

## RÄKNESÄTTSPRINCIPEN

### I DEN GRUNDLÄGGANDE MATEMATIKUNDERVISNINGEN.

Den metod, som intill sista decenniet mest använts inom den grundläggande räkneundervisningen, har i fråga om räknesätt, terminologi och räkneuppställningar sedan gammalt varit en väl banad undervisningsväg. Den har ock varit följd så gott som överallt i vårt land. Den likformighet, som sålunda varit att finna i våra folkskolors räkneundervisning, har varit något i många avseenden gott och värdefullt. Läraren fick lära barnen räkna i huvudsak på samma sätt, som han själv lärt sig att räkna, och varthelst barnen kommo i vårt land, kunde de i regel i fråga om detta ämne rätt snart känna sig hemmastadda. Hade där i stället mött ett annat räkneförfarande, skulle detta kommit att vålla ej ringa bryderi. Varje lärare vet ju, hurusom det blott behövs en ytterst liten förändring, exempelvis i fråga om skrivsättet, och han mötes genast av barnets »förstår inte». Gör man skolstudier utomlands, får man ock en tydlig förnimmelse av vilken fördel det är att icke behöva brottas med olika räknemetoder. Räknevanorna växa så samman med ens natur, att man måste mer eller mindre göra våld på sig själv, om det begäres, att man skall räkna på ett annat sätt. Och detta gäller uppenbarligen icke endast barn, utan i ännu högre grad oss äldre. Däri äger undervisningen ock en god regulator

mot allt för hastiga omsvingningar i detta ämnes meto-  
diska behandling.

Å andra sidan bör denna naturliga obenägenhet för förändringar givetvis icke få föränleda stillastående. Icke heller för detta ämne är idealmetoden ännu erhållen. Under nämnda decennier torde exempelvis ganska allmänt varit konstaterat, att *resultatet av räkneundervisningen icke alltid rätt svarat emot ansträngningarna*. Åtminstone har det icke blivit fullt, vad man väntat och önskat. Trots skicklighet från lärarnas sida har räkningen i många fall vållat barnen betydande svårigheter. Allt som oftast har det ock blivit framhållet, att barn efter slutad skolgång blottat förunderligt stor oförmåga att lösa även mycket enkla praktiska räkneproblem. Inom högre skolor finner man mycket ofta klagan över matematik såsom ett särskilt svårt ämne, och härvidlag visar det sig mestadels, att det egentliga felet dock ej ligger i ämnets natur eller i bristande begåvning utan snarare är att söka i bristande förtrogenhet med själva grunderna för räkning. Det saknades tillbörlig inblick i aritmetikens enklaste grundlagar.

Nu kan givetvis sådan missbelåtenhet helt enkelt bero på att kraven ställas för höga. Man aktade ej tillbörligt på att man ej får begära för mycket av barn i förstånds-  
hänscende under de 6 första skolåren och att den tid, som får anslås till detta ämne, måste vara rätt begränsad. I en skola med stort antal lärjungar måste ju därjämte en del barn på grund av växlande individuella förhållanden bli mer eller mindre okunniga. Säkerligen innebär sålunda åtskilligt i förekommande klagomål överdrifter, som böra tillbakavisas. På samma gång ligger det emellertid i dessa en maning till skolans män att pröva, om ändå inte skulden i någon mån är att söka hos skolan. Det finnes ock många bland dessa, som känt sig på allvar böra undersöka detta förhållande. I det följande må närmare utföras, vad som härvid visat sig vara värt särskilt beaktande i fråga om »räknesättens» användning. Detta måste ha sitt

särskilda intresse, då det är mycket som talar för att en viss onläggnings av undervisningen i sådant avseende skulle kunna leda till ett mera tillfredsställande resultat.

### *K. P. Nordlunds reformförslag.*

I början på 1890-talet kom mycket stor uppmärksamhet att ägnas åt räknemetodiska spörsmål, närmast med anledning av den ingående och skarpa kritik, som den framstående matematikläraren och läroboksförfattaren K. P. Nordlund i Gävle riktade mot den gängse räknemetoden i det märkliga arbetet »Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning». I denna intressanta och synnerligen värdefulla bok, vari han framhåller, att stora svagheter och pedagogiska oegentligheter vidlåda det gängse undervisningssättet, återfinna vi följande.

1) Räknesättet i den allmänna undervisningen vore *alltför abstrakt*. Räknearbetet hade fått innebära lösning av abstrakta *sifferexempel* i sådan omfattning, att den mekaniska räkningen hade blivit det väsentliga. »En tankemördande slentrian» hade blivit utmärkande för det sätt, varpå undervisningen bedrevs.

2) Räkneundervisningen vore *alltför dogmatisk*. Detta berodde i väsentlig grad på att man i densamma använde som grundstomme »quattuorspecies-läran», de s. k. fyra enkla räknesätten med tillhörande latinska termer. Denna *räknesättsprincip* vore i den grundläggande undervisningen förkastlig, ty barnen kunde icke fatta varken de latinska termernas namn eller de olika räknesättens innebörd. Det vore ock både oegentligt och opedagogiskt att, såsom vid användningen av quattuorspecies-läran skett, lämpa *räknetermerna* efter läran om de hela talen och att sedan helt enkelt överflytta dessa på räkningen med brutna tal. Så ha exemplvis uttrycken multiplicera och dividera kommit att föranleda stor oklarhet och begreppsförvirring. I detta räknesystems heltalslära betydde nämligen multiplicera

mångfaldiga, men i dess bråklära stundom mångfaldiga, stundom dela och stundom bäggedera på en gång. Likaså betydde dividera i heltalsläran dela, men i bråkläran stundom dela, stundom mångfaldiga, stundom bäggedera i förening och stundom något annat, för vilket barnen ej fingo lära något namn alls. (I sista fallet avsågs uppenbarligen dividera i betydelsen att bestämma förhållandet mellan två storheter.)

3) Det vore ett betydande pedagogiskt missgrepp, att *decimalbråksräkning* toges före räkningen i allmänna bråk. Icke ens en inledande kurs i fråga om bråkbegreppet kunde här göra tillfyllest, utan decimalbråksräkningen måste byggas på ordentligt genomgången kurs i allmänna bråk, för såvilt den ej i mycket blott skulle bli en besvärlig lek med siffror.

I stället för den allmänt förekommande räknemetoden förordade K. P. Nordlund därför en fullkomligt ny räknemetod. Denna skulle vara så ordnad, att barnen kunde med eget förstånd begripa räkningen. Den borde därför vara *realistisk* och anknyta till konkreta bilder och olika mätningar, vägningar, tidsbestämningar, och exemplen borde i allmänhet gälla sakliga förhållanden. I stället för räknetsättprincipen borde *jämförelseprincipen* läggas som grund för undervisningen. Inom heltalsläran skulle räkningen sålunda gälla jämförelse mellan olika storheter i fråga om storlek eller antal, och inom bråkläran förhållandet mellan sådana storheter. I stället för de många utländska termerna, som antingen missförstås eller icke förstås, skulle användas en *förenklad terminologi* med svenska uttryck, sådana som »det hela», »delen» och »delarnas antal». Allmänna bråkläran borde läggas till grund för decimalbråksräkningen. I av K. P. Nordlund författade exempelsamlingar har ock närmare angivits, huru han tänkt sig undervisningen efter sådan »heuristisk» metod.

