Kardinalitet utan Urvalsaxiomet; ett potpourri[1]

Petter Remen

28 april 2005

[1]Inlämnad som C-uppsats till Filosofiska Instutionen vid Göteborgs Universitet med Christian Bennet som handledare.

Sammanfattning

Urvalsaxiomet (AC) är numera allmänt accepterat som ett naturligt fundament i mängdlära. Här presenterar vi hur kardinalitet och kardinaltal kan definieras utan AC och visar ett antal klassiska resultat om vad som kan ske i modeller till ZF där AC är falsk. Det visar sig då att kardinaltalsaritmetiken, som med urvalsaxiomet är trivial, får en potentiellt sett rik struktur.

Speciellt presenteras metoden att falsifiera AC i så kallade permutationsmodeller. Med denna metod visas ett relativt nytt resultat av Shelah och Halbeisen som visar att det är konsistent med ZF att det finns en mängd U sådana att mängden av ordnade par med element ur U har strängt mindre kardinalitet än mängden av oordnade par med element ur U.

1 Inledning och notation

Innehållet i denna text torde vara tillgänglig för envar som har grundläggande kunskaper om ZFC och den kumulativa hierarkin. Vad gäller notationen låter vi $\mathbb{N} = \omega = \omega_0$ beteckna de naturliga talen; ordnade par betecknas $\langle x, y \rangle$; n-tipler (ändliga sekvenser med längden n) skrivs $\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$; delmängd skrivs $\subseteq$ emedan äkta delmängd skrivs $\subset$.

Om $f\colon X \to Y$ är en funktion och $A \subseteq X$ så låter vi $f[A] := \{\, f(x) \mid x \in A \,\}$ vara bilden av A under f; om y tillhör värdeförrådet till f så är $f^{-1}(y) := \{\, x \mid f(x) = y \,\}$ inversa bilden av y under f. Om B är en delmängd till värdeförrådet till f så är $f^{-1}[B] := \{\, x \mid f(x) \in B \,\}$ inversa bilden av B under f.

2 Urvalsaxiomet och kardinaltalsaritmetik

2.1 Historik och några ekvivalenser

Betrakta följande argumentation:

> Antag att vi har en uppräknelig mängd, X, av uppräkneliga mängder. Låt A_i, där $i \in \mathbb{N}$, vara en uppräkning av elementen i X.
>
> Det är klart att $\bigcup X = \bigcup_i A_i$ är uppräknelig, ty låt $a_{i,j}$ där $j \in \mathbb{N}$ vara en uppräkning av elementen i A_i. Varje element i $\bigcup X$ motsvaras i så fall av (åtminstone) ett par av naturliga tal $\langle i, j \rangle$ och mängden av sådana par är uppräknelig.

Argumentationen verkar uppenbart giltig men vilar ändå på ett gömt antagande. Lägg nämligen märke till att det för varje A_i finns en hel uppsjö olika bijektioner $f\colon \mathbb{N} \to A_i$; så för att skapa en entydig funktion $a_{i,j}$ måste vi faktiskt välja en sådan bijektion för varje $i \in \mathbb{N}$. Problemet är bara att det inte generellt sett finns någon regel med vilken vi kan välja dessa bijektioner. Hur kan vi säga att en oändlig sekvens av saker existerar, om vi inte kan säga hur den ska konstrueras?

Det gömda antagandet är följande:

Axiom 1 (Urvalsaxiomet (AC))**.** *För varje mängd X av icketomma mängder finns det en funktion f sådan att $x \in X \Rightarrow f(x) \in x$. f sägs vara en* **urvalsfunktion**.

Med detta axiom, det vill säga i ZFC, kan vi bevisa att unionen av en uppräknelig mängd av uppräkneliga mängder är uppräknelig.

Bevis. Låt X vara en mängd av uppräkneliga mängder, vilket innebär att det finns en bijektiv funktion $A\colon \omega \to X$, och att det för varje $x \in X$ finns en bijektiv funktion $a\colon \omega \to x$.

Bilda nu mängden $F = \{\, y_i \mid i \in \omega \,\}$ där y_i är mängden

$$\{\, \langle i, a\rangle \mid a \text{ är en bijektiv funktion från } \omega \text{ till } A(i) \,\}.$$

F är en mängd av icketomma mängder och alltså finns det enligt urvalsaxiomet en funktion f sådan att $x \in F \Rightarrow f(x) \in x$. Värdeförrådet till f, det vill säga $\{\, \langle i, a\rangle \mid i \in \omega \wedge \langle i, a\rangle = f(y_i) \,\}$, genererar naturligt en surjektiv funktion från $\omega \times \omega$ på $\bigcup X$. Eftersom vi kan ordna $\omega \times \omega$ lexikografiskt finns det en funktion $g\colon \bigcup X \to \omega \times \omega$ som, för varje $x \in \bigcup X$, avbildas på det minsta $y \in \omega \times \omega$ sådant att $f(y) = x$. g kommer då vara bijektiv. Dessutom är bilden av g en oändlig delmängd till $\omega \times \omega$ och därför uppräknelig, varför $\bigcup X$ är uppräknelig. □

Huruvida man betraktar AC som intuitivt sant eller ej beror mycket på vilken uppfattning man har om när man kan påstå att ett matematiskt objekt *existerar*. Urvalsaxiomet anger nämligen inte hur urvalsfunktionen "fungerar" eller är uppbyggd. Det verkar ju föga konstruktivt. . . ?

Frågor och problem av den här typen dök upp framför allt under slutet av artonhundratalet, dels i analysen (se [9], kapitel 1.2), där man hade börjat titta noggrannare på godtyckliga sekvenser av reella tal och deras egenskaper, men framför allt i Cantors nyuppfunna mängdlära där en teori för det faktiskt oändliga hade skapats.

Cantor använde sig av urvalsaxiomet på ett flertal ställen i sina samlade verk, ofta implicit på liknande sätt som i exemplet ovan, men också på ett rätt förvånande sätt. Cantor ansåg nämligen till en början att det var intuitivt och logiskt självklart att

1. Alla mängder kan välordnas (välordningsprincipen)
2. Givet två godtyckliga mängder a och b så finns det en injektiv funktion f från a till b eller från b till a. (trichotomi)

men båda dessa påståenden är ekvivalenta med AC. Ekvivalensen för (1) formulerar vi så här (den andra kommer vi bevisa senare):

Faktum 1. $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{AC} \leftrightarrow \forall x \exists y\, (y \text{ välordnar } x)$[1]

Själva formuleringen av AC inom ramen för en axiomatisk framställning av mängdläran kom först med Zermelo i 1908 ([11]) i en till synes svagare form;

> Om X är en icketom mängd av parvis disjunkta, icketomma mängder så finns det en mängd Y som innehåller precis ett element ur varje element i X. (*Multiplicative axiom*)

[1]För bevis av detta och dylika obevisade fakta, se [6].

Idén var att detta skulle vara mer intuitivt självklart än den ursprungliga formuleringen i termer av urvalsfunktioner. Han visade dock i samma artikel att de två är ekvivalenta. Det vill säga:

Faktum 2. ZF $\vdash$ AC $\leftrightarrow$ *Multiplicative axiom.*

Kontroversen kring Zermelos axiomatisering var stor, men diskussionen ebbade ut något efter 1938 ([3]) då Gödel bevisade att om ZF är konsistent så är ZF + AC konsistent. Det är dock fortfarande intressant att studera den relativa styrkan hos AC, kanske speciellt i förhållande till påståenden om kardinaltal.

2.2 Likmäktighet

Först och främst definierar vi några välbekanta relationer.

Definition 1.

1. *Låt $a \preceq b$ omm det finns en injektiv funktion från a till b. a sägs vara* **inbäddbar** *i b.*
2. *Låt $a \simeq b$ omm det finns en bijektiv funktion från a på b. a och b sägs vara* **likmäktiga**.
3. *Låt $a \prec b$ omm $a \preceq b$ och $a \not\simeq b$.*

Vi får omedelbart ur definitionerna att $\preceq$ är en transitiv och reflexiv relation och att $\simeq$ är en ekvivalensrelation. Dessutom är de två relationerna relaterade till varandra via följande sats:

Faktum 3 (Schröder-Bernsteins sats)**.** ZF $\vdash \forall x \forall y\,(x \preceq y \wedge y \preceq x \rightarrow x \simeq y)$.

Vad som däremot *inte* följer ur ZF är att $\preceq$ skulle vara total.

Faktum 4. *ZF* $\vdash$ AC $\leftrightarrow \forall x \forall y\,(x \preceq y \vee y \preceq x)$.

Bevis. $\Rightarrow$) Antag att $M \vDash ZFC$ och att $a, b \in M$. Eftersom $M \vDash$ AC så finns välordningar $\langle a, <_a\rangle$ och $\langle b, <_b\rangle$, och varje välordning är (redan i ZF!) isomorf med något ordinaltal så $a \simeq \alpha$ och $b \simeq \beta$ för några ordinaltal α och β. Men för ordinaltalen är det sant att $\alpha \preceq \beta$ eller $\beta \preceq \alpha$ varför detta måste gälla för a och b också.
$\Leftarrow$) Antag att $M \vDash$ ZF + $\forall x \forall y\,(x \preceq y \vee y \preceq x)$ och låt a vara ett godtyckligt element i M.

