LÄROBOK
i
GEOMETRIEN,

innefattande

grunderna för läran om *Linier*, *Ytor* (Planimetri och Landtmäteri) samt *solida Figurer* (Stereometri)

utgörande

en ny bearbetning af Chr. Wolffs *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* 1 Th. II Abschn.

Utgifven

af

C. J. L. Almqvist
Rektor, lärare i Nya Elementarskolan
i Stockholm.

STOCKHOLM.
Tryckt hos *Johan Hörberg*,
1833.

Innehåll.

FÖRETAL.

Sedan Direktionen öfver Nya Elementarskolan i Stockholm funnit Euclidis Elementa mindre tjenliga att nyttjas vid första undervisningen i Geometri för barn emellan tio och tretton år, så anbefalldes jag att göra en bearbetning af den berömde Chr. Wolffs lärobok i detta ämne. Mitt arbete skiljer sig ifrån den svenska förtjenstfulla öfversättning deraf, som förut af C. Stridsberg och N. G. af Schultén blifvit besörjd, hufvudsakligen i början, hvilken är så litet efter Wolff, att jag snarare kunde kalla den ett eget arbete. I det öfriga torde man ock finna få ställen, som utgöra en blott öfversättning. Orsaken till förändringarne är, utom min öfvertygelse att åtskilliga ställen fordrade förbättring, också den omständigheten, att Wolffs Anfangsgründe der Geometrie *befinna sig i sammanhang med hans öfriga mathematiska läroskrifter, och omedelbart efterföljer* Anfangsgründe der Rechenkunst, *hvarföre författaren kunde citera åtskilligt derur, eller anse det som kändt; hvilket deremot icke kunde ske i den svenska bearbetningen. — I afseende på redaktionsformen har jag ock ansett ledande till reda, att indela det hela i tre hufvudafdelningar efter linier, ytor och solida figurer, så att dessa ämnens grund-olikhet, som i geometrien är den* *största, kunde inskärpas hos lärjungen genom sjelfva föredragets form. Äfven har det synts mig bättre, att låta lärostyckena fortgå i en enda oafbruten nummerföljd inom hvarje afdelning, än att, som Wolff, hafva olika nummerbeteckning för* Erklärungen, Grundsätze, Aufgaben *och* Lehrsätze, *hvaribland emellanåt* Zusätze, Anmerkungen *och* Aufgaben *äfven stå med sina numror, så att gossen, om ej ock en äldre läsare, löper fara att vid eftersökandet förbryllas. — Åtskilligt är tillagdt och annat uteslutet. — Huruvida arbetet vunnit genom alla dessa åtgärder, öfverlemnas anspråkslöst åt sakkunniges benägna pröfning.*

Författarens afsigt har varit att utgifva en bok, som, utan att förutsätta eller stödja sig på Euclides, inom ett inskränkt omfång skulle meddela all den undervisning om hufvudegenskaperne och mätningssätten för linier, ytor och solida figurer, som Skolungdom behöfver, och som äfven kunde bidraga att afhjelpa Allmänhetens stora brist på kunskap i Mätkonstens grunder: en kunskap, så högst nödvändig för alla stånd (sjelfva allmogen ej undantagen) genom den förmåga massan af medborgare dymedelst kunde vinna, att sjelf beräkna sin egendoms vidd, mäta sina landstycken, kontrollera sin rätt, och finna storleken af hvad föremål som helst, utan att behöfva på god tro bero af andras utsago.

GEOMETRI.

INLEDNING.

Förberedande bestämningar.

Hvarje kropp, som finnes till i verkligheten, har både *längd, bredd* och *höjd*. Men, ehuru ingen kropp i sjelfva verket kan vara utan dessa *tre sätt* att vara till (dimensioner — sträckningar); så kan man dock i tankarne föreställa sig en, två eller alla tre af dem borta. Om man tänker sig någonting hafva endast längd och bredd, men *ingen höjd*, följaktligen vara utan all tjocklek, så blir det blott en yta, såsom t. ex. ytan af en bordskifva, det öfversta af färgtäckningen på en vägg o. s. v. Tänker man sig åter någonting, som endast har längd, men *hvarken bredd eller höjd*, så blir det blott en linie, såsom t. ex. yttersta kanten af ett fint blad, om detta anses vara utan all tjocklek. Tänker man sig slutligen någonting, som *hvarken har längd, bredd eller höjd*, så blir det allenast en punkt utan alla delar, såsom t. ex. de yttersta ändarne af en linie. Alltså:

1. *Punkt* kallas det, som har inga delar.

2. *Linie* det, som allenast har längd.

3. *Yta* det, som allenast har längd och bredd.

4. *Solid figur* (eller *kropp* i mathematisk mening) det, som har både längd, bredd och höjd.