Vid framförandet av denna »heuristiska metod» hävdades med kraft den uppfattningen, att räkneundervisningen

icke i främsta rummet skall sikta till praktiskt gagn utan till *intellektuell* fostran. »Huvudsyftet skall icke vara att lära barnen allehanda räkneseätt och tankebesparande metoder utan omedelbar bekantskap med talen. Rakneexemplen skola behandlas syntetiskt och så lösas, att lärjungen för varje steg i räkningen bibehåller klar uppfattning av däri förekommande storheter. Till det centrala begreppet i räkneundervisningen vill han göra begreppet *förhållande*, matematikens hörnsten, och detta begrepp vill han därvid använda icke blott som ett uttryck för resultatet av en jämförelse utan som det metodiska huvudmedlet vid lösningen av olika uppgifter.»<sup>1</sup> Genom att så inrikta räkningen på bestämmandet av förhållandet mellan de i praktiska räkneuppgifter med brutna tal ingående storheterna söker han sålunda undanrödja de svårigheter, som särskilt lösningar med så kallad »multiplikation med bråk» och »division med bråk» i den gängse undervisningen bruka föranleda.

### *Anna Kruses »åskådningsmatematik».*

Nära släktskap med ovannämnda reformtankar av K. P. Nordlund röjer sig i det förslag till förändrad räknemetod, som nära 20 år senare (1909) frambars av lärarinnan i Brummerska skolan Anna Kruse, Stockholm. Ur hennes arbete »*Åskådningsmatematik*» må här anföras följande. Undervisningen skall redan från början inrikta sig på att utveckla det »matematiska sinnet», d. v. s. sinnet för matematiska storheter och deras förhållanden till varandra. Barnen böra ej få veta att »så skall det vara», »så ska du göra», utan med genetisk metod, genom ritningar och mätningar lära sig att bestämma, vad olika storheter äro i jämförelse med varandra och i förhållande till varandra. Som

<sup>1</sup> Se »Die Mathematik an den Volksschulen und Volksschullehrerseminaren Schwedens» von H. Dahlgren (Pedagogisk Tidskrift 1911).

»vägen till hjärnan går genom handen», böra barnen på laborationsmässigt sätt själva få syssla med räknematerial, som lämpar sig för dylika bestämningar. Stoffet skall läggas så tillgängligt, att barnen få en känsla av att vara upptäckare. De skola aldrig i matematik få något färdigt. Metoden får ej vara något minneskunskapsplugg, utan bör ge erfarenhetskunskap. Barnen skola icke inlära den eller den regeln och sedan inöva den, utan de skola »inse matematiken» och sedan inöva den.

Uppgifterna grupperas ej heller efter de fyra kända räknetsätten, utan arbetet samlar sig under de första skolåren kring de olika talen var för sig. Dessas storlek och karaktär påvisas medelst mångahanda olikartade räkneoperationer, som leda till talet i fråga (s. k. »allsidig talbehandling»). Så upptages exempelvis i andra skolårets kurs som ett särskilt räknekapitel »Talet 50». Vid behandling av detta tagas både uppgifter med sammanläggningar och frändragningar, med multiplikationer, sådana som  $10 \times 5$ , och delberäkningar, sådana som  $\frac{1}{5}$  av 50,  $\frac{4}{5}$  av 50 o. s. v. Redan tidigt göras barnen förtrogna med bråkbegreppet, och förhållandebegreppet klarlägges också redan under fjärde skolåret och användes för lösningen av sedvanliga multiplikations- och divisionsexempel med bråk. Hela planläggningen karakteriseras också av största opposition mot och frigörelse från quattuorspecies-systemet och dess räknetsättsindelning. Även detta reformförsök bottnar sålunda i erfarenheter om olämpligheten av att knyta räkneметоден till detta system. Med skärpa framhäves här också vikten av att räkningen blir omlagd så, att barnen kunna i konkreta föreställningar följa räkneoperationernas innebörd.

*Förändringar i våra folkskolors räknemetodik under de sista decennierna.*

Man kan nu fråga sig, huruvida räkneundervisningen i våra folkskolor kommit att stå fullkomligt oberörd av nämnda krav på reformering. Helt naturligt har den kritik av det traditionella räknesättet, som utgjorde motivering för förenämnda reformförslag, framkallat opposition. Från olika håll har man försökt att tillbakavisa de gjorda angreppen, och i allmänhet torde man nog i våra skolor ha känsla av att man i det ämnet haft förmånen att få sitta i så gott som orubbat bo. Den uppmärksamme granskaren skall emellertid finna, att den nuvarande räkneundervisningen i våra folkskolor dock är i åtskilliga avseenden olik den, som lämnades för 40 år sedan. Egendomligt skulle det ock ha varit, om så ej blivit fallet. Kärnpunkten i de framförda reformkraven var ju, att undervisningen icke var lagd med tillbörlig hänsyn till barnens sätt att tänka, och vilken lärare har väl icke med K. P. Nordlund erfarit, att ett icke oväsentligt hinder möter i det avscendet, så länge allt räknande både i hela tal och bråk skulle intvingas i de 4 fack, som av gammalt kallats »de fyra enkla räknesätten» med den därtill hörande stereotypa terminologien.

Gå vi till den nya *undervisningsplanen av 1919*, är det ock i detta sammanhang av särskilt intresse att stanna inför sådana bestämmelser som följande. Räkneundervisningens uppgift är att »bibringa barnen en efter deras ålder och utveckling avpassad insikt och färdighet i räkning». Mätningar och vägningar böra läggas till grund för räkningen med mått- och viktsorter, och räkneoperationerna böra, där så lämpligen kan ske, åskådliggöras genom räkning med föremål. I kursplanen finner man också förordat, att låta decimalbråkräkningen följa efter och i anslutning till allmänna bråkläran. Än kraftigare vittnesbörd om räknemetodens förändring och utveckling i den allmänna

undervisningen ge de läroböcker, som använts, och alldeles särskilt de nya läroböcker, som utarbetats efter den nya undervisningsplanen. Här må närmast beaktas de förändringar, som vidtagits i fråga om de s. k. 4 räknesätten.

1) Sedan gammalt har särskilt räknesättet *division* vållat barnen stora svårigheter. Barnen ha blivit hänvisade till att använda detta räknesätt för många olika slags uppgifter. I äldre läroböcker har det visserligen i noter eller dylikt omtalats, att dessa uppgifter voro att hänföra till två olika huvudslag, och att räknesättet i fråga omfattade dels delningsdivision och dels innehållsdivision. För barnen blev det i regel bäst att icke behöva utreda, vilket slags räknesätt det skulle vara fråga om. För dem var det bekvämast och lugnast att blott få säga »*dividera*». Såsom av K. P. Nordlund framhållits, fick så bakom denna utländska term dölja sig mycket av oreda och oklarhet. Endast ett fåtal av barnen kommo underfund med att det här var fråga om två helt olika tankegångar och vad som var för dessa utmärkande samt att lösningen av vissa räkneuppgifter kunde vinnas endast genom att anknyta till den ena tankegången och att lösningen av andra däremot krävde den andra som hjälpare. Ej underligt därför, att barnen kände sig famlande och osäkra, när det blev fråga om att för olika uppgifter bestämma sig för räknesätt. I och med kravet på klart åskådliggörande av de olika räkneförloppens innebörd och användande av naturliga och svenska termer, blev det tydligen nödvändigt att *särlägga de två olika tankegestalterna inom division och låta dem få var sin särskilda behandling*. Sålunda söka också alla nyutkomna läroböcker att mer eller mindre tillgodose detta krav och upptaga skilda räkneövningar för dessa olika tankegångar. Även om man då inte alltid vågat sig på att införa särskilda tecken och namn för dessa, kan man numera gott säga, att divisionsräkningen i den elementära undervisningen blivit mera bestämt uppdelad i de två räknesätten: delberäkning och innehållsberäkning, och att man

sålunda numera faktiskt grundar räkneundervisningen på åtminstone 5 olika räkneelement.

