



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Att få begrepp om bråk
- en läromedelsanalys i matematik om begreppsbildning av bråktal för
skolår 5

Jenny Andersson

Examensarbete LAU370

Handledare: Christian Bennet

Examinator: Per-Olof Bentley

Rapportnummer: VT10-2611-060



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Abstract

Examensarbete inom lärarutbildningen

Titel: Att få begrepp om bråk - en läromedelsanalys i matematik om begreppsbyggnad av bråktalet för skolår 5

Författare: Jenny Andersson

Termin och år: VT2010

Kursansvarig institution: Sociologiska institutionen

Handledare: Christian Bennet

Examinator: Per-Olof Bentley

Rapportnummer: VT10-2611-060

Nyckelord: Begreppsbyggnad, begreppsförståelse, procedurrell, konceptuell, bråktalet, läromedelsanalys

Sammanfattning:

I denna läromedelsanalys analyserades tre matematikläromedel för skolår 5. Syftet med studien var att analysera vilket stöd lärare och elever ges vid begreppsbyggnad av bråktalet. Det gjordes utifrån synen på vilken roll ett konceptuell/begreppsmässig inläring kontra procedurrell inläring har för begreppsbyggnad. Syftet preciseras med hjälp av följande frågeställningar:

- Vilket stöd ges läraren i läromedlet då bråktalet introduceras och behandlas för elevernas möjlighet till begreppsbyggnad?
- Vilket stöd ges eleven av läromedlet för att utveckla den begreppsliga förståelsen av begreppet bråktalet?
- Är det en konceptuell/begreppsmässig eller procedurrell/sekvensriktad inläring som fokuseras i läromedlet?
- Vilka begreppsmodeller för bråktalet presenteras i läromedlet och hur stödjer de eleverna i deras begreppsmässiga utveckling av tal i bråkform?

Analysen av läromedlen utgick ifrån aktuell forskning i begreppsbyggnad. Utifrån den togs ett analysinstrument av djupgående karaktär fram, med både kvantitativ och kvalitativ inslag. Efter att läromedlen analyserats var för sig jämfördes de tre analyserna med varandra.

Det som framkom av läromedelsanalysen var att i två av de tre läromedlen gavs lärare och elever ett stort stöd för begreppsbyggnad av bråktalet, framförallt utifrån lärarhandledningen. I läromedlen fanns tecken på både konceptuell/begreppsmässig inläring samt procedurrell/sekvensriktad inläring, men med olika mycket tyngdpunkt i de tre analyserade läromedlen. Begreppsmodeller användes i alla tre läromedlen, men med olika tydlighet och frekvens. Det framkom av studien att det är viktigt använda sig av lärarhandledningen och inte enbart av lärobok för att läromedlet ska ge ett starkt stöd för begreppsbyggnad av bråktalet. Om läraren inte utgår från lärarhandledningen förbises grundtankar från författarna i läromedlet.

När lärare väljer läromedel är det viktigt att vara medveten om att olika stöd ges för begreppsbyggnad i undervisningen. Slutsatsen är att lärare och elever kan få ett bra stöd i läromedlet, men att det gäller att kritiskt granska det.

Innehåll

1	Inledning	5
1.1	Syfte och problemformulering.....	6
2	Teorianknytning	7
2.1	Begrepp, begreppsuppfattning och begreppsbyggnad	7
2.2	Begreppsbyggnad utifrån teorier av Piaget, Vygotsky och Marton.....	7
2.3	Theory revision och redescription	8
2.4	Procedurell och konceptuell kunskapsbyggnad	9
2.5	Strukturella och operationella aspekter på begreppsbyggnad.....	10
2.6	Matematiska begreppsmodeller	11
2.6.1	Del-helhetsmodellen.....	11
2.6.2	Andelsmodellen.....	12
2.6.3	Operatormodellen.....	12
2.6.4	Tallinjensmodellen.....	13
2.6.5	Mängdjämförelsemodellen.....	13
2.6.6	Begreppsmodellernas relation till varandra.....	13
3	Metod.....	15
3.1	Val av metod.....	15
3.2	Urval och genomförande	15
3.3	Beskrivning av analysinstrument och analyskriterier.....	16
3.3.1	Kvantitativ analys.....	16
3.3.2	Kvalitativ analys.....	17
3.4	Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet	18
3.4.1	Reliabilitet	18
3.4.2	Validitet.....	19
3.4.3	Generaliserbarhet	19
3.5	Etiska överväganden.....	19
4	Resultat och Analys.....	21
4.1	Kort presentation: Matte Direkt Borgen 5b	21
4.2	Kvantitativ resultatredovisning: Matte Direkt Borgen 5b	22
4.3	Kvalitativ resultat- och analysredovisning: Matte Direkt Borgen 5b.....	22
4.3.1	Begreppsbyggnad	22
4.3.2	Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering.....	23
4.3.3	Begreppsmodeller.....	24
4.4	Kort presentation: Matteboken 5A	25
4.5	Kvantitativ resultatredovisning: Matteboken 5A	25
4.6	Kvalitativ resultat- och analysredovisning: Matteboken 5A	25
4.6.1	Begreppsbyggnad	25
4.6.2	Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering.....	28
4.6.3	Begreppsmodeller.....	29
4.7	Kort presentation: Tänk och Räkna 5b	30
4.8	Kvantitativ resultatredovisning: Tänk och Räkna 5b	31
4.9	Kvalitativ resultat- och analysredovisning: Tänk och Räkna 5b.....	31
4.9.1	Begreppsbyggnad	31
4.9.2	Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering.....	35
4.9.3	Begreppsmodeller.....	35
4.10	Jämförande analys av läromedlen.....	37
4.10.1	Begreppsbyggnad	38

4.10.2	Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering.....	38
4.10.3	Begreppsmodeller.....	39
5	Diskussion	40
5.1	Diskussion av resultat.....	40
5.1.1	Begreppsbildning	40
5.1.2	Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering.....	41
5.1.3	Begreppsmodeller.....	43
5.2	Relevans för läraryrket	43
5.3	Vidare forskning	44
	Referenser	45
	Bilagor	47
	Bilaga A.....	47
	Bilaga B.....	48

1 Inledning

Under min inriktningsdel i matematik på lärarprogrammet, vårterminen 2007, fick jag känslan av att det eftersträvansvärda i matematikundervisningen var att inte utgå från en lärobok. Jag fick uppfattningen att en lärare av god kvalitet inte arbetar utifrån en lärobok. Det gjorde mig lite osäker då jag ansåg att läroboken till en början i min lärartjänst kunde vara till ett stöd. Det finns dock anledning att diskutera hur mycket läroboken ska få styra matematikundervisning. Något som visat sig i TIMMS-undersökningen från 2007 är att svensk matematikundervisning är mer läroboksstyrd och mer fokuserad på enskilt arbete än genomsnittet i övriga länder som deltog i undersökningen (Skolverket 2008a:10). TIMMS är en internationell undersökning av elevers kunskaper i matematik och naturkunskap för skolår 4 och 8, för medlemsländer i EU och OECD-länder. I Sverige uppger 93 % respektive 95 % av lärarna att de använder sig av läroboken som huvudsaklig grund i matematikundervisningen för skolår 4 och 8. Motsvarande siffra för övriga OECD-länder är 60 % (Skolverket 2008a:66). Av undersökningen framgår också att i Sverige åtgår 38 % av undervisningstiden i matematik, under en vanlig vecka i skolår 4, till att eleverna ensam arbetar med matematikuppgifter, utan någon handledning från läraren. Motsvarande siffra för skolår 8 är 28 %. Det är en något större andel av tiden jämfört med övriga EU/OECD-länders genomsnitt, på 27 % respektive 19 % för skolår 4 och 8 (Skolverket 2008a:65). Eftersom det visat sig att matematikundervisningen till mycket stor del är läromedelsstyrd trots diskussioner kring lärobokens vara eller inte vara, är det viktigt och intressant att granska hur svenska läromedel är utformade.

Något annat som framkom i TIMMS-undersökningen 2007 är att svenska elevers matematik-kunskaper är sämre än genomsnittet för övriga länder som medverkade. Bland annat visade det sig att svenska elever är relativt sett sämre på att använda fakta och begrepp i matematik. För årskurs 8, som deltagit i två tidigare TIMMS-studier visade det sig också att den negativa trenden håller i sig gällande att de svenska resultaten fortsätter att försämrans i relation till de tidigare (Skolverket 2008a:8-9).

I en analys som utgår från TIMMS-undersökningen 2007 visar det sig att några länder med generellt sett goda resultat har en något annan undervisningsstrategi än den svenska. Det som tydligt särskiljer den undervisningen mot den svenska är att den är mer inriktad på att elever ska få förståelse för matematiska begrepp, så kallad *konceptuell kunskap*. I Sverige är undervisningen mer fokuserad på beräkningsprocedurer, så kallad *procedurell kunskap* (Skolverket 2010). Bentley (2008:1-2) beskriver olika länders tonvikt gällande var fokuset på matematikundervisningen ligger. Det finns dels de länder som lägger större vikt vid en begreppsmässig matematikundervisning som exempelvis Japan och Kina, dels en mer procedurinriktad matematikundervisning som exempelvis USA och Tyskland. Enligt Bentley (2008) har tonvikten i Sverige historiskt sett legat på det procedurinriktade lärandet i matematik. Utifrån en analys av grundskolans kursplan i matematik finns, enligt Bentley, belägg för att behandla båda lärandeaspekterna i undervisningen och styrdokumentet motsäger inte något av dem. Det begreppsmässiga fokuset återfinns framförallt i mål att sträva mot i kursplanen för matematik. I uppnåendemålen för årskurs fem återfinns både de begreppsmässiga och det procedurinriktade aspekterna (Bentley 2008:1-2). Något som utifrån detta kan ses som intressant att undersöka är hur svenska läromedel i matematik förhåller sig till konceptuell kunskapsinläring, där fokuset ligger på att skapa en begreppslig förståelse för nya matematiska begrepp.

Att undersöka läromedels inriktning på konceptuell kunskap, för att se om det finns något fokus för att skapa en begreppsligförståelse, är ett stort och vitt problemområde som måste avgränsas inom ramen för ett examensarbete. Under min verksamhetsförlagda del av lärarut-

bildningen, VFU, har jag ibland under matematikundervisning upplevt det som svårt att möta eleverna i diskussioner och förståelse kring tal i bråkform. Jag har fått en känsla av att befinna mig på en mer abstrakt nivå än eleverna, då bråktal och bråktalsräkning ska diskuteras. En önskan om att förstå på vilka sätt bråktal kan introduceras och behandlas samt vilket hjälp och stöd läromedel kan ge i det avseende möjliggör en avgränsning av studien. Studien inriktar sig då på att studera begreppsförståelse utifrån konceptuell kunskap för bråktal i läromedel.

1.1 Syfte och problemformulering

Min avsikt är att utifrån en läromedelsanalys, undersöka hur tal i bråkform introduceras och behandlas i läromedel. Studien analyserar vilket stöd som ges i läromedlet för begreppsförståelsen av tal i bråkform utifrån aktuell forskning. Undersökningen studerar om det är en begreppsmässig/konceptuell inläring eller procedurinriktad inläring som fokuseras i läromedlen. Vidare studeras vilka begreppsmodeller som används för att ge eleverna förståelse för tal i bråkform. Följande frågeställningar undersöks utifrån det givna syftet:

- Vilket stöd ges läraren i läromedlet då bråktal introduceras och behandlas för elevernas möjlighet till begreppsbildning?
- Vilket stöd ges eleven av läromedlet för att utveckla den begreppsliga förståelsen av begreppet bråktal?
- Är det en konceptuell/begreppsmässig eller procedurinriktad inläring som fokuseras i läromedlen?
- Vilka begreppsmodeller för bråktal presenteras i läromedlet och hur stödjer de eleverna i deras begreppsmässiga utveckling av tal i bråkform?

Undersökningen genomförs genom att studera och redogöra för aktuell forskning av barns begreppsbildning, synen på procedur och konceptuell kunskap samt hur begreppsmodeller för bråktal kan hjälpa denna process. Utifrån dessa teorier tas ett analysinstrument fram som används då läromedel och lärarhandledning granskas, för att kunna svara på de givna frågeställningarna. De läromedel som analyseras är både lärarhandledning och lärobok för elever i skolår fem.

Utifrån kursplanen i matematik anses det definierade problemområdet knytas ihop med kursplanen på bland annat följande sätt. I strävansmålen för grundskolans kursplan i matematik framgår att eleverna ska utveckla sin taluppfattning och sin förmåga att förstå och använda ”grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal” (Skolverket 2000:1).

Som mål att uppnå i slutet av skolår tre ska eleverna

- kunna uttrycka sig muntligt, skriftligt och i handling på ett begripligt sätt med hjälp av ... grundläggande matematiska begrepp (Skolverket 2000:3)
- kunna dela upp helheter i olika antal delar samt kunna beskriva, jämföra och namnge delarna som enkla bråk” (Skolverket 2000:3).

Som mål att uppnå i slutet av skolår fem ska eleverna

- ha en grundläggande taluppfattning som omfattar naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform (Skolverket 2000:3-4)

2 Teorianknytning

För att kunna avgöra hur väl läromedel stödjer lärare och elever vid introduktion och behandling av bråktalet i avseende att utveckla den begreppsliga kunskapen krävs en redogörelse av forskning i området. Följande teoriavsnitt inriktar sig på att beskriva elevers begreppsbildningsprocess utifrån olika inlärningsteorier. Därefter sker en genomgång av begreppsmodeller för bråktalet utifrån deras funktion och användningsområde i skolmatematiken. En stor del av redogörelsen för begreppsmodeller men också för procedurrell kontra konceptuell kunskap tar sin utgångspunkt i Per-Olof Bentlys (2008) forskningsstudie, *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models* samt den analysrapport han genomfört för Skolverket (2010). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007 - En jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan*. Innan det följer dock en kort beskrivning av några väsentliga begrepp vid processen för begreppsförståelse.

2.1 Begrepp, begreppsuppfattning och begreppsbildning

Först och främst vad är ett *begrepp*? Enligt Nationalencyklopedins definition är ett begrepp ”det abstrakta innehållet hos en språklig term till skillnad från dels termen själv, dels de objekt som termen betecknar eller appliceras på” (Nationalencyklopedin 2010). Begrepp kan delas upp i vetenskapliga och vardagsnära begrepp. Enligt Bentley (2008:4) är ett vetenskapligt begrepp definierat med en mer exakt definition av begreppets betydelse, medans det vardagliga begreppet är en mental representation av upplevda egenskaper hos ett objekt i omgivningen. Ett begrepp kan upplevas som abstrakt eller konkret beroende av vem som är betraktaren. *Begreppsuppfattning* preciserar Bentley (2008:4) som den mentala bilden av ett begrepp, då uppfattningen kan skilja sig från person till person. Vidare beskriver Bentley (2008:5) *begreppsbildning* som själva vägen till förståelse och uppfattning av ett begrepp.

2.2 Begreppsinlärning utifrån teorier av Piaget, Vygotsky och Marton.

Följande teorier utgår ifrån Bentlys (2008) tolkning av Piaget, Vygotsky och Martons teorier samt Arevik och Hartzells (2009) tolkning av Piaget och Vygotskys teorier om begreppsbildning.

Olika inlärningsteorier har skilda synsätt på hur inlärning går till, även om de till viss del går in i varandra. Om teorier utifrån Piaget studeras som anses tillhöra det konstruktivistiska synsättet på lärande, så blir det tydligt att hans fokus på inlärning tar sin utgångspunkt i biologiska förklaringar hos barnet. I sina experiment försökte han isolera bort sociala och kulturella faktorer som kunde påverka experimentresultaten (Arevik & Hartzell 2009:171). Utifrån Piagets teorier genomgår barn olika utvecklingsstadier, där de har olika förmåga att lära sig nya saker. Små barn skapar sig inte mentala representationer av begrepp på samma sätt som vuxna gör (Bentley 2008:8), något som även framkommer i studier av Vygotsky.

Vygotsky ses som grundaren till det social konstruktivistiska perspektivet för kunskapsbildning. Han utgår till skillnad från Piaget från att sociala och kulturella aspekter har en mycket stor påverkan på barns kunskapsbildning (Arevik 2009:171). När Piaget studerade barns begreppsutveckling försökte han se till det enskilda barnets förmågor. Vygotsky däremot antog att begreppsbyggnad till mycket stor del var beroende av sociala och kulturella aspekter som exempelvis språket (Arevik 2009:171). Enligt Vygotsky var förmågan att kategorisera begrepp en väsentlig aspekt vid begreppsbyggnad (Bentley 2008:7).

Enligt Vygotsky bör det i undervisning av begrepp både finnas en ansats att konkretisera vetenskapliga begrepp, men också via vardagliga begrepp nå högre abstraktion. När vetenskapliga begrepp introduceras är en väg att gå att studera varför begreppet tillkommit ur historisk synvinkel. Vilka behov och problem fanns som gjorde att människan skapade sig detta begrepp, är frågor att ställa sig vid undervisning (Arevik, 2009:178).

I Vygotskys teorier spelar kommunikationen och den sociala kontexten människor emellan stor roll för lärandet. Tillsammans med något som definieras som *den proximala utvecklingszonen* har det påverkan på elevers begreppsbyggnad. *Den proximala utvecklingszonen* ses som skillnaden mellan hur långt en elev kan nå själv i sin kunskapsbyggnad och hur långt eleven kan nå med hjälp av någon som kan mer. I det avseendet så spelar läraren en stor roll i undervisning och lärande för elever (Arevik 2009:173).

Utifrån teorier i fenomenologi med inriktning på variationsteori, där Ference Marton är en förgrundsgestalt, så sker inläring då ett fenomen på något sätt kan urskilja sig från mängden. Till fenomen räknas både begrepp och procedurer. Ett begrepp lärs in i relation till redan tidigare inlärd begrepp och ett nytt begrepp kan endast erfaras om det skiljer sig från tidigare inlärd begrepp. ”Detta sker då särskiljande begreppsegenskaper eller attribut urskiljs och uppfattas, vilket lättare kan ske då egenskapen, som attributet representerar varierar. På detta sätt får variationen en central roll i erfandet” (Bentley 2008a, Marton & Boot 2000 i Skolverket 2010:16).

