PEDAGOGISKA SKRIFTER
UTGIVNA AV
SVERIGES ALLMÄNNA FOLKSKOLLÄRARFÖRENINGS LITTERATURSÄLLSKAP
HÄFTE 163

# FOLKSKOLANS RÄKNEUNDERVISNING

## KURSER OCH ARBETSSÄTT

EN UTREDNING AV

*A. BERGSTEN*
LÄRARE I ÖVNINGSSKOLAN VID FOLKSKOLESEMINARIET I GÖTEBORG

ELANDERS BOKTRYCKERI AKTIEBOLAG
GÖTEBORG 1939

# FÖRORD.

Den följande framställningen avser inte att vara en fullständig räknemetodik. Det är först och främst ett par grundläggande principer för arbetet, som det legat mig om hjärtat att få lägga fram till diskussion, och kring dessa har jag grupperat en del mer och mindre betydelsefulla riktlinjer för undervisningen, som mångårig erfarenhet lärt mig att sätta värde på. Blott i en del fall har jag refererat även sådant, som kunnat anses vara allmänt känt och tillämpat, eller hänvisat till andra författares avvikande mening, nämligen när det varit behövligt som bakgrund för min framställning.

Stockholm i februari 1939.

*Förf.*

## INLEDNING.

Den elementära räkneundervisningens historia i vårt land är skäligen enkel i sina grunddrag. På högre stadier inordnar man likartade problem under en formel, som måste säkert inpräntas i minnet för att sedan mer eller mindre mekaniskt tillämpas vid räkningen. Och vi ha gjort på samma sätt på folkskolestadiet, endast med den skillnaden att formeln ersatts med en regel. Den vanliga uppställningen i räkneböckerna har varit denna: först ett eller ett par exempel för att demonstrera tillvägagångssättet, så en sammanfattning av detta i en regel, och därefter en längre eller kortare rad av räkneexempel, avsedda att ytterligare inpränta den inlärda regeln.

I stort sett ha lärarna varit nöjda med denna metod. Den är enkel och bekväm att använda, och man har inte haft anledning att klaga på resultaten.

Emellertid riktades redan i mitten av 1800-talet ett angrepp mot den till synes allenarådande metoden, och det kom från engelska och amerikanska pedagoger. Hur lämplig och nödvändig formeln än var för matematikundervisningen på högre stadier, så passade den inte i barndomsskolan och allra minst, när det gällde att inlära matematikens elementer, de fyra räknesätten. Metoden ansågs psykologiskt oriktig på det elementära stadiet och borde bannlysas från folkskolans räkneundervisning. I stället förordades en metod, som kallades *den heuristiska*. Den gick ut på att barnet självt skulle finna ut det sätt, på vilket en räkneuppgift kunde och borde lösas. Man skulle börja med en lång rad av enkla huvudräkningsövningar, så enkla att barnet utan svårighet genomskådade dem och på egen hand kunde göra klart för sig deras innebörd. Så småningom skulle man sedan övergå till svårare uppgifter men i sträng och långsam progression, så att sammanhanget med de första enkla uppgifterna aldrig blev avbrutet. Barnet skulle med andra ord lära sig räkna genom att träna, inte genom att man förklarade hur det gick till. Regeln skulle ersättas med en lång rad av träningsuppgifter. Hur man tänkte sig saken framgår bl. a. av en lärobok i räkning med titeln »A heuristic Mathematic» av Clifford Granville och C. E. Rice (London, Marshall & Son).

I vårt land upptogs den nya tankegången av lektorn i matematik i Gävle K. P. Nordlund, enligt uppgift sedan han fått uppmärksamheten riktad därpå av lektor A. M. Kjelldal i Uppsala katedralskola. År 1867 utkom hans »Räkneöfningsexempel för folkskolan med afseende på den heuristiska metodens användande», där han upptar och för svenska förhållanden bearbetar det engelska uppslaget.

Liksom de flesta, som alltför mycket teoretiskt sysselsätta sig med barndomsskolans problem, gjorde Nordlund sig skyldig till det felet, att han överskattade lärjungematerialets kapacitet. På gamla dar, sedan han avgått med pension från lektoratet, beredde han sig visserligen tillfälle att under fyra år få pröva sina idéer i en folkskola. Men erfarenheten blev inte tillräckligt omfattande för att ge honom en klarare uppfattning, och den nya bearbetning av läroboken, som han senare utgav (Folkskolans räknebok, bråk jämte tillämpningar, Stockholm 1900) var snarare en försämring än en förbättring av det ursprungliga arbetet, åtminstone så till vida att den var mindre väl avpassad för det tänkta åldersstadiet. Hans läroböcker hade redan från början ansetts vara i svåraste laget för folkskolan, och i den nya formen blevo svårigheterna allt för stora. De skolor, som vågat försöket att använda hans räkneböcker, tröttnade och återvände till de mera »systematiskt» uppställda läroböckerna. Hela försöket såg ut att vara misslyckat.

Men även om hans läroböcker blevo föga använda, så blevo de nya metoderna desto mera omtalade och diskuterade. Det var nämligen inte bara den heuristiska metoden, som gjorde böckerna till ett banbrytande arbete. Nordlund förenade sin metod med en mängd nya uppslag och anvisningar för räkneundervisningen, och dessa väckte ett berättigat uppseende, kanske mera än själva den grundläggande metoden. Särskilt var det hans krav på åskådlighet i framställningen och hans anvisningar för hur denna åskådlighet skulle åstadkommas, som vunno erkännande, inte minst för så vitt de gällde bråkläran. Från hans sida var åskådligheten endast en konsekvens av hans metod. Men det var många, som väl förkastade den heuristiska metoden, men som ändå togo upp och utnyttjade hans anvisningar för åskådligheten. En tid var det modernt att hänvisa till Nordlund. De nya läroböcker i räkning, som utkommo under en följd av år efter hans tid, angåvo sig gärna som hans efterföljare i det ena eller andra avseendet, ofta utan att författarna ens hade förstått innebörden i hans pedagogiska tankegång. Det var en modifierad och oförstådd »Nordlund», som hotade att ta säte och stämma i skolan.

I våra dagar har ställningen blivit på sätt och vis omvänd. De åskådningsmedel, som Nordlund på sin tid anvisade och till och med fick tillverkade och saluförda, dem har man till största delen övergivit och glömt bort. De exemplar, som finnas kvar av hans »decimaltavla», torde väl mestadels anträffas på vindarna i skolhusen. Och de äro nog lätt räknade, som ännu åskådliggöra bråkdelarna med hans pappskivor. Däremot har det lagts ner ett intensivt arbete för att få fram tillfredsställande metoder för den grundläggande räkneundervisningen under de två första skolåren. Detta arbete har väl rönt föga eller ingen påverkan av Nordlunds insats i de pedagogiska strävandena i vårt land. I stället ha de byggt på det underlag en alltmera målmedveten barnpsykologisk forskning ställt till förfogande. Resultatet har emellertid blivit detsamma. Man kan utan tvekan säga, att den räkneundervisning, som numera allmänt förekommer under de två första skolåren, är renodlat heuristisk, och våra räknemetodiker torde vara ense om att detta är det enda riktiga. Sålunda ha detaljerna i Nordlunds pedagogiska testamente, som i början väckte den största uppmärksamheten, blivit bortglömda, men hans grundtanke, den heuristiska metoden, som samtiden icke förstod och mötte med misstro, har på andra vägar trängt fram och fått en allmän användning i våra skolor, särskilt under de två första skolåren. Det förtjänar måhända i detta sammanhang att anmärkas, att just den första grundläggande undervisningén, räkneundervisningen i småskolan, som det hette på den tiden, lekte även Nordlund i hågen, och tillämpningen av hans metod på detta skolstadium blev med åren det alltmera dominerande intresset för honom.

För närvarande härskar alltså den heuristiska metoden tämligen oomstridd i de två första skolåren. För de närmast följande åren, tredje till sjätte resp. sjunde skolåret, är ställningen däremot vacklande. Många räkneböcker, kanske de flesta, bygga alltjämt mer eller mindre uteslutande på regelmetoden. Den har ju varit tillfredsställande och givit goda resultat. Men en del av de nya räkneboksförfattarna söka sig fram på andra vägar, ibland dock utan att helt våga släppa det gamla. Ställningen är som sagt en smula vacklande.

Att regeln resp. formeln är nödvändig för matematikundervisningen på högre skolstadier, det kan man inte komma ifrån. Att den heuristiska metoden är den, som passar bäst för den grundläggande undervisningen, torde numera få anses lika klart. Vad som kan diskuteras blir då frågan, var gränsen skall dras. Var sker lämpligast övergången från den ena metoden till den andra?

Det är två ting, som verka avgörande för svaret. För det första förutsätter regeln en förmåga att generalisera och abstrahera, som barnet saknar. Enligt psykologernas uppfattning vaknar den förmågan först vid femtonårsåldern, och då är barnet redan ur skolåldern. Detta förhållande talar för att den heuristiska metoden är den riktiga för hela folkskolestadiet. För det andra kunna de fyra räknesätten inte med någon fördel inordnas i formler. Dessa formler skulle komma att se ut så här: addition a + b, subtraktion a — b, multiplikation ab och division a : b eller $\frac{a}{b}$. Någon möjlighet att uttrycka skillnaden mellan delningsdivision och innehållsdivision med en algebraisk formel finns inte. När det gäller diskonträkning eller obligationsräkning e. d., så blir regeln en redogörelse i ord för formeln, som man använder. Men så blir inte fallet, när det gäller något av de fyra räknesätten. Den regel, som ett barn får för utförande av en subtraktion, blir visst inte någon redogörelse för formeln a — b. Räknesättet är nämligen inte annat än en elementär räkneoperation. Och en formel avser att ange, i vad mån den ena eller andra räkneoperationen skall användas, icke hur denna operation skall utföras. Formeln kan icke i sig uppta sådana saker som siffrornas uppställning och anordning, minnessiffror, lån o. d. Formeln resp. regeln är till nytta, då det gäller ett räkneproblem av något speciellt slag, omfattande ett större eller mindre antal räkneoperationer, men den kan inte ge någon vägledning för utförandet av de enskilda räkneoperationerna, som ingå i detta problem. Dem måste man behärska, så att de utföras automatiskt. Och detta är resultatet av flitig och långvarig träning, icke tillämpningen av en regel. Ty ett räknesätt kan vara en rätt invecklad sak. Det märker man bäst, om man läser igenom de regler t. ex. för division, som förekomma i vissa läroböcker i räkning.

