplanen i matematik för grundskolan (Skolverket, 2000) där strävan för undervisningen bl.a. är att eleven;

> – utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer,
>
> – inser värdet av och använder matematikens uttrycksformer,
>
> – utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande,
>
> – utvecklar sin förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik, samt tolka, jämföra och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen,
>
> – utvecklar sin förmåga att använda enkla matematiska modeller samt kritiskt granska modellernas förutsättningar, begränsningar och användning (Skolverket, 2000:26-27).

I kursplanen för matematik påtalas problemlösningens roll i undervisningen;

> Problemlösning har alltid haft en central plats i matematikämnet. Många problem kan lösas i direkt anslutning till konkreta situationer utan att man behöver använda matematikens uttrycksformer. /…/ För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer. (Skolverket, 2000:27-28)

Skolverket säger t.o.m. att ”ett karakteristiskt motiv för och syfte med all matematikutbildning är att utveckla problemlösningsförmåga” (Skolverket, 1997:12). Motivet för detta är att eleven ska kunna känna tilltro till och använda matematiken. Vidare ses problemlösning som ett *medel* för att ”utveckla begrepp och matematiskt tänkande” (Skolverket, 1997:12), det som benämns *problembaserat lärande.* I detta ingår även att kunna bedöma om resultaten är rimliga och att värdera olika lösningar, att utveckla förmågan att dra slutsatser och generalisera samt att muntligt och skriftligt kunna redogöra för sina tankar och även argumentera för dessa (Skolverket, 2003:13; 2000:26-27). I kommentarerna till kursplanen framhålls vikten av en utvidgad problemlösningsprocess, där eleverna inte bara löser färdiga problemuppgifter enligt en given lösningsmetod utan även själva formulerar problem, finner en lämplig lösningsmetod och bedömer resultatets rimlighet (Skolverket, 1997:18). För de högre betygsstegen betonas dessa färdigheter ytterligare och eleven ska även ha förmåga att värdera olika metoders för- och nackdelar. För högsta betygsgrad, *Mycket väl godkänt*, ska eleven kunna ”ta del av andras argument och framför utifrån dessa egna matematiskt grundade idéer” (Skolverket, 2000:30).

De idéer som ligger bakom Lpo 94 och kursplanen i matematik har sin grund i aktuell forskning kring problemlösning, där det framhålls att ett förståelsebaserat lärande lämpligen tränas genom problemlösning. Lester och Lambdin menar att eleverna på så sätt ”tvingas in i ett mentalt tillstånd där de behöver förstå hur man kan koppla ihop olika slag av kunnande” (Lester & Lambdin 2007:98). Eleverna tränas i att utveckla sina matematiska tankar och idéer, att se förtjänsterna med användandet av matematiska symboler samt att hitta matematiska samband och kunna resonera kring och argumentera för olika lösningsförslag (Taflin, 2007:54; Wyndhamn, Riesbeck & Schoultz, 2000).

Även den matematiska diskursen, d.v.s. användandet av det matematiska språket muntligt och skriftligt, framhålls som viktigt för elevens kunnande. I kursplanens beskrivning av bedömningens inriktning framhålls förmågan att ”använda, utveckla och uttrycka kunskaper i matematik” samt att ”följa, förstå och pröva matematiska resonemang” (Skolverket, 2000:29-30). Exempel på sådana förmågor är att eleven kan ge förslag till lösningar och bedöma rimligheten i svaret och kunna kommunicera detta i ord och skrift, men även att kunna följa och pröva andra elevers sätt att resonera (Skolverket, 2000:29-30).

I den internationella PISA-undersökningen från 2006 (Programme for International Student Assessment) framkom att svenska 15-åringar ligger ungefär på OECD-genomsnittet i matematik, vilket är i nivå med tidigare undersökningar år 2000 och 2003 (Skolverket, 2007:14). Vid analys av resultaten konstateras att bristerna främst rör analytisk förmåga, reflektion, kommunikation och argumentation (Myndigheten för skolutveckling, 2007:17). Några av orsakerna till dylika svagheter lyfts fram i den nationella utvärderingen från 2003 [NU 03] som genomfördes av Skolverket. Där framkom bl.a. att matematikundervisningen har färre gemensamma genomgångar och diskussioner än andra teoretiska ämnen och att de intentioner som finns i kursplanen rörande kommunikation och resonemang i matematiken inte återspeglas i den undervisning som bedrivs (Myndigheten för skolutveckling, 2007:27-28). Skolverket drar utifrån detta slutsatsen att om matematiksamtal inte förekommer i någon större utsträckning begränsas elevernas språk- och begreppsutveckling (Myndigheten för skolutveckling, 2007:30).

2.1.2 Historisk tillbakablick på styrdokumentens syn på problemlösning

I Skolverkets kommentarer till kursplanen i matematik (Skolverket, 1997:21,41) visar man på en önskad förskjutning från en matematikundervisning som betonar färdighets- och procedurträning till en mer problemorienterad matematik, där avsikten bl.a. är att eleven ska utveckla det egna tänkandet och förmåga att resonera matematiskt.

I en forskningsstudie vid Linköpings universitet studerades bl.a. hur synen på problemlösning har ändrats över tid i skolans styrdokument (Wyndhamn m fl., 2000). Problemlösning i *Läroplan för grundskolan 1969* [Lgr 69] sågs som ett övergripande mål i undervisningen och tekniker lärdes ut för att eleverna slutligen skulle kunna lösa problem – matematik *för* problemlösning. Vidare låg fokus på att utveckla elevernas förmåga att föra över den kunskap de bar med sig från ett sammanhang till ett annat – något som benämns transfer (Taflin, 2007:40). I *Läroplan för grundskolan 1980* [Lgr 80] skulle man även undervisa *om* problemlösning där eleverna fick välja och använda lämpligt räknesätt för att lösa problemet (Wyndhamn m fl., 2000:47). Det kunde t.ex. handla om att lära ut Pólyas modell för problemlösning som en metod för eleverna att tillämpa (Taflin, 2007:40; Pólya 1970).

I Lpo 94 och nuvarande kursplanen i matematik (Skolverket, 2000) har synen på problemlösning förändrats till att även ses som ett medel att nå matematiskt tänkande enligt Wyndham, Riesbeck och Schoultz (2000:305). De menar att den nuvarande synen har ett konstruktivistiskt perspektiv, där utgångspunkten är att människan vid inlärning ställer ny kunskap i relation till det som personen redan känner till eller förstår. Problemlösning ger eleven möjlighet att pröva och utvidga den egna förståelsen, d.v.s. lärande *genom* problemlösning. Träning kan ske genom att lösa skilda typer av problem med hjälp av flera olika metoder, men även genom att gemensamt diskutera och resonera kring olika idéer och lösningar. Genom att arbeta med problemlösning kan eleverna även träna rutinfärdigheter (Hedrén, Hagland & Taflin, 2005:14), men läroplanerna lyfter i allt högre utsträckning fram arbete med problem av mer öppen karaktär där det inte alltid finns givna svar och där problemuppgifterna kan innehålla stor komplexitet (Wyndhamn m fl., 2000:45).

2.2 Några lärteoriers koppling till arbete med problemlösning

De styrdokument som gäller för skolan idag är främst influerade av de konstruktivistiska undervisningsteorierna med en mer förståelseinriktad undervisning (Bärring & Landström, 2008). Kunskap ses som något som utvecklas steg för steg, där eleven bygger sin kunskap utifrån den egna erfarenheten, men som genom konfrontation med lärarens eller andra elevers uppfattningar tvingas till reflektion (Wyndhamn m fl., 2000:93).

Den *sociala konstruktivismen* fokuserar på processen snarare än resultatet för att underlätta kunskapsbyggandet. Här relateras till Vygotskys *zon för proximal utveckling*, även kallad *den närmaste utvecklingszonen* som kan ses som det kunskapsområde där eleven behöver ringa stöd från en annan person för att kunna lösa en uppgift (Hedrén m fl., 2005:18). Under konstruerandet av den nya kunskapen tar eleven avstamp från sina tidigare erfarenheter och kunskaper, vilket medför att en grupp elever som får identiska intryck likväl bygger upp en subjektiv kunskap (Taflin, 2007:115; Hedrén m fl., 2005:17; Wyndhamn m fl., 2000:94).

Wyndhamn, Riesbeck och Schoultz (2000:110) förordar dock att man inför kommande revisioner av läroplanen bör få in mer av det sociokulturella perspektivet. Säljö (enligt Persson & Svensson, 2007) beskriver de *sociokulturella teorierna* som något som länkar samman de individuella processerna hos den enskilde eleven med det som sker i samverkan med andra och även här relateras till Vygotskys utvecklingszon. Läraren bör enligt denna teori inta en mer stöttande roll, där frågor snarare än svar ges till eleven, som därmed tvingas reflektera kring de frågor som ställs och på så sätt utveckla sitt lärande. Eleven kan även få stöd för sitt lärande med hjälp av andra elever, läroböcker samt texter och laborationsmaterial (Wyndhamn m fl., 2000:103).

2.3 Matematiska problem och rika sådana

Det finns ingen entydig definition av vad ett matematiskt problem är. Grevholm (1991:151) avser med problemlösning uppgifter där det inledningsvis inte är uppenbart för eleven hur denne ska lösa uppgiften utan måste använda sig av sitt matematiska kunnande och förnuft.

Lester har definierat ett problem som:

- En uppgift som en person vill eller behöver lösa.
- Personen i fråga har inte en på förhand given procedur för att lösa uppgiften.
- Det krävs en ansträngning av henne eller honom för att lösa den (Lester, 1996:85)

I kursplaneförslaget i matematik för den sedermera avblåsta gymnasiereformen Gy07, avsåg man med ett problem en uppgift där man inte direkt kan använda sig av de standardmetoder man behärskar, vilket skiljer ett problem från en rutinuppgift. Den sistnämnda betraktades därmed som en procedurförmåga och inte problemlösningsförmåga (Mouwitz, 2007:61).

Gemensamt för dessa definitioner är att ett matematiskt problem snarast är en relation mellan en uppgift och den som ska lösa den och att det som är ett problem för en elev inte behöver vara det för en annan. Taflin beskriver det som att en matematisk uppgift blir ett problem ”först när det krävs att problemlösaren måste göra en särskild ansträngning för att finna lösningen” (Taflin, 2007:11) och hon betonar även *viljan* hos problemlösaren att lösa uppgiften. Detta skiljer därmed ett problem från en rutinuppgift, där eleven vet hur problemet ska lösas (Taflin, 2007:11, Olsson, 2000:189) och medför att en uppgift som för en elev utgjort ett problem som blivit löst, som regel inte kommer att vara ett problem vid ett senare tillfälle (Taflin, 2007:38).

Begreppet *rikt* matematiskt problem har inte heller någon entydig definition och är inte allmänt vedertaget. För liknande typer av problem kan man även finna ordval som t.ex. *berikande uppgifter* (Silver & Smith, 2002b:39), *öppna problemuppgifter* (Wyndhamn m fl., 2000:47) och *rika matematikuppgifter* (Björkqvist, 1999:35). Silver och Smith refererar till *Professional Standards for Teaching Mathematics* från 1991, som använder begreppet *berikande uppgifter* för sådana uppgifter som ”inte åtskiljer matematiskt tänkande från begrepp eller färdigheter, som fångar elevernas nyfikenhet och som inbjuder dem att spekulera och följa upp sina ingivelser” (Silver & Smith, 2002b:39). Björkqvist (1999:35-36) å sin sida, använder begreppet *matematisk rik matematikuppgift,* och avser då en uppgift som är värdefull på grund av sitt matematiska innehåll. Han menar att sådana uppgifter har potentialen att fungera som en nyckel till elevens förståelse och för att utveckla elevernas lärande vidare genom generalisering eller modifiering och där uppgiften kan fungera som brobyggare mellan olika teman, metoder och över tid.

Svårigheten att finna någon entydig definition kring begreppet *rika* problem, föranledde Hagland, Hedrén och Taflin (2005:28) att ta fram sju kriterier för ett rikt matematiskt problem, och dessa förfinades ytterligare av Taflin i hennes avhandling (Taflin, 2007:11).

Dessa kriterier med kommentarer är:

1. *Problemet ska introducera till viktiga matematiska idéer*
   /.../ Eleven ska inspireras att använda sig av sådana matematiska idéer, som hon redan tidigare stiftat bekantskap med, men också känna ett behov av att lära sig tidigare okända begrepp eller att pröva för henne nya procedurer och tekniker /.../
2. *Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det*
   /.../ alla ska känna att de kommer någonstans, att de kan klara av en bit av lösningen. Det blir sedan i gruppdiskussionen eller i det gemensamma samtalet i klassen som problemet i sin helhet kommer att redas ut, så långt gruppens eller klassens samlade förmåga sträcker sig. /.../
3. *Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid*
   /.../ Problemet ska alltså ha ett sådant djup och en sådan bredd att eleverna alltefter förmåga och intresse kan komma en längre eller kortare bit mot dess fullständiga lösning.
4. *Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika matematiska idéer och representationer*
   /.../ På motsvarande sätt ska eleverna kunna arbeta på och redovisa sina lösningar med hjälp av många olika uttrycksformer eller som man ofta säger representationer /.../
5. *Problemet ska kunna initiera till matematiska resonemang utifrån elevernas skilda lösningar, ett resonemang som visar på olika matematiska idéer*
   /.../ Dessa samtal ska leda eleverna in på väsentliga matematiska idéer och lösningsmetoder, oftast aktualiserade av någon av elevlösningarna men ibland direkt av läraren.
6. *Problemet ska kunna fungera som brobyggare*
   /.../ Det kan finnas en risk att läraren i sin undervisning tar upp aritmetiken algebran, geometrin, sannolikhetsläran och så vidare var för sig, och att eleverna därför får svårt att se sammanhang mellan matematikens olika delar. Om läraren har förmåga att peka på sådana samband vid

lösandet av rika problem, är vi övertygade om att eleverna kommer att få många viktiga aha-upplevelser.

7. *Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.*
   Ett sätt att få eleverna att visa upp sina kunskaper men även att samtidigt bygga på och fördjupa dem är att be dem hitta på egna problem, som bygger på samma matematiska idéer som det problem de nyss har löst (Hagland m fl., 2005:28; Taflin, 2007:11)

Sammanfattningsvis menar Taflin att ett rikt problem definieras som ett problem som är ”utvecklingsbart och metodiskt mångdimensionellt” (Taflin, 2007:46), men att man enbart kan avgöra om ett problem är rikt genom att pröva det i en elevgrupp (Taflin, 2007:99).

En reservation kan dock göras mot Taflins bild att problemets rikedom först avgörs i sitt möte med eleverna. Min personliga reflektion är att ett rikt problem bör åsyfta den *inneboende potential* som finns i en uppgift. Ett berikande problem är enligt min tolkning av Silver och Smith (2002b:39) ett problem som i sin kontakt med eleverna ger dem ett vidgat matematiskt synsätt och/eller lärande, d.v.s. ett *rikt* problem ska uppfylla de sju kriterier som presenterats ovan, men att den kan anses *berikande* först i sitt möte med eleven om denne utvecklas matematiskt i kontakt med problemet.

2.4 Matematiken i problemuppgifter

2.4.1 Problemlösningsprocessen

Pólya beskrev 1945 problemlösning som bestående av fyra faser: att förstå problemet, att göra upp en plan, att genomföra planen och slutligen att se tillbaka och kontrollera sitt resultat. Att förstå problemet handlar om att veta vad som eftersöks och vilka fakta som finns tillgängliga. Därefter lägger eleven upp en plan för hur uppgiften ska lösas genom att hitta sambandet mellan den information som finns tillgänglig och det man söker. Vid genomförandet av planen måste varje steg kontrolleras, och denna kontroll gäller även det slutliga resultatet (Pólya, 1970). En modell för den matematiska problemlösningsprocessen, inspirerad av Pólya, har tagits fram av Garofalo, Kroll och Lester (beskriven av Ahlberg, 1995:28). Den innehåller fyra olika aktiviteter - *Problemorientering* som rör strategier elever använder för att förstå problemet; *Organisation* som rör planerandet och val av handlingar som ska utföras; *Utförande* som rör tillvägagångssättet för att i realiteten lösa uppgiften, samt; *Verifikation* där eleven utvärderar resultatet och de beslut som fattats under processens gång.

Lester (1996:85) betonar att problemlösningsförmåga i matematik utvecklas långsamt och är tidskrävande, eftersom den innehåller fler krav än att bara direkt tillämpa befintliga kunskaper. Han har kategoriserat fem olika faktorer som påverkar problemlösningsförmågan – (1) kunskapande och användning, (2) kontroll, (3) uppfattningar av matematik, (4) attityder och känslor samt (5) socio-kulturella sammanhang. För kunskapande och användning (1) handlar det om kännedom om olika problemtyper och att använda sig av denna kunskap. Dessutom rör det förmågan att växla mellan olika uttrycksformer. Kontroll (2) handlar om metakognition, d.v.s. kunskap om och kontroll över sitt eget tänkande och lärande. Uppfattningar av matematik (3) rör tilltron till den egna förmågan och hur denna självkänsla påverkar elevens möjligheter att lösa uppgiften. Attityder (4) rör egenskaper hos personer och handlar om inställning för eller emot något, det kan handla om t.ex. motivation, intresse, självförtroende och förmåga att inte ge upp. Känslor (4) är mer situationsspecifika. Det socio-kulturella sammanhanget (5) handlar om igenkänning av problemet och dess förankring i verkligheten för den enskilde eleven (Taflin, 2007b).

2.4.2 Matematiska idéer och lösningsstrategier

När man talar om matematiska idéer avser man koncept och verktyg som eleven kan använda för att lösa ett matematiskt problem. Begreppet ”matematiska idéer” innehåller både generella och specifika idéer, där det förstnämnda inkluderar begrepp, procedurer och operationer, konventioner, formler och strategier, medan man med specifika idéer avser de verktyg som eleven använder sig av för att lösa ett specifikt problem (Taflin, 2007:97). Definitionen för dessa begrepp hittas i slutet av detta kapitel.

Begreppskunskap avser faktakunskap medan *procedur*- eller *operationskunskap* handlar om att behärska olika tekniker, t.ex. algoritmräkning, ekvationsförenkling och användande av formler. Med *strategisk kunskap* menas olika tekniker för att öppna upp ett problem eller igenkänning av olika problemtyper. Ibland inkluderas även *metakognitiv kunskap* där eleven kan kontrollera sitt eget lärande samt *självkännedom* som rör den mer känslomässiga inställningen till hur uppgifter ska lösas (Wyndhamn m fl., 2000:300). Forskning av Boaler (beskriven av Taflin, 2007:112) har visat att elever som behärskar både procedurer och begrepp kan använda sina kunskaper i olika matematiska sammanhang, medan elever som är duktiga på procedurer men inte på begrepp har svårigheter att bedöma när eller hur de kan använda sina kunskaper.

Att resonera när man söker finna en lösning är ett inslag i problemlösningssituationen och kan ses som en form av målmedvetet tänkande, där eleven genom logiska resonemang steg för steg når fram till en slutsats (Wyndhamn m fl., 2000:301). Att resonera kan utföras av den enskilde eleven men är vanligast i kommunikation med andra. På detta sätt kan man länka samman problemlösning, resonemang och kommunikation som en treenighet för den egentliga problemlösningen (Wyndhamn m fl., 2000:301).

När eleverna arbetar med uppgifterna och väljer sina lösningsstrategier finns det olika metoder som är användbara. Ju fler strategier eleverna har med sig att välja mellan, desto lättare är det att anpassa strategin efter problemuppgiftens art (Eriksson, 1991:104). Det finns olika typer av strategier, t.ex. gissa och pröva, rita en bild, göra en lista eller tabell, tänka baklänges, söka mönster, resonera logiskt eller ställa upp en ekvation (Eriksson, 1991:105; Taflin, 2007:68).

Lösningsstrategierna kan placeras in i olika representations- eller uttrycksformer. Enligt en modell, ibland kallad KLAG-modellen, som har hämtats från McCoy (Hagland m fl., 2005:32, Taflin 2007:69) delas uttrycksformerna in i fyra huvudområden. För den *konkreta uttrycksformen* använder eleven något slag av material, t.ex. klossar, för att lösa uppgiften. Vid behov kan eleven välja att därefter avbilda detta i en figur. För den *logiskt/språkliga uttrycksformen* förklarar eleven sin lösning med hjälp av vardagsspråk och inget matematiskt språk eller symboler används. Vid den *algebraisk/aritmetiska uttrycksformen* uttrycks lösningen i stället med algebraiska eller aritmetiska symboler, t.ex. bokstäver och siffror. För den *grafisk/geometriska uttrycksformen* slutligen, ritar eleven en bild, graf, träddiagram eller en tabell för att visa på lösningen. I realiteten visar eleven ofta upp en kombination av dessa olika uttrycksformer i en och samma lösning.

I figur 1 speglas hur valet av problemuppgift och elevens arbete med denna styr mot det långsiktiga målet med problemlösning.

Att välja uppgift	Att tolka uppgift	Att välja metod	Mål för problemlösningen
			Utveckla kreativitet
	Förstå texten	Matematiska idéer	Uppfatta estetiska värden
PROBLEM?	Uppfatta uppgiften som problem	Strategier	Formulera egna uppgifter
		Rutinfärdigheter	Lära matematiska begrepp
		Samtal	Lära matematiska metoder
			Utveckla ett matematiskt språk

Figur 1 Olika steg i problemlösningsprocessen (efter Taflin, 2007:36).

2.5 Den matematiska diskursen

I bedömningens inriktning i kursplanen för matematik framhålls att en viktig del av elevens kunnande är dennes ”förmåga att uttrycka sina tankar muntligt och skriftligt med hjälp av det matematiska symbolspråket och med stöd av konkret material och bilder” (Skolverket, 2000:29-30). Det betonas också att bedömning sker utifrån hur eleven t.ex. kan ”lyssna till, följa och pröva andras förklaringar och argument” (Skolverket, 2000:29-30), vilket återkopplar till ämnets syfte att utveckla elevens förmåga att använda det matematiska språket och dess uttrycksformer och att även kunna kommunicera detta (Skolverket, 2000:26). Att kommunicera matematik faller inom begreppet *diskurs*, som kan ses som ”olika *typer* av samtal” (Riesbeck, 2008:19), där man inom matematikundervisningen talar om matematisk samt vardaglig diskurs. I detta sammanhang blir då en del i själva lärandet en fråga om att behärska diskursen för det aktuella området, där vetenskapliga begrepp är ett verktyg för att ge struktur åt elevens sätt att resonera kring och lösa problem.

Inom matematikundervisningen skulle därmed diskursen kunna ses som ett sätt för elever och lärare att på olika sätt kommunicera matematik (Riesbeck, 2008:22). I en skolmiljö pendlar ofta kommunikationen mellan en mer vardaglig diskurs och den matematiska, och med utökad matematisk kunskap och användande av det matematiska språket ökar även abstraktionsnivån inom språket. Att behärska den matematiska diskursen innebär dock inte att enbart förstå och behärska det matematiska språket, utan även att vara medveten om övergången mellan den vardagliga och matematiska diskursen (Riesbeck, 2008:36). Läraren kan fungera som översättare och visa på hur man uttrycker sig korrekt matematiskt och hur man kan förenkla sitt språk genom att använda det matematiska symbolspråket (Olsson, 2000:187; Emanuelsson m fl., 1996:56; Berggren & Lindroth, 1998:18). Klasskamrater kan å sin sida överföra de abstrakta matematiska begreppen till ett mer vardagligt språk och på så sätt skapas en dubbelsidig länk mellan den vardagliga och den matematiska diskursen (Skolverket, 2003a).