2.3 Theory revision och redescription

Dixon och Bangert (2004) beskriver två huvudprocesser, *theory revision* och *redescription* som påverkar barns begreppsbyggnadsprocess. De två processteorierna tar olika utgångspunkt för att förklara barns begreppsbyggnad. Processteorierna utgår från två något skilda synsätt kring hur barns tänkande går till då de ställs inför en ny situation. Enligt Dixon och Bangert (2004:66) är det dock inte precis klarlagt hur begreppsbyggnadsprocessen går till. Vid *theory revision* är utgångspunkten att barn skapar sig en hypotetisk föreställning av relationerna mellan begreppen i en kontext och sedan omarbetar och förfinar denna föreställning utifrån den respons som ges tillbaka. Omarbetningen av hypotesen sker utifrån vad som uppfattas stämma in och vad som inte anses stämma in i den tidigare hypotesen (Dixon & Bangert 2004: 68). Enligt Bentley (2008:8) liknar teorin, *theory revision*, mycket Vygotskys uppfattning om barns begreppsbyggnad av vardagsbegrepp. *Theory revision* ses spela större roll vid barns begreppsbyggnad i de fall då barnet inte får möjlighet att uppleva begreppet vid frekvent upprepade tillfällen (Skolverket 2008b:12). *Redescription* är däremot en process som är mer aktiv om barnet mer frekvent får erfara det aktuella begreppet (Skolverket 2008b:12). I processen för *redescription* är det främst genom hjärnans associationssystem som förståelse för begrepp utvecklas och befästs (Dixon & Bangert 2004:67).

2.4 Procedurell och konceptuell kunskapsinläring

Som tidigare beskrivits har undervisning i olika länder skilda fokus på vilken typ av kunskap som behandlas och vilka inlärningsstrategier som används. Det görs ofta en åtskillnad mellan så kallad procedurell kunskap och konceptuell kunskap. Enligt Bentley (2008) är avgränsningen mellan de två inte knivskarp, utan ska snarare ses som två ändpunkter på en tänkt linje. Vidare förklarar han att de två påverkar varandra vad gäller kunskapsbildning och begreppsbyggande, men på olika sätt. Procedurell kunskap är inriktad på de sekvenser som finns med då exempelvis en räkneoperation i matematik ska utföras och vilka regler som styr den typen av procedurer. Inläringen sker ofta i en avgränsad kontext, där inte något tydligt samband ses med helheten av problembilden, ”den procedurella kunskapen utgörs mer av isolerade kunskapsöar utan inbördes explicita samband” (Skolverket 2010:21). Konceptuell kunskap innebär den begreppsmässiga förståelsen och förståelsen för olika principer. Samband mellan begrepp och vad principerna innebär i ett helhetsperspektiv inom ett begreppsområde fokuseras mer i det konceptuella lärandet (Bentley 2008:12). Något som skiljer en mer konceptuell inriktad undervisning gentemot en mer procedurellt inriktad undervisning är, enligt Skolverkets (2010:21) analysrapport, att en konceptuellt inriktad undervisning inte endast består av begreppsförståelse, utan också har inslag av matematiska procedurer medan den procedurella undervisningen i stort sett bara behandlar procedurer.

Följande kan sägas om den procedurella och konceptuella kunskapens påverkan på varandra, enligt Bentley (2008:12–16). Det har genom undersökningar i matematik visat sig att den konceptuella kunskapen har större påverkan på inläring av procedurell kunskap än vice versa. Det är främst i specifika situationer som procedurell kunskap genererar konceptuell kunskap. Därför, hävdar Bentley (2008:16) är det viktigt att fokusera på den konceptuella matematikundervisningen i skolan. Något som är värt att notera i det avseendet, då det tidigare framgick att svenska matematiklärare grundar stor del av sin undervisning på läroboken, är att västerländska läroböcker är procedurellt utformade. Vilket framkommer av Skolverkets analysrapport (2010:23).

De ostasiatiska länderna Kina, Japan och Taiwan har nått goda resultat i TIMSS (Skolverket 2010). Forskning har visat på att det kan vara deras utgångspunkt i en konceptuell inlärningsstrategi som är orsaken till framgång (Bl.a. Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999 i Skolverket 2010:22). Intressant i det avseendet är att få förståelse för hur en matematiklektion med fokus på konceptuell kunskap i dessa ostasiatiska länderna kan vara utformad, vilket beskrivs i analysrapporten. Det rör sig ofta om att undervisningen koncentreras kring ett specifikt problem som lyfts upp på tavlan. Eleverna får sedan komma med lösningsförslag till problemet. Problemet som lyfts upp har noggrant valts ut så att flera olika lösningsförslag kan ges. Eleverna får ta del av varandras lösningsförslag och se hur andra elever har tänkt kring problemet. Läraren presenterar lösningsförlagen efter hur avancerade de är och börjar med de enklare för att sedan övergå till de mer avancerade. De olika lösningarna diskuteras och eleverna motiverar sina lösningsstrategier. Läraren ställer frågor till eleverna vars syfte är att få dem att tänka kring problemet samt de begrepp som är relaterade till problemet (Skolverket 2010:22–23).

Något annat som framstår som intressant från analysrapporten är olika uppfattningar om elevers misstag. I analysrapporten framgår att elevmisstag i de ostasiatiska länderna ses som en väg till förståelse. Begreppsförståelse kan utvecklas genom att elevers misstag lyfts fram, istället för att man blundar för dem. Genom att diskutera misstaget gemensamt, så att också fler elever få ta del av diskussionen, blir de uppmärksamma på hur begreppet inte ska förstås,

vilket medför att begreppsuppfattningen preciseras (Stigler & Hiebert 1999 i Skolverket 2010:25). Generellt sett så lyfts inte misstagen i västerländska länders matematikundervisning upp på samma sätt. Detta kan grunda sig i en tanke om att det istället kan bidra till att fler elever missförstår begreppet, med anledning av undervisningens mer ytliga karaktär (Skolverket 2010:25).

En annan viktig aspekt som framgår av samma analysrapport är överföringen av kunskap från en kontext till en annan. Det framgår att konceptuell kunskap har betydelse för hur du kan överföra kunskap från en kontext till en annan okänd kontext. För att underlätta överföring av kunskap så ska eleverna övas i att lösa problem från olika kontexter. Den metod/procedur som användes i en specifik kontext för problemlösning, kan då modifieras för att kunna användas i en annan kontext (Skolverket 2010:24-25). Följande citat förtydligar relationen mellan denna överföring av kunskap (också kallad transfer) och begreppsbyggnad.

Om en medveten träning av transfer sker genom att uppgifter i olika kontexter eller i delvis nya kontexter löses och diskuteras, så tillägnar sig eleverna troligen meta-kognitiva procedurer eller begrepp. Detta medför att eleverna kan lösa en grupp av uppgifter, som testar ett och samma begrepp i flera olika kontexter (Skolverket 2010:27).

I nästa avsnitt redovisas delvis andra kategorier, de har i alla fall andra namn, än de procedurrella och konceptuella, som anses spela roll vid begreppsbyggnad.

2.5 Strukturella och operationella aspekter på begreppsbyggnad

Strukturella och operationella aspekter är kategoriuppdelningar som anses påverka begreppsbyggnad. De anses angränsa till den beskrivna uppdelningen av procedurrell och konceptuell kunskap. Med utgångspunkt från Sfards (1991) teorier framgår det (enligt Engström 1998:83) att förståelsen av begrepp kan utvecklas utifrån ett samspel av ett strukturellt eller ett operationellt angreppssätt (Engström 1998:83). Vidare anser Sfard (1991) (enligt Engström 1998:84) att den strukturella och operationella sidan av ett begrepp ska ses som en dualitet och inte som en dikotomi. Den operationella aspekten vid begreppsbyggnad i matematik handlar mer om att operationer utförs som medför att något förändras, som till exempelvis räkneoperationen som sker vid uträkningen av ett tal i matematik (Bergsten 1990:16). Till den strukturella aspekten av begreppsbyggnad står istället hur "element i en mängd relateras till varandra" (Bergsten, 1990:16). Strukturen kan enligt Engström ses som ett schema som i sig innehåller begrepp med inbördes relationer till varandra. (1997:80). "Genom att systematiskt arbeta med den operationella aspekten av matematiska begrepp kan så småningom en viss förtrogenhet växa fram som underlättar den strukturella begreppsförståelsen" (Bergsten 1997:141). Min tolkning av dessa aspekter, de strukturella och de operationella, är att de ligger i närheten av begreppsbyggnad utifrån den konceptuella och procedurrella synen. Där ges det dock en annan syn på vilken påverkan kategorierna har av varandra för begreppsbyggnad. Om detta är ett riktigt antagande ges ovan argument för att även behandla den procedurrella kunskapen i skolmatematiken. Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali (2001:360) påpekar också vikten av att fokusera på de båda kunskapsstyperna i skolans matematikundervisning. Enligt dem blir den konceptuella kunskapens roll för begreppsbyggnad ibland väl framträdande och den procedurrella kunskapen anses inte som lika viktig och får stå tillbaka.

2.6 Matematiska begreppsmodeller

Eftersom idén med studien bland annat är att utvärdera matematikläromedel utifrån vilka begreppsmodeller som används vid bråktal, hur de är relaterade till varandra och hur de stödjer eleverna i deras begreppsbildningsprocess, så beskrivs i följande avsnitt fem begreppsmodeller för bråktal som presenteras i en analysrapport till TIMMS 2007 (Skolverket 2010:28-32). Därifrån kommer också de presenterade figurerna nedan. Beskrivningen av dem, deras relation till varandra samt deras för- och nackdelar beskrivs utifrån Bentleys (2008:35-54) resonemang av dem. Innan presentationen av begreppsmodellerna följer dock en beskrivning av vad ett bråktal är så att det inte förblir ogjort. Ett bråktal är ett så kallat rationellt tal, det vill säga ett tal som går att skriva på formen a/b och där $b \neq 0$.

Bentley (2008:29) hävdar att forskning har visat ett behov av *begreppsmodeller* som ett stöd för elever i deras inlärningsprocess. Begreppsmodellerna underlättar förståelsen för olika matematiska områden. Begreppsmodeller är förenklade beskrivningar av matematiska begrepp för att eleven ska skapa sig en förståelse för det matematiska begreppsområdet (Bentley 2008:29).

För att kunna avgöra hur god kvaliteten av en begreppsmodell är så analyseras de utifrån tre kategorier. *Strukturell validitet*, utvärderar hur väl begreppsmodellen står sig mot den begreppsmässiga strukturen av det matematiska begreppet. *Ekologisk validitet*, utvärderar hur väl elevens tidigare erfarenheter blir representerade och utnyttjas i begreppsmodellen, det vill säga hur vardagsanknuten den upplevs vara. Den sista kategorin som begreppsmodellen utvärderas från är dess *enkelhet (simplicity)*, det vill säga hur enkel begreppsmodellen är att använda. Krävs det mycket av eleven för att kunna arbeta med den, är den i sig komplex i avseendet att den är svår att använda och förstå, eller är den allt för enkel och ger inte eleven det stöd som behövs för att skapa sig begreppsförståelse (Charles, Nason & Cooper 1999 i Bentley 2008:31)?

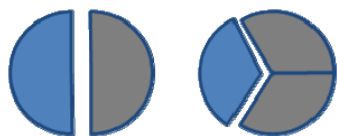
Följande fem begreppsmodellerna för bråktal kommer redovisas nedan.

- Del-helhetsmodellen
- Andelsmodellen
- Operatormodellen
- Tallinjemodellen
- Mängdjämförelsemodellen

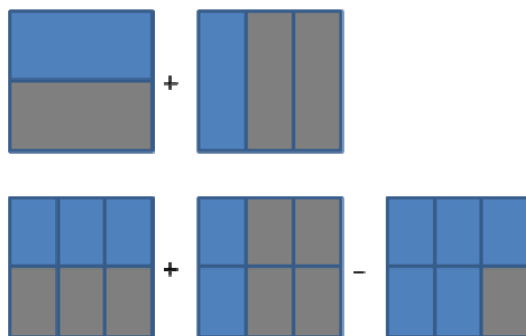
2.6.1 Del-helhetsmodellen

Denna begreppsmodell utgår från att bråktal ses som en del av en helhet. Bråktalet ses som ett tal och inte som två olika tal som ska divideras med varandra. Den här typen av modell kan i sin grafiska utformning se ut på lite olika sätt. Den kan exempelvis beskrivas med hjälp av en ritad cirkel där en del av cirkeln är fylld och kallad då ofta för cirkelmodellen eller pizzamodellen, eller som en rektangel där en viss del av den hela rektangeln är fylld och kallas då även, areamodellen, kvadratmodellen, rektangelmodellen eller chokladkaksmodellen. När modellerna beskrivs som chokladkaksmodellen och pizzamodellen anses de ha hög ekologisk validitet, eftersom de då antas ta sin utgångspunkt i elevernas erfarenhetsvärld. I figur 2.1 och 2.2 visas två utav begreppsmodellerna utifrån del-helhetsmodellen.

Figur 2.1 Pizzamodellen, $1/2+1/3$



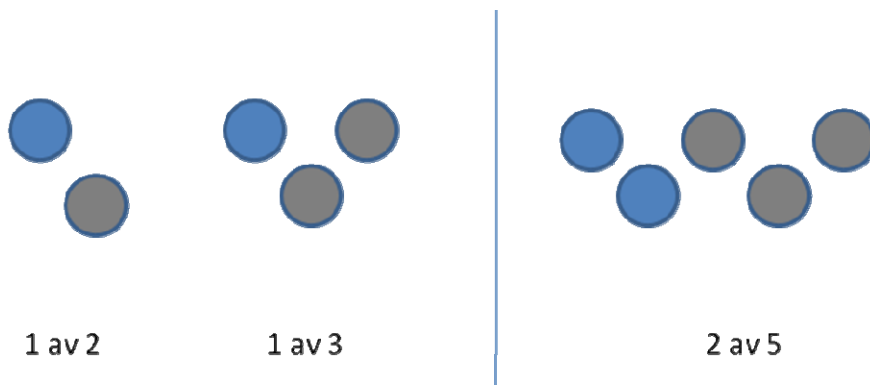
Figur 2.2 Kvadratmodellen, $1/2+1/3=5/6$



2.6.2 Andelsmodellen

Andelsmodellen utgår ifrån hur stor andelen något utgör av hela antalet, exempelvis 2 av 5. Denna begreppsmodell har sina nackdelar. Vid addition av bråktalet kan andelsmodellen ge problem. En anledning till det kan vara att även om andelen i två olika bråktalet är den samma så är inte andelen av antalet lika stor, om antalen skiljer dem åt. Detta blir dock inte visuellt synligt som i del-helhetsmodellen. Ett misstag som därmed ofta uppstår vid addition av bråktalet utifrån andelsmodellen är att talen i täljare adderas med varandra och talen i nämnaren med varandra, till exempelvis $1/2 + 2/3 = 3/5$. Se figur 2.3. En annan nackdel hos andelsmodellen är att den inte fungerar för de bråktalet där täljaren är större än ett, till exempelvis vid $9/5$. Eftersom en andel som är större än helheten själv inte går att föreställa sig. Andelsmodellen anses ha låg strukturell validitet, då den förvränger det matematiska innehållet, vilket inte gynnar den begreppsliga förståelsen av bråktalet.

Figur 2.3 Andelsmodellen, $1/2+1/3=2/5$



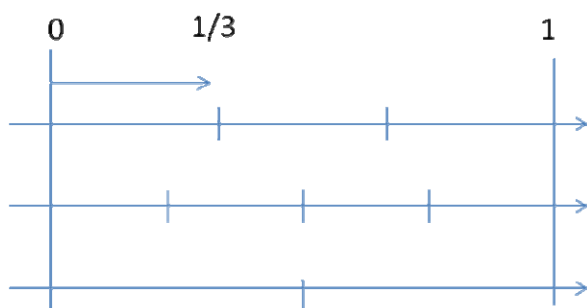
2.6.3 Operatormodellen

I operatormodellen ses bråktalet inte som en helhet utan som två tal, med olika funktion. Operatormodellen kallas ibland också för en multiplicerare-dividerare, då den används för att multiplicera ett tal i bråkform med ett heltal, exempelvis $3/5$ multiplicerat med 30. Heltalet divideras då med talet 5 och multipliceras sedan med talet 3. Proceduren ger operatormodellen ett tillvägagångssätt som kräver två steg. Först en division och sedan en multiplikation, det ger modellen en mer procedurell karaktär än en konceptuell. Modellen ger inte styrka för den strukturella validiteten då bråktalet inte ses som en helhet utan som två olika tal. Inte heller den ekologiska validiteten av modellen anses hög då den inte bygger på elevens erfarenhetsvärld gällande tidigare vardagserfarenheter. Operatormodellen har också ett smalt användningsområde.

2.6.4 Tallinjemodellen

Med tallinjemodellen illustreras bråktalen med hjälp av en punkt på en tallinje. Det som kan vara problematiskt är att då bråkalet ses som en punkt på en linje, befrämjas inte den begreppsliga förståelsen då bråktal ska adderas eller multipliceras. Att använda sig av en pil på tallinjen som motsvarar bråkalet, gör att bråkalet istället för att ses som en punkt på tallinjen kan ses som en sträcka. Se figur 2.4. Med hjälp av pilarna utmed tallinjen ges ett bättre strukturellt och begreppsligt stöd för modellen. Begreppsmodellen kan vara ett stöd i jämförelsen av storlek på bråktal, då det framgår av tallinjen hur stort bråkalet är, om flera tallinjer ritas under varandra, även då bråktalen har olika tal i nämnaren. Tallinjemodellen ger då stöd för jämförelse, samt addition och subtraktion av bråktal. Däremot är det svårt att konkretisera multiplikation av bråktal med hjälp av modellen. Det kan dock vara problematiskt att starta med begreppsmodellen vid introduktion av bråktal. Det är då bättre att starta med delhelhetsmodellen för att ta hjälp av tallinjemodellen senare.

Figur 2.4 Tallinjemodellen



2.6.5 Mängdjämförelsemodellen

I mängdjämförelsemodellen jämförs två mängder med varandra. Exempelvis kan förhållandet mellan 6 cirklar med 18 rektanglar jämföras. Se figur 2.5. Det är då inte frågan om en delmängd av den totala delmängden, utan jämförelse mellan två olika delmängder. Stödet för förståelse utifrån ett strukturellt och begreppsligt perspektiv av modellen har diskuterats utifrån olika forskningsresultat. Där det är oklart om modellen är ett stöd eller om den möjligtvis försvårar för elevens förståelse. Vissa forskare är av åsikten att modellen ska användas med försiktighet. Effektiviteten med modellen verkar oklar, men möjligt är att den hjälper vissa elever. Begreppsmodellen kan i vissa fall sammanblandas med andelsmodellen.