Det måste finnas något ordinaltal som inte är inbäddbart i a. Vi har nämligen att varje ordinaltal α sådant att $\alpha \preceq a$ ger upphov till en unik välordning på en delmängd till a, och klassen av sådana välordningar är en delmängd till $\mathcal{P}(a \times a)$ och är således en mängd, emedan klassen av alla ordinaltal är en äkta klass.

Låt nu α vara ett ordinaltal som inte är inbäddbart i a. Enligt antagandet om M måste alltså $a \preceq \alpha$. Då finns det en bijektion mellan a och en delmängd till α, men varje delmängd till α är välordnad varför även a kan välordnas.

Eftersom a var godtyckligt vald, kan alla mängder i M välordnas, vilket enligt faktum 1 ger oss att $M \vDash$ AC. $\square$

Vi har alltså, precis som vi lovade, visat att Cantors antagande att trichotomi för $\prec$-relationen gäller, *kräver* urvalsaxiomet. Vi kan också dra slutsatsen att det i modeller till ZF där AC är falskt alltid kommer finnas två mängder a och b sådana att ingen av dem är inbäddbar i den andra.

Förutom $\preceq$ finns en annan naturlig "mindre-än" relation.

Definition 2. *Låt $a \preceq^* b$ omm det finns en surjektiv funktion från b på a.*

I modeller till ZFC sammanfaller dessa definitioner, men vi ska senare visa (se faktum 8 och avsnitt 3.2.3) att det finns en modell till ZF i vilken det finns mängder a och b sådana att $a \preceq^* b$ men samtidigt $b \prec a$.

2.3 Kardinaltalen

Eftersom $\simeq$ är en ekvivalensrelation kan vi låta $\mathcal{C}(a)$ vara ekvivalensklassen som a tillhör. Då varje välordning är isomorf med något ordinaltal får vi följande omformulering av faktum 1:

Faktum 5. AC *är ekvivalent med att varje ekvivalensklass under $\simeq$ skär klassen av ordinaltal, det vill säga*

$$\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{AC} \leftrightarrow \forall x\,(\mathcal{C}(x) \cap ON \neq \emptyset).$$

Med AC får vi därför en väldigt naturlig representant i varje ekvivalensklass, nämligen det minsta ordinaltalet däri. I modeller där AC är falsk är dock situationen annorlunda; det kommer att finnas mängder som inte är likmäktiga med något ordinaltal. Vad vi istället gör är att välja ut en mängd av representanter ur ekvivalensklassen, nämligen de med lägst rang.

Definition 3. Kardinaliteten *för en mängd x, $|x|$, definieras som $\mathcal{C}(x) \cap V_\alpha$ där α är det minsta ordinaltalet sådant att $\mathcal{C}(x) \cap V_\alpha \neq \emptyset$. $|x|$ kallas ett* **kardinaltal**.

Kardinaltal kommer att betecknas med frakturerade bokstäver, t.ex. $\mathfrak{m}$ och $\mathfrak{n}$, eventuellt med index.

Vi vill ha särskilda namn för ordinaltalens kardinaliteter. Låt ω_0 vara mängden av naturliga tal, och låt ω_α vara det minsta ordinaltalet λ sådant att $\omega_\beta \prec \lambda$ för alla $\beta < \alpha$. Vi låter $\aleph_\lambda := |\omega_\lambda|$ och kallar ett kardinaltal $\mathfrak{m}$ för ett **aleftal** om $\mathfrak{m}$ är ett heltal eller $\aleph_\lambda$ för något λ.

Ur en enkel lek med ord får vi alltså att AC är ekvivalent med att varje kardinaltal är ett aleftal.

2.4 Oändligheterna

En viktig del av forskningen kring axiomatiserad mängdlära är studiet av olika sorters ändlighetsbegrepp. Det är i själva verket inte helt självklart hur man ska formellt definiera ett sådant begrepp. Intuitivt är de ändliga mängderna precis de som har n stycken element, där n är något heltal. Samtidigt är ett heltal, intuitivt sett, något som fås genom att använda efterföljareoperationen ett ändligt antal gånger.

Denna självreferans löses i ZF genom att definiera efterföljareoperatorn som funktionen $\mathrm{Sc}(x) := x \cup \{x\}$ och sedan låta mängden av naturliga tal definitionsmässigt vara den minsta mängden som innehåller $0 = \emptyset$ och är sluten under efterföljareoperatorn. Därför kan man definiera ändlighet på följande sätt (en definition som vi hädanefter antar):

Definition 4. *En mängd x är* **ändlig** *omm $x \simeq n$, för något heltal n. x är* **oändlig** *om den inte är ändlig.*

En annan definition, som vid första anblicken inte verkar ha något med naturliga tal att göra är följande:

Definition 5. *En mängd x är* **dedekindoändlig** *omm $x \simeq y$ för någon äkta delmängd $y \subset x$. x är* **dedekindändlig** *omm den inte är dedekindoändlig.*

Det visar sig dock att dedekindoändlighet kan omformuleras på ett sätt som inbegriper mängden av naturliga tal:

Faktum 6. ZF $\vdash \forall x\,(x$ *är dedekindoändlig* $\leftrightarrow \omega \preceq x)$.

Det är också lätt att visa att

Faktum 7. ZF $\vdash \forall x\,(x$ *är ändlig* $\rightarrow x$ *är dedekindändlig*)

Det finns även andra ändlighetsbegrepp, se t.ex. [1] och [8]. Gemensamt för alla är att de i ZFC kommer vara ekvivalenta. I avsnitt 3.2.3 ska vi dock visa att det finns en modell till ZF i vilken det finns en mängd som är oändlig men dedekindändlig. Intressant nog kan vi då också visa att $\preceq$ och $\preceq^*$ inte överensstämmer.

Faktum 8. *Om $M \vDash ZF+$"det finns oändliga dedekindändliga mängder" så finns det mängder $a, b \in M$ sådana att $M \vDash a \preceq^* b \wedge a \npreceq b$.*

Bevis. Låt a vara en dedekindändlig, oändlig mängd och, för varje $n \in \mathbb{N}$, låt $a^{(n)}$ vara $\{\, \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \mid a_i \in a \wedge a_i \neq a_j$ närhelst i $\neq$ j $\}$, det vill säga mängden av alla n-tipler utan upprepning. Vi visar att om s är en oändlig, äkta delmängd till ω sådan att $s \neq \omega \setminus \{0\}$, så gäller:

$$\bigcup_{n \in s} a^{(n)} \succeq^* \bigcup_{n \in \omega} a^{(n)}, \tag{1}$$

men samtidigt

$$\bigcup_{n\in s} a^{(n)} \prec \bigcup_{n\in\omega} a^{(n)}. \tag{2}$$

(1). Låt s_i vara uppräkningen av elementen i s i den naturliga ordningen. Då gäller $s_i \geq i$ och därför finns det en surjektiv funktion $f_i\colon a^{(s_i)} \to a^{(i)}$, nämligen den som "skär bort" slutet på varje sekvens. Alltså är $\bigcup_{i\in\omega} f_i$ en surjektiv funktion som bekräftar (1).

(2). Eftersom $s \subset \omega$ gäller

$$\bigcup_{n\in s} a^{(n)} \subset \bigcup_{n\in\omega} a^{(n)}$$

varför

$$\bigcup_{n\in s} a^{(n)} \preceq \bigcup_{n\in\omega} a^{(n)}.$$

Vi måste alltså visa att $\bigcup_{n\in s} a^{(n)} \not\approx \bigcup_{n\in\omega} a^{(n)}$. Det räcker per definition att visa att $\bigcup_{n\in\omega} a^{(n)}$ är dedekindändlig.

Antag motsatsen, det vill säga att det finns en uppräknelig delmängd $b = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ till $\bigcup_{n\in\omega} a^{(n)}$. Med hjälp av b bygger vi nu en uppräkning av åtskilda element ur a vilket ger oss en motsägelse.

Lägg först och främst märke till att eftersom sekvenserna inte innehåller upprepningar så kommer mängden

$$B = \{\, x \mid x \text{ förekommer i någon sekvens } b_i \,\}$$

att vara en oändlig delmängd till a. Låt $c = \langle c_0, c_1, \ldots\rangle$ vara den uppräkneliga sekvens som ges av att konkatenera $b_0, b_1, b_2, \ldots$ i den ordningen. Definiera nu $a_i = c_k$ där k är det minsta naturliga talet sådant att $c_k \notin \{\, a_j \mid j < i \,\}$. Vi är garanterade att det finns ett sådant k för varje i eftersom B är oändlig. Men då bildar $\{a_0, a_1, \ldots\}$ en uppräknelig delmängd till a. □

2.5 Kardinaltalsaritmetik

Vi definierar de vanliga aritmetiska operationerna på kardinaltalen och presenterar sedan några resultat om dessa.

Definition 6. *Om $\mathfrak{m}$ och $\mathfrak{n}$ är kardinaltal och a och b är några element i $\mathfrak{m}$ respektive $\mathfrak{n}$ sådana att $a \cap b = \emptyset$ låter vi*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n} &\quad \textit{omm} \quad a \preceq b,\\
\mathfrak{m} < \mathfrak{n} &\quad \textit{omm} \quad \mathfrak{m} \leq \mathfrak{n} \textit{ och } \mathfrak{m} \neq \mathfrak{n},\\
\mathfrak{m} \parallel \mathfrak{n} &\quad \textit{omm} \quad \mathfrak{m} \not\leq \mathfrak{n} \textit{ och } \mathfrak{n} \not\leq \mathfrak{m},\\
\mathfrak{m} + \mathfrak{n} &\quad := \quad |a \cup b|, \textit{ och}\\
\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} &\quad := \quad |a \times b|,\\
\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} &\quad := \quad |a^b|, \textit{ där } a^b \textit{ är mängden av funktioner från } b \textit{ till } a.
\end{aligned}$$

Det är lätt att inse att detta definierar väldefinierade funktioner och relationer, det vill säga att funktionsvärdet respektive sanningsvärdet ej beror på vilka par av representanter a och b man väljer.