2) Även inom bråkläran har under sista decenniet ett märkligt avfall kommit att göras från quattuorspeciesläran, i det att man tämligen allmänt torde i våra skolor vid lösningen av sakliga uppgifter ha övergivit det gamla räknesättet »delningsdivision med bråk». Man synes ha blivit tämligen allmänt övertygad om att detta lösningssätt icke var till något egentligt gagn, utan att en mera naturlig räkneväg här borde användas.

Är uppgiften exempelvis att bestämma priset på 1 kg, då 1 kg kostar 1,15 kr, vill man numera icke längre rekommendera som lösningsväg att »dividera 1,15 kr med  $\frac{1}{4}$ » enligt teckningen 1,15 kr:  $\frac{1}{4}$  — Är uppgiften att bestämma priset för 1 kg, då 1 kg kostar 1,80 kr, finner man det likaledes högst motbjudande att lära barnen som lösning, att de skola »dividera med  $\frac{1}{4}$ », att de skola använda som teckning 1,80 kr:  $\frac{1}{4}$  och att som uträkningssätt för denna teckning ange, att man i st. f. att dividera med bråket  $\frac{3}{4}$  skall multiplicera med ett bråk, där det förra bråkets täljare och nämnare fått byta plats, alltså med  $\frac{4}{3}$ .

Sistnämnda metod innebär ett alltför konstmässigt räkande, för att man sedan skall ägna det full tilltro och använda sig av det för dylika problem, då man sedan möter sådana i livet. För dylika uppgifter letar sig i regel ett sunt och naturligt tänkande fram till ett annat lösningssätt. I stället för att hänvisa till sådan »delningsdivision med bråk» enligt det gamla systemet torde ock numera allmänt användas de för regula-de-tri karakteristiska tankegångarna.

Den första uppgiften tecknas sålunda genast som en multiplikationsuppgift. 1 kg skall kosta  $4 \times 1,15$  kr = 4,60 kr.

I den andra uppgiften bestämmer man först priset på  $\frac{1}{4}$  kg.

Detta blir tydligen  $\frac{1}{4} \cdot 1,80$  kr. Därefter bestämmes priset på hela kilogrammet. Detta tecknas  $4 \times \frac{1}{4} \cdot 1,80$  kr eller om man så vill  $\frac{4}{4} \cdot 1,80$  kr = 2,40 kr.

3) Anmärkningsvärt är ock, att man alltmera börjat inom folkskolans sjätte årskurs ägna uppmärksamhet åt uppgifter, i vilka man har att bestämma, *hur stor del en storhet är av en annan storhet*. Inom flera nyutkomna läroböcker upptagas sålunda i särskilda kapitel en mångfald sådana exempel, i vilka *förhållandet* mellan olika storheter skall beräknas. Vid förklaring av dessa har det visat sig, att man även här bör följa en tankegång, som är en helt annan än den, som barnen förut blivit förtrogna med i de 5 enkla räknesätten.

Skall det exempelvis bestämmas, hur stor del 38 m är av 57 m, duger det ej att helt enkelt säga, att då skall man »dividera med 57 m». Det är tydligen fullkomligt orätt att därmed hänvisa barnen till deras delningsdivisionsföreställningar, enligt vilka man här skulle dela 38 m i 57 delar och se vad som blir i varje del, men helt säkert undviker varje lärare också att söka ge dem som förklaring, att det här är fråga om innehållsberäkning eller m. a. o. att man skulle se efter, h. m. gånger man kan taga 57 m ur 38 m. Ha barnen vant sig vid att tänka sunt och naturligt, studsas de inför en dylik anmaning som något tankevidrigt. Den innebär ju något, som för dem måste te sig minst lika omöjligt som att taga 57 från 38. De säga givetvis »det går inte».

Detta visar, att om man för dessa uppgifter, som innebära att bestämma, hur stor del en mindre storhet är av en större, hänvisar barnen till deras i delberäkning och innehållsberäkning vunna divisionsbegrepp, så ger man barnen *icke någon förklaring alls*. Visserligen kunna bar-

nen mekaniskt lyda order och få riktiga talvärden som resultat, men denna räkningens verkliga sammanhang med uppgiftens innebörd stå de fortfarande främmande för, och detta kan icke vara lyckligt. Förhållandebegreppet är utan tvivel matematikens viktigaste grundbegrepp, själva »hörnstenen» för fortsatt matematiskt länkande. Det är ock på detta kan icke vara lyckligt. Förhållandebegreppet är utan viktig grupp av i livet vanligen förekommande exempel. Dit höra exempelvis alla problem, som innebära att bestämma hur stor tillväxten i folkmängd och dylikt är, hur stor ökningen i inkomster, utgifter, skörd o. d. är, hur stor vinsten är på kapital m. m., allt i relation till ett förutvarande värde. Sådana uppgifter kunna uppenbarligen ej lämnas åsido i den vanliga skolkursen, och när man vill giva ordentliga föreställningar om lösningssättet för dem, skall man sålunda finna, att denna *förhållanderäkning* icke naturligt låter inordna sig i de förut inlärdas räknesätten. Även här måste till en början en avsondring ur matematikens allmänna divisionsbegrepp ske. Även förhållanderäkningen bör till en början tagas som *ett särskilt räknesätt*.

I fråga om behandlingen av detta räknesätt må här blott tilläggas följande. För att ange förhållandet mellan två storheter  $a$  och  $b$  använder man sig i matematiken av två olika tecken, det sedvanliga divisionstecknet ( $a : b$ ) och ett vågrätt streck

$\left(\frac{a}{b}\right)$ . Då förhållanderäkningen icke torde kunna upptagas till ordentlig behandling förrän i sjätte skolårets kurs, där barnen lärt sig räkning med allmänna bråk, blir det lämpligt att för denna förhållanderäkning till en början reservera det sistnämnda teckningssättet. Ovanstående uppgift skulle alltså tecknas

$$\frac{38 \text{ m}}{57 \text{ m}} = \frac{2}{3}$$

Lösningen erhålles på följande sätt:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ m är } \frac{1}{57} \text{ av det större måttet} \\ \therefore 38 \text{ m } > \frac{38}{57} > > > > \end{array} \right\} \text{Alltså: } \frac{38 \text{ m}}{57 \text{ m}} = \frac{38}{57} = \frac{2}{3}$$

Vad som i ovannämnda exempel framhållits, pekar sålunda otvetydigt på hurusom man är på väg att frigöra sig från det tryck, som quattuorspecies-systemet utövat på de grundläggande räknemetoderna, och att en i olika avscenden mera tankeväckande, naturligt ordnad och bärande räkneundervisning håller på att arbeta sig fram. Den kritik, som i »Lärogång vid den grundläggande räkneundervisningen» riktades mot den gamla räknesättsprincipen, var så psykologiskt träffsäkert grundad, att det icke gärna var möjligt annat, än att förändringar förr eller senare skulle komma att vidtagas. Blott det *kravet, att de olika tankegångarna i den första undervisningen i räkning skola åskådligt anges*, och att man därvid bör använda sig av svenska uttrycksätt och termer, *har med viss naturnödvändighet tvingat fram ur de 4 s. k. enkla räknesätten mera speciella räknevägar för vissa grupper av exempel.* Det har då visserligen blivit flera räknesätt, men man har på samma gång vunnit den stora fördelen, att det icke inom varje s. k. räknefack kommer att finnas helt olika saker. Grupperingen blir mera klar och enkel, och det blir då också mycket lättare att känna igen och hålla reda på vad som utmärker varje grupp.