Figur 2.5 Mängdjämförelsemodellen med bråket sex artondelar



2.6.6 Begreppsmodellernas relation till varandra

En jämförelse mellan de olika begreppsmodellerna visar att de delvis presenterar olika syn på bråktal och vilka egenskaper de representerar i olika kontexter. Det som bland annat skiljer begreppsmodellerna åt är deras inbördes egenskaper. I delhelhetsmodellen och tallinjemodellen ses bråkalet som ett tal, medans det resonemanget inte stöds i andels-, mängdjämförelse-

och operatormodellen. Begreppsmodellerna skiljer sig också i vad som ses som det hela, det vill säga helheten i bråktalet. I del-helhetsmodellen så är helheten själva enheten för bråktalet, vilket också gäller för tallinjemodellen om den visualiseras med hjälp av sträckor. I mängdjämförelse- och andelsmodellen finns inte helheten definierad på det sättet, utan ses som separata objekt. I operatormodellen så är inte utgångspunkten att det finns någon helhet, utan bråktalet ses som ett tal som används för att dividera samt multiplicera ett annat tal. Med utgångspunkt ifrån vad som ses som delen i begreppsmodellen, så gäller för del-helhets- och linjemodellen (i det avseende sträckor visualiseras) att delen i till exempelvis bråktalet $1/7$, är en sjundedel. Mängdjämförelse- och andelsmodellen utgår från objekt och inte delar av något. Operatormodellen saknar ingående delar.

Slutsatsen av detta resonemang är att det inte är säkert att ett bråktal kan beskrivas med hjälp av olika begreppsmodeller om de inte bygger på samma antaganden gällande bråktalets egenskaper. Med avseende på vad som är del, helhet eller om bråktalet ses som ett eller två tal.

Ett hoppande mellan begreppsmodeller som inte stödjer varandra kan leda till ett mer procedurinriktat lärande än vara till hjälp för den begreppsliga förståelsen (Bentley 2008:52). Forskning har också visat att en hopblandning mellan begreppsmodellerna då dess egenskaper inte stödjer varandra, kan leda till en negativ utveckling av begreppsförståelsen (Bentley 2008:54). Enligt en kvalitetsanalys av de fem beskrivna begreppsmodellerna visar det sig att del-helhetsmodellen har minst nackdelar. De mest problematiska visar sig vara andelsmodellen och mängdjämförelsemodellen (Skolverekt 2010:43). Om mer än en begreppsmodell ska användas så bör de inte vara i konflikt med varandra gällande begreppsegenskaper. Del-helhetsmodellen kan användas som utgångspunkt vid introduktion av bråktal och sedan kompletteras med andra begreppsmodeller så länge de inte står i konflikt med varandra (Bentley 2008:51).

3 Metod

I följande kapitel beskrivs val av metod, urval och genomförande, samt framtagning av analysinstrument.

3.1 Val av metod

Utgångspunkten för det här examensarbetet är en läromedelsanalys. Därför är valet av metod på ett sätt redan bestämt, det vill säga analys av läromedel. På vilket sätt analysen ska utformas för att kunna svara på studiens syfte med tillhörande frågeställningarna måste däremot motiveras och beskrivas. Inte minst, för att vara kommunicerbar, kontrollerbar och kritiserbar men också för att studien ska kunna vara reproducerbar (Stukát 2009:123–124).

Hur ska då analysen utformas för att möta studiens syfte och frågeställningar, som täcker ett stort område? En dokumentanalys kan enligt Stukát (2009:53) se ut på olika vis, ofta genom att antingen vara en textanalys eller en innehållsanalys. Stukát framhåller att en textanalys oftast analyserar texten mer på djupet, medan en innehållsanalys är av en mer kvantitativ karaktär. För att möta syftet med min studie anser jag att min analys behöver ha inslag av båda delar.

För att studera hur läromedel stödjer lärare och elever för begreppsbyggnad av bråktalet, om det är konceptuell eller procedurrell kunskapsfokusering samt vilka begreppsmodeller som används och hur de stödjer begreppsbyggnad, behöver både lärobok och lärarhandledning studeras. Om endast läroboken studeras finns det en risk att inte rätt bild av läromedlet framkommer. Läromedelsförfattarnas grundtankar kan då utebli. I den här studien avses därför med läromedel både lärarhandledning och lärobok. För att analysera lärarhandledningar ligger fokus mer på en textanalys och för läroboken mer på en innehållsanalys. Analysen är framförallt av en djupgående karaktär för att jag ska kunna avgöra vilket stöd lärare och elever ges vid begreppsbyggnad av bråktalet. Eftersom analysen är djupgående kommer inte antalet läromedel som analyseras att vara stort. En önskan är ändå att läromedelsanalysen är av komparativ karaktär, det vill säga att den jämför läromedel med varandra, för att se om och hur de skiljer sig åt.

3.2 Urval och genomförande

Urvalet av de läromedel som analyseras utgår från ett besök hos NCMs läromedelsutställning i Göteborg. NCM är ett Nationellt Centrum för Matematikutbildning. Där framkom efter en grov uppskattning att bråktalet ofta introduceras i årskurs fyra eller fem. Fyra läromedelsföretag framstod som intressanta vad gäller läroböcker i matematik. De var förlagen Bonnier, Gleerups, Liber samt Natur och Kultur. För att avgränsa urvalet av läromedel så begränsades läromedlen till de som inriktade sig mot årskurs fem, eftersom det finns uppnåendemål i kursplanen för årskurs fem som antogs kunna hjälpa analysarbetet.

Efter besöket på NCM mejlade jag till läromedelsföretagen, Bonnier Utbildning, Gleerups, Liber samt Natur och Kultur, eftersom deras läromedel innehöll området bråktalet för årskurs fem. Jag frågade om de kunde bidra med läromedel att analysera. I mejlet informerade jag också om mitt examensarbete på C-nivå i form av en läromedelsanalys av bråktalet och bråk-

talsräkning. Se Bilaga A. Glerup gav besked om att deras policy var att inte bidra med läromedel till lärarstudenters examensarbete. Natur och Kultur gav inget svar. Däremot skickade Bonnier Utbildning och Liber läromedel att analysera. Från Bonnier Utbildning skickades materialet Matte Direkt Borgen 5b och Matteboken 5A. Från Liber läromedlet Matematikboken 5. Av dem valde jag att analysera läromedlen Matte Direkt Borgen 5b och Matteboken 5A eftersom det i de läromedlen fanns kapitel avsedda för bråktal. Då jag studerade Matematikboken 5 insåg jag att bråktal i det läromedlet behandlades under ett gemensamt kapitel med decimaltal, där tyngdpunkten låg på decimaltal. Det gjorde att jag valde bort det läromedlet då det inte ansågs jämförbart med de andra två. För att finna ett tredje läromedel att analysera besökte jag istället Göteborgs Universitets pedagogiska bibliotek. Där jag valde att analysera läromedlet Tänk och Räkna 5b med ett kapitel avsett för bråktal. De tre läromedel som ingår i analysen är alltså, Matte Direkt Borgen 5b och Matteboken 5A från förlaget Bonniers Utbildning AB samt Tänk och Räkna 5b från förlaget Glerup Utbildning AB.

Efter urvalet av läromedel var ett stort arbete i läromedelsanalysen framtagandet av ett analysinstrument. Något färdigt analysinstrument som möter undersökningens syfte har jag inte hittat. Därför har ett eget tagits fram för det ändamålet. Följande tre områden ska analysinstrumentet täcka: Stödet för att utveckla den begreppsliga förståelsen av bråktal, om det är en procedurell eller konceptuell kunskapsinläring som är i fokus, vilka begreppsmodeller som används och på vilket sätt de stödjer den begreppsmässiga kunskapsbildningen. Det analysinstrumentet som jag tagit fram bygger på teorier om hur begreppsmässig kunskap erhålls utifrån tidigare presenterade teorier under teoriansknyningskapitlet. Under nästa rubrik följer en närmre beskrivning av analysinstrumentet och analyskriterier.

3.3 Beskrivning av analysinstrument och analyskriterier

Den första delen av analysinstrumentet är av en mer kvantitativ karaktär, där antalet räkneuppgifter och deras karaktär i läromedlen beräknas. Därefter följer en mer kvalitativ djupanalys av läromedlens med avseende på begreppsbyggnad, procedurell eller konceptuell kunskapsinriktning samt begreppsmodeller. Nedan följer en redovisning av analysinstrumentet, vad som undersökts och med hjälp av vilka frågeställningar. I Bilaga B finns en mall som är framtagen för analysinstrumentet, som använts i sammanställningen av resultatet från läromedelsanalysen.

3.3.1 Kvantitativ analys

I den kvantitativa analysen har antalet uppgifter i läromedlen beräknats på olika sätt och utifrån olika kriterier. Räkneuppgifterna har uppdelats i att antingen vara konkreta eller abstrakta i sin utformning. De uppgifter som räknats som konkreta är de som är kopplade till någon bild, är vardagsanknutna, laborativa eller har hamnat under kategorin annat. Till kategorin annat har uppgifter utformade som spel eller uppgifter där eleven uppmanats att rita till sin räkneuppgift räknats. De uppgifter som inte överensstämmer med de kriterierna har räknats som abstrakta. Uppfattningen om vad som är en konkret eller en abstrakt uppgift skiljer sig åt från person till person. I detta fall har inte hänsyn tagits till det utan uppdelningen har skett enligt ovan. De uppgifter som räknats som vardagsanknutna är uppgifter som enligt egen bedömning utgår från elevernas egen vardag och erfarenhetsvärld, vilket också skiljer sig från individ till individ, men till vilket inte hänsyn tagits. Ytterligare ett kriterium på uppgifter som beräknats är andelen kommunikativa uppgifter. Till kommunikativa uppgifter har räknats uppgifter där det av läromedlet framgår att eleverna ska arbeta tillsammans eller där lärare och elever ska

arbeta tillsammans. Till de laborativa uppgifterna har räknats uppgifter där elever med hjälp av något konkret hjälpmedel ska utföra en uppgift.

3.3.2 Kvalitativ analys

Nedan följer områdena för den kvalitativa djupanalysen. Med de ingående delarna *begrepps-bildning, procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering* samt *begreppsmodeller*. De tre områdena går in i varandra eftersom också syftets frågeställningar går in i varandra. Jag har ändå valt att hålla isär *Begrepps-bildning, Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering* och *begreppsmodeller* av två skäl. Det första skälet är för att kunna svara på syftets frågeställningar under respektive fråga. Det andra skälet är att jag funnit att olika forskare har olika syn på hur begrepps-bildning går till och vilken roll den procedurella respektive konceptuella kunskapsfokuseringen har för detta. Innan frågeställningarna presenteras knyter jag an till teori i ämnet för att styrka varför jag valt just dessa frågeställningar.

3.3.2.1 Begrepps-bildning

De aspekter som framförallt har studerats för att avgöra stödet för den begreppsliga förståelsen är kommunikation, vardagsanknytning och konkretion/abstraktion. Att dessa kategorier är viktiga för begrepps-bildning grundar sig framförallt på teorier utifrån Vygotsky.

Enligt Arevik (2008:173) framgår vikten av kommunikation för att nå begreppslig förståelse utifrån Vygotskys teorier. Samtalet spelar således en viktig roll för att utveckla en begreppslig förståelse, men också lärarens roll i kommunikationen med eleven för att utnyttja *den proximala utvecklingszonen* som tidigare beskrivits. Att i undervisningen både träna på att gå från det konkreta till det abstrakta men också från det abstrakta till det konkreta framstår som tidigare beskrivits som viktigt utifrån Areviks (2008:178) tolkning av Vygotskys teorier om begrepps-bildning. Att konkretisera med hjälp av bilder, laborativa inslag samt med hjälp av vardagsanknutna uppgifter ses därför som ett sätt att hjälpa till att bygga upp den begreppsliga förståelsen.

De frågeställningar som har använts för att analysera hur läromedlet förhåller sig till begrepps-bildning är:

- Tar läromedlet upp något om vikten av begreppskunskap?
- Uppmanas elever/lärare kommunicera kring bråktal/bråkräkning?
- Framgår anledningen till varför kommunikationen är viktig?
- Är uppgifterna vardagsanknutna?
- Framgår vikten av att uppgifterna i läromedlet är vardagsanknutna?
- Konkretiseras det abstrakta?
- Framgår anledningen till konkretion?
- Abstraheras det konkreta?
- Framgår anledningen till att det abstraheras?

3.3.2.2 Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering

Skillnaden mellan procedurell kontra konceptuell kunskap ligger mycket i om det å ena sidan är fokus på hur uppgifter ska lösas eller om fokus ligger på att få en begreppslig förståelse, som tidigare beskrivits. Därför försöker frågeställningarna nedan titta på hur bråktal introduceras och behandlas. Är det genom att visa på räkneexempel för hur följande uppgifter i boken kan lösas, eller ligger fokus på att förstå innebörden av begreppet bråktal och i vilka situationer det är aktuellt att använda sig av bråktalsräkning?

Följande frågeställningar har varit underlag för att se om läromedlet inriktar sig på procedurell eller konceptuell/begreppslig inläring:

- På vilket sätt presenteras bråktal och bråktalsräkning för eleverna utifrån lärobok/lärohandledning?
- Fokuserar läromedlet på att ge en begreppsmässig eller procedurell förståelse?
- Hur är textrutor, informationsrutor och exempelrutor utformade?
- Uppmanas eleven att lösa räkneuppgifterna på samma sätt som räkneexemplet innan gjorde?

3.3.2.3 Begreppsmodeller

Frågeställningarna utgår från det presenterade avsnittet under teoriansknytning om begreppsmodeller av bråktal och hur de kan stödja eleverna i sin begreppsbyggnad. Följande frågeställningar har varit underlag för att studera begreppsmodeller:

- Vilka begreppsmodeller används?
- I vilken ordning införs begreppsmodellerna?
- Införs modellerna så de stödjer begreppsbyggnad?
- Presenteras begreppsmodellerna i olika kontexter, det vill säga underlättas transfer?
- Introduceras begreppsmodeller utan någon logisk förklaring?
- Sker någon hopblandning eller konflikt av begreppsmodellernas egenskaper?

3.4 Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet

3.4.1 Reliabilitet

Eftersom det finns olika teorier kring hur begreppsbyggnad går till, så är det svårt att utforma ett precist analysinstrument för detta syfte. Med hjälp av att se på begreppsbyggnad i matematik utifrån en skala av procedurellt till begreppsmässigt fokus så är avsikten att se vad läromedlen inriktar sig på. Inte att direkt säga att läromedlet stödjer begreppsbyggnad eller inte gör det. Analysinstrumentet kan av den anledningen att olika teorier skiljer på vad som är viktigt att fokusera för begreppsbyggnad anses som aningen trubbigt snarare än precist.

Läromedlens utformning skiljer sig åt. I läromedlen Matte Direkt Borgen 5b och Tänk och Räkna 5b så har tillgång till arbetsblad funnits i lärohandledningen. Det har det inte gjorts i lärohandledningen för Matteboken 5A, där det istället funnits i en separat kopieringsbok. Då jag inte haft tillgång till den kopieringsboken, har jag inte heller haft möjlighet att analysera de arbetsbladen. Det gör att den komparativa analysen mellan läromedlen till viss del inte ger en helt rättvis eller helt jämförbar bild. Eftersom de i två av läromedlen finns med, men inte i det tredje. De tre läromedlen skiljer sig också åt på så vis att i Matte Direkt Borgen 5b och Matteboken 5A avser inte alla räkneuppgifter alla elever. Istället sker en uppdelning efter ett gemensamt grundläggande avsnitt, beroende av resultatet på en diagnos. I Tänk och Räkna 5b finns inte den typen av uppdelning, även om det framgår att meningen inte är att alla elever ska göra alla uppgifter, beroende på deras olika förutsättningar. När antalet uppgifter har räknats har det totala antalet uppgifter räknats i läroboken oavsett hur indelningen i olika avsnitt sett ut, vilket också gör att den komparativa delen av analysen inte blir helt rättvis eller jämförbar. Något annat som skiljer läromedlen åt är att i Matte Direkt Borgen 5b och i Tänk och

Räkna 5b har bråktal och bråktalsräkning behandlats redan i läromedlen för årskurs 4. I Matteboken 5A är det första gången eleverna i läromedelsserien introduceras för bråktal.

I den kvantitativa delen av analysen presenteras bland annat det totala antalet räkneuppgifter, antalet räkneuppgifter av olika karaktär, deras förhållande till det totala antalet räkneuppgifter och antalet räkneexempel. Uppgiften att räkna räkneuppgifter av en speciell karaktär och antalet räkneuppgifter medför en viss grad av egen uppskattning och tolkning av vad som är vad. I läromedlet, Matteboken 5A, finns till exempel en kombination av räkneuppgift och räkneexempel som gör det möjligt att räkna antalet uppgifter på olika sätt. Det finns även möjlighet till felräkning, trots kontrollräkning. De räknade antalet uppgifter ska därför inte ses som ett precist antal, utan som en uppskattning av antalet uppgifter då räknandet innehållit en tolkningsaspekt. Min uppfattningen är dock att de ger en god indikation på hur olika typer av uppgifter förhåller sig till det totala antalet i läromedlet.

3.4.2 Validitet

Analysinstrumentet för läromedlet är framtaget på egen hand för att svara på studiens syfte efter studier av inläringsteorier och tidigare forskning om begreppsbyggnad. Avsikten med de frågor som är utformade för analysinstrumentet är att svara på hur läromedlet förhåller sig till begreppsbyggnad, konceptuell och procedurrell kunskapsinläring samt begreppsmodeller för bråktal. Detta är dock frågeställningar som framkommit efter min egen tolkning av vad som ses som väsentligt utifrån teorier och tidigare forskning. I det avseendet att det är min egen tolkning som ligger till grund för frågorna, så kan det ge avkall på hur väl de möter studiens syfte. Utgångspunkten är att vara objektiv i framtagning av analysinstrument och i analysen av resultat, men det finns alltid en risk för subjektivitet, då egna personliga aspekter spelar in, trots att man inte är medveten om dem. Att jag valt att utföra i mitt examensarbete ensam har betytt att ingen annan än jag analyserat resultaten av studien. Med hjälp av någon annans ögon hade kanske andra resultat än de jag belyst fokuserats eller tonats ned. Det finns en risk i att se det man vill se, som lättare kan undervikas om två stycken är med och granskar analysen.