Ahlberg noterar att det informella matematiska språk som elever ofta använder som regel är av muntlig karaktär, medan det mer formella matematikspråket i huvudsak är skriftligt. Att arbeta med problemlösning av mer öppen karaktär låter den muntliga och skriftliga delen mötas och därmed även den matematiska och vardagliga diskursen (Riesbeck, 2008:65; Ahlberg, 1995:48).

2.6 Matematisk problemlösning i grupp

2.6.1 Mervärden vid problemlösning i grupp

I kursplanen för matematik framhålls att bedömning sker utifrån hur eleven t.ex. kan ”lyssna till, följa och pröva andras förklaringar och argument” (Skolverket, 2000:29-30). Detta kan praktiseras genom organiserade diskussioner i grupp eller helklass. Många forskare lyfter fram samtalets betydelse för att utveckla elevernas begreppsbildning, där arbete i smågrupper framhålls som en metod för att få eleverna att formulera och försvara sina tankar, men även för att lyssna på och värdera kamraternas förslag (Ahlberg, 1995:43; Hagland m fl., 2005:68, Olsson, 2000:184). Detta öppnar upp problemet och visar det ur nya perspektiv, men kan även få eleven att inse att man kan tänka på olika sätt (Ahlberg, 2000:81). Ahlberg (1995:43) refererar till Vygotskys syn på samspelet mellan människor som en viktig faktor, där förhoppningen är att eleverna kommer att ta till sig gruppens kompetens så att eleven i sinom tid kan prestera samma som gruppen som enhet.

Inom skolan används ibland benämningen *arbete i grupp* både vid arbete i mer *informella* grupper där eleverna spontant bildar grupper av egen fri vilja, och mer *formella* grupper där grupperna har bildats utifrån ett visst syfte som inte nödvändigtvis är kopplat till vad eleverna anser om varandra (Svedberg 2007:17). I detta arbete åsyftas med elevgrupper den *formella* gruppen där läraren satt samman grupperna enligt vissa kriterier och där gruppen har en uppgift att utföra. Jag har valt att utgå från Svedbergs definition av den *formella* gruppen som en grupp där minst tre medlemmar samspelar för att utföra en uppgift eller nå ett givet mål (Svedberg, 2007:17).

När man studerar en grupp och de individer som ingår i den, så kan man inta olika perspektiv. I den *individuella grupp-processnivån* ser man gruppen som en samling individer, och situationer som inträffar förklaras utifrån individernas egenskaper och beteenden. När man intar ett *interpersonellt* perspektiv, så fokuserar man på de relationer och det samspel som sker i gruppen och man intresserar sig då mest för kommunikationer och roller. Om man studerar gruppen som en *enda enhet*, så talar man om gestaltegenskaper hos gruppen, d.v.s. att den är något annat, men inte nödvändigtvis mer, än summan av sina medlemmars egenskaper. Man menar då att gruppen kan ha givna koder eller mönster som återspeglas i de enskilda gruppmedlemmarnas agerande, och att därmed alla kan sägas vara delaktiga i allt som sker (Svedberg, 2007). I denna studie ligger fokus på att studera gruppdynamiken ur ett interpersonellt perspektiv.

Vid problemlösning använder eleven sina befintliga kunskaper och erfarenheter men samarbetar även med andra elever för att bearbeta information samt analysera och värdera olika tankegångar (Wyndhamn m fl., 2000:18). Wyndhamn betonar övergången från den subjektiva elevuppfattningen till en mer objektiv form;

> När kunskapen senare delas och diskuteras med andra elever och med läraren (i den sociala interaktionen) och därmed blir tydlig- och medvetandegjord får kunskapen sin objektiva form och karaktär. (Wyndhamn, 1991:54)

Ett mervärde med grupparbete är att missuppfattningar och felaktiga beslut kan korrigeras när eleverna samverkar med varandra. På det sättet kan kommunikationen bli en stöttning under lärandeprocessen (Wistedt, 1996:65). Samtidigt varnar dock Wistedt för att eleverna ibland inte kan dra nytta av varandra under lösningen av en gemensam uppgift (Wistedt, 1996:21-23,67). Anledningen till detta är att eleverna gradvis utvecklar sin förståelse för en uppgift och eftersom elever har olika inlärningsstilar kan en elev som arbetar med en uppgift få svårt att förstå hur övriga elever tänker och resonerar.

Samtalet har även stor betydelse för att ge eleven en utökad eller ny förståelse för problemet. När eleven måste kommunicera sina tankar eller komma med frågor och förslag, så medvetandegörs eleven om sitt eget tänkande och kan på så vis utveckla den egna förståelsen (Ahlberg, 1991:87; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001:73; Emanuelsson m fl., 1996:70). Det finns även andra fördelar med grupparbete för att lösa problem. Läraren kan med denna arbetsform få goda tillfällen att höra eleverna resonera och ge adekvat stöd. För eleverna är det ett mervärde att inte bara få hjälp av andra elever för den egna förståelsen, utan även att se att andra elever har likartade svårigheter vilket kan stärka självkänslan. Motivationen och engagemanget ökar också när eleverna själva tar ett ökat ansvar för sin egen inlärning (Ahlberg, 2000:33; 1991:96).

Eleverna kan agera annorlunda i en gruppsituation i jämförelse med annan form av undervisning. Multiplikatoreffekten är det mervärde som uppstår då eleverna anstränger sig extra för att passa in i gruppen och på detta sätt ökar lärandet (Skolverket, 2003b) och elever som normalt sett inte gör sig hörda i klassrummet, kan i en mindre grupp ges ökade möjligheter till aktivt deltagande (Ahlberg, 1995:53).

Senaste årens forskning visar på en positiv effekt av elevernas kunskapsutveckling i matematik vid arbete i smågrupper (Skolverket, 1997:8) och elever som i sin undervisning gemensamt diskuterat matematik, t.ex. olika lösningsstrategier, är mer positiva till matematikämnet än elever som inte arbetat på detta sätt (Skolverket, 2003a). Trots detta har man vid jämförelse mellan den nationella undersökningen NU 03 och NU 92 sett att grupparbeten inte blivit vanligare, trots att både lärare och elever är positiva till arbetssättet (Myndigheten för skolutveckling, 2007:29).

2.6.2 Gruppstorlek

Antalet elever som anses lämpligt för grupparbete varierar i litteraturen. Ju fler medlemmar gruppen har, desto större blir nätverket av relationer samt det antal subgruppsbildningar som kan förekomma. I en mindre grupp får varje individ ett relativt sett stort utrymme vilket underlättar inflytande och känsla av delaktighet och därmed möjligheten till återkoppling (Svedberg 2007:114). Ju mer gruppstorleken ökar, desto mindre utrymme får den enskilde och därmed kan både det egna engagemanget och sammanhållningen i gruppen minska.

Svedberg (2007:115) menar att grupper om två eller tre medlemmar får starkare fokus på relationer mellan gruppmedlemmarna, medan den större gruppen blir mer uppgiftsorienterad. Enligt Caplow (refererad av Svedberg, 2007:98), är det som mest utmärker en grupp på tre personer att den lätt splittras så att två personer bildar en koalition mot den tredje. Svedberg tar också upp problematiken med att en del personer kan åka snålskjuts på andra när det är många som arbetar med samma uppgift, något som av Skolverket benämns ”easy riders”. Dessa personer låter inte enbart bli att bidra, utan lär sig också mindre än de skulle ha gjort vid traditionell undervisning (Skolverket, 2003b).

Svedbergs ideala gruppstorlek, om man tittar på effektivitet, produktivitet och problemlösningsförmåga, är ett antal på fler än fyra men färre än tio gruppmedlemmar (Svedberg, 2007:116). Jag vill dock göra en reservation för att detta gäller vuxna människor med vana att arbeta i grupp och inte elever som, utöver att gemensamt lösa en given uppgift, även ska lära sig att samverka i grupp. Inom skolforskningen ser man rekommendationer på mindre elevgrupper, som regel mellan tre till fem personer. I Nämnarens tema *Matematik ett kommunikationsämne* rekommenderar man grupper om tre till fyra personer eftersom detta möjliggör för varje elev att delta aktivt (Emanuelsson m fl., 1996:70). Ahlberg anger två till tre personer vid enklare uppgifter eller om tiden är begränsad och fyra personer vid större uppgifter eller om eleverna är vana att arbeta i grupp. Hon menar att fler än fyra medlemmar som regel medför sämre kvalitet eftersom det blir svårare för eleverna att lyssna koncentrerat på varandra ju fler medlemmar gruppen innehåller (Ahlberg, 1991:93).

2.6.3 Gruppsammansättning

En gruppkonstellation ger i sig inte något resultat, det är undervisningen som måste leda fram till det man vill uppnå. En grupp kan däremot vara ett medel för att antingen underlätta eller försvåra vägen till målet. Viktigt är att medlemmarna ska ges möjlighet att bygga upp ett förtroende för varandra så att de känner sig trygga i gruppen. Det rekommenderas därför att gruppen inte förändras för ofta, utan att eleverna får möjlighet att samarbeta under en längre period (Emanuelsson m fl., 1996:70; Ahlberg, 1991:93; Hagland m fl., 2005:60).

Utöver att skapa grupper av lämplig storlek har läraren även att ta hänsyn till hur grupperna sätts samman. I skriften *Elevgrupperingar* ger man som exempel att eleverna själva sätter samman grupperna, att läraren gör en egen bedömning, att testresultat får fungera som underlag eller att grupper lottas (Wallby m fl., 2001:68). Om man utgår från elevernas egna val kan man få relativt homogena grupper med avseende på intresse, men risken är också att det blir kamratval där andra parametrar än de som läraren eftersträvar får stor betydelse (Wallby m fl., 2001:68). Internationellt sett är tester ett vanligt underlag för att sätta samman grupper, men det är svårt att konstruera tester som verkligen mäter det man är intresserad av att mäta och dessutom finns inga garantier för att testet ska kunna fånga upp hur elever kan ta till sig nya kunskapsområden (Wallby m fl., 2001:69). Den rekommendation som ofta ges är att läraren sätter samman grupperna, men motiven för gruppindelningen kan variera (Hagland m fl., 2005:60). Det finns skilda idéer om hur elevgrupper lämpligen sätts samman för att maximera lärandet. Om man ska kunna använda sig av de skilda tankar, uppfattningar och förståelse som olika elever visar upp, så är det nödvändigt med en viss grad av heterogen nivågruppering (Wallby m fl., 2001:65).

När man talar om nivågrupperingar vid gruppsammansättningar, åsyftas en indelning av eleverna utifrån deras prestationer eller förmågor. Med homogena grupper avses då grupper som består av elever med likartade förmågor, medan heterogena grupper är sammansatta utifrån en blandning av olika förmågor (Wallby m fl., 2001:82). När man jämför elever eller grupper med varandra används ofta värdeladdade uttryck som ”bättre/sämre” eller ”högre/lägre”. Man syftar då inte på individen eller gruppen som sådan, utan enbart i relation till övriga elever eller grupper. I Nämnarens tema *Matematik ett kärnämne* menar man dock att man med homogena och heterogena grupper kan åsyfta annat än prestationer. Det kan t.ex. vara önskemål om arbetssätt och arbetsformer, möjlighet att få stöd hemifrån eller intresse för vissa ämnesområden (Emanuelsson, Johansson, Nilsson, Olsson, Rosén & Ryding, 1995:135). I denna studie avses dock elevernas kunskapsnivå när det talas om homogena och heterogena grupper.

Det finns mycket forskning kring hur elever gynnas av grupper sammansatta utifrån kunskapsnivå. I Skolverkets rapport *Elevgrupperingar,* refereras till forskning av bl.a. Lou, Harlen och Malcolm (enligt Wallby, m fl., 2001:106) som säger att det främst är medeleleverna som gynnas av homogena grupper. För högpresterande elever spelar gruppsammansättningen ingen större roll, medan de svagaste eleverna främst gynnas av heterogena grupper. Förklaringen till detta sägs vara sambandet mellan att få ge förklaringar och dra nytta av arbete i grupp – i blandade grupper frågar de lågpresterande mest och de högpresterande svarar, medan medeleleven varken frågar eller svarar och skulle därmed missgynnas. I *Matematik ett kommunikationsämne* (Emanuelsson m fl., 1996:73) hänvisar man dock till studier som visar att lågpresterande elever intar en mer passiv roll, även om de uppskattar att arbeta i grupp. Huruvida elever likväl kan gynnas av att lyssna på en diskussion även om de själva inte deltar aktivt säger dock rapporten inget om.

I studier av Sture Sjödin i början av 90-talet (beskriven av Wallby, m fl., 2001:106-108) påtalas det att särskilt en homogen grupp av svaga elever kraftigt missgynnas, då gruppen sannolikt kommer att anpassa sig till den svagaste eleven. För en högpresterande grupp är detta inte kritiskt och där är det som regel den starkaste eleven som oftast styr arbetet. Dessa studier indikerar att starka elever inte är lika beroende av om de arbetar i en homogen eller heterogen grupp, medan svaga elever gynnas av heterogena grupper och medeleleverna möjligen gynnas av homogena grupper. I Nämnarens tema *Matematik ett kärnämne* summerar man detta genom att förorda grupper i kombinationerna hög/medel, medel/låg eller enbart medelpresterande elever (Emanuelsson m fl., 1995:74). Hagland, Hedrén och Taflin (2005:60) rekommenderar att man bör undvika extremt heterogena eller homogena grupper och Ahlberg (1991) menar att könsfördelningen i gruppen bör vara jämn.

2.6.4 Arbetsflöde i gruppen

I en grupp måste varje person dels ge utrymme för andra, dels ta plats för egen del. Denna balansgång bör fungera så smidigt som möjligt för att gruppen ska verka på bästa sätt. Hur individen hanterar denna situation varierar, en del är mer passiva, d.v.s. inriktar sig på att lyssna och på så sätt lämnar utrymme för andra, medan andra är aktiva och tar plats. Det medför att varje medlem i gruppen får en roll, mer eller mindre frivilligt, som har påverkan på den diskussion som sker i gruppen. En elevs tystnad behöver med andra ord inte nödvändigtvis bero på att eleven inte kan bidra till den matematiska diskussionen, utan på att denne valt en mer passiv roll (Svedberg 2007:103).

När grupperna väl är sammansatta kan läraren på olika sätt leda arbetet framåt. Viktigt är att eleverna får klart för sig vilka förväntningar på resultat och beteende som finns, att de är klara över innehållet i arbetet, arbetsprocessen och meningen med uppgiften (Svedberg, 2007:192). Det innebär att läraren inte enbart ger grupperna arbetsuppgifter utan även instruktioner för hur de lämpligen bör arbeta så att de på bästa sätt kan klara uppgiften. Man kan även välja att antingen medvetet tilldela eleverna olika ansvarsområden eller låta slumpen styra vem som t.ex. i slutändan får göra redovisningen. Det sistnämnda alternativet medför att eleverna måste förbereda ett material som samtliga i gruppen kan förstå och förklara (Steinberg, 2006:61). Ahlberg (1995:53) har i en studie använt sig av en gruppledare som har ansvaret för att alla i gruppen kommer till tals, men att gruppmedlemmarna i övrigt inte har några specifika roller.

Att arbeta i grupper medför också att eleverna tränas i att låta en uppgift ta tid och att man inte behöver ge upp om man inledningsvis inte kommer någonvart. Vid samarbete kan elever angripa problemet på varierande sätt, testa olika strategier och hjälpas åt att finna en lämplig väg att gå (Ahlberg 2000:81, Olsson, 2000:191).

2.7 Undervisning i problemlösning

I Skolverkets skrift *Lusten att lära* (2003a:14) beskrivs hur lektioner i matematik varit utformade då elever visat stark lust för lärande. Undervisningsinnehåll och arbetsformer har varit varierade och gemensamma matematiska samtal med lärare och elever har förts om olika sätt att tänka kring och lösa matematiska uppgifter.

Vid problemlösning i grupp måste läraren ha ett mål med undervisningen. Grunden är att utgå från elevens eget sätt att arbeta med problem för att eleven på så sätt ska kunna förbättra lösningsförmågan (Ahlberg, 1995; Silver & Smith, 2002c:37). Inom forskning betonas betydelsen av att välja problemuppgift så att det lärande som eftersträvas kan uppnås, ju ”öppnare” problemtyper, desto större möjlighet till träning av kommunikation och samarbete (Ahlberg, 1991:90). Schoenfeld (beskriven av Taflin, 2007:49) menar att eleven ska ha möjlighet att förstå uppgiften så att fokus kan ligga på att lösa den. Problemet ska också vara möjligt att lösa och gärna med flera olika ingångar, som därmed främjar diskussioner om val av strategier vid lösning av uppgiften. Problemet ska även kunna introducera matematiska idéer och fungera som en introduktion till ett matematiskt område som eleverna tidigare inte arbetat med.

För att skapa det framgångsrika matematiska samtalet finns det tre grundpelare att ta hänsyn till;

> För det första måste samtal och kommunikation ses som centrala i uppgiften att undervisa i och lära sig matematik. För det andra behöver eleverna förses med givande uppgifter som kan utgöra grund för en innehållsrik matematisk konversation. Det tredje draget är att läraren behöver övervaka elevernas matematiska samtal och vidta lämpliga åtgärder för att främja diskussioner som kan stödja elevernas lärande av betydelsefulla matematiska idéer. (Silver & Smith, 2001:15)

Forskningen lyfter fram några undervisningskriterier som är av stor vikt för att utveckla elever till goda problemlösare - eleverna måste få en systematisk undervisning i problemlösning, de ska lösa många problem, förmågan till problemlösning måste få utvecklas långsamt över en längre tid och läraren måste tro på betydelsen av problemlösning och även kunna förmedla denna tro till eleverna (Silver & Smith, 2002a:51; Olsson, 2000:191; Lester, 1996:87; Schoenfeld, 1992:357).

När eleverna arbetar med uppgifter av mer öppen karaktär, där stor vikt läggs vid den matematiska diskussionen, så finns det ett huvudspår som många forskare förordar. Problemet introduceras för alla eleverna av läraren, och därefter sker arbete individuellt eller i grupp, för att slutligen övergå till gemensamt arbete i helklass där resultaten och erfarenheterna fångas upp (Lester, 1996:89). Hagland, Hedrén och Taflin förordar att eleverna initialt arbetar enskilt med uppgiften eftersom risken är att elever kan inta en alltför passiv roll om de redan från början arbetar i grupp (Hagland m fl., 2005:59). Ahlberg (1995:55) menar att endast ett problem ska hanteras under en lektion och flera forskare anser att hela processen från enskilt arbete, via gruppdiskussion till gemensam analys i helklass tillsammans kan ta längre tid än en lektion (Hagland m fl., 2005:58; Lester & Lambdin, 2007:102).

Det råder inom forskningen delade meningar ifall läraren ska undervisa om olika problemlösningsmetoder. De som anser att detta bör göras påtalar vikten av att ge eleverna en bas av metoder som de sedan kan använda sig av när de ska arbeta med okända problem, eftersom frånvaron av sådan träning är ett skäl till att elever har svårt med problemlösning (Lester, 1996:88; Skoogh & Johansson, 1991:113). Eleverna kan därmed inse *att* det finns olika strategier och även lära sig att identifiera vilken strategi de använt när de löst problemuppgifter (Berggren & Lindroth, 1998:39). Forskare som avråder från att träna elever i problemlösning menar att eleverna själva ska utarbeta de strategier de behöver för att lösa olika problem. Om de i stället får ett färdigt ”regelsystem” att utgå ifrån minskar möjligheterna för dem att förstå problemets innehåll eftersom färdiga rutiner kan medföra att de löser problemet utan eftertanke (Ahlberg, 2000:84; 1995:52). Vidare är risken att eleven lägger ner sin energi på att genomföra själva metoden, snarare än att hitta alternativa lösningsstrategier (Taflin, 2007:63). Schoenfeld (beskriven av Hagland m fl., 2005:20) konstaterar i sin forskning att man inte vinner något på att lära ut olika lösningsstrategier, men att man bör lyfta fram dessa i samband med redovisningar av lösningar i t.ex. helklass.

2.8 Begreppsdefinitioner

I detta avsnitt klargörs de nyckelbegrepp som används i studien. Många av begreppen saknar entydig förklaring i forskningen, men valet av definitioner grundar sig på den forskningsteori som presenterats i detta kapitel. Vid tveksamma fall har jag om möjligt valt att utgå från de definitioner Taflin (2007) använt i sin avhandling och som är baserade på studier av forskningslitteratur.

Begrepp
”Det abstrakta innehållet hos en språklig term till skillnad från dels termen själv, dels de (konkreta eller abstrakta) objekt som termen betecknar eller appliceras på” (Nationalencyklopedin, 2008). Avser i detta arbete *matematiska begrepp*. Ett begrepp består av term, definition och illustration, t.ex. yta (term) som är en sammanhängande punktmängd i rummet (definition) som kan ses som en illustration (Taflin, 2007).

Diskurs
”Diskurs betyder i dagligt tal samtal, dryftning. /…/” (Nationalencyklopedin, 2008). Avser i detta arbete vardaglig och matematisk diskurs som två olika språkformer som brukas i klassrummet.

Generalisering
”/…/ härledning av allmän slutsats från enskilda exempel” (Nationalencyklopedin, 2008). För matematiken gäller ”en utsaga som gäller ett visst objekt överflyttas till att gälla en viss mängd som innehåller objektet ifråga, alternativt att utsagan överflyttas från en begränsad mängd till en mer omfattande mängd som innehåller den begränsade” (Pólya, 1970)

Grupp
”/…/ inom samhälls- och beteendevetenskap individer som har något gemensamt” (Nationalencyklopedin, 2008). I denna text avses en formell grupp där minst tre medlemmar samspelar för att nå ett mål eller utföra en uppgift” (Svedberg, 2007:17).

Grupparbete
”/…/ arbete som utförs av medlemmar i en grupp tillsammans ofta i en inlärningssituation” (Nationalencyklopedin, 2008). Syftar på ett samspel mellan elever som arbetar tillsammans för att utföra ett arbete, lösa en uppgift eller gemensamt nå ett mål (Svedberg, 2007).

Heterogen grupp
”/…/ innehållande olikartade beståndsdelar, oenhetlig” (Nationalencyklopedin, 2008). Avser här grupp bestående av elever med olikartade kunskapsförmågor.

Homogen grupp
”/…/ alltigenom lika, likartad” (Nationalencyklopedin, 2008). Avser här grupp bestående av elever med likartade kunskapsförmågor.

Problemlösning
Det arbete elever utför när de löser ett matematiskt problem.

Problem / problemuppgift
”/…/ uppgift som kräver tankearbete och analytisk förmåga spec. i vetenskapl. sammanhang (vanl. om större, komplicerad uppgift) men äv. ngt allmännare (om mer avgränsad uppgift)” (Nationalencyklopedin, 2008). Används här i betydelsen att det är en uppgift som en person vill eller behöver lösa, personen har inte en på förhand klar procedur för att lösa uppgiften och slutligen att det krävs en ansträngning för att lösa den (Lester, 1996:85).

Procedur och operation
Procedur: ”tillvägagångssätt, förfarande” (Nationalencyklopedin, 2008). Operation: ”i

matematiken benämning på ett allmänt räknesätt som för varje element i en viss mängd ger ett nytt element" (Nationalencyklopedin, 2008). Handlar här om det sätt på vilket man utför beräkningar. Procedur kan även gälla hur man kan kombinera matematiska symboler och tecken (Taflin, 2007).

Rikt matematiskt problem
Ett matematiskt problem som är "utvecklingsbart och metodiskt mångdimensionellt" (Taflin, 2007:46). I detta arbeta avses med ett rikt matematiskt problem en uppgift som uppfyller alla sju kriterier som beskrivs i avsnitt 2.3.