Däremot finns det inget naturligt sätt på vilket vi kan definiera oändliga summor och produkter. Antag t.ex. att X är en oändlig mängd av icketomma och parvis disjunkta mängder. Vi skulle vilja definiera kardinaltalssumman av elementen i X som $|\cup X|$. Men antag nu att det finns en mängd Y av parvis disjunkta mängder sådan att $|X| = |Y|$, det vill säga att det finns en bijektion $h\colon X \to Y$, och där det samtidigt är så att om $x \in X$ så gäller $|x| = |h(x)|$. Då kan vi inte utan urvalsaxiomet garantera att $|\cup X| = |\cup Y|$. I avsnitt 3.2.4 visar vi i själva verket att det finns en modell $M \models ZF$ i vilken det finns en uppräknelig mängd av uppräkneliga mängder vars union inte är uppräknelig.

Det "naturliga" sättet att definiera en oändlig produkt är att låta det vara kardinaliteten hos mängden av alla funktioner $f\colon X \to \cup X$ sådana att $f(x) \in x$. Men utan urvalsaxiomet kan vi inte garantera att det finns någon sådan funktion, dvs att en oändlig produkt av icketomma mängder kan bli tom!

Faktum 9. *Följande egenskaper hos de aritmetiska funktionerna går att visa i* ZF*:*

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{l} + \mathfrak{m}) + \mathfrak{n} &= \mathfrak{l} + (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) && (1)\\
\mathfrak{m} + \mathfrak{n} &= \mathfrak{n} + \mathfrak{m} && (2)\\
(\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m}) \cdot \mathfrak{n} &= \mathfrak{l} \cdot (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) && (3)\\
\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} &= \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} && (4)\\
\mathfrak{l} \cdot (\mathfrak{m} + \mathfrak{n}) &= \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{m} + \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{n} && (5)\\
\mathfrak{l}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} &= \mathfrak{l}^{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{l}^{\mathfrak{n}} && (6)\\
\mathfrak{m} &< 2^{\mathfrak{m}} && (7)\\
\mathfrak{m} + \mathfrak{n} &\leq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} \text{ } \textit{när } \mathfrak{m}, \mathfrak{n} \geq 2 && (8)
\end{aligned}
$$

Bevis. (1 - 2) följer ur associativitet och kommutativitet hos union.

(3). Om A, B och C är mängder så definieras bijektionen mellan $(A \times B) \times C$ och $A \times (B \times C)$ av

$$\{ \langle \langle\langle a, b\rangle, c\rangle , \langle a, \langle b, c\rangle\rangle \rangle \mid \langle\langle a, b\rangle, c\rangle \in (A \times B) \times C \}$$

som är en mängd enligt SUBST; på liknande sätt visar man (4).

(5) får vi eftersom $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$.

(6). Om A, B och C är mängder så är $\{ \langle f, \langle f{\restriction}A, f{\restriction}B\rangle\rangle \mid f \in C^{A\cup B} \}$ en mängd enligt SUBST, och denna bildar en bijektion mellan $C^{A\cup B}$ och $C^A \times C^B$.

(7) är Cantors sats.

(8). Låt $\mathfrak{m}_1$ och $\mathfrak{n}_1$ vara sådana att $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + 1$ och $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + 1$. Då gäller

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} &= (\mathfrak{m}_1 + 1) \cdot (\mathfrak{n}_1 + 1) \\
&= \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1 + 1 \\
&\geq 1 + \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1 + 1 \\
&= \mathfrak{m} + \mathfrak{n}
\end{aligned}$$

□

Faktum 10. *Följande påståenden är ekvivalenta med urvalsaxiomet:*

1. $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ *för oändliga kardinaltal* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$
2. $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ *för oändliga kardinaltal* $\mathfrak{m}$
3. *Om* $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{n}^2$*, så är* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$
4. *Om* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ *och* $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$*, så är* $\mathfrak{m} + \mathfrak{p} < \mathfrak{n} + \mathfrak{q}$
5. *Om* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ *och* $\mathfrak{p} < \mathfrak{q}$*, så är* $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p} < \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{q}$.
6. *Om* $\mathfrak{m} + \mathfrak{p} < \mathfrak{n} + \mathfrak{p}$*, så är* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$
7. *Om* $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p} < \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}$*, så är* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$

Bevisen för alla dessa ekvivalenser (och många, många fler) finns i [10], men för att ge ett exempel på hur sådana kan se ut så visar vi här 1. och 3.

Bevis 1. Eftersom AC implicerar att varje kardinaltal är ett aleftal får vi omedelbart att AC $\Rightarrow \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ för oändliga kardinaltal $\mathfrak{m}$ och $\mathfrak{n}$. Vi visar därför implikationen åt andra hållet.

Antag därför att m är en oändlig mängd. Låt nu α vara ett ordinaltal som inte är inbäddbart i m; vi vet sedan tidigare att ett sådant existerar. Vi har enligt antagande att $|m| \cdot |\alpha| = |m| + |\alpha|$, det vill säga att det finns en bijektiv funktion $f \colon m \times \alpha \to m \cup \alpha$ (vi kan anta att $m \cap \alpha = \emptyset$). Då är det antingen sant att $\exists x \in m \forall y \in \alpha\, f(\langle x, y\rangle) \in m$ *eller* $\forall x \in m \exists y \in \alpha\, f(\langle x, y\rangle) \in \alpha$. Men det första fallet implicerar att m är inbäddbar i α varför det andra fallet måste gälla. Eftersom α är välordnad kan vi, för varje x, välja det minsta y sådant att $f(\langle x, y\rangle) \in \alpha$. Detta ger oss en inbäddning av m in i α varför m kan välordnas. □

Bevis 3. Återigen är det lätt att visa AC $\Rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ för oändliga kardinaltal varför vi visar omvändningen.

Låt därför $\mathfrak{m}$ och $\mathfrak{n}$ vara oändliga kardinaltal. Då gäller:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{m}+\mathfrak{n} &= (\mathfrak{m}+\mathfrak{n})^2 \\
&= \mathfrak{m}^2 + 2{\cdot}\mathfrak{m}{\cdot}\mathfrak{n} + \mathfrak{n}^2 \text{ (visas med faktum 9)} \\
&\geq \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n} \\
&\geq \mathfrak{m}+\mathfrak{n} \text{ enligt faktum 6.8,}
\end{aligned}
$$

varför $\mathfrak{m}+\mathfrak{n} = \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$. Men enligt 1. så implicerar detta AC. $\square$

2.6 Andra funktioner på kardinaltal

Givet en mängd m, låter vi

$[m]^2$ vara mängden av alla delmängder till m med två element.

m^2 vara $m \times m$.

$fin(m)$ vara mängden av alla ändliga delmängder till m.

$fin(m)^n = \{\, \langle e_0, \ldots, e_{n-1} \rangle \mid \forall i{<}n\, (e_i \in fin(m))\, \}$.

$fin^0(m) = m$ och $fin^{n+1}(m) = fin(fin^n(m))$.

$\mathrm{seq}^{1\text{-}1}(m)$ vara mängden av alla ändliga sekvenser av element i m där varje element förekommer högst en gång.

$\mathrm{seq}(m)$ vara mängden av alla ändliga sekvenser av element i m.

Om $\mathfrak{m} = |m|$ låter vi, för varje funktion F ovan, $F(\mathfrak{m}) = |F(m)|$. Det är då naturligt att ställa sig frågan om vilka möjliga relationer som kan gälla mellan $F(\mathfrak{m})$ och $G(\mathfrak{m})$, där F och G är två av de ovanstående funktionerna. Med urvalsaxiomet blir detta trivialt; Om $\mathfrak{m}$ är oändligt så gäller $F(\mathfrak{m}) = G(\mathfrak{m})$ för alla F och G. Utan urvalsaxiomet blir det svårare.

Shelah och Halbeisen har ganska nyligen ([4], [5]) studerat just det här problemet och bland annat kommit fram till följande tabell av möjligheter:

	$\mathfrak{m}$	$\mathrm{fin}(\mathfrak{m})$	$\mathrm{seq}^{1\text{-}1}(\mathfrak{m})$	$\mathrm{seq}(\mathfrak{m})$	$2^{\mathfrak{m}}$
$\mathfrak{m}$	$=$	$=<$	$=<$	$=<$	$<$
$\mathrm{fin}(\mathfrak{m})$	$>=$	$=$	$>=<\parallel$	$>=<\parallel$	$<$
$\mathrm{seq}^{1\text{-}1}(\mathfrak{m})$	$>=$	$>=<\parallel$	$=$	$=<$	$>=<\parallel$
$\mathrm{seq}(\mathfrak{m})$	$>=$	$>=<\parallel$	$>=$	$=$	$>=<\parallel$
$2^{\mathfrak{m}}$	$>$	$>$	$>=<\parallel$	$>=<\parallel$	$=$

I [5] visas även att såväl $[m]^2 < m^2$ som $[m]^2 > m^2$ är möjliga. Vi kommer rekonstruera beviset för detta i avsnitt 3.2.6, men behöver först en uppsättning verktyg.