Slutsatsen härav blir den, att regeln resp. formeln är på sin plats, dels när lärjungen nått ett åldersstadium, där abstraktionsförmågan åtminstone börjat vakna till liv, dels när undervisningen omfattar tillämpningar av de fyra räknesätten, men icke för så vitt den sysslar med dessa räknesätt i och för sig själva.

Med denna utgångspunkt blir man nödsakad att sträcka ut användningen av den heuristiska metoden genom hela folkskolan. Vid de tillämpningsövningar i form av ränteräkning, geometriska beräkningar o. d., som förekomma i femte skolåret och senare, kan en och annan regel möjligen ha sitt värde. Men detta är endast under den bestämda förutsättningen, att reglerna äro mycket få och mycket enkla, och ändå får man akta sig för att överskatta deras värde på detta åldersstadium.

Men hur är det då med de goda resultaten, som redan vunnits, och som vunnits med hjälp av regelmetoden? Ja, är det verkligen någon erfaren skolmästare, som tror att dessa resultat vunnits, tack vare lärobokens regler? Hur många av dem, som använt läroboken, är det, som verkligen gått igenom reglerna med barnen och låtit dem plugga in dem? Ett ärligt svar på de frågorna skulle alldeles givet komma håret att resa sig på många räknemetodikers huvuden. Det värdefulla i våra räkneböcker har inte varit reglerna utan övningsexemplen, och det är dem vi ha att tacka för resultaten. Ett allmänt tillämpande i kurser och läroböcker av den heuristiska metoden, den må sedan kallas ett arv från K. P. Nordlund eller en tillämpning av modern psykologi, skulle i själva verket inte innebära någon större förändring, endast ett bortskärande av delar, som de flesta lärare under många år hoppat över, därtill ledda av sin pedagogiska instinkt.

De engelska pedagogernas insats stannar emellertid inte vid framförandet av den heuristiska metoden. Samtidigt framfördes, om också inte fullt klarlagt, en ny uppfattning av siffertalets innebörd. Tidigare hade man inte ens reflekterat över den saken. Det var siffra som siffra, tal som tal. Gent emot denna oreflekterade föreställning hävdade de anförda läroboksförfattarna den uppfattningen att de aritmetiska talen begagnas i två olika betydelser, dels som storleksbestämning, dels som beteckning för ett förhållande mellan två storheter. Dessa siffertalets olika betydelser måste vid räkneundervisningen hållas isär, eljest uppstår oreda och oklarhet.

Även Nordlund upptog denna tankegång i sin lärobok, dock utan att fullt genomföra den. Och det märkliga är, att detta tycks ha gått alla hans efterföljare spårlöst förbi. Hos senare räknepedagoger i vårt land har hans tankegång i detta sammanhang lyst med sin fullständiga frånvaro.

Däremot har den levat kvar i de engelsktalande länderna. Och i våra dagar har den tagits upp och med målmedveten kraft förts fram även av psykologerna, både engelska och amerikanska. *Thorndike* t. ex. framhåller den som grundläggande för all räkneundervisning (i The Psychology of Arithmetic) och påstår, att vi kunnat spara en myckenhet av tid och arbete i våra skolor och ändå vunnit bättre resultat, om vi förstått att iaktta denna talens olika betydelse. Det förefaller, om man ställer vid sidan av varandra Nordlunds två stora grundtankar, å ena sidan denna de aritmetiska talens tvåfaldiga betydelse, å andra sidan den heuristiska metoden, som om den första numera skulle få rangställningen som den större och för räkneundervisningen mera betydande. Måhända göra de sig bäst sida vid sida.

Varje siffertal kan naturligtvis strängt taget sägas beteckna ett förhållande mellan två storheter och användes också på detta sätt i den högre matematiken. »3 m» betyder detsamma som 3 . 1 m och betecknar förhållandet mellan den angivna längden och den använda måttenheten. Men drar man gränserna för begreppet »förhållande» något snävare, vilket man kan och bör göra på det elementära stadiet, så får man anledning att dela siffertalen i de två antydda grupperna, sådana som utgöra en storleksbestämning, och sådana som beteckna ett förhållande. »3 m» betraktas då som en storleksbestämning, men i uttrycket 3 . 5 m = 15 m äro »5 m» och »15 m» storleksbestämningar, medan »3» betecknar förhållandet mellan de båda storheterna.

Storleksbestämningarna utfyllas i regel av en eller annan måttbestämning, en »sort» som det brukar kallas i dagligt tal. Måttet kan också vara ett stycketal, 5 äpplen, 7 knappar, 2 dussin. Även ett siffertal utan någon som helst måttbestämning kan användas som storleksbestämning: 3 + 5 = 8. Siffrorna beteckna i detta fall icke någon verklig storhet utan endast ett tänkt antal.

Varje storleksbestämning kan lätt åskådliggöras på ett eller annat sätt. »3 m» kan åskådliggöras genom att visa den verkliga längden, som uttrycket betecknar, »3 kg» genom att visa motsvarande vikter, »3 kr» med mynt o. s. v. Stycketalen kunna illustreras med hjälp av föremålen, som man har att räkna, äpplen, knappar m. m., eller också med streck, uppradade efter varandra. Det abstrakta siffertalet, använt som storleksbestämning, åskådliggöres på samma sätt. Vilken som helst av dessa storleksbestämningar kan också framställas åskådligt med hjälp av en rät linje, där storleken betecknas antingen genom linjens längd eller genom dess uppdelning i ett motsvarande antal delar.

Annorlunda ställer sig saken, när talet betecknar ett förhållande. I uttrycket »3 . 5 m = 15 m» kan 5 m åskådliggöras genom en linje och 15 m med en annan linje, som är tre gånger så lång. Men förhållandet mellan de båda linjerna, som betecknas med trean, kan icke på detta sätt illustreras.

Det enda sätt, på vilket det kan göras åskådligt, är att dela linjen, som motsvarar 15 m, i tre delar och konstatera delarnas antal.

Redan detta ger en uppfattning av att det är en väsentlig skillnad mellan olika siffertal, allteftersom de beteckna ett förhållande eller användas som storleksbestämningar. Och man gör mycket fort den iakttagelsen, att barn med lätthet uppfatta storleksbestämningen, medan de däremot ha svårt att få siffrans betydelse klar för sig, då den avser ett förhållande. Företeelsen går igen på många sätt i skolans arbete. Bl. a. framträder det på ett påfallande sätt i realskolans klasser. Så länge kursen omfattar aritmetiken med dess massor av storleksbestämningar med enkla inbördes förhållanden, så länge möter det ingen svårighet att få lärjungarna med. Men redan sifferekvationerna, där förhållandebegreppet möter i en något mera komplicerad form, vållar ett visst manfall, och ännu större blir detta, när man kommer in på algebran, där storleksbestämningarna i vanlig mening bortfalla och man rör sig uteslutande med förhållanden.

Hur vitt skilda de båda slagen av tal äro framgår även av den rätt vanliga företeelsen, att en person kan med lätthet addera långa rader av stora tal men försöker fåfängt lära sig trigonometri, medan en annan älskar svåra matematiska problem men blir bet på en jämförelsevis enkel addition, åtminstone när den disponibla tiden är begränsad.

Thorndike m. fl. förorda, att man väntar med förhållandebegreppet så länge som möjligt. Liksom regeln och formeln förutsätter det en viss grad av abstraktionsförmåga och hör därför till ett senare åldersstadium. Nordlund gick den motsatta vägen. Förhållandebegreppet var det svårare, det svåraste i aritmetiken ansåg han, och därför borde man föra in det tidigt i undervisningen och träna mycket och länge på det. Här ligger måhända en av orsakerna till att han misslyckades.

Helt och hållet kan man inte komma ifrån förhållandebegreppet i folkskolan, inte ens i de två första skolåren. Så snart man får med multiplikator och divisor att göra, så är man ju fast. Men en god pedagog undviker svårigheterna så länge som möjligt. 1919 års undervisningsplan manar till att undvika »för stora tal» och »för små delar». Faran med de stora talen och de små delarna är icke så stor, så länge det gäller storleksbestämningar. Men den är så mycket större, när det blir fråga om förhållanden. Det är här, läraren har att vara på sin vakt. Så snart det gäller beteckningen av ett förhållande, får man inskränka sig till *mycket* små tal och *mycket* stora delar. Gäller det storleksbestämningar, kan man ta sig betydligt större friheter.

Att den heuristiska metoden är så fördelaktig vid den begynnande räkneundervisningen, beror bl. a. därpå, att de grundläggande räkneoperationerna äro så förbluffande få och enkla. De inskränka sig till sammanläggning av talen 1—9 samt multiplikation inom samma talområde. I själva verket innefattar detta hela folkskolans kurs i räkning. Allt som förekommer utöver detta är endast upprepningar eller omvändningar samt tillämpningar.

»3 m + 5 m = ?» är addition.
»3 m + ? = 15 m» är subtraktion.
»3 · 5 m = ?» är multiplikation.
»3 · ? = 15 m» är delningsdivision.
»? · 5 m = 15 m» är innehållsdivision.

Sedan gammalt har multiplikationstabellen varit föremål för ett noggrant inlärande i skolan. Under de två första skolåren arbetar man också med additionstabellen. Däremot är det mera sällsynt, att man fortsätter med denna tabell i de följande skolåren. Oftast låter man det bero vid den träning, som sysselsättningen med uppgifterna i läroboken ger. Under de senaste åren ha röster börjat höjas för att additionstabellen jämställes med multiplikationstabellen och nötes in genom direkt träning lika omsorgsfullt som denna. Den tankegången är nog den riktiga och den, som har framtiden för sig.

Inlärandet av dessa tabeller, additions- och multiplikationstabellerna med deras omvändningar, blir givetvis en uppgift för huvudräkningsövningarna. Men dessa ha även andra uppgifter. I den heuristiska metodens idé ingår, att varje moment i räknekursen skall förberedas med möjligast enkla uppgifter. Dessa måste behandlas som huvudräkning. Det visar sig ofta, att barnen utan svårighet bemästra en uppgift, så länge den ges som huvudräkning. Skall den däremot utföras på papperet, så veta de inte hur de skola göra. Då kommer den vanliga frågan: »ska de vara minus, eller ska vi ta gånger». Läsningen och skrivningen av siffrorna distraherar för mycket. Den förberedande huvudräkningen får därför göras grundlig. Egentligen borde barnen kunna själva saken, innan man släpper dem på uppgifterna i räkneboken.

