GÖTEBORGS UNIVERSITET
INSTITUTIONEN FÖR PEDAGOGIK OCH DIDAKTIK

Matematiken i förskoleklassen

En totalundersökning där en kommuns samtliga förskoleklasselevers matematiska kunnande kartläggs, i ett formativt syfte.

Marie Fredriksson

Masteruppsats:	30 hp
Program och/eller kurs:	PDA 462
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	Ht 2009
Handledare:	Madeleine Löwing
Examinator:	Per-Olof Bentley

Abstract

Masteruppsats. 30 hp
Program och/eller kurs: PDA 462
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: Vt 2009
Handledare: Madeleine Löwing
Examinator: Per-Olof Bentley
Nyckelord: Diagnos, formativ, matematikdidaktik, kunskapskartläggning,

---

Syfte: Syftet med uppsatsen är att med hjälp av kunskapsdiagnoser i matematik, kartlägga och analysera tal- och antalsuppfattning hos elever i förskoleklass och att diskutera resultaten i ett formativt syfte för ökad måluppfyllelse.
Teori: Diamantdiagnoserna som används är uppbyggda i en hierarkisk förkunskapsstruktur och diagnostiserar det matematiska innehåll som visat sig lämpligt för denna typ av diagnosform. Innehållet i den diagnos som används i studien är motiverat utifrån ämnesdidaktisk teori om hur barn bygger upp sin kunskap i matematik och utifrån forskning om deras förmåga att abstrahera. Fokus är på den tidiga förståelsen för grundläggande aritmetik, tal- och antalsuppfattningen. Det har visat sig vara av avgörande betydelse att kontinuerligt utvärdera och kartlägga elevers kunskaper för att undvika att elever hamnar i svårigheter och för att öka måluppfyllelsen och att denna kartläggningen börjar redan så tidigt som inför skolstarten. Den formativa bedömningen har visat sig ha stor effekt på utbildningskvalitén. Det ställer dock stora krav på läraren att veta vad elever skall förstå och kunna samt hur man skall skapa inlärningssituationer som får dem dit. Det vill säga både ämnesteoretisk, ämnesdidaktisk och pedagogisk skicklighet krävs. Dock behöver god utvärdering inte kopplas till specifik undervisnings- eller inlärningsteori.
Metod: Diamantdiagnosen *Förberedande Aritmetik* har använts som ett instrument för att samla in resultat om tal- och antalsuppfattning hos elever i förskoleklass. I en pilotstudie har ett antal elever intervjuats, dessa intervjuer analyseras kvalitativt i syfte att klargöra diagnosinstrumentets reliabilitet och validitet samt för att beskriva hur elevernas förståelse av innehållet kan uttryckas, tolkas och förklaras. En jämförande innehållsanalys av elevsvaren görs i relation till de teoretiska utgångspunkterna. Intervjufrågorna i diagnosen som används är i hög grad standardiserade och strukturerade. En större intervjustudie har genomförts där alla elever i förskoleklass i en kommun har deltagit, en totalundersökning i kommunen. Syftet med den större undersökningen är att generalisera resultaten om tal- och antalsuppfattning hos elever i förskoleklassen. Resultaten presenteras kvantitativt i form av frekvenstabeller. En diskussion om resultatens betydelse för den fortsatta undervisningen redovisas.
Resultat: Resultatet som framkommer av pilotstudien är att diagnosen förberedande aritmetik fungerar väl för att användas som underlag för att ta reda på elevers tal- och antalsuppfattning inför skolstarten. Reliabilitet och validitet kan anses vara hög. Resultaten från totalundersökningen visar att de allra flesta elever har mycket goda förutsättningar för att börja med grundläggande aritmetiska beräkningar och att de allt sämre resultat som svenska elever visar upp i senare skolår inte verkar bero på brister i de förutsättningar elever har då de börjar skolan. Dock finns variation i elevernas kunnande och detta visar på vikten av att ha god kännedom om varje elevs utgångsläge för att kunna individualisera undervisningen. Bakomliggande teori pekar på att det ställs stora krav på såväl att utforma som att använda ett diagnosinstrument och goda ämnesteoretiska och ämnesdidaktiska kunskaper för att kunna använda resultaten i ett formativt syfte där resultaten får styra upplägg och innehåll av fortsatta undervisningen. Som det ser ut i dag så visar forskning på att undervisningen inte tar elevernas förutsättningar som utgångspunkt i tillräcklig utsträckning.

Förord.

I januari 2006 startade ett skolverksprojekt som fick namnet Diamantprojektet. Madeleine Löwing har varit projektledare och jag har ingått som en av medarbetarna i projektet. Uppdragets syfte var att ta fram diagnoser för kartläggning av elevers matematikkunnande för skolåren före årskurs 6 i syfte att öka elevernas måluppfyllelse i matematik.
Arbetet med att ta fram diagnoserna har inneburit ett nära samarbete med lärare och elever från flera håll i Sverige. Under resans gång har vi genomfört ett antal seminarier och föreläsningar i olika konferenssammanhang då arbetet med diagnosmaterialet har presenterats.

Vid alla dessa tillfällen har många olika och värdefulla synpunkter framkommit.
Många intressanta diskussioner om för- och nackdelar med att kartlägga elevers kunskaper har jag fått vara med om och detta har lett fram till mitt intresse för att sätta mig in i frågor kring kunskapsutvärdering av olika slag och kring synen på matematik som skolämne och hur det kan ställas i relation till undervisnings- och inlärningsteorier samt matematikdidaktiska aspekter. Det har varit en rolig, intressant och för mig väldigt lärorik period. Jag är glad att jag fått möjlighet att delta i detta projekt och därigenom träffat intresserade och engagerade personer.
Jag vill tacka främst alla de lärare och elever som så generöst har hjälpt till att pröva ut diagnoserna, att samla in elevresultat och att dela med sig av sina erfarenheter.
Jag vill också tacka min handledare och mina kollegor på matematikdidaktik för alla intressanta diskussioner.

Under arbetet med uppsatsen har Søren Kirkegaards dikt *Till eftertanke* dykt upp i mina tankar, den sammanfattar på ett vackert uttryckt sätt stora delar av uppsatsens slutsats:

Om jag vill föra en människa
mot ett bestämt mål
måste jag först finna honom
där han är
och börja just där.

Den som inte kan det
lurar sig själv
när hon tror
att hon kan hjälpa andra.

För att hjälpa någon
måste jag visserligen förstå
mer än vad han gör,
men först och främst
förstå det han förstår …

Innehåll:

1. Inledning.

Ett antal internationella utvärderingar visar att svenska elevers matematikkunskaper i jämförelse med andra länder har försämrats under flera år. Så var även fallet i den senast genomförda och nyligen publicerade TIMSS studien 2007. I TIMSS 2003 var det svenska medelvärdet 8 poäng högre än 2007 och i studien 1995, där Sverige deltog för första gången, hela 48 poäng högre. Jämfört med 1995 är Sverige ett av de länder som försämrat sina resultat mest. I TIMSS 2007 hamnar Sverige på 14:e plats och presterar under EU/OECD genomsnittet (Skolverket, 2008a).

Sveriges försämrade resultat syns också i PISA -2003 som jämför Sveriges resultat mellan åren 2000-2003 (Skolverket, 2004a) Detta resultat bekräftas även i den nationell studien NU-03, genomförd i grundskolans senare år där det framkommer att svenska elever presterar sämre i matematik år 2003 än 1992 (Skolverket, 2004b).

Ett av de innehållsliga områdena som ingick i TIMSS 2007 och där eleverna i skolår 4 presterade under genomsnittet gällde uppgifter som behandlar talbegreppet och aritmetiken. Bristande förståelse inom detta område bekräftas också i en uppföljande analysrapport till TIMSS 2007 där 300 elever har djupintervjuats (Skolverket, 2008b).
I ett fördjupningsarbete i ämnesdidaktik genomfört av Susanne Frisk vid Göteborgs Universitet 2007, kartläggs elevers kunskaper i aritmetik i skolår 1-4, med hjälp av Diamantdiagnoser. Frisk visar på stora brister hos eleverna när det gäller såväl förståelse som fungerande strategier för beräkning av grundläggande uppgifter inom addition och subtraktion. Där framkommer att elever har svårigheter framför allt vid tiotalsövergångar men även vid enkla subtraktioner. Till exempel gjorde endast 66% av eleverna i skolår 1 och 82% av eleverna i skolår 2 rätt på uppgifter av typen 9-1 och 8-6 (som handlar om att hoppa ett eller två steg i talraden inom talområdet 0-10). 33% av eleverna i år 1 och 61% av eleverna i år 2 gör rätt på uppgifter som 19-1 och 18-16. För subtraktioner inom talområdet 0-99 gör 51% av eleverna i år 3 rätt på uppgifter som 38-2 och 58-57. På samma uppgifter gör 66% av Eleverna i år 4 rätt.

Samtidigt som ett flertal elever och skolor presterar sämre nu än tidigare år finns det också elever och skolor som i dag klarar sig bättre. I en debatt artikel publicerad i Dagens Nyheter 28 januari 2002 skriver Ragnar Eliasson, skolverket:

> Det finns stora skillnader mellan skolor … Men de skolor som lyckas väl visar att det inte är en utopi att utvecklingen kan vridas till det positiva. Resultatskillnaderna mellan skolor förklaras bara till en mindre del av olikheter i skolornas elevsammansättning med tanke på föräldrarnas utbildningsnivå, andelen elever med utländsk bakgrund osv. … man är tydlig när det gäller målen och noggrann med att följa upp varje elevs utveckling och kommunicera detta med eleven och föräldrarna. Vidare framkommer att i framgångsrika skolor har lärarna höga förväntningar på eleverna.

Utgående från bland annat ovanstående beskrivna situation när det gäller elevers kunskaper har matematikämnet i skolan på senare tid ofta hamnat i fokus i skoldebatten och utgjort grund för olika satsningar när det gäller matematikundervisning och nya direktiv i form av mål och nationella prov.

En satsning som skolverket står för är konstruktion av en diagnosbank i matematik för de tidiga skolåren. Detta projekt, som går under namnet Diamantprojektet, startade vid Göteborgs Universitet våren 2006 under ledning av Madeleine Löwing. Jag har deltagit i arbetet med att ta fram, prova ut och implementera detta material. Arbetet har resulterat i 55 diagnoser med tillhörande texter vars syfte är att användas formativt i undervisningen för att nå ökad måluppfyllelse.

I denna uppsats beskrivs teorier och kunskap som ligger till grund för formativt arbete genom kartläggning med kunskapsdiagnoser. Eftersom det finns forskning som visar att lärarens kompetens är en av de mest betydelsefulla faktorer för vad eleverna lär sig, är det intressant att problematisera hur ett diagnosmaterial för kartläggning av elevkunskaper kan användas i syfte att forma undervisningen. Bentley (2008) refererar i sin avhandling till forskning som visar att lärarens ämneskunskaper starkt påverkar deras möjligheter att analysera elevers vanligaste svar samt att lärarnas kunskap om elevers förståelse av uppgifter och hur elevernas motivation och intresse samt deras förförståelse av begrepp kan påverka inlärningen , är av stor betydelse. Denna kompetens ingår i begreppet ”pedagogical content knowledge”. I en tidigare avhandling menar Bentley (2003) att om lärare utbildades inom pedagogical content knowledge så förbättrades deras förmåga att individualisera undervisningen och eleverna kunde nå högre mål.

> A policy variable that directly affects pupil achievement is teacher professionalism, in which content knowledge, pedagogical content knowledge and teaching experience are included. Teacher professionalism turned out to be one of the most influential factors. (sid. 49)

Jag har till grund för denna uppsats använt diamantdiagnosen *Förberedande aritmetik* för att belysa och beskriva hur diagnosmaterialet är utformat och hur det kan användas för att kartlägga vilken förståelse elever i förskoleklass har av begreppen tal och antal. Intressanta frågor är om och i så fall hur, kunskap om elevers matematikförståelse redan vid skolstart påverkar eller kan påverka hur undervisningen i tidiga år utformas för att leda till ökat matematikkunnande i senare skolår. Mer precisera frågeställningar presenteras i kap 3.

2. Litteraturgenomgång och teoretisk bakgrund.

Här redovisas litteratur som är relevant som teoretisk utgångspunkt för uppsatsen. Min avsikt är att lyfta fram vad forskning visat om hur diagnostisering påverkar elevers lärande samt vad det kan innebära att bedriva en undervisning som inkluderar användandet av diagnoser för kunskapsuppföljning. Jag vill också belysa olika former av diagnoser och för vilka syften diagnoser kan ges. Olika teorier för lärande och undervisning inkluderat den matematikdidaktiska teorin, samt synen på utvärderingsformer inom respektive teori beskrivs. Det är viktigt att diskutera komplexiteten när det gäller diagnoser, att vara medveten om vad som diagnostiseras samt vilka slutsatser som kan dras av olika diagnosresultat. Teorin bakom den i diamantmaterialet ingående diagnosen *Förberedande aritmetik* beskrivs specifikt då denna diagnos har använts vid insamlandet av uppsatsens empiri och resultaten har analyserats mot denna teori.

2:1 Varför kunskapsdiagnoser?

Det har på senare tid från flera håll framhållits att det är av avgörande betydelse att kontinuerligt utvärdera och kartlägga elevers kunskaper för att undvika att elever hamnar i svårigheter och för att öka måluppfyllelsen.
Det finns en relativt stor samstämmighet om att tydliga mål, realistiskt höga krav och kontinuerlig utvärdering av elevers kunskaper är av avgörande betydelse när det gäller att öka måluppfyllelsen. Styrdokument för skolan pekar tydligt på att undervisningen skall anpassas till elevernas behov och att detta kräver att lärarna följer varje elevs kunskapsutveckling.

Enligt Lpo 94 skall:

> Undervisningen anpassas till varje elevs förutsättningar och behov. Den skall med utgångspunkt i elevernas bakgrund, tidigare erfarenheter, språk och kunskaper främja elevernas fortsatta lärande och kunskapsutveckling. (Utbildningsdepartementet, 1998, sid 4)

I rapporten Individualisering i ett skolsammanhang påpekar Monika Vinterek (2006) att vikten av individualisering i grundskolan är tydligt framskrivet i styrdokumenten. I Lpo-94 används dock inte termen individualisering direkt men det ställs krav på anpassning av undervisningen i förhållande till elevernas förutsättningar, erfarenheter, intressen och behov. Vinterek ser det som ett problem att det har skett en förskjutning från undervisning till lärande och att eleverna åläggs att ta stort ansvar för att de lär sig, vad de lär sig och hur de lär sig. Eleven blir på så sätt delvis själv ansvarig för hur en eventuell individualisering utformas. Vinterek gör en jämförelse med tidigare läroplaner och konstaterar att tidigare uttrycktes det tydligare att det var lärarens ansvar att individualisera undervisningen.

Dock finns det i kommentarmaterial till styrdokumenten påpekanden om att detta är lärarens ansvar. I skolverkets Allmänna råd och kommentarer, Likvärdig bedömning och betygsättning (Skolverket 2004) står följande:

> För att eventuella problem ska uppdagas på ett så tidigt stadium som möjligt förutsätts att lärarna på ett kontinuerligt sätt följer den enskilda elevens utveckling och lärande. (Skolverket, 2004, sid 31)

Det finns forskning som lyfter fram vikten av att kontinuerligt följa upp och kartlägga elevers kunskaper för att på så sätt nå goda resultat och undvika att eleverna hamnar i svårigheter.
I skolverkets publikation Mål för alla, Perspektiv för nationella utbildningsmål för tidiga skolår, skriver professor Fischbein (2007) :

> Avgörande för hur skolan klarar att anpassa undervisningen till barnens olika förutsättningar är att läraren har kunskaper om och möjlighet att ta reda på var varje barn befinner sig, kan sätta in adekvata åtgärder och utvärdera dessa. (Fischbein, 2007, sid 9)

Även i skolverkets rapport Om skolors olikheter och deras betydelse för elevernas studieresultat (Skolverket 2005), framhålls att kontinuerlig uppföljning och tydliga kunskapsmål är avgörande faktorer för elevers framgång.

Gudrun Malmer påpekar vikten av att lärare tillämpar ett diagnostiskt arbetssätt för att förebygga att svårigheter uppstår. Hon skriver att en avgörande faktor för att kunna planera undervisningen för den enskilde eleven och bedriva en individualiserad undervisning är god kännedom om varje elevs utgångsläge (Malmer 1999).

Inger Enkvist, professor vid Lunds universitet (Axess Magasin, nr5 år 2008), betonar att höga förväntningar på eleverna leder till ökad måluppfyllelse. Hon skriver att arbetet med att få de bästa lärarna och de bästa skolledarna har syftet att varje elev ska få bästa möjliga utbildning. Varken mer pengar, högre lärarlöner, färre elever per klass eller användning av teknik är effektivt, om man inte samtidigt sätter elevens ämnesinlärning i centrum. Alla de skolor som har goda resultat sätter målet högt för alla.

Detta samband påpekas även av Fischbein som skriver :

> De praktiska handlingsmönster som visat sig framgångsrika är….samverkan om mål och innehåll, höga förväntningar på och positiv inställning till eleverna oberoende av deras bakgrund och förutsättningar,..…., regelbunden utvärdering och uppföljning samt samverkan med föräldrar om elevens utveckling.(Fischbein, 2007, sid 87)

Att det är av stor vikt att följa elevers kunskapsutveckling är ingen ny upptäckt. Frits Wigforss skriver med hänvisning till 1955-års undervisningsplan att det är av största vikt med särskilda provräkningar efter varje kursavsnitt eftersom många elevers svårigheter med matematiken sannolikt beror på att vissa kursmoment , som är nödvändiga för rätt uppfattning av de följande, ej blivit tillräckligt behandlade (Wigforss, 1957).

2:2 Summativ och formativ bedömning.

Man skiljer på två sorters bedömning: summativ och formativ. Summativ bedömning har till syfte att ge ett omdöme om något medan formativ bedömning syftar till att ge information som kan användas för att förbättra.
När det gäller diagnoser för kartläggning av elevers kunskaper är det viktigt att vara medveten om att diagnoser i sig inte är formativa eller summativa. Det är snarare hur och till vad elevernas resultat på diagnoserna sedan används som avgör detta. Nedan beskrivs hur begreppen summativ och formativ beskrivs i litteraturen samt hur dessa former för bedömning kan användas i undervisningen i dagens skola.

Matematikdelegationens rapport Att lyfta matematiken (SOU 2004:97) beskriver de olika utvärderingsformerna som att den summativa formen är bedömning *av* kunskap medan den formativa är bedömning *för* kunskap. I Myndigheten för skolutvecklings rapport: Kunskapsbedömning – hur, vad och varför av Helena Korp (2003) beskrivs detta i ett skolsammanhang som att summativa bedömningar alltid inbegriper ett värderande moment och används i syfte att selektera eller rangordna medan formativa bedömningar också kan innehålla utlåtanden om kvaliteten och har ett pedagogiskt syfte. Vid formativ bedömning skall (lär-)processen stå i fokus och inte resultatet.

Korp diskuterar också vilka slags kunskaper som olika prov och andra slags bedömningar syftar till att ”komma åt” och vilka konsekvenser valet av bedömningsformer får för lärandet. I rapporten beskrivs hur det under de senaste tjugo åren har utvecklats vad man kallar ”ett nytt provparadigm”. Detta innebär att syftet med kunskapsbedömning har vidgats från betygssättning och sortering till att stödja individers lärande och utgöra instrument för utveckling av undervisningen i klassrummet och av läroplanerna.
I det nya ”paradigmet” syns en vilja att ersätta summativa bedömningar med formativa . Det finns ett antagande att om man byter ut prov vars syfte är att kontrollera och sortera mot prov som är till för att hjälpa, utveckla och uppmuntra så får man en utbildning som är mer rättvis, kvalificerad och effektiv. Bland de förändringar för bedömning i klassrummet som ligger till grund för det nya provparadigmet nämns:

- Formativ användning för att stödja elevers lärande.
- Att förväntningarna är synliga för eleverna.
- Att eleverna är aktiva i utvärderingen av sitt eget arbete.
- Att såväl undervisning som elevens lärande utvärderas.

Perrenoud (Korp, 2003) menar att all bedömning som hjälper eleven att lära sig och att utvecklas är formativ. Formativ bedömning bygger på att man inte ger sig förrän eleven har lärt sig och behärskar de kunskaper och färdigheter som undervisningen har syftat till. Perrenoud pekar på vikten av att formativa bedömningar utformas och genomförs utifrån sitt specifika syfte. För att formativ bedömning skall bli effektiv menar Perrenoud att bedömningen skall förse läraren med den information som behövs för att kunna påverka villkoren för elevernas lärande på ett effektivt sätt – varken mer eller mindre.

Korp (2003) nämner bland annat följande formativa syften som de mest vanliga när det gäller bedömning på individnivå:

- att identifiera elevens behov av hjälp och stöd.
- att inventera elevers förkunskaper/förförståelse för att kunna planera undervisningen.
- att hjälpa elever att bli varse sin progression och sina svårigheter och behov.

Korp poängterar att även de kontinuerliga utvärderingar eller självvärderingar som läraren dagligen gör av sin undervisning för att kunna planera kommande undervisningspass och individuella insatser utgör formativ bedömning. Hon skriver att om bedömningen ses som en integrerad del av undervisningen där eleverna är delaktiga mäter den inte bara lärandet utan stimulerar även lärandet. Korp hänvisar till flera rapporter som visar att en bedömningspraktik som hjälper eleverna att bli varse sin egen kunskapsutveckling har större positiva effekter på elevernas motivation för skolarbetet än yttre belöningar.

Löwing & Kilborn (2002) använder följande definition av kunskapsdiagnostisering: "All verksamhet som går ut på att kartlägga en elevs aktuella kunskaper i avsikt att individualisera och därmed optimera elevens inlärning". (sid 162).

Vidare skriver de:" Ge aldrig en kunskapsdiagnos om du inte vet hur du skall följa upp den. I annat fall blir diagnostiken enbart en rituell handling utan betydelse för undervisningen."(sid 164).

I tidningen Lära Stockholm (nr.2, 2008) intervjuas Astrid Petterson, vetenskaplig ledare för forskningsgruppen för bedömning av kunskap och kompetens vid Stockholms universitet. Hon påpekar där att utredningar visar att framförallt de svagare eleverna stärks av att bli mer medvetna om målen för sitt eget lärande. Eleverna behöver ha en realistisk bild av sin egen kunskapsnivå och få en överblick över vilka delar av matematiken som erövrats och vad som återstår. Vidare påpekas att både summativ och formativ utvärdering behövs i dagens skola och att det är viktigt att vi pedagoger är medvetna om vad vi vill med bedömningen och man måste ifrågasätta vad ett läxförhör eller prov faktiskt säger om elevens kunnande.

De engelska forskarna Black & Wiliam (Korp, 2003) har studerat ett 40-tal studier av formativ utvärdering och kommit fram till bland annat följande resultat:

- elevernas genomsnittliga studieresultat förbättrades påtagligt.
- Skillnaden mellan hög- och lågpresterande elever minskade.
- Att eleverna själva är involverade i bedömningsprocessen har goda effekter på lärandet.
- Bedömning och självbedömning påverkar elevernas motivation.
- För en positiv utveckling krävs att eleverna har en klar uppfattning av målen.
- Om eleverna enbart får poäng eller betyg så gynnas inte lärandet.