5. *Likartade*, eller af samma geometriska slag, kallas de, som hafva lika många dimensioner (sträckningar).

Linier äro likartade med linier; ytor med ytor; solida figurer med solida figurer.

Endast sådana kunna jemföras med hvarandra i anseende till storleken. T. ex. *Alnar* (som hafva endast *längd*: äro linier) kunna jemföras med famnar, milar, tum o. s. v. (hvilka äfven äro linier); så att man kan säga *hvilka* af dem äro större, och *hvilka* mindre. Men ett antal alnar kunna icke så jemföras med t. ex. ytan af en vägg; ej heller ytan af en vägg med t. ex. storleken af en stens innehåll.

6. *Likformiga* kallas de, som hafva samma skapnad eller figur, ehuru de till storleken kunna vara olika.

För att tvenne skola vara likformiga, fordras således först och främst, att de skola vara likartade eller af samma dimensioner.

Man har t. e. tvenne ting A och B, och betraktar det ena efter det andra. Man anmärker allt, hvad man i anseende till *figuren* varseblifver hos A: man gör sedan detsamma med B. Om man nu vid jemförelsen dem emellan finner alla former lika (så att blott *storleken* ej kommer i betraktande, hvilken kan vara olika), så kallas A och B likformiga.

Alltså kunna likformiga ting ej åtskiljas från hvarann utan genom storleken. Och denna åtskillnad kan ej bestämmas utan derigenom, att man jemför dem begge med *ett tredje*. Ett sådant tredje kallas *Mått*. Antag t. e. att tvenne Taflor äro likformiga, men ej lika stora. Man mäter dem då med en aln, och finner den ena vara 1 aln bred och $1\frac{1}{2}$ aln lång; men den andra 2 alnar bred och 3 alnar lång. Så finner man deras åtskillnad bestämdt. Alnen var här *måttet*, hvarigenom man åtskilde dem.

7. *Lika stora* kallas de, i hvilka samma slags mått kan innehållas lika många gånger.

För att tvenne skola vara lika stora, fordras ock att de skola vara likartade eller af samma dimensioner.

Antag t. e. tvenne Band. Man mäter det ena och finner det vara 10 alnar, d. v. s. 1 aln innehålles deri 10 gånger. Man mäter nu det andra, och finner det äfven vara 10 alnar. Då äro de begge banden till längden *) *lika stora* (d. ä. lika långa), ty *alnen* innehölls i hvardera lika många gånger.

Måttet sjelf måste alltid vara likartadt (af samma dimensioner) med dem, som skola mätas; man kan icke annars finna, huru måttet deri skall innehållas. För att mäta linier (d. ä. längder), måste *måttet* sjelf vara en viss bestämd längd t. e. en aln, en fot. För att mäta ytor, måste *måttet* vara en viss bestämd yta; och för att mäta solida figurer, måste måttet vara en viss bestämd solid figur. Fram-

*) Bandens *bredd* talas *nu* icke om, utan man betraktar dem allenast som längder.

deles skall omlalas huru de ytor och solida figurer äro beskaffade, som nyttjas till *mått* för ytor och solida figurer.

Men, utom genom mätning, kan man på flera andra sätt upptäcka och med säkerhet inse, att tvenne äro lika stora; d. v. s. man kan inse, att samma slags mått i dem begge måste innehållas lika många gånger, ehuru man icke genom mätning utröner det. Detta inträffar i synnerhet, om de begge äro likformiga.

När man vill beteckna, att tvenne äro lika stora, så skrifver man dem emellan tecknet =; t. e. 8 = 8 (*läs*: "8 är lika med 8").

8. *Förhållande* (proportion) kallas tvenne likartade tings inbördes storlek.

Om man t. e. jemför 8 alnar med 4, så säger man att de inbördes förhålla sig så, att *det förra* är *dubbelt* så mycket som *det sednare.*

Samma förhållande kallas således, om tvenne tings inbördes storlek sinsemellan jemföres och befinnes lika med tvenne andra tings inbördes storlek dem emellan.

T. e. den inbördes storleken emellan 8 alnar och 4 är sådan, att den förra är *dubbel* emot den sednare. Har man nu ock tvenne andra, nemligen 12 alnar och 6, så är deras inbördrs storlek äfven sådan, att den förra är *dubbel* emot den sednare. Då säger man, att 8 har *samma förhållande* till 4, som 12 till 6; ty de utgöra begge dubbelt. Likaledes har 3 samma förhållande till 1, som 6 till 2; ty de utgöra begge tre gånger så mycket. När man vill teckna samma förhållande, så skrifver man 8 : 4 = 12 : 6 (*läs*: "8 har samma förhållande till 4, som 12 till 6", eller kortare: "8 är till 4, som 12 till 6"); 3 : 1 = 6 : 2; äfven 5 : 10 = 12 : 24.