Brister i reliabilitet och validitet kan också grunda sig på att jag felaktigt tolkat andra forskares teorier. I den här studien är mycket av bakgrundsteorin skriven på engelska, vilket jag är ovan att läsa och analysera. Det kan ha gjort min tolkning av tidigare forskning mindre skarp.

3.4.3 Generaliserbarhet

Resultaten från den här studien säger inget om hur alla andra läromedel förhåller sig till stödet för begreppsbyggnad vid bråktal och bråktalsräkning för lärare och elever. En nackdel kan i det här arbetet vara att inte fler läromedel studerats för att kunna få mer generaliserbara resultat. Arbetet skulle i så fall bli mycket mer omfattande. Jag anser dock att resultatet kan ge lärare en indikation om att de själva behöver vara medvetna om begreppsbyggnad och dess betydelse i undervisning och hur stödet kan se ut i läromedel.

3.5 Etiska överväganden

Enligt Stukát (2009:130) bör oftast undersökande studier ha ett etiskt övervägande. Det finns etiska råd framtagna att förhålla sig till av Humanistisk-samhällsvetenskapliga forskningsrådet, som tittar på följande kategorier, informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Stukát 2009:131). I min läromedelsanalys har jag inte upplevt att jag ställts inför några etiska dilemman som behöver övervägas utifrån dessa kategorier. Jag har dock varit i kontakt via mejl med läromedelsförlag där jag informerat om mitt examensar-

bete på C-nivå i lärarutbildningen och vad det syftar till, en läromedelsanalys av bråk och bråktalsräkning (se mejlet i Bilaga A). Att jag i mejlet berättade och informerade om mitt syfte med arbetet kan ses i förhållande till informationskravet. I övrigt anser jag dock att mina etiska övervägande snarast handlar om etiska råd från APA-manualen. Det första, om att inte stjäla eller plagiera ”andras resultat eller idéer och presentera dessa som det vore ens egna” (Stukat 2009:133). Att skriva ett examensarbete kräver att jag sätter mig in i teorier från andra forskare. Att sedan presentera dessa på ett intressant sätt som engagerar läsaren har upplevts som svårt, men det är viktigt att inte ge avkall på att det i texten framgår vad som är mina egna tankar och vad som är andras tankar. Det andra etiska rådet utifrån APA-manualen behandlar hur resultat från studien redovisas. Att till exempelvis inte bortse eller förvränga resultat så att det passar den egna undersökningen (Stukat 2009:133). Det är ett råd som jag också har följt i min studie.

4 Resultat och Analys

I följande avsnitt analyseras tre läromedel med avseende på lärarhandledning och lärobok. De är *Matte Direkt Borgen 5b*, *Matteboken 5A* och *Tänk och räkna 5b*. Varje läromedel presenteras först kort för att ge bakgrundsinformation till läsaren. Därefter presenteras det kvantitativa resultatet av läromedlet i tabellform. I tabellen framgår antalet räkneuppgifter i lärobok och lärarhandledning och hur de är uppdelade i olika kriterier som kommunikativa, konkreta och abstrakta. Därefter redovisas resultaten från den kvalitativa analysen av lärarhandledning och lärobok, med stöd ifrån den kvantitativa tabellen. Referenserna i texten till läromedlen ges med hjälp av sidhänvisning, dels för att underlätta för läsaren och på grund av att läromedlen behandlas var för sig. Om det är lärarhandledning som avses och det inte framgår av texten görs det med förkortningen lh i anslutning till sidhänvisningen. Om det är läroboken som refereras görs det med förkortningen lb i anslutning till sidhänvisningen, om det inte framgår på annat sätt. I de fall citat från läromedlen används, refereras till namnet på läromedlet, istället för till författaren, för att tydligare visa vilket läromedel som avses. Avslutningsvis görs en komparativ analys av de tre läromedlen.

4.1 Kort presentation: Matte Direkt Borgen 5b

Författare: Pernilla Andersson & Margareta Picetti

Förlag: Bonniers Utbildning

Tryckår: 2005

Läromedlet ingår i serien MatteDirekt avsedd för skolår 4-9. I läromedlet analyseras lärarhandledning och lärobok. I lärarhandledningen studeras de inledande gemensamma instruktionerna samt kapitlet 7, *Bråk*. I läroboken analyseras kapitel 7, *Bråk*. Diagnoser som ingår i läromedlet har inte analyserats.

Det är inte första gången eleverna introduceras för bråktal. Första gången var i Matte Direkt Borgen 4b. I det läromedlet presenterades eleverna för bråktal som en eller flera delar av en helhet.

Nedan följer en kort presentation av upplägget i läroboken. Kapitlet presenteras med en inledande bild utifrån kapitlets tema, *böcker*, som ska stimulera till diskussion och kommunikation av bråk. Frågor att diskutera finns i anslutning till bilden. En textruta där målen som ska ha uppnåtts när kapitlet är avslutat presenteras. De är följande:

- Läs och skriva bråk
- Räkna ut en viss del av ett antal t.ex. en tredjedel av 18
- Jämföra och storleksordna bråk
- Skriva bråk med tiondelar eller hundradelar som decimaltal (s 36 lb)

Därefter följer ett gemensamt avsnitt, *borggården*, som alla elever gör, med huvudmoment i grundkursen. Efter det följer en *diagnos*, som vägleder om eleverna i nästa avsnitt övergår på avsnittet *tornet*, avsett för de flesta elever, ”där de får fördjupa och vidga sina matematiska kunskaper inom kapitlets moment” (Matte Direkt Borgen 5b lh 2005:5). Övriga elever, som visat på svårigheter vid diagnosen, arbetar med avsnittet *rustkammaren*. Där fokuseras det

mest grundläggande i kapitlet med enkla förklaringar (s 5 lh). Kapitlet avslutas med en *sammanfattning* av de delar som tagits upp i läroboken.

4.2 Kvantitativ resultatredovisning: Matte Direkt Borgen 5b

Matte Direkt Borgen 5b	Lärobok		Lärrarhandledning		Totalt (lärobok + lärrarhandledning)	
	Antal	Procent	Antal	Procent	Antal	Procent
Kommunikativa räkneuppgifter	3	3 %	3	11 %	6	4 %
Konkreta räkneuppgifter	71	66 %	21	75 %	92	68 %
• Vardagsanknuten	16	15 %	0	0 %	16	12 %
• Bild	53	49 %	19	68 %	72	53 %
• Laborativ	2	2 %	0	0 %	2	1 %
• Annat (spel)	0	0 %	2	7 %	2	1 %
Abstrakta räkneuppgifter	37	34 %	7	25 %	44	32 %
Totalt antal räkneuppgifter	108		28		136	

4.3 Kvalitativ resultat- och analysredovisning: Matte Direkt Borgen 5b

4.3.1 Begreppsbyggnad

4.3.1.1 Begreppskunskap och kommunikation

Ett av kriterierna för att studera om läromedlet stödjer begreppsbyggnad är att se hur det förhåller sig till kommunikation mellan lärare och elever. Det framgår inte av lärrarhandledningen att den begreppsliga förståelsen är av vikt vid matematikinläring. Samtalets roll ses dock som central i lärrarhandledningen. Samtalet ger läraren förståelse för elevens kunskapsnivå, men är även viktig då eleverna lär av varandra (s 4 lh). Om eleverna genom kommunikation synliggörs för varandras tankar och lösningsförslag, så hjälper det den enskilda eleven vid inläring (s 4 lh). Diskussionsmöjligheter utifrån lärrarhandledningen ges med hjälp av tre stycken kluringar som finns i separata arbetsblad och genom den inledande kapitelbilden. Vid några tillfällen uppmanas läraren att diskutera uppgifter med eleverna. Det gäller vid uppgifter som kan upplevas som svåra för eleverna, vid introduktionen av bråkplank (ett hjälpmedel/begreppsmodell för att kunna jämföra storleken på olika bråk) samt vid diskussion av lösningarna till uppgifterna *arbeta tillsammans* (s 36 lh).

När kapitlet om bråk studeras i läroboken så ges kommunikationsuppgifter inte stort utrymme. Det är endast i kapitlets introduktion med hjälp av en samtalsbild samt vid tre *arbeta tillsammans* uppgifter, då eleverna arbetar två och två som samtalet står i fokus. Sammanfattningsvis är det mycket upp till läraren att se till att det matematiska samtalet får utrymme i undervisningen. Uppmaningar finns i lärrarhandledning men det är inte många uppgifter i läroboken som uppmuntrar till kommunikation. De utgör endast 3 % av räkneuppgifterna.

4.3.1.2 Vardagsanknytning

I studien är det andra kriteriet för att studera hur läromedlet stödjer den begreppsliga förståelsen huruvida uppgifterna i läroboken är vardagsanknutna, att det så att säga tar sin utgångspunkt i elevernas erfarenhetsvärld. Det är inte enkelt att vara objektiv i en sådan bedömning. De uppgifter som räknats som vardagsanknutna är uppgifter som enligt egen bedömning utgår från elevernas egen vardag och erfarenhetsvärld, vilket skiljer sig från individ till individ. Det framgår av lärarhandledningen att intensionen är att uppgifterna i läroboken är vardagsanknutna. Anledningen till varför det är viktigt med ett vardagsanknutet material framgår inte. Uppskattningsvis så är 15 % av räkneuppgifterna i läroboken vardagsanknutna, 0 % i lärarhandledningen, vilket totalt ger 12 % vardagsanknutna uppgifter i läromedlet.

4.3.1.3 Konkretion och abstraktion

Det tredje kriteriet för att studera stödet för begreppsbildning utifrån läromedlet är konkretions- och abstraktionsaspekter. Anledningen till att konkretisera det som eleverna kan uppleva som abstrakt kring bråktal och bråktalsräkning är inte tydlig utifrån lärarhandledningen. Däremot framkommer det på flera ställen hur eleven kan göra för att konkretisera det abstrakta. Läraren uppmanas berätta för elever som har svårt med uppgifter att rita en bild i sina räknehäften (s 38 lh). Ett annat förslag är att eleverna kan omplacera de markerade delarna i en figur, för att lättare se hur stor del som är målad (s 38 lh). En tredje uppmaning till läraren för att konkretisera det abstrakta för eleverna är att upplysa om att ta hjälp av bråkplanket ifall de upplever uppgifterna att jämföra storleken på bråktal som svår. ”Avsikten med uppslaget är att eleverna ska få arbeta konkret med bråks storlek och därigenom få en god taluppfattning av bråk” (Matte Direkt Borgen 5b lh 2005:36).

I läroboken är det med hjälp av bilder, uppgifter av laborativ karaktär och vardagsanknutna uppgifter som det abstrakta görs konkret. 66 % av räkneuppgifterna i läroboken uppskattas vara av konkret karaktär. 34 % av räkneuppgifterna anses vara av abstrakt karaktär. Det framgår inte av lärarhandledningen, anledningen till att abstrahera det konkreta. Det finns dock uppgifter där eleven får öva sig på att abstrahera något konkret.

4.3.2 Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering

Det är inte helt enkelt att avgöra om det är en procedurell eller konceptuell kunskapsinläring som står i fokus i läromedlet. Det är inte heller meningen att placera det i något bestämt fack. Det som kan sägas är dock följande.

Utifrån lärarhandledningen ska samtalen i undervisningen beröra moment och räknestrategier. Eleverna ska träna på färdigheter och använda olika lösningsmetoder (s 4 lh). ”Instruktionerna är enkla och tydliga och direkt kopplade till de uppgifter som följer. Detta underlättar elevernas självständiga arbete och får dem att känna att de lyckas” (Matte Direkt Borgen 5b lh 2005:4). Vidare ska eleverna ”fördjupa och vidga sina matematiska kunskaper inom kapitlets moment” (Matte Direkt Borgen 5b lh 2005:5). I kapitlets grundkursdel finns nya *moment* presenteras i tonade rutor med grön ram. Vilket ska underlätta för eleverna att lösa de efterkommande uppgifterna (s 5 lh). Uppskattningsvis kan 44 % av räkneuppgifterna lösas med hjälp av de momentrutorna. *Moment* framstår som ett viktigt ord i lärarhandledningen. Ett moment kan ses som något avgränsat, en avgränsad del som ska utföras, vilket för tankarna till ett sekvensriktat tänkandet som är tydligt för den procedurella kunskapsinriktningen. Andra uttryck som används som stödjer ett procedurellt tänkande är *räknestrategier*, *använda olika lösningsmetoder* och *träna färdigheter*.

Lärohandledning betonar, som tidigare nämnts, vikten av kommunikation.

Det gäller framförallt vid introduktionen av kapitlet, i samband med den inledande bilden och vid tre *arbets tillsammans*-uppgifter, vilket anses ge stöd för den konceptuella inläringen. Det anses dock inte, som tidigare nämnts, ske vid totalt många tillfällen i läromedlet.

Då läroboken studeras överensstämmer bilden av att det är få tillfällen som ges för kommunikativa uppgifter. Det är som tidigare nämnts, med hjälp av den inledande kapitelbilden och i totalt tre *arbets tillsammans*-uppgifter, som det sker. Ett stort ansvar ligger på läraren att lyfta upp bråktal och bråktalsräkning till diskussion i klassen för att bygga upp en begreppslig förståelse. Det är mer tydligt i läroboken att det med de beskrivna 13 momentrutorna går att lösa de efterkommande uppgifterna. 44 % av räkneuppgifterna anses kunna lösas på det sättet. Andelen rena räkneexempel i förhållande till antalet räkneuppgifter i läroboken uppskattas till 3 %. På det hela taget så är slutsatsen att läromedlet tenderar att vara mer procedurellt inriktad på bråktal än konceptuellt/begreppsmässigt.

4.3.3 Begreppsmodeller

De begreppsmodeller som läromedlet använder sig av för bråktal är *del-helhetmodellen*, *andelsmodellen* och *bråkplanket* i presenterad ordning. Till viss del stödjer de begreppsbyggnad utifrån Benleys (2008:49-54) resonemang. Utgångspunkten i läromedlet är att förstå bråktal utifrån begreppsmodellen *del-helhetsmodellen*. Den begreppsmodell som visade sig ha minst nackdelar enligt skolverkets kvalitetsanalys (Skolverket 2010:43). Sedan används också *andelsmodellen* som visat sig vara den med minst fördelar (Skolverket, 2010:43). Efter det introduceras *bråkplanket* som kan jämföras med begreppsmodellen, *tallinjemodellen*. Dess begreppsegenskaper överensstämmer med *del-helhetsmodellen* (Bentley 2008:48–54). På grund av lärobokens kapiteluppdelning, så återkommer begreppsmodellerna i den beskrivna ordningen ytterligare en gång. Möjligtvis försvårar upprepningen av de olika begreppsmodellerna förståelsen för begreppsbyggnad. En annan idé är utifrån Bentleys (2008:52) resonemang om att ett hoppande mellan begreppsmodeller kan leda till ett mer procedurinriktat lärande och inte vara till hjälp för den begreppsliga förståelsen, att *del-helhetsmodellen* skulle följas av *bråkplanket* och inte av *andelsmodellen* för att hålla ihop begreppsegenskaperna bättre.

Vid ett tillfälle i läroboken sker en blandning av två begreppsegenskaper i samma momentruta (s 55). Då är utgångspunkten att se bråktalet som ett tal, en helhet, utifrån en bild (*del-helhetsmodellen*) till att se bråktalet som två tal, utifrån *andelsmodellen*. I lärohandledningen står det som förklarande text till momentrutorna att elever ”som fortfarande är osäkra på att tolka bilder av bråk och att skriva bråk kan ha hjälp av att tänka” 1 av 7 delar är blå (Matte Direkt Borgen 5b 2005:55). Då utnyttjas begreppsegenskaper från *andelsmodellen* för att förklara *del-helhetsmodellens* begreppsegenskaper. Denna blandning av begreppsegenskaper som inte stödjer varandra kan som tidigare beskrivits leda till ett mer procedurinriktat lärande än vara till hjälp för den begreppsliga förståelsen (Bentley 2008:52). Det kan dessutom istället leda till en negativ utveckling av begreppsförståelsen (Bentley 2008:54).

4.4 Kort presentation: Matteboken 5A

Författare: Birgitta Rockström

Förlag: Bonniers Utbildning

Tryckår: 2004

Läromedlet ingår i serien Matteboken avsedd för skolår 1-6. I läromedlet analyseras lärarhandledning och lärobok. I lärarhandledningen studeras de inledande gemensamma instruktionerna (s 6-12), kapitlet 4, *Tal i bråkform* (s 51-61) och *Tänk-övningar* (s 116). I läroboken analyseras kapitel 4, *Tal i bråkform* (s 89) och i kapitel 5 På egen hand, avsnittet *Tal i bråkform* (s 124-125). I läroboken har inte diagnosen (s 107) och kontrolluppgifter (s 115) analyserats. I lärarhandledning och lärobok finns hänvisningar till arbetsblad som återfinns i en bok med kopieringsunderlag, dessa har inte analyserats då jag inte haft tillgång till dem.

I lärarhandledningen framgår på vilka sätt bråktal kommer behandlas i kapitlet (s 51 lh):

- Bråk introduceras som delar av en hel och som delar av ett antal.
- Räknehändelser som leder till addition, subtraktion och multiplikation av bråk med lika nämnare behandlas.
- Förenklingar av bråk med två faktorer i täljaren.
- Förlängning av bråk tas upp – först geometriskt och sedan som multiplikation av täljare och nämnare med samma tal.

4.5 Kvantitativ resultatredovisning: Matteboken 5A

Matteboken 5A	Lärobok		Lärarhandledning*		Totalt (lärobok + lärarhandledning)	
	Antal	Procent	Antal	Procent	Antal	Procent
Kommunikativa räkneuppgifter	84	52 %	3	100 %	87	52 %
Konkreta räkneuppgifter	99	61 %	1	33 %	100	60 %
• Vardagsanknuten	65	40 %	1	33 %	66	40 %
• Bild	37	23 %	0	0 %	37	22 %
• Laborativ	5	3 %	0	0 %	5	3 %
• Annat (rita)	5	3 %	0	0 %	5	3 %
Abstrakta räkneuppgifter	64	39 %	2	67 %	66	40 %
Totalt antal räkneuppgifter	163		3		166	

*arbetsblad inte medräknat

4.6 Kvalitativ resultat- och analysredovisning: Matteboken 5A

4.6.1 Begreppsbyggnad

Läromedlets inriktning på begreppsbyggnad studeras utifrån om vikten av begreppskunskap fokuseras, kommunikationens roll, om uppgifterna är vardagsanknutna, konkreta och/eller abstrakta. I den första delen av analysen studeras om vikten av begreppskunskap och kommunikation

framkommer i läromedlet. Efter det analyseras huruvida uppgifterna är vardagsanknutna, konkreta och/eller abstrakta.