Författarna sammanfattar sina slutsatser som att ingen annan känd strategi för att förbättra utbildningskvalitet har så stor effekt som formativ bedömning.

Wiliam (Ed. Lester, 2007). Talar om utvärdering *som* inlärning. Wiliam ser utvärdering som en i grunden interaktiv process, som ger läraren möjlighet att få reda på om det som har undervisats om också har lärts, och om inte, kunna göra något åt det. Utvärdering skall fungera som en bro mellan undervisning och inlärning, hjälpa läraren att samla underlag om elevens prestationer i syfta att förbättra sina metoder att bättre möta elevens behov i det dagliga arbetet. Wiliam skriver specifikt om utvärdering i matematik och menar att utvärdering bör öka matematikinlärningen. Utvärdering skall spela roll, inte bara för att klargöra om speciell undervisning varit lyckad eller inte, utan också för lärarens dagliga och ögonblickliga överväganden. Flera studier visar, enligt Wiliam, att det är både möjligt och angeläget att integrera utvärdering med tillhörande metoder/verktyg/instruktioner för att förbättra undervisningen. Wiliam hänvisar till studier som visar att den summativa funktionen av utvärdering har varit alltför dominant samtidigt som elevers resultat på standardiserade prov inte används av lärarna som utgångspunkt för att hitta inom vilka områden elever behöver stöd. Lärare litar mer på sin egen ”känsla” för elevers svaga sidor. William visar även på att lärare som har god koll på sina elevers prestationer men som saknar verktyg för att veta hur de skall hantera elevers svårigheter fick ett sämre resultat än lärare som saknade koll på sina elevers kunskaper. Detta visar att bara insamlande av data som man inte vet vad man skall göra med är kontraproduktivt. Williams slutsats blir att om lärare vill maximera potentialen av den formativa utvärderingen är det nödvändigt att förstå exakt vad som gör utvärderingen formativ på ett effektivt sätt. Läraren måste veta vad som skall göras åt vilket resultat samt också kunna göra det.

Wiliam påpekar även att de åtgärder man som lärare väljer att gå vidare med kan utföras omedelbart vid närmaste lektionstillfälle eller över terminer och år. Förmånstagarna för åtgärderna kan vara de elever från vilka underlaget samlats in eller helt andra elever. Trots att alla ovanstående sätt att agera är formativa då de har som syfte att förhöja elevernas lärande, är inte alla lika effektiva. För att utreda exakt vad som skapar den mest effektiva formen av formativ utvärdering krävs enligt Wiliams att :

- klargöra var den lärande befinner sig i sitt lärande.
- klargöra vart eleven är på väg.
- klargöra vad som krävs för att få eleven dit.

Detta har alltid varit lärarens roll, men när detta görs måste även hänsyn tas till den lärande själv, och den omgivande klassituationen. Kombineras dessa aspekter till ett ramverk utkristalliseras, enligt Wiliam, fem strategier (för läraren) och en ”big idea”:

1: skapa effektiva klassrumsdiskussioner och uppgifter i syfte att frambringa information om elevernas inlärning.
2: ge feedback som utvecklar lärandet.
3: klargöra och vara tydlig med mål, intentioner och kriterier för att lyckas.
4: göra elever delaktiga och ansvariga för sitt lärande.
5: aktivera studenterna som viktiga resurser för varandra.

”The Big idea”: Kunskap om elevernas lärande används för att anpassa undervisningen till att bättre möta studenters behov. Det vill säga: undervisningen är anpassningsbar till studenternas behov för lärande.

Utifrån detta drar Wiliam slutsatsen att lärarens uppgift inte nödvändigtvis är att undervisa utan att skapa situationer där elever lär. När det gäller feedback refererar han till studier som visar att elever som fått konstruktiv sådan lärde sig dubbelt så fort jämfört med en kontrollgrupp. Dessutom minskade i dessa grupper gapet mellan pojkars och flickors prestationer i matematik och deras attityd till matematik var mer positiv. Men feedback visade sig också kunna ha negativ påverkan. Den inre motivationen hos elever som enbart fick feedback genom att graderas eller rangordnas utifrån sina resultat minskade. Detta visade sig i elevernas prestation. Elever som inte fick någon feedback visade också lägre grad av motivation. Uppgiftsrelaterad feedback visade sig vara avgörande för inre motivation.

Även matematiklektorerna Elin Kirsti Lie Reikerås och Ida Heiberg Solem visar på att lärare inte tar elevernas förkunskaper som utgångspunkt för sin undervisning. I boken Det matematiska barnet beskriver de lärares tankar inför skolår 1 med följande citat: " Några kan lite sedan tidigare, men här på skolan börjar vi från början". (Solem & Reikerås, 2004, sid 298). Författarna menar att vi inte tar vara på barnens matematiska förmåga i skolan och att detta leder till en ”avlärning” hos vissa barn när de får börja från början med sådant de redan kan och inte får utmanas och utvecklas vidare. Barnens kunskaper vid skolstarten missbedöms ofta och den idérikedom och kreativa förmåga som barn visar upp tidigt minskar istället för att utvecklas.

Thomas J. Cooney (2007) skriver att lärares uppfattningar om ämnet matematik påverkar såväl deras undervisning som deras bedömnings- och utvärderingsmetoder. Och även om det verkar logiskt och ganska självklart att bedömningen skall vara i linje med eller ha koppling till undervisningspraktiken så är detta inte alltid fallet. Cooney hänvisar till studier som visar att lärarnas utvärderingar och prov oftare handlade om betygssättning än om att få tillgång till elevernas matematiska tänkande.

2:3 Olika diagnosformer.

Om nu syftet med att diagnostisera är formativt och resultaten skall utgör underlag för läraren att planera sin fortsatta undervisning så är det viktigt att vara medveten om vilket undervisningssyfte man diagnostiserar för. Det är också viktigt att välja lämplig form av diagnostisering. Visst innehåll lämpar sig för en viss form av kartläggning. Även elevens ålder och andra faktorer kan påverka vad som är en lämplig form för kartläggningen.

Löwing & Kilborn (2002) skriver att det vanligaste sättet kontrollera var respektive elev befinner sig i sin kunskapsutveckling är att diagnostisera. Diagnoser kan göras i olika syften till exempel som:

- -fördiagnos**,** för att testa förkunskaper inför ett nytt avsnitt.
- -underhandsdiagnos, för att avgöra huruvida eleverna tar till sig pågående undervisning.
- -efterdiagnos, för att se om genomförd undervisning gett tillfredställande resultat.
- -översiktsdiagnos, för att se vad till exempel en ny klass har med sig för kunskaper i stort.

Diagnoser kan även genomföras på olika sätt; muntligt, skriftligt eller genom observation.

Löwing & Kilborn ser *skriftliga test* endast som en inledande fas i en kunskapsdiagnos. De kan ge besked om var kunskapsluckor kan finnas men inte vilka tankeformer som orsakat problem. De skriftliga testen avslöjar vilka elever som kan ha problem och detta bör följas upp med *intervjuer*. På så sätt kan läraren utnyttja sin tid där den bäst behövs eftersom det tar orimligt lång tid att intervjua alla elever om allt.

När det gäller prov som är avsedda att stödja lärande och undervisning i klassrummet kan bedömning och undervisning utgöra två aspekter av samma aktivitet skriver Korp (2003) och refererar till Shepard som använder begreppet ”running records” som en bedömningsform som går att integrera i den reguljära undervisningen. Läraren kan observera och ”pricka av” i ett schema olika mål som eleven visar sig ha uppnått. Shepard menar att barn i de lägre åldrarna bör testas med informella bedömningsmetoder, observationsbaserade. Medan barn i mellanstadieåldern bör lära sig att delta i mer formella bedömningssituationer. Shepard anser att för att testa vissa färdigheter eller baskunskaper är det motiverat att använda prov med fast och/eller begränsat svarsutrymme. Han anser även att formella prov där alla samtidigt får samma uppgifter att lösa under en viss tid är berättigat till exempel för att läraren snabbt skall kunna anpassa sin undervisning till var eleverna kunskapsmässigt befinner sig eller för att ge föräldrar information. Det poängteras att det viktiga är att de prov som används speglar undervisningens syfte och att eleverna ser kopplingen. Shepard påpekar att elever inte enbart bör testas på det sätt som de själva är mest bekväma med.

Doverborg & Pramling Samuelsson (2006) skriver när det gäller de yngre barnen:

> Om vi skall ta de mål som finns på allvar och försöka anpassa undervisningen till barns utveckling måste vi utgå från hur barn ser på sin omvärld utifrån de erfarenheter de har. En förutsättning är att varje enskild pedagog har kunskap och kompetens i att få barn att dela med sig av sina tankar men också att de kan tolka och använda den information de får av barnen. När det gäller att skapa sig en uppfattning av barns erfarenheter och hur de förstått och uppfattat ett visst innehåll är intervjuer ett utmärkt instrument. (sid15)

För att förstå vilket kunnande och vilken förståelse ett barn ger uttryck för med hjälp av sitt språk eller i en genomförd aktivitet krävs dock att läraren har stor kompetens som påpekats av bland andra Bentley (2008 och 2003). Det stöds också av Solem och Reikerås (2004) som skriver att för att kunna analysera barns aktiviteter ur ett matematiskt perspektiv krävs att vi har kompetens att känna igen matematiken och förstår barns sätt att uttrycka matematik. Vidare skriver de att det är den vuxnes ansvar att tillmötesgå barnet, inte omvänt. Det är den vuxne som måste hitta vägen fram till barnens tänkande och språk och ge dem möjlighet att förvalta och vidareutveckla den kompetens de besitter. För att kunna göra detta krävs kunskaper om matematik som ämne, matematiska aktiviteter och barns språk om matematik.

2:4 Teorier för lärande och undervisning.

Det är vanligt att olika undervisnings- och inlärningsteorier kopplas ihop med olika former för utvärdering och bedömning. Olika teorier förespråkar ofta olika arbetsformer vilka antas skapa inlärning hos eleverna. Den behavioristiska teorin ser kunskap som objektiv och kvantitativ (Dysthe, 2003). Kunskapen finns utanför individen och kan avgränsas och delas. Lärande uppfattas, enligt Dysthe, som en ackumulation av stimulus/respons - kopplingar. Skinner och Gagné var företrädare till behaviorismen. De ansåg att processen fram till att bli kompetent på ett område måste delas in i ett antal små steg med förstärkning efter varje uppnått steg. När det gäller undervisning kan förstärkningen vara uppmärksamhet eller beröm från läraren.

Sammanfattningsvis beskrivs följande konsekvenser för undervisning och testning:

- Lärande sker genom att små kunskapsbitar ackumuleras.
- Inlärning måste organiseras sekventiellt och hierarkiskt
- Överföringen är begränsad och därför måste varje mål undervisas explicit.
- Man måste ge täta test för att garantera full behärskning innan man går vidare.
- motivation är något yttre och grundar sig på positiv förstärkning av små steg.

Enl. Dysthe (2003) har detta tillvägagångssätt haft stort inflytande på undervisning och evaluering, läromedel och metodik.

Gagne utvecklade en omfattande lärandeteori kallad Villkor för lärande (Gagné, 1965). Gagné utgår från tre principer som han anser bidrar till framgångsrik undervisning:

1) undervisningen bygger på ett antal deluppgifter som bygger vidare mot en slutlig uppgift.
2) Se till att eleven behärskar varje ingående komponent.
3) Sekvensering av deluppgifter säkerställer optimal överföring av den sista uppgiften.

Gagné påpekar att elevens förutsättning för lärande måste vara klart före planering av undervisning börjar. För att klargöra vad som kommer före vad, måste ämnet analyseras med avseende på vilken typ av lärande som ingår. Gagné anser att förvärvandet av kunskap är en process där varje ny förmåga bygger på en grund av tidigare förvärvade förmågor. Utvärdering av vad eleven lärt bör göras av en extern, oberoende person och villkoren för lärande måste arrangeras stegvis och utgå från tidigare förkunskaper.
Andra inlärningsteorier är de kognitiva inlärningsteorierna som konstruktivism och socialkonstruktivism vilka inspirerats av Descartes och Piaget. Utmärkande är den enskilda människans rationella förmåga att skaffa sig kunskap genom att utveckla sin förståelse av begrepp. Här är synen på lärande att det är en aktiv konstruktionsprocess där eleverna tar emot information, tolkar den, knyter ihop den med det de redan vet och om så krävs omorganiserar de mentala strukturerna för att den nya förståelsen skall passa in. Förmågan att tänka och forma begrepp väcks i de situationer där den lärande själv är aktiv och prövar sig fram snarare än absorberar vad andra säger.(Dysthe, 2003)

I det Sociokulturella perspektivet där Dewey, Mead, Vygotskij och Bahktins tankar har haft inflytande anses kunskap konstrueras genom praktisk aktivitet där grupper av människor samverkar inom en kulturell gemenskap. Det betonas att kunskap är beroende av den kultur den är en del av (Dysthe, 2003). Sociokulturellt perspektiv bygger på en konstruktivistisk syn på lärande men lägger störst vikt vid att kunskap konstrueras genom samarbete i en kontext och inte primärt genom individuella processer. Dysthe betonar att sociokulturell syn på kunskap och lärande inte är någon entydig teori. Det finns inte *en* sociokulturell inlärningsteori utan flera olika riktningar och betoningar. Hon skriver att både undervisnings- och inlärningsprocesserna och relationen mellan lärare och elev påverkas starkt av de utvärderingsformer som används. Dysthe anser vidare att det är ett problem att evalueringsteori och praxis nästan enbart har utvecklats inom behaviorismen och menar att elever vars kunskaper skall bedömas måste få mer omfattande frågor eller samla prestationer under en längre tid. Likaså betonar hon vikten av att eleverna utvärderar sitt eget och gruppens arbete (självvärdering). Även om de konstruktivistiska och sociokulturella perspektiven idag ofta framhålls som en väg mot kunskapsutveckling ger dessa perspektiv inget enkelt svar på hur undervisning bäst skall organiseras för att skapa optimal inlärning. I dag förespråkas ofta undersökande och elevaktiva arbetssätt där eleverna enskilt eller i grupp skall söka och komma fram till kunskap. Dialog och kommunikation är viktiga i processen. Lärarens egen kompetens och kunnighet inom ämnet och lärarens förmåga att ta den lärandes perspektiv och organisera undervisningen visar sig avgörande för elevernas inlärning.

Dysthe (2003) skriver utifrån det sociokulturella perspektivet:

> Det finns ingen genväg till förståelse och lärande genom en lättvindig aktivitets- och samtalspedagogik. Det ställs stora krav på eleverna och inte minst på läraren. Det krävs ämneskunskap, medvetenhet om vilka språkliga begrepp eleverna behöver och förmåga att gå in som samtalspartner när det behövs. Ett undersökande arbetssätt- att se, göra och samtala om vad man gör är ingen garanti för att eleverna förstår. (sid 21)

Monika Vinterek (2006) skriver att eget arbete utan djupare samtal kring ämnesinnehållet har blivit den allt vanligare undervisningsformen. Vinterek hänvisar till forskning som visar att en hög andel självständigt arbete tenderar att ge en lägre grad av engagemang i skolarbetet och att många forskare pekar på samband mellan en hög grad av eget arbete och sämre studieresultat.

Fischbein(2007) betonar att många olika komponenter spelar in när det gäller hur väl barn lyckas i skolan En slutsats som dras är att ju större frihet eleverna ges desto mer kommer deras individuella anlag och erfarenheter att bestämma utfallet, ju mer styrande undervisningen är desto mindre betyder omgivningsfaktorer för utfallet. Detta innebär att elever med goda kognitiva förmågor kan gynnas av eget arbete och eget ansvar medan elever med mindre goda förutsättningar missgynnas. Fischbein skriver vidare att det finns en hel del forskningsresultat som visar på att samband mellan en medveten/strukturerad styrning/ledning och stimulans av individuella behov och intressen är det som karakteriserar framgångsrika skolor. En styrd, stimulerande undervisningssituation karakteriseras enligt Fischbein av en ”auktoritativ” lärare som ”styr” mot uppställda mål men samtidigt försöker stimulera varje elev och locka fram det han/hon är bra på. Detta förutsätter också att läraren försöker ta reda på så mycket som möjligt om varje elevs förutsättningar.

Risbeck (2008) påpekar också behovet av att undervisningen styrs mot avsedda mål av läraren. Risbeck skriver, utifrån en egen genomförd undersökning av elever som arbetar med ett undersökande arbetssätt och konkretiserande material inom matematik, att klippandet, färgläggandet eller mätandet i sig inte utgör någon garanti för att aktiviteterna styrs in mot prövandet av matematiska perspektiv och resonemang. Läraren måste vara beredd att introducera och ge sammanhang åt termer och begrepp om eleverna skall tillägna sig avsedda matematiska instrument. Eleverna tar inte det steget själva. Att se och göra är ingen garanti för att förstå. Ett undersökande arbetssätt leder inte automatiskt till ökad insikt hos eleverna.

Även Korp(2003) framhåller i sin rapport att det inte finns någon given koppling mellan hur undervisning bedrivs och vad som lärs.

> Det finns inget automatiskt samband mellan lokalt utformade prov och laborativa, utmanande undervisningsformer, ”djupinlärning”, metakognition eller kritisk reflektion. Inte ens elevernas ”forskning” kring fritt valda eller tematiska ämnen, ett vanligt förekommande inslag den svenska skolan särskilt i de lägre åren, leder nödvändigtvis till att sådana utbildningskvaliteter utvecklas, utan resulterar ofta i återgivande och tillägnande av lösryckta fakta. Detsamma gäller grupparbeten och

muntliga redovisningar. Sambandet mellan form och innehåll är aldrig givet. (sid 145).

Marton & Carlgren (2000) poängterar vikten av att fokus vid undervisning flyttas från hur man undervisar till vad som skall läras. Författarna skriver att läraryrket håller på att skifta från en *hur* till en *vad* kultur. Från metod till mål och resultat. Från hur undervisningen skall läggas upp till vilka förmågor och förhållningssätt som skall utvecklas hos eleverna. De menar att varje förmåga bygger på en osynlig grund av förmågor som redan behärskas. Att identifiera dessa förgivet tagna komponenter är avgörande för att lärande skall ske.
För att kunna möta elever med varierade betingelser för lärande i skolan förutsätts att läraren har en förmåga till flexibelt handlande med utgångspunkt i insikter i det professionella objektet. Det kan inte åstadkommas med fasta metodalternativ, det finns ingen ett-till-ett relation mellan tillvägagångssätt och resultat. Det avgörande är att veta vad som skall läras – då kan slutsatser dras om vad som är nödvändigt för att utveckla en viss förmåga oavsett vilken metod som används för att utveckla den. Utgående från variationsteorin påpekar Marton & Carlgren att oberoende av arbetssätt och arbetsform så är det vad eleverna riktar sin uppmärksamhet mot och hur det framstår för dem som blir avgörande för vad de lär sig. Det är det som endast den kunniga läraren kan påverka.

Den amerikanske matematikdidaktikern Jeremy Kilpatrick (2001) menar också att det krävs en undervisning som på ett medvetet sätt riktar sig mot innehållet för att inlärning skall ske : "what is learned depends on what is taught"(s. 337)

En didaktisk ämnesteori beskrivs av Löwing (2002). Löwing menar att för att bli en god lärare i matematik krävs förutom goda matematikkunskaper att läraren har ett lärarperspektiv på skolämnet matematik. Detta innebär att hon har möjlighet att förstå hur elever med olika förkunskaper, mål och ambition kan lära matematik och lösa problem på olika sätt. Detta kräver en didaktisk teori som kan användas som ett instrument för att förstå barns tankar i och om matematik och som hjälper läraren att förstå hur barn på olika sätt lär sig matematik och hur motsvarande undervisning kan planeras och genomföras. Det gäller att utifrån elevers erfarenheter och förkunskaper skapa förutsättningar för att bygga upp, för eleverna förståeliga, matematiska modeller som utvecklar deras kunnande och underlättar deras lärande. Löwing (2004) beskriver syftet med den ämnesdidaktiska teorin som att den beskriver, systematiserar och i möjligaste mån förutsäger vad som kan uppfattas av olika elever i olika åldrar. Den matematik didaktiska teorin utgör, enligt Löwing, den karta som beskriver vilka innehållsmässiga vägval som är möjliga att göra för olika individer. Det vill säga det krävs en teori för att svara på vad-frågan: vad som är möjligt att undervisa om för olika individer i olika åldrar. Men den ämnesdidaktiska teorin behövs också för hur-frågan då val av arbetsform och arbetssätt , förklarings- och konkretiseringsnivå måste samordnas med mål och syfte, vad det skall undervisas om.

Niss (2001) beskriver disciplinen matematikens didaktik och vilka problemställningar och forskningsfrågor forskare inom disciplinen sysslar med, vilka metoder man använder och vilka resultat man kommer fram till. Han skriver att disciplinen handlar om att skapa bättre förståelse för vad matematiska kunskaper, insikter och färdigheter innebär och om att få en bättre bild av hur dessa ska kunna frambringas, bibehållas och aktiveras hos så väl enskilda elever som olika grupper av elever. Niss anger en rad andra ämnen vilka i sig inte är matematikdidaktiska men som kan behöva studeras för att få svar på matematikdidaktiska frågor. Han kallar dessa för hjälpområden och anger som exempel läroplansteori, utvecklingspsykologi och matematiken som ämne, alla de discipliner som den didaktiska forskningen tar stöd av innehar en akademiskt accepterad plats i forsknings- och

universitetsvärlden. Detta leder, enligt Niss, till att det inte finns någon universellt fastlagen grund för forskningsparadigm inom matematikens didaktik när det gäller metoder, principer, eller normer för verifiering och kvalitet.
Niss anser att matematikens didaktik har dubbel natur: *Beskrivande/förklarande:* Hur ser det ut? (beskrivning) Varför är det så? (förklaring) och *normerande*: Hur bör det vara? Varför då? Båda aspekterna beforskas utifrån frågeställningar som rör såväl undervisning som lärande. Den beskrivande och förklarande aspekten försöker genom empirisk och teoretisk insamling av data samt analys av dessa finna objektiva och neutrala svar utan värderingar och normer. Många frågor och problem som rör undervisning och lärande i matematik inbegriper dock en grundläggande och uttalad eller outtalad förekomst av normer och värderingar. För att normativa frågor skall kunna bli föremål för forskning måste man klargöra de värderingar som ingår. Båda dimensionerna är viktiga komponenter i matematikens didaktik. Det överordnade syftet med en matematisk didaktisk verksamhet beskriver Niss på följande sätt:

> Att specificera och beskriva en önskvärd eller i varje fall *tillfredsställande inlärning* av matematik och de matematiska kompetenser som vi vill att individer som tillhör olika kategorier i samhället borde ha. Vi vill kunna tänka ut, utforma och genomföra en *effektiv matematikundervisning* … vi vill slutligen skapa och etablera relevanta giltiga och tillförlitliga *metoder för att finna och bedöma* resultaten av undervisningen och inlärningen i matematik.
> Att peka ut och specificera dessa mål och syften är i sig en (normativ) matematikdidaktisk aktivitet. (Niss, 2001, sid 28).