Dessutom ger huvudräkningen en förträfflig övning att behålla siffrorna i minnet. Den skriftliga räkningen är i själva verket endast en hjälp till detta. De olika räkneoperationerna utföras naturligtvis alltid »i huvudet». Ju fullständigare man kan hålla siffrorna kvar i minnet, desto mera oberoende blir man av papperet. Huvudräkningsövningarna böra i detta syfte få omfatta svårare uppgifter ibland. Man känner snart, hur stora anspråk man kan ställa, och barnen bruka oftast vara mycket ivriga, just när man tvingar dem att anstränga sig till det yttersta.

För en god tillämpning av den heuristiska metoden äro flitiga huvudräkningsövningar en nödvändig och väsentlig förutsättning.

Den följande framställningen bygger genomgående på de här framställda ledande grundprinciperna:

1. Den heuristiska metodens tillämpning;
2. De aritmetiska talens uppdelning i två grupper med var sin olika betydelse, storleksbestämning resp. beteckning av ett förhållande, av vilka den senare behandlas med särskild uppmärksamhet och försiktighet, samt
3. Fasthållandet genom hela kursen av de grundläggande räkneoperationernas stora enkelhet och ringa omfattning.

## I.

# Hela tal.

Kursen för tredje och fjärde skolåret omfattar de fyra räknesätten i hela tal. Detta är emellertid redan inlärt under andra skolåret. Skillnaden är endast den, att man under andra skolåret hållit sig inom talområdet 1—100. I tredje skolåret ökas talområdet ut till 1000 resp. 10000 och i fjärde till tal med obegränsad storlek. Det nya blir således egentligen tillämpningen av det förut inhämtade vetandet på större tal, d. v. s. de elementära räkneoperationernas upprepning. Härtill kommer naturligtvis den träning, som avser att ge allt större säkerhet och färdighet i räknandet. Och när allt kommer omkring, så är det nog detta sista, som blir det väsentliga.

Under dessa båda år, det tredje och fjärde, har man därför föga bruk av metodiska finter för inlärande av nya moment i räkning. Vad man i stället behöver är mängder av övningsexempel, så valda att de ge god övning, men just därför också så anordnade, att de kunna hålla intresset vaket och sporra till intensivt arbete.

### 1. Addition.

I regel bruka räkneböckerna inleda kursen för tredje skolåret med en utredning av de olika talsorterna. Detta är en tämligen malplacerad åtgärd, och den lärare, som helt enkelt hoppar över hela denna historia och låter barnen hugga in direkt på additionsövningarna, märker snart, att ingenting gått förlorat. Uppfattningen av talsorterna kommer efter hand, medan man sysselsätter sig med dem, och det är tillräckligt, om barnen ha någon föreställning om dem, när de i femte klassen skola börja med decimalbråk. Att ge dem denna kunskap i förväg, det går helt enkelt inte. Det enda man kan göra med framgång, det är att lära dem, att de siffror, som skrivas längst till höger i ett tal, kallas ental, de som skrivas till vänster om dem kallas tiotal o. s. v. Varför inte helt enkelt säga: entalen äro 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Och därmed punkt. Något mera behöver man inte veta. Veta vi egentligen mera själva Och likaså: tiotalen äro 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 och 90. För resten veta barnen detta, redan innan de börja tredje skolåret, och det återstår endast att konstatera faktum.

Nej, låt tredje klassens kurs bli en direkt fortsättning på andra klassens. Börja direkt med enkla additionsövningar på papperet, understödda av flitig träning av additionstabellen i form av huvudräkning. Snart nog kan man låta barnen sätta upp en additionstabell samt lära dem att ha den till hands och använda den, när så behövs. En kartongbit skäres till i lagom storlek och delas i cm-rutor, 11 stycken i kvadrat. Rutorna ifyllas sedan med siffror enligt fig. å nästa sida.

I de båda raderna upptill och till vänster återfinnas de tal, som skola läggas ihop. De övriga raderna innehålla summorna. Så länge summan inte överskrider 9, behöves ingen minnessiffra, och adderingen är lätt. När man kommer över tiotalet, blir adderingen svårare. Särskilt viktigt är att ha klart för sig, vilka tal som ge summan 10. Om man vill, kan man med tjockare streck markera den rad av rutor, som innehåller summan 10. Då får man samtidigt tabellen delad i en lättare halva med summor under 10 och en svårare med summor över 10.

Av denna tabell bör varje barn ha två stycken, en i skolan och en hemma, och arbetet bör läggas så, att barnen sporras

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | [illegible] |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

att jämt och ständigt återvända till tabellen och göra sig hemmastadda på den. Innan barnen sluta skolan böra de vara lika hemmastadda på sina tabeller som en pianist på sin klaviatur eller en fiolspelare på gripbrädet på fiolen.

Det skadar naturligtvis inte, om denna tabell liksom multiplikationstabellen också finnes tillgänglig i räkneboken. Den får liksom större auktoritet i barnens ögon på det sättet.

Men för övrigt är det oegentligt att i en räknebok ta upp additionsövningar med ensiffriga tal och endast två addender. Sådant är huvudräkningsövningar och skall förekomma uteslutande som huvudräkning. Att sitta och ur räkneboken skriva av och ställa upp till uträkning t. ex. $5 + 8 = ?$

är fullkomligt bortkastad tid på detta stadium, om man inte vill betrakta det som en välskrivningsövning. Allt som hör till de grundläggande räkneoperationerna skall nötas in i huvudet, så att det slutligen går automatiskt. Det är när upprepningarna komma, som man behöver ta till papperet.

Additionen har två slag av upprepningar. Ett slag är när man har många addender att lägga ihop, ett annat när varje addend har många siffror. Och här kan det ifrågasättas, om det verkligen är det bästa och lämpligaste att hålla räkningen inom de tresiffriga talens område så länge som sker. Ty en addition försvåras inte därigenom, att det är många siffror i addenderna. Det är lika lätt att lägga ihop ett par tiosiffriga tal som ett par tresiffriga. Det tar bara lite längre tid. Däremot blir additionen mycket svårare, i den mån den avser flera addender. En addition med tjugo tvåsiffriga addender kan även en van räknare få göra om flera gånger, innan den blir rätt. Emellertid finns nu undervisningsplanens föreskrift, att talet 1000 inte bör överskridas i början, och man har inte annat val än att göra det bästa möjliga av anvisningen, sådan den är.

Anvisningen har dock gjort sin skada. Den har suggererat fram den föreställningen, att det är de enskilda siffertalens storlek, som är avgörande för svårighetsgraden av en uppgift. Och detta är naturligtvis på sitt sätt alldeles riktigt. Den heuristiska metoden bygger just på det förhållandet, att med användning av mycket små tal bli räkneoperationerna så överskådliga, att de lätt uppfattas av barnen. Men när tankegången tillämpas på det sättet, att räkneboken redan de första veckorna i tredje klassen kommer med långa rader av ensiffriga tal, som skola läggas ihop, då är man inne på fel väg. De första additionsövningarna skola omfatta endast två addender. Däremot kunna de gärna innehålla både två och tre siffror vardera.

Huvudräkningsövningarna få inte begränsas till de tal, som ingå i additionstabellen, utan man ökar ut omfånget i den mån, barnen orka följa med. Särskilt bör uppmärksamheten fästas på att addendernas ental alltid går igen i summornas ental. 7 + 8 = 15, 7 + 18 = 25, 7 + 28 = 35 o. s. v. Eller 17 + 8 = 25, 27 + 8 = 35 . . . Ävenså 17 + 18 = 35, 17 + 28 = 45, 27 + 28 = 55 . . . Övningen kan varieras i det oändliga, utan att man behöver gå över det första hundratalet. Likaså kan man öva sammanläggning av tiotal. Kan man reda upp de nyss anförda uppgifterna, så kan man också ta itu med sådana som 70 + 80 = 150, 70 + 180 = 250 o. s. v. hela räckan igenom.

»Minnessiffran» behöver inte särskilt utredas. Den saken är undangjord i andra skolåret. Nu är det bara frågan om fortsatt träning, tills räkningen går automatiskt. Dock kan man så småningom fästa barnens uppmärksamhet på att vid sammanläggningen av två addender blir minnessiffran aldrig mera än 1. Särskilt vid sådana sammanläggningar som de ovan anförda 17 + 18, 17 + 27 o. s. v. underlättas räkningen betydligt, om man har detta i medvetandet.

Användningen av sorter vid räkningen göres till föremål för en särskild liten utredning längre fram (sid. 59 ff). Men redan här kan nämnas, att abstrakta tal böra undvikas vid de första skriftliga räkneövningarna. Föreställningen om siffertalet som en storleksbestämning blir säkrare och klarare, om talet alltid förbindes med en måttbestämning av något slag. Detta betyder emellertid inte, att barnets tid skall upptagas med utskrivning av en massa sortbestämningar. Då använda uppgifter skola tecknas, då måste sorterna tas med. Men när uppgiften är tecknad i räkneboken, behöver inte teckningen skrivas av, utan talet kan omedelbart ställas upp till uträkning. Och då skriver man inte upp annat än siffrorna. Det är sålunda räkneboken, som i regel bör ha talen benämnda, och barnen skola inte öda bort tiden med onödigt skrivande.

Så snart man nått fram till uppgifter med ett större antal addender, bör man lära barnen att använda de genvägar, som äro möjliga. För detta ändamål är det bra att ställa upp långa rader av ensiffriga addender. Därigenom kan man samla uppmärksamheten på just det, som för tillfället är föremål för träning. Först lär man barnen observera de addender, som tillsammans bli 10. Dessa läggas ihop för sig, och sedan lägges det nybildade tiotalet till det övriga. Sedan kan man lära dem att göra på samma sätt med talen närmast omkring tiotalet, 9 och 11. Vill man gå längre, kan man fortsätta med 12 och 15. Längre är knappast rådligt att gå, ty det kan lätt bli en felkälla, om man hoppar för mycket fram och tillbaka i additionen.