### *Räknesättens namn och tecken inom heltalsläran.*

Då jag nu övergår till att särskilt i fråga om beteckningssättet närmare anföra, vad som vid försök vid skolor härstädes visat sig vara värt särskilt beaktande i en sådan ny elementär räknemetod enligt ovan angivna allmänna synpunkter, må först ett par allmänna anmärkningar göras i fråga om mekaniskt räknande och användning av räknesätt över huvud taget.

Att en räknemetod är sådan, att den leder fram till ett lösningssätt, som är tankebesparande och låter sig mekaniseras, är icke en svaghet hos densamma, utan det måste tvärtom vara ett krav, som en god räknemetod bör fylla.

Då det gäller utförandet av någon längre räkneoperation, får man inte ens begära, att lösningen skall kunna göras i kraft av förståndsmässigt räknande. Här måste räkneuppställningarna vara sådana, att man genom ett mer eller mindre maskinmässigt räknande efter vissa regler får riktigt resultat. Meningen med det hela och räkningens innebörd i enkla och belysande fall skall först bliva fullt klarlagd och förstådd, men att giva *räknefärdighet* blir alltid sedan ett viktigt led i undervisningsarbetet. Det blir sålunda nödvändigt att inom varje räkneparti koncentrera arbetet på vissa bestämda räkneövningar eller räknesätt.

Då i förut omnämnda reformförslag *räknesättsprincipen* i den traditionella räknemetoden underkänts, innebär detta icke heller, att räknesätt över huvud taget icke vidare skulle förekomma, utan blott att de s. k. 4 enkla räknesätten icke alltid äro lämpliga, då det gäller att göra barn förtrogna med lösningen av förekommande uppgifter. Barnens räknesättsföreställningar räcka ej till för allt, som inpressats i de 4 räknesätten, och det har därför icke blivit för dem möjligt att med förståelse och glädje använda dem. I strävandena att få fram en metod, som möjliggör mera fritt och naturligt tänkande och en sakligt mera intresseväckande undervisning, torde man nog emellanåt finna en viss benägenhet att slå över till en räknemetod utan sådana bestämt utstakade färdevägar. I många fall kan väl ock sådan undervisning leda till gott resultat. I våra skolor i allmänhet däremot torde det emellertid vara nödvändigt och till *värdefull hjälp, att bestämt banade räknevägar anvisas och följas*, och att enligt den gällande undervisningsplanen »inom varje särskilt moment av räkneundervisningen så stort antal sakexempel föreläggas, att barnen vänjas vid den för dessa exempel gemensamma tankegång, som kräves för deras lösning», och att till detta knyts så många sifferexempel, »att lärjungarna slutligen nå fram till mekanisk färdighet vid räkneoperationernas utförande».

Undersöker man de olika slags problem, som kunna sägas höra till elementär räkneundervisning och sålunda böra bli behandlade i våra folkskolor, skall man enligt ovanstående finna, att de i räkneavseende lämpligen böra sammanföras i sex olika grupper. Till belysning av vad som karakteriserar dessa må följande 6 exempel nämnas:

Räkneuppgifter	Räknesättets namn enligt quattuor-speciesläran	Räknesättets namn i nyelementär räknemetod
1) Erik ritade en linje som var 25 cm. Sedan ökade han på den 3 cm. Hur lång blev den?	Addition.	Sammanläggning. (Addition)
2) Erik ritade en linje som var 25 cm. Sedan tog han bort 3 cm. Hur lång blev den?	Subtraktion.	Fråndragning. (Subtraktion)
3) Erik ritade en linje som var 25 cm. Johan ritade en som var 3 gånger så lång. Hur lång var Johans linje?	Multiplikation.	Gångertagning. (Multiplikation)
4) Erik hade ett band som var 24 cm. Sedan klippte han av småbitar, som voro 3 cm långa. Hur många sådana kunde han få?	Innehållsdivision. (Första måttet > det andra.)	Innehållsberäkning (Division)
5) Erik hade ett band som var 24 cm. Sedan delade han det i 3 lika delar. Hur lång blev varje del?	Delningsdivision.	Delberäkning.
6) Erik hade ett band som var 24 cm. Han klippte bort 8 cm. Hur stor del av bandet var detta?	Innehållsdivision. (Första måttet < det andra)	Förhållanderäkning.

Dessa sex räkneuppgifter kräva icke för den utbildade matematikern sex olika räknesätt. Han skulle rent av kunna finna lösning till dem samtliga genom endast sammanläggningstänkande. Ofta lösas ju ock uppgifter liknande exempel 2) med additionsförfarande (Ifyllnadsmetod:  $3 + x = 25$ ), och uppgift 3)

är ju egentligen endast en upprepad addition ( $25 + 25 + 25 = x$ ). Uppgift 4) kan lösas medelst subtraktion eller medelst multiplikationstänkande, där gångertalet sökes. Och uppgift 5) kan lösas medelst multiplikationstänkande, där multiplikanden sökes.

Uppgift 6) kan lösas medelst delberäkning  $1^{\frac{1}{2}} \cdot 24 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

Då man vill ha så enkel lösning som möjligt för dessa och liknande problem och vill åskådliggöra denna så, att man utan omvägar direkt ser sambandet mellan uppgiften och resultatet, hänvisas man emellertid till att för var och en av de nämnda räkneuppgifterna använda särskilda och säregna räknesätt. En dylik undersökning ger sålunda vid handen, att man åtminstone *bör göra barnen väl förtrogna med 6 olika tankegångar*. Då dessa sedan skola utgöra utgångspunkt för allt det fortsatta räknandet och bilda grundstommen i det hela, ligger det utomordentlig vikt uppå att det i fråga om dessa vinnes all klarhet, som står att vinna. Framst måste då givetvis varje sådant räkneförlopp klarläggas var för sig. Genom mätningar, åskådligt räknande med föremål och mer eller mindre laborationsmässig behandling av sakliga uppgifter inom olika områden har man att öppna barnens blick för vad själva räkneoperationen innebär ur arbets- och tankesynpunkt och hur man på den vägen skall kunna leta sig fram till svaret. Det är då icke resultatet i och för sig, som därvid skall samla huvuduppmärksamheten, utan räknevägen. Kring de olika räknegestalterna bör samlas så mycket ljus, att barnen väl kunna igenkänna dem var och en och sedan också säkert kunna skilja dem från varandra. Det måste nedläggas utomordentlig omsorg härpå, så att förväxlingar och sammanblandningar förebyggas. I annat fall kommer, såsom redan förut framhållits, oklarhet, dimmighet och famlande osäkerhet att alltjämt vidlåda barnens räknande.

Det blir då ej heller likgiltigt, i vilken yttre dräkt dessa räknegestalter få träda fram för barnen, vad de få för namn och hur de avbildas (»tecknas»). För många barn

är det rent av de yttre igenkänningstecknen, som i främsta rummet visa dem vägen i deras tänkande. Till en början lösas uppgifterna med användande av ett språk, som naturligt ansluter sig till vad uppgiften sakligt innebär, men efter hand ledas barnen sålunda till *för varje tankegång karakteristiska och bestämda uttryck och termer*.