9. *Geometri* (Mätkonst) kallas vettenskapen om Liniers, Ytors och Soliders *) egenskaper i anseende till det rum de utvisa.

Geometrien består således af tre delar;

1. om Linier.
2. om Ytor.
3. om Solider.

och afhandlar de i hvarje del förekommande ting såväl hvar för sig, som jemförde med hvarann, till *likartighet*, *likformighet*, *lika storhet* och inbördes *förhållanden*; samt sätten att mäta dem.

10. *Framställningssättet* i Geometrien fortgår i en kedja af sattser, stödjande och upplysande hvarann *i ordning*, d. v. s. så, att grunden för hvarje satts (såvida den behöfver någon grund) finnes framställd *före* sattsen **). Dessa sattser äro af flera slag, nemligen:

*) För att undvika dubbel-ordet *solida figurer* nyttjar jag hädanefter *Solider* såsom sakord; på samma sätt som man i latinet kan säga *Solidum*, *Solida*, *de Solidis* o. s.v. substantivé. — Då man nu sällan hör talas om *Superficier*, utan svenska ordet *Ytor* gjort sig allmänt gällande, vore det väl lika naturligt, att i stället för Solider begagna någon svensk benämning. Men så länge en *god* sådan saknas, är det bäst att nyttja Solidum med svensk ändelse, i likhet med så många andra upptagna ord t. ex. linier, definitioner o. s. v.

**) Ehuru detta framställningssätt företrädesvis brukas i Geometrien, tillhör det likväl ej denna vettenskap ensamt, utan är fastmer i alla andra äfvenså angeläget.

I. *Definitioner:* korta, men tillräckliga beskrifningar på ting, innehållande de kännetecken, hvarigenom tingen åtskiljas ifrån hvarann.

T. e. beskrifningen på punkten, "att den har inga delar" kallas *Definition på punkten*, emedan ingenting annat är sådant, att det har inga delar.

II. *Axiomer:* påståenden, hvilkas sanning anses så klar och allmänt begriplig, att den intet bevis fordrar.

T. e. påståendet: "de, som äro lika stora med ett och samma, äro sins emellan lika stora," anses vara af en så klar och allmänt begriplig sanning, att den ej behöfver bevisas.

III. *Theoremer:* påståenden, hvilkas sanning måste bevisas, emedan den icke anses så klar och allmänt begriplig, att den intet bevis fordrar.

T. e. detta påstående: "om tvenne sidor och mellanliggande vinkeln i en triangel äro lika stora med tvenne sidor och mellanliggande vinkeln i en annan triangel, så äro begge trianglarne till alla delar lika stora" — är visserligen i sig sjelf sant, och äfven klart för *dem*, som begripa det; men anses i Geometrien behöfva bevisas, emedan det ej på förhand kan antagas klart för alla, eller allmänt begripligt; helst vinkel och triangel ej en gång till namnet kunna vara kända för alla.

Man finner, att emellan *Axiom* och *Theorem* är ingen väsendtlig skillnad. För den *fullkomligt kunnige* äro *alla* sanna påståenden *axiomer*, emedan de ligga klara för hans insigt; de behöfva endast nämnas eller *visas* (monstreras), så förstår han dem straxt. Men för den *fullkomligt okunnige* (om någon sådan funnes) skulle *alla* påståenden vara *Theoremer,* emedan ingen sanning på förhand låge för honom så klar, att den icke först måste *bevisas* (demonstreras). Den skillnad, som i Geometrien göres emellan axiomer och theoremer beror således på antagandet af en viss grad på förhand befintlig klarhet hos de personer, som undervisas. Hvarje påstående, som af *den* kan fattas, får vara axiom; det öfriga blir theoremer. Utan att få antaga något enda axiom, skulle vettenskapen ej kunna börja, således ej heller fortgå. Allmänt att tala: vore en menniska utan all ursprnnglig eller på förhand befintlig klarhet, skulle hon om ingenting kunna undervisas.

IV. *Postulater:* föresattser att göra något, hvilket anses så lätt och verkställbart för alla, att ingen underrättelse om utförssättet fordras.

T. e. att draga ett sreck.

V. *Problemer,* föresattser att göra något, hvars utförssätt måste visas, emedan det ej anses så lätt för alla, att ej underrättelse derom tarfvas. — Sedan utförssättet är visadt, bör det bevisas vara rätt gjordt, om grunden ej är axiomatisk.