Ex.: $4 + 7 + 9 + 5 + 8 + 3 + 6 + 1 + 5 + 7 + 4 + 8 + 6 = ?$

Utföres: 11, 20, 25, 36, 42, 43, 50, 55, 65, 73. Svar: 73. Att man vid sammanläggningen endast nämner de undan för undan erhållna summorna är gammal god tradition, så det behöver inte särskilt framhållas. Detta bör givetvis ske, inte bara när man räknar högt vid svarta tavlan, utan även när man sitter och mumlar halvhögt för sig själv eller räknar alldeles tyst och endast låter talen glida genom medvetandet.

Även skriftliga additionsövningar böra förekomma i mycket stor utsträckning. Additionen är det allmännast förekommande av de fyra räknesätten och därför det viktigaste föremålet för träning vid räkneundervisningen. Ständiga additionsövningar ha emellertid benägenhet att bli enformiga och tråkiga, och det är av vikt att få in en smula omväxling i dem. Men de använda talen, räkneproblemen om man vågar kalla dem så, de enkla uppgifterna som kunna förekomma på detta stadium, de måste göras så enkla, att den träning i addering som de ge blir av ringa värde. Och så blir det nödvändigt att se sig om efter andra medel att hjälpa upp enformigheten med.

Man kan mycket tidigt börja med att ställa upp en serie av tal, som skola adderas både lodrätt och vågrätt. Man får då två serier av summor, och om dessa serier läggas ihop var för sig, skola de erhållna nya summorna bli lika. En sådan anordning tillför strax ett intresserande moment. Stämmer det eller stämmer det inte, det är den spännande frågan. Erfarenheten ger vid handen, att barnen kunna råka i formlig extas vid beräkning av dessa uppgifter och bara tigga om att få flera av samma slag. Man får vara försiktig i början och inte ta till för många addender, inte heller för stora. En klass fick en gång som en av de första övningarna en hemuppgift med fem tvåsiffriga addender i varje rad, och en flicka kom vid räknetimmens början fram till läraren och klagade över att »det var ingen därhemma, som kunde få det här att stämma». Fyra addender med två siffror i varje är det minsta möjliga och kan vara nog att börja med. Ställ upp talen i en fyrkant bara och addera lodrätt och vågrätt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ex.: | 27 | 34 | 61 |
| | 52 | 67 | 119 |
| | 79 | 101 | 180 |

Redan en utökning till tre rader med tre addender i varje rad medför en betydlig ökning av svårigheterna. De bli emellertid inte avskräckande utan sporra bara till nya ansträngningar.

Övningar av detta slag ha ett mångsidigt värde. Dels äro de ägnade att väcka intresse och iver och bli på så sätt en hjälp vid det enformiga och tråkiga adderandet. Dels ge de en ovärderlig träning till säkerhet i addering. Uppgiften kontrollerar sig själv, och man slipper inte ifrån den, förrän man har rätt överallt. Stämmer inte slutsumman, så måste man leta reda på felet och rätta det. Dels äro dessa uppgifter direkt hämtade från det praktiska livet. Hur ofta händer det inte, att man får två eller flera parallella kolumner med siffror, som skola föras ut i en summakolumn och därjämte adderas ner för att till sist från två håll ge en slutsumma, som skall stämma. Dels slutligen får man leta efter mera smidiga och lättarrangerade uppgifter. Lättarrangerade, ty man behöver bara skriva upp några rader med tal på svarta tavlan, likgiltigt vilka, och barnen ha full sysselsättning kanske hela timmen med en räkning, som kontrollerar sig själv. Smidiga, ty de kunna varieras från de lättaste med fyra tvåsiffriga tal att adderas två och två, till hela sidor fyllda med långa och många kolumner med siffror, som kunna sätta den mest erfarne bokförare på hårda prov, till och med om han använder adderingsmaskin. Övningarna kunna därför börjas redan i tredje skolåret och med god behållning fortsättas då och då under hela den återstående skoltiden.

Ett annat medel att bereda omväxling åt adderingsövningarna är »trollkvadraten». Man ritar upp en kvadrat med 9 eller 16 rutor (större kvadrater torde bli för omständliga) och fyller rutorna med tal, som äro så valda, att summorna i alla raderna, lodrätt, vågrätt och diagonalt, bli lika stora. Kvadraten kan anordnas på olika sätt. Det ursprungligen »magiska» var att använda en aritmetisk serie av tal, insatta i en bestämd ordning. Grundläggande är serien 1—9 i den minsta kvadraten, som kan komma ifråga (fig. 1).

Fig. 1.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

Fig. 2.

| | | |
|---|---|---|
| 106 | 57 | 92 |
| 71 | 85 | 99 |
| 78 | 113 | 64 |

Fig. 3.

| | | |
|---|---|---|
| 106 | | |
| 71 | 85 | |
| 78 | | |

Den gemensamma summan för alla raderna blir här 15. Talserien kan emellertid börja på vilket tal som helst, och mellanrummet mellan talen i serien är också likgiltigt. Man kan t. ex. börja med 57 och välja en serie med 7 mellan varje led i serien (fig. 2). Summan blir då 255.

Till att börja med använder man kvadraten som uteslutande additionsövning. Barnen få rutorna ifyllda och ha endast att summera. Kontrollen ligger däri, att alla summorna skola bli lika. Men längre fram kan man övergå till en sammanställning av addition och subtraktion. Hemligheten med talens anordning behåller man för sig själv och ger barnen en endast delvis ifylld kvadrat att fullborda. Man fyller i de tre rutorna vid ena kanten samt mittrutan (fig. 3). Först tar man reda på summan i den fullständiga raden (i detta fall 255). Samma summa skall man ha i de andra raderna. I den vågräta mittraden finnas redan två rutor ifyllda. Talet i den tredje rutan blir då lika med hela summan minskad med summan av de två bekanta rutorna [255 — (71 + 85)]. På samma sätt fyller man ut de återstående raderna. Den sista rutan blir gemensam för en lodrät och en vågrät (resp. diagonal) rad, och man får kontrollen genom att konstatera, att bägge raderna ge den rätta summan.

Serien kan ordnas efter olika grunder. Det är inte ens nödvändigt, att talen i kvadraten äro ordnade i någon serie alls. Inom vissa gränser kan man ordna dem hur som helst. En undersökning visar, att talet i mittrutan är en tredjedel av summan. Härav kan man begagna sig. Man fyller i rutorna vid ena kanten med tre tal, vilka som helst, endast deras summa är jämnt delbar med 3. Sedan sätter man denna tredjedel i mittrutan, och uppgiften är färdig för bearbetning. Om man ställer upp kvadraten på detta sätt, måste man dock se till, att de valda talen inte bli alltför olika stora. Annars riskerar man, att uppgiften blir olöslig.

Kvadraten med de nio rutorna ger möjlighet till mycket skiftande svårighetsgrader. Talen kunna göras så mångsiffriga som helst, och i femte och sjätte klasserna kan man sätta in bråktal i rutorna, både decimalbråk och allmänna bråk. Därmed kan man åstadkomma uppgifter så svåra, att man behöver fundera rätt bra själv, innan man får dem uppklarade.

Även i kvadraten med 16 rutor kan man ordna talen i en bestämd serie. Man skriver upp dem i ordning från 1—16 och låter följande siffror byta plats: 2—15, 3—14, 5—12 och 9—8. Sedan ser kvadraten ut som fig. visar.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |

Även här kan man använda vilken aritmetisk serie som helst. En undersökning av den färdiga kvadraten visar, att samma summa erhålles i lodräta och vågräta rader samt diagonalt. Men det är inte nog med detta. Summan bildas även av talen i de små kvadrater, som bestå av 4 rutor. Kvadraten kan med ett par streck delas i fyra små kvadrater, som var för sig ge den karakteristiska summan. Samma är förhållandet med den kvadrat, som bildas av de fyra mittrutorna. Härav kan man begagna sig för att åstadkomma en blandad additions- och subtraktionsövning, liksom förut angivits för kvadraten med 9 rutor. En av sidoraderna fylles med godtyckliga tal. Sedan fyllas de fyra mittrutorna också med godtyckliga tal, dock med den begränsningen att deras summa skall bli densamma som sidoradens. Därefter går man tillväga på samma sätt som vid uppställningen av kvadraten med 9 rutor.

Trollkvadraterna ge en intensiv övning både i addition och subtraktion, och ge på samma gång en roande sysselsättning. Man kan därför återkomma till dem då och då under hela skoltiden och lämpa svårigheten efter barnens åldersstadium. Som fyllnadsövning för de barn, som räkna fortare än kamraterna, äro trollkvadraterna förträffliga. Sedan barnen varit med om dem några gånger, kunna de sätta upp sådana kvadrater åt sig själva och göra det också gärna.

Trollkvadraten kan utnyttjas också på det sättet, att man lär barnen, i vilken ordning talserien skall sättas in i rutorna, och låter dem som kontroll lägga ihop raderna och se till, att summan blir densamma överallt. Reglerna för en dylik uppställning av kvadrater med jämnt antal rutor (36, 64 o. s. v.) äro alltför invecklade för att komma ifråga till användning. Kvadrater med udda antal rutor äro betydligt lättare att åstadkomma. Ordningen framgår av följande exempel på en kvadrat med 25 rutor.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

Även här kan talserien väljas efter behag och uppgiften på så sätt varieras. Man kan lägga märke till att talet i mittrutan nu blir en femtedel av radernas summa (65 : 5 = 13).

Barnen äro till att börja med roade av det egendomliga i talens anordning och överensstämmelsen mellan summorna. Men eljest får man på detta sätt inte samma omväxling i arbetet, som när man låter barnen komplettera en delvis ifylld kvadrat enligt anvisningarna här ovan, och därför bör man nog vara mera sparsam med trollkvadraten i denna sist angivna form.

Då man vill finna utvägar för att liva upp adderingsövningarna, får man inte glömma, att övningarna med att finna genvägar vid adderingen, såsom de antytts å sid. 22, även ge en god och värdefull omväxling i arbetet.

## 2. Subtraktion.

Om barnen förvärvat säkerhet och snabbhet i addition och hela skoltiden igenom fortsätta med att ytterligare öka denna säkerhet och snabbhet, så kräver subtraktionen inte så mycket av direkt träning. Största delen av den behövliga träningen är undangjord genom adderingen. Additionstabellen är även en subtraktionstabell och innehåller alla de grundläggande räkneoperationer, som komma ifråga. Och den bör övas på det sättet, att sammanhanget mellan de två addenderna och deras summa även utsträckes till deras ställning som minuend, subtrahend och rest. $7 + 8 = ?$ blir också $7 + ? = 15$ och $? + 8 = 15$. Om tabellen sålunda behandlas så att säga från tre olika synpunkter, så blir den den bästa förövningen till de skriftliga övningarna i subtraktion.