Strategi
"långsiktigt övergripande tillvägagångssätt" (Nationalencyklopedin, 2008). Avser i detta arbete matematiska strategier, även kallade lösningsstrategier. Är olika metoder som kan användas för att lösa ett matematiskt problem, t.ex. rita bilder, söka mönster, göra en tabell eller teckna en ekvation (Taflin, 2007).

Uttrycksform
Handlar här om olika sätt att ge en förklaring till en matematisk lösning. I detta arbete kategoriseras elevlösningarna enligt uttrycksformerna *konkret, logiskt/språkligt, algebraiskt/aritmetiskt* samt *grafiskt/geometriskt* (Hagland m fl., 2005:32, Taflin 2007:69).

3 Syfte och problemformulering

3.1 Studiens syfte

Studiens övergripande syfte är att analysera faktorer som har stor inverkan på hur högstadieelever i grupp kommer fram till gemensamma lösningar av rika matematiska problem.

Inom forskningen framhålls problemlösning som ett lämpligt verktyg för att utveckla elevernas matematiska kunskaper, men även för att skapa möjlighet till lärande genom att kommunicera matematik - att förklara och värdera olika matematiska lösningar. Forskare som Taflin, Ahlberg, Lester m.fl. framhåller värdet av att låta eleverna i kunskapsmässigt heterogena grupper samtala kring ett gemensamt problem, för att därefter i helklass bygga vidare på gruppernas olika resultat och resonemang. Lärarens roll i denna process framhålls då ofta som en stödjande funktion där läraren kan bistå med att styra upp elevernas arbete, t.ex. genom att reda ut missförstånd, ställa frågor som tvingar eleverna till reflektion eller få eleverna att komma vidare om de fastnat.

I realiteten medger dock inte alltid undervisningsförutsättningarna att läraren finns tillgänglig vid kritiska tidpunkter för att ge eleverna det stöd de kan vara i behov av. Därför är det av värde att närmare undersöka några valda faktorers påverkan på den slutliga grupplösningens utformning och hur elevers enskilda lösningar av rika problem utvecklas vid framtagande av en gemensam lösning i grupp om gruppen arbetar självständigt utan stöd från läraren.

För att undersöka detta har 12 elevgrupper från två klasser vid tre olika tillfällen under en period om två månader arbetat med rika problem enskilt och i grupp inom ramen för den ordinarie matematikundervisningen.

3.2 Problemformulering

Huvudsyftet är att iaktta och analysera vilken roll några faktorer har på hur högstadieelever i årskurs 8 i gruppsamverkan kommer till konsensus om lösningen för ett rikt matematiskt problem.

För att nå mitt syfte söker jag uttömmande svar på följande frågor:

- Utvecklas den eller de i någon mening ”bästa” enskilda lösningsstrategierna ytterligare när de bearbetas i grupp och i så fall på vilket sätt?
- Har en av läraren påtvingad tidsram för gruppdiskussionen någon inverkan på den slutliga grupplösningen och i så fall på vilket sätt?
- Vilka för- och nackdelar för utarbetandet av en gemensam grupplösning kan iakttas vid en heterogen gruppsammansättning?

4 Design, metoder och tillvägagångssätt

4.1 Övergripande beskrivning av metodval

Detta examensarbete är utformat som en fallstudie där några faktorer analyseras som har betydelse för hur elever i gruppsamverkan kommer till konsensus om lösningen för ett rikt matematiskt problem. Vid fallstudier så avgränsar man undersökningsgruppen och använder flera metoder för datainsamling och analys (Johansson & Svedner, 2006:24). Det bör betonas att en fallstudie inte avser ett metodval, utan ett val över det som ska studeras (Stake, 2000:435). Även om själva studien kan ses som ett slutet system där inriktningen primärt är att få en djupare förståelse för det som studeras, så kan den likväl vara av intresse som en del i förklaringen av ett mer generellt fenomen eller i beskrivningen av en population som sträcker sig utanför den valda elevgruppen. Stake (2000:448) menar att det främsta värdet med fallstudier är dels möjligheten att förfina rådande teori och även ge förslag till vad framtida studier kan inrikta sig mot, men även för att definiera gränser för generaliserbarhet av resultaten.

Stake delar in fallstudier i tre kategorier; *inre fallstudie*, där studien fokuserar på att ge en bättre förståelse för det specifika fall som undersöks; *instrumentell fallstudie,* där man undersöker ett specifikt fall för att få bättre insikt om ett fenomen eller för att modifiera en existerande generalisering samt slutligen; *kollektiv fallstudie*, där forskaren studerar flera olika fall i syfte att undersöka ett fenomen, en population eller allmänna villkor som kan sägas råda (Stake, 2000:437). Denna fallstudie har den övergripande intentionen att inta ett instrumentellt perspektiv, vilket medför att studien är ämnad att fungera som ett stöd för att vidga förståelsen på ett mer övergripande plan (Stake, 2000:437). Dock innebär den begränsning i tid och resurser som ett examensarbete medför att studien gränsar mot en inre fallstudie, då det datamaterial som kan samlas in är begränsat och även möjligheten att till fullo analysera detta material. Stake (2000:439) menar dock att även inre fallstudier kan betraktas som ett litet steg mot en generalisering, särskilt i de fall då resultaten strider mot de ”regler” som anses gälla för rådande generalisering.

För att minimera risken för feltolkningar används triangulering som metod. Detta kan antingen innebära att man verifierar upprepningsbarheten hos en observation eller att man studerar fenomenet ur olika perspektiv för att få en bättre förståelse för fenomenet (Stake, 2000:444). I denna studie har den sistnämnda varianten av triangulering tillämpats, där frågeställningarna analyseras med stöd av kvantitativa och kvalitativa metoder för datainsamling. De kvantitativa utgörs av enkäter och skriftliga elevlösningar som samlats in från alla elever, medan de kvalitativa består av inspelade observationer och intervjuer för ett urval av eleverna. En kvantitativ ansats möjliggör en ökad grad av generalisering, men dess svårighet att erhålla en fördjupad förståelse för frågeställningar gör att den kompletteras med kvalitativa inslag (Stukát, 2007:31-32).

Upprepningsbarheten verifieras genom att vid tre tillfällen genomföra samma sorts datainsamling och analys, där enda skillnaden är valet av problemuppgift. Detta upplägg ger ökad möjlighet att finna rimliga förklaringar till studiens problemformulering, eftersom man vid planerandet av undersökningar bör sträva efter variation ifråga om förklaringsfaktorn. För analysenheterna, d.v.s. de elever och elevgrupper som studeras, är strävan i stället homogenitet (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson & Wängnerud, 2007:102).

Denna studie inriktar sig enbart på det som skett vid de lektionstillfällen då studien genomförts och omfattar inte vad eleverna arbetat med vid övriga matematiklektioner. Vid undersökningens upplägg har fokus initialt legat på att hitta de egenskaper som kan ge svar på studiens frågeställningar. Utifrån detta får vi fram de variabler som ska studeras och de värden som dessa kan anta (Esaiasson m fl., 2007:50). Denna undersökning har haft en mer öppen karaktär, varför det inledningsvis inte varit givet vilka variabler som skulle ingå, men det var inte möjligt och är inte heller alltid önskvärt att redan i förväg definiera de ingående analysenheterna och variablerna (Esaiasson m fl., 2007:50).

Vid tre tillfällen under höstterminen har eleverna fått arbeta med ett rikt matematiskt problem under tre lektionspass per tillfälle och totalt deltog 46 elever uppdelade på 12 grupper i studien. I tabell 1 visas en översikt av datainsamlingen. De olika komponenterna i undersökningen finns beskrivna mer i detalj i detta kapitel.

Tabell 1 Design av datainsamlingen för fallstudien.

Rikt matematiskt problem	**Tidpunkt**	**Metod för datainsamling**	**Analysenheter**	**Antal deltagande elever totalt för problemet**
Stenplattorna	September	Videoinspelning	4 grupper	45 elever enskilda lösningar
		Audioinspelning	4 grupper (samma som ovan)	45 elever gruppdiskussion
		Enkät 1	Alla elever	46 elever enkät 1, del A
		Djupintervju	Alla elever i de 4 grupperna ovan	45 elever enkät 1, del B
Skolan	Oktober	Videoinspelning	4 grupper (samma som ovan)	43 elever enskilda lösningar
		Audioinspelning	4 grupper (samma som ovan)	44 elever gruppdiskussion
		Enkät 2	Alla elever	44 elever enkät 2
		Djupintervju	Alla elever i de 4 grupperna ovan	
Skolvägen	November	Videoinspelning	4 grupper (samma som ovan)	44 elever enskilda lösningar
		Audioinspelning	4 grupper (samma som ovan)	44 elever gruppdiskussion
		Enkät 3	Alla elever	44 elever enkät 3
		Djupintervju	Alla elever i de 4 grupperna ovan	
-	November	Enkät 4	Alla elever	46 elever enkät 4

4.2 Beskrivning av deltagande elever

Fallstudien har utförts i två klasser årskurs 8 i en kommunal skola utanför Stockholm. Skolan är för årskurs 6-9 femparallellig, undantaget år 9 som har fyra klasser. Den modellberäknade måluppfyllelsen, baserad på föräldrarnas utbildningsnivå, andel elever med utländsk bakgrund samt andel pojkar, ligger i genomsnitt 15 procentenheter högre än vad som gäller för riket som helhet och den faktiska måluppfyllelsen har de senaste tre åren varierat mellan 87 % och 95 % (Skolverket, 2008a). Andelen elever i årskurs 9 som nått målen i matematik har under samma period varierat mellan 98,3 % (2007) och 100 % (2006) och den genomsnittliga betygsfördelningen för det nationella provet i matematik är 3 % som ej fått godkänt, 40 % G, 33% VG och 24% MVG (Skolverket, 2008b).

Vid valet av analysenheter i studien har strävan varit att minimera antalet variabler som kan ha oönskad påverkan på studiens resultat och därmed försvåra och eventuellt missleda analysen. Därför gjordes ett strategiskt urval genom att välja elever från en och samma skola, årskurs och med samma undervisande lärare för att på så sätt minimera oönskade påverkansfaktorer såsom geografisk och social spridning, åldersvariation och skillnader i undervisningskultur. Valet att studera samtliga elever i två klasser i stället för enbart en klass är för att det bedöms vara en fördel att välja många analysenheter, även i situationer då inget slumpmässigt urval har kunnat genomföras (Esaiasson m fl., 2007:112).

Klasserna har sedan årskurs 6 haft likartat upplägg på sin undervisning och använt samma lärobok, XYZ-serien (Undvall, Forsberg, Olofsson & Johnson, 2007). På klassnivå är klasserna jämbördiga kunskapsmässigt och andelen högpresterande, medelpresterande respektive lågpresterande elever är likartad mellan klasserna. Som grund för denna bedömning finns ett ordentligt underlag med resultat från läxor, prov och lektionsanteckningar.

Eleverna har vid några tillfällen under föregående läsår praktiserat arbete med rika matematiska problem men inte med ett lika organiserat upplägg som för denna studie. Vad gäller förkunskaper för att lösa problemuppgifter enligt KLAG-modellen, kan noteras att eleverna har arbetat med enklare algebraiska beräkningar men har ännu inte någon större vana att sätta upp ekvationssystem för att lösa mer komplicerade uppgifter. De arbetar inte heller särskilt mycket med konkreta material för att lösa matematiska uppgifter, men de uppmuntras ofta att rita som stöd för sina tankebanor.

4.3 Sammansättning av elevgrupper

Utifrån den forskningsteori som tidigare redogjorts för, valdes att sätta samman eleverna i heterogena grupper, där låg- och medelpresterande elever respektive medel- och högpresterande elever bildade grupper ihop. Klasserna hölls intakta av undervisningsskäl – studien skulle genomföras inom ramen för den vanliga undervisningen och därför skedde ingen sammanblandning av klasserna. Detta gör att studien utförts på ett sätt som i hög utsträckning liknar en vanlig undervisningssituation, vilket också varit avsikten.

Som undervisande lärare i klasserna har jag god kännedom om eleverna eftersom dessa har undervisats av mig sedan årskurs 6. För att undvika en alltför subjektiv kunskapskategorisering av eleverna valdes att bedöma dessa utifrån tre olika kategorier - allmänna matematikkunskaper samt matematisk respektive allmän analytisk förmåga och därefter väga samman bedömningarna. Den allmänna analytiska förmågan bedömdes av den SO-lärare som haft bägge klasserna sedan årskurs 6, för att på så sätt minimera inflytandet av en enda bedömande lärare. Kategorier och bedömningskriterier finns beskrivna i tabell 2. Bedömningskriterierna är inte ömsesidigt uteslutande vilket hade varit önskvärt men bedömningen har likväl varit att denna metod minskar graden av subjektivitet vid elevkategoriseringen. Underlag för bedömningen var prov- och läxresultat, lektionsanteckningar samt lärarobservationer grundade på bl.a. diskussioner i grupp och helklass.

En snittpoäng per elev räknades ut genom att beräkna medelvärdet för elevpoängen, men där den matematiska kunskapen räknas dubbelt för att inte underskattas i förhållande till den analytiska förmågan. Eleverna sorterades i poängordning och grupperades i nivåer. Denna uppdelning skedde för att sedan para ihop elever från olika nivåer i heterogena grupper utan alltför stora skillnader på kunskapsnivå.

Tabell 2 Bedömningskriterier för kategorisering av elever inför indelning i elevgrupper.

	Bedömningskriterier (siffran nedan anger elevpoäng)			
Kategori och bedömare	**1**	**2**	**3**	**4**
Matematikkunskap (MA-lärare)	Låg	Låg / Medel	Medel / Hög	Hög
Analytisk förmåga matematik (MA-lärare) samt Allmän analytisk förmåga (SO-lärare)	Svaga logiska resonemang. Svårt att förklara egna tankegångar. Svårt att förstå och värdera andras tankar.	Viss förmåga till logiska resonemang. Kan förklara egna tankegångar men har svårt att förstå och värdera andras.	God förmåga till logiska resonemang. Kan förklara egna tankegångar och förstå och som regel värdera andras.	Mycket stor förmåga till logiskt resonemang, att förklara och värdera egnas och andras tankegångar.

Utgångspunkten var att grupperna skulle består av fyra elever, men på grund av klassernas storlek kom några av grupperna att utgöras av enbart tre personer. Valet av fyra medlemmar ger en tillräckligt stor grupp för att bli uppgifts- snarare än relationsorienterad och samtidigt inte för stor, då en större grupp kan medföra att enskilda elever anstränger sig mindre då de vet att andra i gruppen kan arbeta med uppgiften i stället (Svedberg, 2007:114-115). Ytterligare ett motiv till att välja grupper om fyra var att gruppen fortfarande skulle kunna fungera som studieobjekt om någon elev i gruppen var borta vid något av problemtillfällena. De grupper som enbart innehöll tre elever bestod av medel- och högpresterande elever eftersom de bedömdes ha störst möjlighet att klara uppgiften även med ett färre elevantal.

Val av grupp för observation och intervju skedde genom stratifierat urval där grupperna delades upp i klass och kunskapsnivå. För varje stratum gjordes sedan ett obundet slumpmässigt urval genom lottdragning. Detta medförde att det i varje klass blev två grupper som observerades mer i detalj under hela studien, en med låg- och medelpresterande elever och en med medel- och högpresterande. I tabell 3 visas gruppernas sammansättning.

Tabell 3 Gruppernas sammansättning under arbetet med rika matematiska problem med avseende på antal, kön och kunskapsnivå. Avgränsningen markerar delning mellan de två klasserna.

Grupp	Kunskapsnivå	Antal elever *(F = flickor, P = pojkar)*	Kommentar
1A-LM	låg-medel	3F + 1P	Video, audioinspelning + djupintervju
1B-LM	låg-medel	3F + 1P	
1C-LM	låg-medel	3F + 1P	
1D-MH	medel-hög	2F + 2P	
1E-MH	medel-hög	2F + 2P	Video, audioinspelning + djupintervju
2A-LM	låg-medel	2F + 2P	Video, audioinspelning + djupintervju
2B-LM	låg-medel	1F + 3P	
2C-LM	låg-medel	3F + 1P	
2D-MH	medel-hög	2F + 2P	Video, audioinspelning + djupintervju
2E-MH	medel-hög	2F + 1P	
2E-MH	medel-hög	2F + 1P	
2E-MH	medel-hög	4F + 0P	

4.4 Lektionsupplägg

Undervisning genom problemlösning rekommenderas att vara elevdriven snarare än styrd av lärare eller läroböcker. Läraren genomför en undervisning som låter eleverna få nya erfarenheter och därför bör undervisningen organiseras så att eleverna får använda sina tidigare erfarenheter och utifrån dessa vidga sina perspektiv och upptäcka nya matematiska strukturer (Taflin, 2007:59; Ahlberg, 1995:145). Lärarens roll blir att hjälpa eleven framåt genom att bygga på de idéer som eleverna kommit fram till och ställa kritiska frågor utan att avslöja en hel lösningsstrategi (Hagland m fl., 2005:60). Frågorna får dock inte vara av lotsande karaktär där det blir läraren som löser uppgiften åt eleven, utan i stället stödjande (Ahlberg, 1995:9; Taflin, 2007:115; Wyndhamn, 1991:58). Stöttning kopplar till tanken om elevens proximala utvecklingszon, där eleven får den hjälp som behövs för att kunna ta till sig ny kunskap (Taflin, 2007:115). Schoenfeld (1992:356) beskriver tre nyckelfrågor som läraren kan ställa för att få elever att i högre utsträckning analysera och planera lösandet av uppgiften; Vad (exakt) är det du gör? Varför gör du det? Hur hjälper det dig?

Studien uppdelades i tre olika observationstillfällen, där eleverna arbetade med ett rikt problem per tillfälle. Den första undersökningen gjordes i slutet av september 2008, den andra under andra halvan av oktober och den sista i mitten av november samma höst. Arbetsupplägget var identiskt vid alla tre tillfällena förutom att eleverna vid arbetet med det andra och det tredje rika problemet fått direktiv att i gruppen först diskutera hur gruppsamverkan fungerat gången innan och hur de skulle kunna lösa eventuella problem eller konflikter som uppstått. Eleverna fick själva ta ansvar för hur denna diskussion genomfördes i respektive grupp.

Det finns ingen tydlig rekommendation i den refererade forskningen om hur lång tid som bör avsättas för arbete med rika matematiska problem. Tre lektioner bedömdes dock som lämpligt ur organisatorisk synpunkt, då varje problem bearbetades på tre olika sätt – enskilt, i grupp och i helklass. Denna tid ansågs lagom för att eleverna skulle kunna arbeta igenom uppgifterna.

Strävan var att använda en så autentisk undervisningssituation som möjligt, varför studien genomfördes inom ramen för den vanliga skolundervisningen med mig som undervisande lärare. Skillnaden var dock att jag i detta fall inte var tillgänglig för frågor om hur uppgifterna skulle lösas under elevernas arbete.

4.4.1 Lektion 1 – Enskilt arbete

Varje rikt problem bestod av ett antal deluppgifter där eleverna individuellt löste så många av deluppgifterna som de klarade. De fick problemuppgiften på papper (se Bilaga B-D) och en gemensam genomgång av uppgiften skedde med stöd av overhead. När läraren introducerar problemet för eleverna är syftet dels att hjälpa eleverna tolka och förstå problemet men även att förankra begrepp så att det matematiska språket blir mer entydigt (Lester, 1996:87). Eleverna fick skriftliga och muntliga förhållningsregler (se Bilaga E) kring hur de skulle arbeta under lektionen och vad som skulle lämnas in vid lektionens slut. Resten av lektionen avsattes till enskilt arbete med problemet. Konkreta arbetsmaterial i form av papper, linjaler, kalkylatorer och centikuber fanns tillgängliga och jag fanns till hands för att reda ut eventuella oklarheter och svara på frågor, men däremot inte för att ge stöd i själva lösandet av uppgiften. Lösningarna redovisades på papper och lämnades in i slutet av lektionen. Om eleven blev klar före lektionens slut fick denne arbeta vidare med att hitta på en egen uppgift av likartad karaktär och lösa denna samt att försöka finna alternativa lösningar till det ursprungliga problemet.

4.4.2 Lektion 2 – Gruppdiskussion

Inom forskningen talas om lärarens roll som observatör men även som samtalspartner till eleverna för att stödja dem i deras utveckling av det matematiska språket, att verbalisera sitt eget tänkande och att utveckla både arbetet med uppgiften och samarbetet i gruppen (Lester, 1996:87; Ahlberg, 1991:95). Fokus bör ligga på elevernas olika lösningsmetoder snarare än enbart det slutliga svaret på uppgiften (Ahlberg, 1991:88; Ahlberg, 1995:44). I denna studie var dock elevernas gruppsamverkan för en gemensam lösning i fokus, varför denna form av lärarstöd inte fick förekomma. Eleverna fick skriftliga instruktioner om hur diskussionen skulle föras (se Bilaga E). Varje grupp utsåg en gruppledare vars uppgift var att styra upp diskussionen så att alla fick presentera sina lösningar och komma till tals i diskussionen (Steinberg, 2006:61; Ahlberg, 1995:53). Gruppledaren skulle delta i diskussionen på samma villkor som övriga medlemmar i gruppen. För att stimulera alla elever att komma till tals och lyssna på varandra fick eleverna i turordning redogöra för sina individuella lösningar, varefter eleverna i samråd tog fram den lösning de ansåg vara bäst (Ahlberg, 1991:92). I slutet av lektionen lämnade gruppen in en skriftlig, gemensam lösning på de uppgifter de löst.

4.4.3 Lektion 3 – Diskussion i helklass

Vid den gemensamma klassdiskussionen leder läraren samtalet med utgångspunkt från elevlösningar och diskuterar dessa tillsammans med klassen. Det kan handla om att se felaktigheter, för- och nackdelar med olika metoder, se samband och olikheter mellan olika beräkningsmetoder, värdera och strukturera lösningar men även utvidga och fördjupa det matematiska resonemanget och göra matematiska generaliseringar (Ahlberg, 2000:83; Lester, 1996:87, Lester & Lambdin, 2007:97). I denna studie valde jag som lärare ut en grupp att gå fram till tavlan och redovisa sin lösning och hur de tänkt. Även den person i gruppen som inledde presentationen valdes ut av mig för att på så sätt få eleverna att förbereda sig ordentligt och verkligen försöka förstå uppgiften och dess lösning. Övriga grupper kom med synpunkter och egna lösningsförslag, och dessa förslag utvärderades sedan gemensamt. Denna lektion ingick inte i examensarbetet för analys, men är en fundamental del i den rekommenderade undervisningsansats som relateras till i detta arbete, och även som en del i elevernas lärande i matematik generellt och inför kommande arbeten med ytterligare rika problem. Vid detta tillfälle deltog jag som lärare aktivt genom att komma med stödjande frågor och kommentarer.

4.5 Val av rika matematiska problem

Vid val av problemuppgift bör läraren ha i åtanke vilka förkunskaper eleverna har, vilket arbetsområde som för tillfället är aktuellt och vilka intentioner beträffande lärande som läraren har för stunden. Uppgifterna ska bygga på de kunskaper elever redan har, men ska samtidigt vara utmanande (Lester & Lambdin, 2007:97; Taflin, 2007:60).