T. e. att göra en liksidig figur.

Emellan *Postulat* och *Problem* är lika liten väsendtlig skillnad, som emellan axiom och theorem. Det beror på den förmåga att verkställa saker, som man förutsätter hos personer. Skulle denna vara alldeles ingen, så blefve alla verkställningar *problemer;* men om den kunde redan i allt anses fullkomlig, så blefve de alla *postulater.*

Men en slags skillnad mellan postulat och problem uppkommer genom olikheten af stället hvarest sakerna skola verkställas. T. e att draga en rät linia på papper med linial är så lätt, att det kan kallas postulat; äfvenså att med cirkel-instrument taga hvad punkt på papperet som behagasm till edelpunkt, och rita en cirkel-pereferi genom hvad annan pnnkt, man vill. Men att draga en rät linie eller rita en cirkelpereferi ute på fältet, blir ett problem.

När man betraktar föregående fem ämnen, så finner man, att Föresattserna att göra (postulater och problemer) angå menniskans förmåga att verkställa saker (s. k. *praktiska* eller *utförs-förmåga*); men Påståendena om vissa sanningar (axiomer och theoremer), äfvensom de enkla förutgående Beskrifningarne (definitionerna) angå menniskans förmåga att hafva insigter och begrepp om saker (s. k. *theoretiska* eller *insigts-förmåga*).

Första Boken.

Om Linier.

1. Definition. *Rät linie kallas den, hvars alla delar äro likformiga med det hela.*

Man kan ock säga: ”en rät linie är den, som ligger jemt emellan sina ändpunkter” — eller; ”en rät linie är kortaste vägen emellan tvenne punkter.

När man vill beteckna en linie, sätter man en bokstaf vid hvarje ända, t. e. A och B. Linien AB är *rät*, äfvenså CD. Fig. 1.

2. Problem. *Att draga en rät linie emellan tvenne gifna punkter.*

På *papper* eller tafla kan det verkställas antingen efter ögonmått, såsom i Linearteckningen är visadt, eller med *linial.*

På *fältet*, om frågan är att draga en rät linie emellan tvenne ställen A och B, så sättas raka störar på dessa ställen, och ett snöre eller en kedja spännes emellan störarne, hvarefter linien drages efter snöret på marken. — Är afståndet mellan A och B så stort, att snöret icke räcker till, så utstakas den räta linien derigenom, att emellan A och B sättas andra störar så jemt, att, när man ställer sig i A och derifrån sigtar till B, synas de mellansatte störarne jemte stören i B tillsammans såsom en enda. Då utmärkes den räta linien af de mellansatte störarne, och man kan uppsätta sådana så många och så tätt man behagar. Kan man icke komma till ställena A och B, men likväl önskar veta hvarest den räta linien dem emellan går fram, så kan det verkställas på följande sätt. Tvenne personer, med ögonen vända mot hvarann, ställa sig på något afstånd ifrån hvarann emellan de begge ställena. Dessa tvenne personer skola nu jemka sig så, att när den ena sigtar åt A, ser han sin motståndare ihop med A; och när den andre *på samma gång* sigtar åt B, ser han äfven sin motståndare ihop med B. Då går den räta linien emellan dessa begge personer.

---

3. Definition. *Parallela (jemnlöpande) kallas de linier, som öfverallt äro på lika afstånd ifrån hvarann.*

Fig. 1. Linierne AB och CD äro parallela med hvarann.

---

4. Definition. *Krokig linia kallas den, hvars alla delar icke äro likformige med det hela.*

Linien CD är *krokig*.

Fig. 2. Kroklinier kunna vara *öppna*, såsom CD och *slutna*, såsom EF.

---

5. Definition. *Cirkel kallas en sluten Kroklinie, som är sådan, att alla räta linier, dragne ifrån en viss punkt inom densamma till omkretsen, äro lika stora.*

Hela figuren kallas *Cirkel;* — omkretsen ensam heter *Periferi*, och hvarje del af periferien *Båge;* — den punkt, hvarifrån alla de lika stora räta linierna kunna dragas till omkretsen, *Medelpunkt* (centrum); — de lika stora räta linierna, gående från medelpunkten till periferien, *Radier* (strål-linier); — hvarje rät linie, gående genom medelpunkten å ömse sidor ända till periferien, *Tvärlinie* (diameter, dubbel-radie), hvilken således delar cirkeln midt i tu, och har en halfcirkel på hvarje sida om sig; — och hvarje annan rät linie, som icke går genom medelpunkten, men med begge ändarne träffar periferien, *Chorda* (sträng-linie). Alltså är hela figuren 3 en cirkel, AEGFD dess periferi, DA en båge, C cirkelns medelpunkt, CA en af dess radier, DE en af dess tvärlinier, och FG en chorda deri. — Klart är, att som hvarje cirkels vidd utgöres af periferiens afstånd från medelpunkten, och detta afstånd bestämmes af radierna, så äro *alla cirklar, som hafva lika stora radier, sinsemellan lika stora;* och *alla cirklar, som äro lika stora, hafva lika stora radier.* Fig. 3.