För att arbeta mot dessa syften krävs, enligt Niss, att vi undersöker samspelet mellan undervisning, inlärningsprocesser och resultat. Det är nödvändigt att studera det inflytande som lärarens bakgrund, utbildning och föreställningar utövar på hennes undervisning samt att studera egenskaper hos och effekter av de bedömningsformer som kommer till användning i matematikundervisningen. Han beskriver att vi i dag har större kunskap om elevers läroprocesser jämfört med frågor som rör organisering och implementering av undervisnings- och inlärningsmiljöer för olika kategorier av elever på så sätt att de uppnår önskvärda och tillfredsställande kunskaper. Dessa frågor hänger ihop och kunskaper om elevernas läroprocesser är en förutsättning för förståelsen av elevernas resultat. Den forskning som bedrivs visar på komplexitet och komplikationer i elevernas inlärning av matematik. Etablerade bedömnings- och utvärderingsformer är ofta otillräckliga när det gäller att dra välgrundade slutsatser om vad eleverna vet, förstår och kan. Det har visat sig vara en komplicerad uppgift att specificera, beskriva och bedöma elevers matematiska kunskap, insikt och kompetens. Niss menar att det finns anledning till försiktighet och att man bör undvika att dra för snabba slutsatser om elevers inlärning av matematik. Vidare skriver han att "denna inlärning inte är isomorf med det matematiska byggnadsverk som är föremål för lärandet " (sid 35). Det innebär att lärandets processer och dess resultat inte alltid uppträder i den logiska ordning eller de hierarkier som man kan tro är naturliga. Om det är något vi vill att våra elever skall veta, förstå eller klara av måste vi göra detta till föremål för explicit och noggrant tillrättalagd undervisning. Det finns ingen garanterad överföring eller överspridning av vetande, insikt och kunnande från ett sammanhang till ett annat.

Wiliam (2007) anser att man kan tala om principer för god utvärdering utan att föreskriva någon speciell inlärningsteori och utan koppling till en speciell läroplan. Oavsett vilken syn man har på matematikämnets innehåll, syfte och roll i utbildningen måste en adekvat modell för utvärdering passa alla dessa åsikter oavsett vilken matematik man menar att eleverna skall lära eller vilken teori för inlärning man förespråkar.

Doverborg och Pramling (2001) visar i en genomförd enkätundersökning att pedagoger från såväl förskola, förskoleklass och skola blandar samman vad och hur, det vill säga innehåll och metod, när de skall diskutera vad matematik i förskola, förskoleklass och skolans första klass innebär. De ger som förklaring till detta att man i förskolan inte är van att tänka kring matematik och matematiska begrepp och att man i skolans värld inte heller uppfattar matematik som en angelägenhet att arbeta mer systematiskt med i förskolan. En vanlig uppfattning bland förskolans pedagoger är att matematik förekommer naturligt i alla situationer och att man som pedagog inte behöver göra något speciellt för att lära barn matematik. Författarna menar att man måste upptäcka det man tagit för givet och man måste lära sig att uppfatta matematiken i vardagen. De får genom enkäten fram att för många pedagoger i de yngre åldrarna är det själva görandet som är det viktiga och det finns ett förgivettagande att görandet med automatik leder till ett lärande. Detta stödjer Niss uttalande om att lärarens bakgrund, utbildning och föreställningar är avgörande för vad som lärs.

När det gäller diagnosen Förberedande aritmetik som genomförs i förskoleklass är det viktigt att diagnosens innehåll skall utgöra grund för att skapa ett lärande utifrån det synsätt som skall prägla förskolan och förskoleklassens verksamhet. Melander och Prieto (2006) poängterar att texterna som låg till grund för beslutet att förskolans sexårsverksamhet skulle föras in i skolan underströk att förskoleklassen inte skall uppfattas som det första året i en tioårig skola. Integreringen mellan förskola och skola skulle skapa ett holistiskt synsätt som skulle avspeglas såväl i synen på barnet som i verksamheten och i både form och innehåll. Viktiga aspekter som lyfts fram är lekens centrala roll för lärandet och att man utgår från det enskilda barnet. Individualiseringen hänger intimt samman med helhetstanken. Ett viktigt syfte med det holistiska tänkandet – vikten av att se hela barnet – är att det gör det möjligt att se även det enskilda barnet. Genom att se hela barnet kan man bättre bemöta det utifrån dess individuella behov. Det vill säga även för barn i yngre åldrar måste man kunna tolka vilken matematisk förståelse barnet ger uttryck för och sedan veta på vilket sätt jag skall utmana barnets tänkande på bästa sätt med hänsyn till dess förförståelse, erfarenhet och ålder.

Som framkommer är det viktigt att skilja på vad och hur. När det gäller diamantdiagnoserna är fokus på *vad*, diagnosernas innehåll och struktur är till stor del grundat i hur matematikämnets innehåll och karaktär beskrivs i olika sammanhang. Diagnoserna skall vara oberoende av arbetsform och undervisningsmetodik, oavsett vilken eller vilka grundläggande teorier för undervisning och lärande som läraren och eleverna har arbetat efter skall alla elever ändå som lägst uppnå samma mål (uppnåendemålen i kursplanen). Det är mot vissa av dessa mål Diamantdiagnoserna utvärderar (Skolverket, 2009). Wiliams påpekande att principer för god utvärdering kan finnas utan att föreskriva någon speciell inlärningsteori stödjer denna tanke.

Inom vilket ämne kunskapen skall kartläggas spelar roll för utvärderingens utformning. Niss (2001) skriver att de matematikdidaktiska frågeställningarna inte kan besvaras utan att reflektera och aktualisera vad som kännetecknar matematik som ämne i alla dess former och yttringar. Elevernas läroprocesser och inlärningsprodukter bestäms bland annat av matematikens kunskapsteoretiska kännetecken.

Matematikens innehåll är ibland hierarkiskt strukturerat då flera moment bygger på tidigare förkunskaper som anses nödvändiga. Diamantdiagnoserna bygger på denna hierarkiska förkunskapsstruktur. Här kan kopplingar göras till Gagnés teorier, men det är matematikinnehållet i diagnoserna som är strukturerat på detta sätt och, som Niss påpekar, behöver elevernas inlärning inte vara isomorf med det matematiska byggnadsverk som är föremål för lärandet. Det vill säga bara för att innehållet (matematiken) har en viss karaktär (som här kommer till uttryck i diagnosinstrumentets utformning) behöver detta inte utgöra utgångspunkt för inlärningsprocessen hos eleverna eller i undervisningens utformning.

När det till exempel gäller att lära grundläggande aritmetik finns olika metoder för undervisning. Gudrun Malmer (1999) beskriver en metod där man tar hänsyn till just det faktum att de fyra räknesätten är nära förbundna med varandra och att barn ser dem som en helhet. Den monografiska metoden innebär att istället för att splittra upp skolans matematikundervisning i strikt åtskilda räknesätt får eleverna arbeta med alla räknesätten samtidigt. Eleverna löser utmaningar inom de fyra räknesätten med hjälp av de strategier och räknesätt de själva önskar. I denna metod skall läraren gå in och analysera vilket tankesätt barnet använt och föra in formellt skrivsätt med tal och symboler i takt med att barnen kan ta till sig det. Det vanligaste sättet att undervisa är först addition sedan subtraktion och därefter multiplikation och division. Detta kallas enligt Malmer det syntetiska arbetssättet. Här sker uppbyggnaden bit för bit för att sedan fogas samman till en helhet. Om man använder den monografiska metoden går man från istället från helhet till delar, en analytisk metod. Oavsett vilken metod man arbetar efter måste man som lärare veta vad eleverna skall förstå och följa upp att de utvecklar adekvat förståelse och kunnande.
Att utgå från komplexa helheter ställer än större krav på lärarens ämnesteoretiska och didaktiska kunnande.

Min sammanfattande uppfattning av ovanstående teorier och diskussion kring lärande och undervisning i matematik blir att den innehållsliga vad-frågan är i centrum. Som flera av författarna ovan beskrivit (Marton & Carlgren (2000); Korp(2003); Risbeck (2008); Dysthe (2003)) är det överordnat vad eleverna skall lära sig, hur-frågan i form av arbetssätt, metoder och undervisningsformer är underordnad vad-frågan. Marton & Carlgren (2000) uttrycker detta som att det är lärarens medvetenhet om vad som skall läras, insikten i det professionella objektet, som är det avgörande. Det finns inget svar på hur-frågan som leder till automatisk förståelse av ett visst innehåll för en viss elev, eller grupp av elever, i en viss situation. Detta innebär att den didaktiska ämnesteorin blir den viktigaste utgångspunkten för att analysera och förklara elevers förståelse av matematik. Den didaktiska teorin hjälper läraren att förstå hur barn på olika sätt lär sig matematik (Löwing, 2002) och den beskriver, systematiserar och i möjligaste mån förutsäger vad som kan uppfattas av olika elever i olika åldrar (Löwing, 2004). De didaktiska teorin innefattar även hur-frågan då den ger underlag till hur undervisningen kan planeras och genomföras (Löwing, 2004). Detta uttrycker Niss (2001) som att didaktiken även innefattar att utforma och genomföra en effektiv matematikundervisning. Men hur-frågan tar sin utgångspunkt i vad som skall läras. Löwing (2004) uttrycker detta som att hur måste samordnas med mål och syfte, Marton & Carlgren (2000) skriver att det avgörande är att veta vad som skall läras då kan slutsatser dras om vad som är nödvändigt i form av undervisningens utformning för att utveckla detta kunnande. Niss (2001) slår även fast att de didaktiska frågeställningarna ej kan besvaras utan att aktualisera vad som kännetecknar matematiken som ämne. Därför är didaktiken starkt knuten till ämnesteorin. Här kan strukturer och hierarkier inom ämnet visa på vad som är nödvändig och viktig förförståelse hos eleven för att lära mer eller nytt. Detta kan vara en viktig utgångspunkt för planering av undervisningen. Men likväl som det inte finns en given ett-till-ett relation mellan tillvägagångssätt och resultat (Marton & Carlgren, 2000) så finns det ingen ett-till-ett relation mellan matematikens byggnadsverk och elevernas inlärning (Niss, 2001). Det är ett komplext samspel mellan lärande, undervisning och resultat och lärarens utbildning och uppfattning påverkar starkt. Avgörande är vad som skall läras och därför blir den matematikdidaktiska forskningen om hur elever förstår och lär just det innehåll som kartläggs i denna uppsats, utgångspunkt för mina analyser och tolkningar.

2:5 Matematikämnets struktur och innehåll.

Då det aktuella ämnets karaktär starkt inverkar på undervisningens och utvärderingens utformning kommer jag i detta avsnitt att diskutera vad som är viktiga kännetecken för matematiken som ämne och vad man bör ta hänsyn till då man utvärderar elevers olika kompetenser i matematik.
I Rapporten *Att lyfta matematiken, betänkande av matematikdelegationen* (SOU 2004:97) framhålls att det är en angelägen uppgift att utveckla en större variation i bedömningskulturen i matematik. Olika innehåll bedöms bäst på olika sätt till exempel anges att när det gäller begreppsförståelse och problemlösning är gemensamma samtal en lämplig form.

I Nämnaren (nr1, 2001) skriver Nyström och Palm att det finns ett behov av variation i hur vi bedömer elevers kunskap. (författarna använder beteckningen prov för alla bedömningssituationer och bedömningsaktiviteter). Man lyfter fram tre alternativ som komplement till ”vanliga matteprov”. Det är bedömning i grupp, muntliga prov och självvärdering. Samtidigt lyfter man fram vikten av att också använda sig av ”vanliga matteprov”. Dessa anses, om de är väl utformade och reflekterade, uppfylla många av de kvalitetskrav man kan ställa på bedömningssituationer i skolan. Fördelarna som lyfts fram är att de är ”kostnadseffektiva” eftersom både genomförande och lärarbedömning kan ske snabbt och ger läraren mycket information om elevens kunskaper. Pålitligheten stärks av att provet innehåller relativt många uppgifter.

Korp (2003) hänvisar till forskaren Wolf som menar att skillnader mellan olika forskares och praktikers inställning till bedömning beror på att de representerar olika ämnen och att skillnader i synsätt ofta kan tillskrivas fundamentala olikheter mellan ämnenas natur. Vidare refereras till forskaren Black som påpekar att varje bedömning av elevers kunskaper måste utformas som en konsekvens av vad som utgör progression i det aktuella ämnet. I samma rapport hänvisas till Kvale som skriver att det inte är självklart vad som är relevant kunskap inom ett visst ämne.

När det gäller vilka kunskaper eleverna skall utveckla inom matematikämnet diskuterar man ofta i termer av olika kompetenser som eleven skall utveckla kunnande i. Dessa kompetenser finns beskrivna av flera forskare men har en slående överensstämmelse. Palm, Bergqvist, Eriksson, Hellström, Häggström (2004) ger en beskrivning av vad det innebär att kunna matematik uttryckt i följande kompetenser:

> -*Problemlösningskompetens.* För att problemlösning skall vara en skapande aktivitet som kräver mer än endast användning av utantill inlärda regler behöver uppgiften vara av sådan art att problemlösaren inte har en färdig lösningsmetod tillgänglig.
> - *Algoritmkompetens*. Att behärska algoritmer är nödvändigt för en effektiv användning av matematiken. En säkerhet i standardprocedurer underlättar lärandet avsevärt eftersom de ingår i metoder som används för att visa på giltigheten hos nya metoder samt innebörden av nya begrepp. Att behärska grundläggande standardprocedurer rutinmässigt är en förutsättning för effektiv matematisk problemlösning.
> -*Begreppskompetens*. Förståelse av de i kursen centrala matematiska begreppen är av största vikt. God kunskap av nya begrepp är beroende av god kunskap om begrepp som tidigare introducerats. Att lösa problem utanför skolan är ofta en omöjlighet utan god kännedom om innebörden av relevanta matematiska begrepp.

- *Modelleringskompetens.* Innebär att utifrån en utommatematisk situation kunna skapa en matematisk modell som beskriver situationen, arbeta med modellen inommatematiskt samt utvärdera modell och resultat. Denna kompetens kräver att algoritmisk aktivitet och problemlösningsaktivitet behärskas. Denna kompetens är ofta svår att testa i en traditionell provsituation
- *Resonemangskompetens.* Att kunna föra en argumentation på matematiska grunder. Argumentation som bygger på allmänna logiska och speciella ämnesteoretiska grunder. Att formulera, förbättra och undersöka hypoteser.
- *Kommunikations kompetens.* Flervägskommunikation avses, att både kunna tolka information med matematiskt innehåll och att kunna producera och framföra information med matematikens språk och symboler, såväl skriftligt som muntligt.

En forskningssammanställning som beskriver vilka krav man bör ställa på elevers grundläggande kunskaper i matematik finns i boken *Adding it Up* (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Där beskrivs matematikkunskapen i fem olika, men integrerade delar:

-*conceptual understanding* som omfattar matematiska begrepp, operationer och relationer.
-*procedural fluency* som omfattar förmågan/färdigheten att utföra räkneoperationer effektivt, säkert och med flyt.
-*strategic competence* som omfattar förmågan att tolka, formulera, representera och lösa matematisk problem.
-*adaptive competence* dvs. förmåga till logiskt tänkande samt att förklara och diskutera valda metoder.
-*productive disposition* som omfattar förmågan att se värdet och användbarheten av matematiska modeller kombinerat med en tilltro till det egna kunnandet.

I USA har man tillsatt en grupp bestående av framstående matematikdidaktiker och matematiker för att utarbeta en gemensam grundsyn för skolans matematikundervisning, Common ground (Loewenberg Ball, Ferrini-Mundy, Kilpatrick, Milgram, Schmid & Schaar, 2005). En del av de punkter man kom överens om som viktiga att eleverna behärskar var:

-*Automatical recall of basic facts*. Man menade att vissa procedurer och algoritmer inom matematiken är så grundläggande och är så generellt tillämpbara att de måste behärskas med automatik.
-*Calculators*. Miniräknare bör användas även i de lägre årskurserna, men, påpekar man, de måste användas med stor försiktighet så att man inte äventyrar inlärningen av basala kunskaper.
-*Learning algorithms*. Eleverna skall med säkerhet kunna använda algoritmerna för de fyra räknesätten. Samtidigt är det viktigt att de förstår hur algoritmerna är uppbyggda och fungerar. Ett skäl för detta är att algoritmerna bygger på strukturen i vårt talsystem med basen 10 och därmed förstärker elevernas taluppfattning.
-*Fractions*. Förståelsen av bråk är viktig eftersom det är omöjligt att på djupet förstå förhållande, proportionalitet och procent utan att behärska bråk. Bråk är också en nödvändig förkunskap för algebran.

Rolf Hedrén (2001) väljer att följa den danska forskaren Skovsmoses indelning av kunskap i matematik i följande tre delkunskaper:

-*matematisk kunskap*, kunskap man använder när man tolkar och löser ett problem.

-*teknisk kunskap*, att utföra beräkningar med huvudräkning, överslagsräkning, skriftlig räkning eller med tekniskt hjälpmedel.
-*reflekterande kunskap,* rimlighetsbedömning, överslagsräkning, jämförelse med liknande problem.

Hedrén påpekar att de tre delkunskaperna är nära förbundna med varandra. Likaså är tabellkunskaper en nödvändig förkunskap för att kunna utveckla teknisk kunskap. Skriftlig räkning med algoritm bygger på automatiserade tabellkunskaper och vid huvudräkning och överslagsräkning används en generaliserad tabellkunskap. För att kunna utföra mer komplicerade beräkningar är det nödvändigt att viss kunskap är automatiserad. Detta utgör en beskrivning av hur matematikens hierarkiska struktur kan se ut inom den grundläggande aritmetiken.

Matematikämnets olika kompetenser är olika lämpade för att utvärderas på olika sätt. Det är angeläget att inte enbart diagnostisera begreppsförståelse utan också att eleverna har så goda färdigheter att de får flyt i sitt räknande och sin kommunikation.(Loewenberg Ball m.fl 2005).

Skriftliga diagnoser där ett rätt eller fel svar anges ger läraren tydlig information om delar som till exempel automatiserad tabellkunskap och förståelse för ord och termer. Likaså kan algoritmräkning/skriftlig räkning redovisas individuellt och skriftligt på ett sådant sätt att läraren får god information om elevens strategier och förmågor. Kompetenser som problemlösningsförmåga, kommunikationsförmåga och huvudräkningsförmåga är kompetenser som är svårare att testa i en traditionell provsituation. De testas bäst i gemensamma diskussioner och redovisningar då undervisningen organiseras i dialogform enligt Palm, Bergqvist, Eriksson, Hellström & Häggström (2004).

Detta understryker att formerna för att kartlägga elevers kunskaper måste varieras för att ge en heltäckande bild.

De matematiska kompetenser som testas i Diamantdiagnoserna är i första hand det som enligt här redovisad forskning kallas *automatical recall of basic facts, procedural fluency, learning algorithms* och *teknisk kunskap.* Detta innefattar alltså att med säkerhet och flyt kunna utföra beräkningar såväl med huvudräkning som med effektiva och generella skriftliga metoder, vilket innefattar att grundläggande talfakta, (tabellkunaksper) har automatiserats. Även *conceptual understanding, begreppskompetens* finns med som en kompetens som prövas i diagnoserna. Denna kompetens som innefattar att förstå innebörden i matematiska begrepp ligger till grund för att kunna föra en argumentation på matematiska grunder (resosnemangskompetens) och att kunna tolka information med matematiskt innehåll och kunna producera och framföra information med matematikens språk (kommunikations-kpompetens). Att ha förståelse för matematiska begrepp är ofta nödvändigt för att kunna förstå och tolka ett matematiskt problem (problemlösningskompetens, matematisk kompetens). Det är också dessa kompetenser som enligt forskningen ovan bäst lämpar sig för att testa med hjälp av kortare, individuella och skriftliga prov eller diagnoser. Diamantdiagnoserna är också framtagna i avsikt att vara just ”kostnadseffektiva” på så sätt som Nyström och Palm här beskriver det.

2:5:1 Matematikens abstrakta karaktär.

En viktig egenskap hos matematiken är dess abstrakta karaktär. Elevers matematikinlärning påverkas av i vilken grad de kan utveckla ett abstrakt tänkande. I National encyklopedien beskrivs matematik som:

> En abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling … den har frigjort sig från det konkreta ursprunget hos problemen vilket är en förutsättning för att den skall vara generell, dvs. tillämpbar i en mångfald situationer (NE).
> Fischbein (2007) skriver:
>
> Tidigt aritmetiskt tänkande är en förutsättning för matematikinlärning…Då det gäller tidigt aritmetiskt tänkande krävs inte bara kunskaper om språk- och språk-utveckling utan också om barns kognitiva utveckling och variationer i abstraktions-förmåga. (sid 9)

Vikten av att låta kunskapsprocessen ta sin utgångspunkt i den konkreta situationen påpekas ofta . Bland annat skriver Malmer (1999) att om eleverna skall kunna nå fram till förståelse av abstrakta begrepp, krävs för de allra flesta att de genom aktivt och kreativt arbete i konkreta sammanhang får tillfälle att upptäcka matematiska samband och processer, som sedan om-kodas till det matematiska symbolspråket.

Doverborg & Pramling Samuelsson (2006) påpekar att den moderna västerländska kulturen kräver en hög nivå av abstrakt tänkande och att vi tidigt börjar uppmuntra barn till detta abstrakta tänkande. Barns sätt att tänka är konkret och långt från de abstrakta ideal som det västerländska samhället uppmuntrar. Men eftersom våra barn lever i vår kultur och kommer att bli en del av denna måste deras förmåga till abstrakt tänkande utvecklas. Det är pedagogens uppgift att hjälpa barnet vidare i hans eller hennes tankeutveckling. Verksamheten i både skola och förskola skall ge möjlighet för barn att lära. Barn som vistas i en miljö som erbjuder tankemässiga utmaningar utvecklas och skapar förutsättningar för lärande på ett helt annat sätt än barn som inte möter denna form av miljö.

Nyare neurovetenskaplig forskning visar enligt Fischbein (2007) att gemensamma skolupplevelser som läsinlärning och aritmetisk träning leder till att hjärnans kognitiva förmåga utvecklas. Stimulans i omgivningen och träning av abstrakt tänkande blir särskilt viktig för barn som växer upp i en mindre stimulerande hemmiljö. Det är dock också tydligt att en konkretisering av uppgifter blir avgörande för om barnet skall kunna lösa uppgiften och på sikt kunna abstrahera. Om man exempelvis i matematikundervisningen startar på en för abstrakt nivå kommer en del barn kraftigt att missgynnas.

Johansson och Wirth (2007) poängterar att det är av största vikt att barn redan vid skolstarts åldern kan abstrahera genom att tänka på tal som siffror i talraden, det vill säga att de har en mental talrad. Johansson visar att elever med matematiksvårigheter på alla stadier i grundskolan hade det gemensamt att de löste aritmetiska uppgifter med strategier som byggde på koppling av talen till konkreta föremål som räknas från början. Johansson menar att undervisning inriktad på att ge dem förutsättningar att utveckla en mental talrad förmodligen skulle hjälpa dem att reparera en del av dessa brister. Förmågan att tänka på talen just som tal och siffror och inte längre behöva översätta dem till föremål eller föreställningar om föremål ger möjlighet att utveckla smarta lösningar till svåra uppgifter.