Upprepningen går vid detta räknesätt endast i en riktning, ökningen av de berörda talens storlek. Mera än två termer förekommer inte. Visserligen kan en räkneuppgift innehålla två och flera minustermer, men vid uträkningen antingen slår man ihop dem till en genom att addera dem, eller också tar man ifrån en i sänder, d. v. s. behandlar varje frådragning som en särskild uppgift. Även detta bidrar i sin mån till att räknesättet kräver mindre träning än additionen.

Det medför också, att subtraktion med ensiffriga termer och tvåsiffriga termer utan »lån» höra huvudräkningen till.

Det är först uppgifterna med tresiffriga termer samt tvåsiffriga med lån, som göra den skriftliga räkningen nödvändig.

Det enda, som vållar bekymmer vid subtraktionen, är just detta s. k. lån. Metoden att låna har länge känts mindre tillfredsställande, och det har gjorts många försök att slippa undan den. En och annan har försökt hjälpa sig fram endast genom att använda en mera rationell benämning. Det är nämligen oegentligt att tala om lån i detta sammanhang, ty lånet betalas aldrig igen. Man har föreslagit att säga »sönderdelningsmetoden» i stället, och den benämningen smyger sig onekligen bättre efter begreppet.

$$\text{Ex.:}\quad \begin{array}{r} 75 \\ -\ 37 \\ \hline 38 \end{array}$$

De 7 tiotalen i 75 delas vid räkningen i 6 + 1 tiotal. Det ensamma tiotalet lägges ihop med entalen till 15, varefter 7 ental fråndragas. Sedan dragas de 3 tiotalen från de återstående 6.

Om också den riktigare benämningen känns mera tillfredsställande, så ändrar den dock ingenting i själva tillvägagångssättet. Och det är naturligtvis detta, som man velat komma ifrån och sökt ersätta med en mera smidig och snabb metod. Ett försök i den riktningen är utfyllnadsmetoden. Den är förträfflig i en minutaffär, när man får för mycket betalt och skall ge tillbaka.

Ex.: 10 kr. — 6 kr. 32 öre =

Expediten räknar upp pengarna, allt eftersom han säger: 6 och 32, 33, 35, 40, 50, 7 kr., 8 och 10. Han har då lämnat resp. 1 öre, 2 öre, 5 öre, 10 öre, 50 öre, 1 krona och 2 kronor, tillsammans 3,68 kr.

Övningar av detta slag med verkliga eller fingerade mynt äro alldeles förträffliga. Med eller utan mynt ingå de som en viktig del av de förberedande övningarna i de två första skolåren. Men de borde utnyttjas inte bara där utan också senare under skoltiden i mycket större utsträckning än som sker. Naturligtvis kan man invända, att de inte ge någon förövning till den skriftliga subtraktionen, som utföres efter helt andra grunder, och att de därför inte behövas i skolan. Men de äro en förberedelse till vad som ofta förekommer i det praktiska livet, och därför äro de värdefulla. Dessutom bli de ett utmärkt komplement till subtraktionstabellen, det vill med andra ord säga additionstabellen.

Utförd på papperet blir metoden mera omständlig.

Ex.: 8 125 — 3 748 = 4 377.

Uppställning:
$$\begin{array}{r} 3\,748 \\ + \phantom{0\,000} \\ \hline 8\,125 \end{array}$$

Man resonerar: 8 + 7 = 15. 7 skrives upp under 8. 1 + 4 = 5, 5 + 7 = 12. 7 skrives upp under 4. 1 + 7 = 8. 8 + 3 = 11. 3 skrives upp under 7. 3 + 1 = 4, 4 + 4 = 8, 4 skrives upp under 3. Svaret, 4377, finnes då utskrivet under 3 748, när räkningen är fullbordad.

Uppställningen kan också göras som vanligt med summan överst. I så fall får man addera uppåt.

Många föredra denna metod framför lånemetoden, och med lite träning går den bättre att använda än man vill tro på förhand. Om den erbjuder några avsevärda fördelar framför lånemetoden kan man dock ha delade meningar om.

En verkligt rationell lösning av problemet finner man först i metoden med lika addering, som för åtskilliga år sedan lanserats i England och Amerika. Den går ut på att tiotalet, som lägges till i minuenden, inte »lånas» utan kompenseras genom ett motsvarande tillägg i subtrahenden.

Ex.: 73 256
— 29 687

Först drar man 7 från 16 = 9. Det betyder, att man lagt till 10 i minuenden. Kompensation sker genom att lägga till ett tiotal till subtrahendens tiotal, 8 + 1 = 9. Sedan fortsätter man: 15 — 9 = 6. Det tillagda hundratalet kompenseras genom att lägga till ett hundratal i subtrahenden, 6 + 1 = 7. Subtraktionen fortsätter: 12 — 7 = 5. Nästa steg blir 9 + 1 = 10, 13 — 10 = 3 samt 2 + 1 = 3, 7 — 3 = 4. Svar: 43 569.

Vid användningen av metoden behöves naturligtvis inte detta omständliga resonemang. Tvärtom blir utförandet ytterligt enkelt. Föregående exempel utföres sålunda:

7 från 16 = 9, 9 från 15 = 6, 7 från 12 = 5, 10 från 13 = 3, 3 från 7 = 4. Svar: 43 569.

Då inte något tiotal behöver tilläggas i minuenden, göres naturligtvis inte heller något tillägg i subtrahenden.

Ex.: 45 681
— 12 773

Resonemang: 3 från 11 = 8, 8 från 8 = 0, 7 från 16 = 9, 3 från 5 = 2, 1 från 4 = 3. Svar: 32 908.

Metodens enkelhet blir särskilt påfallande, då minuenden innehåller ett antal nollor.

Ex.: 50 000
— 26 483

Resonemang: 3 från 10 = 7, 9 från 10 = 1, 5 från 10 = 5, 7 från 10 = 3, 3 från 5 = 2. Svar: 23 517.

Metoden användes allmänt i engelska skolor och anses där ha ett utomordentligt stort företräde framför den »gamla» lånemetoden. På många ställen känner man numera inte ens till någon annan metod än denna, och handledningar i metodik uppta endast den i sina anvisningar.

Övergången till den nya metoden är mycket lätt. Övningsexemplen i en räknebok räknas med samma fördel enligt denna som enligt den avsedda lånemetoden. Och barn, som från början använda lånemetoden, tillägna sig den nya utan någon som helst svårighet.

Vid huvudräkningsövningar, då minuend och subtrahend ligga på var sin sida om ett hundra- eller tusental, kan man med fördel använda en variation av utfyllnadsmetoden på så sätt, att man lägger ihop de delar av de båda termerna, som överstiga resp. understiga hundra- eller tusentalet.

Ex.: $112 - 83 = 12 + 17 = 29$.

Metoden framstår allra mest till sin fördel, när man har tal, som ligga i närheten av hundra- resp. tusentalet, men den går bra att använda, även om avståndet blir större.

Ex.: $143 - 68 = 43 + 32 = 75$.

Utfyllnadsmetoden kan varieras på ännu ett annat sätt, nämligen genom att lägga till lika mycket i subtrahend och minuend, så att man får jämna 10-, 100- o. s. v. tal i subtrahenden.

Ex.: $4\,526 - 1\,878 = ?$

| | | |
|---|---|---|
| Uppställning: | $4\,526 =$ | $8$ |
| | $-\,1\,878 =$ | $0$ |

Resonemang: $8 + 2 = 10$, $6 + 2 = 8$. 0 och 8 skrivas upp som exemplet anger.

$7 + 1 = 8$, $8 + 2 = 10$, $2 + 2 = 4$. 0 och 4 skrivas framför 0 resp. 8.

$8 + 1 = 9$, $9 = 1 = 10$, $5 + 1 = 6$. 0 och 6 skrivas framför 0 och 4.

$1 + 1 = 2$, $2 + 8 = 10$, $4 = 8 = 12$. 10 och 12 skrivas framför 0 och 6.

Sedan ser uppställningen ut på följande sätt:

$$\begin{array}{r} 4\,526 = 12\,648 \\ -\;1\,878 = 10\,000 \\ \hline \end{array}$$

och resultatet, 2 648, avläses utan vidare.

Metoden är för omständlig för att ha något praktiskt värde, men den ger en god övning i addition och subtraktion och kan med fördel användas som omväxling med annat i de högre klasserna, sjätte och sjunde. Barnen bruka finna stort nöje i att räkna på detta sätt. Dels innebär det något nytt, dels kommer svaret fram på ett så överraskande sätt. Som fyllnadsövning för snabbräknarna i en klass kan metoden ibland ha skäl för sig.

### 3. Multiplikation.

Att dra en lans för multiplikationstabellen är fullkomligt överflödigt. Den har varit föremål för en intensiv dyrkan i alla tider. När man önskar jämställa additionstabellen och multiplikationstabellen med varandra, så är det additionstabellen man behöver lyfta fram i ljuset, inte den andra. Och givetvis försvarar den sin plats. Det enda, som man kan invända mot gängse förhållanden, är att man ofta fordrar säkerhet i denna tabell alltför tidigt. 1919 års undervisningsplan varnar för att fordra säkerhet i multiplikationstabellen vid inträdet i tredje klassen. Varningen borde ha utsträckts att gälla ännu högre stadier. I själva verket är säkerhet i multiplikationstabellen det önskvärda resultatet av skolans hela räkneundervisning, något som man inte får vänta sig uppnått förrän i den sista klassen. Visserligen är det sant, att många barn kunna sin tabell med förvånande säkerhet redan i tredje och fjärde klass, men man har därför ingen rätt att förebrå dem, som inte hinna lika fort fram, och man har heller inte någon anledning att höra upp med den ständiga träningen av tabellen. Säkerheten kan ökas ännu mera, och dessutom behöver färdigheten underhållas, om den inte skall gå tillbaka.

Varje barn bör ha sin multiplikationstabell att vid behov rådfråga, på samma sätt som förut talats om additionstabellen. Dess uppställning är känd sedan gammalt och borde inte behöva anföras här. När det ändå sker, är det bara för att demonstrera en lämplig uppdelning av tabellen i överensstämmelse med den uppdelning, som föreslagits rörande additionstabellen, sålunda:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

Här blir det nedra högra hörnet som utgör den svårare delen och som behöver övas med särskild uppmärksamhet.