Hvarje cirkels periferi har man indelat i 360 lika stora bågar, hvilka kallas *Grader*. (Om cirkeln sjelf är stor eller liten, så indelas dock periferien alltid i sådana 360 lika stora bågar). Hvarje grad indelas i 60 lika stora delar, kallade *Minuter*, och hvarje minut i 60 lika stora delar, kallade *Sekunder*. — Grader betecknas med (°), minuter med ('), och sekunder med ("). — Efter hvarje *hel* periferi består af 360°, så följer, att hvarje *half* periferi (halfcirkelns omkrets) är

180°, och hvarje *fjerdedels* periferi 90°. Alltså är bågen EAD 180°, och AE 90°.

---

6. PROBLEM. *Att upprita en cirkel med gifven medelpunkt och radie* *).

På *papper* eller tafla kan det verkställas antingen efter ögonmått, såsom i Lineartecningen är visadt, eller med ett instrument kalladt Cirkel, hvars ena fot sättes i den gifna medelpunkten, och den andra utsträckes så, att dess afstånd från den förra foten blir lika långt med den gifna radien. Derefter vändes instrumentet omkring så, att den förra foten i medelpunkten icke flyttas, men den andra röres omkring tills den återkommer på sin första plats, samt under denna rörelse gör ett spår i taflan eller på papperet. Detta spår är den åstundade cirkel-periferien; ty alla räta linier, dragne från medelpunkten till omkretsen, måste här vara lika stora, nemligen så stora som afståndet emellan cirkel-instrumentets begge fötter; och figuren är då en cirkel (I—5).

På *fältet* tages ett snöre eller en kedja af samma längd som den gifna radien, och fästes med ena ändan vid en stör, ställd i medelpunkten. Snörets andra ända föres nu rundt omkring så, att den lemnar spår efter sig (medelst en i denna ända fästad hvass käpp), då den åstundade cirkel-periferien uppkommer.

---

7. DEFINITION. *Vinkel kallas öppningen emellan tvenne räta linier, som stå tillsammans i en punkt.*

*) Säges också: Att taga hvad punkt man vill till medelpunkt och rita en cirkel genom hvad punkt man vill.

När man vill benämna en vinkel, sätter man antingen *en* bokstaf vid den punkt, der de begge räta linierna sammankomma (hvilken punkt kallas vinkel*spets*); eller ock med *trenne* bokstäfver, en vid vinkelspetsen, och de två andra vid hvar sin ända af de begge linierna (hvilka kallas vinkelns *ben* eller gränslinier). T. e. A, eller ock BAC, är en vinkel. Fig. 4.

Vinklars storlek *mätes med Cirkelbågar* på det sätt, att en cirkel anses hafva sjelfva vinkelspetsen till medelpunkt, och periferien gående öfver vinkelbenen. Nu säges vinkeln vara så stor, som den af vinkelbenen omfattade bågen har grader; hvaraf följer, att de vinklar, som hafva lika bågar och gradtal, äro lika stora. Man finner, att här icke frågan är om dessa bågars storlek, utan om deras gradtal d. ä. för hållande till hvar sin cirkel-omkrets, och *huru stor del* de utgöra af den. T. e. Vinkeln BAC Fig. 5. mätes af bågen EF; den mätes likaså af bågarne GH eller IK; och det är för vinkeln likgiltigt hvilkendera bågen man tager till måttet af vinkelns storlek, ty de utgöra alla tre *lika stora delar* af sina cirklar d. v. s. lika många grader, ehuru de till vidden sins emellan äro olika.

8. Definition. *När en rät linie står på en annan rät linie, så att vinklarne på ömse sidor äro lika stora, så kallas hvardera af dessa vinklar en rät* *), *och den förstnämde linien kallas vinkelrät emot den andra.*

*) Hel vinkel, rätt vinkel.

Vinklarne ABC och ABD kallas *räta vinklar*, Fig. 6, och linien AB säges vara *vinkelrät* emot CD.

---

9. Definition. *Hvarje vinkel, som är större än en rät, kallas trubbig vinkel; och den, som är mindre än en rät, kallas spetsig.*

Fig. 7. Vinkeln EBC kallas *trubbig*, emedan han är större än räta vinkeln ABC; men vinkeln DBC kallas *spetsig*, såsom mindre än ABC.

Af Definitionerna 7, 8, 9 synes nu hvad som förstås med *vinklar*, och de tre slagen deraf: *räta*, *trubbiga* och *spetsiga*. Instrumenter, som nyttjas för att mäta vinklar, äro: 1. *Transportör* eller *Gradskifva*, en Halfcirkel af träd, metall eller horn, uppdelad i grader och minuter m. m.; 2. *Astrolabium*, äfven en graderad cirkel-omkrets, men som vid diameterns ändar har tvenne sigthål (dioptrar), och vid medelpunkten en rörlig diopterlinial; 3. *Quadrant*, en fjerdedels cirkel-periferi, likaledes fördelad i grader och minuter, med flere inrättningar liknande ett astrolabium. 4. *Vinkelhake*, utmärkande jemt en rät vinkel.