Att kunna konkretisera begrepp och annat matematiskt innehåll är alltså viktigt i början av en lärandeprocess. Speciellt under de första skolåren förutsätts undervisningen bygga på en konkretisering av det som skall läras. Denna konkretisering kan ske på en rad olika sätt och med hjälp av många olika material och metaforer (språklig konkretisering). Vilket material jag använder och hur jag använder det beror på vad jag som lärare vill att eleven skall förstå.
En utveckling mot ett mer abstrakt tänkande där det konkreta materialet inte längre behövs är sedan nödvändig.

Löwing & Kilborn (2002) påpekar vikten av att klargöra syftet med konkretiseringen. Det är viktigt att konkretiseringen inte enbart blir en aktivitet för att sysselsätta eleverna eller för att de skall manipulera sig fram till rätt svar. Konkretiseringen skall hjälpa eleven att bygga upp en ny tankeform och att uppfatta innebörden i en metod eller ett begrepp. Löwing (2006) skriver att målet med konkretisering är att det skall leda till abstrakt förståelse. Detta kräver att läraren måste genomskåda strukturen för det som skall konkretiseras. Dessutom måste valet av konkretiseringsmodell vara såväl tydlig som generaliserbar. En förklaringsmodell får inte bara fungera för stunden utan bör kunna användas vid liknande problem och utvecklas vid ett senare tillfälle. Det är också viktigt att veta när det är lämpligt att konkretisera och vilken matematik som inte låter sig konkretiseras.

Solem och Reikerås (2004) skriver att arbetssättet som innebär att man tar utgångspunkt i barns vardag och tankesätt inte står i motsättning till strävan efter formalisering och automatisering. Många kunskaper inom de fyra räknesätten måste automatiseras för att barnen ska kunna hänga med i skolmatematiken. Matematikundervisningen under de första skolåren har därför avgörande betydelse. Vi måste lära oss att möta barnen och deras kunskaper på rätt sätt.
Angående konkretisering av matematikinnehåll skriver Marton och Carlgren (2000) att när det gäller organisering av undervisning diskuteras ofta omöjliga frågor som till exempel: är det bra att använda konkret arbetsmaterial i matematik? Avgörande frågor borde istället vara: Vad är det för material? Hur används det? Till vilket syfte? Författarna menar att i skolan diskuteras ofta hur arbetet skall läggas upp utan att det kopplas till syftet! Fokus är inställt på aktiviteten i sig och inte på det som aktiviteten syftar till. Elevens lärande tas för givet och problematiseras inte.

Detta innebär att man i en diagnossituation måste vara klar över vilket kunnande hos eleven man som lärare vill få vetskap om. Är det om eleven har abstraherat en matematisk tanke eller är det om eleven i en specifik situation med ett specifikt material kan komma fram till en lösning? Det kan vara en avgörande skillnad i kvalitet om eleven löser uppgiften med eller utan konkretiserande material. Vetskap om detta skall avgöra om material skall användas i diagnossituationen eller inte. I Diamantdiagnoserna framkommer i instruktionerna om uppgifterna skall lösa med hjälp av konkretiserande material eller ej. Oftast är det elevernas förmåga att abstrahera som testas (Skolverket, 2009).

2:6 Diagnosen Förberedande aritmetik.

Detta avsnitt ger en fördjupad beskrivning av Diamantdiagnosen *Förberedande aritmetik* som är avsedd att genomföras i förskoleklass för att kartlägga var eleven befinner sig när det gäller tal- och antalsuppfattning inför skolstarten. Denna diagnos utgör underlag för den insamlade empirin i uppsatsen.

Diamantdiagnoserna är indelade i sex innehållsliga områden: Aritmetik, Bråk och Decimaltal, Talmönster och Formler, Mätning, Geometri samt Statistik. Varje område har därefter delats upp i delområden och inom varje delområde kan finnas flera diagnoser ordnade efter ökad svårighetsgrad / progression som antingen kan bero på ökad komplexitet eller på höjd abstraktionsnivå (Skolverket, 2009). Till respektive område aritmetik, mätning och geometri samt statistik finns en muntlig fördiagnos. Denna är anpassad för att användas på elever i förskoleklass eller vid skolstart. Dessa diagnoser beskriver frågeställningar och aktiviteter som enkelt kan göras med barnen för att se hur långt de kommit i sin matematikutveckling inför starten av skolundervisningen. Som tidigare tagits upp i litteraturgenomgången är denna muntliga och mer informella form av diagnostisering lämplig när det gäller yngre barn (Korp, 2003. Doverborg & Pramling, 2006). I diagnosen prövas grundläggande förståelse för antalsbegreppet och för uppräkning av antal samt begynnande strategier för addition.
Diagnosen finns som Bilaga 1. Där visas samtliga uppgifter som ingår i diagnosen samt vad syftet med respektive uppgift är och hur elevens svar skall redovisas i resultatblanketten.

Senare diagnoser inom området aritmetik testar om eleven har automatiserat de grundläggande räkneoperationerna vilket visat sig vara en förutsättning för att effektivt kunna utföra algoritmer och beräkningsprocedurer samt för att avgöra om eleven har fungerande strategier för skriftlig räkning (Hedrén, 2001).

Som framgår av litteraturgenomgången finns det mycket som talar för att kartläggning av elevers kunskapsutveckling är viktigt, man kan dock ställa frågan när skall man egentligen börja med detta:*Varför skall man diagnostisera eleverna redan inför skolstarten?*

När eleverna börjar skolan har de mycket olika erfarenheter av matematik. Vissa av dem kan redan talens namn och ordning upp till 20 och kan dessutom räkna 10 – 20 föremål. Andra har ännu inte ”knäckt räknekoden”. Såväl forskning som beprövad erfarenhet visar att elever i den senare gruppen riskerar att få problem med matematik under resten av sin skoltid.

Fischbein (2007) hänvisar i sin rapport till forskning som visar att variationen i elevers matematikkunskaper är mycket stor redan när eleverna börjar skolan. Fischbein skriver att elevernas förförståelse och tidigare erfarenheter ligger till grund för hur de löser aritmetiska uppgifter som bygger på de fyra räknesätten, men att förförståelsen också har att göra med den individuella kognitiva utvecklingen. Slutsatsen blir att när det gäller matematikundervisningen måste läraren ta reda på var eleven befinner sig i sitt tänkande och börja där. I samma rapport hänvisar Fischbein till en annan studie genomförd av Engström och Magne som drar slutsatsen att skolsystemet producerar matematiksvårigheter genom att man inte anpassar undervisningen till barnets tidiga aritmetiska kunskapsutveckling
Fischbein beskriver vidare ett försöksprojekt som genomfördes i Sävsjö kommun 2006 där utgångspunkten var att ta reda på så mycket som möjligt om barnen redan i förskolan för att sedan kunna individualisera undervisningen i skolan. Vid skolstarten gjordes ett test som

mätte kognitiv utveckling, fonologisk medvetenhet, matematisk mognad och ett läs- och skrivtest. Elevgruppen följdes upp under ett antal år och jämfördes med en kontrollgrupp. Vid slutet av år 3 var det signifikant fler barn i försöksgruppen som läste, räknade och skrev mycket bra. Dessutom uppstod en rad andra positiva effekter av social karaktär. Såsom ökad trivsel för både elever och lärare. Slutsatsen av försöket blev att det krävs kunskaper om barnens individuella utveckling redan innan de börjar skolan och att dessa måste dokumenteras.

Även Gudrun Malmer (1999) beskriver vikten av att tidigt kartlägga elevers utgångsläge redan vid skolstart och påpekar att informationen bör sammanfattas i någon form av översiktsprotokoll så att man lätt kan få en uppfattning om varje barns utgångsläge.

Det viktigaste då man genomför en intervju är att vara säker på vad det är man vill veta. Den muntliga intervjuform som används för diagnosen Förberedande aritmetik är ett effektivt sätt att få reda på mycket om varje elev på kort tid. Varje intervju tar inte mer än 5-10 minuter.
När man fått erfarenhet av att kartlägga just det matematikkunnande som prövas i denna diagnos kan man även kartlägga samma innehåll i naturligt uppkomna situationer i det dagliga arbetet. Alla frågor behöver inte heller ställas vid ett och samma tillfälle. Det är alltid viktigt att bokföra vad man observerat för varje barn .

Diagnosen *Förberedande aritmetik* omfattar tio uppgifter där eleverna ges möjligheter att visa hur långt de utvecklat sin taluppfattning inför skolstarten. Diagnosen bör helst genomföras i slutet av förskoleklassen, eller senast vid skolstarten i årskurs 1. Syftet med de olika uppgifterna framgår av diagnosen. Vad som kartläggs i diagnosen är elevens förmåga att:

- Använda talraden för uppräkning
- Känna igen talens grannar
- Utföra enkel addition
- Skriva siffror

Diagnosen genomförs i intervjuform med en elev i sänder. Det material man behöver är 22 föremål såsom knappar, gem eller något liknande. (Materialet används i frågorna 4, 5, 6 och 9. Däremot är det viktigt att eleverna inte använder material när de svarar på frågorna 7 och 8. När det gäller dessa frågor vill man undersöka elevens förmåga att abstrahera, använda en mental talrad). De tio frågorna på diagnosen skall helst formuleras exakt som de är ställda enligt diagnosen. Däremot kan antalet knappar som används varieras beroende på vilken elev man intervjuar. Det viktiga är att man är medveten om syftet med respektive fråga och vet vad man frågar om. Resultaten bokförs i tillhörande resultatblankett. För att få underlag för en uppföljning av diagnosen kan man studera den ifyllda resultattabellen. Man kan där se om det bara är enstaka elever som är osäkra på en uppgift eller om det är många elever. Detta kan ha stor betydelse för planering och genomförande av uppföljningen såväl på individnivå som på gruppnivå.

Med den typen av information som den här diagnosen ger blir det möjligt att möta de olika eleverna på deras nivå och utveckla varje elevs taluppfattning. Genom att upptäcka elever som redan kommit långt i sin utveckling av taluppfattning, kan man undvika att ge dem för enkla och därmed ointressanta uppgifter. För de elever som ännu inte utvecklat denna förståelse kan man få reda på vilken förförståelse som saknas och som man successivt måste förbättra. Under själva intervjun får man dessutom en hel del annan värdefull information om elevernas syn på skola och matematik. Det går givetvis inte att ge ett exakt facit till alla uppgifter i denna diagnos utan här får läraren själv bedöma kvaliteten i elevens svar. För elevens bästa måste varje tendens till osäkerhet noteras och följas upp.

2:6:1 Teoribakgrund till intervjufrågorna i Förberedande aritmetik

Modern forskning visar att barn har en förmåga att förstå och lära grundläggande matematik i tidiga åldrar. Två forskare som ägnat stor uppmärksamhet åt detta är Gelman och Gallistel (1978). Genom deras forskning kan man bilda sig en uppfattning om vad det innebär att kunna räkna föremål. De delar upp denna förmåga i fem delar, fem principer. De första tre av dessa är:

1. *Abstraktionsprincien* som innebär att det är möjligt att bestämma antalet föremål (element) i varje väl avgränsad mängd.
2. *Ett-till-ett principen* som innebär att man, genom att ordna föremål parvis, kan avgöra om två mänger innehåller lika eller olika många föremål.
3. *Principen om godtycklig ordning* som innebär att man får samma resultat oavsett i viken ordning man räknar föremålen.

De här tre principerna anses vara genetiskt nedärvda och brukar utvecklas i tidig ålder. För att barn skall kunna hantera dem krävs det emellertid en miljö där principerna kan användas. De två övriga principerna utvecklas i en social kontext och kräver träning. Dessa principer är:

4. *Principen om talens stabila ordning*. För att kunna ange antalet föremål i en mängd krävs det att man gör en ett-till-ett tillordning (parbildning) mellan räkneord och föremål. Detta kräver att man behärskar talens namn i rätt ordning
5. *Antalsprincipen* som innebär att det sist nämnda talnamnet vid en uppräkning (enligt princip 4) anger antalet föremål i den uppräknade mängden.

Att ett barn har problem med att hantera tal eller antal, beror i allmänhet på att barnet ifråga har problem med en eller flera av de nämnda principerna. Detta leder som tidigare nämnts till svårigheter när det gäller att följa skolans undervisning i matematik. Den muntliga diagnosen förberedande aritmetik, har bland annat som syfte att kartlägga huruvida eleverna utvecklat förståelse för dessa principer.

Uppgift 1 har som syfte att se hur långt eleven har tillägnat sig en stabil talrad. Detta är ett exempel på när det kan vara stor skillnad mellan hur långt olika elever har kommit. En elev som ännu inte knäckt koden för vårt talsystem kan tappa bort sig redan vid tolv, tretton. Många elever stannar på 19 eller 29. Vi använder oss av ett talsystem som är ett positionssystem och som har basen 10. Detta är inget som ett barn direkt genomskådat bara för att han/hon börjat utveckla en allt mer stabil talrad. Talraden är stabil när barnet alltid säger talen i rätt ordning och vet att de alltid måste vara i just den ordningen och att ett tal som följer av ett annat innebär ett mer än föregående tal. De svenska namnen på talen i vår talrad säger till att börja med inte så mycket om vår 10-bas struktur. 10-basen kommer ju till uttryck redan för talet 11 som är uppbyggt av en 10:a och en 1:a. Detta kan utläsas av de skrivna talen men barn lär sig uttala talen före de lär sig skriva dem och i vårt språk hörs inte att 11 är en 10:a och en 1:a. Detta kan jämföras med språk i andra kulturer. På turkiska heter till exempel 11 ”onbir”, och ordet för 10 är ”on” och ordet för 1 är ”bir”. Och även på Vietnamesiska är talraden språkligt logisk redan efter tio. Tolv heter tillexempel múdi hai där múdi betyder 10 och hai betyder 2.

För ett barn som inte uppfattat strukturen i talraden blir varje nytt räkneord enbart ett nytt ord att komma ihåg, dessutom skall de kommas ihåg i rätt ordning. Precis som barn kan lära sig rim och ramsor på olika sätt kan de även lära sig talraden just som en ramsa men inte med hur många ord som helst. Kan de komma ihåg fram till tolv följer ju sedan en viss logik för talen 13-19 (även om tiotal och ental uttalas i omvänd ordning) men sedan bryts mönstret igen och därför blir det stopp för många barn här. Lär man sig att 20 kommer efter 19 kan man hålla på till 29 men sedan är det stopp igen. Från 30 och framåt är det mer språkligt logiskt och det är möjligt att se strukturen och knäcka koden. Därför kan barn som kommer förbi 30 ofta räkna på väldigt långt, om de bara orkar (Löwing, 2008).

Uppgift 2 är också kopplad till talraden men här kontrolleras om eleven kan börja räkna framåt i talraden från något annat tal än ett, i exemplet frågas om eleven kan börja på fem. En elev som bara kan räkna från talet ett kan inte utvecklas vidare när det gäller att använda effektiva strategier för tillexempel addition. (se uppgift 9).

Johansson & Wirth (2007)skriver att barn som kan räkna framlänges från ett annat tal än ett visar att de har plockat isär räkneorden till självständiga ord från att tidigare enbart ha haft en ramsa där räkneorden har verkat sitta ihop: ”ettvåtrefyra…”, Först när de ser räkneorden som enskilda tal kan de ta steget till att säga talens grannar utan att räkna från början. Detta testas i uppgift 7 och 8 på diagnosen. Att kunna räkna från ett annat tal än ett är också förkunskap till additionsstrategierna räkna från första och räkna från största som testas i uppgift 9.

Uppgift 3 har som syfte att kartlägga om eleven kan räkna bakåt i talraden. Denna kunskap är en viktig förkunskap för att effektivt kunna utföra subtraktionsberäkningar. En elev som endast har lärt sig talraden som en talramsa och inte kopplar talen i talraden till konkreta antal kan ha svårt att räkna bakåt.
Johansson och Wirth (2007) redovisar en undersökning utförd på 126 barn i åldern 5-8 år som fått lösa subtraktionsuppgifter presenterade i en språklig kontext. Resultatet visar att barn med goda resultat i baklängesräkning löste ca 80% av uppgifterna. De barn som hade svårigheter med att räkna baklänges använde främst strategier som att räkna på föremål (som fingrarna) och hade rätt svar på endast drygt 20% av uppgifterna. Statistiska kontroller av resultaten visar att de inte kan förklaras av barnens ålder. Det avgörande för barnens prestation var inte åldern utan förmågan att kunna räkna bakåt i talraden.

Uppgift 4 och 5 handlar om att räkna antal på olika sätt. I uppgift 4 skall eleven själv räkna upp 14 föremål, för att koppla ihop ett antal konkreta föremål med ett givet tal. Detta kräver att eleven behärskar ett-till-ett principen och har en stabil talrad till 14 (om eleven inte har det kan ett lägre antal väljas som stämmer bättre överens med elevens förkunskaper).
I uppgift 5 skall eleven räkna hur många föremål som ligger på bordet där läraren redan har lagt fram 22 st knappar till exempel. Även detta kräver förståelse för ett-till-ett principen samt en stabil talrad. Här måste eleven också ha en strategi för att skilja de räknade föremålen från de oräknade.För att kunna räkna antal och förstå att de uppräknade föremålen representerar ett visst antal måste eleven också ha förstått antalsprincipen.

I **uppgift 6** prövas om eleven förstått principen om godtycklig ordning. Detta är kopplat till det begrepp som Piaget kallat för antalskonstans (Malmer, 1999) .Det vill säga eleven skall förstå att om inga föremål tillkommit eller tagits bort så är antalet detsamma var jag än börjar räkna. En elev som inte är säker på detta kan också tro att föremålen är fler om de sprids ut över en större yta. Elever med denna uppfattning har ännu inte utvecklat full förståelse för antalsbegreppet.

Uppgift 7 och 8 prövar om eleven kan talens grannar åt båda hållen. Att kunna hoppa ett steg framåt i talen är en viktig förkunskap inför additionsberäkningar och på samma sätt är förmågan att kunna förflytta sig bakåt i talraden en viktig förkunskap till subtraktion. Denna uppgift skall göras utan konkret material. Med hjälp av ett konkret material kan eleven Manipulera sig fram till rätt svar genom att först räkna upp 6 föremål, sedan lägga till respektive ta bort ett av föremålen och till sist räkna upp hur många det sedan är. Detta testar dock inte alls om eleven kan talet sexs grannar utan enbart att eleven klarar uppräkning av 6, 7 respektive 5 föremål, och det är en helt annan kompetens (vilken testas i uppgift 4 och 5). Uppgiften är ett exempel på när elevens abstrakta tänkande testas, eftersom barnet skall arbeta med talen i huvudet. Dock kan uppgiften konkretiseras via språket genom att uppgiften sätts in i en kontext till exempel: *Du har 6 äpplen och får ett till, hur många har du då?* Det gör att uppgiften kan knytas till något eleven känner igen sig i vilket gör att det blir lättare att tänka kring uppgiften som också blir meningsfull.

I **uppgift 9** i den muntliga fördiagnosen i aritmetik, är det möjligt att urskilja tre beräkningsstrategier för additionen 3 + 5. Dessa strategier benämns räkna från början, räkna från första och räkna från största(Löwing 2008) och är på kvalitativt olika nivåer. En elev som inte klarar uppgift 2 på diagnosen har inte de nödvändiga förkunskaperna för att använda strategin räkna från första (eleven räknar 3…4,5,6,7,8) eller räkna från största (eleven räknar 5…6,7,8). En elev som använder strategin räkna från början utför ingen egentlig additionsberäkning utan gör endast en uppräkning av samtliga föremål. För att kunna använda strategin räkna från största skall eleven dessutom ha förstått att ordningen på termerna kan bytas, vilket matematiskt uttrycks som kommutativa lagen och har sin grund i att eleven förstått principen om godtycklig ordning.

Fischbein (2007) poängterar att för att ta reda på hur den enskilda eleven tänker om tal krävs kvalitativa metoder. Flera kvalitativt olika strategier är involverade i den tidiga aritmetiken. De olika strategierna som barn använder för additionsberäkningar är ett exempel på detta. Fischbein (2007) hänvisar till en avhandling av Göta Eriksson som behandlar dessa additionsstrategier i den tidiga verbala aritmetiken, vilken föregår den skrivna. När det gäller addition av talen 3 + 4 som barnet fick konkretiserad för sig med hjälp av klossar urskiljde Eriksson olika stadier i barnens räknestrategier. En del av dessa strategier är utvecklingsbara och kan bli effektiva och fungerande även i ett sammanhang med tal från ett utvidgat talområde en del strategier är inte det. Det är viktigt att ta reda på vilka strategier eleven använder och inte bara se om uppgiften blir rätt till slut. Fischbein och Eriksson drar slutsatsen att traditionella räkneböcker kan vara för abstrakta för många elever som rutinmässigt lärt sig lösa uppgifterna men inte förstår vad de gör. Johansson och Wirth (2007) påpekar att strategierna räkna från största eller första dominerar bland barn i förskoleklass och skolans första år.

Uppgift 10 testar om barnet kan skriva tal med hjälp av våra formella siffersymboler. Denna uppgift har sin bakgrund i de teorier som behandlar matematikens formella symbolspråk och hur elever förstår och använder det. Varje siffersymbol är en symbol för motsvarande talord vilket i sin tur syftar på samma antal föremål. Genom att bara se en siffersymbol kan man inte utläsa hur talordet uttalas eller hur många antal den står för.

Lennerstad (2008) skriver att i likhet med andra språk har ”matematiskan” ett alfabet (sina symboler) och en grammatik (räknelagar och regler). Matematiska symboler och formler representerar ett innehåll som går utöver symbolerna själva. Symbolerna har en viss godtycklighet eftersom de saknar bildlikhet med det konkreta objektet. Detta gör symbolerna mångtydiga. I denna mångtydighet ligger också en generalitet, symbolerna kan representera många olika tillämpningar. Vidare beskriver Lennerstad symbolnivån som en mellannivå mellan det konkreta och tanken. Symbolerna utgör en abstraktion, de är ersättare för verkliga räknade objekt som är det konkreta. Samtidigt är symbolerna genom sina konkreta former mer konkreta än motsvarande tankebilder. Översättningar mellan olika uttryckssätt är viktigt för att skapa förståelse. Det finns en risk att man använder språket utan att reflektera över det. Man övar upp en vana att använda symboler, där av följer inte automatiskt en artikulerad insikt om vad tecknen betyder om man inte ägnar detta särskild uppmärksamhet.

Høines (2000) förordar att eleverna får utveckla sina egna informella symboler som ett led i utvecklingen mot att kunna förstå och använda de formella. De symboler som för barnen från början ofta är naturliga är bildlika avbildningar av de föremål som skall räknas, senare förenklas avbildningarna men antalet går fortfarande att utläsa genom att en symbol representerar ett föremål. Senare ersätts en mängd av en symbol (om antalet är färre än 10), denna symbol bör då vara gemensam för en grupp människor för att innebörden skall vara förstådd. Høines påpekar att eleverna skall använda det språk de tänker genom för att så småningom tänka genom det formella matematikspråket. Det formella matematikspråket skall upplevas som deras eget. Syftet är att barnen skall utveckla metakunskap om olika teckens symbolfunktion, dels om enskilda tecken men också kunskap om symbolfunktionen generellt. Målet är att barnen med hjälp av tecken, bokstäver och taltecken skall kunna uttrycka sig, forma kunskap och lösa problem. Detta, menar Høines, kan bara bli möjligt om barnen har kunskaper om tecknens möjligheter och egenskaper.