4.6.1.1 Begreppskunskap och kommunikation

Utifrån lärarhandledningen framstår begreppskunskap som viktig. På flera ställen lyfts vikten av begreppsförståelse upp. I början av den, för alla kapitel gemensamma delen, av lärarhandledningen framgår bland annat, att man genom att öva på att formulera sina tankar i ord också övar upp begreppsförståelsen. ”Ju bättre man förstår ett begrepp, i desto fler sammanhang kan man använda det” (Matteboken 5A lh 2004:10). Lärarens roll för begreppsförståelse ses som väsentlig, då eleven kan få förståelse för begrepp i samtal med läraren (s 11 lh). Eleverna ges möjlighet till att ge förslag och redovisa tankegångar kring hur problem kan lösas (s 11 lh).”I samtal med läraren kan eleven utifrån sina förkunskaper lära sig hur man kan tänka, hur en regel bildas eller ett begrepp ska förstås” (Matteboken 5A lh 2004:11). Det framgår också att flera uppgifter görs med enbart muntligt, vilket ses som ett led i tankar kring vikten av begreppsförståelse och kommunikation (s 11). I kapitel 4, Tal i bråkforms lärarhandledning lyfts följande tre citat upp som anses stå för vikten av begreppsförståelse, begreppsbyggnad och kommunikation:

Stor vikt läggs vid muntliga resonemang, elevförklaringar och redovisningar. Detta ger eleven möjligheter att göra egna upptäckter och att använda ett matematiskt riktigt språk, både muntligt och skriftligt (Matteboken 5A lh 2004:6).

De muntliga resonemangen är viktiga för att ge eleverna förståelse för de grundläggande bråkbegreppen. När eleven ger ord åt sina tankar blir ordens innebörder klarare och bättre befäst än om eleven håller sina ibland oklara tankar i huvudet (Matteboken 5A lh 2004:51).

Med hjälp av laborativt arbete, bilder och muntligt resonemang får eleverna förståelse för de grundläggande bråkbegreppen. Det är mycket viktigt att de får använda sitt talspråk för att befästa vad uttryck som ”en hel”, ”del av”, ”en fjärdedel av” osv. betyder. (Matteboken 5A lh 2004:53).

I lärarhandledningen finns tre stycken uppgifter i form av *Tänk-övningar* (s 116) som kan tas upp under arbetets gång med läroboken. Uppgifterna manar till kommunikation. Det är meningen att de ska inbjuda till tankar, upptäckter och resonemang om olika lösningar i helklass eller grupp (s 52 lh). I den tredje *Tänk-övningen* (s 116 lh) ska eleverna beskriva olika konkreta situationer som innehåller uttrycken $1/2$, $1/4$, $1/3$ och så vidare och sedan resonera kring hur uttrycket kan användas i relation till det hela, som till exempelvis en timme, ett glasspaket, ett klassrum. Vilket ses som en uppgift för att stimulera kommunikation och begreppsförståelse ”del av helhet”. Inriktningen i lärarhandledningen med fokuserad på de muntliga och kommunikativa aspekterna har redan delvis framkommit. I följande avsnitt studeras hur detta efterlevs i läroboken.

Kapitel 4, *Tal i bråkform* i lärobok inleds med en samtalsbild. Bilden föreställer en affär/kiosk där olika erbjudanden framgår (s 88). Bilden möjliggör diskussion av bråktal utifrån del av helhet och del av antal. I lärarhandledningen ges också förslag till hur man kan arbeta med samtalsbilden (s 52). I läroboken följer sedan avsnittet med *gemensamt arbete* där 52 % av uppgifterna uppskattas ha kommunikativ karaktär. I avsnittet med *A-uppgifter* (för elever som visat sig ha problem vid diagnos) framkommer av lärarhandledningen att ”De muntliga reso-

nemangen är viktiga för eleven, som på så sätt kan utveckla både sitt tänkande och språk” (Matteboken 5A lh 2004:59). Trots att uppgifterna är framtagna för att kunna göras enskilt så uppmanas läraren att göra dem tillsammans med eleverna. I övrigt är det vidare med hjälp av fyra gula textutor som eleverna uppmanas att förklara hur de tänker i räkneuppgifterna (s 95, 98, 101 lb), i uppgiften *kluringen* (s 115) och *gruppuppgiften* (s 117) som läroboken uppmanar till kommunikation. Sammantaget är slutsatsen att läromedlet lägger ett stort fokus på vikten av begreppsförståelse och kommunikation. Något som framgår både i lärarhandledning och i lärobok.

4.6.1.2 Vardagsanknytning

I lärarhandledningen framgår inte anledningen till att matematikundervisningen ska vara vardagsanknuten. Det finns dock i inledningen av kapitlet Tal i bråkform i lärarhandledningen en historisk anknytning till varifrån ordet bråk härstammar (s 51). Vilket kan ses som ett försök att ge en förståelse och vardagsanknytning till bråket och dess ursprung. Eleverna får också som tidigare nämnts berätta i vilka situationer de träffat på tal i bråkform. I läroboken uppskattas 40 % av uppgifter som vardagsanknutna. I lärarhandledningen framgår att eleverna kan hitta på räknehändelser till uppgifterna 473-478, vilket gör att eleverna kan knyta an till sina egna vardagsupplevelser (s 54-55 lh). De räknehändelser som eleverna själva tänker ut och skriver ned befäster deras förståelse för skrivsättet. Räknehändelserna skrivs också för att knyta an det abstrakta skriftspråket till det konkreta (s 54-55 lh).

4.6.1.3 Konkretion och abstraktion

Det tredje kriteriet för att studera stödet för begreppsbyggnad utifrån läromedlet är konkretions- och abstraktionsaspekter. Alltså både om läromedlet fokuserar på att konkretisera det abstrakta och omvänt abstrahera det konkreta. I lärarhandledningen framgår vikten av att gå från det konkreta till det abstrakta, vilket följande citat visar.

Genom att knyta begreppen till konkreta föremål, bilder eller händelser och genom att ge uppgifter som leder till undersökningar, resonemang och redovisningar, kan eleven få hjälp med att överföra den konkreta upplevelsen till det abstrakta symbolspråket (Matteboken 5A lh 2004:8).

Vidare framhåller lärarhandledningen ”att det abstrakta matematiska symbolspråket kan övas upp genom den konkreta förståelsen” (Matteboken 5A lh 2004:51). Det framgår också att laborativt arbete och bilder hjälper eleverna att få förståelse för de grundläggande bråkbegreppen (s 53). Exempel ges även i lärarhandledningen på hur matematiken kan konkretiseras. Till exempel kan det abstrakta i bråktal konkretiseras genom att visa hur ett äpple delas i hälften, i fyra och eventuellt åtta delar. För att sedan fråga eleverna vad delarna kallas (s 52). I exemplet visas hur något konkret, en uppdelning av ett äpple i lika stora delar kan ges en abstrakt innebörd i form av bråktal. Andra exempel är att konkretisera genom att laborativt vika piprensare eller pappersremсор eller genom att rita en bild av en chokladkaka på tavlan och diskutera bråktalsbegrepp (s 52-53).

I läroboken uppskattas 61 % av uppgifter att vara av konkret karaktär. Del och delar av en hel visualiseras till exempel med hjälp av bilder (s 89-94 lb). Att det finns olika namn för samma tal i bråkform (s 104 lb) ska upptäckas genom laborativa övningar (s 58 lh). Följande citat säger också något om vikten av konkretisering för att förstå det abstrakta:

Regeln om förlängning av bråk är praktisk och mycket användbar i den skriftliga huvudräkningen, men eleverna måste först förstå hur regeln har bildats. Om eleverna utan den konkreta förståelsen lär sig utantill att täljaren och nämnaren ska multipliceras med samma tal, kan regeln glömmas lika fort som den inlärts... Först när eleverna förstått tanken hur man kan hitta ett annat namn för bråket i en geometrisk figur och själva upptäckt sambandet mellan täljare och nämnare, kan regeln för hur man förlänger bråk införas (Matteboken 5A lh 2004:58).

Ovanstående redovisning visar med tydlighet att läromedlet anser det viktigt att konkretisera det abstrakta för eleverna. Hur ställer sig då läromedlet till att abstrahera det konkreta? Det framgår att det är lika viktigt att eleven kan översätta en konkret räknehändelse till det abstrakta skriftspråket som det är ”att eleven kan översätta det abstrakta skriftspråket till en konkret händelse” (Matteboken 5A lh 2004:56). Eleverna får till exempelvis i uppgift (492) hitta på en räknehändelse till den abstrakta uppgiften $3 \cdot 2/10 = 6/10$ (s 98 lb). Fler uppgifter finns utformade för att gå från det konkreta till det abstrakta. I uppgift 451 (s 90 lb) får eleverna när de har den konkreta förståelsen av begreppen, tränas i att översätta orden till matematiska symboler som ses som abstrakta (s 53 lh). I en *C-uppgift* (s 116 lb, uppgift 587) (avsedda för de snabba eleverna) så övas att gå från abstrakta textuppgifter till något konkret genom att rita en bild. I läroboken uppskattas att 39 % av uppgifterna är av abstrakt karaktär. Slutsatsen är att det i läromedlet även framgår att det är viktigt att öva på att abstrahera det konkreta.

4.6.2 Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering

Under rubriken begreppsbyggnad har redan den konceptuella fokuseringen i läromedlet analyserats genom läromedlets fokus på begreppsförståelse och begreppsbyggnad. Det kommer inte lyftas upp igen under den här rubriken. Istället redovisas här vad som stödjer en procedurell kunskapsbyggnad samt eventuellt vad som stödjer den konceptuella om det inte tidigare framkommit.

Vid ett par tillfällen finns begreppet *moment* med i lärarhandledningen som kan tyda på en procedurell kunskapsfokusering. I det första fallet handlar det om att genom den inledande samtalsbildningen föra ett resonemang kring det nya momentet (s 7 lh). I det andra fallet beskrivs hur arbetssättet med de *gemensamma uppgifterna* avser att hålla gruppen samlad när nya moment tas upp (s 11 lh). Detta ses inte som ett tecken på att vara mer procedurellt än konceptuellt inriktat tänkande, då fokus också ligger på det kommunikativa planet. Följande citat visar också på både ett procedurellt och konceptuellt tänkande. ”Exempel ges på hur man teoretiskt, metodiskt och konkret kan förklara nya begrepp och utföra beräkningar” (Matteboken 5A lh 2004:7), medans nästa citat mer talar för ett procedurellt utförande. ”I varje kapitels inledningskedje görs skriftlig redovisning gemensamt för att ge eleverna ett mönster att följa i det fortsatta arbetet” (Matteboken 5A lh 2004:6). Att ge eleverna ett mönster att följa ses som en aspekt utifrån ett procedurellt tänkande. Det är också något som styrks då läroboken studeras. Uppskattningsvis 10 % av räkneuppgifter är möjliga att lösa genom att följa den procedur som visas i räkneexemplet innan. Vid ett tillfälle uppmanas också eleven att lösa uppgiften som i exemplet innan (s 102 lb). Vilket kan ses som ett tecken på procedurellt fokus. De uppgifter detta gäller för, förutom en, ingår dock i det *gemensamma arbetet* där kommunikationsroll är central. I läroboken uppskattas andelen rena räkneexempel i förhållande till antalet räkneuppgifter vara 6 %.

Det framgår vid två tillfällen att läraren ska undvika lotsning då eleven behöver hjälp. Det är samtalet och begreppsförståelsen som ska stå i fokus (s 58–59 lh), vilket tyder på ett konceptuellt fokus. Följande citat visar också på konceptuell kunskapsfokusering.

Läraren kan leda eleven i rätt riktning genom att skapa situationer där eleven ställer frågorna, där resonemang och förklaringar är naturliga inslag och där eleven får impulser som utvecklar det matematiska tänkandet. Läraren gör det inte genom att anvisa mekaniska metoder som algoritmräkning eller andra regler, om inte förståelsen varför man använder dessa finns först. (Matteboken 5A lh 2004:11).

Något som slutligen förefaller intressant och som också styrker synen av att läromedlet har ett konceptuell fokus är hur tankegångar i lärarhandledningen liknar den beskrivna synen på elevmisstag i de ostasiatiska länderna. I lärarhandledningen framgår det att läraren kan utgå från felaktiga eller inte helt utvecklingsbara resonemang. Eleverna får då upptäcka och förklara varför resonemangen inte stämmer och istället komma med egna lösningsförslag och tankegångar, vilket ska leda till att eleverna ska förstå de matematiska sammanhangen (s 11 lh). Att eleverna i *gruppuppgiften* även får pröva sig fram på olika sätt och redovisa hur de kommit fram till sina svar är också något som liknar det beskrivna ostasiatiska arbetssätt med matematiska problem (s 117 lh).

I läromedlet finns alltså tecken på både en procedurell och konceptuell kunskapsfokusering, men med tonvikt på det konceptuella i lärarhandledningen och de kommunikativa uppgifterna i läroboken.

4.6.3 Begreppsmodeller

De begreppsmodeller som förståelsen för bråkbegreppen utgår ifrån i läromedlet är *del-helhetsmodellen*, *andelsmodellen* och *operatormodellen* i presenterad ordning. Begreppsmodellerna framstår dock inte som tydligt beskrivna i läromedlet för att ha som stöd för begreppsförståelsen av bråktal. I lärarhandledningen beskrivs bråkbegreppet som ”del av hel” eller ”del av antal” (s 51). I läroboken presenteras eleverna för bråktal genom rubrikerna, Del av en hel, Delar av en hel, Hur stor del? och Hur många? (s 89, 93, 99, 101 lb). Det finns inte någon tydlig distinktion i läroboken om de olika sätten att se på bråktal eller deras begreppsegenskaper, utan det är utifrån rubrikerna som de två begreppsmodellerna framgår.

I läroboken är först utgångspunkten för bråktal *del-helhetsmodellen* genom rubrikerna: Del av hel och Delar av en hel (s 89 & 93). Efter det är det *andelsmodellens* begreppsegenskaper som är i fokus (s 99-103), genom rubriken: *Hur stor del?* (s 99). Under rubriken *Hur många?* (s 101) är utgångspunkten både *andelsmodellen* då uppgifterna ofta behandlar del av antal och *operatormodellen*, då bråktalet används som en operator i räkneexemplen, där nämnaren i bråktalet används för att dividera ett heltal och täljaren används för att multiplicera heltalet i två steg. *Operatormodellen* har tidigare beskrivits som en begreppsmodell av procedurell karaktär. Efter det återkommer bråktal utifrån de olika begreppsegenskaperna i de följande avsnitten för kapitlet om vart annat. *Del-helhetsmodellen* beskrivs som den med minst nackdelar och *andelsmodellen* som en av de med flest nackdelar (Skolverket 2010:43). De två modellerna samverkar inte väl tillsammans. Det vill säga de ska inte användas tillsammans då de inte stödjer samma begreppsegenskap. Det görs heller inte i läromedlet. Det som möjligen kan störa elevernas begreppsbyggnad är hur de återkommer om vartannat i uppgifterna om eleverna inte är medvetna om deras olikheter.

En fråga som uppkommer då läromedlet studeras är om eleverna har tillräckligt stöd av begreppsmodellerna då de ska storleksordna bråktal. De presenteras inte för någon modell enligt den beskrivna *tallinjemodellen*. De introduceras dock för förlängning av bråktal som kan användas vid jämförelse och storleksordning av bråktal. Det är dock viktigt att eleverna har förståelse för varför tal kan förlängas och vad regeln grundar sig på, vilket framgår av lärarhandledningen. Det är först när eleverna kan hitta ett annat namn för bråket i en geometrisk figur och själva upptäckt sambandet mellan täljare och nämnare, som regeln för hur man förlänger bråk kan införas (s 58 lh).

4.7 Kort presentation: Tänk och Räkna 5b

Författare: Lisen Häggblom

Förlag: Gleerups

Tryckår: 2008

Läromedlet ingår i serien Tänk och Räkna som utvecklade för förskoleklass till skolår 6. I läromedlet analyseras lärarhandledning och lärobok. I lärarhandledningen studeras de inledande gemensamma instruktionerna (s 5-22), kapitel 7, *Bråk* (s 130-151) och kopieringsunderlagen 71 till och med 85 som är avsedda för bråktal. I läroboken analyseras kapitel 7 *Bråk* (s 68-105).

I Räkna och Tänka 4b, avsedd för skolår 4, presenteras och introduceras eleverna för bråk, så det är inget nytt för dem i och med lärobok 5b. I Lärobok 4b behandlas bråktal utifrån, Delar av hel, delar av ett antal.

Nedan följer en kort presentation av upplägget i läroboken och de mål som eleverna ska ha uppnått efter kapitlet. Kapitlet presenteras med en inledande bild med anknytning till hur bråktal finns representerade i elevernas vardag som ska stimulera till diskussion och kommunikation. I anslutning till bilden finns de mål som eleverna ska uppnå. Vilka är följande:

- visa en del och ange delen som ett bråk
- ange delar av en hel som bråk
- ange delar av ett antal som bråk
- utläsa och skriva bråk på en tallinje
- jämföra och ordna bråk efter storlek
- skriva ett bråk i blandad form
- skriva samma bråk på olika sätt
- använda bråk i vardagen
- addera bråk med samma nämnare
- subtrahera bråk med samma nämnare
- multiplicera bråk med ett heltal
- dividera bråk med ett heltal
- skriva ett bråk i decimalform och omvänt
- lösa problem med bråkmodeller
- uppfatta mönster med delar av en hel

Därefter följer arbete med bråktal utifrån 15 definierade rubriker, där varje ny rubrik inleds med en gemensam introduktion. Efter den gemensamma introduktionen arbetar eleverna till-

sammans med några uppgifter, därefter följer enskilt arbete. Avslutande avsnitt i kapitlet är Problemlösning (där eleverna arbetar tillsammans) och Repetition.