En lämplig anordning torde vara att ha de båda tabellerna på var sin sida av samma kartongblad med tydligt angivande i rubriken av sidans innehåll. En dylik dubbelsidig tabell skulle vid räkningen göra samma tjänst som en ordlista vid undervisningen i svenska.

Det är av vikt att göra skillnad på multiplikand och multiplikator. Inte så till förståendes, att man skulle inlära dessa benämningar och använda dem vid undervisningen. Det vore alldeles felaktigt. Men så att man övar multiplikationstabellen med »sorter». D. v. s. man säger 4 · 7 m, när man repeterar tabellen, inte 4 · 7.

Det kanske kan tyckas, att detta är överflödigt, så mycket mera som vi undervisat i räkning i många, många år och med goda resultat utan att iaktta detta. Och naturligtvis kan man lära sig räkna ändå. Men vi ha här i alla fall att göra med de två olika slagen av tal, som omnämndes i inledningen, och begreppen bli klarare, om man bestämt markerar detta. Multiplikanden är en storleksbestämning, multiplikatorn betecknar ett förhållande. Multiplikanden kan åskådliggöras med linjer eller streck eller mått och vikter, multiplikatorn betecknar ett antal gånger och kan inte illustreras på annat sätt än genom att man konstaterar antalet, såsom redan i inledningen påvisades (sid. 12—13). Genom att uppmärksamma denna åtskillnad får man också in vanan att vid teckningen av uppgifter skriva multiplikatorn först och multiplikanden efteråt. 4 · 7 m är en riktig teckning, 7 m · 4 en felaktig. Begagnar man endast abstrakta tal, blir faktorernas inbördes ordning likgiltig, och det kan vara bra att konstatera på ett högre stadium, men på det elementära stadiet skapar det bara oreda och osäkerhet. På detta stadium är sorten lika väsentlig som siffran.

Det är nödvändigt i detta sammanhang också att behandla uttrycken 4 · 7 m och 7 · 4 m som två helt och hållet olika uppgifter. Skillnaden framträder klarast, om man illustrerar uttrycken med linjer på svarta tavlan. I ena fallet får man en linje, delad i fyra delar, i det andra fallet en som är delad i sju delar. I förra fallet är varje del 7 meter lång, i senare fallet 4 meter. Att linjen, som betecknar produkten, i bägge fallen blir lika lång, är en sak för sig, som inte behöver chockera, ty barnen veta redan genom multiplikationstabellen, att $4 \cdot 7$ och $7 \cdot 4$ ge samma resultat.

Några teoretiska utredningar om detta bör man inte bråka med. Barnen förstå dem inte. Vad som behövs är att man tränar multiplikationstabellen, kombinerad med sorter. Stycketalen äro bäst att börja med. Hur många äpplen får jag, om jag tar 3 äpplen en gång? två gånger? tre gånger? Svaret blir »3 äpplen, 6 äpplen, 9 äpplen», inte 3, 6 och 9.

Dessa övningar skola inte behandlas skriftligt. Papper och penna tar man till i samband med måttbestämningar och två- eller flersiffrig multiplikand. När sedan styckeltalen komma igen också i den skriftliga behandlingen, skriver man aldrig äpplen, knappar, pennor o. d. som sort utan endast st. (= stycken) eller också stycketalens gruppbenämningar, dussin och tjog m. m.

Redan i tredje skolåret kan man utsträcka multiplikationstabellen till talområdet 10—20. Det är dock föga skäl att nöta in alla dessa talförhållanden i minnet. Endast mångfalderna av 12 och 15 ha mera allmänt intresse och böra inläras. De övriga komma inte ifråga oftare, än att man har tid att räkna sig till dem för varje gång. Det tar mindre tid än att plugga in dem en gång för alla. Men det skadar ändå inte att titta på dem ibland och köra igenom serierna då och då. Man kan t. o. m. låta barnen göra upp en »större» tabell med $20 \cdot 20$ rutor och fylla i den själva samt ha den till hands vid en och annan räkneövning. Emellertid är det bara vid multiplikation av tvåsiffriga tal, som den är till nytta. Att rådfråga den vid uppgifter med flersiffrig multiplikand vållar bara oreda Då får man räkna med en siffra i sänder.

Skriftliga uppgifter med ensiffriga tal i bägge faktorerna böra anses undangjorda förut och behöva inte upprepas nu. Även uppgifter med tvåsiffrig multiplikand ha barnen sysslat med förut. De måste emellertid övas ytterligare för att göra barnen bekanta med användningen av minnessiffran. Är den saken säkert inövad, möter det sedan ingen svårighet att övergå till flera siffror i multiplikanden.

De egentliga svårigheterna börja med införandet av tvåsiffrig multiplikator. Men även detta går bra, om man förbereder det med trägna huvudräkningsövningar i multiplikation med tio: 10 . 1, 10 . 2, 10 . 3 o. s. v. 10 . 11, 10 . 12, 10 . 13 — 10 . 21, 10 . 22, 10 . 23. . . Fortsätt ända till 10 . 99, och ta övningarna om och om igen. Sedan går den skriftliga räkningen med tvåsiffrig multiplikator av sig själv. Barnen bruka få skriva ut nollan till att börja med, när de multiplicera med tiotalet, och det är nog bara bra, men dröj inte för länge med att utesluta den.

Återstår frågan, hur talet skall ställas upp till uträkning, och i vilken ordning talsorterna skola tagas.

Den vanliga ordningen är att skriva upp faktorerna med lika talsorter under varandra, sålunda:

```
   457
 · 374
 ------
  1828
 3199
1371
------
170918
```

Man börjar då räkningen med entalen och fortsätter baklänges.

Man kan också ställa upp talen så, att multiplikatorns första siffra kommer under multiplikandens sista, sålunda:

```
   457
  · 374
  1371
   3199
    1828
  170918
```

Denna uppställning har sina fördelar. Man börjar räkningen med multiplikatorns första siffra och fortsätter sedan framåt. Och man slipper den sneda utdragningen åt vänster, som blir ganska besvärlig, när det är många siffror i multiplikatorn.

Härtill kommer ännu en sak. När barnen bli tillräckligt försigkomna för sådan övning, bör man ta upp multiplikationer med tvåsiffrig multiplikator i huvudräkningsövningarna. Det är då lättast att hålla talen i minnet, om man börjar multiplikationen med tiotalet i multiplikatorn. Äro nu barnen vana att utföra räkningen i den riktningen redan på förhand, så går detta så mycket lättare.

Multiplikation av tvåsiffriga tal kan emellertid kombineras på flera sätt. Vid den allmännast brukliga uppställningen blir räkningens anordning denna:

```
1.  36      2.  36
     V           V
    27          27
   252         252
                72
```

Vid den andra uppställningen blir ordningen den motsatta:

```
1.  36      2.  36
     V           V
    27          27
    72          72
               252
```

I bägge fallen multiplicerar man den ena gången ental med ental och tiotal, den andra gången tiotal med ental och tiotal. Man kan också samla de bägge multiplikationerna av ental med tiotal i en omgång och därefter ta var för sig tiotal med tiotal och ental med ental, sålunda:

| | |
|---|---|
| 1. 36 | 2. 36 |
| × | [illegible] |
| 27 | [illegible] |
| 12 | [illegible] |
| 21 | 642 |
| 33 | |

Denna anordning (Ferrol, Das Ferrolsche Rechnungsverfahren) har sina fördelar. Det lider intet tvivel att den är överlägsen vid multiplikation i huvudet av tvåsiffriga tal. Frågan är då, om det lönar mödan att ta upp den i undervisningen för användning i så speciella fall. För den lärare, som är road av försök i sin undervisning, kan den ge både lärare och barn mycket nöje. Någon anledning att byta ut den vanliga gången vid multiplikation mot denna har man däremot icke. Därtill äro dess möjligheter alltför begränsade.

Vid huvudräkningsövningarna börjar man tidigt fästa barnens uppmärksamhet på möjligheten att dela upp talen i faktorer och därmed underlätta räkningen.

Ex. 1: $15 \cdot 16 = 3 \cdot 5 \cdot 16 = 3 \cdot 80 = 240$.

Ex. 2: $35 \cdot 45 = 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9 = 25 \cdot 63 = 1600$ $(25 \cdot 64) — 25 = 1575$.

I ex. 2 är det praktiskt att anlita den anvisade omvägen över $25 \cdot 64 = 25 \cdot 4 \cdot 16 = 100 \cdot 16 = 1600$. Dylika omvägar äro alltid fördelaktiga, då man kommer i närheten av ett lättmultiplicerat tal, t. ex. $8 \cdot 77 = (8 \cdot 75 = 600) + 16 = 616$.

## 4. Division.

På samma sätt som additionstabellen får tjäna som underlag för subtraktionen, så blir också multiplikationstabellen den bästa utgångspunkten för divisionen. Och för den säkra och klara uppfattningen av detta räknesätt är det som förut framhållits nödvändigt att göra skillnad mellan storleksbestämningar och förhållandebeteckningar redan vid inlärandet av multiplikationstabellen. Det blir den bästa förberedelsen till uppdelningen i delningsdivision och innehållsdivision, som nu kräver sin uppmärksamhet.

På senare tid kan man nog skönja en benägenhet i våra räkneböcker att göra alltför stor affär av denna uppdelning. Man får akta sig att göra de båda slagen av division till en ren konstruktion, som bara är självändamål, och som inte har något med praktiska livet att göra. Men det gör man, då man, som vanligen sker i räkneböckerna, ger en utredning av skillnaden mellan delningsdivision och innehållsdivision och sedan låter en rad av abstrakta sifferexempel tjäna som illustration till detta. Enda möjligheten att få fram skillnaden är att använda benämnda tal, det vill med andra ord säga sätta ut sorterna. Ty det är här den väsentliga skillnaden ligger. Iakttar man den, så behöver man inte göra mycket väsen av de olika divisionsslagen. Och glömmer man bort den, så är allt tal om delningsdivision och innehållsdivision ett slag i luften.