Johansson och Wirth (2007) hänvisar till undersökningar som visar på vikten av att barn utvecklar färdighet och kunskap om siffror. De menar att det är viktigt att undervisning i förskola, förskoleklass och skolans tidigare år tar till vara på och stimulerar barns intresse för siffror. Författarna påpekar att redan i 3-5 årsåldern börjar barn visa intresse för siffror och kan känna igen dem. Ungefär samtidigt som barn börjar skriva sitt namn med bokstäver vill många barn även skriva siffror. I sexårsåldern kan de flesta siffrorna från 0-9 och antal spegelvända siffror (som är vanliga under en tidigare period) har då minskat betydligt.
Inlärningen att skriva siffror går i två steg: Första steget är att få till en grafisk form, här spelar spegelvändningar inte så stor roll. Andra steget är att kunna använda siffrorna för att beteckna olika tal, här blir riktningen viktig. Att siffersymbolerna på många sätt är abstrakta behöver inte innebära att de är obegripliga eller omöjliga att lära sig. Eleverna kan lära sig hur siffrorna ser ut, vilket talord de hör till och var på talraden de befinner sig. Barn som relativt tidigt får bekanta sig med siffror får möjlighet att utveckla det begreppsliga innehåll som är knutet till varje tal. Johansson hänvisar till tidigare undersökningar som visar att barn redan i 5-årsåldern kan skriva siffror och förstå siffrornas antalsinnebörd. Det är dock viktigt att införandet av siffror sker så konkret som möjligt. Vidare påpekas att om ett barn i sexårsåldern kan skriva talet tretton som 13 visar detta att barnet kan beteckna en viss position i talraden med en sifferkombination. Däremot har barnet troligen ingen uppfattning om att 1:an står för ett tiotal och 3:an för ental. Detta är kunskap som utvecklas efter något år i skolan. Men barnet har den förståelse som krävs för att kunna tänka på talordet 13 som ordinaltalet 13, och kan se hur talet förhåller sig till andra tal i dess närhet. En undersökning gjord på 52 barn, alla 6 år, innehöll uppgifter där barnen skulle skriva tal med siffror, lösa aritmetikuppgifter samt berätta hur de gått tillväga. Resultatet visade att de barn som kunde skriva många tal med siffror även löste många aritmetikuppgifter samt använda effektiva strategier såsom att mentalt förflytta sig mellan tal i talraden. De barn som endast kunde skriva ett fåtal tal löste också få uppgifter och använde främst strategin ”räkna på föremål”.

3. Syfte och frågeställningar.

Syftet med den här undersökningen är att kartlägga elevers tal- och antalsuppfattning inför skolstarten. Min förhoppning är att ge svar på frågorna:

- Vilken förförståelse för grundläggande aritmetik har elever i förskoleklass, som ingår i denna totalstudie, när de börjar första skolåret?
- Vilka förutsättningar har förskoleklass eleverna i denna studie att börja med grundläggande aritmetiska beräkningar?
- Hur kan den begynnande matematikundervisningen anpassas till dessa elevers faktiska förkunskaper och förutsättningar?

4. Uppsatsens vetenskapliga teoriram.

Min utgångspunkt för denna uppsats är det postpositivistiska paradigmet vilket innefattar uppfattningen att observatören och det som observeras inte helt kan särskiljas. Enligt Alvesson & Sköldberg (2008) innefattar postpositivismen även en gränsöverskridande tanke där man utgår från att den iakttagna verkligheten inte är allt som finns utan det går att tränga bakom och avslöja mer fundamentala skikt där det vi ser är projekteringar eller avspeglingar av dessa. Syftet med den vetenskapliga verksamheten blir då inte ett statiskt sammanställande av ytfenomen i en observerad verklighet. Det väsentliga blir att uppfatta verkligheten som uttryck för eller tecken på djupare liggande företeelser. De postpositivistiska företrädarna såg, på olika sätt, de bakomliggande mönster av lagbundenheter som det som förklarade den iakttagna verklighetens manifestationer. Alvesson och Sköldberg skriver att om det finns dolda mönster och bakomliggande regelformationer som styr de observerbara delarna av verkligheten , och som genom att utforskas kan bidra till att förklara de senare så är förstås detta ett legitimt område för forskning. En rimlig väg för forskning blir då att genomföra intensivstudier av ett mindre antal fall för att analysera hur de bakomliggande mönstren avspeglar sig i ytstrukturerna. Detta är vad jag gjort i min pilotstudie där jag intervjuat eleverna och sedan analyserade och tolkade deras svar mot den ämnesdidaktiska teoribakgrunden för varje fråga.
Som Niss (2001) uttryckte angående ämnesdidaktiken som forskningsdisciplin så finns det inte någon universellt fastlagen grund för forskningsparadigm inom matematikens didaktik när det gäller metoder, principer, eller normer för verifiering och kvalitet.

När det gäller det postpositivistiska paradigmet beskrivs detta ha kritisk realism som ontologisk utgångspunkt (Guba & Lincoln (2000). Den kritiska realismen betonar, enligt Alvesson & Sköldberg (2008), vetenskapens generaliserande anspråk. Dessa generaliseringar gäller dock ej i första hand empiriska lagbundenheter utan de mekanismer som genererar de studerade fenomenen. Inom kritisk realism är det komplexa nätverk av jämförelsevis teoretiska och jämförelsevis observationsbaserade iakttagelser man arbetar med.
När det gäller metodfrågan menar Guba & Lincoln att såväl kvalitativa som kvantitativa metoder är relevanta att använda inom det postpositivistiska paradigmet. Jag använder mig av båda då jag genomför en pilotstudie, där resultaten tolkas för att analysera och klargöra dels instrumentets giltighet och dels de bakomliggande strukturer som förklarar vilken matematisk förståelse elevernas svar ger uttryck för, och en större studie i syfte att generalisera mina slutsatser.

Den litteraturgenomgång och teoretiska bakgrund som redovisas är en viktig grund för denna uppsats då jag valt att låta undersökningen utgöras av ett växelspel mellan teoretiska resonemang och studier av verkligheten. Detta motsvaras av en hypotetisk-deduktiv metod. I den hypotetisk- deduktiv-metoden har teorin en viktig ställning. Man måste redan före undersökningen veta ganska mycket om det man vill undersöka. Mellan teorin och den undersökta verkligheten finns en relation genom att vara medveten om hur denna relation ser ut kan man med hjälp av den härleda prövningsbara empiriska konsekvenser ur teorin och testa dem mot insamlad data (Wallén, 1996).

5. Metod.

Jag använder en hypotetisk-deduktiv metod (Wallen, 1996) då jag utgår från vad den ämnesdidaktiska teorin säger om hur barn utvecklar sin grundläggande tal- och antals uppfattning. Jag gör sedan en jämförande analys av min empiri mot denna teori och diskuterar vilka konsekvenser resultatet kan få på den fortsatta undervisningen.
För att kartlägga tal- och antalsuppfattningen hos elever i förskoleklass har jag använt mig av diagnosen Förberedande aritmetik. Diagnosen ingår i diagnosbanken Diamantdiagnoser i matematik (Skolverket, 2009) och är uppbyggda enligt en hierarkisk förkunskapsstruktur. Intervjufrågorna i diagnosen som används är i hög grad standardiserade då de är formulerade i förväg och likalydande frågor ställs i samma ordning till varje intervjuperson. Detta är lämpligt då syftet med diagnosen är att kunna jämföra och generalisera resultaten. Intervjufrågorna är också i hög grad strukturerade då det finns ett relativt litet utrymme för intervjupersonen att svara inom och det är möjligt att i stor utsträckning förutsäga vilka alternativa svar som är möjliga. (Patel & Davidsson, 1994)

Jag använder mig av såväl den kvalitativa som den kvantitativa metoden. Inom det postpositivistiska paradigmet går dessa att förena (Guba & Lincoln, 2000). Staffan Stukát (2005) beskriver de två metoderna som att kvantitativa studier har sin bakgrund i naturvetenskapen där empiriskt kvantifierbara och objektiva mätningar har en central roll. En stor mängd data samlas och analyseras, ofta med hjälp av statistiska analysmetoder, för att finna mönster eller lagbundenheter som antas gälla generellt. Det kvalitativa synsättet har vuxit fram ur de humanistiska vetenskaperna. Huvuduppgiften för det kvalitativa synsättet är att tolka och förstå de resultat som framkommer, inte att generalisera. Även Stukat menar att de två synsätten det kvantitativa och det kvalitativa gärna kan förenas och komplettera varandra. Till exempel kan den kvalitativa studien föregå och inspirera till en kvantifierande studie som i sin tur kan ge generaliserande resultat. Patel & Davidsson (1994) skriver att syftet med kvalitativa undersökningar är att skaffa en djupare kunskap än den som ges av de kvantitativa metoderna. Den används då man vill förstå och analysera orsaker och samband. Det är både intressant att veta vad elever kan och förstår, att förklara hur förståelsen byggs upp samt hur stor andel av eleverna som besitter detta kunnande

Empirin i uppsatsen består av två delar: Först redovisas en pilotstudie där 6 elever intervjuas. Intervjuerna redovisas genom att delar av intervjuerna är utskrivna och analyserade. Jag har intervjuat sex elever i en åldersblandad F-1:a. Frågorna som ställs i intervjun är i stort sett de som ingår i diagnosen Förberedande aritmetik (bilaga 1). Fråga 4 och 10 på diagnosen ingår dock inte i denna intervju då de har tillkommit senare som en följd av att diagnosinstrumentet har utvecklats efter denna utprövning. Intervjuerna genomfördes våren 2006, som ett led i arbetet att ta fram Diamantdiagnoserna. Syftet med det inspelade intervjuerna är att undersöka instrumentets giltighet, analys och tolkning av elevernas svar görs mot teoribakgrunden för att klargöra vilken tal- och antalsuppfattningen hos eleverna jag kan få reda på med hjälp av frågorna. Detta utgör den kvalitativa delen av studien. Efter att ha genomfört och bearbetat intervjuerna kan jag se hur jag borde ha frågat och hur jag kunde ha följt upp elevernas svar bättre. Jag får också en insikt hur eleven kan ha uppfattat frågan. Jag kommer här att kommentera dessa aspekter. Vid tolkning av elevers svar är det viktigt att vara medveten om på vilket sätt mitt agerande som intervjuare, vilka frågor jag ställer och hur jag ställer dem, påverkar elevens svar. En given utgångspunkt för intervjuerna är att elevens språkliga uttryck och i vissa fall beteende speglar tänkandet.

Eftersom det är frågorna som sådana som jag nu är intresserade av och inte elevernas enskilda resultat väljer jag att kommentera en fråga i taget och lyfta fram de svar och sätt att svara som ger mig som intervjuare viktig information. Vid analysen av frågorna använder jag begrepp vilkas innebörd redovisats i teorigenomgången. Jag kommer att namnge de elever som visar exempel på sådana aspekter som är viktiga att uppmärksamma.

Den andra delen av empirin utgörs av ett större insamlat material av intervjuer genomförda i förskoleklass. Det är allt som allt 50 skolor och 1679 elever som deltagit och intervjuerna genomfördes våren 2008. Intervjuerna är genomförda av elevernas egna lärare vilka följt de instruktioner om genomförande som ges i Diamantmaterialet (se bilaga1). Resultaten från dessa diagnoser är sammanställt så att man kan kartlägga elevernas kunskaper. Varje lärare har fyllt i en resultatblankett som tillhör diagnosen och sedan skickat in den. Detta utgör den kvantitativa delen av studien och resultaten presenteras numeriskt i frekvenstabeller. Resultaten redovisas först uppgift för uppgift där det framkommer hur många som klarar respektive inte klarar varje uppgift. Detta sammanställs sedan i en tabell för att ge en överblick av hela gruppens kunskapsnivå. Syftet med denna kvantitativa redovisning är att generalisera resultaten om elevernas tal- och antalsuppfattning. Resultat för den andel elever som är högst respektive lägst presterande presenteras också för att ge en bild av spridningen i hela gruppen. Som underlag till diskussionen om hur resultaten kan påverka den fortsatta undervisningen presenteras resultat för tre enskilda elevgrupper. Detta för att visa på hur utgångsläget för undervisning kan se ut i olika elevgrupper och för enskilda individer. Aspekter som inte kommer att beaktas i detta material är kön- och etnicitet. Jag har begränsat innehållet i uppsatsen så att jag inte kommer att analysera eventuella skillnader i resultat mellan olika elever utifrån dessa aspekter.

5:1 Urval och bortfall.

När det gäller pilotstudien genomfördes den i en åldersblandad klass med i elever i skolår F-1. Att det blev just denna klass beror på att deras lärare anmält sitt intresse att hjälpa till med att pröva ut diamantdiagnoserna. Eleverna i klassen blev informerade om vad intervjuerna handlade om och varför vi ville att de skulle vara med. De elever som ville delta fick sedan räcka upp handen och deras lärare bestämde sedan vilka som skulle gå med. Detta val berodde på flera olika faktorer, som ofta var av ”praktisk” karaktär. En del barn kunde inte vara med för de skulle till simskolan, någon hade varit sjuk och hade arbete i klassrummet att ta igen.

Urvalet utgick alltså inte från att elever på en vissa kunskapsnivå valdes ut. Det blev en blandning av elever från Förskoleklass och skolår 1 som deltog. Dessa elevers resultat skall enbart betraktas som just dessa elevers resultat på mina intervjufrågor. Pilotstudien har inget syfte att i något större, mer generellt sammanhang uttala sig om elevers kunskaper inom detta område.

Det större insamlade materialet kommer från samtliga förskoleklasser inom en svensk kommun och är alltså en totalundersökning med 1679 intervjuade elever. Kommunen ifråga har avsatt medel för att satsa på matematikundervisningen och som en del i den kompetensutveckling lärarna deltar i har samtliga lärare som undervisar elever i förskoleklass intervjuat dessa. Det innebär att samtliga elever i stort sett deltagit och att urvalet består av kommunen och i kommunen görs en totalundersökning. Enstaka elever kan ha varit frånvarande på grund av längre tids sjukdom, hur många det i så fall rör sig om har jag inte tillförlitliga uppgifter på men det finns ingen anledning att anta att detta eventuella bortfall skulle vara av den omfattning att det påverkar det totala resultatet eller att det skulle röra sig om elever på någon viss kunskapsmässig nivå. På enstaka uppgifter i diagnosen saknas ibland införda resultat för vissa elevgrupper eller så har resultaten förts in i resultatblanketten på ett sådant sätt att det inte kan uttolkas om eleven har svarat rätt eller ej. Detta förekommer endast i mindre omfattning och redovisas där så är fallet för respektive uppgift. När det gäller den aktuella kommunen i fråga blev det naturligt att använda sig av detta underlag då detta tillfälle gavs att på ett effektivt och snabbt sätt få tillgång till ett material av detta omfång.

5:2 Validitet, reliabilitet och generaliserbarhet.

Att veta vad man undersöker innebär god validitet. Att veta att man undersöker på ett tillförlitligt sätt innebär god reliabilitet. Validitet och reliabilitet påverkar varandra på så sätt att god reliabilitet är en förutsättning för god validitet. För att nå god validitet måste vi skapa ett instrument som mäter just det vi avser att mäta. Instrumentet i denna undersökning utgörs av diagnosen Förberedande aritmetik. Den innehållsliga validiteten avgörs av att frågorna i diagnosen är väl förankrade i matematikdidaktisk forskning kring detta innehåll. Denna forskning visar att den förståelse som prövas i diagnoserna är viktig för att eleverna skall utveckla god tal- och antalsuppfattning. Min förförståelse av denna forskning borgar för att jag vet vilken kunskap jag vill åt. Detta påverkar min förmåga att ställa följdfrågor och fånga upp de svar och uttalanden som ger uttryck åt elevernas förståelse av just det jag vill ha reda på. Den samtidiga validiteten säkerställs genom att instrumentet prövas på en grupp som liknar den grupp som instrumentet är avsett för (Patel & Davidsson, 1994) detta görs i och med pilotstudiens genomförande.

Instrumentets reliabilitet avgörs av hur väl det motstår slumpinflytande av olika slag. Då man använder sig av intervjuer, som är fallet i denna studie, är reliabiliteten avgörande av intervjuarens förmåga och erfarenhet. En god intervjuare är expert både på ämnet för intervjun och på mänskligt samspel. Intervjuaren måste hela tiden fatta snabba beslut om vad som skall frågas hur det skall frågas och vilka svar som skall tolkas på vilket sätt (Kvale, 1997). I pilotstudien är det jag som intervjuar och min kunskap om innehållet i intervjun och syftet med frågorna ligger till grund för den analys och tolkning jag redogör för i resultatdelen. Jag har skaffat mig god insikt i innehållet genom att sätta mig in i den teori och forskning som finns angående detta och som redovisas i studiens litteraturgenomgång. Ett sätt att öka reliabiliteten är att dokumentera intervjuerna genom inspelning av bild och ljud

(Patel & Davidsson, 1994) vilket jag gör i pilotstudien. Den redogörelse som presenteras i resultatdelen av dessa intervjuer visar på vilka aspekter av elevernas svar jag tagit fasta på och hur de har vidareutvecklats med hjälp av följdfrågor. Även emotionella aspekter och fysiska uttryck hos eleverna har förts in i utskriften av intervjuerna och utgör en del av reliabiliteten, den intersubjektiva reliabiliteten (Kvale, 1994). Att använda sig av strukturerade och standardiserade intervjuer är också det ett sätt att öka reliabiliteten (Patel & Davidsson, 1994). Detta görs i och med de färdigformulerade frågorna som ingår i diagnosen, detta är viktigt eftersom de lärare som intervjuat eleverna i den större studien kanske inte är insatta i innehållet på samma sätt som jag är. Det är viktigt att komma så nära den intervjuades "sanna värde" som möjligt, detta påverkas även av omständigheter runt själva intervjusituationen. Det är viktigt att intervjuaren uppträder på ett sådant sätt att respondenterna förstår vad som förväntas av dem samt att de känner sig trygga och får möjlighet att uttrycka sig utan påverkan av intervjuaren. Detta har jag strävat efter då jag följt de rekommendationer som Doverborg & Pramling Samuelsson (2006) föreskriver då det gäller intervjuer med yngre barn. Jag hade valt en lugn plats där vi fick sitta ostört och där allt inspelningsmaterial var iordningsställt i förväg. Madeleine Löwing fanns med i lokalen för att hjälpa mig med det tekniska vid inspelningen. Lokalen var känd av eleverna och låg i anslutning till deras klassrum. Intervjuerna tar i snitt ca 8 minuter /elev vilket är en tidsrymd som ett barn i denna ålder kan orka med. Då jag intervjuade elever som jag inte hade en relation till sedan tidigare hade elevernas egen pedagog före besöket berättat för barnen att jag skulle komma och vad som skall ske. När jag sedan träffade eleverna talade jag om för dem att de var viktiga för mig, att jag behövde deras hjälp för att bättre förstå hur barn tänker när de räknar. Jag talade också om att de skulle bli filmade och att de gärna fick se på filmen efteråt om de ville. Jag inledde sedan varje intervju med lite informellt småprat kring deras erfarenheter kring att räkna för att försöka skapa en avslappnad situation. Att ställa följdfrågor för att ge eleven möjlighet att vidareutveckla sina tankar är viktigt. Likaså att ge eleven tid att svara utan att gå in och själv styra svaret.

När det gäller studiens generaliserbarhet bör det större insamlade materialet, där en hel kommuns elever i förskoleklass, vara av den arten att det i stor utsträckning kan generaliseras till att gälla för en större del av Sveriges elever i förskoleklass. Bortfallet är litet, även om jag inte kan redovisa dess faktiska storlek. Huruvida kommunen är representativ i förhållande till andra kommuner i fråga om faktorer som graden av behöriga lärare, elever med annat hemspråk än svenska , utbildningsnivå hos föräldrar och liknande faktorer som kan spela in för resultaten reserverar jag mig för att uttala mig om. Däremot har jag tagit del av uppgifter om skolprestationer i den aktuella kommunen. Om man tittar på resultaten för de nationella proven som genomfördes vårterminen 2008, så var det 15,4% av eleverna i hela riket som ej nådde målen för betyg G. I den aktuella kommunen var denna siffra 14,1%. Genomsnittlig provbetygspoäng för samtliga kommuner i Sverige var 12,7 poäng och för den aktuella kommunen var den genomsnittliga provbetygspoängen 13,0 (Skolverket, 2009b). Det innebär att elevprestationerna i kommunen ganska väl överensstämmer med landets genomsnitt men ligger något över. I senast redovisade inspektionsrapporten från Skolverket för kommunen, genomförd 2006 (Skolverket 2006) uppges det vara stor skillnad i prestationer mellan olika skolor. I de nationella proven i matematik för år 5 genomförda vårterminen 2005, uppges 73% av eleverna nå målen men att variationen mellan skolorna ligger mellan 50% och 100% måluppfyllelse. Inspektionen påpekar att det saknas systematisk uppföljning och övergripande redovisning av elevernas resultat samt att resultaten endast undantagsvis ligger till grund för analys och förbättring av verksamheten. Detta gäller såväl tidigare som senare årskurser.

5:3 Etiska ställningstaganden.

När det gäller pilotstudien och de elever som där intervjuats och filmats har skriftlig information gått ut till föräldrarna som i sin tur har gett skriftligt tillstånd att deras barn får intervjuas och filmas samt att detta får användas i undervisnings- och forskningssyfte. När det gäller det insamlade resultaten från en hel kommun kan inga data härledas tillbaka till någon enskild skola, klass eller elev. Därmed har de etiska regler vad gäller konfidentialitets-kravet följts (Vetenskapsrådet 1990).

6. Resultatredovisning.

I detta avsnitt redovisas först resultatet av pilotstudien där frågorna i diagnosen Förberedande aritmetik prövas ut och analyseras. Resultaten från denna studie redovisas uppgift för uppgift. Därefter redovisas resultatet från det insamlade materialet från en hel kommun.

6:1 Resultat från pilotstudien.

De intervjuade barnen är i inspelad ordning:
1. Olivia , årskurs 1
2. Joakim , årskurs 1
3. Sam, Förskoleklass
4. Zackarias, Förskoleklass
5. Ona, Förskoleklass
6. Petter, Förskoleklass.

I resultatredovisningen använder jag elevernas namn. Då jag avser elever i allmänhet kommer jag att använda benämningen ”hon”.

Fråga 1. Hur långt kan du räkna?
Vid denna fråga händer ibland att eleven slutar räkna därför att hon helt enkelt inte orkar mer eller inte har lust att räkna längre. Det är viktigt att ställa följdfrågan: *vad kommer sedan?* för att få reda på orsaken till att de slutar. I denna intervju stannar Sam på 28, Olivia på 79 och Ona på 39. I Onas fall är det uppenbart att hon inte kan komma på vad som kommer efter 39 ,men på min fråga till Sam vad som kommer efter 28 svarar han direkt 29. Jag frågar då vad som kommer efter 29 och Sam svarar *tjugo-tio.* Här framkommer tydligt att Sam har en stabil talrad till 29 men att talraden är mer som en ramsa och att vårt positionssystem inte är tydlig för honom än. När jag frågar Olivia vad som kommer efter 79 svarar hon 80.
Flera av eleverna tvekar något vid tiotalsövergångarna, här gäller det att ge dem lite tid och inte gå in och fråga för tidigt, men det vittnar också om att talraden inte är helt automatiserad utan de får tänka till, men de har förstått strukturen och kan därför själva komma på vad nästa tal är.