3 Fraenkel-Mostowskimodeller

Fraenkel visade 1922 ([2]) att så länge man har med urelement i sin mängdteori så finns det modeller i vilka AC är falskt. Idén är nämligen den att en modell M med urelement i någon mening inte kan skilja urelementen åt, vilket gör att en permutation av dessa faktiskt bildar en ny modell. Man kan dessutom konstruera M så att det finns uppräkneligt antal urelement, men där varje mängd i M bara "beror på" (t.ex. definieras via) ett ändligt antal. Då kommer inte mängden av urelement kunna ordnas totalt, ty denna ordning skulle i så fall "bero på" ett ändligt antal urelement $u_1, \ldots, u_n$, vilket är absurt eftersom det är klart att det finns en permutation ($\neq$ identitetsfunktionen) som ändrar ordningen på urelementen men samtidigt inte ändrar på just $u_1, \ldots, u_n$.

Vi ska precisera argumentet ovan och även ge en presentation av ett mer generellt tillvägagångssätt som vi sedan ska använda oss av för att bygga modeller i vilka olika förhållanden mellan kardinaliteter gäller. Det kommer även visa sig att alla resultat vi kommer fram till kan överföras till ZF, ett resultat som bygger på Cohens forcingteknik. Idéerna i avsnitt 2.1 och 2.2.1. kommer från [7] och de avsnitt 2.2.2 och framåt kommer från [6].

Vi börjar med att visa att det finns modeller med uppräkneligt många urelement.

3.1 Con(ZF) $\Rightarrow$ Con(ZFU)

Låt $\mathcal{V} = \langle V, \in \rangle$ vara en modell till ZF. Antag att vi har en formel $R(x, y)$ sådan att $\mathcal{V} \vDash R(x, y)$ *är en bijektiv funktionell relation*. Vi skriver $F(a)$ för det unika objekt $b \in \mathcal{V}$ som satisfierar $R(a, y)$.

Låt nu $x \in' y$ betyda att x tillhör bilden av y under F, alltså;

$$x \in' y \Leftrightarrow x \in F(y) \Leftrightarrow \exists z (x \in z \wedge R(y, z)).$$

Om ϕ är en formel så är ϕ' samma formel men med varje förekomst av $x \in y$ utbytt mot formeln som uttrycker $x \in' y$.

Det intressanta nu är att $\in'$ uppför sig väldigt likt $\in$. Låt nämligen ZF$^-$ vara ZF utan regularitetsaxiomet, då har vi att

Sats 1. *$\mathcal{V}' = \langle V, \in' \rangle$ är en modell till* ZF$^-$.

Bevis. Vi bevisar satsen genom att bevisa att om $\phi \in$ ZF$^-$ så gäller $\mathcal{V} \vDash \phi'$.

EXT Vi visar att $\forall x, y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in' x \leftrightarrow z \in' y))$ är sant i $\mathcal{V}$. Implikationen åt höger är uppenbart sant. Antag därför att $\forall z (z \in' x \leftrightarrow z \in' y)$. Detta är, per definition, ekvivalent med $\forall z (z \in F(x) \leftrightarrow z \in F(y))$, men då ger EXT i $\mathcal{V}$ att $F(x) = F(y)$ men då gäller $x = y$, ty F är bijektiv.

PAR Låt a och b vara två godtyckliga mängder. Låt $c = F^{-1}(\{a, b\})$. Då har vi att $z \in' c \Leftrightarrow z \in F(c) \Leftrightarrow z = a \vee z = b$.

UNION Vi visar att det för ett godtyckligt a finns ett b s.a.

$$\begin{aligned} x \in' b &\Leftrightarrow \exists z(x \in' z \wedge z \in' a) \\ &\Leftrightarrow \exists z(x \in F(z) \wedge z \in F(a)) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{y \in F(a)} F(y). \end{aligned}$$

Låt $c = \bigcup_{y \in F(a)} F(y)$. Denna mängd existerar enligt UNION och SUBST i $\mathcal{V}$. Låt nu $b = F^{-1}(a)$, då gäller $x \in' b \Leftrightarrow x \in c$ vilket var vad vi ville.

DEL Låt $\phi'(x)$ vara en godtycklig formel och a vara en godtycklig mängd. Eftersom $\phi'(x)$ är ett uttryck i språket för ZF och $F(a)$ är en mängd så finns det en mängd $c = \{\, x \mid x \in F(a) \wedge \phi'(x) \,\}$. Sätt $b = F^{-1}(c)$ så gäller $x \in' b \leftrightarrow x \in' a \wedge \phi'(x)$ vilket är det önskade resultatet.

POT Vi lägger först och främst märke till att

$$\begin{aligned} x \subseteq' y &\equiv \forall z(z \in' x \rightarrow z \in' y) \\ &\Leftrightarrow \forall z(z \in F(x) \rightarrow z \in F(y)) \\ &\Leftrightarrow F(x) \subseteq F(y). \end{aligned}$$

Låt a vara en godtycklig mängd och låt

$$\begin{aligned} c &= \{\, x \mid F(x) \subseteq F(a) \,\} \\ &= \{\, F^{-1}(y) \mid y \in \mathcal{P}(F(a)) \,\}. \end{aligned}$$

c är en mängd enligt SUBST, DEL, POT i $\mathcal{V}$ och det faktum att F(a) är bijektiv och definieras av en formel i språket för ZF. Låt nu $b = F^{-1}(c)$, då får vi:

$$\begin{aligned} x \in' b &\Leftrightarrow x \in F(b) \\ &\Leftrightarrow x \in c \\ &\Leftrightarrow F(x) \subseteq F(a) \\ &\Leftrightarrow x \subseteq' a. \text{ VSB} \end{aligned}$$

SUBST Låt $\phi(x, y)$ vara en formel i språket för ZF s.a. $\phi'(x, y)$ bildar en funktionell relation. Tag nu en godtycklig mängd a och låt c vara bilden av $F(a)$ under ϕ'. c är en mängd enligt SUBST i $\mathcal{V}$, så vi låter $b = F^{-1}(c)$. Vi får då att

$$\begin{aligned} x \in' b &\Leftrightarrow x \in c \\ &\Leftrightarrow \exists z(z \in F(a) \wedge \phi'(z, x)), \end{aligned}$$

och alltså gäller SUBST i $\mathcal{V}'$.

INF Vi definierar induktivt en funktion $f\colon \omega \to V$ på följande sätt (vi använder oss återigen av att F är bijektiv):

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= F^{-1}(\emptyset) \\ F(f(n+1)) &= F(f(n)) \cup f(n). \end{aligned}$$

Låt nu $\eta = f[\omega]$ och låt $\theta = F^{-1}[\eta]$. Lägg märke till att $x \in' \theta \Leftrightarrow x \in \eta$. Vi visar att θ innehåller $\emptyset'$ och är sluten under $\mathrm{Sc}'(x)$.

Vi har direkt att $\forall x (x \notin' F^{-1}(\emptyset))$ så $\emptyset' = F^{-1}(\emptyset)$. Eftersom $\emptyset' \in \eta$ har vi att $\emptyset' \in' \theta$.

Vidare gäller att om $a \in' \theta$ så $a \in \eta$, och alltså $a = f(n)$ för något $n \in \omega$. Men vi har ju att

$$\begin{aligned} z \in' f(n+1) &\Leftrightarrow z \in F(f(n+1)) \\ &\Leftrightarrow z \in F(f(n)) \cup \{f(n)\} \\ &\Leftrightarrow z \in' f(n) \text{ eller } \; z = f(n) \\ &\Leftrightarrow z \in' f(n) \cup' \{f(n)\}' \\ &\Leftrightarrow z \in' \mathrm{Sc}'(a), \end{aligned}$$

och därför gäller $\mathrm{Sc}'(a) \in \eta$ och alltså $\mathrm{Sc}'(a) \in' \theta$. □

Tyvärr får vi inte, på detta sätt, nödvändigtvis en modell som negerar AC.

Faktum 11. *Om urvalsaxiomet är sant i $\mathcal{V}$ ovan så är det sant i $\mathcal{V}'$ också.*

Vi får däremot möjligheten att skapa modeller med urelement!

Definition 7. *Ett* **urelement** *är en mängd x sådan att $x = \{x\}$, det vill säga $\forall y\,(y \in x \leftrightarrow y = x)$.*

Sats 2. *Det finns en struktur M sådan att*

$$M \models ZF^- + \text{“det finns uppräkneligt många urelement”}.$$

Bevis. Låt $\mathcal{V}$ vara en modell till ZF och låt $F(x)$ vara sådant att om n är ett naturligt tal > 0 så gäller $F(n) = \{n\}$, $F(\{n\}) = n$ och annars gäller $F(x) = x$. Lägg märke till att vi måste kräva att $n > 0$ eftersom $\{0\} = 1$ och F hade i så fall inte varit väldefinierad.

Låt nu $M = \langle V, \in' \rangle$. Vi har, för varje $n > 0$ att $\mathcal{V} \models \forall x (x \in' n \leftrightarrow x = n)$ så varje n kommer att vara ett urelement i M.