Vid all såväl multiplikation som division har man att göra med två storheter och förhållandet mellan dem. Enklaste sättet att beteckna detta är uttrycket 15 m : 5 m = 3, och det riktigaste sättet att avläsa ett sådant uttryck skulle vara »förhållandet mellan 15 m och 5 m är 3». I de räkneuppgifter, som möta oss i livet eller åtminstone i räkneböckerna, få vi detta uttryck i tre former: 1) ovan anförda, 2) 3 · 5 m = 15 m, och 3) 15 m : 3 = 5 m. Det kanske bör framhållas, att »5 · 3 m» är en helt annan uppgift, som i sin tur har sina tre olika former, analogt med den föregående.

Om man nu utesluter måttbestämningen och i stället skriver 1) 15 : 5 = 3, 2) 3 · 5 = 15 och 3) 15 : 3 = 5, så vet man inte varken ut eller in. Närmast till hands ligger att sammanföra de båda divisionsuttrycken det ena med 3 · 5 m, det andra med 5 · 3 m, om man vill ha skillnaden mellan storleksbestämningen och förhållandebeteckningen avgjord. Under alla förhållanden blir avgörandet osäkert, ty uttrycken kunna tydas på olika sätt.

Har man, som förut anvisats, övat multiplikationstabellen med benämnd multiplikand, så har man en hel del arbete undangjort för divisionen. Barnen äro då vana vid att skilja mellan storleksbestämningen och förhållandet, och tankegången tillämpas omedelbart på divisionen. Ytterligare befästes detta genom att öva multiplikationstabellen som divisionstabell enligt »formeln»: 3 · 5 m = ?, 3 · ? = 15 m, ? · 5 m = 15 m. Efter en sådan förberedelse möter det inga svårigheter att avgöra, om »svaret» skall ha sort eller inte i en divisionsuppgift, och eftersom detta är det väsentliga, kan talet om olika slag av division inskränkas till ett minimum.

Första förutsättningen för att nå fram till ett klart begrepp om divisionen blir således att man alltid, både vid huvudräkningsövningar och vid skriftlig räkning, rör sig med benämnda tal. Det torde här vara onödigt att anmärka, att denna fordran, för så vitt det gäller den skriftliga räkningen, avser uppgifternas teckning, inte uppställningen till uträkning, som naturligtvis enligt allmänt bruk utföres med endast siffrorna.

Undervisningsplanens bestämmelse om det successiva införandet av tvåsiffrig och flersiffrig divisor står i vägen för en rationell progression i divisionsexemplens uppställning.

Vad som är svårt för barn att uppfatta är, som förut framhållits, förhållandet mellan olika storheter. Det är följaktligen detta, som skall väljas med försiktighet. Och det går bra vid all multiplikation, ty det är alltid multiplikatorn, som betecknar förhållandet. Det går också bra vid delningsdivision, ty här är det divisorn, som betecknar förhållandet. Men vid innehållsdivision utgöras dividend och divisor av storleksbestämningarna, de båda storheter som skola jämföras, och det sökta talet, kvoten, betecknar förhållandet. Har man nu en fyrsiffrig dividend med ensiffrig divisor, så får man beteckna förhållandet mellan storheterna med ett tresiffrigt, kanske fyrsiffrigt tal. Och det är omöjligt för ett barn i tredje eller början av fjärde skolåret att föreställa sig en storhet 1000 eller ens 100 gånger en annan. Att man varit på det klara med den saken framgår av föreskriften, att inte ens den tvåsiffriga multiplikatorn bör införas för tidigt. Som det nu är, hör uppgiften 468 m : 234 m = 2 till de förbjudna i ifrågavarande klass, medan ingenting hindrar att man använder uppgiften 468 m : 2 m = 234. Men för barnet är det en lätt sak att uppfatta, att 468 m är dubbelt så långt som 234 m. Det är också lätt att illustrera med en tudelad linje på svarta tavlan. Men förhållandet 234 mellan 468 m och 2 m, det är inte svårt att uppfatta eller i en hast illustrera, det är omöjligt.

Tills vidare torde man få hjälpa sig fram genom att välja mycket små tal även i dividenden, när man vill räkna innehållsdivision.

Ett särskilt kapitel brukar vara »division med rest». Även här behöver man skilja på delningsdivision och innehållsdivision, om man vill ha klarhet och reda i framställningen. Vid innehållsdivision söker man förhållandet mellan två storheter. Där kan det inte bli tal om någon rest. Förhållandet mellan 16 m och 5 m kan inte bli 3 med 1 m i överskott utan det är $^{16}/_{5} = 3^{1}/_{5}$. Sådana uppgifter böra därför inte förekomma förrän i sammanhang med allmänna bråk. Dock kan resten komma ifråga vid en del använda uppgifter, vilka behandlas som innehållsdivision. Man kan t. ex. fråga: **Hur många kostymer à 3 m erhållas ur ett tygstycke om 16 m.** Svaret måste givetvis bli 5 st., varjämte det blir 1 m över.

Vid delningsdivision däremot är resten en mycket vanlig företeelse. **16 m kunna mycket väl delas, så att man får 3 m** i varje del och 1 m över. **Här kan man alltså handla efter** omständigheterna, dela precis, så att man får $3^1/_5$ m i varje del, eller nöja sig med 3 m jämnt och få överskott.

**Vid division med rena siffertal vet man inte, hur uppgiften** är avsedd. Det kan rent av sättas ifråga, om inte tränings-uppgifter av detta slag alltid borde gå jämnt upp, så länge kursen avser hela tal.

## II.

# Bråkläran.

Länge betraktade man läran om decimalbråken som en fortsättning och tillämpning av läran om de hela talens behandling. Man utgick ifrån att beteckningssättet är detsamma, och att därför de olika räknesätten tillämpas på samma sätt. Den förste i vårt land, som på allvar hävdade, att decimalbråken voro bråk och måste behandlas som bråk, var den förut omnämnde lektor Nordlund. Den gängse ordningen »hela tal, decimalbråk, allmänna bråk» blev av honom omkastad och ersatt med »hela tal, allmänna bråk, decimalbråk». Han betraktade nämligen decimalbråken som ett specialfall inom allmänna bråkläran. Vissa bråktal kunna på grund av det använda decimalsystemet betecknas utan hjälp av nämnare. Det ändrar inte deras karaktär av bråkdelar, och för att förstå dem och deras behandling måste man känna till den allmänna bråkläran, trots att beteckningen överensstämmer med de hela talens. Det var Nordlunds utgångspunkt.

I detta sammanhang har man kanske rätt att tala om en bestämd effekt av Nordlunds pioniärarbete. Visserligen har man inte följt honom helt och hållet. Ännu hör läran om decimalbråken till femte klassens kurs och läran om de allmänna bråken till sjätte klassens. Men undervisningsplanen föreskriver, att läran om decimalbråken skall föregås av en inledning till bråkläran, som gör barnen någorlunda hemmastadda med bråkbegreppet, innan de börja sysselsättas med decimalbråken. Det torde få betraktas som en kompromiss.

Denna inledning till bråkläran är emellertid värdefull, och det är av vikt att den göres med beräkning. Det var en tid, då man ägnade mycken uppmärksamhet åt den åskådliga framställningen av de första bråkdelarna, halva, tredjedelar o. s. v. ända till tolftedelar. Det var Nordlund som började, och här fick han många efterföljare. Man träffar på dem ännu i dag bland våra räkneboksförfattare. Som åskådningsmedel använde Nordlund arket, och bland hans skolmateriel fanns också en serie pappskivor, skurna så att de motsvarade helark, halvark o. s. v. För att inte likheten skulle bli alltför påtaglig, valde hans eftersägare andra åskådningsmedel. De kommo med brödkakor, äpplen och apelsiner och delade dem i 2, 3 och 4 delar. Detta var naturligtvis en missuppfattning av förebilden. Arket och arkdelarna, som Nordlund använde, voro för honom måttbestämningar. Det var inte någon stycketalsräkning, när han talade om 3 ark 1 halvark, utan det var ett mått, han angav. Måttet kan med fördel bytas ut mot andra mått, meter och decimeter, liter och kilogram. Men äpplen och apelsiner äro inga mått. Denna inledning till allmänna bråkläran har i själva verket varit en god mätare på hur oklar ställningen varit, hur litet vi egentligen vetat både vart vi ville komma och vilka vägar vi hade att gå.

Numera har det skett en omsvängning i uppfattningen. Den omständliga åskådliga framställningen av bråkdelarna blir i allmänhet betydligt inskränkt. Och detta är nog riktigt. De första bråkdelarna äro inga främmande begrepp för barnen i femte skolåret. Halva, tredjedelar, fjärdedelar och åtskilligt mera höra till deras gamla bekanta. De behöva därför inte presenteras som nya bekantskaper, utan det är nog att konstatera, vad de gamla vännerna egentligen äro för slags folk. En åskådlig framställning härav är naturligtvis nyttig och nödvändig, men den behöver inte vara så omständlig. Det är alldeles tillräckligt att med käppar eller linjer på svarta tavlan visa, hur man delar en meter i olika stora delar, och efter vilka grunder delarna få namn. Det är nödvändigt att välja en måttenhet som utgångspunkt, och metern resp. decimetern är den mest praktiska. Den har utsträckning endast i en dimension och uppfattas därför lättare. En del av en yta är svårare att uppfatta och ännu mera en del av en kropp. Härtill kommer, att linjen är så lätt att rita upp. Man kan plocka fram den flera gånger under samma lektionstimme, om det visar sig behövligt.

Men om sålunda den första åskådliga bekantskapen med bråkdelarna kan stökas undan tämligen lättvindigt, så är en annan sak så mycket viktigare. Den uppdelning av talen i två grupper, storleksbestämningar och förhållandebeteckningar, vars vikt blivit så starkt framhållen redan i samband med de hela talens behandling, får här ännu större betydelse. För bråkläran är denna uppdelning av talen helt enkelt ett oumbärligt hjälpmedel. En sammanblandning av de båda talgrupperna redan vid den inledande behandlingen vållar här en oreda, som gör det följande arbetet mångdubbelt svårare och ofta nog omöjliggör en klar och översiktlig uppfattning av bråkläran. Det blir så mycket viktigare, därför att bråktalet i sig självt betecknar en räkneoperation. Bråket är, som man brukar säga, en tecknad division. Det betyder, att bråket är beteckning för ett förhållande. Det är emellertid inte bara detta. Det är också en storleksbestämning, och konsten är just att skilja dessa båda åt.