Att en entydig definition på ett matematiskt problem inte står att finna och att ett matematiskt problem egentligen blir ett problem först när det möter sin användare komplicerar valet av problemuppgifter för denna studie (Taflin, 2007:99). Eftersom en uppgift som tidigare varit ett problem för en elev och som blivit löst, som regel inte kommer att vara ett problem vid ett senare tillfälle (Taflin, 2007:38), har de rika problemen som valts ut i denna studie så få likheter som möjligt med problem som eleverna arbetat med vid tidigare tillfällen. Två av problemen som valts ut användes i min undervisning föregående läsår på en dåvarande årskurs 8 och bedömningen var att de hade en god potential att vara just rika problem för eleverna. Ingen pilotstudie gjordes därför i samband med detta examensarbete eftersom problemen redan är analyserade på elever, både i min egen undervisning och inom forskningen (Taflin, 2007). Uppgifterna har valts ut utifrån den matematiska bredd som de sammantaget innehåller och strävan har varit att de olika problemen inte ska vara alltför likartade i sin karaktär.

De två första problemuppgifterna som använts i denna studie kommer från Taflins avhandling (Taflin, 2007) och ingår även i boken *Rika matematiska problem* (Hagland m fl., 2005). Den tredje problemuppgiften kommer från kursen *Problemlösning i skolan,* Högskolan i Dalarna (Jakobsson, 2007:3). Alla problemen har analyserats utifrån sitt matematiska innehåll och olika lösningsförslag finns framtagna. Samtliga uppgifter ger eleverna möjligheter att välja mellan konkreta, logiska/språkliga, aritmetiska/algebraiska och geometriska/grafiska representationer (Taflin, 2007:64). Med dessa problemuppgifter som utgångspunkt och med de analyser som gjorts av uppgifterna, har jag som lärare en god bild av uppgifternas karaktär vilket underlättar analysen av de olika lösningsförslagen från eleverna i denna studie.

Den valda problemuppgiften delas lämpligen upp i flera delproblem av ökad svårighetsgrad, eftersom alla eleverna då kan få en personlig utmaning, men även ges möjlighet att förstå resonemang kring problemet som kan fungera som stöd för att nå fram till en eventuell matematisk generalisering. Deluppgifterna bör kretsa kring en och samma idé och de första uppgifterna vara av sådan karaktär att alla eleverna kan klara dem för att på så sätt stärka självkänslan och även leda dem in i lösandet av nästföljande delproblem (Strandberg, 1991:131,135-137; Taflin; 2007a:123). Ahlberg (2000) menar att man i ett längre tidsperspektiv bör sträva efter att använda skilda typer av problemuppgifter för att förhindra att eleverna förutsätter att samma lösningsmönster alltid ska användas. I tabell 4 redovisas exempel på matematiska kunskaper som kan tränas med problemuppgifterna.

Tabell 4 Det matematiska huvudinnehållet i problemuppgifterna (Hagland m fl., 2005; Malmberg, 2007).

Matematiska kunskaper som kan tränas	*Stenplattorna*	*Skolan*	*Skolvägen*
Naturliga tal	X		
Proportionalitet	X		X
Tabell	X	X	
Mönster	X		
Area	X		
Variabelbegrepp	X	X	X
Formel	X	X	
Tal i bråkform		X	X
Tal i procentform		X	
Tals delbarhet		X	X
Minsta gemensamma multipel		X	X
Minsta gemensamma nämnare		X	X
Olikhet		X	X

De modifieringar som gjordes av uppgifterna var av kosmetisk karaktär eftersom deluppgifterna dels bedömdes vara på rätt svårighetsnivå för den aktuella elevgruppen, dels för att undvika att införa förändringar som kunnat medföra att de inte längre kunde kategoriseras som rika matematiska problem. Som ett tillägg till samtliga problem hade ytterligare två uppgifter tillkommit för de elever som blev klara innan lektionens slut. Tilläggen var: (1) Hitta på ett liknande problem, lös det; (2) Kan du lösa uppgiften på ett annat sätt? Dessa deluppgifter har dock inte ingått i det data som sedermera analyserats. Deluppgifterna var av karaktären att alla elever förväntades kunna förstå och arbeta med den första deluppgiften, men att de sedan blev alltmer komplicerade för att slutligen leda till ett mer generellt tänkande (Taflin, 2007:18). Problemuppgifterna återfinns i sin helhet i Bilaga B-D.

4.6 Datainsamling och dataanalys

4.6.1 Skriftliga elevlösningar

Vid första lektionen löste eleverna uppgifterna individuellt. Dessa lösningar samlades in, kopierades och kategoriserades enligt uttrycksformerna *konkret, logisk/språklig, algebraisk/aritmetisk* samt *grafisk/geometrisk* för att få en översiktlig bild. Utöver detta noterades de matematiska idéer som eleverna visade upp rörande begrepp, procedurer, strategier, formler och konventioner.

Vid andra lektionstillfället fick eleverna tillbaka sina enskilda lösningar och satte sig i sina grupper för att arbeta vidare med problemet. Gemensamt skrev sedan gruppen ner sitt förslag till lösning och lämnade in. Även dessa lösningar kategoriserades enligt samma princip som de enskilda lösningarna och noteringar gjordes även om huruvida grupplösningen liknade eller skiljde sig från de enskilda lösningarna och, om så var fallet, vilken eller vilka elevlösningar som grupplösningen byggde på.

4.6.2 Observation under gruppdiskussion

Vid observation kan man direkt hämta kunskap från det sammanhang där händelsen inträffar och underlaget blir också mer lättbegripligt och stabilt för efterföljande analys (Stukát, 2007:49).

Vid det andra lektionstillfället för varje problemuppgift arbetade eleverna i sina grupper. Här observerades vid samtliga tre tillfällen samma fyra grupper - två per klass och lektion, varav en låg-medelpresterande och en medel-högpresterande per klass. Observationen skedde genom att spela in deras samtal utan att störa elevernas gruppdiskussion. Audioinspelning av hela gruppsamtalet skedde för respektive grupp och videoinspelning alternerades mellan de två grupperna som observerades per klass.

Audioinspelning valdes för att kunna återge samtalen i sin helhet och för att i efterhand kunna lyssna på samtalen utifrån olika frågeställningar. Videoinspelning valdes i stället för observation med anteckningar, då även detta möjliggjorde att i efterhand rekonstruera diskussionerna. Vidare minimerade det risken för att mina personliga reflektioner skulle kunna förvanskas över tid. Inspelningarna gjorde det möjligt att gå tillbaka om det uppdagades saker som kunde vara intressant att studera och som kunde ge stöd för teorier som inledningsvis inte identifierats.

Vid första tillfället skedde inspelningen i det ordinarie klassrummet, men på grund av den höga ljudnivån från övriga grupper valdes att vid de två övriga tillfällena placera observationsgrupperna i ett grupprum i direkt anslutning till ordinarie klassrum. Audioinspelningen genomfördes genom att en liten MP3-spelare placeras mitt på bordet hos gruppen och elevernas filmades med en VHS-kamera. Vid filminspelningen satt jag vid första problemtillfället med videokameran i hand. Övriga problemtillfällen placerades videokameran på ett bord, vilket möjliggjorde att jag kunde lämna den grupp som filmades för att lyssna på övriga gruppers samtal. Varje inspelning varade ca 30-40 minuter och koncentrerades helt till utvalda gruppers samtal. Inledningsvis var intentionen att filma 10 min per grupp och därefter byta, men det visade sig redan vid första tillfället vara bättre att anpassa filmningen efter muntlig aktivitetsnivå i grupperna. Eftersom audioinspelningarna pågick under hela diskussionen för respektive grupp, bedömdes det inte vara kritiskt att hålla exakta tidsramar per grupp vid filmningen.

Vid dataanalysen genomlyssnades hela diskussionen ordentligt ett flertal gånger, där den första genomlyssningen skedde utan att anteckningar gjordes. Vid andra tillfället antecknades diskussionen i mer sammanfattande form där samtalets innehåll noterades i en tabell tillsammans med tidpunkt och vem eller vilka som pratade. Detta schema fungerade som stöd för fortsatt lyssnande och för att snabbt hitta tillbaka till avsnitt av intresse. Därefter följde mer systematiserade genomlyssningar, där fokus vid varje genomlyssning låg vid någon av studiens frågeställningar. I samband med detta var det några huvudfrågor som särskilt beaktades;

- Hur fördelas samtalstiden mellan gruppmedlemmarna?
- Finns det någon naturlig ledare i gruppen och finns det någon eller några som inte inbjuds till diskussionen, alternativt väljer att inta en passiv roll?
- Vilka kriterier ligger till grund för det val av slutlig grupplösning som eleverna tar fram?
- Vem eller vilka fattar beslut om vilken lösning som ska gälla för gruppen?
- I vilken utsträckning resonerar man kring olika lösningsförslag?
- Vilken grad av matematisk diskurs förekommer i samtalet?
- Hur är stämningen i gruppen?

Anteckningar i samband med genomlyssningarna gjordes med ett observationsschema som utgångspunkt, se Bilaga G, men även med förutsättningslösa anteckningar, d.v.s. en strukturerad observation som grund men med tillägg av ostrukturerad karaktär. Transkribering skedde sedan av valda delar för att lyfta fram vissa specifika diskussioner av särskilt beskrivande karaktär. Det observationsschema som var stöd vid genomlyssningen hämtades från Maria Edins examensarbete (2003:10). De olika kategorierna i observationsschemat som observerades bedömdes som väl definierade och varandra uteslutande, d.v.s. det rådde inga tveksamheter om var markeringar i observationsschemat skulle göras och det innehöll noteringsmöjligheter för händelser som bedömdes vara relevanta för studien och som förväntades inträffa under gruppdiskussionen. Anteckningar som inte passade in i observationsschemat gjordes separat. Videoinspelningen fungerade som komplement till audioinspelningen och denna studerades efter första genomlyssningen av audioinspelningen och kombinerades med ostrukturerade noteringar. Här var det främst kroppsspråk, engagemang och inneslutning/uteslutning av elever som synliggjordes.

4.6.3 Enkät

Enkäter gör det möjligt att samla information från fler elever än vid intervju och det ökar även möjligheten till generaliseringar (Stukát, 2007:42).

Studiens syfte och frågeställningar fungerade som underlag vid utformandet av enkäten, men ytterligare frågor lades till för att få en bredare förståelse och för att fånga upp uppfattningar om skeenden som inte kunnat planeras för i förhand. Enkäten var en blandning av olika svarsalternativ – ibland tvingades eleverna ta ställning och ibland fanns det neutrala svarsalternativ. Enkäten var gjord så att eleverna i största möjliga mån skulle kunna svara genom att kryssa för färdiga svarsalternativ, vilket underlättade datahanterandet och analysen av resultaten, men det fanns även frågor med öppna svarsalternativ och frågor där eleverna kunde motivera sina svar. Valet för hur respektive fråga skulle utformas grundade sig på god kännedom om det som efterfrågades samt utprovning i en klass som inte ingick i studien. Testklassen fick arbeta med den första problemuppgiften enligt samma arbetsprincip som de elever som ingick i studien. Därefter fick de svara på enkäten samt komma med synpunkter på enkätens utformning och frågeställningar. Frågorna var inledningsvis utformade så att eleverna tvingades ta ställning mellan två alternativ för varje fråga, men när enkäten prövades på testklassen önskade flera av eleverna ett mer ”neutralt” svarsalternativ. Frågor där eleverna uttryckte osäkerhet om vad som efterfrågades, alternativt där svaren indikerade att frågan missförståtts, skrevs om.

I slutet av varje problemtillfälle besvarade eleverna i studien enkäten, se Bilaga F. Den var indelad i fyra delar, där del A bestod av allmänna frågor om elevernas uppfattning om skolämnet matematik och hur de på bästa sätt lär sig matematik, del B rörde frågor kring det aktuella rika problemet och hur grupparbetet fungerat, medan del C tog upp frågor där eleverna kunde jämföra hur arbetet fungerat i jämförelse med tidigare tillfällen då gruppen samarbetat. I del D gav eleverna förslag till hur framtida arbete med rika matematiska problem bör läggas upp, baserat på de upplevelser de haft vid de tre problemtillfällena. Del A besvarades i samband med det första rika problemet, del B vid samtliga tre tillfällen då eleverna arbetat med rika problem, medan del C besvarades vid det andra och tredje tillfället. Del D besvarades en vecka efter det sista problemtillfället. Respektive enkät besvarades under ett lektionstillfälle och samlades in i slutet av lektionen. Elever som var borta vid enkättillfället men som deltagit vid det enskilda arbetet och gruppdiskussionen besvarade enkäten vid efterföljande lektion. Enkätsvaren var inte anonyma eftersom jag önskade kunna länka svaren till grupperna och elevernas kunskapsnivåer.

Alla svar registrerades i en datamatris, och för de uppgifter som hade graderade svarsalternativ (ja/nej, mindre/mer, dåligt/bra) noterades svarsalternativen som siffervärden. På detta sätt kunde medelvärden per svarsalternativ beräknas för att få en generell bild av hur eleverna uppfattar matematikämnet och det specifika arbetsmomentet. För övriga frågor användes en bokstav för varje svarsalternativ, så att det enkelt skulle gå att få fram antalet elevsvar per alternativ. Ej besvarade frågor markerades med X och felaktigt registrerade svar med Y, dessa värden togs sedan inte med i dataanalysen. Kommentarer skrevs in så som de angivits av eleverna förutom stavfel som rättades. Däremot ändrades inte språkbruk och ”smileys” lades in där de så förekom.

4.6.4 Intervju

Det sista momentet för datainsamling var kvalitativa intervjuer med de elever som audioinspelats vid grupparbetena, totalt 16 elever. Dessa intervjuer var avsedda att klargöra och fördjupa vissa frågeställningar och fungerade som komplement till enkäterna och de observationer som gjorts vid gruppdiskussionerna. Kvalitativ intervju valdes för att få en anpassningsbar intervjusituation, där ett antal huvudfrågor var gemensamma för de intervjuade, men där svaren följdes upp olika beroende på vad eleven svarat (Stukát, 2005:39; Johansson & Svedner, 2006:43). Huvudfrågorna grundade sig på de observationer som gjorts under grupparbetet och de svar som eleverna givit i samband med enkäten. Nackdelen var att det därmed inte var tillförlitligt att jämföra svaren från olika gruppmedlemmar (Stukát, 2005:39), men samtidigt var det av värde för frågeställningarna att se hur eleverna själva uppfattat det arbete och den gruppdynamik som förekommit vid problemlösandet.

Innan intervjuerna genomfördes hade samtliga enkäter registrerats och en första analys gjorts av enkätsvar och de inspelade gruppdiskussionerna. Intervjuerna audioinspelades med hjälp av MP3-spelare och eleverna intervjuades enskilt i ett grupprum där enbart intervjuaren och eleven var närvarande, för att få en så ostörd och trygg miljö som möjligt (Stukát, 2005:40). Varje intervjutillfälle varade mellan 5-10 minuter. Intervjuerna gjordes lektionerna direkt efter att eleverna svarat på enkäten för att de skulle ha sina upplevelser i färskt minne. Strävan var att ställa enkla och raka frågor, men låta eleverna själva ange graden av komplexitet på svaren. Vissa grundfrågor var gemensamma, men därefter anpassades frågorna efter vad eleven sade och även efter vad övriga elever som intervjuats sagt. Eleverna informerades om att inga namn skulle anges i slutrapporten, så att de skulle kunna tala fritt.

Audioinspelningarna genomlyssnades flera gånger men transkriberades inte i sin helhet. På detta sätt kunde tid sparas genom att bortse från icke relevanta avsnitt och därmed ge utrymme för att intervjua fler personer (Stukát, 2007:40). Vidare gav genomlyssningarna en bättre bild av dynamiken i gruppdiskussionen än vad en utskrift hade gjort, eftersom tonfall och pauser m.m. kunde lyssnas av. Sammanfattande anteckningar med tidsangivelser gjordes vid andra genomlyssningen för att få en summerad bild av elevens synpunkter.

4.6.5 Slutlig analys

Medan de kvantitativa metoderna syftar till att få fram resultat som kan påvisa mönster i datat och därmed är generaliserbara, är de kvalitativa metoderna mer lämpade för att tolka det data som samlats in för att få en djupare förståelse (Stukát, 2007:31-32). För respektive frågeställning ingick både kvantitativa och kvalitativa insamlingsmetoder, där de kvantitativa primärt användes för att få en helhetsbild och de kvalitativa för att se eventuella orsaker till varför resultaten såg ut som de gjorde. Därför var det av vikt att inte se dessa olika moment som enskilda delar, utan att knyta ihop den information som analysen gav till en helhetsbild. För att länka samman dessa separata delar till en helhet utifrån studiens respektive frågeställning valdes en strategi vid dataanalysen;

1. Få en helhetsbild av datamaterialet och vad analysen för respektive undersökningsmetod indikerade.
2. Finna likheter och skillnader i materialet.
3. Försöka finna det underliggande mönstret i materialet och åskådliggöra detta med exempel från enkät, intervju eller observationer.

4.7 Externt och internt bortfall

I de två klasserna deltog 17 pojkar och 29 flickor i studien, medan två pojkar och en flicka valde att avstå.

Vid första problemuppgiften var en elev borta vid samtliga tre lektionstillfällen. Eleven besvarade dock del A på enkät 1 eftersom denna rörde allmän inställning till matematikämnet. Vid andra problemtillfället var två elever borta på det enskilda arbetet där en av dessa elever ingick i en grupp som spelades in. Denna elev var dock med på gruppdiskussionen, som då inleddes med att övriga i gruppen introducerade eleven för problemet. En elev var borta vid grupptillfället och annan var borta både vid det enskilda arbetet och vid gruppövningen. Denna elev ingick i en grupp som spelades in, varför denna grupp enbart utgjordes av tre elever vid arbete med det andra problemet. De elever som inte deltog i gruppdiskussionen besvarade inte enkät 2 och den elev som varit borta vid första problemtillfället besvarade inte del C i enkät 2. Vid tredje problemtillfället var två elever borta vid det enskilda arbetet, men bägge dessa deltog i gruppdiskussionen. Den ena av dessa elever ingick i en grupp som spelades in, men eleven hann göra en enskild lösning strax innan gruppdiskussionen startade. Två elever deltog i det enskilda arbetet men var borta vid gruppdiskussionen. De elever som inte deltog i gruppdiskussionen besvarade inte enkät 3.

Två grupplösningar för det andra problemet tappades bort. Lösningarna tillhörde två grupper vars diskussion spelats in, varför audio- och filminspelning kunde användas för att rekonstruera innehållet i lösningarna. Vidare hade två elever vid det tredje problemtillfället inte lämnat in sina enskilda lösningar. Dessa meddelade muntligt att de inte lyckats lösa någon deluppgift och därför inte skrivit ner någon lösning.

Intervjuerna skedde i ett separat grupprum under ordinarie lektionstid. Samtliga intervjuer bandades, men vid första problemtillfället uppdagades direkt efter en intervju att inspelningen inte satts igång och därmed inte registrerats. Därför skedde en skriftlig sammanfattning direkt efter intervjun, men denna kunde inte rekonstrueras i sin helhet, varför en del information gick förlorad.

4.8 Studiens tillförlitlighet

Studiens tillförlitlighet bedöms genom att värdera den utifrån dess reliabilitet, validitet, generaliserbarhet och replikerbarhet.

Med *reliabilitet* menas hur väl den metod man använder lämpar sig för det man studerar. Stukát talar om ”mätningens motstånd mot slumpens inflytande” (Stukát, 2005:125). Faktorer som kan ha negativ påverkan på reliabiliteten är bl.a. feltolkningar av frågor, yttre störningar vid undersökningen, felskrivningar, gissningar och subjektiva värderingar som styr analysen.

Reliabiliteten garanterades genom att triangulering användes, där flera olika metoder ingått för att studera ett och samma fenomen. Valda problemuppgifter och lektionsupplägg är grundat på forskning (Lester, 2007; Taflin, 2007; Hagland m fl., 2005; Ahlberg, 1995). De metoder som använts för datainsamling är av olika karaktär – kvantitativa såsom insamling och kategorisering av enskilda elevlösningar och grupplösningar samt enkäter, såväl som kvalitativa med audio- och filminspelade observationer samt djupintervjuer. Att kombinera kvalitativa med kvantitativa metoder gör att de brister som kvalitativa metoder har beträffande reliabilitet kan uppvägas av kvantitativt insamlade data. Inspelningarna har garanterat att inga förvanskningar av observationerna skett över tid. Samma metodik har använts vid tre olika problemtillfällen vilket ökar graden av reliabilitet och det empiriska underlaget säkras genom att elevgrupperna hållits konstanta.

De elever som har audio- och videoinspelats har även djupintervjuats och samtliga elever som deltagit i studien har besvarat enkäten. Intervjuerna har skett av samma person, i samma miljö och med samma inspelningsteknik för alla eleverna, vilket ökar reliabiliteten (Johansson & Svedner, 2006:105). Ostrukturerade intervjuer skapar ett större utrymme för subjektivitet, både vad gäller val av frågor och analys av svaren, men fördelarna med denna metod har dock bedömts överväga nackdelarna, eftersom metoden är mer flexibel och bättre anpassad efter de elevsvar som ges. Medvetenhet om svagheter med metoden, såsom att intervjuaren omedvetet uttrycker sina värderingar eller att den intervjuade inte har förtroende för den som intervjuar, gjorde att dessa aspekter beaktades inför intervjuerna. Frågor valdes som den intervjuade lätt skulle kunna ge svar på och följdfrågorna byggde primärt på frågeorden när, var, hur och hur ofta? Syftet med intervjun klargjordes i början av samtalet och jag som intervjuare strävade medvetet efter att inte ge uttryck för personliga synpunkter.

Enkäten har testats på en klass i årskurs 9, där både deras svar och kommentarer om frågorna har fungerat som underlag för den slutliga versionen. Rutiner togs fram för enkätinsamling och sammanställning av svaren för att datahanteringen alltid skulle ske på likartat sätt. Elevunderlaget har valts så stort som möjligt inom ramen för vad som bedömts hanterbart i studien. Vidare har handledaren gått igenom upplägget av undersökningen mycket noga innan den genomfördes. Faktorer som kan ha oönskad påverkan på det som studerats har minimerats i så stor utsträckning som möjligt, såsom åldersvariation, geografisk och social spridning mellan eleverna och olika undervisningskultur.

Datamaterialen har enbart analyserats av en person, vilket sänker bedömarreliabiliteten. Att skriva ner en sammanfattning av ljudinspelningarna i stället för fullständig transkribering innebär en ad hoc-process där observatören fungerar som ett filter, vilket kan ses som ett metodfel. Detta är dock ett medvetet val för att ge möjlighet till intervju av fler personer och där analysen av inspelningarna skett som en iterativ lyssningsprocess i stället för en textanalys. Att studien saknar jämförelsegrupp försvårar möjligheten att dra slutsatser från materialet (Johansson & Svedner, 2006:25), men det bedömdes vara av större vikt att ha ett stort elevunderlag i fallstudien för att få ett säkrare underlag för de data som samlats in.

Med *validitet* menas i vilken utsträckning man faktiskt mäter det som man avser sig att mäta och om resultaten ger en sann bild av det som undersöks (Johansson & Svedner, 2006:108). Detta innebär att reliabiliteten är en nödvändig förutsättning för validiteten, men ingen garanti för en hög validitet – man kan mäta på rätt sätt men fel saker (Stukát, 2005:126). Esaiasson m.fl. påpekar dock att resultatvalideringen – det vill säga om vi verkligen mäter det vi säger oss mäta, först går att utvärdera när väl det empiriska arbetet är genomfört (Esaiasson m fl., 2007:63). För att få så god validitet som möjligt har olika typer av problemuppgifter använts och för att öka trovärdigheten har vissa respondenters svar citerats. Ett dilemma är i vilken utsträckning eleverna kunnat vara ärliga, då de även har mig som undervisande lärare och därmed kan agera och svara utifrån vad de tror att jag önskar. Å andra sidan har de känt mig länge och är vana att diskutera, komma med synpunkter och uttrycka önskemål om undervisningen, så denna situation är inte ny för dem. För att minimera påverkan från läraren i studien har jag enbart fungerat som observatör när eleverna arbetat med problemuppgifterna och att genomföra studien vid flera tillfällen i stället för ett enstaka säkrar det empiriska underlaget.