Vi definierar nu, med induktion i $\mathcal{V}$ en funktion f sådan att

$$\begin{aligned} f(0) &= F^{-1}(0) \\ f(n+1) &= F^{-1}(\{f(0), \dots, f(n)\}). \end{aligned}$$

Man får övertyga sig om att bilden av f i själva verket är den mängd som i M tolkas som ω.

Om vi låter $\{a_0, \ldots, a_n\}'$ vara en förkortning för $F^{-1}(\{a_0, \ldots, a_n\})$ så kan vi låta $\langle a, b\rangle'$ vara $\big\{\{a\}', \{a, b\}'\big\}'$. Med lite tankekraft räknar man ut att dessa definitioner faktiskt gör det dom ska, det vill säga att $\langle a, b\rangle'$, i M, kommer att vara det ordnade paret av a och b. Vi sätter nu

$$g = F^{-1}\big(\{\, \langle n, f(n)\rangle' \mid n \in \omega \,\}\big).$$

g är då en mängd i $\mathcal{V}$ och är, *i* M, en bijektion mellan urelementen och ω. $\square$

Lägg märke till att även om modellen M ovan självklart strider mot regularitet så är det egentligen bara urelementen som utgör motexempel. Därför kommer följande variant av regularitet vara sann i M:

$$x \neq \emptyset \to \exists y\big(\, y \in x \wedge (y \cap x = \emptyset \vee y = \{y\})\,\big). \qquad \text{(UREG)}$$

Vi låter **ZFU** vara $ZF^{-}+UREG$. Från sats 2 vet vi att det finns modeller till ZFU som har uppräkneligt många urelement.

Det finns för ZFU en motsvarighet till den klassiska kumulativa hierarkin, med den enda skillnaden att den lägsta nivån inte utgörs av $\emptyset$ utan av mängden av urelement. Det finns sådeles ett relevant rangbegrepp.

Definition 8. *Den tvåställiga funktionen $\mathcal{P}^{\alpha}(x)$ definieras med transfinit induktion*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{0}(x) &= x \\ \mathcal{P}^{\alpha+1}(x) &= \mathcal{P}^{\alpha}(x) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}^{\alpha}(x)) \\ \mathcal{P}^{\lambda}(x) &= \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{P}^{\alpha}(x). \end{aligned}$$

I modeller M till ZFU är det nu sant $\forall x \exists \alpha\, (x \in \mathcal{P}^{\alpha}(U))$, där $U = \{\, x \mid x \in \{x\}\,\}$ är mängden av alla urelement. Vi låter **rangen** för en mängd x i M vara det minsta ordinaltal α sådant att $x \in \mathcal{P}^{\alpha}(U)$.

Det intressanta med dessa modeller är att varje permutation på urelementen går att utvidga (på ett naturligt sätt) till en automorfism på hela modellen. Det är just detta faktum som gör att vi kan skapa modeller i vilka AC är falska.

3.2 Permutationsmodeller

Definition 9. *Låt $M \vDash ZFU$ och låt U vara mängden av urelement i M. Om π är en permutation på U definierar vi $\hat{\pi}\colon M \to M$ som*

$$\hat{\pi}(x) = \begin{cases} \pi(x), & \text{när } x \in U \\ \{\, \hat{\pi}(y) \mid y \in x \,\}, & \text{när } x \notin U. \end{cases}$$

Faktum 12. *Om $M \vDash ZFU$ och π är en permutation av urelementen i M så är $\hat{\pi}$ en automorfism på M, det vill säga en bijektion som bevarar $\in$-relationen.*

Eftersom det inte kommer innebära några ambiguiteter använder vi oss av notationen $\pi(x)$ även för $\hat{\pi}(x)$.

Vi bygger nu inre modeller till M i vilka urvalsaxiomet är falskt. Vi börjar med följande betraktelser och överlämnar de enkla bevisen till läsaren:

Faktum 13. *Om $M \vDash ZFU$, $\pi(x)$ är en permutation på urelementen och $\phi(a_0, \ldots, a_n)$ är en sats med parametrar $a_0, \ldots, a_n \in M$ så gäller*

$$M \vDash \phi(a_0, \ldots, a_n) \Leftrightarrow M \vDash \phi(\pi(a_0), \ldots, \pi(a_n)).$$

Bevis. Bevisas med induktion över komplexiteten på ϕ. □

Faktum 14. *Om α är ett ordinaltal så gäller $\pi(\alpha) = \alpha$.*

Bevis. Inses lätt eller bevisas med transfinit induktion över α. □

3.2.1 OAD och HOAD

Precis som i fallet med ZF definierar vi, relativt en modell $M \vDash ZFU$, de ordinaltals- och atomdefinierade mängderna, OAD(M).

Definition 10. *En mängd a tillhör OAD(M) om och endast om det finns en formel $\phi(x, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, u_0, \ldots, u_m)$ med en fri variabel x, där ordinaltalen $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ och urelementen $u_0, \ldots, u_m$ får ingå som parametrar, sådan att $M \vDash \phi(x, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, u_0, \ldots, u_m) \leftrightarrow x = a$.*

De hereditärt ordinaltals- och atomdefinierade mängderna, HOAD(M), får vi sedan via

Definition 11. *En mängd a tillhör HOAD(M) omm a och varje element i det transitiva höljet till a finns med OAD(M).*

Faktum 15. *Om $M \vDash ZFU$ så gäller $HOAD(M) \vDash ZFU$.*

Bevis. Beviset är det samma som i fallet med ZF fast vi måste försäkra oss om att mängden av urelement finns med i HOAD. Men denna är ju definierbar via formeln $\forall y(y \in x \leftrightarrow y = \{y\})$. □

Men i HOAD(M) är AC falskt!

Sats 3. *Om $M \vDash ZFU$ så $HOAD(M) \vDash \neg\mathrm{AC}$.*

Bevis. Vi visar att det inte ens finns någon sträng total ordning av mängden av urelement, vilket motsäger välordningssatsen.

Antag därför att v är en sträng total ordning av urelementen. Då finns det en formel $\phi(x, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, u_0, \ldots, u_m)$ sådan att

$$M \vDash \forall x(\phi(x, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, u_0, \ldots, u_m) \leftrightarrow x = v).$$

Men välj nu två urelement a och b, skilda från $u_0, \ldots, u_n$, sådana att $\langle a, b\rangle \in v$. Låt π vara en permutation som byter plats på a och b men som för övrigt inte ändrar på några urelement.

Enligt faktum 13 så gäller

$$M \vDash \forall x(\phi(x, \pi(\alpha_0), \ldots, \pi(\alpha_n), \pi(u_0), \ldots, \pi(u_0)) \leftrightarrow x = \pi(v))$$

vilket, med vårt val av π och faktum 14, ger att $\pi(v) = v$. Men vi har också att $M \vDash \langle a, b\rangle \in v$ varför $M \vDash \pi(\langle a, b\rangle) \in \pi(v)$, det vill säga $M \vDash \langle b, a\rangle \in v$ vilket motsäger att v är en sträng ordning. □

3.2.2 En generalisering

Vi presenterar nu en generaliseringen av föregående resultat, med vars hjälp vi kan konstruera ett flertal olika modeller i vilka vi kan påtvinga olika relationer mellan kardinaliteter.

Låt som vanligt $M \vDash ZFU$ och U vara urelementen i M. Låt G vara en grupp av permutationer på U.

Definition 12. **Symmetrigruppen** *för en mängd* x, $\mathrm{sym}_G(x)$, *är mängden av alla permutationer i* G *som fixerar* x. *Det vill säga*

$$\mathrm{sym}_G(x) := \{\, \pi \in G \mid \pi(x) = x \,\}.$$

Dessutom låter vi, för varje delmängd $S \subseteq U$, $\mathrm{fix}_G(S)$ vara gruppen av alla permutationer som fixerar *elementen* i S, det vill säga

$$\begin{aligned} \mathrm{fix}_G(S) &:= \{\, \pi \in G \mid \pi(s) = s \text{ för alla } s \in S \,\} \\ &= \bigcap_{s \in S} \mathrm{sym}_G(s). \end{aligned}$$

Definition 13. *En mängd* $\mathcal{F}$ *av delgrupper till* G *är ett* **normalt filter** *på* G *om det för alla delgrupper* H *och* K *till* G *gäller att*

(1) $G \in \mathcal{F}$,

(2) om $H \in \mathcal{F}$ *och* $H \subseteq K$, *så* $K \in \mathcal{F}$,

(3) om $H, K \in \mathcal{F}$ *så* $H \cap K \in \mathcal{F}$,

(4) om $\pi \in G$ *och* $H \in \mathcal{F}$, *så* $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$,

(5) för varje $u \in U$, $\{ \pi \in G \mid \pi(u) = u \} \in \mathcal{F}$.

Definition 14. *Låt $\mathcal{F}$ vara ett normalt filter på G. En mängd x sägs vara* **symmetrisk** *om symmetrigruppen för x tillhör $\mathcal{F}$.*

Definition 15. *En mängd x är* **hereditärt symmetrisk** *om x är symmetrisk och varje element i det transitiva höljet av x är symmetriskt.*

Faktum 16. *Låt $\mathcal{V} = \{ x \in M \mid x \text{ är hereditärt symmetrisk} \}$. Då är $\mathcal{V}$ en modell till ZFU. En sådan modell kallas en* **permutationsmodell**.

Bevis. Vi visar här att PAR och POT är sanna i $\mathcal{V}$ och hänvisar till [6], sidorna 46-47, för resten av beviset.