Fig. 8. 10. Theorem. *Hvarje rät vinkel är 90 grader.*

Låt ACD vara en rät vinkel. Om man nu tager vinkelspetsen C till medelpunkt, och ritar en cirkel (I—6) öfver vinkelbenen CA och CD, med huru lång radie som helst, så ser man att den räta vinkeln ACD upptager *fjerdedelen* af cirkelns periferi. Men fjerdedels-periferien utgör 90° (I—5); alltså upptager den räta vinkeln 90°, eller *är* 90°.

Häraf ser man vidare:

1:o Att *två* räta vinklar, (t. e. BCA och ACD) tillsammans upptaga *halfva* cirkeln, alltså äro 180°.

2:o Att *fyra* räta vinklar upptaga *hela* cirkeln, och äro 360°.

3:o Att hvarje trubbig vinkel (t. e. ECD) är mer än 90°, men mindre än 180°.

4:o Att hvarje spetsig vinkel (t. e. FCD) är mindre än 90°.

---

11. Problem. *Att vid en gifven punkt på en gifven rät linie göra en vinkel af ett visst gradtal.* Fig. 9.

Låt A vara den gifna punkten och AB den gifna räta linien. Det begäres att vid punkten A på linien AB, göra en vinkel af ett visst gradtal. Tag transportören eller gradskifvan och lägg dess diameter utefter AB, så att medelpunkten kommer vid A. Afsätt nu på gradskifvan så många grader, som man vill att vinkeln skall hafva, och drag en linie ifrån A till den punkten C, som på instrumentet utmärker det ifrågavarande gradtalet. Då är BAC den begärda vinkeln.

Vill man göra en rät vinkel, så är det detsamma som att på gradskifvan afsätta 90° (enl. I—10).

Så verkställes problemet på *papper* eller tafla. Skall det utföras på *fältet*, så nedsätter man först en stör på det stället, der vinkelspetsen A skall vara, och derefter en annan stör så, att den utmärker riktningen af den gifna linien AB. Nu tager man astrolabium och sätter dess medelpunkt rätt öfver den första stören i A, läggande instrumentets rand eller diametern utefter den linie AB, som går till den andra stören. Nu vrider man diopterlinialen till det ifrågavarande grad-talet, och sigtar ifrån medelpunkten genom sigthålen, samt utsätter en tredje stör för C på hvad afstånd man behagar, men så, att den synes, när man ser genom sigthålen. — Det s. k. *Landtmätar-bredet* begagnas vanligen härvid på det sättet, att man ställer detsamma rätt öfver den punkt på marken, der vinkelspetsen skall vara, och sedan på bredet gör vinkeln med tillhjelp af gradskifva eller astrolabium (liksom förut är nämdt på papper), hvarpå man sigtar längs efter de på brädet ritade vinkelbenen och utsätter störar efter sigtningen. Störarne CAB utgöra vinkeln, som begäres.

Fig. 10. **12.** Definition. *Triangel* (*tresiding*) *kallas en figur, innesluten af tre räta linier.*

Figuren ABC är en triangel.

Såsom hvarje triangel eger tre linier till sidor och tre vinklar emellan dem, så kunna flere slag deraf finnas, efter sidornas och vinklarnes olika beskaffenheter. Alltså:

Fig. 11. 1. *Liksidig* triangel kallas den, hvars alla tre sidor äro lika stora; t. e. ABC.

Fig. 12. 2. *Likbent* eller tvåliksidig den, som har tvenne sidor lika stora; t. e. DEF.

3. *Oliksidig* den, hvari ingen sida är lika stor med en annan; t. ex. GIH. Fig. 13.

4. *Rätvinklig* triangel kallas den, som har någon af sina vinklar rät; t. ex. KLM. Fig. 14.

5. *Trubbvinklig* den, som har någon af sina vinklar trubbig; t. ex. NOP. Fig. 15.

6. *Spetsvinklig* den, som har alla tre vinklarne spetsiga; t. ex. QRS. Fig. 16.

När man i en triangel talar särskildt om tvenne sidor, så kallas den tredje *bas* (grundsida).

---

13. Definition. *Fyrsiding kallas en figur, innesluten af fyra räta linier.*

Figuren ABCD är en fyrsiding. Fig. 17.