Härvid måste det uppenbarligen vara ur metodisk synpunkt förkastligt, att om man exempelvis vill, att barnen skola hålla isär delberäkning och innehållsberäkning, lära barnen att både för den ena och den andra räkningen säga »dividera med» eller »dela med» och att kalla båda räknetsätten »division». Skall klarhet och reda vinnas, måste tillses, att *varje tankegång blir uttryckt på sitt särskilda sätt* samt att *varje teckning* och då givetvis också *varje operationstecken får sin särskilda betydelse*. Vilken källa till besvärligheter och villervalla skulle det icke vara, om man i läsning minskade antalet bokstäver och krävde, att en och samma bokstav skulle få vara tecken för olika ljud, så att den i vissa fall skulle läsas på ett sätt och i andra fall på annat! Motsvarande olägenheter äro att vänta, om man inom räkneundervisningen begär, att ett och samma räknetecken skall understundom markera en räkneväg (t. ex. delberäkning) och understundom en annan (t. ex. innehållsberäkning).

Använder man samma tecken i teckningen för exempel 4), som kräver innehållsberäkning, och för exempel 5), som innebär en delberäkning, blir detta icke till hjälp och vägledning för barnen. Det måste då uppenbarligen tvärtom bli mycket svårt för dem att hålla klart, att i exempel 4) skall teckningen » $24 : 3 = 8$ » läsas »24 innehåller 3 åtta gånger», men att i exempel 5) samma teckning » $24 : 3 = 8$ » skall läsas »en tredjedel av 24 är 8», och detta även om delberäkningens och innehållsberäkningens olika karaktärer blivit mycket noggrant genomgångna.

Det har varit en allmän klagan och erfarenhet, att barnen icke kunna rätt fatta och hålla isär sistnämnda två räknetsätt. Detta har säkerligen enligt ovanstående i väsentlig

grad berott på att man ej övat de två olika tankegångar, som höra samman med dessa två räknesätt, tillräckligt mycket var för sig. Försök, som här utförts, ha också tydligt ådagalagt — vad som för resten varje metodiker torde finna så gott som självklart vid närmare eftersinnande — att om man vill ha säkerhet i det arbetet, bör man icke söka pressa in båda dessa olika tankegångar i samma form och ge dem samma teckningssätt, utan tvärtom vara särskilt angelägen om att låta dem få även i yttre mening olika utformning såväl i fråga om namn som operations-tecken och terminologi i övrigt.

Härvid har teckningen för uppgift 4) fått vara  $24 \text{ cm} : 3 \text{ cm} = 8 \text{ gånger}$ . Det sedvanliga divisionstecknet har sålunda bibehållits och reserverats för innehållsberäkningen. Teckningen läses  $24 \text{ cm}$  innehåller  $3 \text{ cm}$  8 gånger. — Som teckning för uppgift 5) har däremot valts  $\frac{24}{5} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ . Detta blir en teckning, som träffar själva kärnan i uppgiften. Denna är ju icke blott att dela  $24 \text{ cm}$  i tre delar, utan också och alldeles särskilt i detta slags räkning att bestämma, hur stor en sådan del blir. Ganska allmänt tycks man ock ha funnit lämpligt att låra barnen att ange en sådan uppgifts innebörd medelst uttrycket »en tredjedel av  $24 \text{ cm}$ ». Användes nu sistnämnda teckning, får man sålunda full överensstämmelse mellan teckning och läsning.

Vid användandet av sådant skrivsätt inom heltalsläran skola naturligtvis beteckningarna  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$  o. s. v. icke förklaras vara något slags bråk med täljare och nämnare, utan barnen få helt enkelt lära sig, att en tredjedel, en fjärdedel, en femtedel o. s. v. tecknas  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$  o. s. v. Det skall då också visa sig, att detta icke alls är svårare än att exempelvis lära sig, att tretton skrives 13, fjorton 14, femton 15, o. s. v. För att redan från början införa just detta teckningssätt för delberäkning talar också ett annat icke mindre viktigt skäl, som av det följande skall framgå.

Är det ett naturligt krav, att de använda räknetermerna och operationstecknen ej böra vara dubbeltydiga och ut-

tryck för flera olika tankegångar eller räkneoperationer, gäller tydligen också omvänt, att *en och samma tankegång helst bör återges med endast ett beteckningssätt*. Det kan visserligen synas vara behagligt att få välja mellan flera dräkter för en och samma räknetanke, men å andra sidan är det ganska rimligt, att man ej i räkneundervisningen inför och betjänar sig av flera termer och tecken, än som äro naturligt motiverade. Huvudsträvandet bör ju vara att få varje räkneförlopp så enkelt och klart avmålats som möjligt. Onödiga tillsatser i den vägen komma inom matematiken lätt att försvåra arbetet och att skymma blicken för mera inre och väsentliga värden i räklandet. Särskilt framträdande bliva givetvis olägenheterna av dubbelteckningar för en och samma räknetanke, om de två teckningssätten ge bild av olika tankegångar. Som ett belysande exempel härpå må här följande anföras.

Då uppgiften är att räkna ut, vad en kaka kostar, om 7 kakor kosta 35 öre, ha barnen inom heltalsläran ofta fått lära sig att använda teckningen  $35 \text{ öre} : 7 = 5 \text{ öre}$  och att lösa den enligt tankegången »35 öre, delat i sju delar, ger 5 öre i varje del». Detta räknesätt har då kallats *division*. Om samma uppgift sedan förelägges dem i sammanhang med bråkräkning, få de lösa den enligt teckningen  $\frac{1}{7} \times 35 \text{ öre} = 5 \text{ öre}$ , och då har detta räknesätt kallats *multiplikation*. Uppgiften är tydligen en och densamma i bägge fallen. Tankegången, som skall följas för erhållandet av resultatet, är ock i bägge fallen att dela upp 35 öre i sju delar och att bestämma *en* sådan dels storlek, men för denna har använts två olika teckningssätt, och av dessa säges det ena vara division och det andra multiplikation.

Det kan ej förvåna, att sådan dubbelhet i teckningssättet vållat villervalla och oklarhet i barnens räknesättsföreställningar. Till vilket fack skall väl barnet enligt sådan metod hänföra uppgiften i fråga? Innebär detta »att bestämma en sjundedel av en storhet» ett divisionsförfarande eller ett multiplikationsförfarande? Det blir en fråga, som barnen därefter tydligen måste ställa sig undrande

inför. Från sådan förbryllande dubbelhet och åtninstone skenbar motsägelse i begreppshänsende blir barnet skonat, om man enligt ovanstående för uppgiften i fråga endast använder den sista teckningen  $\frac{1}{7} \cdot 35 \text{ öre} = ?$  och redan från början *reserverar detta teckningssätt för delberäkning.*

Givetvis skall detta då icke vara en teckning för något, som kallas multiplikation. Det vore onatur att där begära, att den skulle läsas  $\frac{1}{7}$  »gång» 35 öre. Uppenbarligen bör läsningen — såsom redan angivits — vara  $\frac{1}{7}$  av 35 öre. Som operations-tecken användes ej heller tecknet »×», utan punkttecknet »·». Man kommer därmed också ifrån att ha två olika slags gångertecken, som användas tämligen godtyckligt. Det blir ett gångertecken (»×») och ett »av»-tecken (»·»). Det ena användes för multiplikationer (t. ex.  $3 \times 24 \text{ cm}$ ), det andra för delberäkningar (t. ex.  $\frac{1}{3} \cdot 24 \text{ cm}$ ).<sup>1</sup>

I strävandena efter en förenklad elementär räknemetod är det av stort intresse att så finna, att man *utan införande av nya operationstecken kan erhålla karakteristiska teckningssätt för de 6 enkla räknerägar*, som enligt ovanstående böra övas. Detta sammanhänger tydligen med den omständigheten, att ehuru man egentligen blott talat om 4 skilda räknesätt i quattuorspecies-systemet, man dock betjänat sig av flera tecken och beteckningssätt, ofta avmålände olika faser hos dessa. Hur enligt ovanstående förslag de olika tecknen nu skulle få mera bestämd avgränsad betydelse och bliva till hjälp för teckningen utav nämnda sex grundenkla räknesätt, torde framgå av föl-

<sup>1</sup> Då »×» härvid är valt som det typiska »gångertecknet» (och ej »·»), är detta i överensstämmelse med vad som fastställes i fråga om räknebeteckningar av Commission Elektrotechnique Internationale och som förordats av Kungl. Skolöverstyrelsen till användning i läroböcker och vid undervisning (Se »Yrkespedagogiska Centralanstaltens kompendier»).

jande i anslutning till förut valda exempel utförda översikt.