PAR Låt a och b vara två godtyckliga mängder i $\mathcal{V}$, dvs a och b är hereditärt symmetriska. För att visa att $\{a, b\} \in \mathcal{V}$ räcker det alltså att visa att $\{a, b\}$ är symmetrisk. Det är dock klart att $\text{sym}_G(a) \cap \text{sym}_G(b) \subseteq \text{sym}_G(\{a, b\})$ och enligt egenskaperna (2) och (3) hos filtret $\mathcal{F}$ så får vi alltså att $\text{sym}_G(\{a, b\}) \in \mathcal{F}$, vilket skulle bevisas.

POT Låt a vara en mängd och låt $b = \mathcal{P}(a) \cap \mathcal{V}$. Det är klart att elementen i b är hereditärt symmetriska varför det räcker att visa att b är symmetrisk. Det gäller för *alla* x att om $\pi \in G$ så är $\text{sym}_G(\pi(x)) = \pi \text{sym}_G(x) \pi^{-1}$ och alltså är $\pi(x)$ symmetrisk närhelst x är det. Detta innebär att om x är ett element i b så är $\pi(b)$ det också.

Låt nu $\pi \in \text{sym}_G(a)$. Då har vi att

$$\begin{aligned} x \in b &\Rightarrow \pi^{-1}(x) \in b \\ &\Rightarrow x \in \pi(b), \text{ och dessutom att} \\ x \in \pi(b) &\Rightarrow x = \pi(y) \text{ för ngt } y \in b \\ &\Rightarrow x = \pi(y) \in b. \end{aligned}$$

Alltså gäller $\pi(b) = b$ varför $\pi \in \text{sym}_G(b)$ och alltså $\text{sym}_G(a) \subseteq \text{sym}_G(b)$ och eftersom $\mathcal{F}$ är ett filter så har vi att $\text{sym}_G(b) \in \mathcal{F}$ vilket skulle bevisas. □

Vi kommer här endast att använda oss av en speciell sorts filterkonstruktion, nämligen filtret som fås via ett normalt ideal på U.

Definition 16. *Låt G vara en grupp av permutationer på U. En familj I av delmängder till U är ett* **normalt ideal** *om det för alla $E, F \subseteq U$ gäller att:*

1. *$\emptyset \in I$,*
2. *om $E \in I$ och $F \subseteq E$, så gäller $F \in I$,*
3. *om $E, F \in I$, så gäller $E \cup F \in I$*

4. *om $\pi \in G$ och $E \in I$, så gäller $\pi[E] \in I$ och*

5. *för varje $u \in U$ så gäller $u \in I$.*

Om F är någon familj av delmängder till U och I är det minsta idealet sådant att $F \subseteq I$ så säger vi att I **genereras** av F.

Faktum 17. *Antag att I är ett normalt ideal på U. Låt $\mathcal{F}$ vara mängden av alla delgrupper, H, till G sådana att $H \supseteq \mathrm{fix}_G(E)$ för något $E \in I$. Då är $\mathcal{F}$ ett normalt filter på G.*

Bevis. Vi måste visa att $\mathcal{F}$ har alla egenskaperna i definition 13.

1. $G \in \mathcal{F}$ eftersom $G = \mathrm{fix}_G(\emptyset)$.

2. Vi har direkt ur definitionen av $\mathcal{F}$ att om $H \in \mathcal{F}$ och $K \supseteq H$ så gäller $K \in \mathcal{F}$.

3. $\mathcal{F}$ är slutet under snitt, ty antag att $H, K \in \mathcal{F}$. Då finns det $E, F \in I$ sådana att $H \supseteq \mathrm{fix}_G(E)$ och $K \supseteq \mathrm{fix}_G(F)$. Men $H \cap K \supseteq \mathrm{fix}_G(E) \cap \mathrm{fix}_G(F) = \mathrm{fix}_G(E \cup F)$ och $E \cup F \in I$ varför $H \cap K \in \mathcal{F}$.

4. Antag att $\pi \in G$ och $H \in \mathcal{F}$. Vi vet då att det finns ett $E \in I$ sådant att $H \supseteq \mathrm{fix}_G(E)$. Enligt definitionen av ideal så gäller $\pi[E] \in I$. Låt nu $\pi_0 \in G$ vara sådant att $\pi_0 \in \mathrm{fix}_G(\pi[E])$, det vill säga $\pi_0\pi(e) = \pi(e)$ för alla $e \in E$. Vi vill visa att $\pi_0 \in \pi H \pi^{-1}$ ty då är $\mathrm{fix}_G(\pi[E]) \subseteq \pi H \pi^{-1}$ och således gäller $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$.

   Men vi har ju att $\pi^{-1}\pi_0\pi(e) = e$ för alla $e \in E$, det vill säga $\pi^{-1}\pi_0\pi \in \mathrm{fix}_G(E) \subseteq H$. Samtidigt har vi att $\pi(\pi^{-1}\pi_0\pi)\pi^{-1} = \pi_0$ varför $\pi_0 \in \pi H \pi^{-1}$.

5. Låt $u \in U$. Enligt definitionen av ideal så gäller $\{u\} \in I$ varför $\mathrm{fix}_G(u) \in \mathcal{F}$

□

Ett filter $\mathcal{F}$ som bildas av ett ideal I på ovanstående sätt har egenskapen att en mängd x är symmetrisk omm det finns en mängd urelement $E_x \in I$ sådan att $\mathrm{fix}_G(E_x) \subseteq \mathrm{sym}_G(x)$. E_x kallas för ett **stöd** (eng. support) för x.

Antag nu att vi har byggt en permutationsmodell $\mathcal{V}$ sådan att det i $\mathcal{V}$ finns två kardinaltal $\mathfrak{n}$ och $\mathfrak{m}$ sådana att $\mathcal{V} \vDash \phi(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$, där ϕ är något intressant förhållande mellan de två kardinaltalen. Från detta kan vi alltså dra slutsatsen att det är konsistent med ZFU att det finns två sådana kardinaltal.

I själva verket kan vi åstadkomma mer än så. Antag att vi har en modell $M \vDash ZFU + AC$, och att $\mathcal{V}$ är en permutationsmodell i M. **Kärnan** i M, vilket vi skriver M_0, är helt enkelt elementen i M vars transitiva hölje saknar urelement. Då är det ett faktum att $M_0 \vDash ZF$. Genom forcing kan vi nu skapa generiska extensioner, N, till M_0 på ett sådant sätt att $N \vDash ZF$ och där strukturen hos godtyckligt stora delar av $\mathcal{V}$ kan återfinnas i N. Mer precist har vi följande sats[2]:

Sats 4 (Jech-Sochor). *Låt M vara en modell till $ZFU + AC$, U vara mängden av urelement i M, M_0 vara kärnan i M och låt α vara ett godtyckligt ordinaltal i M. Då finns det, för varje permutationsmodell $\mathcal{V} \subseteq M$, en symmetrisk extension $N \supseteq M_0$ och en mängd $\widetilde{U} \in N$, sådan att $N \vDash ZF$ och där*

$$(\mathcal{P}^\alpha(U))^\mathcal{V} \text{ är isomorf med } (\mathcal{P}^\alpha(\widetilde{U}))^N.$$

Bevis. Se [6], sidorna 85-89. Idén i beviset är att expandera M_0 med $|U|$ nya generiska mängder $\tilde{u_0}, \tilde{u_1}, \ldots$ där varje $\tilde{u_i}$ är en mängd av mängder av ordinaltal sådan att $|\tilde{u_i}| > \mathcal{P}^\alpha(U)$. Därefter begränsar man den nya expanderade modellen genom att med hjälp av filtret som användes i konstruktionen av $\mathcal{V}$ endast ta med de mängder som är hereditärt symmetriska med avseende på permutationer av forcingvillkoren. På detta sätt fås modellen $N \vDash ZF$ som falsifierar urvalsaxiomet och där strukturen $\mathcal{P}^\alpha(\{\tilde{u_0}, \tilde{u_1}, \ldots\})$ uppför sig (är isomorf med) den ursprungliga strukturen $\mathcal{P}^\alpha(U)$. □

Som en konsekvens av detta får vi följande faktum som ger oss ett tillräckligt villkor för när vi kan lyfta över ett påstående från en permutationsmodell till en modell för ZF.

Definition 17. *$\phi(x)$ är en* **begränsad** *formel omm $\phi(x)$ är på formen $\exists\alpha\, \psi(x, \alpha)$ där alla kvantifikatorer i ψ är på formen $\exists z \in \mathcal{P}^\alpha(x)$ eller $\forall z \in \mathcal{P}^\alpha(x)$.*

Faktum 18. *Om $\mathcal{V}$ är en permutationsmodell och $\mathcal{V} \vDash \exists x\, \phi(x)$ där $\phi(x)$ är en begränsad formel så finns det en modell $N \vDash$ ZF sådan att $N \vDash \exists x\, \phi(x)$.*

Alla påståenden om kardinaltal som vi, i den här texten, vill visa vara konsistenta med ZF är ekvivalenta med ett sådant begränsat existenspåståenden. Detta innebär att det räcker att hitta en permutationsmodell i vilket påståendet gäller. Vi kommer nu bygga fyra olika sådana permutationsmodeller. I samtliga fall kommer M vara en modell till ZFU och U kommer vara (den uppräkneliga) mängden av alla urelement.