Såsom hvarje sådan eger fyra linier till sidor och fyra vinklar mellan dem, så kunna flera slag deraf finnas, efter sidornas och vinklarnes olika beskaffenhet. Alltså:

1. *Parallelogram* (Ruta) kallas i allmänhet hvarje fyrsidig figur, som har de motstående sidorna parallela *). En sådan är antingen *rätvinklig* eller *snedvinklig*.

a. De rätvinkliga äro af två slag:

1. *Qvadrat*, som har alla vinklarne räta och alla fyra sidorna lika stora. Fig. 18.

2. *Rektangel*, som har alla vinklarne räta, men endast de motstående sidorna lika stora. Fig. 19.

*) Här inträffar alltid, att de motstående vinklarne äro lika stora.

b. De snedvinkliga äro ock af två slag:

Fig. 20. 1. *Romb*, som har blott de motstående vinklarne lika stora, men alla fyra sidorna lika stora.

Fig. 21. 2. *Romboid*, som har blott de motstående vinklarne och sidorna lika stora.

Fig. 22. 2. *Trapezium* kallas hvarje annan rätlinig fyrsidig figur.

Fig. 23. **14.** Definition. *Figurer, som hafva mer än fyra sidor, kallas i allmänhet Mångsidingar; eller ock, om man vill utmärka sido-antalet, Femsidingar, Sexsidingar* o. s. v.

Emedan alla slutna figurer hafva lika många *vinklar* och *hörn*, som de hafva sidor, kan man äfven kalla dessa figurer: *Månghörningar*, eller: *Femhörningar, Sexhörningar* o. s. v.

Sådana figurer kallas *reguliera* (regelbundna), om alla deras sidor och vinklar äro lika stora, annars *irreguliera* (oregelbundna).

Fig. 24. **15.** Axiom. *Emellan tvenne punkter kan allenast en rät linie dragas.*

Derföre kunna *två* räta linier ej innesluta något rum, emedan de i sina begge yttersta punkter då borde sammanstöta; men, om de det gjorde, så blefve de allenast *en* linie.

Häraf följer ock, att om tvenne räta liniers ändpunkter inträffa med hvarann, så inträffa sjelfva linierna med hvarann, och utgöra blott en linie, (äro alldeles lika).

---

16. Axiom. *När räta linier och vinklar alldeles inträffa med hvarann eller kunna täcka hvarann, så äro de lika stora; och när de äro lika stora, så kunna de täcka hvarann.*

Med "täcka hvarann" menas detsamma som att de inträffa med hvarandra eller passa tillhopa, om den ena skulle tagas och läggas på den andra. Sålunda är linien AB lika stor med CD, och vinkeln E lika stor med F. Fig. 25.

---

17. Axiom. *Figurer, som alldeles inträffa med hvarann, eller kunna täcka hvarann, om de läggas på hvarann, äro lika stora och likformiga; och de; som äro lika stora och likformiga, kunna täcka hvarandra.*

---

18. Axiom. *När tvenne linier eller figurer på samma sätt göras, och det, hvarigenom de göras, är hos dem begge likformigt, så äro dessa linier eller figurer likformiga.* Fig. 26.

Så äro t. ex. alla *cirklar* likformiga; alla *liksidiga trianglar* likformiga; alla *qvadrater likformiga* o. s. v.

---

19. Axiom. *Hvar och en rät linie kan betraktas som en diameter, och en halfcirkel uppritas på hvardera sidan derom.*

Fig. 27. Om den räta linien AB anses hafva punkten C på sin midt, så kan C tagas till medelpunkt och en cirkel ritas (I—6), med den gifna radien CA. Denna cirkel måste då gå både genom A och B, efter CB är lika stor med CA. Så uppkommer hela cirkeln ADBE, som har en *halfcirkel* på hvardera sidan om AB.

---

20. Theorem. *När en rät linie faller på en annan rät linie och gör vinklar på båda sidor om sig, så äro dessa begge vinklar tillsammans 180° eller tvenne räta.*

Fig. 28*a*. Låt räta linien AC falla på räta linien BD i punkten C, och göra vinklarne BCA och DCA på båda sidor om sig, så säger jag att vinklarne BCA och DCA tillsammans skola utgöra så mycket som 180° eller tvenne räta vinklar.

Ty, om C tages till medelpunkt och en cirkel ritas med radien CA (I—6), så kan (I—19) EF betraktas som en diameter och EAF vara en halfcirkel, uppritad på den sidan om EF, der AC ligger. Men halfcirkeln EAF mäter jemt de begge vinklarne ECA och FCA, hvilka äro desamma, som vinklarne BCA och DCA. Och hvarje halfcirkel innehåller 180° (I—5). Således innehålla vinklarne BCA och DCA tillammans så mycket som 180°, hvilket vill säga två räta vinklar (I—10).