- Ex. 1.*  $25 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = ?$  Sammanläggning. Klass 1—2  
(Läsn.: 25 cm »och» 3 cm.)
- Ex. 2.*  $25 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = ?$  Fråndragning. » 1—2  
(Läsn.: 25 cm »minskat med» 3 cm.)
- Ex. 3.*  $3 \times 25 \text{ cm} = ?$  Gångertagning. » 2—3  
(Läsn.: 3 »gång» 24 cm.)
- Ex. 4.*  $24 \text{ cm} : 3 \text{ cm} = ?$  Innehållsberäkning » 3—4  
(Läsn. 24 cm »innehåller» 3 cm.)
- Ex. 5.*  $\frac{1}{3} \cdot 25 \text{ cm} = ?$  Delberäkning. » 3—4  
(Läsn.: »av» 25 cm.)
- Ex. 6.*  $\frac{24}{24} \text{ cm} = ?$  Förhållanderäkning. » 6  
(Läsn.: 3 cm »genom» 24 cm.)

Av nämnda sex enkla räknesätt upptagas endast de fem första till mera fullständig behandling inom heltalsläran. Enligt den gällande undervisningsplanen torde det härvid vara lämpligt att låta räkningen under första skolåret huvudsakligen gälla sammanläggning och fråndragning, under andra skolåret samma räknesätt med tillägg av gångertagning såsom nytt räknesätt och att först under tredje och fjärde skolåren göra barnen förtrogna med innehållsberäkning och delberäkning såsom bestämda räknesätt. Förhållanderäkningen bör, såsom förut nämnts, sparas till sjätte skolårets kurs.

### *Räknesätten inom bråkläran.*

Sedan barnen inom heltalsläran fått lära känna nämnda fem enkla räkneelement, blir uppgiften att i femte och sjätte klasserna inlära *bråkräkning*. Uppenbarligen bör man då *bygga vidare på de räkneföreställningar, som vunnits inom heltalsläran*. Detta kan också ske utan att medtaga något särskilt nytt i räknesättshänseende, då det är fråga om sammanläggning och fråndragning, då bråkstor-

heter endast förekomma i multiplikanden vid gångertagning eller blott i »det hela» vid delberäkningen. En sådan bråkkurs kommer då att omfatta just det, som i undervisningsplanen är anbefallt för 5:e skolåret. För att visa motsvarigheten i teckningshänseende till vad som förekommit inom heltalsläran må följande exempel tjäna.

1) Sammanläggning:

$$\frac{27}{100} m + \frac{3}{100} m = ?$$

*Anm.* Bråken böra vara liknammiga.

2) Frändragning:

$$\frac{27}{100} m - \frac{3}{100} m = ?$$

*Anm.* Bråken böra vara liknämninga.

3) Gångertagning:

$$3 \times \frac{27}{100} m = ?$$

*Anm.* Gångertalet skall vara helt tal.

4) Innehållsberäkning:

$$\frac{24}{100} m : \frac{3}{100} m = ?$$

*Anm.* Bråken skola vara liknämninga och innehållstalet helt tal.

5) Delberäkning:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{27}{100} m = ?$$

*Anm.* Antalet delar skall vara ett helt tal.

I fråga om delberäkningen är dessutom att märka, att i 5:e skolårets kurs endast sådana exempel böra medtagas, att vid uträkningen förändring av nämnaren i »det hela» ej behöver äga rum. Ett sådant exempel som  $\frac{1}{3} \cdot \frac{29}{100} m$  hör sålunda ej till denna kurs; men väl  $\frac{1}{3} \cdot \frac{27}{100} m$ .

Då sedan under *sjätte skolåret en mera fullständig kurs i bråk* skall genomgås, bliva förhållandena mera komplicerade. Det är särskilt då, som man känner tyngden i K. P. Nordlunds *anmärkning*, att man icke kan vinna ett gott och naturligt lösningssätt, om man helt enkelt överflyttar heltalslärans termer och räknesätt på bråkräk-

ningen utan att fasta avseende vid att man där fått att göra med brutna tal. Redan i det föregående är ock i ett fall vidrört, hurusom man då i stället lämpligen kan hänvisa till vart och ett av de enkla räknesätt, som ingå i den sammansatta uppgiften. Det gäller ju att få en sådan lösning för dessa mera sammansatta räkneuppgifter, som blott innebär att bygga vidare på de räkneföreställningar, barnen inom heltalsläran vunnit om de olika räknesätten. Hur detta lätt kan ske med utgångspunkt från räknesätten så tecknade och behandlade, som angivits i ovannämnda »nyelementära metod», må här något beröras i anknytning till några enkla belysande exempel.

1) Tänka vi då först på vad som av gammalt hänförs till »multiplikation med bråk», möter oss först den grupp av enkla exempel, till vilka följande uppgift hor.

*1 m tyg kostar 75 öre. Vad kostar  $\frac{1}{5}$  m?* För sådana exempel behöver man tydligen ej nu giva barnen någon särskild vägledning. Enligt vad de redan lärt inom heltalsläran, teckna de den  $\frac{1}{5} \cdot 75$  öre och kalla den *delberäkning*. Givetvis kan här fortfarande samma teckning och samma namn bibehållas.

Tack vare inlärandet av denna teckning redan inom heltalsläran har sålunda ett gott förarbete för bråkräkning där blivit undångjort och en utmärkt botten lagd för allt vad bråkräkning heter.

Vi övergå sedan till den grupp av mera sammansatta uppgifter hörande till »multiplikation med bråk», för vilka följande exempel må tjäna som typ.

*1 m band kostar 75 öre. Vad kostar  $\frac{3}{5}$  m?* Lösningen kräver tydligen två olika slags räkningar, nämligen dels att beräkna  $\frac{1}{5} \cdot 75$  öre (alltså delberäkning) och dels att taga detta värde 3 gånger (alltså gängertagning). Här blir det sålunda

naturligt, att man, som ju alltid sker vid muntlig räkning (»huvudräkning»), behandlar uppgiften såsom innebärande en sammansättning av dessa två enkla räknesätt. Teckningen blir då närmast  $3 \times \frac{1}{5} \cdot 75$  öre. Utan svårighet går det dock att i stället lära barnen att genast teckna denna uppgift  $\frac{1}{5} \cdot 75$  öre, vilken teckning då givetvis hör läsas  $\frac{1}{5}$  av 75 öre.