Med *generaliserbarhet* menas i vilken utsträckning resultaten kan gälla utöver den aktuella studien (Johansson & Svedner, 2006:108). De främsta faktorerna som påverkar generaliserbarheten är om urvalet inte är representativt, undersökningsgruppen är liten, stort bortfall och om populationen inte är tydligt definierad (Stukát, 2005:129).

Det strategiska urvalet av analysenheter har styrt valet att utforma studien som en fallstudie. Detta medför dock att generaliserbarheten av resultaten minskar (Esaiasson m fl., 2007:179), men bedömningen har likväl varit att resultatet ska kunna fungera som stöd för eller emot rådande forskningsteorier. I studien har kvalitativa och kvantitativa metoder kombinerats för att analysera frågeställningarna ur olika perspektiv – triangulering. Detta möjliggör en ökad grad av generalisering i kombination med en djupare förståelse för det som studeras.

Elevbortfallet var litet och undersökningsgruppen var stor utifrån ramarna för studien. Avsaknad av en jämförelsegrupp gör det är svårt att föra analytiska resonemang och man förlorar i generaliserbarhet, men å andra sidan medgav det ökade elevunderlaget en djupare förståelse för frågeställningarna. Elevunderlaget är inte representativt för Sveriges totala population av åttondeklassare, men samtidigt kan konstateras att elevgruppen består av relativt självgående elever med god matematisk förmåga och vana att arbeta i grupp och att diskutera matematik. Om resultaten indikerar vissa problemområden, kan dessa resultat därför i högre utsträckning kunna generaliseras utanför den studerade gruppen, medan däremot positiva exempel inte lika lätt är generaliserbara.

Med studiens *replikerbarhet* avses dess reproducerbarhet, d.v.s. möjligheten att upprepa studien enligt den använda metodiken. För att få en god replikerbarhet har de använda metoderna beskrivits och dokumenterats så utförligt som möjlig så att de ska vara möjliga att återupprepa.

4.9 Etiska överväganden

Som stöd för de forskningsetiska principerna i detta arbete har främst Vetenskapsrådets skrift *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning* (Vetenskapsrådet, 2002) använts. Denna skrift presenterar fyra allmänna huvudkrav på forskning som rör de grundläggande kraven på individskydd för dem som deltar i undersökningen: informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet.

Informationskravet säger att ”forskaren skall informera de av forskningen berörda om den aktuella forskningsuppgiftens syfte” (Vetenskapsrådet, 2002:7). Detta har uppfyllts i det att berörda elever muntligt och skriftligt och vårdnadshavare skriftligt (Bilaga A) har informerats om syftet med examensarbetet och villkoren för deras deltagande. Examensarbetet har också presenterats muntligt för en av klasserna på ett föräldramöte 2 september, 2008. Rektor och klassmentorer har informerats muntligt och skriftligt. I den aktuella studien tackade tre elever i ena klassen nej men inga vårdnadshavare i någon av klasserna. De tre eleverna bildade en egen grupp under arbetet och arbetade med problemet på samma villkor som övriga elever, men deras resultat samlades inte in. Elevarbetet har bedrivits inom ramen för den vanliga undervisningen, varför deltagande i detta varit obligatoriskt för eleverna, men däremot har de elever och/eller vårdnadshavare som så önskat inte inkluderats i inspelningar, intervjuer, enkäter eller på annat sätt i rapporten.

Samtyckeskravet säger att ”deltagare i en undersökning har rätt att själva bestämma över sin medverkan” (Vetenskapsrådet, 2002:9) och har uppfyllts i det att elever och vårdnadshavare skriftligt accepterat medverkan i undersökningen.

Konfidentialitetskravet säger att ”uppgifter om alla i en undersökning ingående personer skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifterna skall förvaras på ett sådant sätt att obehöriga inte kan ta del av dem” (Vetenskapsrådet, 2002:12). Detta har uppfyllts i det att inga elever benämns med namn i rapporten och att uppgifter om elever och grupper som kan identifieras av utomstående har lagrats separat och enbart varit tillgängliga för författaren.

Slutligen säger *nyttjandekravet* att ”uppgifter insamlade om enskilda personer får endast användas för forskningsändamål” (Vetenskapsrådet, 2002:14). Detta möts genom att uppgifter om elever enbart varit tillgängliga för författaren, att elevkoder används om opponent eller handledare tar del av materialet och att elever och vårdnadshavare skriftligt har intygats att materialet behandlas strikt konfidentiellt och inte kommer att finnas tillgängligt för annan forskning eller bearbetning.

5 Resultat och analys

5.1 Elevernas inställning till matematik i skolan

Dessa resultat är baserade på del A i den enkät som eleverna besvarade efter första problemtillfället. Samtliga 46 elever har svarat.

20 av eleverna fann ämnet matematik intressant och 24 det ganska intressant. Alla utom en såg matematik som ett skolämne som kan vara både lätt och svårt.

Av eleverna var det 36 elever som menade att de lär sig bäst om de först får öva på rutinuppgifter i t.ex. läroboken för att sedan arbeta med problemlösning i stället för i motsatt ordning. 22 av eleverna föredrog att räkna på egen hand när de arbetar med läroboken, medan 15 ville arbeta i par och övriga varierade gärna. Några motiv till ensamarbete var att eleven får mer gjort, tankearbetet fungerar bättre och det är lugnare. De elever som föredrog pararbete lyfte särskilt fram att man då kan diskutera, hjälpa varandra och få fler idéer.

När det gäller att arbeta med större problemuppgifter, t.ex. rika matematiska problem, såg bilden något annorlunda ut. 19 ville arbeta parvis och 24 i grupper om tre eller fler elever. De som föredrog att arbeta i par menade att det kan vara svårt att samarbeta om man är många i gruppen och att det lätt blir stökigare. De som ville arbeta i större grupp ansåg att arbetet blir roligare och att man kan få ta del av olika sätt att lösa uppgiften på och därigenom lära sig nya sätt att tänka. När eleverna skulle specificera hur många elever som bör ingå i en grupp så föredrog 14 att vara tre i gruppen och lika många ville vara fyra, 11 föredrog att vara två och ingen ville vara i en grupp med fler än fyra deltagare.

För 30 av eleverna spelade könsfördelningen i gruppen inte någon roll, medan 14 föredrog könsblandade grupper. Endast en elev ville enbart arbeta med elever av samma kön. 21 elever ansåg att eleverna i gruppen ska ligga på ungefär samma kunskapsnivå, medan 17 menade att den bör vara blandad. För övriga elever spelade det inte någon roll. När det gäller vem som bör sätta samman elevgrupperna föredrog 21 elever att läraren gör detta, medan 10 helst såg att eleverna väljer och för resterande elever hade det ingen betydelse.

5.2 Resultatpresentation utifrån studiens frågeställningar

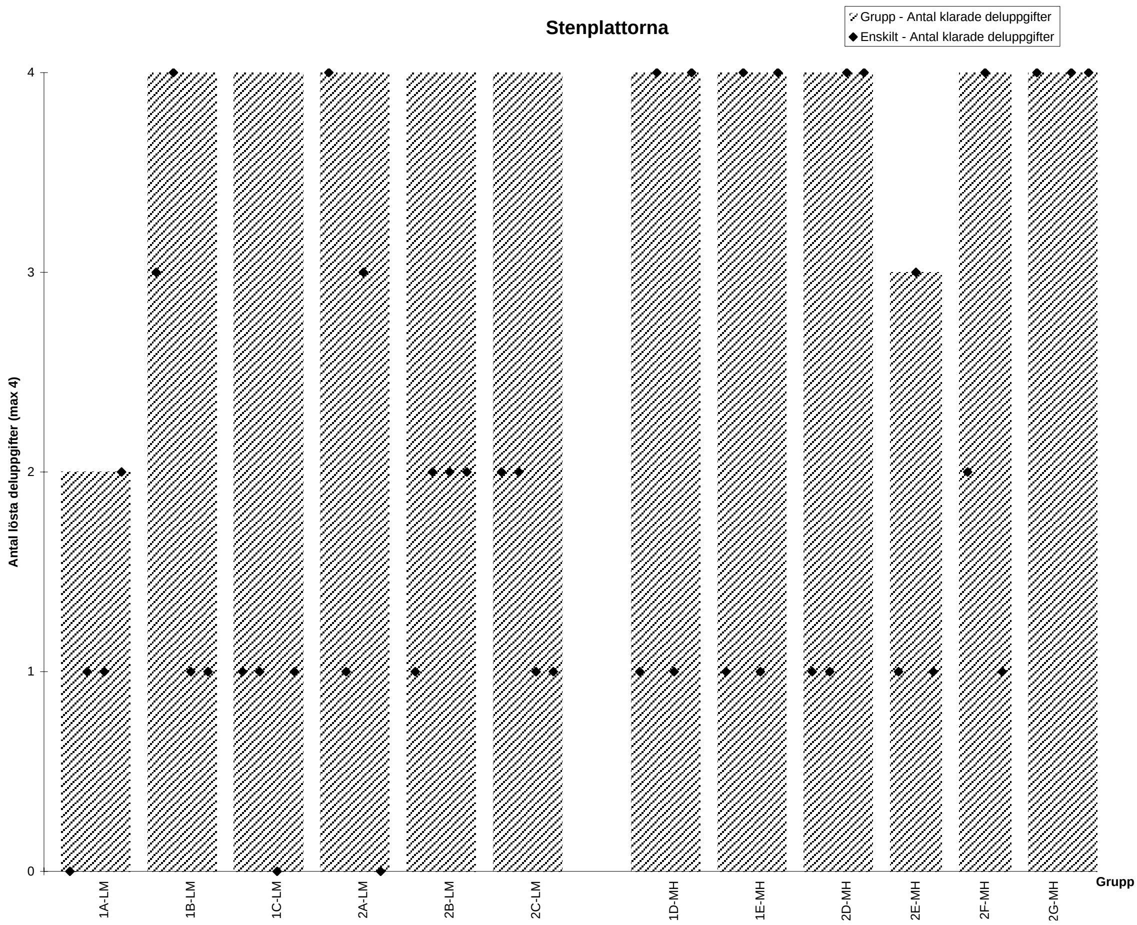
5.2.1 Utveckling av enskilda lösningar vid gruppsamverkan

För att besvara frågeställningen om de ”bästa” enskilda lösningsstrategierna utvecklas ytterligare vid bearbetning i grupp och i så fall på vilket sätt, har de skriftliga redovisningarna av samtliga enskilda lösningar och grupplösningar analyserats och jämförts inom och mellan grupperna. Vidare har relevanta frågor från enkäterna, de inspelade gruppsamtalen och intervjuerna tagits i beaktande.

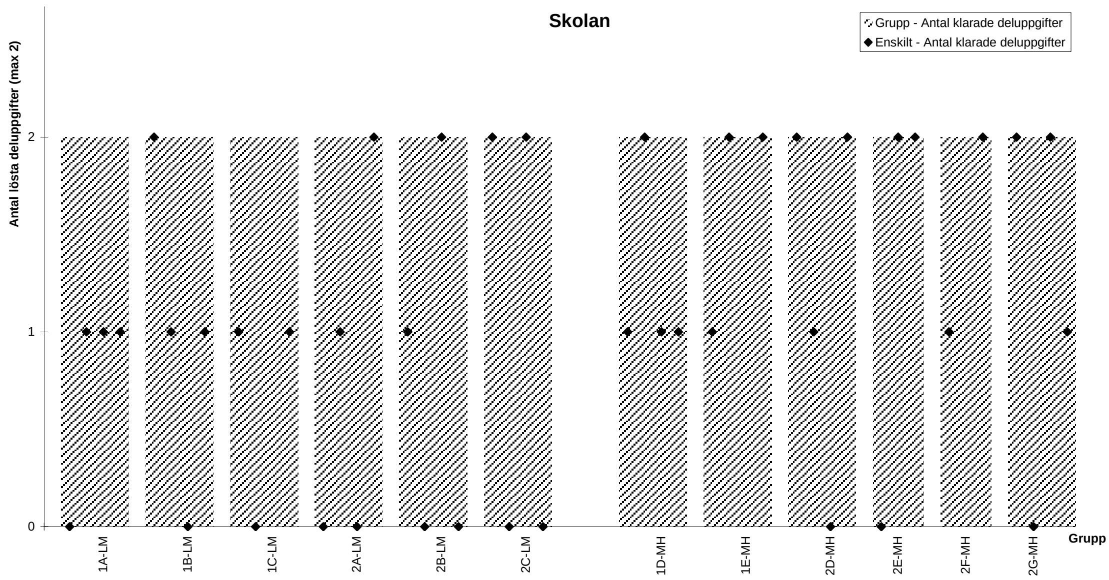
Totalt fanns 36 skriftliga grupplösningar att ta ställning till, tre per grupp, och till varje grupplösning hörde 3-4 enskilda lösningar. Vid analys av de enskilda elevlösningarna och de som sedermera togs fram i grupperna, gick det inte att se att någon eller några specifika personer i gruppen hade dominerat vid alla tre tillfällen och det gick inte heller att se någon skillnad i mönster mellan grupperna på låg- och medelnivå eller medel-hög. Vid lösningsanalysen verkade 15 av de totalt 36 grupplösningarna vara baserade på en elevs lösning och 6 stycken var en vidareutveckling av samtliga gruppdeltagares bidrag, där eleverna i grupp löst flera deluppgifter än vad någon enskild gruppmedlem klarat. I övrigt var det jämn fördelning mellan grupplösningar som byggde på två elevers bidrag, fler än två eller att gruppen helt tänkt om och inte baserat grupplösningen på någon av de enskilda lösningarna. För den sista problemuppgiften började eleverna i högre utsträckning om och angrep problemet tillsammans i stället för att förlita sig på en eller två enskilda elevlösningar. Eleverna uppfattade denna problemuppgift som avsevärt svårare än de två tidigare och vid intervjuerna framkom det att eleverna hade varit osäkra på om de tänkt rätt i sina enskilda lösningar och därför inte stridit för dessa på samma sätt som de gjort vid de tidigare problemen. Detta var också den uppgift där det gick att utläsa någon skillnad på lösningsgrad mellan de låg-medelpresterande grupperna och de medel-högpresterande. Två av de sex starkare grupperna hade lyckats lösa deluppgift c korrekt, medan inga grupper i övrigt klarat det.

Som tidigare nämnts var 6 av de 36 grupplösningarna en vidareutveckling av de enskilda lösningarna sett till antalet deluppgifter som lösts. Det var ingen signifikant skillnad mellan lösningsgraden för grupplösningarna för de låg-medelpresterande grupperna respektive de medel-högpresterande grupperna. Det som skiljde var att eleverna i de medel-högpresterande grupperna i större utsträckning hade löst fler deluppgifter i sina enskilda lösningar än eleverna i de mer lågpresterande grupperna. I samtliga fall utom ett fanns en eller flera elever som lyckats lösa lika många uppgifter som den slutliga grupplösningen för de medel-högpresterande grupperna. För de låg-medelpresterande grupperna hade dessa i 5 av 18 fall lyckats lösa fler uppgifter i grupp än vad de enskilda gruppmedlemmarna klarat. För två av dessa fall hade gruppen övergivit de enskilda lösningarna och börjat om från början, dock med användande av lösningsstrategier som kunde identifieras i en eller flera enskilda lösningar. Två fall byggde vidare på en elevs tankegångar som för den enskilda lösningen inte var färdigutvecklade, men som i grupp ledde till att fler deluppgifter kunde lösas. I det femte fallet, som också var en grupp som observerades, kom en av gruppmedlemmarna redan vid inledningen av diskussionen med det rätta svaret och presenterade det på ett sätt som helt avvek från elevens enskilda lösning. Orsakerna till detta kan vara flera, eleven kan ha tänkt om eller så hade eleven fått hjälp från andra i klassen mellan de två lektionerna. Diagrammen (Figur 2figur 2-4, sidorna 33-34) visar antalet lösta deluppgifter per individ och grupp.

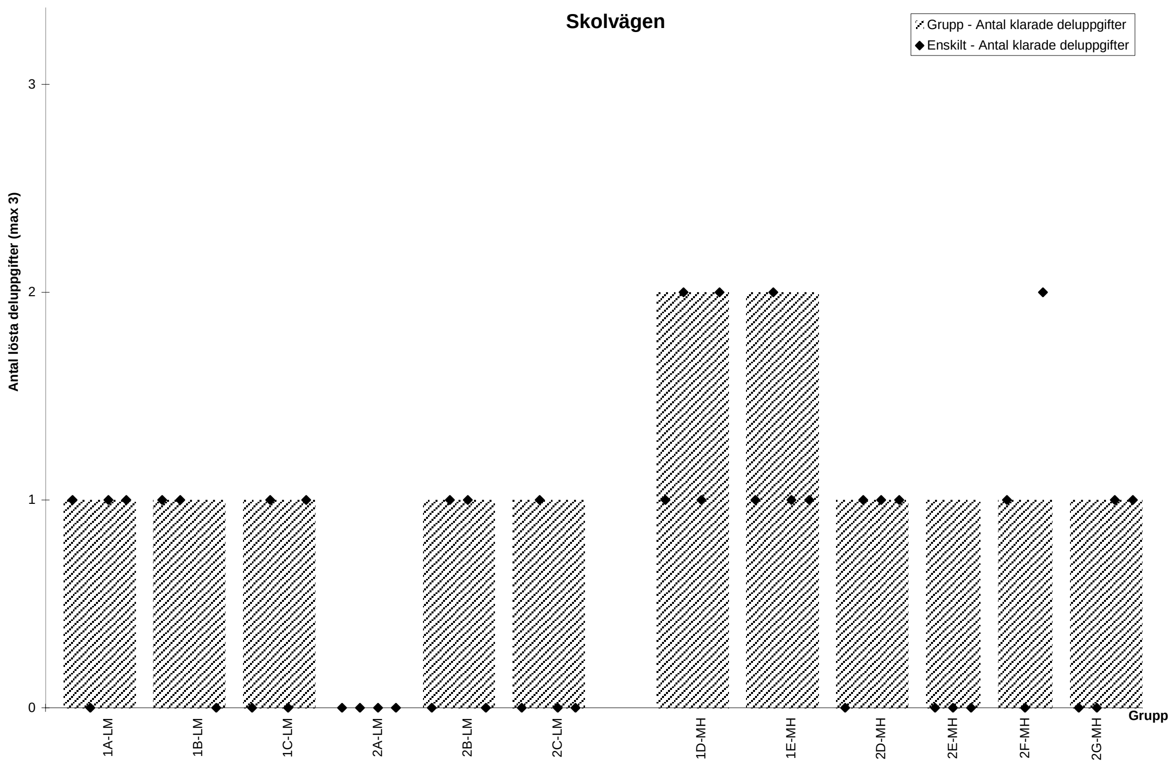
Endast tre elever använde konkret material i form av centikuber vid det enskilda arbetet och det gällde enbart den första problemuppgiften. För övriga problemuppgifter var det ingen som nyttjade detta material. I stället ritade en stor del av eleverna upp bilder som stöd vid lösandet under det enskilda arbetet, för den första problemuppgiften var det 27 elever av 45 som ritat någon form av figur. I grupplösningarna för samma uppgift var det dock enbart en grupp av totalt 12 som hade ritat figur i sin redovisning. För andra problemet hade två elever ritat som stöd för det enskilda arbetet medan ingen grupplösning nyttjade en grafisk uttrycksform. För den sista problemuppgiften innehöll 24 enskilda lösningar en ritning, medan 4 av 12 grupplösningar gjorde det. Detta var en uppgift som eleverna hade svårt att lösa och de redovisade sina ansatser till lösning direkt i den ritade figuren.



Figur 2   Diagrammet visar antal lösta deluppgifter per grupp och individ för problem 1, "Stenplattorna". Staplarna visar antalet lösta deluppgifter per grupp och punkterna innanför respektive stapel markerar gruppmedlemmarnas antal lösta deluppgifter vid det enskilda arbetet. Staplar och punkter till vänster om mellanrummet är låg-medelpresterande grupper och till höger medel-högpresterande. Avsaknad av punkter utgör elever som varit frånvarande vid det enskilda arbetet.



Figur 3   Diagrammet visar antal lösta deluppgifter per grupp och individ för problem 2, "Skolan". Diagramkonstruktionen är densamma som för Figur 2.



Figur 4 Diagrammet visar antal lösta deluppgifter per grupp och individ för problem 3, ”Skolvägen”. Diagramkonstruktionen är densamma som för Figur 2. Den punkt för grupp 2F-MH som ligger utanför stapeln utgör en elev i gruppen som i sin enskilda lösning klarat två deluppgifter, men som inte deltog i gruppdiskussionen.

I de inspelade grupperna där någon eller några elever lyckats lösa uppgifterna på egen hand låg fokus på att förklara så att övriga elever förstod och sedan besluta om vilken av lösningarna som skulle presenteras för klassen, inga ansatser gjordes att lösa uppgifterna på annat sätt. Ingen enskild lösning accepterades dock förutsättningslöst av gruppmedlemmarna, samtliga gruppmedlemmar tvingades förklara hur de resonerat, även de högpresterande eleverna. Det framgick även att eleverna arbetade för att alla i gruppen skulle ha förstått den grupplösning som redovisades. Dessutom menade de allra flesta av eleverna, över 40 stycken för respektive problemtillfälle, att alla i gruppen fick komma till tals när uppgifterna diskuterades. Mellan 24 och 29 av eleverna, beroende på uppgift, menade att de fått igenom något av sina lösningsförslag i den slutliga grupplösningen.

I enkäten gav eleverna olika motiv till varför de valde den grupplösning som de gjorde, de hade här möjlighet att ge flera skäl till val av lösning. Den allra vanligaste orsaken var att den var lättast att förstå för alla i gruppen, över hälften av de 46 eleverna (27 stycken för uppgift 1, 35 för uppgift 2 och 36 för uppgift 3) hade angett detta som motiv. För det första och andra problemet hade över hälften också angivit att metoden fungerade att använda på samtliga deluppgifter. Tredje problemuppgiften var av en något annorlunda karaktär och här var det inget annat motiv än begripligheten som fick något större genomslag.

Något som också kunde noteras utifrån de inspelade gruppsamtalen var att det kunde ligga olika tankegångar bakom skenbart lika resultat. För problemuppgift 1 med stenplattorna såg en elev i en låg-medelpresterande grupp att ramen utgjordes av fyra sidor med *n* inklämda plattor per sida samt fyra hörnplattor, där *n* angav figurens nummer. Han använde sig därför av bildens visuella uppbyggnad för att komma fram till det generella uttrycket ($4n + 4$) för antalet plattor i ramen. I en medel-högpresterande grupp som redovisade samma svar framgick det dock av det inspelade samtalet att de ser en aritmetisk talföljd i hur antalet plattor ökar per figur och använder sig av formeln för en sådan talföljd för att få samma generella uttryck som ovan. Även andra grupper kom fram till samma formel men utifrån andra sätt att visuellt betrakta figurerna.