Fråga 2.
Här ombeds eleven att börja räkna någonstans en bit in i talraden, alltså att inte börja på 1.
Denna frågan har eleverna ibland svårt att förstå. Man kan då själv börja räkna från ett tal i talraden för att exemplifiera. Valet av start-tal bör väljas utifrån elevens stabila talrad som den visat sig i fråga 1. Joakim som rabblar talraden med stor säkerhet ber jag börja på 17, medan Sam får börja på 5. Det är bättre att börja med ett lägre tal och sedan ta fler exempel med högre start-tal om man vill utmana eleven vidare. Till exempel i intervjun med Olivia som först får börja på 18, sedan på 34 och till sist på 59. När Sam får frågan om han kan börja på 5 är han tyst ganska länge innan han säger ..,6,7,8…Denna tystnad kan vara ett tecken på att han först räknar tyst 1,2,3,4,5 för att sedan fortsätta högt. Det innebär i så fall att han inte

börjar på 5. Sam får en ny fråga om han kan börja på 8 han svarar då relativt snabbt 9,10,11…och jag bedömer att han inte räknar från början denna gång. Kanske fick frågan honom att bli medveten om ett nytt sätt att tänka som han tidigare inte använt sig av. Petter får frågan om han kan börja räkna från 17, vilket han klarar utan problem. Eftersom Petter visat stor säkerhet när det gäller talraden i fråga 1 ber jag honom börja på 49. Han svarar då att han inte kan det. Jag ställer då följdfrågan vad som kommer efter 49. Han svarar då direkt 50,51,52…..Petter blir här medveten om att han kan mer än han själv är medveten om.

Fråga 3:
Här vill jag ha reda på om eleven kan räkna bakåt i talraden.
Zackarias och Joakim som visat stor säkerhet i de två tidigare frågorna ber jag räkna från 20 ner till 0, de övriga ber jag räkna från 10 till 0. Samtliga klarar detta bra. Då även Olivia visat säkerhet i sitt räknande tidigare utmanar jag även henne med att räkna från 20 till 0. Olivia räknar snabbt ned till 15 och tystnar sedan länge innan hon säger 14 och sedan fortsätter utan problem. På frågan hur hon gjorde för att komma på 14 svarar Olivia att hon tänker. (ett vanligt svar man får från barn). Följdfrågan blir då: *hur* tänkte du . Olivia svarar att det kunde inte vara 40…alltså är det 14. Det tolkar jag som att hon hörde 5:an i 15 och visste att före 5 kommer 4 alltså skall det vara något med 4 och 40 var inte rimligt.
En annan vanlig strategi elever kan använda vid svårigheter att räkna bakåt är att de tyst räknar fram för att höra vilket tal som kommer före ett annat. Därför är det viktigt när en elev är tyst länge vid denna fråga att ställa följdfrågan hur hon gjorde. Även Petter vill jag utmana vidare och ber honom räkna bakåt från 20. Han säger att han inte kan och jag lämnar frågan. Det är alltid en avvägning hur mycket man skall utmana eleverna. Eftersom Petter även i fråga 2 visat att han inte tror sig om att kunna så mycket som han faktiskt kan, får jag en känsla av att hans självförtroende inte är så stort. Detta är inget jag vill arbeta med här och nu men skulle i en fortsatt undervisningssituation givetvis vara viktigt att vara observant på.
Utöver den förförståelse jag får om elevernas matematikkunnande får jag alltså även kunskap om eleverna vad gäller andra aspekter som är viktiga för den fortsatta undervisningen.

Fråga 4. (Motsvarar fråga 5 diagnosen i bilagan)
Här vill jag se om eleven har en fungerande strategi för att räkna en mängd föremål i detta fallet gem. Mängden gem varierar jag mellan 18 och 34 beroende på elevens stabila talrad. I diamantmaterialet anger vi att det räcker med max 22 stycken föremål. En reaktion man kan få när man ställer frågan: *Hur många gem ligger det här?* är att eleven efter en stunds tvekan/tystnad frågar om hon får räkna dem . En elev kan tro att vi förväntar oss att hon skall kunna ”se” antalet direkt så kallad subitizing. Det är alltså bättre att fråga om eleven kan *räkna* föremålen. Det är också bra att be dem räkna högt och påpeka att de gärna får vidröra föremålen. I mina intervjuer är Olivia antagligen ett exempel på en elev som uppfattar frågan som att hon skall kunna ”se” hur många gem det är. Hon svarar inte utan sitter tyst. När jag ställer följdfrågan ..kan du *ta reda på* hur många de är börjar hon peka och räkna på ett korrekt sätt. Sam är en elev som tittar på gemen och räknar tyst utan att vidröra eller flytta dem. Han kommer fram till att det är 25 gem (det är 24). Det är svårt, även för oss vuxna, att räkna en större mängd endast med hjälp av blicken.

Fråga 5. (motsvarar fråga 6 i bilagan)
Denna fråga följer direkt på fråga 4 och utgår från samma mängd gem som eleven då räknade. Syftet är att ta reda på om eleven behärskar principen om godtycklig ordning och alltså vet att antalet föremål i mängden är det samma oavsett var jag börjar räkna.
Detta är en av de frågor som är svårast att ställa så att eleven förstår vad man menar. Om man frågar : *”hur många är det om du börjar räkna på ett annat gem istället?”*. Så räknar eleven ofta om från detta föremål. Detta behöver dock inte betyda att eleven är osäker på vad antalet

då blir, utan eleven gör helt enkelt vad hon tror att jag ber om. Man kan istället uppmana eleven att enbart *säga* hur många hon tror det är om man börjar räkna någon annanstans. Om eleven räknar omigen kan man ställa följdfrågan om eleven blev förvånad över att antalet blev samma(om det nu blev det). Se även den formulering som används som förslag i den slutliga versionen av diagnosen (Bilaga1). När det gäller denna fråga är samtliga intervjuade elever intressanta att analysera: Ona räknar om gemen på min fråga och börjar då på ett annat. Antalet blir 21, samma som första gången. Jag frågar om hon blev förvånad över att det blev lika många. Ona svarar: *”Nej, för det är lika många hela tiden”*. Hon har alltså det hela klart för sig trots att hon räknar omigen. Petter räknar om och får 18, samma som första gången. Jag frågar hur många han *tror* att det blir om han skulle börjat på en annan. Petter svarar: *”vet inte”*. Jag ber honom gissa och han säger *17.* Han pekar sedan och räknar och det blir 18 . Jag frågar då varför det blir 18 varje gång, *”För att man inte tar bort någon”*, säger Petter. Jag frågar hur många det blir om man börjar på ytterliggare en annan. Nu svarar Petter direkt 18. Man kan dra slutsatsen att själva intervjusituationen fungerat som en lärsituation för Petter. Men han har samtidigt en bra förklaring som ger en känsla av att han egentligen vet. Eftersom han tidigare visat tecken på att vara osäker på sig själv är det svårt att veta om han egentligen visste hela tiden eller inte. Olivia får 35 när hon räknar om gemen, första gången fick hon 34. Jag ber henne början på ytterliggare en annan hon räknar då och får 34. Jag frågar hur många det är 34 eller 35. Hon svarar att hon inte vet och räknar om igen det blir 34. Hon säger då att det är 34 och att det blev 35 en gång för att hon råkade räkna ett gem två gånger. Joakim är den enda elev som inte räknar om överhuvudtaget, han svarar direkt att det blir lika många vilken färg jag än börjar räkna på. Joakim börjar sedan intressera sig för färgerna på gemen och sortera dem i högar efter färg. Det är i och för sig en aktivitet som kan vara givande men inte just nu. Och här blir jag uppmärksam på hur materialet man använder kan påverka koncentrationen och styra elevens tankar, vilket visar sig flera gånger under fortsättningen av intervjun. Zackarias förstår först inte min fråga alls, sedan räknar han om alla gemen och får samma svar som tidigare, 21 st. När jag frågar hur många han tror att det blir om han börjar räkna på ett svart gem svarar han: *”en - för det finns bara ett svart gem”*. Zackarias fokuserar på att gemen har olika färg, även han börjar sortera gemen på bordet efter färger. Här kan man dra slutsatsen att alla gem borde varit i samma färg för att undvika att eleven leds in på felaktig tankegång. Det är dock alltid en balans mellan hur mycket materialet och situationen skall tillrättaläggas och hur generell situation eleven bör kunna hantera. Vi vill ju inte skapa onödig förvirring men inte heller ”lotsa” eleven till rätt svar som hon bara kommer fram till för just denna situationen. Sam fick när han räknade gemen första gången antalet till 25 fast det var 24. Här borde jag stannat upp och bett honom räkna dem en gång till genom att använda strategin att peka på dem och flytta dem. Nu går jag istället direkt på frågan hur många det blir om man istället börjar räkna på en annan. Han räknar återigen genom att endast tyst titta och svarar *18.* Jag frågar vad han tror det blir om jag börjar på en svart som jag pekar på. Sam svarar snabbt *25.* Nu går jag över till att jag pekar och flyttar dem en i taget medan Sam räknar (detta borde jag gjort redan i fråga 4), han får det till *”tjugo-tretton”*. Jag ber då honom att peka själv och räkna nu blir det *24.* Jag lämnar frågan och känner att jag aldrig fick klart för mig vilken uppfattning Sam faktiskt hade om detta. Hade Sam varit min elev hade det varit viktigt att anteckna att jag måste göra om detta vid något annat tillfälle kanske med färre föremål.

Fråga 6 och 7. (i bilagan fråga 7 och 8)
Dessa frågor handlar om att kunna addera ett och subtrahera ett, det vill säga att kunna talens grannar. Detta är uppgifter som eleverna klarar av bra. När det gäller min egen insats kan jag konstatera att jag inte är helt konsekvent i mitt sätt att ställa frågan. När det gäller denna frågan kan svårighetsgraden varieras på olika sätt. Det ena avgörs av hur långt upp i talraden

jag går. Om eleverna visat att de behärskar att räkna bakåt från 10 bör jag hålla mig inom talområdet 0-10. Sedan kan uppgiften abstraheras olika mycket. Genom att ställa frågan i en kontext, typ: *du har 6 tuggummi och äter upp ett,* sänker jag abstraktionsnivån mot om jag frågar *hur mycket är 6 och ta bort en?* Använder jag det matematiska språket fullt ut och frågar *hur mycket är 6 minus 1?* Så kan det innebära ytterliggare en svårighet för eleven. Jag använder mig dessutom av ytterliggare en formulering då jag frågar vad kommer *före* talet x, vad kommer *efter* talet x. I den slutliga versionen av diagnosen föreslås att frågan ställs i en språklig kontext (se Bilaga1). Joakim svarar vid ett tillfälle med att ange talet före när jag frågar efter talet efter. Det syns på filmen att detta beror på att han är djupt koncentrerad på att sortera gemen på bordet och inte är riktigt uppmärksam, men det behöver inte betyda att han inte kan.

Fråga 8: (fråga 9 i bilagan)

Denna frågeställning skall ge mig besked om hur långt eleverna har utvecklat sina additionsstrategier. Vid denna fråga håller jag ett antal gem i ena handen och ett antal gem i den andra. Eleven får först räkna/säga hur många gem det är i varje hand. Man bör hålla handen med minst antal gem närmast eleven för att vara säker på att strategin ”Räkna från största” inte är strategin ”räkna från första”. I den slutliga versionen av diagnosen har detta lösts genom att man låter eleven hålla den mindre mängden i sin egen hand, vilken då blir ”närmast”. Joakim och Olivia som är de elever som fyllt 7 år, får additionen 8 +5.
Joakim får först summan till 14. På min fråga hur han gjorde, säger han: *5+5=10, 4 kvar det blir 14.* han tittar snabbt på gemen i mina händer när han förklarar detta men hans fokus är helt riktat mot att den sortering av gemen efter färg som han håller på med på bordet. När jag ber honom räkna en gång till svarar han snabbt: 13, och kollar genom att räkna alla från början. Joakim har ganska tydligt tappat intresset, plockandet med gemen har tagit över och det är nog förklaringen till att han först svarar fel. Olivia visar på uppräkning från största då hon visar hur hon, relativt snabbt, kommer fram till 13, hon räknar 8…9,10,11,12,13. Hon förklarar också att detta går snabbare än att räkna alla. Sam som visat en viss osäkerhet vid de tidigare frågorna får additionen 3+5. Han svarar att det blir 7. När han skall visa hur han gör räknar han alla från början men missar på parbildningen och därför blir det 7. Sam har i fråga 2 visat att han antagligen har svårt att börja räkna från ett annat tal än 1, då blir strategierna ”räkna från första” och ”räkna från största” inte möjliga för honom. Zackarias får additionen 5 +7, då han tidigare inte visat på problem med tiotalsövergångar. Zackarias håller upp 5 fingrar på ena handen och två på andra, han tittar länge på sina fingrar och säger: ”*Vet inte”*. Han tar sedan ”7-högen” ur min hand men vill inte ta den ”5-hög” jag har i andra handen utan tar istället 5 gem från de han har på bordet som han håller på att sortera. Han ångrar sig sedan och byter (tar min ”5-hög” och 7 från ”sina egna”). Han rör ihop det hela och ger upp.Jag ger honom en ny uppgift: 3 + 5. Han håller nu upp fem fingrar på ena handen och tre på andra (eftersom jag håller mig till en summa mindre än 10 räcker nu hans fingrar till). Han svarar *8* . På min fråga hur han gjorde svarar han :” jag tänkte 5..6,7,8”. Han använder strategin ”börja på största”. När det gäller Zackarias och Joakim kan jag konstatera att jag borde plockat bort gemen från bordet eftersom de stör deras koncentration. Petter får additionen 3 + 5. Han svarar snabbt: 8. På min fråga hur han gjorde visar han genom att peka och räkna alla högt 1,2,3,4,5,6,7,8. Jag är osäker på om han verkligen räknade alla då jag tyckte svaret kom så fort så jag ger honom en ny addition med större tal: 4 + 7. Även denna gång kommer svaret 11 , väldigt fort. När jag frågar hur han gjorde för att komma fram till det så fort visar han igen hur han räknar alla från början. Jag tror dock inte att han räknade alla från början, mer att han visade det för att övertyga mig om att summan stämde.
Ona får även hon additionen 3 +5. och svarar snabbt 8. När jag frågar hur hon kunde det så snabbt berättar hon att hon brukar spela ett spel där hon har räknat ut detta med hjälp av fingrarna, sa hon ”bara vet”. Ona visar här på ett automatiserat talkunnande. Jag vet dock inte

hur många talkombinationer hon kan så hon får en till: 4+7. Hon sitter tyst och tittar länge, säger sedan 11. På frågan hur hon gjorde säger hon 8, 9,10,11 det vill säga uppräkning från största.

6:2 Resultat från en hel kommun.

Här följer sammanställning av resultaten för hela den kommun där alla förskoleelever har intervjuats. Jag sammanställer dels resultaten för varje uppgift dels jämför jag resultat mellan olika uppgifter som har koppling till varandra och dels tittar jag på elevers totala resultat .

Uppgift 1. Hur långt kan du räkna?
Här redovisas svar från 1650 elever. 29 elever faller bort då frågan ställts felaktigt (eleverna ombads endast att räkna till 22 och inte så långt de kunde.)

Tabell 1. Hur långt kan du räkna?

	100 eller längre	Stannar på en tiotalsövergång (lägre än 100).	Stannar på 29 eller lägre.
Hur långt kan du räkna?	57%	28% av alla 65% av dem som avbröt sin räkning före 100	14%

I tabellen framkommer att de flesta elever, 57% kan räkna till 100 eller längre. De har sannolikt genomskådat strukturen i talsystemet. Åtminstone har de språkligt sett (auditivt) uppfattat regelbundenheten i räkneorden. Bland de som inte kan räkna så långt som till 100 är det 65% som stannar på en tiotalsövergång. 14% av alla eleverna stannar under 29 när de räknar.

Uppgift 2. Börja på 5 och fortsätt räkna.
Alla elever har blivit ombedda att börja på talet 5. I resultattabellen har redovisats om de kan det eller ej med ett ja respektive nej. Här har samtliga elever svarat.

Tabell 2. Börja räkna på 5

	ja	nej
Kan börja räkna på 5	97,7%	2,3%

Resultatet visar att en mycket stor andel av alla elever klarar detta. Här vill jag påpeka den risk för feltolkning som påpekas i avsnitt 5.1. Då eleven ombeds räkna från 5, som är ett lågt tal, finns risk för att eleven tyst men snabbt räknar upp från 1. I vilken utsträckning detta observerats av intervjuaren har jag ingen uppgift om. Uppgift två är en förkunskap till uppgift 7 där eleven direkt skall kunna ange ett tals granne, samt till uppgift 9 där eleven behöver kunna detta för att kunna addera enligt metod börja från första eller börja från största.

Uppgift 3. Börja på 10 och räkna bakåt.
Alla elever har här blivit ombedda att räkna från 10 ner till 0. För 45 elever (2 ”klasser”) har av någon anledning inget resultat alls förts in därför är det totala underlaget 1634 elever.

Tabell 3. Räkna bakåt från 10.

	ja	nej
Kan börja på 10 och räkna bakåt.	94,2 %	5,8 %

Även här ser man att så gott som alla elever behärskar detta. Uppgiften utgör förkunskap till subtraktion, uppgift 8.

Uppgift 4. Eleven ombeds att själv räkna upp 14 föremål.
Här finns svar redovisade från samtliga 1679 elever. Alla elever ombads att räkna upp 14 föremål. Här gjordes ingen anpassning av antalet föremål till hur långt i talraden eleven i uppgift 1 visade säkerhet. Å andra sidan visade ju de absolut flesta att de har en stabil talrad till 14.

Tabell 4. Räkna upp 14 föremål.

	ja	nej
Kan räkna upp 14 föremål.	92,3%	7,7%

Resultaten visar att eleverna behärskar uppräkning av fjorton föremål vilket innebär att ett-till-ett-principen och antalsprincipen behärskas.

Uppgift 5. Hur många knappar ligger det på bordet?
1658 elevsvar finns med. 21 svar är oklart redovisade. Denna uppgift kräver samma förståelse som uppgift 4 men dessutom visar den om eleven har en fungerande strategi för att skilja de räknade från de oräknade. Från början har 22 föremål lagts fram. Enligt instruktionen kan man ta färre föremål om eleven inte lyckas. I tabellen redovisas de elever som klarar att räkna sig fram till 22 st.

Tabell 5. Räkna ett antal upplagda knappar.

	ja	nej.
Kan räkna 22 stycken föremål	85,6%	14,4%

Det är något färre elever som klarar att räkna 22 upplagda föremål jämfört med att själv räkna upp 22 föremål (uppgift 4). Detta beror sannolikt på den kompetens som tillkommer; att ha en fungerande strategi för att skilja de räknade från de oräknade.

Uppgift 6. Principen för godtycklig ordning.
1663 elevsvar finns redovisade. Endast elever som tydligt visat att de förstått principen för godtycklig ordning redovisas i kolumnen ”ja”. Elever som inte förstått principen eller där svaret är oklart och svårtolkat redovisas i kolumnen ”nej”.

Tabell 6. Principen för godtycklig ordning

	Ja	Nej eller oklart
Förstår principen om godtycklig ordning.	61,6%	38,4%

Som framgår av pilotstudien är denna fråga svår att ställa. Elevens svar kan tolkas som osäkerhet trots att hon egentligen inte är osäker.

Uppgift 7. Talets granne, addition med 1.
Samtliga 1679 elevsvar finns tydligt redovisade.

Tabell 7. Addition med 1

	Ja	Nej
Kan talets granne, vid addition med 1.	94,7%	5,3%

För de det stora flertalet elever var det enkelt att addera med 1, genom att hoppa ett steg i talraden.

Uppgift 8. Talets granne, subtraktion med 1.
Samtliga 1679 elevsvar finns tydligt redovisade här.

Tabell 8. Subtraktion med 1

	Ja	Nej
Kan talets granne vid subtraktion med 1	96,3%	3,7%

Här blir resultatet något bättre än på uppgift 7. Det kan tyckas att det skulle vara något svårare att gå ett steg bakåt i talraden än att gå ett steg framåt. Föregående uppgift kan dock ha haft en viss inlärningseffekt som syns i denna uppgift. Det framkom i pilotstudien att intervjun fungerade som inlärning, eleverna blev medvetna om hur de kunde tänka.

Uppgift 9. Additionsstrategier.
Alla elever har fått uppgiften 3 +5. Läraren har i resultattabellen fyllt i vilken strategi eleven har använt (räkna alla från början, räkna från första(från3), räkna från största (5) eller automatiserat ”bara vet”). I 16 elevgrupper har instruktionen missuppfattats på så sätt att läraren endast har bokfört ja eller nej i resultattabellen. För dessa elever, 230 stycken, kan strategi inte urskiljas. Det innebär att resultatet redovisas för 1449 elever.

Tabell 9. Additionsstrategier.

	Räkna från början	Räkna från första (3)	Räkna från största.(5)	Automatiserat ”bara vet/ser”	Kan inte räkna ut summan
Additionsstrategi	46,4%	8,3 %	19,3 %	23,5%	2,4%

Knappt hälften av eleverna väljer strategin att räkna alla från början. En dryg fjärdedel använder strategierna räkna från första eller räkna från största och en knapp fjärdedel har automatiserat (bara vet eller bara ser) denna addition. Detta innebär att drygt hälften av eleverna har lämnat den mest primitiva strategin att räkna alla från början och istället utvecklat en mer effektiv strategi. Av de elever som kan konservera antal och alltså utgå från en mängd där antalet är känt är det fler än dubbelt så många som börjar med den största mängden än som börjar med den mindre men närmsta mängden. Det tyder på att kommutativa lagen är intuitivt självklar för dem.

Uppgift 10. Talskrivning

I denna uppgift testas om eleverna kan skriva talen 5, 12 och 27.I resultattabellen bokförs endast ja(om eleven kan) eller nej (om eleven inte kan) och då avses samtliga tre tal. För en grupp på 22 elever saknas
ifyllda resultat. Totala antalet elever är 1657.

Tabell 10. Talskrivning.

	Ja	nej
Kan skriva talen 5, 12 och 27	65%	35%

Detta visar sig vara svårare än tidigare uppgifter, dock är det ca två tredjedelar av eleverna som klarar detta.

Nedan visas en sammanställning över det kunnande eleverna gett uttryck för vid diagnosen.

Tabell 11. Sammanställning.