4.8 Kvantitativ resultatredovisning: Tänk och Räkna 5b

Tänk och Räkna 5b	Lärobok		Lärrarhandledning		Totalt (lärobok + lärrarhandledning)	
	Antal	Procent	Antal	Procent	Antal	Procent
Kommunikativa räkneuppgifter	27	13 %	27	39 %	54	19 %
Konkreta räkneuppgifter	129	61 %	40	58 %	169	61 %
• Vardagsanknuten	65	31 %	0	0 %	65	23 %
• Bild	83	40 %	36	52 %	119	43 %
• Laborativ	16	8 %	7	10 %	23	8 %
• Annat (rita)	10	5 %	0	0 %	10	4 %
Abstrakta räkneuppgifter	81	39 %	29	42 %	110	39 %
Totalt antal räkneuppgifter	210		69		279	

4.9 Kvalitativ resultat- och analysredovisning: Tänk och Räkna 5b

4.9.1 Begreppsbyggnad

Läromedlets inriktning på begreppsbyggnad studerades utifrån om vikten av begreppskunskap fokuserades, kommunikationens roll, om uppgifterna är vardagsanknutna, konkreta och/eller abstrakta. I den första delen analyseras om vikten av begreppskunskap och kommunikation framkommer i läromedlet. Efter det analyseras huruvida uppgifterna är vardagsanknutna, konkreta och/eller abstrakta.

4.9.1.1 Begreppskunskap och kommunikation

Vikten av begreppskunskap framkommer i lärarhandledningen bland annat genom att en sida i den gemensamma introduktionen viks åt begreppsbyggnad. Om eleverna får möta nya begrepp på flera olika vis så stimuleras begreppsbyggnad (s 13 lh). Lärarhandledningen visar också en modell med de uttrycksformer som är aktiva vid begreppsbyggnad och dess inbördes relation till varandra. De ingående delarna i modellen är omvärlden, språk, symbol, konkreta modeller och bildmodell (s 13 lh). Det framgår att matematiska begrepp utvecklas genom en undervisning som utgår från elevernas erfarenheter, genom ett undersökande arbetssätt, till exempel genom laborationer och genom ett aktivt samtal elever och lärare emellan (s 12 lh). Vidare framhåller lärarhandledningen att en ”utvecklad begreppsförståelse innebär att en individ känner igen begreppet i olika representationsformer (bild, symbol, språk m.m.) och kan hantera begreppet inom en enskild representationsform samt kan växla från en form till en annan” (Tänk och Räkna 5b lh 2008:13). Det ser jag som en förståelse från lärarhandledningen om att eleverna ska öva sig på att överföra (också beskrivit som transfer) begreppskunskaper från en kontext till en annan, vilket i Skolverkets (2010:27) analysrapport, beskrivs som viktigt för begreppsbyggnad. Det framkommer också att kommunikationen är viktig för begreppsbyggnaden eftersom då ”eleven uttrycker sina iakttagelser, utvecklas språkliga färdigheter. Specifika ord och begrepp som tillhör matematiken förankras i elevernas begreppsbyggnad” (Tänk och Räkna 5b lh 2008:14).

Enligt lärarhandledningen sker matematikinläring i en interaktion mellan elever, lärare och det matematiska innehållet. Det framgår att det är i samspel med andra som kunskap och färdigheter utvecklas (s 20 lh). I samspelet spelar samtalet en stor roll, något som samstämmer med begreppsbyggnad utifrån Vygotskys teorier. Matematisksamtalet ska bland annat behandla olika matematiska lösningar och tankestrukturer, där eleverna får använda sig av nya ord och uttryck och presentera sina matematiska lösningar (s 112 lh). Att gemensamma diskussioner ska användas för att lösa problem för tankarna till hur matematiska problem hanteras i ostasiatiska länder. Där fokus ligger på en begreppsmässig förståelse enligt Skolverkets (2010:22–23) analysrapport och eleverna presenteras för varandras lösningsförslag. Vidare framgår det att läraren i samtal med eleverna kan få förståelse för elevernas kunskapskvaliteter. (s 14 lh).

I lärarhandledningen framkommer kommunikationens och samspelets roll vid flera tillfällen, som visats ovan. Nedan redovisas exempel för hur kommunikationen och samspel kommer till uttryck i läromedlet.

Varje gång bråktal presenteras i en ny form, till exempel vid en ny begreppsegenskap för bråket, så sker det med en *gemensam introduktion*. Det gäller bland annat då bråktal presenteras som *del av helhet*, *del av antal* och vid jämförelse av bråk. Totalt finns i lärarhandledningen *gemensam introduktion* beskriven vid 15 tillfällen. De lärarledda introduktionerna bidrar till samtal och kommunikation om bråktal.

Exempel på samarbetstillfällen i lärarhandledningen är laborationer, vid spel, diskussioner kring problemlösning och tankeproblem. Tre spel finns utformade som berör bråktal (s 138, 140 & 146 lh). Vidare finns fem tankeproblem och två problemlösningssuppgifter, vilka ska lösas i diskussion och tillsammans med andra (139–142, 144 & 146 lh). Ett annat exempel är att eleverna tillsammans får försöka skriva regler för addition och subtraktion av bråktal (s 42 & 143 lh).

I lärarhandledningen uppskattas 39 % av uppgifterna att vara av kommunikativ karaktär. I lärarhandledningen har till uppgifter räknats gemensamma introduktionsuppgifter, kopieringsunderlag, tankeproblem, problemlösning och spel.

I läroboken uppskattas 13 % av uppgifterna vara av kommunikativ karaktär, det vill säga uppgifter där eleverna ska samarbeta för att lösa uppgifterna. Samarbetsuppgifterna sker oftast efter att ett nytt område av bråktal introducerats gemensamt i klassen av läraren. I avsnittet med problemlösningssuppgifter är det också meningen att eleverna ska samarbeta då de löser uppgifter (s 96-97 lh).

Slutsatsen är att kommunikation och begreppsbyggnad ges mycket utrymme i lärarhandledningen. I läroboken är inte fokus lika stort på gemensamma kommunikativa uppgifter som i lärarhandledningen.

4.9.1.2 Vardagsanknytning

Som tidigare framkommit ifrån lärarhandledningen, utvecklas matematiska begrepp om de utgår från elevernas erfarenheter, vilket tyder på att det är viktigt med räkneuppgifter med en förankring i elevernas egen vardag (s 12 lh).

I lärarhandledningen ges en historisk bakgrund till bråktal. Varför och av vilka de användes framkommer. Måttenheter uttryckets ofta som bråktal i relation till människans kroppsdelar, till exempel, att en fot är $1/3$ aln. På det sättet beskrivs hur bråktal tidigare hade en tydlig koppling till vardagsmatematiken, vilken inte är lika tydlig idag då vi övergått till vårt tiotalssystem, även om det framkommer att det även idag är i hanteringen av enheter som eleverna kommer i kontakt med bråktal (s 131 & 141 lh). Att lärarhandledningen visar på den historiska kopplingen mellan bråktal och vardagsmatematik visar på förståelse för att knyta an till bråktalens relation till vardagen. Genom att sedan i läroboken introducera bråktal och bråktalsräkning genom en diskussionsbild för var i vardagen bråktal kan förekomma i elevernas erfarenhetsvärld, visar på ett försök till att vardagsanknyta bråktalsbegreppet. Avsnittet *Bråk till vardags* i läroboken knyter på samma sätt ihop matematikuppgifter med vardagsproblem (s 80–81 lb).

I lärarhandledningen uppskattas endast en av uppgifterna som vardagsanknuten, den inledande bilden av kapitlet som diskuteras. I läroboken uppskattas 31 % av uppgifterna som vardagsanknutna. De finns representerade i läroboken med jämna mellan rum, men också i mer koncentrerade avsnitt. Där de samlas under rubriker som, *Bråk till vardags* (s 80-81 lb), *Matmatte* (s 103 lb) och *Problemlösning* (s 96-97 lb).

4.9.1.3 Konkretion och abstraktion

Lärarhandledningen beskriver olika former av konkretion. Det kan handla om att minnas verkliga situationer, att hantera verkliga saker, att undersöka strukturer med laborativt material eller konkreta hjälpmedel. Detta visar bland annat följande citat.

Den vanligaste formen av konkretion är verklighetsanknytning med hjälp av bilder eller minneshändelser. En annan form är att genom konkreta material undersöka strukturer varvid man strävar efter att förena barns erfarenheter med matematiska modeller” (Tänk och Räkna 5b lh 2008:15).

Det framgår av lärarhandledningen att innehållet i läromedlet ska vara konkret (s 12 lh). ”Bråkräkning är svårt för många elever. En hel del av bråkräkningen handlar om abstrakta talrelationer. Därför är det viktigt att göra innehållet konkret och ge eleverna beredskap att göra praktiska lösningar så de kan ställa upp modeller som stödjer tänkandet” (Tänk och Räkna 5b lh 2008:133). Enligt lärarhandledningen innebär det att tolka ett matematiskt uttryck ”att kunna överföra symbolerna till en reell verklighet eller ett sammanhang där uttrycket blir relevant” (Tänk och Räkna 5b lh 2008:14). Detta citat säger något om vikten av att kunna gå från det abstrakta till det konkreta.

I läromedlet föreslås en rad hjälpmedel för att konkretisera det abstrakta i matematiken. Exempelvis för bråktal är: pappersremсор, centikuber, stavmodeller, tallinje och 10-sidiga tärningar. Laborativa hjälpmedel som presenteras i lärarhandledningen för bråktal och bråktalsräkning är exempelvis bråkstavar, cirkelmodeller och kvadratmodeller (s 16).

I lärarhandledningen uppmanas till arbete med konkreta hjälpmedel vid flera tillfällen. Till exempel i samband med introduktionen av bråk, där bråktal presenteras som del av helheten. Då får eleverna med hjälp av till exempel cirkelmodell och rektangelmodell uttrycka bråk (s 135 lh). Vid introduktionen av del av antal föreslås laboration med hjälp av multiklossar eller centikuber i olika färger. Då får eleverna bygga samman klossar i olika färger och öva på uttryck som $2/7$ av mina klossar är blåa (s 136). För att visa på sambandet mellan bråkform och

blandad form, till exempel att $13/4=3$ hela och $1/4$ används en laboration. 13 fjärdedels cirklar kan laboreras ihop till 3 hela cirklar och 1 fjärdedels cirkel (s 137).

Det finns även andra sätt där eleverna övas på att konkretisera abstrakta uttryck. I två tankeproblem får eleverna skriva räknehändelser till abstrakta uttryck (s 144 lh). Ett annat exempel är att problemlösningsavsnittet underlättas om eleverna ritar bilder eller använder sig av multiklossar i två färger (s 148 lh). I läroboken finns det exempel på där eleverna får konkretisera det abstrakta genom att rita bilder och lösningar, till exempel i form av olika begreppsmodeller som cirkelmodellen eller tallinjemodellen.

I lärarhandledningen uppskattas 52 % av uppgifterna som konkreta. I läroboken uppskattas 62 % av uppgifterna vara av konkret karaktär. Det vill säga att de görs konkreta med hjälp av att de är vardagsanknutna, stöds av en förklarande bild eller en laboration. Det är alltså över hälften av uppgifterna som har den karaktären.

I ovanstående analys och resultatgenomgång har fokus legat på om läromedlet försöker konkretisera det abstrakta. I nedanstående analys och resultatgenomgång fokuseras istället hur läromedlet förhåller sig till abstrahera det konkreta.

I lärarhandledningen framgår anledningen till att abstrahera det konkreta. En rubrik i lärarhandledningen lyder *Från konkretion till abstraktion* (s 15 lh). Barns tankeutveckling jämförs med processen av hur det som uppfattas som konkreta föremål utvecklas genom jämförelse till ett mer komplicerat tänkande av logisk struktur (s 15). ”I denna process kommer konkretion in som ett hjälpmedel för att förena barns erfarenheter och tankesystem med matematikens logiska och abstrakta system” (Tänk och Räkna 5b lh 2008:15). Detta tyder på hur de konkreta hjälpmedlen kan hjälpa eleven till ett mer abstrakt tänkande. Följande citat visar på hur man med hjälp av språket och konkreta material också kan övergå till ett mer abstrakt tänkande. ”Det konkreta materialet uppmuntrar till aktiva diskussioner och reflektioner och medverkar till elevaktivitet och språkanvändning. Språket blir en brygga som förenar den konkreta verkligheten med matematikens symboler” (Tänk och Räkna 5b lh 2008:15). Vidare framgår av lärarhandledningen att det är viktigt att läraren förstår förhållandet mellan konkreta och abstrakta modeller (s 15).

I lärarhandledningen finns exempel på hur eleverna får öva sig i att tänka abstrakt. Där de får gå från sina konkreta modeller till att skriva abstrakta regler. De får till exempelvis tillsammans försöka skriva en regel för hur bråktalet med samma nämnare adderas (s 142 lh). Och ge en minnesregel för multiplikation av heltal och bråktalet kan se ut (s 144 lh). I kopieringsunderlaget finns också uppgifter som kontrollerar om eleverna förstått sambandet mellan konkret bildmodell och det abstrakta bråkräkandet (s 147 lh).

I lärarhandledningen uppskattas 46 % av uppgifterna som abstrakta. I läroboken uppskattas 38 % av uppgifterna vara abstrakta. I läroboken finns också exempel på uppgifter där eleverna får gå från en konkret uppgift till att presentera den på ett mer abstrakt vis. Det görs exempelvis genom att de får skriva en multiplikation eller subtraktion till en bild. Där bilderna föreställer bråkmodeller som till exempelvis cirkelmodellen (s 88 & 101 lb).

Slutsatsen är att det i läromedlet finns en tydlig insikt i förhållandet mellan konkretion och abstraktion. Det ges mest uttryck i att läromedlet genom de hjälpmedel eleverna ges för att kunna konkretisera det abstrakta med bråktalet.

4.9.2 Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering

Under rubriken begreppsbildning har redan läromedlets inriktning på den konceptuella kunskapsfokuseringen delvis analyserats genom att titta på begreppsbildning utifrån områdena begreppskunskap och kommunikation, vardagsanknytning och förhållandet mellan det abstrakta och konkreta i läromedlet. Detta kommer inte lyftas upp igen under den här rubriken. Istället redovisas här vad som stödjer en procedurell kunskapsbildning samt eventuellt vad som stödjer den konceptuella om det inte tidigare framkommit.

Det framgår av lärarhandledningen att utgångspunkten för det matematiska arbetssättet ska vara varierande. Det ska bland annat innehålla både individuellt arbete och arbete på samarbetsnivå (s 12 lh). Detta visar på både procedurellt och konceptuellt fokus.

Något som talar för tecken på en procedurell syn i lärarhandledningen är att det finns extra träningsuppgifter för ännu ej befästa moment och räkneträning (s 12). *Moment* och *räkneträning* kan ses som något som görs i bestämda procedurer eller sekvenser. I övrigt är det som pekar på en procedurell inriktning av läromedlet att det i läroboken uppskattningsvis är 4 % av uppgifterna som går att lösa med hjälp av de uppgifter som är utformade för att eleverna ska arbeta tillsammans med. De innehåller i vissa fall räkneexempel. Den typen av uträkningar som visas där kan sedan användas för att lösa de efterföljande enskilda räkneuppgifterna. Det är dock inte ett självklart mönster som presenteras som eleven sedan kan använda för att lösa efterföljande uppgifter och andelen anses inte som stor. Andelen anses dock inte hög i förhållande till det totala antalet uppgifter. Andelen rena räkneexempel i förhållande till antalet räkneuppgifter i läroboken uppskattas till 4 %.

Under problemlösningrubriken i lärarhandledningen framgår det att det finns några uppgifter utformade för att leda till olika resultat. Det ska uppmuntra elevernas kreativitet och visa på elevernas olika lärande (s 18). Problemlösninguppgifterna ska lösas i parvis och därefter diskuteras lösningarna gemensamt (s 148 lh) Det gör att paralleller kan dras till det beskrivna ostasiatiska ländernas problemlösning som var inriktad på konceptuell förståelse. På sätt och vis gör det att arbetssätten liknar varandra. Att lösningar gemensamt redovisas i klassen, vilket ger stöd för en konceptuell fokusering av den här typen av uppgifter i läromedlet.

Slutsatsen är att det finns mycket som tyder på ett konceptuellt fokus i läromedlet, särskilt utifrån lärarhandledningen. Det procedurella framkommer till viss del i att vissa räkneuppgifter kan lösas med hjälp av tidigare räkneexempel.

4.9.3 Begreppsmodeller

De begreppsmodeller som läromedlet använder sig av utifrån tidigare beskrivning av matematiska begreppsmodeller är *del-helhetsmodellen* i form av del av helhet, *andelsmodellen* i form av del av antal, *tallinjemodellen* och även enligt min tolkning till viss del *operatormodellen*. Begreppsmodellerna introduceras i den presenterade ordningen. Enligt lärarhandledningen kan bråktal och bråktalsräkning kan upplevas som svårt för många elever och att de då är viktigt att de har modeller som stödjer tänkandet. Vilket är tankar som överensstämmer med Bentleys teorier (2008:29) om ett behov av begreppsmodeller för eleverna inlärningsprocess. Begreppsmodellerna ses enligt Bentley (2008:29) som förenklade beskrivningar av matematiska begrepp för att eleven ska skapa sig en förståelse för det matematiska begreppsområdet.

I lärarhandledningen presenteras hur bråk kommer att användas i läromedlet, bland annat genom att se på bråk som *del av en helhet* och *del av ett antal* (s 131-132). De modeller som kan

användas för detta presenteras mycket tydligt i lärarhandledningen med hjälp av text och bilder. *Del av en helhet* kan till exempel presenteras med hjälp av *rektangelmodellen*, *cirkelmodellen* och *tallinjemodellen*. Del av ett antal kan åskådliggöras med klossar i olika färger.

Då *del av antal* ska presenteras genom en gemensam introduktion påpekas att det synsättet skiljer sig från *del av helhet* (s 136 lh). Vilket tyder på förståelse för att bråk innehåller olika begreppsegenskaper, som behöver hållas isär. Som fördjupning efter att *del av antal* introducerats föreslås uppgifter som behandlar både *Del av helhet* och *Del av antal* (s 136 lh). En fråga som då uppkommer är om det är bra för förståelsen av begreppsmodeller och den konceptuella inläringen att de två begreppsmodellerna som utgår från *del-helhetsmodellen* och *andelsmodellen* så tidigt behandlas på samma uppgiftsblad. Samma typ av fråga uppkommer då läroboken presenterar bråktal i form av *Del av antal* redan efter sex räkneuppgifter. Är det inte för snabbt att övergå till *andelsmodellen* så snart efter introduktionen av *del-helhetsmodellen*? Eleverna har i och för sig redan varit i kontakt med bråktalsräkning i årskurs fyra och de presenteras för konkreta begreppsmodeller som de får arbeta med i läromedlet. Det är dock viktigt att de håller isär de två synsätten på bråktal och inte blandar ihop dem, då, som tidigare beskrivits, *del-helhetsmodellen* och *andelsmodellen* bygger på olika begreppsegenskaper.