I tre av de totalt 36 grupplösningarna kunde inte eleverna i gruppen bestämma vilken lösning som gruppen skulle redovisa skriftligt och de valde då att lämna in två separata lösningar. Den ena gruppen tillhörde kategorin medel-högpresterande och de valde två lösningar där den ena nyttjade sig av formeln för beräkning av summan i en aritmetisk talföljd, vilket de motiverade med att den var snabbast, innehöll mest matematik och skulle imponera mest på läraren. Den andra lösningen ansåg de vara bättre att presentera vid klassdiskussionen eftersom de bedömde att den förstnämnda var för avancerad för klasskamraterna att förstå. De övriga två grupperna som lämnat in dubbla lösningar tillhörde kategorin låg-medelpresterande. I enkäten motiverade de detta med att de inte kunde bestämma sig för vilken som var bäst. Den ena gruppen blev också inspelad och där framgår det att det är två elever som strider om att få igenom sin lösning och ingen vill ge med sig. Den ena eleven hade större stöd från övriga i gruppen, men den andra hade en mer genomtänkt lösning som denna dock inte kunde förklara så att övriga i gruppen förstod.

Även i de fall då grupplösningarna till allra största delen baserats på en enskild lösning, var den skriftliga gruppredovisningen av högre kvalitet än de enskilda. Orsakerna till detta kan vara flera, det är fler elever som är med och arbetar fram den slutliga skrivningen och att den har utvärderats mer. Utifrån inspelningarna framgår även att eleverna lade ner mycket tid på att gemensamt ta fram den skriftliga redovisningen av grupplösningen och att göra den tydlig och begriplig.

Från observationerna noterades att i de fall då en elev inte direkt fick förståelse från övriga för sin lösning, så övergick eleverna från en mer matematisk diskurs till en mer vardaglig sådan. Vid intervjuerna framkom dock att eleverna själva som regel inte var medvetna om i vilken utsträckning de använt ett matematiskt språk i sina samtal, men i enkäten hade en klar majoritet angett att de *ibland* eller *sällan* använde ett matematiskt språk. I de medel-högpresterande grupperna visade inspelningarna att eleverna i relativt stor utsträckning använde matematiska begrepp under diskussionen, men att motsvarande inte gick att se i de låg-medelpresterande grupperna. Eleverna tydliggjorde även sina resonemang på papper och använde då i högre utsträckning ett matematiskt symbolspråk.

Noterbart är att för de två första problemen var en överväldigande majoritet av eleverna (42 respektive 41 elever) nöjda med den slutliga grupplösningen, medan andelen nöjda sjönk till 24 av eleverna för den sista uppgiften, som också var den av uppgifterna som samtliga elever bedömde som svår.

En reservation måste dock göras mot att lösningsanalysen inte fångade upp alla de diskussioner som fördes i grupperna och att elever därmed kan ha påverkat grupplösningen utan att det framkommit vid analysen av de skriftliga lösningarna. Eleverna har i enkäten själva besvarat hur de menar att lösningen arbetades fram utifrån de enskilda lösningarna och någon fullständig konsensus går inte att se inom respektive grupp. En elev kunde t.ex. mena att grupplösningen baserades på en enskild elevlösning, medan en annan i gruppen ansåg att flera elever bidrog. De skriftliga kommentarerna från eleverna till enkätfrågan gav ytterligare stöd för detta och det visade sig i flera fall att, trots att grupplösningen i princip kunde vara identisk med en elevlösning, det likväl hade varit en diskussion kring detta och att flera elever aktivt deltog i beslutet om vilken lösning som skulle redovisas skriftligt. Några elever hade också svårt att på papper skriva ner sina resonemang kring lösningen, varför deras tankar inte återspeglades i deras enskilda lösningar men däremot i gruppdiskussionen. Vid jämförelse av de skriftliga redovisningarna med elevernas egna uppfattningar om vilka som bidragit till den slutliga lösningen fanns en god överensstämmelse, sett till vad majoriteten av eleverna i en grupp uttryckt.

5.2.2 Tidsfaktorns betydelse för problemlösning

Dessa resultat är baserade på audio- och videoinspelade observationer, elevsvar på relevanta frågor i enkäterna, intervjuer med eleverna samt skriftliga elevlösningar.

I denna studie avsattes en lektion för enskilt arbete med uppgiften och en lektion för gruppdiskussion per problem. Ordinarie lektionstid var mellan 45 till 50 minuter och av dessa var ca 5 min reserverade för att nedteckna lösningsförslagen. Till detta tillkom ställtid innan arbetet kommit igång ordentligt och när eleverna ansåg sig klara med uppgiften och då kom in på icke matematikrelaterade diskussioner. Effektiv tid för diskussion i grupp var mellan 20 och 25 min (observerat vid inspelning) och under detta tidsspann var det många av grupperna som parallellt med diskussionen nedtecknade grupplösningen.

I de observerade grupperna behövde de låg-medelpresterande grupperna mer tid för att förklara och värdera de enskilda lösningarna, medan de medel-högpresterande grupperna snabbare blev klara med detta moment, och sedan lade ner större del av tiden på att förfina lösningen och hitta på en egen uppgift av likartad karaktär. Observationerna visade att eleverna som regel inte visade på några nya tankar och idéer under utvecklandet av den gemensamma lösningen, utan grundade sina resonemang på de enskilda lösningar de hade att utgå ifrån.

Observationerna visade att gruppdiskussionerna kunde indelas i tre faser – fas ett med presentation av de enskilda lösningarna samt framtagande av gemensam lösning (ca 10-20 min), fas två med ungefär fem minuters samtal om annat än matematik eftersom eleverna ansåg sig färdiga med lösningen, samt fas tre då eleverna insåg att de måste arbeta lektionen ut och då återgick till uppgiften för att se över den en sista gång. Audioinspelningarna visade att det under den tredje fasen skedde en fördjupning av det matematiska samtalet, då eleverna i högre utsträckning ifrågasatte den grupplösning de arbetat fram och angrep problemet mer på djupet. Dock utarbetades inga nya skriftliga lösningar i denna fas, utan eleverna förde diskussionen muntligt.

Efter de tre problemtillfällena gavs eleverna genom den fjärde enkäten möjlighet att ge förslag på framtida upplägg av arbete med rika matematiska problem, baserat på deras erfarenheter från denna studie. För det inledande enskilda arbetet önskade 30 av eleverna att arbeta en lektion med problemet, medan 13 elever förordade ungefär en halv lektion. Två elever önskade att få längre tid på sig. Dessa två elever är mycket högpresterande, men klarade inte alla deluppgifter för problemet med skolvägen. De önskade mer tid enskilt för att förstå problemet och testa olika metoder och de menade också att det kan vara svårt i grupp att tänka nytt utöver de lösningsförslag som gruppmedlemmarna bidrar med från de enskilda lösningarna.

Eleverna ville avsätta en lektion eller mer för gruppdiskussionen. Vid intervjuer och observationer framkom det att eleverna inte hann utveckla den gemensamma lösningen ordentligt och inte heller testa sina svar eller pröva på andra lösningsstrategier eller uttrycksformer i någon större utsträckning.

5.2.3 För- och nackdelar med en heterogen gruppsammansättning

Resultaten för denna frågeställning kommer från analys av observationer, intervjuer och enkätsvar samt analys och jämförelse av enskilda elevlösningar och gruppernas gemensamma lösningar.

Två elever hade i de fyra observerade grupperna intagit en mer passiv roll - en lågpresterande elev i en låg-medelpresterande grupp samt en medelelev i en medel-högpresterande grupp. Dessa elever deltog dock i diskussionen, presenterade sina lösningar och lyssnade aktivt, men kom inte med frågor i lika hög utsträckning som övriga i gruppen. Resterande gruppmedlemmar deltog mycket aktivt, oavsett kunskapsnivå. Det var de relativt sett svagare eleverna i gruppen som frågade mest för att få förklaring till hur andra elever tänkt, medan de starkare eleverna till största delen förklarade hur de kommit fram till sina lösningar, och i mindre utsträckning även jämförde olika elevlösningar. Det fanns dock inget som indikerade att medeleleverna inte skulle vare sig fråga eller svara.

Sista enkäten som besvarades visade att ungefär lika stor andel av eleverna önskar arbeta i homogena grupper som i heterogena. Vid närmare analys av vilka elever som valt respektive gruppsammansättning framkom att samtliga av de mest högpresterande eleverna önskade få arbeta i en homogen grupp och samma önskemål hade två lågpresterande, tre medelelever och fyra mer ”normalt” högpresterande. Motivet för de riktigt högpresterande eleverna var att de inte fann det givande att behöva lägga ner så mycket tid på att förklara sina lösningar för övriga gruppdeltagare, utan att de i stället ville fokusera på nya sätt att angripa problemet i samarbete med elever på samma kunskapsnivå. Vid observationen framgick också att dessa elever inte hade några svårigheter att förklara sina lösningar för övriga gruppmedlemmar.

Eleverna lyfte främst fram att de i en homogen grupp snabbare kan komma vidare och för egen del får lära sig nya sätt att tänka. Några kommentarer i enkätsvaren från dessa elever var:

> E17 (mycket högpresterande): ”Man får höra om man tänker på samma sätt & kan lära sig av varandra. Det blir roligare diskussioner om man är på samma kunskapsnivå.”

> E19 (mycket högpresterande): ”Alla kan delta i diskussionen, utan att man behöver förklara för mycket. Alla kan också komma med egna idéer.”

Övriga elever som önskade arbeta i homogena grupper menade att det är lättare att förstå varandra och att alla har hunnit ungefär lika långt.

> E4 (medel): ”Att alla har kommit ca lika långt, eller att vi har någorlunda lika idéer.”

Några nackdelar som elever som förordar homogena grupper såg, var att diskussionen kan stagnera och att man inte lär sig något nytt.

> E13 (mycket högpresterande): ”Man kanske inte kan lära sig lika mycket nytt, eftersom ingen kan mer än en själv.”

> E14 (mycket högpresterande): ”Man behöver inte förklara vilket gör att man inte lär sig på samma sätt.”

> E23 (högpresterande): ”Alla kanske kommer på alla svaren på de enskilda lektionerna. Eller så kommer ingen på något och man kör fast.”

För de elever som helst arbetade i en heterogen grupp ville samtliga utom en vara den svagare kunskapsmässigt i gruppen. För övriga elever (11 stycken) spelade gruppsammansättningen ingen roll. De elever som önskade arbeta i en heterogen grupp motiverade detta främst med att de kan lära bättre och få nya idéer av dem som kan mer, att man lär sig av att förklara för andra och att svagare elever kan få hjälp.

> E12 (medelpresterande): ”Att det alltid finns någon som har löst det & som man kan få inspiration från. Man får förklara mer för dem som inte har gjort det & då lär man sig mer.”

En av de intervjuade eleverna, som var en medelelev i en medel-högpresterande grupp, föredrog även fortsättningsvis att arbeta i en heterogen grupp där eleven kan lite mindre än de övriga. Eleven tyckte dock efter första problemtillfället att det fanns ett visst obehag kring att säga till när eleven inte förstod:

> ”Det kändes lite pinsamt eftersom de var så duktiga och så kunde … kan man ingen matte, eller alltså, jag kan inte så mycket som dem.” (Elev E20, intervju 2008-10-03, tid 0:42-0:50)

Vid intervjuerna för de två efterföljande problemen tyckte dock eleven att det inte var obehagligt längre, eleven kände sig tryggare och vågade ta för sig mer. Övriga i gruppen bjöd också in eleven mer till diskussion vid de två senare problemtillfällena.

Nackdelar med en heterogen gruppsammansättning som eleverna lyfte fram var främst att svagare elever kan bli mer passiva och låta de starkare arbeta med uppgiften samt att det kan vara svårt att få alla att följa med i resonemangen.

> E8 (lågpresterande): ”Det kan hända att de dåliga skiter i och jobba & dom bra får göra allt.”

> E30 (högpresterande): ”Det kan ju bli lite jobbigt om de andra inte förstår uppgiften nångång så man måste förklara men alla ändå inte fattar.”

Resultaten från enkäten i inledningsfasen av studien visade att 21 elever ville arbeta i homogena grupper, 17 önskade delta i heterogena grupper och för övriga 8 hade gruppsammansättningen ingen betydelse. Efter att hela studien genomförts var det 18 som önskade arbeta homogent, 16 heterogent och 12 som gruppsammansättningen inte spelade någon roll för. Utifrån detta går det inte att se några specifika tendenser, förutom en liten förskjutning från att önska arbeta homogent till att kunskapssammansättningen inte har någon betydelse. Det bör dock poängteras att eleverna i denna studie inte fått arbeta i homogena grupper och därmed inte har något att jämföra med i praktiken.

Utifrån elevlösningarna gick det att se att grupplösningarna till stor del byggde på de starkare elevernas enskilda lösningar och att de svagare eleverna tog till sig de starkare elevernas sätt att tänka. Observationerna visade dock att grupper som bestod av flera högpresterande elever kunde dra lärdom av varandras kunskaper och fördjupa sin förståelse. Detta krävde dock att den svagaste eleven i gruppen utan problem klarade av att följa resonemangen, i annat fall avsattes större delen av tiden till att förklara lösningsstrategierna för denna elev.

6 Diskussion

6.1 Sammanfattning av resultat

Studiens frågeställningar söker svar på om, och i så fall hur, den eller de ”bästa” lösningsstrategierna ytterligare utvecklas vid bearbetning i grupp hur en styrd tidsram för arbetet kan påverka resultatet hur samt vilka för- och nackdelar som kan ses med en heterogen gruppsammansättning. De stora mängder indata som samlats in och analyserats har gett en god grund för att få svar på studiens frågeställningar.

Resultaten visar att gruppdiskussionen i första hand inriktar sig på att förklara elevernas enskilda lösningsförslag så att alla i gruppen förstår dem. Därefter utgår gruppen från en eller några av dessa lösningar vid framtagandet av en gemensam grupplösning. I första hand utgår gruppen från de lösningar som redovisat flest deluppgifter och som samtidigt är lätta för alla gruppmedlemmar att förstå. Strategier och procedurer som kan tillämpas på samtliga deluppgifter vinner också gehör. I de fall då en grupp klarar att lösa fler deluppgifter än vad som redovisats i de enskilda lösningarna, bygger grupplösningen på någon eller några elevers ofullbordade tankegångar och strategier från den enskilda lösningen. Inget visar att eleverna skulle ha involverat någon annan form av lösningsstrategi än de som förekommit i de enskilda lösningarna. Att rita som den del av lösandet av uppgiften är något som förekommer i högre utsträckning för de enskilda lösningarna än för grupplösningen och konkreta material används i mycket liten utsträckning.

Tidsramens påverkan på den slutliga grupplösningen visar att en fördjupad matematisk diskussion sker efter att eleverna anser sig klara med uppgiften men fortfarande måste sitta kvar i gruppen. I denna fas ifrågasätter eleverna i högre utsträckning den grupplösning de arbetat fram och ser på problemet med nya ögon. Detta indikerar att ordentligt med tid bör avsättas för diskussion i grupp för att låta eleverna nå denna nivå på diskussionen.

Arbete i heterogena grupper visar att starkare elever ofta får förklara sina lösningar för övriga elever. Detta är till nackdel för riktigt högpresterande elever som inte får samma möjlighet att lära av andra och därmed inte får samma kunskapsmässiga utmaning. Studien indikerar att dessa elever lärandemässigt skulle få ut mer av att arbeta i homogena grupper, vilket avviker från tidigare forskning. Det finns inte heller något som stödjer teorin att medelelever skulle inta en mer passiv roll vid gruppdiskussion i heterogena grupper.

Studien visar att denna arbetsform i hög utsträckning uppfyller de ledord om kommunikation och lärande genom problemlösning som återspeglas i skolans styrdokument och att den är ett bra komplement till den övriga matematikundervisningen.

6.2 Resultat i förhållande till tidigare forskning

6.2.1 Utveckling av enskilda lösningar vid gruppsamverkan

Sammanfattningsvis kan sägas att grupplösningen till största delen byggde på enskilda lösningar som alla i gruppen förstod. Eleverna utgick dock som regel från den lösning som klarat flest deluppgifter och om flera lösningar var aktuella valde gruppen den lösning vars strategi kunde tillämpas på alla deluppgifterna och som därmed var av mer generell karaktär och som samtidigt kunde förstås av alla i gruppen. För starka grupper som hade flera enskilda lösningar av generell karaktär var inte alltid motivet klart till varför de valde som de gjorde – motiven framgår inte av elevernas lösningar och observationerna gav inte tillräckligt underlag för att få några indikationer.

Gruppen kunde klara av fler deluppgifter än de enskilda gruppmedlemmarna, men fokus vid gruppdiskussionen hade till största delen rört sig kring att förankra olika lösningsförslag, utvärdera dessa och välja någon lösning som fick representera gruppen. Att lösningen förankrats hos samtliga elever i gruppen medförde att även de elever som enskilt inte lyckats lösa alla deluppgifterna fick en ökad förståelse. Det är något som eleverna själva i enkät och intervju lyfte fram som ett mervärde.

Det samtal som eleverna förde när de värderade varandras lösningsförslag visar att de tvingades att formulera sig och försvara sina lösningsstrategier, något som även framhålls av flera forskare (Ahlberg, 1995; Hagland m fl., 2005; Olsson, 2000). I den refererade forskningen talas även om att eleverna vid gruppdiskussion kan korrigera missuppfattningar och felaktiga beslut (Wistedt, 1996). Detta stämde för de två första problemuppgifterna, men för den tredje, som av eleverna ansågs vara den svåraste, blev snarare felaktigheterna och missuppfattningarna cementerade vid gruppdiskussionen, då eleverna fördjupade sig i felaktiga tankebanor. Några elever uttryckte vid intervjun att det var svårt att tänka om när läraren vid diskussion i helklass sedan presenterade hur man kunde tänka för att få ett korrekt svar, men de flesta intervjuade eleverna menade dock att det inte var några svårigheter med att tänka om när man väl förstod hur man borde ha resonerat och vilka tankefel som gjorts i gruppen.

I de grupper där ingen av eleverna lyckats lösa alla uppgifterna var samtalen mer inriktade mot att lösa fler av deluppgifterna. Det är främst de låg-medelpresterande grupperna som klarat av att lösa fler deluppgifter än vad de enskilda gruppmedlemmarna gjort, men eleverna i dessa grupper har å andra sidan klarat av att lösa färre deluppgifter enskilt. Det går inte att se att eleverna i grupp valt en ny strategi för att lösa ytterligare uppgifter, utan de har utgått från någon eller några elevers lösningsförslag, alternativt börjat från början men då med utgångspunkt från lösningsansatser i de enskilda lösningarna. För den sista problemuppgiften skilde sig dock diskussionen från de tidigare problemen. Denna uppgift var svårare och ingen elev hade lyckats lösa alla uppgifter. Vid intervjuerna framkom att eleverna inte kände sig säkra på de lösningar de kommit fram till enskilt, och gruppdiskussionen blev då mer inriktad på att förstå själva problemställningen och vad som efterfrågades och grupperna började i högre utsträckning om från början när de skulle arbeta fram en lösning.

Vid studie av elevernas lösningsstrategier visade det sig att eleverna som regel inte använde konkreta material som stöd, men många valde att rita bilder som stöd för lösningsprocessen. Dock användes bilderna i första hand för de enskilda lösningarna och togs inte med i grupplösningen i samma utsträckning, vilket indikerar att eleverna möjligen ser figurer och bilder som något som kan användas för att lösa en uppgift men inte som en del i en färdig lösningsredovisning.

Riesbeck (2008:22) talar om att själva lärandet till del handlar om att behärska diskursen, och observationerna visade att elever i grupp själva skapade länkar mellan den vardagliga och den matematiska diskursen. I de fall då en elev inte direkt fick förståelse för sin lösning, så övergick eleverna från en matematisk diskurs till en mer vardaglig när de resonerade muntligt. Eleverna tydliggjorde även sina resonemang på papper och använder då i högre utsträckning ett matematiskt symbolspråk och en mer matematisk diskurs, vilket främst överensstämmer med forskning som redovisas av Ahlberg (1995) och Riesbeck (2008).

6.2.2 Tidsfaktorns betydelse för problemlösning

Observationerna visade att det främst var under det sista skedet, ca 20 minuter in i diskussionen, som samtalet verkligen fördjupades och eleverna i högre utsträckning ifrågasatte den grupplösning de arbetat fram och såg på problemet med nya ögon. Detta återspeglades dock inte i de skriftliga lösningarna, eftersom de observerade grupperna redan nedtecknat sin grupplösning.

I första fasen presenterade de sina enskilda lösningar för varandra och tog fram en gemensam lösning medan de i andra fasen ansåg sig vara klara och pratade om annat än matematik. Det är möjligt att den andra fasen var nödvändig för att de i fas tre skulle kunna betrakta problemet på ett nytt sätt, eftersom den fasen medgav ett avbrott i de tankebanor eleverna haft inledningsvis. I den refererade forskningen framgår inte i detalj hur mycket tid som bör avsättas för arbete med rika matematiska problem, även om det betonas att det är av vikt att låta eleverna arbeta länge med ett problem. Ahlberg (1995:55) anger en lektion för hela arbetet, medan Hagland, Hedrén och Taflin (Hagland m fl., 2005:58) och Lester och Lambdin (Lester & Lambdin, 2007:102) menar att arbetet kan ta längre tid än så. Inget nämns dock i den refererade litteraturen om de olika faser som samtalet kan genomgå och deras betydelse för utformningen av den slutliga lösningen, och inte heller den förståelseutveckling som främst skedde i den sista fasen efter att eleverna egentligen ansett sig klara men är tvingade att fortsätta arbeta med problemet. Studien visar på behovet av att låta gruppdiskussionen ta tid och indikerar även att eleverna kan behöva ett avbrott när de känner sig klara för att sedan återgå till problemet. Ett sådant avbrott kan antingen ske under en lektion, men det kan även vara värt att låta eleverna i grupp återuppta arbetet under nästföljande lektion.

6.2.3 För- och nackdelar med en heterogen gruppsammansättning

Den refererade forskningen lyfter fram att det främst är medeleleverna som gynnas av homogena grupper, medan de högpresterande eleverna inte påverkas i någon större utsträckning av gruppens sammansättning och de lågpresterande främst gynnas av en heterogen gruppsammansättning. Motivet till detta anses främst vara sambandet mellan att få förklara sin lösning och ta del av andras förklaringar.

De observationer som gjorts i denna studie och de intervjuer och enkätsvar som lämnats av eleverna ger dock en delvis annorlunda bild. Likheter med forskningen är att det är de svagare eleverna i gruppen som frågat mest för att få förklaring till hur andra elever tänkt, medan de starkare eleverna till största delen har förklarat hur de tänkt med sina enskilda lösningar, och i mindre utsträckning även jämfört olika lösningar. Det finns dock inget som indikerar att medeleleverna inte skulle vare sig fråga eller svara. Elever från samtliga kunskapsnivåer fanns representerade bland dem som fann det mest givande att arbeta i homogena grupper och dessa elever motiverade detta med att det är lättare att förstå varandra och att alla har hunnit ungefär lika långt. En risk som eleverna såg med homogena grupper var att diskussionen kunde stagnera och att man därmed inte lärde sig något nytt. Samtliga riktigt högpresterande eleverna ville få arbeta i homogena grupper, med motiveringen att de önskade få utveckla den egna matematiska förmågan i samarbete med elever på samma kunskapsnivå. Detta sammantaget avviker från den syn som presenteras i Skolverkets forskningsöversyn om elevgrupper (Wallby m fl., 2001:106), där det konstateras att gruppsammansättningen inte har någon betydelse för högpresterande elever och att medelelever intar en passiv roll och därmed skulle gynnas mer av homogena grupper. För de låg-medelpresterande grupperna hade dessa i fem av fallen lyckats lösa fler uppgifter i grupp än vad de enskilda gruppmedlemmarna klarat, medan de medel-högpresterande grupperna i samtliga fall utom ett hade minst en elevlösning som klarat lika många deluppgifter som den slutliga grupplösningen. Detta visar att gruppsamverkan utan stöd från lärare inte bara fungerar för relativt sett starkare grupper utan att även svagare grupper kan vidareutveckla enskilda lösningar på egen hand.