Uppgift:	**procent av eleverna som klarat uppgiften:**
1 Räknar till 100 eller längre:	57 %
2. Räknar uppåt från 5:	97,7 %
3. Räknar bakåt från 10:	94,2 %
4. Räknar upp 14 föremål.	92,3 %
5. Räknar 22 föremål	85,6 %
6. Principen för godtycklig ordning:	61,6 %
7. Addition med 1:	94,7 %
8. Subtraktion med 1:	96,3 %
9a. Adderar från början	46,4 %
9b. Adderar från första.	8,3 %
9c. Adderar från största	19,3 %
9d. Addition, automatiserad	23,5 %
10. Skriver talen 5, 12 och 27	65 %

De uppgifter som har koppling till varandra är uppgift 2 som utgör förkunskap till uppgift 7 och 9 Att kunna börja räkna från ett godtyckligt tal och framåt visar eleverna att de kan. De tillämpar denna kunskap i uppgift 7 som är addition med talet 1, att säga talets granne. I uppgift 9 skulle detta kunnande även kunna tillämpas för strategi 9b(räkna från första) och 9c (räkna från största) detta gör de flesta elever dock inte självmant utan de räknar om alla från början (strategi 9a). Uppgift 3 utgör förkunskap till uppgift 8. Här visar eleverna att de har nödvändig förförståelse för subtraktion med litet tal, då strategin att backa i talraden fungerar. Detta gör de också i uppgift 8 som är subtraktion med 1. Den totala bilden av elevernas kunnande visar att flertalet elever har goda förutsättningar för att gå vidare med att utveckla förståelse för talsystemet med dess positioner samt att de har förutsättningar för att börja utveckla effektiva strategier för addition och subtraktionsberäkningar. Dock kan resultatet skilja sig mycket mellan olika individer och elevgrupper, det redovisar jag exempel på i nästa avsnitt.

6:3 Kunskapsvariationer.

Tabell 12. Jämförelse antal och andel högst presterande och lägst presterande.

Andel elever som kan räkna till 100 eller längre, tillämpar strategi räkna från första/största eller ”bara vet” på uppgift 9 och , klarar samtliga övriga uppgifter	309 av 1449 st , 21,3%
Elever som endast räknar till 29 eller lägre, tillämpar strategin ”uppräkning från början” på uppgift 9, ej kan utföra talskrivning samt missar ytterliggare en uppgift.	101 av 1449 st, 6,9%

Dessa resultat visar på den stora spridning som finns. Det är en betydligt större andel elever , cirka tre gånger så många, som har mycket goda förutsättningar för att utveckla effektivare räknestrategier med ett högre mått av abstrakt matematiskt tänkande än den andel elever som har brister i sin förmåga att hantera tal på ett mer utvecklat sätt. Men det finns en inte obetydlig andel elever (ca 7%) som måste få mycket stöd i att utveckla sin förståelse för tal- och antal för att kunna följa med i den fortsatta matematikundervisning som de kommer att möta under de närmast kommande skolåren.

Som nämnts tidigare kan man i dessa diagnos resultat inte se orsakerna till resultaten. Men man kan se att variationen finns även inom en och samma elevgrupp. Det vill säga elever som går i samma klass och har samma lärare kan visa upp stora variationer eller vara homogena dels genom att alla elever har kommit långt i sin utveckling dels genom att flera elever har större brister.

Detta visas i tabellerna nedan som är exempel på resultat för elever som går i samma klass.
Denna redovisning är intressant eftersom det är resultaten för den elevgrupp läraren undervisar som skall ligga till grund för hur undervisningen sedan planeras och genomförs.
För samtliga tabeller används förkortningarna:
X = svarar rätt, 0=kan inte, A= räknar alla, V= automatiserat tabellkunnande
S = räknar från största F =räknar från första

Tabell 13.Exempel på elevgrupp med stor variation i elevers taluppfattning:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elev 1	100	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 2	89	0	X	0	X	0	X	X	V	X
Elev 3	39	X	X	X	X	0	X	X	A	0
Elev 4	100	X	X	X	X	0	X	X	S	0
Elev 5	129	X	X	X	X	0	X	X	V	X
Elev 6	100	X	X	X	X	0	X	X	S	0
Elev 7	97	X	X	0	X	X	X	X	S	X
Elev 8	29	X	0	0	X	0	0	X	S	0
Elev 9	30	X	X	X	0	0	X	X	V	X
Elev 10	28	X	0	X	X	0	X	X	V	0
Elev 11	79	X	0	X	X	X	X	0	V	X
Elev 12	100	X	X	0	0	0	X	X	V	X

Elev 13	100	X	X	X	X	0	X	X	S	X
Elev 14	100	X	X	X	X	0	X	X	S	0
Elev 15	39	X	X	X	X	0	X	X	A	X
Elev 16	79	X	X	X	X	X	X	X	F	X
Elev 17	64	0	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 18	123	X	X	0	0	0	X	X	V	X
Elev 19	138	X	X	X	X	X	X	X	S	X
Elev 20	100	X	X	X	X	0	X	X	V	X
Elev 21	20	0	0	0	0	0	X	X	A	0
Elev 22	109	X	X	0	0	0	X	X	A	X
Elev 23	99	X	X	X	X	X	X	X	A	X
Elev 24	123	X	X	X	X	X	X	X	V	X

I denna elevgrupp är det 2 elever (nr. 19 och 24) som tillhör gruppen högst presterande (enligt den definition som används i tabell 12) och en elev (nr. 21) som (enligt den definition som används i tabell 12) är lägst presterande. Elev nr 20 klarar alla uppgifter bra förutom principen om godtycklig ordning, uppgift 6. Då just denna fråga i pilotstudien visat sig svår att ställa skulle man behöva följa upp det mer noggrant. Likadant med elev 4 och 6 som även har problem med talskrivning. Elev 22 kan räkna långt och klarar även att skriva tal men räknar alla vid addition och missar på uppgifterna att räkna och räkna upp ett antal föremål (fråga 4 och 5) samt principen om godtycklig ordning. Elev 18 liknar elev 22 men har en effektivare strategi för addition.

Tabell 14: Exempel på en elevgrupp där flera elever har kommit långt i sin förståelse för tal och antal .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elev 1	100+	X	X	X	X	X	X	X	S	X
Elev 2	100+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 3	100+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 4	100+	X	X	X	X	X	X	X	S	X
Elev 5	100+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 6	28	X	X	X	X	X	X	0	S	0
Elev 7	100+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 8	101+	X	X	X	X	X	X	X	S	X
Elev 9	29	X	X	X	X	X	0	X	S	X
Elev 10	101+	X	X	X	X	X	X	X	S	X
Elev 11	101+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 12	49	X	X	X	X	X	X	X	S	X
Elev 13	101+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 14	49	X	X	X	X	X	X	X	A	X
Elev 15	69	X	X	X	X	X	X	X	F	X
Elev 16	101+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 17	101+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 18	38	X	X	X	X	X	X	X	A	0
Elev 19	101+	X	X	X	X	X	X	X	V	0
Elev 20	101+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 21	101+	X	X	X	X	X	X	X	S	X
Elev 22	101+	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 23	101+	X	X	X	X	X	X	X	A	X

I denna elevgrupp är det femton elever (nr. 1,2,3,4,5,7,8,10,11,13,16,17.20,21,22) som tillhör de högst presterande. Ingen elev faller inom gruppen lägst presterande (enligt den definition som används i tabell 12). Elev 6, 9 och 18 räknar inte så långt i talraden. Elev 18 klarar inte heller talskrivning och använder strategin ”räkna alla” vid additionen. Även elev 6 missar talskrivning och både elev 6 och 9 missar en granne.

Tabell 15: Exempel på elevgrupp där flera elever har stort behov att utveckla sin tal och antalsuppfattning:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Elev 1	39	X	X	X	X	X	X	X	A	X
Elev 2	29	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 3	29	X	X	X	X	0	X	X	A	0
Elev 4	16	X	X	X	0	X	X	X	A	0
Elev 5	100	X	X	X	X	0	X	X	A	X
Elev 6	49	X	X	X	0	X	X	X	A	0
Elev 7	100	X	X	X	X	0	X	X	A	X
Elev 8	28	X	X	X	X	0	X	X	A	0
Elev 9	49	X	X	X	X	0	X	X	A	X
Elev 10	22	X	0	X	X	0	0	X	A	0
Elev 11	26	X	0	X	X	0	X	X	A	0
Elev 12	25	X	X	X	0	X	X	X	A	0
Elev 13	39	X	X	X	X	X	X	X	S	X
Elev 14	49	X	X	X	X	X	X	X	A	0
Elev 15	84	X	X	X	X	X	X	X	V	X
Elev 16	40	X	0	X	0	0	0	0	A	0

I denna grupp är det 6 elever (nr: 3,4,8,10,11,12) inom gruppen lägst presterande elever (enligt den definition som används i tabell 12). Ingen av eleverna hamnar bland de högst presterande (enligt den definition som används i tabell 12). Alla elever klarar att börja räkna en bit in i talraden (uppgift 2) och alla utom elev 10 och 16 klarar att direkt ange tals grannar (addition och subtraktion med 1, uppgift 7 och 8) däremot använder de strategin ”räkna alla” vid addition fast de har förutsättning att räkna från första eller största (vilket endast elev, nr. 13, gör).

7. Analys och diskussion.

I detta avsnitt tolkar, analyserar och diskuterar jag de resultat som framkom vid intervjuerna då diagnosinstrumentet testas och de resultat som presenterats om vad elever i förskoleklass kan inom grundläggande tal- och antalsuppfattning, samt vad detta kan ha för betydelse för den fortsatta undervisningen. Mina analyser och diskussioner grundar jag i uppsatsens teoriavsnitt. I huvudsak är det undervisningens vad-aspekt jag diskuterar (Marton & Carlgren, 2000). Fokus ligger på vad eleverna har förstått och på vilket sätt de förstår det. Enligt forskningen (se tillexempel Marton & Carlgren (2000), Kilpatrick (2001)) är det avgörande att läraren är väl medveten om vad eleverna skall kunna och förstå. Niss (2001) beskriver att den matematikdidaktiska forsningen har en förklarande och beskrivande karaktär. I denna studie beskrivs elevernas kunnande samt att deras bakomliggande tankar och orsaker till såväl förståelse som brist på förståelse förklaras.

7:1 Diagnosinstrumentet Förberedande aritmetik

I uppsatsens teoriavsnitt framförs flera argument för att det är viktigt att kartlägga elevers kunnande redan inför skolstart (Fischbein, 2007). Vad som skall utvärderas och hur det kan göras kan bero på faktorer som vilket ämne det handlar om, elevernas ålder samt eventuellt vilken undervisnings- och inlärningsteori man anser bäst gynnar kunskapsutvecklingen. I diagnosen förberedande aritmetik har innehållet bestämts av de teorier som ligger till grund för den tal- och antalsuppfattning som eleverna bör ha utvecklat för att kunna gå vidare med aritmetiska beräkningar. Eleven måste bland annat ha utvecklat förståelse för de fem principerna för antal (Gellman & Gallistel, 1978), ha en mental talrad (Johansson & Wirth 2007) och ha begynnande förmåga till abstrakt tänkande (Fischbein, 2007. Malmer, 1999). Diagnosen Förberedande Aritmetik utgår inte från någon specifik undervisnings- eller inlärningsteori. Enligt Wiliam (2007) är det möjligt att tillämpa principer för utvärdering utan att koppla det till specifik sådan. Däremot tas hänsyn till elevernas ålder och den muntliga formen blir här lämplig. Som framkommer av intervjuerna i pilotstudien kan man få fram ganska mycket om barns utveckling av tal och antalsbegreppet genom dessa relativt korta intervjuer. Då man bearbetat intervjuerna och som lärare känner sig säker på dem kan de genomföras i den dagliga verksamheten på ett mindre intervjuliknande sätt om man föredrar det, det som Korp (2003) beskriver som ”running record”.

Analys av pilotstudiens resultat av den muntliga diagnosen Föreberedande aritmetik blir att diagnosens validitet är hög. Diagnosen prövar det den avser att pröva. Man får en god bild av elevernas kunskaper och uppfattningar av det som utgör diagnosens matematiska innehåll. När det gäller reliabiliteten finns det, vilket framkommer av resultatredovisningen, visst utrymme för feltolkning från såväl elevens sida, när det gäller att förstå frågan som för intervjuaren som skall tolka vad eleven egentligen menar Uppföljande följdfrågor måste ibland ställas för att hjälpa eleverna att förtydliga sina tankar. Detta gäller främst fråga 2 (som visar om eleven kan börja en bit in i talraden och räkna framåt) samt fråga 6 och 7 (i pilotstudien, där eleven skall ange ett tals granne utan att räkna upp från början). Här bör man vara observant på om eleven är tyst en längre stund och i så fall fråga hur hon gjorde. Annars finns risk att det blir elevens förmåga till uppräkning som testas istället. I fråga 5 (i pilotstudien, principen för godtycklig ordning) kan eleven uppfatta frågan som att hon ombeds att räkna omigen. Fråga 1 (hur långt eleven har en stabil talrad) kan också misstolkas om eleven slutar sin uppräkning och man inte kontrollerar vad detta beror på. Likaså kan elever på fråga 8 (additionsstrategier) uppge att de räknat alla för att de menar att summan inkluderar alla, men att de använt en annan och effektivare strategi. Detta innebär att för de flesta av dessa frågor där det föreligger viss risk för feltolkning kommer elevernas resultat att eventuellt visa på lägre kunnande än vad eleven faktiskt besitter. För fråga 6 och 7 kan det dock vara så att eleven räknat alla från början (tyst och snabbt) vilket alltså inte är detsamma som att direkt addera eller subtrahera ett. Med lämpliga uppföljande frågor bör dock tolkningsutrymmet inte vara större än att diagnosens reliabilitet får anses god.

Intervjuerna visar att läraren måste vara väl medveten om vilket kunnande man vill åt och vilka tankeformer som kan finnas hos barn för att kunna ställa lämpliga följfrågor. Det vill säga det ställs stora krav på lärarens matematiska och didaktiska kompetens vilket ofta lyfts fram i den redovisade litteraturen (till exempel Bentley, 2003, 2008; Marton & Carlgen, 2000; Löwing, 2002). Denna kompetens är nödvändig för att kunna urskilja olika kvaliteter i elevens kunnande, till exempel att urskilja elevers förmåga att abstrahera och vad det innebär att använda olika additionsstrategier. Detta styrker också Niss (2001) uttalande att det är en komplicerad uppgift att bedöma elevers kunnande och att man skall vara försiktig med att dra för snabba slutsatser.

Även om de intervjuer som presenteras i pilotstudien är få till antalet och att dessa elevers enskilda resultat inte kan generaliseras framkommer redan här att det finns variation i elevernas kunnande. Detta visar sig än tydligare i resultaten från den större undersökningen (tabell 11och tabell 12.) Detta stöder Fischbeins påstående att det är viktigt att kartlägga elevernas förutsättningar för fortsatt matematikinlärning redan vid skolstart samt Melanders och Prietos (2006) påpekande om att även förskolebarnen skall bemötas utifrån sina individuella behov. Det framkommer också av intervjuerna att det sker en viss inlärning vid själva intervjutillfället. Detta kan ligga till grund för uttrycket utvärdering *som* inlärning som Wiliam (2007) använder. Eleverna blev under intervjuns gång medvetna om sitt sätt att tänka och den feedback som intervjutillfället ger utvecklar elevernas tankar så att de kan klara en senare uppgift med hjälp av den insikt en tidigare uppgift gav. I teoriavsnittet framkommer också att det är viktigt att eleverna själva är medvetna om vad de kan och vad de behöver träna mer på samt att de vet vilka förväntningar som finns på dem (se tillexempel Korp, 2003). Efter ett sådant här intervjutillfälle kan eleverna förstå vad de klarade bra och vad de behöver träna mer på. Som även framkommer av teorin är det viktigt att läraren tar sitt ansvar att ge eleven relevanta uppgifter att arbeta med och att eleven inte själv får ansvara för sin egen utveckling (se till exempel Vinterek, 2006). Om kartläggningen skall sägas vara formativ är det just uppföljningen och den fortsatta undervisningen som sker mot bakgrund av resultaten som blir viktig. Vilken uppföljning som bör ske och hur diskuteras i nästa avsnitt.

7:2 Resultaten och dess konsekvenser för undervisningen.

I tabell 11 redovisas en sammanställning av elevernas visade kunnande. I denna tabell ser man att en väldigt stor andel av eleverna (mellan 85,6% och 97,7%) utan några svårigheter klarar att börja räkna från fem i talraden och framåt, räkna bakåt från 10, räkna upp 14 föremål , räkna 22 stycken upplagda föremål, addera med 1 och subtrahera med 1 (utan hjälp av fingrar eller föremål). Dessutom visar 57% att de kan räkna till 100 eller längre. Av tabell 1 framkommer att 29% kan räkna längre än till 30 men stannar före 100 och endast 14% stannar före 29. Drygt 60% klarar principen om godtycklig ordning , de övriga kan ej eller svaret är osäkert. Drygt 50% har utvecklat en effektivare additionsstrategi än att räkna alla från början och 65% klarar att skriva en- och tvåsiffriga tal. Detta visar på att förutsättningarna för de allra flesta eleverna att gå vidare med att utveckla sin taluppfattning och att börja med beräkningar i addition och subtraktion mer formellt och abstrakt är goda.

Det är intressant att jämföra med de resultat som Frisk (2007) presenterade i sin uppsats. Där visade det sig att det endast var 66% av eleverna i skolår 1 och 82% av eleverna i skolår 2 som hade rätt på uppgifter av typen 9-1 och 8-6 (handlar om att känna talens grannar inom talområdet 0-10). Nu är det inte samma elever som deltagit i dessa båda undersökningar, men eftersom antalet elever i min studie är så pass många att deras resultat kan antas ha viss generell giltighet kan man fråga sig om eleverna som deltog i Frisks studie hade så mycket sämre kunskaper som sexåringar eller om det beror på undervisningen i skolår 1 och 2 som är orsak till att det är en färre andel elever som kan räkna ut talens grannar i år 1 och 2 än i förskoleklassen.

När man sedan kommer till ett större talområde (0-99). Är det endast 61% av eleverna i år 2 som gör rätt på uppgifter som 19-1 och 18-16. Wiliam (2007) påpekar att om man arbetar med utvärdering av elevernas matematikkunskaper bör det öka matematikinlärningen. Här ser det ut som om inlärningen minskat! Är detta exempel på den ”avlärning” som sker i skolan , som Solem & Reikerås (2004) skriver om? Är detta resultatet av att skolans undervisning inte tar hänsyn till den förståelse och det kunnande som barnen har med sig redan när de börjar skolan? Resultatet kan också ses som ett exempel på det som Niss (2001) beskriver. Att det inte finns någon garanterad överföring eller överspridning av kunnande från ett sammanhang till ett annat. Han påpekar att det vi vill att elever skall kunna måste göras till föremål för explicit och noggrant tillrättalagd undervisning. Kan det vara så att lärare tar förgivet att elever kan generalisera sitt kunnande inom ett mindre talområde till ett större? Att man inte explicit visar eleverna hur deras talkunnande inom lilla tabellen kan generaliseras och utnyttjas vid beräkningar med större tal?

Hedrén (2001) skriver att automatiserad tabellkunskap utvecklas genom att tabeller inom lägre talområden generaliseras till större talområde och att denna tabellkunskap är en nödvändig förkunskap till skriftlig räkning och huvudräkning. Eleverna i förskoleklass har goda förutsättningar för att arbeta med automatisering av talkombinationerna inom talområdet 0-10. De har en stabil talrad inom detta område både framåt och bakåt, de behärskar de fem principerna för antal, de har en mental talrad inom talområdet då de kan börja räkna på ett annat tal än ett och de behärskar talens grannar. Nästa steg är då att arbeta med talkombinationerna inom ”lilla tabellen” (0-10) för att sedan generalisera denna kunskap till större talområden, vilket också kräver förståelse för vårt talsystems uppbyggnad med 10-bas.

Som bland andra Solem & Reikerås konstaterade är det nödvändigt att barn automatiserar de grundläggande räkneoperationerna inom de fyra räknesätten för att kunna hänga med i skolmatematiken. Dessa uppgifter utgör ett exempel på matematikämnets hierarkiska struktur. Som Niss (2001) påpekar följer elevernas kunskapsutveckling inte alltid samma väg som matematikens uppbyggnad. Men för elever som inte utvecklat förståelse och kunskap för att utföra beräkningar inom ett större talområde kan en undervisning som visar på sambanden mellan det mindre och större talområdet var en framgångsrik väg

När vi studerar ytterliggare ett resultat från Frisks studie visar det sig att för subtraktioner inom talområdet 0-99 gör 51% av eleverna i år 3 rätt på uppgifter som 38-2 och 58-57. På samma uppgifter gör 66% av eleverna i år 4 rätt. Det sker således ingen större utveckling mellan åren och ännu i år 4 är det en stor andel elever som inte klarar dessa uppgifter. Intressanta frågor är: hur väl känner lärarna till och tar hänsyn till elevernas förkunskaper? Har eleverna fått utvecklas vidare från sina förutsättningar redan från förskoleklassen? Har eleverna fått utveckla sitt abstrakta tänkande och sin mentala talrad (Johansson & Wirth, 2007) eller har de fastnat i ett manipulerande med konkretiserande material som inte lett vidare till ett utvecklingsbart tänkande (Löwing, 2006)?

Det framgår av min undersökning att eleverna i förskoleklass har en god utvecklad tal- och antalsuppfattning. De besitter i stor utsträckning nödvändiga förkunskaper för att utvecklas vidare. Även om större delen av eleverna visar sig ha goda eller mycket goda förkunskaper så visade sig ca 7% ha stora brister i sin förförståelse (se tabell 12.) och för dessa elever är det av största vikt att de ges möjlighet att åtgärda detta, så att de kan tillgodogöra sig den fortsatta matematikundervisning som väntar dem under skolår 1 och 2. Som Solem & Reikerås (2004) skriver är matematikundervisningen under de första skolåren avgörande för den fortsatta matematikinlärningen och man måste ta hänsyn till de elever som visar bristande förståelse. Ett viktigt syfte med formativ utvärdering som lyfts fram är just att identifiera elevers behov av hjälp och stöd (Korp, 2003). Samtidigt måste undervisningen också ta hänsyn till det matematiska kunnande som flera elever redan besitter. Och inte börja från början med alla (Solem & Reikerås, 2004). Om utvärderingen skall få den formativa karaktär som teorin visar vara så framgångsrik måste det noggrant analyseras på både individ och gruppnivå vem som har förutsättningar för vad och vem som behöver stöd och hjälp med vad. Först då kan undervisningen individualiseras:

> "Ge aldrig en kunskapsdiagnos om du inte vet hur du skall följa upp den. I annat fall blir diagnostiken enbart en rituell handling utan betydelse för undervisningen" (Löwing, Kilborn, 2002, sid 164).

I den teori som ligger till grund för frågorna i diagnosen (se. avsnitt 2.6) framkommer tydligt vad det är meningen att eleven skall kunna och på vilket sätt i varje uppgift. Men som Wiliam uttrycker det så är det nödvändigt att läraren sedan vet vad som skall göras åt vilket resultat och sedan också kan göra det. (Wiliam, 2007). Eftersom det handlar om elever i förskoleklass är det också viktigt att de aspekter som är centrala för elever i denna ålder beaktas, såsom lekens betydelse (Melander & Prieto, 2006). Och att samtidigt ha Solem & Reikerås ståndpunkt i åtanke: att det inte är någon motsättning mellan att ta utgångspunkt i barns vardag och tankesätt och att samtidigt som sträva efter formalisering och automatisering.

Om man studerar resultaten för de tre olika elevgrupperna som presenteras i tabell 13, 14 och 15 så framkommer det att undervisningen bör läggas upp på olika sätt i de tre grupperna. Nedan beskriver jag några exempel på vad som är viktigt att fokusera för olika elever när det gäller den fortsatta undervisningen i dessa grupper. Beskrivningen utgår från vad eleverna skall förstå och tar inte upp hur undervisningen bör bedrivas. Marton och Carlgren (2000) lyfter fram att för att kunna möta elever med varierade betingelser för lärande i skolan förutsätts att läraren har en förmåga till flexibelt handlande med utgångspunkt i insikter i det professionella objektet Det avgörande är att veta vad som skall läras, då kan slutsatser dras om vad som är nödvändigt för att utveckla en viss förmåga oavsett vilken metod som används för att utveckla den.