Häraf ser man ock, "att flere vinklar, huru många som helst, som kunna stå omkring en punkt på ena sidan om en rät linie, utgöra tillsammans 180° eller lika mycket med två räta vinklar." Ty de upptaga alla tillsammans en half cirkel-periferi, mätas således af den, och utgöra 180°. Fig. 28 *b*.

---

21. Definition. *När en rät linie råkar en annan rät linie och gör vinklar på båda sidor om sig, så kallas hvardera af dessa två vinklar supplement* (eller fyllnad i 180°) *åt den andra.*

Således är vinkeln BCA supplement åt vinkeln DCA, och äfvenså vinkeln DCA supplement åt BCA. Fig. 29.
Såsom de begge tillsammans utgöra 180° (I—20), så är det klart, att om man vet huru många grader den ena innehåller, så måste den andra innehålla fyllnaden, eller allt som återstår i 180°.

---

22. Axiom. *De, som äro lika stora med ett och samma eller lika stora, äro sinsemellan lika stora.*

Om linien AB är lika stor med EF, och CD Fig. 30.
äfven är lika stor med EF; så äro de begge linierna AB och CD sinsemellan lika stora.

Likaledes: *De, som äro 2 gånger, 3 gånger, 4 gånger o. s. v. så stora som ett och samma eller lika stora, äro ock sinsemellan lika stora.* — Likaledes: *De, som äro hälften, tredjedelen, fjerdedelen o. s. v. af ett och samma eller lika stora, äro äfven sinsemellan lika stora.* — Med andra ord: "Om man med samma tal multiplicerar (eller dividerar) ett och samma eller lika stora, så blifva produkterna (eller qvoterna) lika stora."

---

23. Axiom. *Om man lägger lika stora till lika stora, så blifva de hela lika stora; men om man lägger lika så mycket till större som till mindre, så blir det hela i förra fallet större än i det sednare fallet.*

Fig. 31 *a*. Om AB = CD, och EF = GH, så är det klart att AB + EF = CD + GH. — Om deremot AB = CD, men

Fig. 31 *b*. EF > GH *); så är det klart att AB + EF > CD + GH.

---

24. Axiom. *Om man tager lika stora ifrån lika stora, så blifva de återstående lika stora; men om man tager lika så mycket ifrån större som ifrån mindre, så blir det hela i förra fallet större än i det sednare fallet.*

Fig. 32 *a*. Om SR = PO och ST = PN, så måste, om man tar ST ifrån SR och PN ifrån PO, den återstående TR = NO. — Om deremot SR > PO, men ST =

Fig. 32 *b*. PN, så blir också den återstående TR > NO.

---

25. Theorem. *Om tvenne räta linier skära hvarandra, så äro de vinklar, som stå midt emot hvarann, lika stora.*

Fig. 33. Lät AB och CD skära hvarandra i E. Jag säger att vinklarne AEC och BED, som stå midt emot hvarann, äro lika stora; och äfven att vinklarne CEB och AED äro lika stora.

Ty *v*. AEC + *v*. CEB = 180°, äfvenså äro *v*. CEB + BED = 180° (I—20). Följaktligen äro *v*. AEC + *v*. CEB = *v*. CEB + *v*. BED, emedan de

*) Tecknet > betyder, att hvad som står venster derom är *större* än hvad som står höger derom. Alltså EF > GH betyder: EF är större än GH. Tecknet < betyder tvertom.

äro lika stora med ett och samma, nemligen 180° (I—22). Om man då tar bort vinkeln CEB, som finnes på begge ställen, så är den återstående *v.* AEC = *v.* BED (I—24). Hvilket var det ena.

På samma sätt bevises, att *v.* AED = *v.* CEB. Ty efter *v.* CEB + *v.* BED = 180°; och äfvenledes *v.* BED + *v.* AED = 180°; så är *v.* CEB + *v.* BED = *v.* BED + *v.* AED (I—22). Om då *v.* BED, som finnes på begge ställen, borttages; så blir den återstående *v.* CEB = *v.* AED (I—24). Hvilket var det andra.

Sådana mot hvarann stående vinklar kallas *vertikal-vinklar.*

---

26. Theorem. *Alla vinklar, som kunna stå omkring en punkt, utgöra tillsammans så mycket som fyra räta vinklar, eller 360°.*

Ty, lät huru många vinklar som helst: BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB, stå omkring en punkt A, så mätas de alla tillsammans af en hel cirkelperiferi. Men hvarje hel cirkel-periferi utgör 360° (I—5), och fyra räta vinklar äro äfven 360° (I—10—2). Alltså utgöra alla vinklar tillsammans, som kunna stå omkring en punkt, så mycket som fyra räta vinklar, eller 360°. Fig. 34.

---

27. Problem. *Att mäta en gifven vinkel.* Fig. 35.

Låt BAC vara en vinkel. Det begäres att mäta vinkeln BAC, d. ä. att finna hvilket *gradtal*