Här kan nu göras den frågan: Vad *namn* skall man giva det räknande, som ligger angivet i en sådan teckning? Med det gängse multiplikationsbegreppet (gångertagning = mångfaldigande) kan det uppenbarligen icke gärna falla någon in att påstå, att denna uppgift till sitt väsen är något slags gångertagning. Det gäller ju att bestämma *en del* av 75 öre. Långt naturligare synes det vara att kalla den för delberäkning. Då den emellertid innehåller både delberäkning och gångertagning, är den ju närmast att förlikna vid en regula-de-tri-uppgift, och det är tydligen inte riktigt att då för hela räkneuppgiften taga namnet blott på det ena räknesättet, vilket namn man då än väljer. Vill man det oaktat — såsom brukat ske — för det sammansatta räknesättet taga namnet multiplikation, under framhållande av att man därmed blott vill *utvidga det förutvarande multiplikationsbegreppet*, så att det även kommer att rymma dessa exempel, måste man lägga märke till att i och med detta kommer också en sådan uppgift som att beräkna  $\frac{1}{5} \cdot 75$  öre att höra till samma räknesätt, alltså det räknande, som innebär att undersöka, vad som erhålles i varje del, då 75 öre delas i 10 lika delar, m. a. o. delberäkningen. Därmed skulle man sålunda göra området för multiplikation så vitt, att det komme att gripa in i och över området för delberäkningen. Liknande blir förhållandet, om man väljer den andra vägen och kallar det sammansatta räknesättet delberäkning (>di-

vision»). Vare sig man tager det ena eller det andra namnet, blir det sålunda ej längre någon skiljegräns mellan vad som är multiplikation och division. Dessa förut helt motsatta räknesättsbegrep komma därmed att flyta över i varandra och liksom uppsluka varandra. Men i och med detta förlora de tydligen ock för barnen allt värde såsom namn på skilda räkneförlopp. Vi återkomma härvid till — vad som redan förut markerats — att det med sådan metod icke blir för barnen längre möjligt att hålla isär, vad som är det ena och det andra.

Långt bättre än att på nämnda sätt förvanska deras förut vunna grundföreställningar i räkning är det givetvis att icke giva detta sammansatta räknesätt något namn alls. Det förtjänar nämligen uppmärksammas, att något sådant icke med nödvändighet behövs. Man reder sig exempelvis mycket väl med uppgifter, som innebära olika sammansättningar av addition och subtraktion, utan att för dem äga något särskilt namn. I varje skola brukar man lära barnen att lösa regula-de-tri-uppgifter, och detta har kunnat gå mycket väl för sig, utan att man inlärt namnet regula-de-tri för detta sammansatta räkande.

Vill man emellertid för överskådlighetens skull ha ett namn på detta räknesätt, ligger det rätt nära till hands att, då det ju innebär att bestämma en bråkdel av ett visst uppgivet värde, kalla det för *bråkdelsräkning*. Det utmärkande för detta räknesätt skulle då vara, att man medelst det bestämmer värdet på ett visst antal bråkdelar av en storhet, vars storlek man känner. Allt eftersom bråket, som anger antalet bråkdelar, då är ett egentligt bråk eller ett oegentligt bråk, kommer tydligen att vid uträkningen erhållas en minskning eller ökning av den givna storhetens värde.

2) Vi övergå nu till den grupp av uppgifter, som brukat hänföras till s. k. »*delningsdivision med bråk*». Såsom redan förut är närmare påvisat, få dessa sin bästa lösning ge-

nom att behandlas på fullkomligt motsvarande sätt (se sid. 88).

Skall man exempelvis bestämma priset på 1 m, då man vet att  $\frac{1}{5}$  m kostar 1,80 kr, hänvisar man sålunda icke barnen till att »dividera med  $\frac{1}{5}$ » och kallar räknesättet division, utan lösningen vinnes genom att först bestämma priset på  $\frac{1}{5}$  m enligt teckningen  $\frac{1}{5} \cdot 1,80$  kr (delberäkning) och att sedan bestämma priset på en hel meter genom att taga det värdet 5 gånger (gångertagning), så att teckningen blir  $5 \times \frac{1}{5} \cdot 1,80$  kr eller  $\frac{5}{5} \cdot 1,80$  kr = 3,— kr.

Då många sådana exempel behandlats, komma barnen enligt härstädes gjord erfarenhet snart att omedelbart kunna ange teckningen för dylika uppgifter. De finna, att det även här är en slags bråkdelsberäkning, men att tankegången är en omvändning till vad som mötte i den förutvarande bråkdelsräkningen. Där visste man värdet på 1 m. och skulle bestämma priset på en viss bråkdel av den. Här däremot är priset på viss bråkdel av metern känt och det gäller att få reda på priset på 1 m. De inse snart, att, då läget innebär en sådan omvändning av förhållandena, skall i teckningen ingå det omvända bråket (»bråkets inverterade värde»). Det kommer då ock att ligga mycket nära till hands att — om man nu vill ha namn även på denna saumansatta räkning — kalla den bråkdelsräkning med omvänt bråk eller *omvänd bråkdelsräkning*.

3) Av de uppgifter, som inom bråkläran av gammalt hänförs till »division med bråk», återstå sedan endast de, vilkas lösning innebär s. k. »*innehållsdivision med bråk*». Även för dessa har man under sista decenniet tämligen all-

mänt frigjort sig från quattuorspecies-systemets tecknings- och lösningssätt. Hur man här kan anknyta till förut nämnda enkla räknepåställningar, framgår av följande exempel.

Hur många muggar mjölk kunna erhållas ur en flaska på  $2\frac{2}{5}$  l, om muggen själv rymmer  $\frac{3}{10}$  l? Man riktar då uppmärksamheten på att det här liksom vid sammanläggning och frändragning gäller en viss jämförelse mellan två mått och att man därför lämpligen bör uttrycka bägge storheterna i samma sorts delar (»göra dem liknämna»). Därmed blir det möjligt att lösa uppgiften enligt fullkomligt samma tankegång i räkandet, som följts vid innehållsberäkningen inom heltalsläran. Uppgiften tecknas och uträknas sålunda på följande sätt:

$$\text{Teckning: } 2\frac{2}{5} \text{ l} : \frac{3}{10} \text{ l} = ? \quad (\text{Läs. } 2\frac{2}{5} \text{ l innehåller } \frac{3}{10} \text{ l.})$$

$$\text{Uträkning: } \frac{24}{10} \text{ l} : \frac{3}{10} \text{ l} = 24 : 3 = 8. \quad \text{Svar: } 8 \text{ muggar.}$$

Motsvarande gäller givetvis, när man skall bestämma, hur stor del en storhet är av en annan, alltså vid s. k. förhållanderäkning.

Som en *sammanfattning* av vad som här ommänts i fråga om användningen av de sex enkla räknesätten såsom grundstomme i lösningen av olika uppgifter inom brakläran och mera sammansatta räkneuppgifter på det hela taget, må här göras följande sammanställning av olika exempel och deras tecknande.

*Ex. 1.* Erik köpte 3 m tyg, *Teckning:*  $5 - 3 \times 0,75 \text{ kr} = ?$   
 som kostade 75 öre  
 metern. H. m. bör  
 han ha tillbaka på  
 5 kr.

*Anm.* Teckningen anger både multiplikation och subtraktion. På liknande sätt kunna alla räknesätt kombineras i termer.

*Ex. 2.* 10 m band kostar *Teckning:*  
 75 öre. Vad kostar  
 3 m?  $3 \times \frac{1}{10} \cdot 75 \text{ öre} = ?$

*Ann.* Teckningen anger både delberäkning och multiplikation. Räknesättet kallas ofta »regula de tri».

*Ex. 3.* 1 m band kostar 75 öre. Vad kostar  $\frac{3}{10}$  m?  
*Teckning:*  $\frac{3}{10} \cdot 75 \text{ öre} = ?$   
 (Läsn.:  $\frac{3}{10}$  av 75 öre.)

*Ann.* Uppgiften innebär både delberäkning och multiplikation. Kallas lämpligen »bråkdelsräkning» (ej multiplikation = mångdubbling).