Tabell 13: I denna elevgrupp råder stor variation i elevernas kunnande vilket leder till olika behov för olika elever.

- elev 19 och 24 behöver utmanas genom att få utvidga talområdet och förstå positionssystemets uppbyggnad så att den förståelse de har kan generaliseras till större tal.
- Övriga elever behöver träna mer på de olika grunder där bristande förståelse visar sig så som talraden, principen för godtycklig ordning och effektivare additionsstrategier.
- Diagnosen eller delar av den skulle kunna göras om efter ett tag för att följa upp resultat av åtgärder.

Tabell 14: I denna elevgrupp har många elever har kommit långt i sin utveckling. Här kan det kännas som att hela gruppen kan gå vidare. Detta är en risk vid en grupp där helhetsintrycket är att eleverna har kommit långt i sin utveckling. Enskilda elever som här bör uppmärksammas är:

- elev 6, 9 och 18 som inte räknar så långt i talraden.
- Elev 18 klarar inte heller talskrivning och använder strategin ”räkna alla” vid additionen.
- Elev 6 missar talskrivning.
- Både elev 6 och 9 missar en granne. Det är viktigt att följa upp dessa elever angående dessa uppgifter för att ta reda på orsaken och arbeta vidare med detta så att de får goda möjligheter att gå vidare ihop med de övriga.

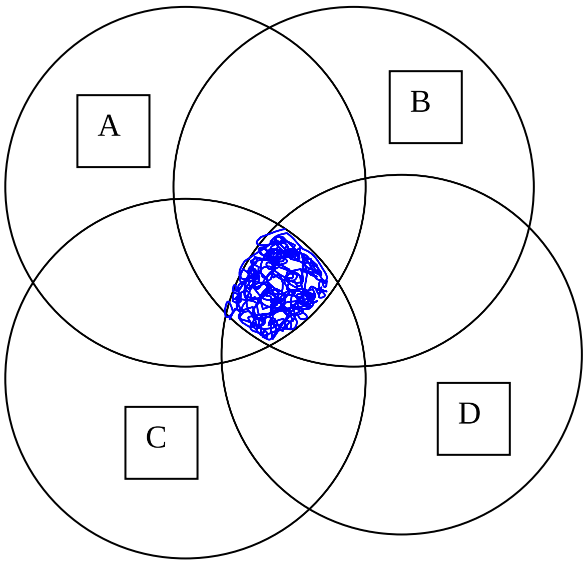
Tabell 15 visar resultat från en klass där flera elever visar brister på flera uppgifter. Och mycket av det som behöver tränas mer på kan hela gruppen arbeta med.

- Träna mycket på talraden. Det kan underlätta att titta på hur talsystemet är uppbyggt och mönster i talraden för att underlätta inlärningen.
- Alla elever klarar att börja räkna en bit in i talraden (uppgift 2) och alla utom elev 10 och 16 klarar att direkt ange tals grannar (addition och subtraktion med 1, uppgift 7 och 8) däremot använder de strategin ”räkna alla” vid addition fast de har förutsättning att räkna från första eller största (vilket endast elev 13 gör). Dessa strategier bör eleverna uppmärksammas på och träna.
- Fler än hälften av eleverna elever behärskar inte talskrivning.
- Hälften av eleverna missar på principen för godtycklig ordning.
- Ett antal elever missar också på att säga talraden baklänges. Trots detta klarar de direkt subtraktion med 1 men om de skulle subtrahera med fler steg är risken (enl. Johansson & Wirth, 2007) att de inte skulle klara detta.
- Diagnosen eller delar av den bör göras om efter att dessa aspekter har tränats.

Niss (2001) påpekar att frågor som rör organisering och implementering av undervisnings- och inlärningsmiljöer hänger ihop med vår förståelse för elevernas lärprocesser.
I den dagliga verksamheten för elever i förskoleklass arbetar man ofta med teman, lekar, rim och ramsor, diverse utomhusaktiviteter och tar sin utgångspunkt i barnens närmiljö samt låter dem uttrycka sig på olika sätt, detta är i överensstämmelse med läroplanens intentioner. I detta

arbetssätt finns rika möjligheter att träna det matematiska innehåll som testas i diagnosen Förberedande aritmetik Här blir lärarens matematiska och didaktiska kompetens avgörande för om eleverna ges möjlighet att lära det som avses. Det krävs stor insikt hos läraren att upptäcka, fånga och göra något av matematiken i de tillfällen som ges. I litteratur och pedagogiskt material av olika slag finns mycket ”tips och idéer” till olika aktiviteter men det gäller att vara medveten om vad aktiviteterna går ut på, vad som skall förstås och att kunna tolka vilken förståelse eleverna ger uttryck för. Det är detta Doverborg & Pramling (2001) uttrycker om att innehållet måste lyftas fram och göras synligt av pedagogerna. Det är inte aktiviteten i sig som automatiskt leder till ett lärande. Denna slutsats drog även Korp (2003), Riesbeck (2008) och Marton & Carlgren (2000). Pedagogen måste också vara medveten om hur en progression av kunnandet kan se ut, kunna hjälpa eleverna att generalisera sitt kunnande och att tillämpa det i nya situationer. Som Niss (2001) skriver finns det ingen garanterad överföring eller överspridning av vetande, insikt och kunnande från ett sammanhang till ett annat om det är något vi vill att våra elever skall veta, förstå eller klara av måste vi göra detta till föremål för explicit och noggrant tillrättalagd undervisning.

Nedanstående figur är ett försök att sammanfatta och åskådliggöra teori och resultat som beskrivs i uppsatsen när det gäller förutsättningarna för att bedriva en god undervisning i matematik som inkluderar ett formativt arbetssätt.



A = **Ämnesdisciplinens** (Matematikens) innehåll, karaktär och struktur. Ligger till grund för undervisningens ”vad”. Matematisk kompetens.

B= **Skolämnets** innehåll. Kursplanens beskrivning och anpassning av matematikens innehåll för olika åldrar. Tydliggör undervisningens ”vad”. Kräver tolkning och begreppsförståelse. Matematikdidaktisk och matematisk kompetens.

C= **Lärandet,** ur elevperspektiv. Veta var eleverna står kunskapsmässigt. Vad kan eleverna? Vad förstår eleverna? På vilket sätt förstår de? Känna till vanliga uppfattningar och missuppfattningar hos eleverna, kunna identifiera hur förståelse för innehållet kan ta sig uttryck hos eleverna och vad det kan få för konsekvenser för det fortsatta lärandet. Matematikdidaktisk kompetens.

D= **Undervisningen,** ur lärarperspektiv. Grund för undervisningens ”hur”. Hur skapas goda inlärningssituationer? Val av undervisningsform och metod. Hur kan en progression av innehållet se ut? Hur kan utvärdering göras? Hur kan konkretisering och förklaringsmodeller av visst innehåll se ut? Matematikdidaktisk och pedagogisk kompetens.

God undervisning förutsätter att läraren besitter god insikt och goda kunskaper inom alla dessa fält. Förmågan att samtidigt ta hänsyn till dessa komponenter ger den mest optimala förutsättningen för god undervisning. Detta motsvaras i modellen av det ifyllda område där alla delar överlappar varandra. Om man befinner sig inom detta område anser jag att man bör ha möjlighet att ”veta vad som skall göras åt vilket resultat samt också kunna göra det” , vilket Wiliams (2007) beskriver som det mest avgörande för att utvärderingen skall bli formativ på ett effektivt sätt.

I denna uppsats har det framkommit en bild av vilket kunnande inom de fyra respektive områden som är viktig att ha som lärare när det gäller elevers kunskapsutveckling inom den grundläggande tal- och antalsuppfattningen. Den del av område D som behandlar val av undervisningsform och metod har inte fått något större utrymme i uppsatsen. Givetvis är det viktigt att välja en undervisningsform och en metod som passar såväl innehåll som elever men som visat sig i teorigenomgången är det inte val av arbetsform eller metod som är direkt avgörande för vad som lärs. Vet jag vilken elev som skall första vad på vilket sätt kan jag som lärare välja att presentera detta och låta eleven arbeta med just det innehåll på en rad olika sätt. Insikt i det professionella objektet (Marton & Carlgren, 2000) är av överordnad betydelse och skall styra val av arbetsform och inte tvärtom. Doverborg & Pramling (2001) slutsats att lärare för de tidigare skolåren inte alltid är vana att tänka omkring matematik och matematiska begrepp kan bero på att man saknar kompetens inom en eller flera av dessa delar.

7:3 Slutsatser och avslutande kommentarer

Sammanfattningsvis konstaterar jag att det bör finns en hel del att vinna på att arbeta med formativ kunskapsuppföljning redan från de tidigaste skolåren. Detta bekräftas av såväl teori som empiri och lyfts även fram i våra styrdokument, då det utgör grunden för en individualiserad undervisning. Det är viktigt att väljs en utvärderingsform som passar såväl de elever som det innehåll man riktar sig mot. Olika utvärderingsformer bör användas för olika syften.

Diamantdiagnosen Förberedande aritmetik är ett diagnosinstrument som ger god insikt i en elevs grundläggande tal- och antalsuppfattning. Det är även en diagnosform som är lämplig för elever i denna ålder. Dock skall det poängteras att det finns visst utrymme för missuppfattning och feltolkning såväl då frågorna ställs som då elevernas svar skall tolkas. Detta innebär att det för att få tillförlitliga resultat krävs god insikt hos den intervjuande personen om vad syftet med varje uppgift är och vilka tankeformer och strategier som är vanliga hos eleverna samt vad som kvalitativt skiljer dessa tankeformer och strategier åt.

Utifrån de resultat som här har presenterats, analyserats och diskuterats skall jag så långt det är möjligt svara på mina frågeställningar.

De insamlade materialet från drygt 1600 elever i förskoleklass visar på att de allra flesta av dessa elever har god eller mycket god grundläggande tal- och antalsuppfattning. De har tillägnat sig förståelse för de fem principerna för att räkna, ange och förstå antal, de har utvecklat strategier för att effektivt utföra additioner, de kan till en viss del abstrahera tal på så sätt att de kan arbeta med en mental talrad och de kan även formalisera sitt kunnande genom att skriva tal med våra siffersymboler. Detta innebär att dessa elever har goda förutsättningar att börja med de grundläggande aritmetiska beräkningar som är innehåll i de närmast kommande skolåren. Detta innefattar addition och subtraktion till att börja med inom talområdet 0-10, och med en fortsättning då denna kunskap generaliseras vid beräkningar inom större talområden med tiotals och hundratalsövergångar. Det finns dock en viss spridning inom elevgruppen; ca 7% har inte de nödvändiga förkunskaperna och ca 70 % har kunskapsluckor inom något eller några moment. Här blir individualiseringen viktig då dessa elever måste få möjlighet att utveckla sin förståelse inom aktuella områden. Å andra sidan har drygt 20% mycket goda förutsättningar och behöver utmanas vidare för att inte understimuleras.

Enligt de resultat som redovisas här verkar inte elevers kunskaper när de börjar skolan vara en orsak till de svårigheter i matematik som visar sig i flera studier för senare skolår. Tvärtom borde elevernas utgångsläge inför skolstart vara goda för att en högre måluppfyllelse än vad som idag är fallet. Skulle utvecklad lärarkompetens inom matematik och matematikdidaktik inkluderande att använda sig av formativ bedömning i undervisningen redan från skolstart vara en möjlig väg för att bättre än i dag anpassa undervisningen till elevernas förkunskaper och förutsättningar och på så sätt nå högre måluppfyllelse? Mycket av det som framkommit och beskrivs i denna uppsats talar för det. Dock är läraruppgiften komplex och det finns inte någon enkel ”diagnospedagogik” eller någon färdig arbetsform/arbetsmaterial som löser frågan hur man skapar god undervisning och når högre måluppfyllelse på ett enkelt sätt. Lärarens kompetens i fråga om ämnet, ämnets didaktik, pedagogisk kompetens och relationen till sina elever är avgörande för att kunna utvärdera elevernas kunskaper på ett adekvat sätt och framför allt för att kunna bedöma resultaten, se vad som behöver göras och kunna göra det. Men förutsättningarna för att skapa bättre utgångsläge för elevernas fortsatta lärande bör öka om man har en klar bild av var eleverna står kunskapsmässigt.

Referenser.

Alvesson.M, & Sköldberg, K.(2008). *Tolkning och reflektion.* Lund: studentlitteratur.

Bentley, P-O. (2003) *Mathematics Teachers and Their Teaching.* Göteborg studies in educational sciences 191. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bentley, P-O. (2008). *Mathematical Teachers and their Conceptual models.* Göteborg studies in educational sciences 265. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Carlgren, I. & Marton, F. (2000). *Lärare av i morgon.* Stockholm: Lärarförbundets förlag.

Cooney, T. (2007). *Många sätt att se på matematik och undervisning*.I Boesen. J, Emanuelsson.G, Wallby.A, Wallby.K (red.) *Lära och undervisa matematik, Internationella perspektiv.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (2001). *Förskolebarn i matematikens värld..* Stockholm: Liber.

Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (2006). *Att förstå barns tankar. Metodik för barnintervjuer.* Stockholm: Liber.

Dysthe, Olga. (Red.). (2003*). Dialog, samspel och lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Eliasson, R. (2002). *För många klarar inte skolans krav*. Dagens Nyheter,28 januari. s 2.

Enkvist, I. (2008). *Pedagoger har raserat skolan.* Axess Magasin nr5, 16 juni.

Fischbein, S (2007). *Mål för alla, Perspektiv för nationella utbildningsmål för tidiga skolår.* Stockholm: Skolverket.

Frisk, S. (2007). *En kartläggning av elevers kunskaper i grundläggande addition och subtraktion.* Fördjupningsarbetet inom ämnesdidaktik. Göteborg: Göteborgs Universitet, Institutionen för pedagogik och didaktik.

Gagné, R. (1965). *The Conditions of learning.* New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The childrens Understanding of Number.* London: Harvard UP.

Guba, E.G. & Lincoln, Y.S. (2000*). Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences.* I Denzin, N., K. & Lincoln, Y.,S. (Ed.) *Handbook of Qualitative Research.* S. 163-188. Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Hedrén, R. (2001). *Räkning i skolan i dag och i morgon* . I Grevholm, B. (red.). *Nordiskt perspektiv på matematikdidaktik.* Sid 133-157. Lund. Studentlitteratur.

Høines Johnsen, M (2000). *Matematik som språk,* Caspar förlag.

Johansson, B & Wirth, M (2007). *Så erövrar barnen matematiken.* Uppsala: Kunskapsföretaget AB

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Ed.). (2001). *Adding it up*: *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Korp, H. (2003). *Kunskapsbedömning – hur, vad och varför?.* Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur.

Lennerstad, H & Bergsten, C. (2008). *Matematiska språk.* Stockholm: Santérus förlag

Loewenberg Ball, D., Ferrine-Mundy, J., Kilpatrick, J., Milgram, R.J., Schmid, W. Schaar, R. (2005) *Reaching for Common Ground in K-12 Mathematics Education*. http://www.maa.org/common-ground/cg-report2005.html

Löwing, M. (2002). *Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning.* IPD rapport nr 2002:11. Göteborg: Göteborgs Universitet, Institutionen för pedagogik och didaktik.

Löwing, M (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning.* Göteborg studies in educational sciences 208. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemma.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik- matematikdidaktik för lärare.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing,M & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för hem, skola och samhälle.* Lund: Studentlitteratur.

Malmer, G. (1999). *Bra matematik för alla.* Lund: Studentlitteratur

Melander h & Prieto, H (2006). *Förskoleklassen - ett tionde skolår?.* Stockholm: Liber.

Nationalencyklopedin (1989–1996). Höganäs: Bra Böcker.

Niss, M. (2001). *Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status.* I Grevholm, B. (red.). *Nordiskt perspektiv på matematikdidaktik.* Sid 21-47. Lund. Studentlitteratur.

Nyström, P. & Palm, T. (2001). *Är det något fel med vanliga matteprov?.* Nämnaren nr.1, 2001. sid 41-47. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Palm. T, Bergqvist. E, Eriksson. I, Hellström.T & Häggström, C (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion.* Pm nr.199. Umeå: Umeå Universitet.

Patel, P. & Davidsson, B. (1994). *Forskningsmetodikens grunder Att planera, genomföra och rapportera en undersökning.* Lund: Studentlitteratur.

Pettersson, A. (2008), *Vi måste få med oss eleverna på bedömningen.* Lära Stockholm, nr 2, sid.11.

Riesbeck, E. (2008). *På tal om matematik. Matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen.* Linköping: Linköpings Universitet, Institutionen för beteendevetenskap och lärande.

Skolverket (2004). *Allmänna råd och kommentarer. Likvärdig bedömning och betygsättning.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2004a). *PISA 2003 Svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv.* Rapport nr 254. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2004b). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003. Sammanfattande huvudrapport.* Rapport nr. 250. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2005). *Om skolors olikheter och deras betydelse för elevernas studieresultat.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2006). *Inspektionsrapport 2006:110.* www.skolverket.se

Skolverket(2008a). *TIMSS 2007-huvudrapport.* Rapport nr.323. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2008b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007.* Analysrapport nr.323. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2009). *Diamant, Diagnosmaterial i matematik för åren före årskurs 6.* www.skolverket.se

Skolverket (2009b). *Provresultat per ämne för ämnesproven år 9 inhämtat vårterminen 2008.* hämtat från: http://www.skolverket.se/content/1/c6/01/43/58/Grundskolan%20-%20Betyg%20och%20prov%20-%20Riksniv%E5%20Tabell%208A.xls

Solem, I. & Reikerås, E (2004). *Det matematiska barnet.* Stockholm: Natur & Kultur.

SOU 2004:97 *Att lyfta matematiken - intresse, lärande, kompetens.* Betänkande av matematikdelegationens. Stockholm: Fritzes.

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* Lund: Studentlitteratur.

Utbildningsdepartementet (1998). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet.* Stockholm: Fritzes.

Vinterek, M (2006). *Individualisering i ett skolsammanhang.* Forskning i fokus, nr. 31. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Vetenskapsrådet (1990). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Vetenskapsrådet.

Wallén, G. (1996) *Vetenskapsteori och forskningsmetodik.* Lund: Studentlitteratur.

Wiliam, D. (2007) *Keeping learning on track.* In F. Lester, (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC : NCTM

Wigforss, F. (1957). *Den grundläggande matematikundervisningen.* Stockholm: Bergvalls

Bilaga 1

Diagnos AF

Material: 22 föremål såsom gem eller knappar.

1. Syfte: Att ta reda på hur stor del av talraden eleven behärskar, alltså klarar direkt, utan att tveka.

Uppgift: Hur långt kan du räkna?
Om eleven inte uppfattar frågan kan man hjälpa eleven på traven genom att börja räkna: ett, två, tre … hur fortsätter man?

Notera i resultattabellen hur långt eleven kommer i talraden utan att staka sig eller hoppa över något tal.

2. Syfte: Att ta reda på om eleven har förkunskaper för att kunna ”räkna från första/största termen”, en viktig förkunskap för addition.

Uppgift: Börja på 5 och fortsätta räkna.
Om eleven inte uppfattar innebörden i frågan kan man ge ett exempel: När man räknar från 3, så räknar man 4, 5, 6 osv. Försök nu fortsätta räkna från 5.

Notera i resultattabellen Ja eller Nej.

3. Syfte: Att ta reda på om eleven kan räkna bakåt från ett givet tal, en viktig förkunskap för subtraktion.

Uppgift: **Börja på 10 och räkna bakåt.**
Om eleven inte uppfattar innebörden i frågan så kan man ge följande exempel: När man räknar från 7 och bakåt så räknar man 6, 5, 4, 3 osv.
Om eleven inte klarar bakåträkning från 10, så pröva om hon kan räkna bakåt från 5.

Notera i tabellen Nej eller Ja från 5 eller Ja från 10.

4. Syfte: Att ta reda på om eleven kan visa hur många föremål (vilket antal) som svarar mot ett givet tal.

Uppgift: Lägg upp 14 knappar (föremål) på bordet.

Notera i tabellen hur många knappar eleven klarar av att räkna utan att staka sig.

5. Syfte: Att ta reda på om eleven kan använda talraden korrekt för att bestämma antalet föremål.

Inled genom att lägga 22 knappar (föremål) i oregelbunden ordning på bordet. **Uppgift: Hur många knappar ligger det på bordet?** Om en elev inte kan räkna alla knapparna, minska antalet knappar till 15, 10 eller 5 och upprepa därefter frågan.

Notera hur många knappar eleven klarar av att räkna. Notera också om eleven säger att det är 1, 2, 3, … 10 knappar eller att det är 10 knappar (antals-principen).

6. Syfte: Att ta reda på om eleven förstår principen om godtycklig ordning, dvs. att det blir samma resultat oavsett i vilken ordning man räknar föremålen

Låt det antal knappar (föremål) som eleven klarade av att räkna i fråga 5, ligga kvar på bordet. Fortsätt samtalet från fråga 5.
Uppgift: Du sade att det var 22 (el. motsv.) knappar. Nu börjar jag räkna på den knappen istället. Hur många blir det då? … Varför?

Om eleven direkt säger 22 (el. motsv.) med en korrekt motivering notera Ja. Om eleven tvekar notera ”?” och om eleven gissar på ett nytt tal notera Nej.

7. Syfte: Att ta reda på om eleven förstår att addition av ett tal med 1 ger nästa tal i talraden, en viktig förkunskap till addition.

Uppgift: Det ligger 6 apelsiner i en skål. Om du lägger dit en apelsin till, hur många apelsiner är det då i skålen? Eleven skall kunna svara utan att använda föremål eller fingrar. Här gäller det att se om eleven kan abstrahera (kan utföra operationen i huvudet).

Notera ”Ja” eller ”Nej”.
8. Syfte: Att ta reda på om eleven förstår att subtraktion av ett tal med 1 ger föregående tal, en viktig förkunskap till subtraktion.

Uppgift: Det ligger 6 apelsiner i en skål. Om du tar bort en apelsin, hur många är det då i skålen? Eleven skall kunna svara utan att använda föremål eller fingrar. Det gäller att se om eleven kan abstrahera (kan utföra operationen i huvudet).

Notera ”Ja” eller ”Nej”.

9. Syfte: Att ta reda på vilken additionsstrategi eleven använder

Lägg 3 knappar i elevens ena hand och 5 knappar i en av dina händer.
Uppgift: Hur många knappar har du? (Peka på handen med 3 knappar.) **Hur många knappar har jag?** (Visar din hand med 5 knappar.) **Hur många knappar har vi tillsammans?** (Håll händerna öppna bredvid varandra.)

Notera ”Räknar alla” (uppräkning från början), ”räknar från 3” (från första), ”räknar från 5” (från största) eller ”Ser direkt” (”Vet”).

10. Syfte: Att ta reda på om eleven behärskar talskrivning. Detta brukar vara en bra indikator på hur mycket matematik eleven behärskar.

Fråga: **a) Kan du skriva siffran 5?**
b) Kan ta skriva talet 12 med siffror?
c) Kan du skriva talet 27 med siffror?

Notera Ja eller Nej.