[2]Vi har här valt att använda oss av formuleringen som finns i [6] där teorin för mängdlära med urelement är något annorlunda. Självklart kan inte $\mathcal{P}^\alpha(U)$ vara isomorft med någon struktur i vilken regularitetsaxiomet är sant. Satsen kan dock lätt omformuleras för att täcka in vår definition genom att begränsa $\in$-relationen i $\mathcal{P}^\alpha(U)$ så att $u \notin u$ för alla $u \in U$.

3.2.3 Fraenkelmodellen

Vi beskriver först och främst permutationsmodellen som närmast motsvarar modellen HOAD(M) ovan. Låt G vara gruppen av alla permutationer på U och låt I vara mängden av alla ändliga delmängder till U. Då är I ett ideal, varför vi skapar motsvarande filter $\mathcal{F}$ och bildar vår permutationsmodell $\mathcal{V}_F$ (F för Fraenkel).

Faktum 19. *Låt $\mathfrak{m}$ vara kardinaliteten hos U i $\mathcal{V}_F$. Följande påståenden är då sanna i $\mathcal{V}_F$:*

1. *U är oändlig och dedekindändlig.*
2. $\mathrm{fin}(\mathfrak{m}) \parallel \mathrm{seq}^{1\text{-}1}(\mathfrak{m})$
3. $\mathrm{fin}(\mathfrak{m}) \parallel \mathrm{seq}(\mathfrak{m})$
4. $\mathrm{seq}^{1-1} \parallel 2^{\mathfrak{m}}$
5. $\mathrm{seq}(\mathfrak{m}) \parallel 2^{\mathfrak{m}}$

Bevis. Vi visar (1) och hänvisar till [5] för 2-4.

Att U är oändlig är klart ty om det hade funnits en bijektion mellan U och ett heltal n i V_F så hade denna bijektion redan funnits i M. Vi visar alltså att U är dedekindändlig.

Antag att det finns en injektiv funktion $f\colon \omega \to U$. Då finns det ett stöd $E_f \in I$ för f. Eftersom E_f är ändlig så kan inte gärna $\mathrm{fix}_G(E_f) \subseteq \mathrm{fix}_G(f[\omega])$ så det finns en permutation $\pi \in \mathrm{fix}_G(E_f)$ sådan att $\pi \notin \mathrm{fix}_G(f[\omega])$, det vill säga $\pi(f(n)) \neq f(n)$ för något n. Samtidigt gäller $\pi(n) = n$ och alltså kan inte $\pi(f) = f$ vilket motsäger att E_f var ett stöd för f. $\square$

3.2.4 Ett efterlängtat motexempel

Låt M vara en modell till ZFU med en uppräknelig mängd U av urelement och $\{\, U_i \mid i \in \omega \,\}$ vara en partition av U där varje U_i är uppräknelig. Låt nu G vara gruppen av alla permutationer, π, på U sådana att $\pi[U_i] = U_i$ för alla U_i. Låt I genereras av familjen av ändliga unioner av U_i:n. Då är I ett ideal varför vi låter $\mathcal{F}$ vara filtret som fås av I och skapar en permutationsmodell $V_{\mathcal{F}}$.

Följande gäller då i $V_{\mathcal{F}}$:

1. $\{\, U_i \mid i \in \omega \,\}$ är en uppräknelig familj av uppräkneliga mängder.
2. $U = \bigcup_{i \in \omega} U_i$ är en ickeuppräknelig mängd.

(2) är sant av egentligen samma anledning som i Fraenkelmodellen, dvs en total ordning av urelementen kan inte ha ett ändligt stöd. Vi visar istället (1).

Bevis. Låt $f_i = \{\, \langle j, u_{i,j} \rangle \mid j \in \omega \,\}$ vara en uppräkning i M av elementen i U_i. Varje $j \in \omega$ är symmetrisk och varje $u_{i,j}$ är ett urelement så dessa är också symmetriska. Dessutom är f_i självt symmetrisk eftersom $\mathrm{fix}_G(U_i) \subseteq \mathrm{sym}_G(f_i)$ (i själva verket är dom ju lika). Alltså är varje U_i uppräknelig i $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$. Dessutom är $f = \{\, \langle i, U_i \rangle \mid i \in \omega \,\}$ trivialt symmetrisk eftersom $\pi(f) = f$ för varje $\pi \in G$. □

3.2.5 Den ordnade Mostowskimodellen

Låt $<^U$ vara en tät linjär ordning utan ändpunkter på U. Låt G vara gruppen av alla permutationer, π, på U sådana att om $u <^U v$ så gäller $\pi(u) <^U \pi(v)$ (π bevarar ordningen på elementen i U). Låt slutligen I vara mängden av alla ändliga delmängder till U. I är ett ideal och vi bildar vår permutationsmodell V_M (M för Mostovski). Låt $\mathfrak{m} = |U|$, då

Faktum 20. *Låt $\mathfrak{m}$ vara kardinaliteten hos U i $\mathcal{V}_F$. Följande kedja av olikheter är då sann i $\mathcal{V}_F$:*

$$\mathfrak{m} < [\mathfrak{m}]^2 < \mathfrak{m}^2 < \mathrm{fin}(\mathfrak{m}) < 2^{\mathfrak{m}} < \mathrm{seq}^{1\text{-}1}(\mathfrak{m}) < \mathrm{seq}(\mathfrak{m}).$$

Bevis. Vi hänvisar återigen till [5] och visar bara $[\mathfrak{m}]^2 < \mathfrak{m}^2$.

Först och främst uppmärksammar vi att $<^U$ är ett element i $\mathcal{V}_M$ eftersom alla permutationer i G bevarar ordningen. Av denna anledning kan vi definiera den injektiva funktionen $f\colon [U]^2 \to U^2$ sådan att $f(\{u, v\}) = \langle u, v \rangle$ om $\langle u, v \rangle \in <^U$ och $\langle v, u \rangle$ annars. Vi behöver alltså visa att det inte finns någon injektiv funktion från U^2 till $[U]^2$.

Antag motsatsen och låt $g\colon U^2 \to [U]^2$ vara en injektiv funktion i $\mathcal{V}_M$ med ändligt stöd E_g. Antalet ordnade par med element ur E_g är $|E_g|^2$ emedan antalet oordnade par med element ur E_g är $\binom{|E_g|}{2}$ vilket är strängt mindre än $|E_g|^2$ när E_g är ändligt. Alltså finns det ett par av urelement $\langle u, v \rangle \in {E_g}^2$ sådant att $g(\langle u, v \rangle) = \{a, b\}$, där $a \notin E_g$. Låt nu $\pi \in \mathrm{fix}_G(E_g)$ vara sådant att $\pi(a) \neq a$. Eftersom g bevarar ordningen på U så kan inte $\pi(a) = b$ och $\pi(b) = a$ varför $\pi(\{a, b\}) \neq \{a, b\}$. Då har vi alltså att $\pi(\langle u, v \rangle) = \langle u, v \rangle$ men $\pi(g(\langle u, v \rangle)) \neq g(\langle u, v \rangle)$ och således $\pi(g) \neq g$ vilket emotsäger att E_g är ett stöd för g.

□

3.2.6 En modell där $\mathbf{m}^2 < [\mathbf{m}]^2$

Vi ska nu visa ett mer tekniskt och "konstruerat" exempel på en permutationsmodell.

Antag att vi i M har en uppräknelig mängd A och en grupp G av permutationer på A. Eftersom både A och U är uppräkneliga, finns det en bijektion $h\colon U \to A$, och då kommer $G_h = \{\, h^{-1} \circ \pi \circ h \mid \pi \in G \,\}$ att vara en grupp av permutationer på U.

På motsvarande sätt kommer ett filter $\mathcal{F}$ av delgrupper till G att motsvara ett filter $\mathcal{F}_h$ av delgrupper till H och vi kan således bilda en permutationsmodell $\mathcal{V}_\mathcal{F}$. Frågor vi ställer om $\mathcal{V}_\mathcal{F}$ kommer då vara intimt sammankopplade med egenskaper hos A, G och $\mathcal{F}$ i M. Vi kommer därför kunna resonera som om A vore mängden av urelement, även fast den potentiellt sett innehåller mer struktur än en mängd av "riktiga" urelement skulle göra.

Vi ska nu bilda en uppräknelig mängd A och en grupp G av permutationer på A, sedan visa hur översättningen fram och tillbaka mellan U och A kan se ut och till slut helt enkelt låtsas som om A är mängden av urelement.

Låt A_0 vara en godtycklig uppräknelig mängd i M och låt G_0 vara mängden av alla permutationer på A_0. Vi låter nu

$$A_{n+1} = A_n \cup \{\, (n+1, p, \epsilon) \mid p \in A_n \times A_n \wedge \epsilon \in \{0,1\}\,\}$$

och G_{n+1} vara den minsta mängden av permutationer på A_{n+1} sådan att det för varje $g \in G_n$ finns två permutationer h_0 och h_1 i G_{n+1}, sådana att

$$h_i(x) = \begin{cases} g(x) & \text{när } x \in A_n \\ (n+1, \langle g(p_1), g(p_2)\rangle, \epsilon +_2 i) & \text{när } x = (n+1, \langle p_1, p_2\rangle, \epsilon), \end{cases}$$

där $+_2$ är addition modulo 2.