*Ex. 4.*  $\frac{1}{10}$  m band kostar 45 öre. Vad kostar 1 m?  
*Teckning:*  $\frac{1}{10} \cdot 45 \text{ öre} = ?$   
 (Läsn.:  $\frac{1}{10}$  av 45 öre.)

*Ann.* Teckningen erhålles *icke* genom någon slags »division» med  $\frac{1}{10}$  utan medelst regula-de-tri-metod. Den blir bråkdelsräkning med omvänt bråk eller *omvänd bråkdelsräkning*.

*Ex. 5.* Hur många gånger kan man taga  $\frac{2}{5}$  l mjölk ur en flaska med  $2\frac{1}{5}$  l?  
*Teckning:*  $2\frac{2}{5} \text{ l} : \frac{2}{5} \text{ l} = ?$   
 (Läsn.:  $2\frac{2}{5} \text{ l}$  innehåller  $\frac{3}{10} \text{ l}$ .)

*Ann.* Uppgiften hänvisar till »innehållsberäkning». Vid lösningen göras bråken liknämninga.

*Ex. 6.* Ett bronsstycke, som vägde 4,8 hg, innehöll 4,2 hg koppar. Hur stor del av vikten var koppar?  
*Teckning:*  $\frac{4,2}{4,8} \text{ hg} = ?$   
 (Läsn.: 4,2 hg genom 4,8 hg.)

*Ann.* Uppgiften hänvisar till att bestämma hur stor del 4,2 hg är av 4,8 hg, alltså *förhållanderäkning*.

### Övergången till quattuorspeciessystemet.

Inför ovanberörda omläggning av den grundläggande räkneundervisningen ligger det nära till hands att fråga, om

därmed kommer att givas en matematisk kunskap, som blir ett lika *tjänligt underlag för fortsatta matematiska studier*, som den gamla räkneundervisningen med quattuorspecies-metoden gav. Det förtjänar då först att beaktas, att arbetet i våra folkskolor i främsta rummet har som mål för sin undervisning att ge barnen den insikt i räkning, som allmänt erfordras för lösning av i dagliga livet förekommande uppgifter. Uppenbarligen är det dock en styrka, om därmed på samma gång kan lämnas god förberedelse för arbetet i högre skolor.

Ordnar man nu räkneundervisningen enligt ovannämnda nya principer, skall det ock snart visa sig, att därmed gives icke endast lika god grund i berörda avseende utan en mera bärkraftig sådan. Då barnet kommer att bättre förstå sitt räknande, vinnes en helt annan matematisk utbildning, ett helt annat »matematiskt sinne», än vad räkning med mer eller mindre oförstådda regler och tecken kunde ge. Och har blott detta vunnits, att barnen fått ordentligt lära sig att förstå sitt räknande och se det matematiskt intressanta i räkneproblemen, då har tydligen också den bästa och säkraste grund lagts för fortsatta studier. För den vinsten kan det vara väl värt att offra en myckenhet av lärda termer och traditionella lösningssätt.

På samma gång är det emellertid att beakta, att de i nämnda nyelementära metod *förordade lösningssätten och teckningarna äro så valda, att barnen med dem skola kunna lämpligt ledas fram just till de inom matematiken som vetenskap använda räknebegreppen*. Alla teckningar äro sådana, att de återfinnas i och sålunda alltjämt kunna bibehållas i fortsatt matematiskt studiearbete. Uppgiften blir då endast att få sammanfört, under mera allmänna synpunkter, vad som barnen förut lärt känna i de förenklade räknesätten. Med här förordade räknemetod avses sålunda ingalunda att föra bort från quattuorspecies-systemet utan tvärtom att hjälpa fram till mera full och säker uppfattning av vad detta innebär. Här är ej möjligt att närmare

utföra, hur övergången till detta lämpligen skall göras, utan jag får inskränka mig till att mera antydningssvis nämna följande.

1) Redan inom sjätte årskursen blir det tillfälle att behandla s. k. »multiplikation med blandat tal», alltså uppgifter sådana som denna:

Vad kostar  $3\frac{2}{5}$  m tyg, då priset är 1,80 kr per meter?  
Enligt ovanstående bestämmes här med »muntlig metod» först priset på 3 meter medelst gängertagning och sedan priset på  $\frac{2}{5}$  m medelst bråkdelräkning. Det går i det sammanhanget lätt att påvisa lämpligheten av att för detta räknande ha endast en teckning. Här kunna då barnen få lära sig, att uppgiften i fråga kan tecknas  $3\frac{2}{5} \times 1,80$  kr? Därmed göres då början till utvidgning av multiplikationsbegreppet. De få veta, att man med uttrycket  $\frac{2}{5}$  »gänger» menar  $\frac{2}{5}$  »av» storheten i fråga.

Sedan barnen blivit förtrogna med såväl gängertagning som bråkdelräkning, blir det sålunda lätt att föra dem fram till förståelse av vad multiplikation i sådan vidsträcktare bemärkelse innebär. Man behöver ju blott peka på att därmed avses att, då en enhets värde är uppgivet, antingen bestämma värdet av ett visst antal sådana enheter eller ock en viss del av en sådan enhet, alltså såväl gängertagning som bråkdelräkning. Av intresse blir det då ock för dem att få veta, att man vid sådan multiplikationsteckning kan efter behag få använda som operationstecken antingen gängertecknet » $\times$ » eller punkttecknet » $\cdot$ ».

2) På samma sätt går det lätt att, sedan barnen lärt känna både innehållsberäkning och förhållanderäkning, sammanföra dessa räknesätt till ett *divisionsbegrepp*. Man låter

dem blott veta, att man ofta använder samma tecknings-sätt  $a : b$  för båda de nämnda räkningarna, så att denna teckning  $a : b$  betyder, om  $a > b$ , att man skall bestämma, hur många gånger  $a$  innehåller  $b$ , men, om  $a < b$ , att man skall bestämma, hur stor del  $a$  är av  $b$ .

Givetvis påpekas då ock, att alldeles detsamma gäller, då man i stället använder sig av teckningssättet  $\frac{a}{b}$ , och att man för båda teckningarna använder läsningen:  $a$  »dividerat med»  $b$  eller »förhållandet mellan»  $a$  och  $b$ .

Därefter återstår det endast att få detta divisionsbegrepp ytterligare vidgat, så att det också kommer att räcka till för uppgifter, som innebära att bestämma enhetsvärdet, då värdet av ett visst antal bråkdelar av detsamma är känt, eller med andra ord vad som i det föregående benämnts »omvänd bråkdelsräkning». Övergången till så rymligt divisionsbegrepp kan dock icke göras, förrän större matematisk mognad vunnits, än vad som är att finna i våra barnskolor. Det krävs nämligen rätt så stor abstraktionsförmåga och viss förtrogenhet med ekvationsmässigt tänkande för att kunna fatta division i den bemärkelsen, att det är det räknesätt, medelst vilket man med kannedom om produkten till två faktorer och den ena av dessa faktorer bestämmer den andra faktorn. Det behövs knappast mer än att erinra om att detta är quattuorspeciessystemets divisionsbegrepp, för att det skall vara uppenbart, att användningen av detta system i oförändrat skick i den elementära räkneundervisningen ej kan bli i allo fruktbarande. Skall gott resultat nås, måste i stället här som i all annan undervisning först de enskilda fallen och de enkla förhållandena studeras och göras väl kända, innan det blir möjligt att vinna förståelse för de allmänna lagarna och vida begreppen. Detta är ock den bärande grundtanken i ovanberörda nyelementära metod med sex enkla räknesätt.

*Carl Gustaf Hellsten.*