De fördelar som kan ses med en *heterogen gruppsammansättning* avviker en del från den forskning som studien refererar till. Det bör dock noteras att eleverna enbart arbetat i heterogena grupper i denna studie och därmed enbart kunde se för- och nackdelar med denna form av gruppsammansättning, medan de i enkäten fick gissa vilka konsekvenser som en homogen gruppsammansättning kan medföra. Elevernas kommentarer visade dock att de ser de två gruppkonstellationerna som varandras motsatser och att den enas fördelar är den andres nackdelar.

6.3 Reflektioner om metodval

I denna fallstudie har triangulering använts som metod, där datainsamling skett med hjälp av olika metoder för en och samma frågeställning. Enkäterna gav en bra översikt av hur eleverna uppfattade arbetet, men intervjuerna var nödvändiga som komplement för att få en mer fördjupad förståelse. Observationerna var mest betydelsefulla för att beskriva och förklara olika skeenden i grupparbetet, t.ex. för att se vilka faktorer som styrde gruppens val av gemensam lösning, där sedan skriftliga lösningar, enkätsvar och intervjuer fungerat som komplement. Lösningsanalysen krävde skriftliga elevsvar, men även observation och enkätsvar som stöd.

Att använda triangulering som metod ökar graden av reliabilitet, eftersom samma fenomen studeras med olika metoder och skilda typer av insamlade data. Esaiasson m.fl. (2007:63) menar att resultatvalideringen – det vill säga om vi verkligen mäter det vi säger oss mäta - först går att utvärdera när väl det empiriska arbetet är genomfört. Validiteten för studien varierar beroende på frågeställning. I denna studie är den inte så hög sett ur ett större perspektiv eftersom både analysenheterna och insamlat data är begränsade i sin omfattning. Det hade varit att föredra om samtliga grupper hade kunnat observeras för de olika frågeställningarna, och rörande gruppsammansättning bör även en reservation göras mot att inga homogena grupper ingick i studien. För att besvara frågeställningarna blandas analyser av kvalitativ (t.ex. intervjuer och analys av lösningsinnehåll) och kvantitativ (t.ex. enkätsvar och korrekt besvarade elevlösningar) art. Detta ger en mer allsidig bild av frågeställningarna och ökar graden av generaliserbarhet i jämförelse med rent kvalitativa metoder, men gör även analysen mer komplex.

Även om denna undersökning är utformad som en fallstudie, kan några av frågeställningarna i viss mån sägas vara teoriprövande i mening att resultaten jämförs med resultat och rekommendationer från den refererade forskningen. Normalt sett gäller att totalurval och slumpmässiga urval är de bästa urvalsmetoderna när det handlar om generaliserbarhet av resultaten. I denna studie fanns inte möjlighet för ett slumpmässigt urval om påverkan av oönskade variabler samtidigt skulle minimeras, men vid undersökningar som fokuserar på just teoriprövning rekommenderas att hellre undersöka många än få analysenheter, även om analysenheterna inte är slumpmässigt valda (Esaiasson m fl., 2007:195). Av den anledningen har studien utförts på två likvärdiga klasser för att på så sätt få ett stort dataunderlag.

Beträffande studiens generaliserbarhet påtalades tidigare att studiens utformning som en fallstudie minskar möjligheten till generalisering och att studiens resultat snarare kan användas för att stödja eller motsäga rådande teorier. Avvikelser i förhållande till rådande teorier kan i högre utsträckning generaliseras än vad stödjande exempel gör. Resultaten från denna studie stödjer till viss del tidigare forskning, men beträffande gruppsammansättning baserat på kunskapsnivå finns avvikelser som delvis går emot forskningen, där denna studie bl.a. lyfter fram fördelar för högpresterande elever av att arbeta i homogena grupper. Eftersom ingen jämförelsegrupp finns är det dock svårare att föra djupare analytiska resonemang (Johansson & Svedner, 2006:25).

Allt insamlat data hanterades på samma sätt för alla tre problemtillfällen, vilket ökar reliabiliteten för undersökningen. Då data som insamlats skulle användas som stöd för flera av frågeställningarna, var det en fördel att observationerna både audio- och videoinspelades. Det möjliggjorde att återkomma till observationerna och betrakta dessa ur olika synvinklar, något som också Taflin poängterar (Taflin, 2007:7). I sin forskning menar Ahlberg (1995:37-38) och Taflin (2007:8) att elevlösningar och observationer är de viktigaste källorna vid datainsamling. Det mervärde som enkäterna och intervjuerna gav anser jag dock vara av sådan vikt att resultaten hade blivit avsevärt mindre tillförlitliga och mer avhängigt min subjektiva tolkning än vad som nu blev fallet.

De skriftliga lösningarna kategoriserades enligt KLAG-modellen. Den är dock grov och separata anteckningar gjordes för att få en utförligare bild. Det hade varit att rekommendera att förfina KLAG-modellen med fler underklasser, vilket hade underlättat analysen av lösningarna och möjliggjort jämförelser som enkelt kunde ha presenterats som matriser eller diagram.

Audioinspelningen pågick under hela gruppdiskussionen, medan filmningen alternerades mellan två grupper. Detta innebär att allt som skett i grupperna inte finns på film, och risken är att kritiska skeenden därmed inte kommit med. Detta kompenseras dock för genom att hela samtalet audioinspelats, varför detta inte bedömts vara kritiskt för resultaten. Filmningen visade sig vid analysen inte ge något större mervärde, det som kom till störst användning var elevernas samtal och det återgavs i sin helhet genom audioinspelningen. Observationsschemat gav inte så mycket stöd som förväntat. Omfattningen av materialet gjorde att observationsschemat snabbt växte och blev i det närmaste oöverskådligt och det gav inte heller något stöd för att hitta tillbaka till kritiska moment i diskussionen. Därför valdes att vid analysen i stället utgå från det tidsschema med kommentarer som skrevs ner vid andra genomlyssningen av audioinspelningarna. Det finns även risk att resultaten hade sett annorlunda ut om andra grupper hade observerats. Dels var diskussionerna inte identiska mellan de olika grupperna, dels kunde de grupper som inte spelats in vara mer avslappnade än de som observerats och därmed granskats mer intensivt. Inte heller kan jag garantera att jag korrekt tolkat det som eleverna har sagt eller skrivit, särskilt gäller detta för observationerna.

Enkäten hade testats på en klass i årskurs 9 och reviderades sedan utifrån elevernas kommentarer, men trots detta visade den på brister. Eleverna i studien ville inte alltid tvingas till att ta ställning utan satte antingen kryss i alla rutor eller mellan dessa. Det var också svårt för några att fylla i rätt – frågor som enbart skulle besvaras om man angivit ett visst svar för frågan innan, besvarades även av elever som inte uppfyllt detta krav. Dock var bortfallet på grund av dessa felregistreringar relativt ringa. Enkäten var också felkonstruerad för två uppgifter. Delfråga B1 och C1 var identiska vilket gjorde eleverna förvirrade, och av den anledningen ströks delfråga C1 vid analysdelen. Uppgift B16 hade som svarsalternativ *ofta, ibland, sällan* och *aldrig* men man skulle motivera sitt val om man hade svarat *ja*, vilket inte överensstämde med svarsalternativen. Detta korrigerades dock muntligt i klassen, så att eleverna förstod hur de skulle besvara frågorna. Enkäten var inte heller anonym eftersom det var viktigt att kunna relatera elevernas synpunkter till den grupp eleven deltagit i och till de enskilda lösningar som eleven presterat. Detta kunde medföra att eleverna inte vågat vara uppriktiga, men frågorna var inte av känslig karaktär och eleverna är sedan tidigare vana av muntligt och skriftligt utvärdera undervisningen. Trots dessa brister bedöms enkäten ha ett stort mervärde för studien, inte bara för att den omfattade samtliga elever utan även för att frågorna täckte in det som krävdes för att besvara frågeställningarna.

Intervjuerna var ostrukturerade, men en frågeguide användes som stöd så att alla intervjuerna fångade upp huvudfrågorna. Utifrån de huvudfrågor som ställdes till alla, så följdes svaren upp olika beroende på hur eleven responderade. Den öppna frågekaraktären gjorde att jag kunde bli mer följsam, men frånvaron av styrning gjorde att jag ibland blev för pratig och riskerade att styra samtalet för mycket, särskilt med de lite tystare eleverna som inte riktigt fick tid att tänka igenom svaren. För att intervjupersonerna ska våga uttrycka sina personliga åsikter är det viktigt att de känner sig trygga i intervjusituationen. Eftersom intervjupersonerna även vågade lyfta fram det som de ansåg fungerade mindre bra eller var tråkigt, menar jag att man kan anse att de kände sig så pass trygga i situationen att de svarade ärligt och uppriktigt på alla frågor. De informerades också vid varje intervjutillfälle om att de inga elever skulle kunna identifieras i uppsatsen.

Något som särskilt måste beaktas när det gäller resultaten är att jag även undervisar dessa klasser. I denna studie fungerade jag till stor del som observatör, men mina dubbla roller som lärare och observatör hade ändå betydelse. Min kunskap om eleverna kan medföra minskad objektivitet vid dataanalysen och elevernas agerande kan påverkas av att jag har haft två delvis motstridiga funktioner under studien. Studien är dock inte individ- utan grupporienterad, vilket troligen minskar denna negativa påverkan, något som också kan utläsas i det att eleverna uppförde sig som vid den vanliga undervisningen och att de även vågade framföra kritik vid intervjuer och enkätsvar.

Utifrån resultaten anser jag mig ha fått svar på de frågeställningar som gällt för studien och därmed att studiens syfte har uppnåtts. Dock vill jag göra en reservation för att resultaten enbart kan betraktas som uttömmande utifrån det datamaterial som ingått i studien, och att resultaten ytterligare skulle kunna förfinas med utvidgade studier.

6.4 Relevans för läraryrket

I styrdokumenten betonas vikten av lärande genom problemlösning och utvecklande av den kommunikativa matematiken, där elever bl.a. ska kunna värdera egna och andras resonemang, dra slutsatser, generalisera och förklara och argumentera både muntligt och skriftligt (Skolverket, 2000; Utbildningsdepartementet, 1994). Denna studie visar på en undervisningsform som särskilt stimulerar denna form av lärande för eleverna.

Redan vid genomförandet av denna studie var det uppenbart att de förutsättningar som sattes upp för elevernas arbete medförde en klar förbättring av undervisningen i jämförelse med tidigare läsår. Lösningarna blev mer genomarbetade, gruppsamtalen blev bättre och eleverna trivdes mycket bättre med arbetsformen. De nyckelfaktorer som jag främst tar med mig är att ge arbetet ordentligt med tid för varje problem, att tänka igenom målet för det aktuella problemet vid gruppsammansättningen, att bibehålla grupperna vid flera tillfällen samt att inte för snabbt gå in med stöttning till eleverna och när så sker göra det med urskiljning. Vidare ser jag en klar fördel med att träna eleverna i olika metoder för problemlösning, så att de får en ökad träning i olika lösningsstrategier som de sedan kan använda sig av vid arbete med rika matematiska problem. Nedan följer några rekommendationer som kan ges utifrån studiens resultat.

Rika matematiska problem av den form som används i denna studie finns färdiga att tillgå, vilket underlättar förberedandet för undervisande lärare. Dock krävs att läraren i förväg analyserar uppgifterna utifrån syftet med undervisningen.

Det är viktigt att avsätta ordentligt med tid för denna form av arbete. Det lektionsupplägg som praktiserats i denna studie är en lektion för enskilt arbete, en för gruppdiskussion och en tredje för diskussion i helklass. Detta möjliggör en fördjupad matematisk diskussion på gruppnivå, men även att eleverna får tid att enskilt arbeta igenom problemet ordentligt.

Läraren bör inte heller för snabbt gå in med stödjande frågor. Vid det enskilda arbetet bör fokus främst läggas på de elever som inte vet hur de ska angripa problemet, och även vid gruppdiskussionen bör läraren vara restriktiv. Elevgrupper som förväntas komma vidare på egen hand bör lämnas av läraren, för att i stället fokusera på grupper som verkligen behöver stöd. I annat fall är risken stor att eleverna aldrig på egen hand kommer in i den fördjupade diskussion som skedde vid den tredje fasen i studien och dessutom har läraren små möjligheter att följa alla gruppers samtal under en lektion.

Vid gruppdiskussionerna framkommer att eleverna har svårt att byta lösningsstrategi om de känner sig osäkra, vilket talar för att träna elever i olika lösningsstrategier (Skoogh & Johansson, 1991:113-114; Lester 1996:88; Berggren & Lindroth 1998:39) och det kan även sägas möta kursplanens syn på hur eleven framgångsrikt ska kunna praktisera matematik, där det bl.a. lyfts fram att eleven ska ha ”/…/ kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer” (Skolverket, 2000:27-28).

Beroende på hur grupper sätts samman utifrån kunskapsnivå, kan olika mål med undervisningen uppnås. Utifrån lärarens intentioner kan det ibland vara bra att vänta med att sätta samman grupperna och i stället avvakta och se hur långt eleverna har kommit. Om syftet är själva problemlösningsprocessen bör elever som löst alla uppgifterna sättas i samma grupp för att då fokusera på skilda lösningsstrategier, medan övriga grupper kan koncentrera sig på att lösa fler uppgifter. Om däremot eleverna ska tränas i att förstå och förklara kan man blanda elever med olika lösningsgrad på deluppgifterna.

Grupper om fyra elever är ett lämpligt antal för att få en bra balans och undvika att gruppen blir för beroende av enstaka elever. Beträffande gruppsammansättningen rekommenderas att variera mellan homogena och heterogena grupper över tid och även medvetet sätta samman de heterogena grupperna så att eleven får alternera mellan att vara den relativt sett mer högpresterande respektive lågpresterande i gruppen. För lågpresterande elever kan det vara en fördel att alltid placera dem i heterogena grupper, alternativt att läraren går in och stödjer lågpresterande homogena grupper i högre utsträckning än övriga grupper. Studien lyfter särskilt fram vikten av att låta högpresterande elever emellanåt arbeta tillsammans i grupp. Det är även en fördel att hålla grupperna intakta vid flera problemlösningstillfällen. Denna fördel är också något som kan utläsas vid observationerna då grupperna kom igång mycket bättre vid andra och tredje problemtillfället.

6.5 Förslag till fortsatt forskning

Det finns fortfarande mycket forskning att göra kring grupparbete med rika matematiska problem, bl.a. utformande av problemuppgifter, gruppsammansättning och vilka former av lärande som tränas med detta arbetssätt.

Studien visar på likheter med den refererade forskningen men även på avvikelser, främst beträffande vilka elever som drar fördel av olika gruppsammansättningar utifrån kunskapsnivå. Den forskningslitteratur som ingått i denna studie innehöll dock ingen utförligare redogörelse för de områden där avvikelserna uppdagade sig, varför det är svårt att här dra några slutsatser om vad dessa avvikelser beror på. En reflektion är dock att den refererade forskningen ser aktivt deltagande i en diskussion som något positivt, oavsett vilken form av lärande och utveckling det rör sig om för eleven. Denna studie visar att det finns en skillnad i mervärde om en elev enbart får förklara sin lösning för andra eller om eleven får ta del av andras sätt att resonera. Det framgår inte heller av den refererade forskningen om en elev kan ta till sig nya kunskaper, även om eleven intar ett mer passivt förhållningssätt i gruppen. Enkäter och intervjuer visar att eleverna själva tyckte att arbetet var utvecklande även om de inte var så aktiva i diskussionerna.

Utifrån dessa erfarenheter kan några förslag till framtida forskningsansatser göras. Forskning kan dels utvidgas till ett större elevunderlag utifrån samma frågeställningar för att få en bättre helhetsbild, men det finns också intressanta studier att göra med samma elevunderlag som ingått i denna studie. Samma arbetsmetod kan användas men tillämpad på kunskapsmässigt homogena grupper, för att på så sätt bättre kunna verifiera i vilken utsträckning forskningens resultat om gruppsammansättning stämmer. Studier kan även göras för att analysera hur elever växlar mellan den vardagliga och matematiska diskursen när de ska förklara sin lösning för övriga elever, och om diskursen påverkas av om mottagare förstår eller inte förstår resonemangen.

För att få ett säkrare underlag för de slutsatser som dragits i denna studie skulle det även vara att rekommendera att spela in samtliga elevgrupper under gruppdiskussioner. Det är även av intresse att inkludera den gemensamma klassdiskussionen och på detta sätt följa elevernas resonemang och val av uttrycksformer och lösningsstrategier samt om det sker någon vidareutveckling av dessa i den gemensamma diskussionen i helklass. Eftersom två likvärdiga klasser följts, är även ett forskningsområde att ge en klass specifik träning i olika problemlösningsstrategier och uttrycksformer för att se i vilken utsträckning en sådan träning påverkar arbete med rika matematiska problem, enskilt eller i grupp. Den andra klassen får inte sådan träning och fungerar därmed som referensgrupp.

6.6 Avslutande reflektion

För personlig del har denna studie varit mycket givande. Att på detta sätt fördjupa sig i ett arbetssätt som är direkt applicerbart i den dagliga undervisningen har varit till stor glädje och resultaten har delvis kommit som en överraskning. Den största upplevelsen har varit att i efterhand lyssna på de inspelade gruppdiskussionerna – som lärare i ett klassrum med 25 elever finns i vanliga fall ingen möjlighet att följa en grupp under en hel lektion och studien visade hur mycket som sker i dessa elevsamtal som jag aldrig tidigare har uppmärksammat. Jag har insett vikten av att ge eleverna ordentligt med tid och även att inte gå in för snabbt som lärare med att ge stöttning. Detta är något som inte framgår i den forskning jag tagit del av och som jag därför inte reflekterat över tidigare.

7 Referenser

Ahlberg, Ann (1991). ”Att lösa problem i grupp”. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red.), *Problemlösning* (s. 85-100). Lund: Studentlitteratur.

Ahlberg, Ann (1995). *Barn och matematik.* Lund: Studentlitteratur.

Ahlberg, Ann (2000). ”Att se utvecklingsmöjligheter i barns lärande”. I K. Wallby, G. Emanuelsson, B. Johansson, R. Ryding & A. Wallby (red.), *Matematik från början* (s. 9-97). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Bell, A., Burkhardt, H., Crust, R., Pead, D & Swan, M. (2007). “Undervisa genom problemlösning”. I J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby & K. Wallby (red.), *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv* (s. 109-122). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Berggren, P. & Lindroth, M. (1998). *Kul matematik för alla. En idébok för 2000-talets lärare.* Solna: Ekelunds förlag.

Björkqvist, Ole (1999). ”Rika matematikuppgifter”. *Nämnaren* 26(4), 35-40.

Bärring, E., & Landström, V. (2008). *Matematik i konstruktivistisk anda* (Examensarbete 15 hp, Lärarutbildningen Natur Miljö Samhälle) Malmö: Malmö högskola.

Edin, Maria (2003). *Intresse för matematik. Inverkan av grupparbete kring vardagens matematik* (Examensarbete 10 p, Pedagogutbildarna, 2003:098 PED) Luleå: Luleå tekniska universitet.

Emanuelsson, G., Johansson, B., Nilsson, M., Olsson, G., Rosén, B & Ryding, R. (red.) (1995). *Matematik – ett kärnämne.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (red.) (1996). *Matematik – ett kommunikationsämne*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Eriksson, Rolf (1991). ”Från min klass”. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red.), *Problemlösning* (s. 101-112). Lund: Studentlitteratur.

Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H. & Wängnerud, L. (2007): *Metodpraktikan. Konsten att studera samhälle, individ och marknad.* Vällingby: Norstedts Juridik.

Fyrhag, O., & Himanen, J. (2007). *Rika matematiska problem. En studie om problemlösning i grupp och individuellt.* (Examensarbete 10 p, Lärarutbildningen Natur Miljö Samhälle) Malmö: Malmö högskola.

Fälth, U., & Svensson, J. (2006). *Problemlösning som en del av matematikundervisningen.* (Examensarbete 10 p, School of Mathematics and System Engineering, Nr 06090). Växjö: Växjö universitet.

Grevholm, Barbro (1991). ”Problem för lärare”. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red.), *Problemlösning* (s. 150-164). Lund: Studentlitteratur.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005): *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Hedrén R., Hagland, K., & Taflin, E. (2005). ”Lärares tankar vid arbete med rika problem”. *Nämnaren* 29(2), 13-18.

Helmertz, Tomoko (2007). *Problemlösning – En jämförelse mellan svensk och japansk undervisning.* (Examensarbete 10 p, Lärarutbildningen Natur Miljö Samhälle). Malmö: Malmö högskola.

Jakobsson, Thorild (2007): *Inlämningsuppgifter.* (Instruktioner för inlämningsuppgifter, Matematisk problemlösning i skolan, 7,5 hp). Falun: Högskolan Dalarna.

Johansson, Bo & Svedner Per Olov (2006): *Examensarbetet i lärarutbildningen. Undersökningsmetoder och språklig utformning.* Uppsala: Kunskapsföretaget i Uppsala AB.

Larsson, Maria (2007): *32 rika problem i matematik.* Stockholm: Libers förlag.

Lester, Frank (1996). ”Problemlösningens natur”. I G. Emanuelsson, K. Wallby, B. Johansson, & R. Ryding (red.), *Matematik – ett kommunikationsämne* (s. 85-91). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Lester, F., & Lambdin, D.V., (2007). ”Undervisa genom problemlösning”. I J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby, K. Wallby (red.), *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv* (s. 95-108). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Malmberg, Ulrihca (2007). *Pilotproblem: Skolvägen.* (Inlämningsuppgift på kurs Matematisk problemlösning i skolan, Högskolan i Dalarna 7,5 hp). Falun: Högskolan i Dalarna.

Mouwitz, Lars (2007). ”DPL 33. Vad är problemlösning?” *Nämnaren* 34(1), 61.

Myndigheten för skolutveckling (2007). *Matematik. En samtalsguide om kunskap, arbetssätt och bedömning.* Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Nationalencyklopedin (2008): *Nationalencyklopedin* [www]. Hämtat 22 september 2008 från http://www.nationalencyklopedin.se.

Niclasson, E., & Sandén. S. (2007). *Elevers olika strategier vid problemlösning i matematik. En kvalitativ studie i årskurs 3.* (Examensarbete 10 p). Skövde: Högskolan i Skövde.

Olsson, Ingrid (2000). ”Att skapa möjligheter att förstå”. I K.Wallby, G. Emanuelsson, B. Johansson, R. Ryding & A. Wallby (red.), *Matematik från början,* (s. 179-214). Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet, Göteborg.

Persson, P., & Svensson, J. (2006). *Matematisk problemlösning i grupp. Hur klarar elever av att använda sina matematikkunskaper när de löser problem med vardagsinnehåll?* (Examensarbete 10 p, Lärarutbildningen Natur Miljö Samhälle). Malmö: Malmö högskola.

Pólya. G (1970). *Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande.* Stockholm: Prisma.

Riesbeck, Eva (2008). *På tal om matematik. Matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen.* (Avhandling, Institutionen för beteendevetenskap och lärande, Nr 129). Linköping: Linköpings universitet.

Runborg Johansson, C., & Moberg, U. (2006). *En studie om elevers lösningsstrategier vid matematisk problemlösning.* (Examensarbete 10 p, School of Mathematics and Systems Engineering, Nr 06054). Växjö: Växjö universitet.