Genom en gemensam introduktion presenteras bråktal med hjälp av *tallinjemodellen*, som kan användas för att jämföra storleken på bråktal. Läraren ska enligt lärarhandledningen notera att för att kunna jämföra bråk med varandra med hjälp av tallinjen, så måste helheten vara densamma (s 137). Det visar på förståelse för *tallinjemodellen* som bygger på *del-helhetsmodellen* och att det är viktigt för eleverna att förstå utifrån vilka begreppsegenskaper begreppsmodellerna grundar sig.

Tallinjemodellen som visas i läroboken använder sig inte av talpilar för att visa på att det är en sträcka som avses på tallinjen och inte en punkt (s 72 lb). Det kan vara förvillande för eleverna (Bentley 2008). Bentley (2008) poängterar dock att om bråktal tidigare presenterats för eleverna med hjälp av *del-helhetsmodellen*, vilket läromedlet gjort, så kan bråktalet representeras på tallinjen utan någon talpil. Att ta hjälp av *tallinjemodellen* i detta skede kan istället gynna elevernas erfarenhet av bråktal (Bentley 2008).

Vid addition av bråktal uppmärksammar lärarhandledningen att många elever använder samma räkneregler som vid addition av naturliga tal, vilket leder till en felaktig tankeform. Eleverna adderar då samman både täljare och nämnare från de båda bråktalen. Genom att eleverna får arbeta laborativt med addition av bråktal så ska detta misstag förebyggas enligt lärarhandledningen. Det konkreta arbetet med att addera bråktal kan då utgå från till exempel cirkelmodellen (s 142 lh). Det beskrivna misstaget förekommer enligt Bentley (2008) ofta om eleverna tänker på addition utifrån *andelsmodellen*. Att lärarhandledningen förespråkar att addition av bråktal visualiseras med hjälp av cirkelmodellen visar på förståelse för att det är begreppsegenskaper utifrån *del-helhetsmodellen* som kan tydliggöra principen för addition av bråktal.

Multiplikation och division av bråktal med ett heltal förklaras bland annat genom att visualisera modeller i form av cirklar och rektanglar. Vid multiplikation utgår man till att börja med från upprepad addition med hjälp av cirkelmodeller och vid division av cirkelmodeller som delas. Vid division så utnyttjar man även att se nämnaren i bråktalet som en enhet. Det vill säga att till exempelvis 2 tredjedelar dividerat med 2 är lika med 1 tredjedel. På så sätt är det *del-helhetsmodellen* som ligger till grund för multiplikation och division av bråktal.

Några räkneexempel i läroboken under rubriken *Bråk till vardags* kan antas utgå från operatormodellen (s 80-81). Det är dock inte så att det framgår klart och tydligt utifrån Bentleys (2008) resonemang. På så sätt att bråket ses som bestående av två tal där nämnaren har som uppgift att dividera och täljaren multiplicera ett annat heltal. Lösningarna av uppgiften presenteras dock i olika steg. Där heltalet först divideras och sedan multipliceras. Operatormodellen har en mer procedurrell än konceptuell karaktär enligt Bentley (2008:35–54). Anknypning finns dock kvar till enheterna i uppgiften och omvandling från till exempelvis kg till gram redovisas.

Slutsatsen av analysen av begreppsmodeller är att de tydligt utnyttjas i läromedlet och att de till stor del stödjer begreppsbyggnad utifrån Bentleys (2008) teorier.

4.10 Jämförande analys av läromedlen

I den jämförande analysen jämförs resultaten från de tre läromedlen med varandra. Utifrån den kvantitativa och kvalitativa studien. De mest markanta skillnaderna ifrån den sammanställda kvantitativa analysen i tabellform lyfts in i den kvalitativa analysen. De procentsatser som redovisas utanför parenteser i texten står för det sammanlagda antalet uppgifter utifrån lärarhandledning och lärobok. De procentsatser som står i parentes utgår endast från räkneuppgifter i läroboken. Anledningen till att de redovisas på det sättet är att arbetsbladen i Matteboken 5As kopieringsbok inte finns med i analysen, men i de andra två läromedlen ingår de i lärarhandledningen. Att presentera de båda procentsatserna ger därför en mer nyanserad bild.

Lärobok	Matte Direkt Borgen 5b		Matteboken 5A		Tänk och Räkna 5b	
	Antal	Procent	Antal	Procent	Antal	Procent
Kommunikativa räkneuppgifter	3	3 %	84	52 %	27	13 %
Konkreta räkneuppgifter	71	66 %	99	61 %	129	61 %
• Vardagsanknuten	16	15 %	65	40 %	65	31 %
• Bild	53	49 %	37	23 %	83	40 %
• Laborativ	2	2 %	5	3 %	16	8 %
• Annat	0	0 %	5	3 %	10	5 %
Abstrakta räkneuppgifter	37	34 %	64	39 %	81	39 %
Totalt antal räkneuppgifter	108		163		210	

Lärobok + lärarhandledning	Matte Direkt Borgen 5b		Matteboken 5A		Tänk och Räkna 5b	
	Antal	Procent	Antal	Procent	Antal	Procent
Kommunikativa räkneuppgifter	6	4 %	87	52 %	54	19 %
Konkreta räkneuppgifter	92	68 %	100	60 %	169	61 %
• Vardagsanknuten	16	12 %	66	40 %	65	23 %
• Bild	72	53 %	37	22 %	119	43 %
• Laborativ	2	1 %	5	3 %	23	8 %
• Annat	2	1 %	5	3 %	10	4 %
Abstrakta räkneuppgifter	44	32 %	66	40 %	110	39 %
Totalt antal räkneuppgifter	136		166		279	

4.10.1 Begreppsbildning

4.10.1.1 Kommunikation och begreppskunskap.

I de båda läromedlen Matteboken 5A och Tänk och Räkna 5b framgår vikten av begreppskunskap och begreppsbildning med tydlighet. Särskilt utifrån lärarhandledningen. Även kommunikationens roll framgår med stor tydlighet i de båda lärarhandledningarna. Det är främst i Matteboken 5As läromedel som de kommunikativa uppgifterna får stort utrymme med 52 % (52 %). I Tänk och Räkna 5b står de kommunikativa uppgifterna för 19 % (13 %). I Matte Direkt Borgen 5b framgår det av lärarhandledningen att samtalet i matematikundervisning har en central roll. Hur läraren kan få in samtalet i undervisningen är dock inte tydligt utifrån lärarhandledningen. De kommunikativa uppgifterna är inte heller många i läromedlet, endast 4 % (3 %). Vikten av begreppslig förståelse framgår inte av lärarhandledningen i Matte Direkt Borgen.

4.10.1.2 Vardagsanknytning

I Tänk och Räkna 5b framgår vikten vardagsanknytningen både direkt och indirekt då lärarhandledningen studeras. I läromedlet uppskattas 23 % (31 %) av uppgifterna vara vardagsanknutna. I Matteboken 5A framgår inte anledningen till att räkneuppgifterna är vardagsanknutna, läromedlet har dock störst andel vardagsanknutna uppgifter med 40 % (40 %). Matte Borgen Direkt 5b framgår det i lärarhandledningen att intensionen är att räkneuppgifterna ska vara vardagsanknutna. I läromedlet är dock endast 12 % (15 %) vardagsanknutna vilket är den minsta andelen i de tre läromedlen.

4.10.1.3 Konkretion och abstraktion

Både i Tänk och Räkna 5b och Matteboken 5A framgår anledningen till att konkretisera och abstrahera i matematiken. Det ges också förslag på hur det kan gå till i lärarhandledningen samt att det praktiseras i läroboken. I Tänk och Räkna 5b ges eleverna flera olika hjälpmedel för att konkretisera det abstrakta. Inte minst genom att arbeta laborativt med bråkmodeller. I Matte Direkt Borgen 5b är anledningen till att konkretisera och abstrahera inte tydlig utifrån lärarhandledningen. Däremot framkommer det på flera ställen hur eleven kan göra för att konkretisera det abstrakta. Det finns också uppgifter där eleverna tränas i att abstrahera något konkret. Om andelen konkreta räkneuppgifter i läromedlen jämförs så skiljer de sig inte nämnvärt åt, de befinner sig i ett spann från 61-68 % (61-66 %). Vilket därmed inte heller den abstrakta andelen gör, där andelen uppgifter befinner sig i ett spann mellan 32-40 % (34-39 %).

Slutsatsen är att läraren främst ges stöd ifrån lärarhandledningen för begreppsbildning, då bråktal introduceras och behandlas i läromedlen Tänk och Räkna 5b och Matteboken 5 A, vilket framgått av de tre kategorierna under begreppsbildning, *kommunikation och begreppskunskap*, *vardagsanknytning* och *konkretion och abstraktion*. I lärarhandledningen för Matte Direkt Borgen 5b framgår inte det stödet för läraren med samma tydlighet. Uppfattningen är att eleverna ges stöd för att utveckla den begreppsliga förståelsen för bråktal ifall läraren utgår från lärarhandledningen i undervisningen och inte enbart utgår ifrån läroboken, där det begreppsliga fokuset för förståelse av bråktals inte ges samma stöd.

4.10.2 Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering

I alla läromedel finns det tecken på både procedurell och konceptuell kunskapsfokusering. Det som framgår i alla tre läroböcker är möjligheten att på vissa ställen i läroböckerna lösa efterkommande uppgifter utifrån en tidigare presenterad lösning, vilket anses vara tecken på en

procedurell inriktning. I Matte Direkt Borgen 5b uppskattas att 44 % av räkneuppgifterna i läroboken går att lösa på det viset, i Matteboken 5A 10 % och i Tänk och Räkna 5b 4 %. Det läromedel som tenderar att luta mest mot den procedurella kunskapsfokuseringen är Matte Direkt Borgen 5b. I de andra två läromedlen finns fokus på konceptuell inläring, som framkommer tydligare än i Matte Direkt Borgen 5b. I Matteboken 5A ges det kommunikativa stort utrymme och i Tänk och Räkna 5b den begreppsliga förståelsen. Vilket bland annat framgår av inriktningen på förståelse av bråkbegrepp utifrån begreppsmodeller, som eleverna får laborera med. Andelen laborativa uppgifter är störst i Tänk och Räkna 5b med 8 % (8 %), som är mer än dubbelt så stor andel som i de övriga två läromedlen.

Slutsatsen är att det är svårt att avgöra om det är en procedurell eller konceptuell inläring som fokuseras i läromedlen då det finns tecken på båda delar. I Matte Direkt Borgen framgår dock den procedurella inriktningen tydligare och i Matteboken 5A och Tänk och Räkna 5b finns tydliga tecken på en konceptuell kunskapsinläring främst utifrån lärarhandledningen.

4.10.3 Begreppsmodeller

Alla tre läromedel använder sig av begreppsmodeller utifrån Bentleys beskrivning av dem, men i lite olika omfattning och tydlighet. I alla tre läromedel finns del-helhetsmodellen och andelsmodellen med och de introduceras i den ordningen. Den med mest fördelar och den med mest nackdelar enligt Skolverkets (2010:43) analysrapport. Andelsmodellen har låg strukturell validitet, vilket inte gynnar den begreppsliga förståelsen, på grund av att den förvränger det matematiska innehållet (Skolverket 2010:29). Alla tre läromedel använder sig ändå av den begreppsmodellen, vilket kan ses som problematiskt för begreppsbyggnad av bråktal. I alla tre läromedlen har jag ställt mig frågande om de två modellerna inte varvas för ofta eller introduceras för nära inpå varandra. Vilket är svårt att avgöra? Enligt Bentley (2008:52) så kan ett hoppande mellan begreppsmodeller leda till en mer procedurinriktad inläring. Det är dock inte så att modellerna blandas i en och samma uppgift förutom vid ett redovisat tillfälle, i Matte Direkt Borgen 5b.

Övriga begreppsmodeller som används i Matte Direkt Borgen 5b är bråkplanket som anses vara jämförbar med tallinjemodellen. I Tänk och Räkna 5b används dessutom tallinjemodellen och till viss del operatormodellen. I Matteboken 5A används också till viss del operatormodellen. Begreppsmodellerna är inte tydligt beskrivna i Matteboken 5A för att stödja begreppsförståelsen av bråktal. En fråga som uppkommer är om eleverna har tillräckligt stöd för storleksjämförelse mellan bråktal med hjälp av de två begreppsmodellerna.

Slutsatsen är att i Tänk och Räkna 5b ges störst utrymme för användningen för begreppsmodeller, därefter Matte Borgen Direkt 5b och minst utrymme ges i Matteboken 5A.

5 Diskussion

I diskussionsavsnittet besvaras frågeställningarna utifrån syftet. Det görs i relation till de definierade områdena i analysinstrumentet, begreppsbyggnad, procedurrell eller konceptuell kunskapsfokusering och begreppsmodeller. Slutsatserna görs genom att knyta an till teoriavsnittet.

5.1 Diskussion av resultat

5.1.1 Begreppsbyggnad

- Vilket stöd ges läraren i läromedlet då bråktalet introduceras och behandlas för elevernas möjlighet till begreppsbyggnad?
- Vilket stöd ges eleven av läromedlet för att utveckla den begreppsliga förståelsen av det matematiska begreppet bråktalet?

Utifrån Matteboken 5A och Tänk och Räkna 5b lärarhandledning så ges läraren stöd för att ge eleverna en begreppslig förståelse då bråktalet ska introduceras. Vikten av begreppsförståelse framkommer i de båda lärarhandledningarna. De ger en historisk bakgrund till bråktalet, vilket kan användas för att ge eleverna en begreppslig förståelse av bråktalet. Den historiska bakgrunden kan enligt Vygotskys teorier om begreppsbyggnad användas som hjälp för att få förståelse för begreppet. Det är möjligt att fråga sig varför begreppet tillkommit, vilka behov och problem som kunde och kan hanteras och lösas med hjälp av begreppet (Areviks 2009).

I Tänk och Räkna inleds varje nytt avsnitt i läroboken, totalt 15 stycken genom lärarhandledningen med en lärarledd gemensam introduktion. Det kan ses som en del i lärarens möjlighet till att hjälpa eleverna att genom kommunikation utnyttja *den proximala utvecklingszonen* för att få eleverna att nå så långt som möjligt i sin begreppsliga förståelse (Arevik 2009). I lärarhandledningen ges läraren också stöd i de olika begreppsmodeller som introduceras för att eleverna ska skapa sig begreppsförståelse för bråktalet. I Matteboken 5A ges inte lika stort utrymme för begreppsmodeller även om ett laborativt arbete förespråkas för att få förståelse för bråkbegreppet. En stor del av uppgifterna i läromedlet, 52 % bygger på kommunikativa uppgifter vilket ses som grundläggande för att skapa en begreppslig förståelse. I Matte Direkt Borgen 5b ges inte stort stöd för den begreppsliga förståelsen för bråktalet vare sig utifrån lärarhandledning eller utifrån lärobok.

Slutsatsen är att läraren främst ges stöd från lärarhandledningen för begreppsbyggnad, då bråktalet introduceras och behandlas i läromedlen Tänk och Räkna 5b och Matteboken 5 A. I lärarhandledningen för Matte Direkt Borgen 5b framgår inte stödet för läraren med samma tydlighet, vilket framgick i resultatanalysen.

Min uppfattning är att eleverna indirekt ges stöd för att utveckla den begreppsliga förståelsen för bråktalet i två av läromedlen, Tänk och Räkna 5b och Matteboken 5A, förutsatt att läraren utgår från lärarhandledningen i undervisningen och inte enbart utgår ifrån läroboken. Utan läraren och genom att använda sig av läroboken som enda hjälpmedel så anses inte eleverna få stort stöd av läroböckerna för den begreppsliga förståelsen av bråktalet.

Jag vill med bestämdhet påpeka att, som det framgått av min analys, är det mycket viktigt att läraren utgår eller i alla fall är medveten om vad som står lärarhandledningen som hör till läroboken. Utifrån den ges grundtankarna om läromedlet och i två av de studerade läromedlen även insikt och förståelse för vikten av begreppskunskap. De lärarhandledningarna ger också idéer och tips om hur läraren kan arbeta med begreppsförståelse och begreppsbyggnad av bråktalet, bland annat genom samspel och kommunikation, genom att öva på att konkretisera, genom att öva på att abstrahera och att arbeta med begreppsmodeller, bland annat laborativt. Min undersökning visar att både lärare och elever i framförallt två av de analyserade läromedlen ges stöd för begreppsbyggnad av bråktalet. För att eleverna ska ges stöd i den begreppsliga utvecklingen är det dock viktigt att eleverna inte lämnas ensamma att arbeta med läroböckerna, utan någon handledning från lärare eller utan något samspel med läraren och övriga elever. I TIMMS-undersökningen från 2007 visade det sig att för skolår 4 åtgår 38 % av lektionstiden en vanlig vecka åt att arbeta med matematikuppgifter på egen hand (Skolverket 2008a:65). Det är viktigt att tiden för ensamarbete med matematikuppgifter inte blir för stor, eftersom det inte gynnar den begreppsliga utvecklingen av bråktalet.

5.1.2 Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering

- Är det en konceptuell/begreppsmässig eller procedurinriktad inläring som fokuseras i läromedlen?

I Skolverkets (2010:24) analysrapport framgår det att västerländska läroböcker är av procedurell karaktär. Om det avser både lärarhandledning och lärobok framkommer inte. I den här studien har ordet läromedel används för både lärarhandledning och lärobok. Att läroböckerna till stor del är av procedurell karaktär stämmer på sätt och vis in på de analyserade läroböckerna. De bygger på att eleverna ska räkna matematiska uppgifter och lösa dem utifrån räkneprocedurer. En del uppgifter i läroböcker har också en repetitiv karaktär. Det vill säga de liknar varandra i sin utformning och de kan lösas på samma sätt, med samma procedur som talet innan, men med andra numeriska tal. Det tydligaste tecknet i de analyserade läroböckerna på en procedurell inriktning är då efterföljande uppgifter kan lösas med hjälp av ett tidigare räkneexempel, eller då läroboken uppmanar eleven att lösa uppgiften på samma sätt som i tidigare räkneexempel. Andelen rena räkneexempel framgår dock inte som stor i läroböckerna.