Låt $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ och G vara gruppen av alla permutationer π på A sådana att $\pi \restriction A_n \in G_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Låt I vara mängden av alla ändliga delmängder till U. Då är I ett ideal och vi bildar motsvarande filter $\mathcal{F}$. Enligt resonemanget ovan ger detta upphov till ett filter på U varför vi skapar vår permutationsmodell $\mathcal{V}_p$ (p för par).

Vi visar först att $\mathcal{V}_p \vDash U^2 \preceq [U]^2$. För att underlätta notationen inför vi följande beteckning. Om u är ett element i U så är $\overline{u}$ motsvarande element i A, det vill säga $h(u)$, och om a är ett element i A så är $\underline{a}$ motsvarande element i U, det vill säga $h^{-1}(u)$. På motsvarande sätt definierar vi $\overline{\pi}$ och $\underline{\pi}$ för permutationer π i G_h respektive G. Notationsidén är att $\underline{a}$ ger oss "namnet" på a emedan $\overline{u}$ ger oss det element i A som u är namn på.

Vi definierar nu en injektiv funktion $f\colon U^2 \to [U]^2$ på följande vis. Om $u, v \in U$ är sådana att $\overline{u} = (n, p_u, \epsilon_u)$ och $\overline{v} = (m, p_v, \epsilon_v)$ låter vi

$$f(\langle u, v\rangle) = \{\underline{(n+m+1, \langle\overline{u}, \overline{v}\rangle, 0)}, \underline{(n+m+1, \langle\overline{u}, \overline{v}\rangle, 1)}\}$$

Vi måste nu visa att f är hereditärt symmetrisk. Låt därför u, v vara två urelement och låt π vara en permutation i H. Då gäller att

$$\begin{aligned}
\pi(f(\langle u,v\rangle)) &= \{\pi(\underline{(n+m+1,\langle\overline{u},\overline{v}\rangle,0)}),\pi(\underline{(n+m+1,\langle\overline{u},\overline{v}\rangle,1)})\} \\
&= \{\overline{\pi}(\underline{(n+m+1,\langle\overline{u},\overline{v}\rangle,0)}),\overline{\pi}(\underline{(n+m+1,\langle\overline{u},\overline{v}\rangle,1)})\} \\
&= \{\underline{(n+m+1,\langle\overline{\pi(u)},\overline{\pi(v)}\rangle,0+_2\epsilon_\pi)}, \\
&\quad \underline{(n+m+1,\langle\overline{\pi(u)},\overline{\pi(v)}\rangle,1+_2\epsilon_\pi)}\} \\
&= f(\langle\pi(u),\pi(v)\rangle) \\
&= f(\pi(\langle u,v\rangle)),
\end{aligned}$$

varför $\pi(f)=f$.

Vi ska nu visa att $\mathcal{V}_p \vDash [U]^2 \not\preceq U^2$. Vi vill dock undvika att behöva översätta fram och tillbaka mellan U och A hela tiden, så vi låtsas istället att A *är* mängden av urelement i $\mathcal{V}_p$ men håller i åtanke att vi egentligen bevisar ett påstående om U via en översättning.

Bevis. Antag att det finns en injektiv funktion $g \in \mathcal{V}_p$ från $[A]^2$ till A^2. Vi skriver $g(\{x,y\}) = \langle t^0_{\{x,y\}}, t^1_{\{x,y\}}\rangle$. Låt $E_g = \{e_0, e_1, \cdots, e_{k-1}\}$ vara ett ändligt stöd för g.

Om nu $x,y \in A_0$ så har vi $k+4$ olika alternativ för vardera av $t^0_{\{x,y\}}$ och $t^1_{\{x,y\}}$:

$$\begin{array}{cl}
0 & t^i_{\{x,y\}} = e_0, \\
\vdots & \\
\text{k-1} & t^i_{\{x,y\}} = e_{k-1}, \\
\text{k} & t^i_{\{x,y\}} = x, \\
\text{k+1} & t^i_{\{x,y\}} = y, \\
\text{k+2} & t^i_{\{x,y\}} \in A_0 \text{ men är varken } x,y \text{ eller något } e_i \text{, eller} \\
\text{k+3} & t^i_{\{x,y\}} \in A \setminus (A_0 \cup E_g).
\end{array}$$

Alltså kan vi partionera $g\big[[A_0]^2\big]$ i $(k+4)^2$ delar. Eftersom $A_0 \setminus E_g$ är oändlig så finns det (enligt Ramseys sats) en delmängd $X = \{x_0, x_1, x_2\} \subset A_0 \setminus E_g$ sådan att g är konstant på $[X]^2$. Det vill säga att vi oberoende av valet av $x_i, x_j \in X$, $0 \leq i < j \leq 2$ kommer att ha följande fall för $\langle t^0, t^1\rangle = g(\{x_i, x_j\})$:

1. $t^0 = e$ och $t^1 = e'$, för några fixa $e, e' \in E_g$
2. $t^0 = x_i$ och $t^1 = e$ för något fixt $e \in E_g$, eller tvärtom (dvs $t^1 = x_i$ och $t^0 \in E_g$)
3. $t^0 = x_j$ och $t^1 = e_k$ för något fixt e_k, eller tvärtom
4. $t^0 = x_i$ och $t^1 = x_j$, eller tvärtom

5. något $t^l \in A_0 \setminus (E_g \cup \{x_i, x_j\})$

6. något $t^l \in A \setminus (E_g \cup A_0)$.

I fall (1) och (2) så kommer $g(\{x_0, x_1\}) = g(\{x_0, x_2\})$ och i fall (3) så har vi att $g(\{x_0, x_2\}) = g(\{x_1, x_3\})$. Alla tre fallen emotsäger att g är injektiv.

I fall (4) så kan vi, eftersom $x_i, x_j \notin E_g$, välja ett $\pi \in \text{fix}(E_g)$ sådan att $\pi(x_i) = x_j$ och $\pi(x_j) = x_i$. Men då kommer $\pi(\{x_i, x_j\}) = \{x_i, x_j\}$ men $\pi(\langle t^0, t^1\rangle) \neq \langle t^0, t^1\rangle$, vilket emotsäger att E_g är ett stöd för g.

I fall (5) låter vi $a = t^l \in A_0 \setminus (E_g \cup (x_i, x_j))$ och tar sedan något godtyckligt $a' \in A_0 \setminus (E_g \cup x_i, x_j)$ som är skiljt från a. Eftersom såväl a som a' inte är element i $E_g \cup \{x_i, x_j\}$ så kan vi låt π vara en permutation i $\text{fix}(E_g \cup \{x_i, x_j\}$ sådan att $\pi(a) = a'$ och $\pi(a') = a$. Lägg märke till att $\text{fix}(E_g \cup \{x_i, x_j\}) \subseteq \text{fix}(E_g)$, så $\pi \in \text{fix}(E_g)$. Vi har dock att $\pi(\{x_i, x_j\}) = \{x_i, x_j\}$ men samtidigt att $\pi(t^l) \neq t^l$ vilket emotsäger att E_g är ett stöd för g.

I fall (6) har vi att $t^l = (n+1, p, \epsilon)$ för något $(n+1, p, \epsilon) \in A \setminus (E_g \cup A_0)$. Låt därför $\pi \in \text{fix}(E_g \cup \{x_i, x_j\})$ vara sådan att $\pi((n+1, p, \epsilon)) = (n+1, p, \epsilon +_2 1)$. På samma sätt som i fall (5) har vi då att $\pi \in \text{fix}(E_g)$, $\pi(\{x_i, x_j\}) = \{x_i, x_j\}$ men samtidigt att $\pi(g(\{x_i, x_j\}) \neq g(\{x_i, x_j\}$ vilket emotsäger att E_g är ett stöd för g.

I samtliga fall har vi en motsägelse, och alltså finns det ingen sådan funktion g. $\square$

3.2.7 Sammanfattning

Permutationsmodeller ger möjlighet att visa den relativa styrkan hos svagare versioner av AC. Avsnitt 3.2.6 visar dock att det kan krävas mycket uppfinningsrikedom och kombinatoriska idéer för att skapa modeller i vilka specifika konsekvenser av AC ska falsifieras.

En bra introduktion till konsistensbevis rörandes urvalsaxiomet återfinns i [6]. En historisk redogörelse hittar man i [9]. Vill man istället veta vad som är ekvivalent med urvalsaxiomet så utgör [10] standardverket.

Referenser

[1] J. W. Degen. Some Aspects and Examples of Infinity Notions. *Math. Log. Q.*, 40:111–124, 1994.

[2] A. Fraenkel. Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 86, 1922.

[3] K. Gödel. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 24:556–557, 1938.

[4] L. Halbeisen and S. Shelah. Consequences of arithmetic for set theory. *J. Symbolic Logic*, 59:30–40, 1994.

[5] L. Halbeisen and S. Shelah. Relations between some cardinals in the absence of the Axiom of Choice. *Bulletin Symbolic Logic*, 7:237–261, 2001.

[6] T. J. Jech. *The Axiom of Choice*. North-Holland Publishing Company, 1973.

[7] J.-L. Krivine. *Théorie axiomatique des ensembles*. Presses Universitaires de France, 1972.

[8] O. D. la Cruz. Finiteness and choice. *Fundamenta Mathematicae*, 173:57–76, 2002.

[9] G. H. Moore. *Zermelo's Axiom of Choice*. Springer-Verlag, 1982.

[10] H. Rubin and J. E. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice*. North-Holland Publishing Company, 1963.

[11] E. Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen*, 65:261–281, 1908.