Schkala, R., & Zdrnja, B. (2007). *Om strategier vid problemlösning i matematik.* (Examensarbete 10 p, Lärarutbildningen Natur Miljö Samhälle). Malmö: Malmö högskola.

Schoenfeld, Alan H. (1992). “Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics”. I Douglas A. Grouws (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 355-358). New York: Macmillan Publishing Company.

Silver, E.A., & Smith, M.S. (2001). ”Samtalsmiljöer – Att förverkliga reformer i klassrummet”. *Nämnaren* 28(4), 11-15.

Silver, E.A., & Smith, M.S. (2002a). ”Samtalsmiljöer – Att få elever att samtala om matematik”. *Nämnaren* 29(1), 49-52.

Silver, E.A., & Smith, M.S. (2002b). ”Samtalsmiljöer – Berikande problem”. *Nämnaren* 29(2), 39-42.

Silver, E.A., & Smith, M.S. (2002c). ”Samtalsmiljöer – Att leda och stödja samtal”. *Nämnaren* 29(3), 34-40.

Skolverket (1997). *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik.* Stockholm: Liber distribution.

Skolverket (2000). *Kursplaner och betygskriterier i matematik, grundskolan.* Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2003a). *Lusten att lära – med fokus på matematik* (Skolverkets rapport nr 221). Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2003b). *Självkänslan och skolans vardag* (Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002). Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2007). *PISA 2006. 15-åringars förmåga att förstå, tolka och reflektera – naturvetenskap, matematik och läsförståelse. Resultaten i koncentrat* (Sammanfattning av rapport 306). Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2008a). *Salsa - Betygsresultat för kommuner och skolor år 9* [www]. Hämtat 14 september 2008 från http://salsa.artisan.se/.

Skolverket (2008b). *SIRIS – Information om kvalitet och resultat* [www]. Hämtat 14 september 2008 från http://siris.skolverket.se/.

Skoogh, L., & Johansson, H. (1991). ”Att undervisa i problemlösning”. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red.), *Problemlösning* (s. 113-130). Lund: Studentlitteratur.

Stake, R.E. (2000). ”Case studies” i N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (red.) *Handbook of qualitative research* (2:a rev upplagan) (s. 435-454). Thousand Oaks, Californien: Sage.

Steinberg, John (2006). *Ledarskap i klassrummet.* Malmö: Gleerups utbildning.

Stukát, Staffan (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* Lund: Studentlitteratur.

Svedberg, Lars (2007). *Gruppsykologi. Om grupper, organisationer och ledarskap* (4 upplagan). Lund: Studentlitteratur.

Taflin, Eva (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande* (Avhandling, Department of Mathematics and Mathematical Statistics). Umeå: Umeå universitet.

Undvall, L., Forsberg, S., Olofsson, K-G., & Johnson, K. (2007). *Matematikboken Y.* Stockholm: Liber AB.

Utbildningsdepartementet (1994). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet.* Lpo 94. Stockholm: Fritzes.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* [www]. Stockholm: Vetenskapsrådet. Hämtat 14 juli 2008 från www.vr.se.

Wallby, K., Carlsson, S., & Nyström, P. (2001). *Elevgrupperingar – en kunskapsöversikt med fokus på matematikundervisning.* Skolverket, Liber distribution, Stockholm.

Wistedt, Inger (1996). ”Matematiska samtal”. I G. Emanuelsson, K. Wallby, B. Johansson, & R. Ryding (red.), *Matematik – ett kommunikationsämne* (s. 65-68). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Wyndham, Jan (1991). ”Problemmiljö och miljöproblem”. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (red.), *Problemlösning* (s. 51-66). Lund: Studentlitteratur.

Wyndham, J., Riesbeck, E., & Schoultz, J. (2000): *Problemlösning som metafor och praktik* (Institutionen för tillämpad lärarkunskap). Linköping: Linköpings universitet.

Insamlade data

Audio- och filmupptagningar från grupparbetena samt enkätsvar finns hos författaren.

Bilaga A: Medgivandeförfrågan till vårdnadshavare och elever

Anhållan om tillstånd för att ert barn kan delta i en undersökning inom ramen för ett examensarbete vid lärarutbildningen vid Göteborgs universitet

Jag heter Ulrihca Malmberg och undervisar ert barn i matematik, biologi och kemi. Jag utbildar mig även på korta lärarprogrammet vid Göteborgs Universitet och skall nu skriva den avslutande uppgiften inom lärarutbildningen som är mitt examensarbete och som ger mig min lärarbehörighet. Arbetet motsvarar 10 veckors heltidsstudier och skall vara klart i december 2008. Examensarbetets syfte är att ta reda på om och i så fall hur gruppdiskussioner vid lösning av mer komplexa problemlösningsuppgifter, s.k. *rika matematiska problem,* kan främja elevers lärande, förmåga att argumentera för egna lösningsförslag samt att värdera kamraters lösningar. De viktigaste frågorna jag behöver få svar på är hur elevernas enskilda problemlösningar vidareutvecklas när de tas upp i gruppdiskussioner elever emellan samt vilka faktorer som har störst inverkan på det slutliga lösningsförslag som gruppen tar fram. För att kunna besvara dessa frågor behöver jag samla in material genom insamling av elevlösningar, intervju, observation och frågeenkäter med elever i två klasser.

Studien görs inom ramen för den vanliga undervisningen och arbetssättet är sedan tidigare bekant för eleverna. Totalt ingår tre matematiska problem som bearbetas vid olika tillfällen under perioden september – december 2008. För min studie kommer jag att analysera elevernas enskilda lösningar och jämföra dessa med den lösning som respektive grupp arbetar fram. Vidare kommer gruppdiskussionen för några grupper att spelas in på band. Fokus är här att analysera hur eleverna kommunicerar matematiskt och vilka parametrar som påverkar det val av gemensam lösning som gruppen arbetar sig fram till. Samtliga elever får sedan svara på en kortare enkät om hur de tyckte att det gick att arbeta enskilt och i grupp, och några elever i de grupper vars samtal spelats in kommer även att djupintervjuas för att se hur de upplevde denna undervisningsform, sett ur ett lärandeperspektiv.

Jag vill med detta brev be er som vårdnadshavare om tillåtelse att ert barn deltar i den observation, intervju och frågeenkät som ingår i examensarbetet. Alla elever kommer att garanteras anonymitet. Den skola och klass som finns med i undersökningen kommer inte att nämnas vid namn eller på annat sätt kunna vara möjliga att urskilja i undersökningen. I enlighet med de etiska regler som gäller är deltagandet helt frivilligt. Ert barn har rättigheten att intill den dag arbetet är publicerat, när som helst välja att avbryta deltagandet. Materialet behandlas strikt konfidentiellt och kommer inte att finnas tillgängligt för annan forskning eller bearbetning.

<u>Vad jag behöver från er</u> är att ni som elevens vårdnadshavare <u>skriver under</u> detta brev <u>och senast fredag 12:e september</u> skickar det med eleven tillbaka till skolan. Sätt således ett kryss i den ruta som gäller för er del:

O Som vårdnadshavare <u>ger jag tillstånd</u> att mitt barn deltar i undersökningen

O Som vårdnadshavare <u>ger jag inte tillstånd</u> att mitt barn deltar i undersökningen

Datum …………………………………………..

…………………………………………………….. ………………………………………….

vårdnadshavares underskrift/er elevens namn

Har ni ytterligare frågor ber vi er kontakta mig på nedanstående adress eller telefonnummer:

Med vänliga hälsningar

Ulrihca Malmberg
Adress: XXX
Tel: XXX
e-post: XXX

Handledare för undersökningen är Mikael Holmquist, lektor, Göteborgs universitet, IPD Enheten för ämnesdidaktik, tel: XXX

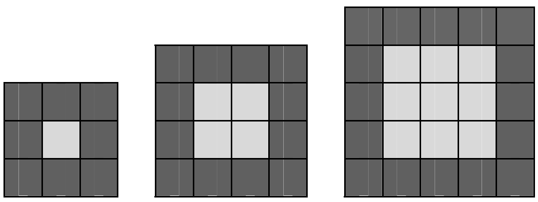
Kursansvarig lärare är Jan Carle, docent, Göteborgs universitet, Sociologiska institutionen, tel XXX

Bilaga B: Rikt problem # 1

STENPLATTOR

[bild]

Ett mönster läggs med hjälp av kvadratiska stenplattor, mörka och ljusa. Så här ser mönstret ut:



Figur 1 *Figur 2* *Figur 3*

a) Hur många plattor går det år till figur 5?
Hur många av dem är ljusa och hur många är mörka?

b) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur 15?

c) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur 100?

d) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur *n*?

e) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

f) Kan du lösa den ursprungliga uppgiften på ett annat sätt?

Källa: Hagland m fl., 2005

Bilaga C: Rikt problem # 2

SKOLAN

Du får veta några saker om en skola:

- Exakt en tredjedel av eleverna går i 8:an
- Exakt 20 % av eleverna kommer till skolan med buss.
- Exakt hälften av eleverna är flickor på skolan.
- Fler än 300 elever och färre än 400 elever går på den här skolan.

a) Hur många elever kan det gå på den här skolan? Ge ett exempel.

b) Försök finna en regel för hur många elever som kan gå på skolan. Ange alla antal elever som är möjliga.

c) Skriv en ordentlig redovisning av hur du löst problemet och lämna in.

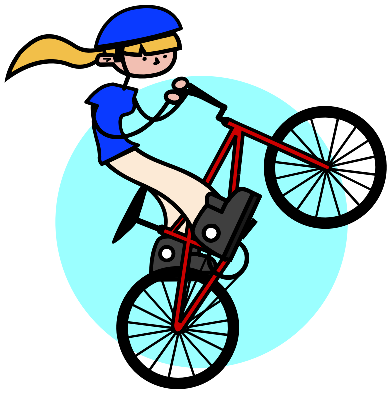
d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

e) Kan du lösa den ursprungliga uppgiften på ett annat sätt?

Källa: Hagland m fl., 2005

Bilaga D: Rikt problem # 3

SKOLVÄGEN




Ville och Erika går i samma skola men bor olika långt från skolan. Båda cyklar till samma busshållplats. När Ville står och väntar på bussen har han cyklat 4/7 av hela sin skolväg. Erika har cyklat 3/5 av hela sin skolväg när hon kommer till busshållplatsen.

a) Vem av dem har längst till skolan?

b) Hur mycket längre är den vägen än den andras väg?

c) Om den gemensamma bussresan är *b* kilometer lång, hur lång är Villes hela skolväg och hur lång är Erikas hela skolväg?

d) Skriv en ordentligt redovisning av dina lösningar och lämna in.

e) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

f) Kan du lösa den ursprungliga uppgiften på ett annat sätt?

Källa: Jacobsson, 2007

Bilaga E: Skriftliga instruktioner för arbete enskilt och i grupp

INSTRUKTION ENSKILT ARBETE

1. Försök inte att lösa alla uppgifter på en gång. Ta en uppgift i taget.
2. Fundera noga över vad du egentligen ska räkna ut.
3. Tänk på att alla metoder (utom att fuska!) är tillåtna för att lösa uppgiften.
4. Strunta till att börja med hur du ska redovisa din lösning. Koncentrera dig på att få fram ett svar.
5. När du har svaret – gör en ordentlig redovisning och förklara hur du tänkt. Skriv med så vacker stil du kan och se till att jag kan följa din tankegång. Skriv också gärna ner kommentarer, t.ex. om du känner dig osäker över något.
6. Har du inte lyckats lösa uppgiften – redovisa så långt du kom och förklara varför du inte kom vidare.
7. Gå nu vidare till nästa uppgift och gör på samma sätt som ovan.
8. Skriv namn och klass på din redovisning och lämna in i slutet av lektionen.
9. **HA TÅLAMOD – DET GÅR INTE ALLTID SNABBT ATT KOMMA PÅ HUR MAN SKA GÖRA!**

INSTRUKTION GRUPPÖVNING

1. Välj en gruppledare i gruppen. Gruppledaren ska ha ordning på samtalet och se till att alla får komma till tals.
2. Välj en person som kommer att skriva ner den slutliga lösning som ni kommer fram till.
3. Låt först var och en i gruppen presentera sin lösning, hur denne har tänkt och hur långt han/hon kom på sin lösning. Ha inga synpunkter ännu, men ställ frågor om ni inte riktigt hänger med.
4. När alla presenterat sin lösning – fundera över om några har gjort på likartat sätt. Vem har kommit längst? Är det någon lösning som är lättare eller svårare att förstå? Vilken eller vilka lösningar tycker ni verkar bra att jobba vidare med?
5. Bestäm er för hur ni ska arbeta vidare. Har ni löst alla uppgifterna enskilt eller finns det uppgifter kvar att lösa? Försök att tillsammans lösa eventuella uppgifter som ni inte har klarat när ni arbetat enskilt.
6. Skriv ner er slutliga lösning och hur ni tänkt. Gör en ordentlig och snygg redovisning. Jag kopierar upp på OH till er presentation i helklass.
7. Kom ihåg – vem som helst i gruppen kan få redovisa er lösning inför klassen – se till att alla förstår!

VISA RESPEKT. INGA NEDLÅTANDE KOMMENTARER.
SAMARBETA, LYSSNA PÅ VARANDRA OCH DISKUTERA MATEMATIK!

Bilaga F: Enkät

Problem: XXX
Datum: XXX

Namn: ____________________ Klass: ______________

Del A: Allmänna frågor om skolämnet matematik

A1 Vad tycker du om matematik som skolämne?

☐ Intressant ☐ Ganska intressant ☐ Ointressant

A2 Hur tycker du att innehållet i skolmatematiken är?

☐ Lätt ☐ Både lätt och svårt ☐ Svårt

A3 Hur får du helst hjälp med svåra uppgifter? Du kan ange flera alternativ.

☐ Läraren går igenom på tavlan ☐ Läraren förklarar för dig personligen

☐ En kamrat förklarar ☐ Flera kamrater samarbetar

Annat sätt (ange vilket): ______________________________

A4 Hur lär du dig matematik bäst? Du kan ange ett eller båda alternativen.

☐ Rutinuppgifter (t.ex. läroboken) först, därefter problemlösning om det rutinuppgifterna behandlat.

☐ Problemlösning först, därefter rutinuppgifter (t.ex. läroboken) om det problemet behandlat.

A5 Hur arbetar du helst på matematiklektioner när vi arbetar i läroboken?

☐ Individuellt (ensam) ☐ I par (2 personer) ☐ I grupper om tre eller fler

Motivera: ______________________________

A6 Hur arbetar du helst när du löser större problemuppgifter som t.ex. den vi nyss gjort?

☐ Individuellt (ensam) ☐ I par (2 personer) ☐ I grupper om tre eller fler

Motivera: ______________________________

A7 Hur ska en grupp helst se ut? Välj de alternativ du föredrar för varje kategori nedan.

a) *Antal personer i gruppen:*

☐ 2 personer ☐ 3 personer ☐ 4 personer ☐ > 4 personer

b) *Könsfördelning i gruppen:*

☐ Bara personer av samma kön ☐ Blandat pojkar/flickor ☐ Spelar ingen roll

c) *Kunskapsnivå i gruppen:*

☐ Ungefär samma kunskapsnivå på gruppmedlemmarna ☐ Blandad kunskapsnivå ☐ Spelar ingen roll

d) *Vem som sätter ihop gruppen:*

☐ Läraren sätter ihop grupperna ☐ Eleverna väljer själva grupperna ☐ Spelar ingen roll

Del B: Frågor om den problemuppgift och det arbetssätt vi just genomfört

B1 Hur tycker du att svårighetsgraden på det problem vi precis har arbetat med har varit?

☐ Lätt ☐ Varken lätt eller svårt ☐ Svårt

B2 Hur har samarbetet fungerat i gruppen?

☐ Bra ☐ Dåligt

B3 Hur var det att arbeta i gruppen?

☐ Roligt ☐ Tråkigt

B4 Hur var stämningen i gruppen?

☐ Bra ☐ Dålig

B5 Kom ni fram till en slutlig lösning som du känner dig nöjd med?

☐ Ja ☐ Nej

B6 Hur kom ni fram till er slutliga lösning?

☐ Vi utgick från en elevlösning ☐ Vi utgick från flera elevlösningar ☐ Vi började om från början med problemet

Motivera: ______________________________

B7 Fick alla i gruppen komma till tals i diskussionen?

☐ Ja ☐ Nej

B8 Fick du komma till tals i diskussionen?

☐ Ja ☐ Nej

B9 Var det någon i gruppen som dominerade samtalet?

☐ Ja ☐ Nej

B10 Var det någon i gruppen som inte bidrog alls till samtalet?

☐ Ja ☐ Nej

B11 Tycker du att de övriga i gruppen lyssnade på ditt lösningsförslag?

☐ Ja ☐ Nej

B12 Fick du igenom något av ditt lösningsförslag i gruppens slutliga lösning?

☐ Ja ☐ Nej

Om ja, vad: ____________________

B13 Var det någon i gruppen som bestämde mer än andra om hur den slutliga lösningen skulle se ut?

☐ Ja ☐ Nej

Om ja,

a) Vad berodde det på?: ____________________

b) Var det ok för dig att den personen bestämde mer?

☐ Ja ☐ Nej

B14 När ni diskuterade uppgiften i gruppen, använde ni matematiska termer (t.ex. addera i stället för plussa)?

☐ Ofta ☐ Ibland ☐ Sällan ☐ Aldrig

B15 Stötte ni någon gång på problem som ni hade svårt att lösa?

☐ Ja ☐ Nej

Om ja,

a) Vilken typ av problem var det? ____________________

____

b) Var det ett problem som läraren kunde ha hjälpt till att lösa?

☐ Ja ☐ Nej

c) Hur löste ni problemet?: ____________________

____

B16 Hade ni önskat att få prata med läraren någon gång under grupparbetet?

a) ☐ Ofta ☐ Ibland ☐ Sällan ☐ Aldrig

b) Om ja, om vad?: ____________________

____

B17 Vad var orsaken till att ni valde er slutliga gruppläsning? Du kan ange flera alternativ

☐ Den var lättast att förstå för alla

☐ Den var kortast att redovisa

☐ Den hade en metod som fungera att använda för alla deluppgifterna

☐ Den gjorde att vi kunde lösa fler deluppgifter än vi klarat enskilt.

☐ Annat

Vad: ____________________

____

B18 Tycker du att arbete med denna typ av problemuppgifter är lärorikt?

☐ Ja ☐ Nej

B19 Tycker du att denna typ av arbetsform (grupparbete för att lösa en uppgift) är lärorikt?

☐ Ja ☐ Nej

B20 Tycker du att det är roligt att arbeta med matematik på det här sättet?

☐ Ja ☐ Nej

B21 Vad har varit bäst och sämst under arbetet med problemet?

Bäst: ____________________

____

____

____

Sämst: ____________________

____

____

____

Del C: Jämförelse med tidigare tillfällen då ni arbetat tillsammans i gruppen *(endast enkät tillfälle 2 och 3)*

C1 Hur tycker du att svårighetsgraden på det problem vi precis har arbetat med har varit?

☐ Lätt ☐ Varken lätt eller svårt ☐ Svårt

C2 Hur tycker du att stämningen i gruppen varit jämfört med tidigare gånger?

☐ Bättre ☐ Varken bättre eller sämre ☐ Sämre

C3 Hur tycker du att arbetet i gruppen för att komma fram till en gemensam lösning har fungerat jämfört med tidigare gånger?

☐ Bättre ☐ Varken bättre eller sämre ☐ Sämre

C4 Hur har din delaktighet i diskussionerna varit jämfört med tidigare gånger?

☐ Större delaktighet ☐ Varken större eller mindre delaktighet ☐ Mindre delaktighet

C5 Hur tycker du att grupparbetet varit jämfört med tidigare gånger?

☐ Roligare ☐ Varken roligare eller tråkigare ☐ Tråkigare

Del D: Hur du tycker att vi bör arbeta med denna typ av rika matematiska problem framöver

D1 Hur ofta tycker du att vi ska arbeta med denna typ av problemuppgifter (ca 1 vecka per uppgift)

☐ Aldrig ☐ 1 gång per termin ☐ 2 gånger per termin ☐ 3 gånger per termin

D2 Hur lång tid tycker du det är bra att få arbeta med problemet <u>enskilt</u>?

☐ Ca ½ lektion ☐ En hel lektion ☐ Mer än hel lektion

D3 Hur lång tid tycker du det är bra att få arbeta med problemet <u>i grupp</u>?

☐ Ca ½ lektion ☐ En hel lektion ☐ Mer än hel lektion

D4 Hur vill du helst arbeta med denna typ av problemuppgifter?

☐ Enbart enskilt ☐ Enbart i grupp ☐ Enskilt först och sedan i grupp ☐ Spelar ingen roll

D5 När tycker du att du lär dig mest matematik när vi jobbar med denna typ av uppgifter?

☐ När jag jobbar enskilt ☐ När jag jobbar i grupp ☐ När vi har den gemensamma klassdiskussionen efter grupparbetet ☐ Vet inte

D6 När tycker du att det är roligast när vi jobbar med denna typ av uppgifter?

☐ När jag jobbar enskilt ☐ När jag jobbar i grupp ☐ När vi har den gemensamma klassdiskussionen efter grupparbetet ☐ Vet inte

D7 Hur tillgänglig vill du att läraren ska vara när ni arbetar med denna typ av uppgifter?

☐ Nästan inget stöd alls från läraren , eleverna tvingas lösa uppgiften med hjälp av varandra. ☐ Lite stöd från läraren, hjälper till om man fullständigt kört fast. ☐ Ganska mycket stöd från läraren, hjälper till om det går lite trögt. ☐ Mycket stöd från läraren, hjälper till hela tiden.

D8 Hur många elever tycker du det ska vara i gruppen

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ Fler än 4

D9 Om du hamnar i en grupp du trivs med, hur många gånger i följd vill du arbeta med samma grupp med denna typ av problemuppgifter?

☐ 1 gång ☐ 2 gånger ☐ 3 gånger ☐ Fler än 3 gånger

D10 Hur vill du att gruppen ska sättas samman?

☐ Elever med ungefär samma kunskapsnivå ☐ Elever med blandad kunskapsnivå, jag tillhör dem som kan lite mindre ☐ Elever med blandad kunskapsnivå, jag tillhör dem som kan lite mer ☐ Det spelar ingen roll

D11 Vilka för- och nackdelar tycker du att det är att arbeta i en grupp med samma kunskapsnivå på eleverna?

Fördelar:

Nackdelar:

D12 Vilka för- och nackdelar tycker du att det är att arbeta i en grupp med blandad kunskapsnivå på eleverna?

Fördelar:

Nackdelar:

Bilaga G: Observationsschema

Detta observationsschema har använts som stöd i samband med avlyssning av audioinspelning.

Grupp: ________________________________	Datum: _________________________

Kategori	Minnesord	Elev 1	Elev 2	Elev 3	Elev 4
1	Bidrar info, fakta				
2	Söker info, fakta				
3	Förslag				
4	Stödjer andra				
5	Avstånd andra				
6	+ Stenplattorna				
7	- Stenplattorna				
8	+ matematik				
9	- matematik				

Kategorierna är:

1. Bidrar med information och fakta
2. Söker ny information och fakta
3. Ger konkreta förslag
4. Stöder andras uttalanden
5. Tar avstånd från andras uttalanden
6. Uttalar sig positivt om arbetet med problemet
7. Uttalar sig negativt om arbetet med problemet
8. Uttalar sig positivt om matematik i allmänhet
9. Uttalar sig negativt om matematik i allmänhet

Efter Edin, 2003.