Det finns dock även tecken på konceptuellt fokus i läroböckerna. Detta framkommer bland annat vid uppgifter som är utformade för att lösas tillsammans, i diskussion i små grupper eller tillsammans med läraren, vilket enligt Skolverkets (2010) analysrapport visar tecken på undervisning med konceptuella förtecken. I läroböckerna finns även uppgifter utformade för att eleverna ska få träna sig på att gå mellan ett konkret till ett abstrakt tänkande, men också öva sig på att utifrån en abstrakt beskrivning göra en konkret tolkning. Detta ses som övning i begreppslig förståelse utifrån Areviks (2009) tolkning av Vygotskys teorier om begreppsbyggnad. Också det faktum att en del av uppgifterna i läroböckerna är av kommunikativ karaktär och bygger på anknytning till elevernas egen vardag och erfarenhetsbakgrund gör att de anses vara utformade för att utveckla den begreppsliga förståelsen, vilket också främjar begreppsförståelsen utifrån Vygotskys teorier om begreppsbyggnad (Arevik 2009).

Läroböckernas användning av begreppsmodeller kan även bidra till att ge begreppslig och därmed konceptuell förståelse för bråktalet. Begreppsmodeller enligt Bentley är hjälpmedel för att skapa sig en begreppslig förståelse (2008).

Det största fokuset på begreppslig förståelse framkommer tydligast då lärarhandledningarna för Matteboken 5A och Tänk och Räkna 5b studeras. Vilket tidigare framförts under rubriken

begreppsbyggnad. I de båda lärarhandledningarna framhålls begreppsbyggnad som viktig. Det är svårt att avgöra om läromedlen antingen är av en procedurrell eller konceptuell karaktär, då det finns tecken på båda delar i Tänk och Räkna 5b och Matteboken 5A. I Matte Direkt Borgen 5b framgår dock den procedurrella inriktningen tydligare. Det har inte varit avsikten att placera läroböckerna i fack av att antingen vara procedurrella eller konceptuella. De kan däremot ses ha olika mycket tyngdpunkt på de olika aspekterna, vilket framkommit i analysen.

Av resultat- och analysdelen framgår att läromedlet Matte Direkt Borgen 5b var det läromedel med mest procedurrellt fokus. Eftersom studiens utgångspunkt är att den konceptuella kunskapsinläringen har en större betydelse för begreppsbyggnad än den procedurrella, så framstår det läromedel inte ge samma stöd för begreppsbyggnad som de andra två. Viktigt är då att komma ihåg andra redovisade teorier. Utifrån det strukturella och operationella perspektivet, framgår det att även operationella aspekter, det vill säga exempelvis räkneoperationer, har betydelse för begreppsbyggnad. Enligt Engström (1997:141) så kan, som tidigare påpekats, med tiden en förtrogenhet för begreppsbyggnad på en strukturell nivå växa fram genom att arbeta med de operationella aspekterna av matematiska begrepp. Enligt Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali (2001:360) så är det viktigt att inte glömma bort de procedurrella aspekterna, som ibland får stå tillbaka eftersom de inte ses som lika viktiga.

Jag är inte benägen att hålla med om att det i en procedurrell undervisning, vilket undervisning utifrån läroböcker är, så finns det mer eller mindre inga tecken på konceptuellt fokus enligt Skolverkets analysrapport (2010). Jag påstår att min undersökning visar att det finns både ett procedurrellt och konceptuellt fokus i läromedlen. Läromedlen skiljer sig dock mycket åt vilket framgått av resultatanalysen. Det är möjligtvis så att då jag enbart analyserat tre läromedel har jag i mitt urval funnit två läromedel med stort fokus på begreppsbyggnad, vilket inte behöver säga något om den generella sanningen om övriga läromedel.

En tanke som jag brottats med i slutet av mitt arbete, är att jag valde bort ett läromedel att analysera, eftersom jag inte ansåg det jämförbart med de övriga två, då det inte behandlade enbart bråk i ett enskilt kapitel. Vad gav det för inverkan på mitt resultat och var det ett riktigt beslut? Det läromedlet inriktade sig på att se bråk som ett decimaltal. Möjligtvis så fokuserar det läromedel inte mycket på begreppsbyggnad och begreppsmodeller för att få förståelse för bråkbegreppet, på grund av valet att se på bråk som decimaltal. Jag ställer mig frågande till om det för begreppsbyggnaden av bråk är en god idé att introducera bråk genom att i stort sett direkt efter introduktionen välja att se på bråk i formen av decimaltal? Trots att det är första gången i läromedelsserien som eleverna introducerades för bråk? Med det vill jag säga att i en så pass liten läromedelsanalys som jag gjort är det inte möjligt och vanskligt att dra några generella slutsatser om hur läromedel är utformade.

Det gör det dock extra viktigt att som lärare vara medveten om att olika läromedel har olika inriktningar. När det är dags att välja läromedel till sin klass bör man vara medveten om vad man vill ha ut av läromedlet och på vilket sätt det ska stödja undervisningen. Om det till exempel ges litet stöd för begreppsbyggnad i läromedlet, så bör läraren inte enbart lita sig mot läromedlet utan utforma sin undervisning utifrån sin egen tolkning av vad eleverna behöver för att skapa sig en begreppsbyggnad. Ett annat skäl till att jag funnit att läromedlet har tydliga tecken på att även fokusera konceptuellt på kunskapsinläring kan vara att det område jag valt att studera, bråk, har ett större konceptuellt fokus än andra matematikområden. Det vill säga att bråk är ett område som inte tydligt visar på lösningsprocedurer och lösningsexempel som eleverna ska följa i läromedlet.

5.1.3 Begreppsmodeller

- Vilka begreppsmodeller för bråkräkning presenteras i läromedlet och hur de stödjer de eleverna i deras begreppsmässiga utveckling av tal i bråkform?

Alla tre läromedel använder sig av begreppsmodeller utifrån Bentleys (2008) beskrivningar för att ge eleverna förståelse för bråktal. De får dock olika stort utrymme och ges olika stor tydlighet, i både lärarhandledning och i lärobok. Utgångspunkten för förståelse av bråktal är i alla tre läromedlen del-helhetsmodellen. Den begreppsmodell enligt Bentley (2008:49–51) med minst nackdelar och som förespråkas att användas vid introduktion av bråktal för att sedan kompletteras med andra begreppsmodeller, förutsatt att de inte står i konflikt med varandra (Bentley 2008:51). Alla tre läromedel använder sig sedan också av andra begreppsmodeller, där den andra som introduceras är andelsmodellen. I alla tre läromedel anser jag att begreppsmodellerna i många fall stödjer den begreppsmässiga utvecklingen av bråktal. Det finns dock även tillfällen då jag ifrågasätter läromedlets användande av begreppsmodeller.

Andelsmodellen har låg strukturell validitet, vilket inte är gynnsamt för den begreppsliga förståelsen, på grund av att den förvränger det matematiska innehållet (Skolverket 2010:29). Alla tre läromedel använder sig ändå av den begreppsmodellen, vilket kan ses som problematiskt för begreppsbyggnad av bråktal. I alla tre läromedlen har jag också ställt mig frågande till om de två begreppsmodellerna del-helhetsmodellen och andelsmodellen inte varvas i för stor utsträckning eller introduceras för nära inpå varandra, vilket anses svårt att avgöra. Enligt Bentley (2008:52) så kan ett hoppande mellan begreppsmodeller leda till en mer procedurinriktad inläring. Det är dock inte så att modellerna blandas i en och samma uppgift förutom vid ett redovisat tillfälle, i Matte Direkt Borgen 5b. Det är dock viktigt att eleverna får förståelse för de olika begreppsegenskaperna som modellerna står för och där anser jag att läromedlet Tänk och Räkna 5b, med sitt konkreta material av begreppsmodeller är tydligast.

5.2 Relevans för läraryrket

Avslutningsvis vill jag framhålla att jag anser att mitt examensarbete har stor relevans för läraryrket. Inledningsvis framkom min osäkerhet inför användandet av läromedel i matematikundervisning, grundad i en diskussion kring lärobokens vara eller inte vara. Trots det används läroboken i stor utsträckning i svenska skolor. Läraren ställs då inför val av vilket läromedel som ska väljas. Jag vill hävda att resultatet av den här studien visar på att beroende av vilket läromedel som används så ges läraren olika stöd för sin undervisning. Det är viktigt att vara medveten om det då valet av läromedel görs. Det är inte säkert att intensionen är att använda läromedlet som grund i undervisningen, vilket det inte heller behöver vara.

Om lärarens avsikt är att använda sig av ett läromedel som grund i undervisningen är det dock viktigt att även använda sig av lärarhandledningen, annars förbises många av grundtankarna från författarna. I annat fall måste läraren fylla sin undervisning med det som förbisetts. Oavsett hur läraren väljer att planera sin undervisning så ansvarar läraren för att undervisningen utgår från strävansmålen och att eleverna når uppnåendemålen för kursplanen i matematik. Slutsatsen är att läraren och eleven kan få ett bra stöd och hjälpmedel i läromedlet, men att det gäller att kritiskt granska det och vara medveten om vad du som lärare och elev kan få ut av det.

5.3 Vidare forskning

Jag har under min undersökning kommit fram till, att det finns många olika intressanta områden att studera vidare, utifrån ett läromedelsperspektiv och utifrån ett konceptuellt kontra procedurellt perspektiv.

Något som jag funnit intressant utifrån ett läromedelsperspektiv är hur olika läromedel förhåller sig till vilka mål eleverna ska uppnå efter att ha arbetat med kapitlet om bråk. Detta trots att de alla är framtagna för skolår 5. Målen i läromedlen skiljer sig åt och är olika avancerade. I ett av läromedlen behandlas till exempelvis både addition och subtraktion av bråk samt multiplikation och division av bråk med heltal (Tänk och Räkna 5b). I ett annat läromedel är målen lägre ställda utifrån hur avancerade de anses vara. I de målen framgår att eleverna efter kapitlet ska kunna läsa och skriva ett bråk, räkna ut en viss del av ett antal, jämföra och storleksordna bråk samt skriva bråk som decimaltal (Matte Direkt Borgen 5b). Att målen skiljer sig åt i så stor grad i läromedlen är intressant att studera och hur de förhåller sig till målen i kursplanen för matematik. Jag anser själv att målen för vad elever ska kunna om bråk i årskurs fem utifrån kursplanen i matematik som mycket tolkningsbara. Detta kan vara en anledning till att skillnaden i läromedlens mål ser så olika ut. En intressant fråga är vad detta kan ge för konsekvenser.

Utifrån det konceptuella och procedurella perspektivet vore det intressant att gå utanför en läromedelsanalys och istället studera hur lärare arbetar med begreppsbyggnad i matematikundervisning. Det vore också intressant att studera elevers förståelse för matematiska begrepp som bråk.

Ett tredje förslag på fortsatt forskning är en större studie som omfattar fler läromedel för att studera hur läromedlen förhåller sig till procedurell kontra konceptuell kunskap, då jag fann tydliga inslag av konceptuellt tänkande i läromedlen trots att de generellt sett anses vara procedurella. Vilket kan ha förklarande orsaker i de få läromedel som studerats eller på valet av område, bråk.

Referenser

Arevik, Sten & Hartzell, Ove. (2009). *Att göra tänkande synligt*. Stockholm: Stockholms Universitets förlag

Bentley, Per-Olof. (2008). *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bergsten, Christer. (1990). *Matematisk operativitet – En analys av relationen mellan form och innehåll i skolmatematiken*. Linköping: Dept. of Education and Psychology, Univ.

Bergsten, Christer (red.). Häggström, Johan & Lindberg Lisbeth. (1997). *Algebra för alla*. Nämnaren, Göteborgs universitet. Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik.

Dixon, James, A. & Bangert, Ashley, S. (2004). From regularities to concepts: the development of children's understanding of a mathematical relation. *Cognitive Development*. 20 (2005) 65–86 (No. 171?). pp 1-22.

Engström, Arne. (1998). *Matematik och reflektion*. Lund: Studentlitteratur

Falck, Pernilla. & Picetti, Margareta. (2005a). *Matte Direkt Borgen 5B*. Stockholm: Bonnier Utbildning AB.

Falck, Pernilla. & Picetti, Margareta. (2005b). *Matte Direkt Borgen – Lärarhandledning 5B*. Stockholm: Bonnier Utbildning AB.

Hägglom, Lisen. & Karlberg, Ann. (2008a). *Tänk och Räkna 5b*. Malmö: Gleerups Utbildning AB.

Hägglom, Lisen. & Karlberg, Ann. (2008b). *Tänk och Räkna 5b - Lärarhandledning*. Malmö: Gleerups Utbildning AB.

Nationalencyklopedin. (2010). <http://www.ne.se.ezproxy.ub.gu.se/kort/begrepp>. Hämtad: 2010-04-09

Rittle-Johnson, Bethany, Siegler, Robert, S. & Alibali, Martha, W. (2001). Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology*. No. 2. Vol. 93. pp. 346-362.

Rockström, Birgitta. (2004a). *Matteboken 5A*. Uppsala: Bonniers Utbildning AB.

Rockström, Birgitta. (2004b). *Matteboken 5 - Lärarhandledning*. Uppsala: Bonniers Utbildning AB.

Skolverket (2000): *Kursplan för Matematik*. Hämtad 2010-04-16.

<http://www.skolverket.se/sb/d/2386/a/16138/func/kursplan/id/3873/titleId/MA1010%20-%20Matematik>

Skolverket (2008a). *TIMMS 2007 - Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturkunskap i ett internationellt perspektiv*. RAPPORT 323 2008. Stockholm:Fritzes.

Skolverket (2008b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007- En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. ANALYSRAPPORT TILL 323 2008. Stockholm:Fritzes.

Skolverket (2010). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007 - En jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan*. ANALYSRAPPORT TILL 323 2008. Stockholm:Fritzes.

Stukát, Staffan. (2009). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Lund: Studentlitteratur.

Bilagor

Bilaga A

Till ansvarig för läromedel i matematik för grundskolan 4-5 hos Glerup

Hej!

Jag är lärarstudent på Göteborgs Universitet och skriver för tillfället på mitt examensarbete på C-nivå inom matematikdidaktik. I examensarbetet görs en läromedelsanalys av matematikläromedel, då de har en central roll som hjälpmedel för lärare och elever. Det som studeras i läromedlen är bråktal och bråktalsräkning, för årskurs fem. Det kan i och för sig skilja sig åt något mellan olika läromedel i vilken årskurs bråktal och bråktalsräkning behandlas, därför kan det vara aktuellt även med läromedel avsedda för skolår 4 och 6.

Med hänvisning till ovanstående så undrar jag om ni har möjlighet att bidra med läromedel, i form av lärobok och lärarhandledning/lärbok som behandlar bråktal och bråktalsräkning i första hand för årskurs 5 från era matematikboksserier. Det jag tror kan vara intressant för mig är något från följande bokserier.

- Tänk och räkna 5b lärobok med tillhörande lärarhandledning/lärbok
- Talriktet år 5 Grundbok 5b med tillhörande lärarhandledning/lärbok

Examensarbetet ska lämnas in i maj, så skulle jag vara väldigt tacksam om ni kan hjälpa mig snarast med detta bidrag.

Denna förfrågan ställs till följande förlag; Bonnier, Glerups, Natur och Kultur, Liber.

Tack på förhand!
Med vänliga hälsningar
Jenny Andersson

Mailadress: xxxxxxxxxxxxxxxx

Adress: xxxxxxxxxxxx

xxxxxxxxxxxx

Tele: xxxxxxxxxxxx

Mobil: xxxxxxxxxxxx

Handledare

Universitetslektor, Christian Bennet

xxxxxxxxxxxxx Tele: xxxxxxxxxxxx

Institutionen för pedagogik och didaktik

Matematikdidaktik

Göteborgs Universitet

Bilaga B

Kvantitativ undersökning av antalet uppgifter/räkneexempel i läromedlet	
Antal beskrivningar presentationer av bråktal/bråktalsräkning	
Antal räkneexempel	
Antal räkneuppgifter	
Kommunikativa räkneuppgifter	
Vardagsanknutna räkneuppgifter	
Konkreta räkneuppgifter	
<ul style="list-style-type: none"> • Bild • Laborativ • Annat 	
Abstrakta räkneuppgifter	
Begreppsbildning	
Tar läromedlet upp något om vikten av begreppskunskap?	
Uppmanas elever/lärare kommunicera kring bråktal/bråkräkning? Framgår anledningen till varför kommunikationen är viktig?	
Är uppgifterna vardagsanknutna? Framgår vikten av att uppgifterna i läromedlet är vardagsanknutna?	
Konkretiseras det abstrakta? Framgår anledningen till konkretion?	
Abstrahera det konkreta? Framgår anledningen till att det abstraheras?	
Procedurell eller konceptuell kunskapsfokusering	
På vilket sätt presenteras bråktal och bråktalsräkning för eleverna utifrån lärobok/lärohandledning? Beskrivande Historisk bakgrund? Vad ska det användas för? Kort och koncist Inte någon presentation av bråktal mer direkt på	

Mha formler/beräkningar? Mha momentrutor, Annat						
Ges någon definition av begreppet bråk/bråktal?						
Definieras de ingående delarna i bråktalet?						
Fokuserar de på att ge en begreppsmässig eller procedurell förståelse?						
Är det mängdträning eller färdighetsträning som fokuseras i läromedlen?						
Är det många räkneuppgifter av samma karaktär?						
Hur är textrutor, informationsrutor och exempelrutor utformade?						
På vilket sätt är räkneuppgifterna i läromedlen utformade?						
Uppmanas eleven att lösa räkneuppgifterna på samma sätt som räkneexemplet innan gjorde?						
Begreppsmodeller						
	Del-helhet	Andel	Operator	Tallinje	Mängd-jämförelse	Annan
Vilka begreppsmodeller används?						
I vilken ordning införs begreppsmodellerna?						
Införs modellerna så de stödjer begreppsbildning?						
Presenteras begreppsmodellerna i olika kontexter, dvs underlättas transfer?						
Introduceras begreppsmodeller utan någon logisk förklaring?						
Skär någon hopblandning eller konflikt av begreppsmodellernas egenskaper?						