$^3/_4$ m kan uppfattas på två olika sätt. Det kan betyda fjärdedelen av 3 m. Då tar man det som förhållandebeteckning. Det kan också avläsas så, att det betecknar tre stycken längder, vardera en fjärdedels meter lång. En fjärdedels meter är då en måttenhet på samma sätt som en meter eller en decimeter, och uttrycket 3 fjärdedelsmeter får samma innebörd som »3 m» eller »3 dm». Det blir en storleksbestämning.

Och nu gäller det att behandla bråkläran så, att bråket blir en storleksbestämning för barnet, ända till dess den andra betydelsen verkligen behövs.

Första villkoret för detta är likasom vid multiplikation och division i hela tal, att man alltid använder benämnda tal, siffertalen i förbindelse med en sort av ett eller annat slag. Det väsentliga härvidlag är nämligen, att bråkets nämnare flyter samman med sorten till en måttenhet, halvmeter, tredjedelsliter o. s. v. Förutsättningen gäller hela inledningen till allmänna bråk samt hela bråkläran, både decimalbråk och allmänna bråk, ända tills man kommer till multiplikation och division med bråk i multiplikator och divisor. Ett strängt fasthållande vid detta underlättar barnets uppfattning av bråket och bråkläran på ett sätt, som verkar förbluffande, om man nu får använda ett sådant uttryck i en relativt allvarlig metodisk framställning.

Hur omfattande man gör den föreskrivna inledningen till bråkläran är för övrigt en smaksak. Den ene nöjer sig med bråkets uppkomst och beteckning. Den andre tar med en räcka övningar med de fyra räknesätten i allmänna bråk. För dessa övningar gäller, även när de förekomma inledningsvis, vad som här nedan anföres rörande de olika räknesätten.

## 1. Addition och subtraktion.

De första åskådningsövningarna kompletteras med flitiga övningar i huvudräkning. Dessa omfatta först och främst själva bråkdelarna, deras karaktär och deras inbördes förhållande. Hur många tredjedels meter blir det av 1 m, 2 m, 3 m, 5 m o. s. v. Hur många meter blir det av 4, 8, 12 fjärdedelsmeter? Hur många meter och fjärdedelsmeter blir det av 5 fjärdedelsmeter, 9 fjärdedelsmeter, 11 fjärdedelsmeter? Hur många fjärdedelsmeter av $^1/_2$ m, $1^1/_2$ m, hur många åttondelsmeter av $^1/_2$ m, $^1/_4$ m, $^3/_4$ m? Övningarna kunna varieras så mycket som helst, utan att man behöver tillgripa annat än de största bråkdelarna.

Sedan fortsättes med additionsövningar, fortfarande i huvudet. Att lägga ihop 4 niondelsmeter och 7 niondelsmeter innebär inte någon annan räkneoperation än den som förekommer, när man lägger ihop 4 m och 7 m. Man kommer bara ihåg här lika väl som i det analoga fallet i hela tal, att summan innehåller samma sort som addenderna. Och sorten är *niondelsmeter*.

De första övningarna med olika nämnare väljas så, att de mindre delarna äro jämna delar av de större. $^1/_2$ m + $^3/_4$ m = ?. Genom de föregående övningarna äro barnen redan på det klara med att man får $^2/_4$ m av $^1/_2$ m, alltså $^2/_4$ m + $^3/_4$ m = $^5/_4$ m, fortfarande med fjärdedelsmeter som »sort».

Hela den omständliga historien med bråkens liknämniggörande medelst uppdelning i faktorer m. m. kan utan vidare bortskäras från folkskolans kursplan. Undervisningsplanen ger den tydliga anvisningen, att man bör undvika »för små delar» vid behandlingen av bråkläran. Detta är visserligen ett tänjbart begrepp, vilket framgår allra bäst av våra räkneböcker. Deras författare anse inte, att decimalbråk med 6 eller flera decimaler äro för små delar, inte heller allmänna bråk med tal mellan 100 och 200 i nämnaren. Om man emellertid reviderar uppfattningen av vad som är att betrakta som små delar något, så blir liknämniggörandet en mycket enkel sak. I regel kan det ske med hänvisning till multiplikationstabellen. Tredjedelar och fjärdedelar bli tolftedelar. Om det någon gång skulle hända, att klassen gör sjättedelar och åttondelar till fyrtioåttondelar, så är därmed ingen större skada skedd. Äro barnen förståndigt preparerade t. ex. genom att flitigt öva talens uppdelning i faktorer vid huvudräkningsövningar i multiplikation (sid. 39), så är för övrigt risken för detta inte så särdeles stor.

Ett enkelt sätt, på vilket man kan hjälpa sig fram, är att skriva upp de nämnare, som kunna ifråga, under varandra, tills man når fram till den gemensamma[1]).

Ex.: $\frac{1}{14}$ m + $\frac{1}{18}$ m =

| | |
|---|---|
| 28 | 36 |
| 42 | 54 |
| 56 | 72 |
| 70 | 90 |
| 84 | 108 |
| 98 | 126 |
| 112 | |
| 126 | |

Metoden blir omständlig, när den minsta gemensamma nämnaren ligger långt borta, men sådana tal böra undvikas vid räkningen, och därför kan detta hjälpmedel vara tillräckligt, när inte den nya nämnaren framgår av sig själv.

I sammanhang härmed övas bråkets förkortning. Det sker bäst genom huvudräkningsövning även det. Om man på allsidigt sätt övar de större bråkdelarna till låt oss säga 36-delar, med förlängning, förkortning och liknämniggörande, så lära sig barnen de oftast förekommande delarnas inbördes förhållanden så väl utantill, att de inte behöva några särskilda regler eller metoder för dessa operationers utförande. Och händer det någon gång, att mindre delar komma ifråga, så är det lätt att tillämpa den från de större delarna vunna erfarenheten även på dessa mindre.

För subtraktionen gäller i tillämpliga delar vad som är sagt om additionen, och det är inte många ord som här behöva tilläggas. Vad som kan vålla en smula tveksamhet i början, om man för de hela talen använt den förut omtalade metoden med lika addering, är hur denna skall tillämpas i

[1]) Exemplet anfört med reservation för de oegentliga måttbestämningarna. Ingen människa räknar med fjortondels- eller adertondelsmeter.

bråkläran. Man gör emellertid där som vid räkning med hela tal, endast att man lägger till »en hel» i stället för ett tiotal. I minuenden delas den tillagda hela i det ifrågavarande antalet delar, i subtrahenden lägges den till de hela, som finnas förut.

$$\text{Ex.: } 4\,{}^2/_5 \text{ m} - 1\,{}^4/_5 \text{ m} = 4\,\frac{2+5}{5} - 1 \text{ m} + 1\,{}^4/_5 \text{ m} =$$

$$= 4\,{}^7/_5 \text{ m} - 2\,{}^4/_5 \text{ m} = 2\,{}^3/_5 \text{ m}.$$

Liknämniggörandet, om sådant behöves, skall naturligtvis göras förut.

## 2. Multiplikation och division.

Enligt undervisningsplanens anvisningar skola till att börja med multiplikator och divisor utgöras av hela tal. Det är en mycket välbetänkt anvisning detta, ehuru uttrycket är något missvisande. I överensstämmelse med vad som förut framhållits blir det väsentliga, att storleksbestämningarna kunna utgöras av bråktal, men förhållandet emellan dem skall vara så enkelt, att det kan uttryckas med helt tal. Uttrycket $5 \cdot {}^3/_4$ m $= 3\,{}^3/_4$ m är, som förut blivit framhållet, underlaget för tre olika räkneoperationer, beroende på vilket av de tre talen som är det obekanta, sålunda:

$5 \cdot {}^3/_4$ m $=$ ? (multiplikation),

$5 \cdot$ ? $= 3\,{}^3/_4$ m (delningsdivision),

? $\cdot\, {}^3/_4$ m $= 3\,{}^3/_4$ m (innehållsdivision).

Av dessa tre kan man enligt undervisningsplanen endast använda de två första vid kursens början, vilket inte torde vara meningen, ty i alla tre uttryckes förhållandet mellan de båda storheterna med det enkla talet 5. Och innehållsdivisionen i det sista exemplet är inte svårare att uppfatta än de övriga. Man tecknar talet sålunda: ${}^{15}/_4$ m : ${}^3/_4$ m och illustrerar det med två linjer, av vilka den ena är fem gånger så lång som den andra. Beräkningen överensstämmer fullständigt med innehållsdivision i hela tal och innehåller inte några svårigheter utöver dem, som bemästrats redan i tredje skolåret.

Om man däremot vänder på uppgiften, så att innehållsdivisionen motsvarar undervisningsplanens fordringar, så får man: $3\,^3/_4$ m : 5 m = ? Man får helt tal i divisorn, men förhållandet mellan de båda storheterna blir $^3/_4$, något som är betydligt svårare att uppfatta.

Konsekvensen av undervisningsplanens anvisning blir alltså den, att innehållsdivision i samband med denna del av kursen är utesluten.

Iakttages detta, så erbjuda de båda räknesätten inga avsevärda nya svårigheter. Det enda tillfälle, där man möjligen stöter på patrull, är sådana divisionsuppgifter, där divisorn är större än dividendens täljare.

Ex.: $^3/_4$ m : 6 = ?

Men om barnen förut tränats med bråks förlängning och förkortning, så genomskåda de sammanhanget tämligen av sig själva. Till att börja med resonera de som så: $^3/_4$ m = $^6/_8$ m. $^6/_8$ m : 6 = $^1/_8$ m. Tagen på detta sätt blir uppgiften inte alls svår att förstå.

Så långt som hit kan man fortsätta bråkläran med uteslutande användning av bråket som storleksbestämning. Och så långt går det lekande lätt. Några svårigheter att tala om förekomma inte. Överensstämmelsen med hela tal är påtaglig, och det nya som kommer ifråga, är bara ägnat att göra arbetet mera intressant. Men här går en skarp gräns, och så snart man överskrider den, börja svårigheterna på allvar. Det är när man börjar använda bråket för att beteckna ett förhållande mellan två storheter, det vill med andra ord säga, när man börjar ta till bråket som multiplikator och divisor enligt undervisningsplanen.

Det är två ting, som samverka till att åstadkomma dessa svårigheter. För det första blir det förhållande mellan två storheter, som uttryckes med ett bråktal, mera invecklat än det, som uttryckes med hela tal, och följaktligen svårare att uppfatta. För det andra utplånas gränsen mellan multiplikation och division fullständigt. Ett sådant räknesätt som division i bråk i den mening, man vanligen lägger i uttrycket, existerar inte. Och detta är ägnat att förvirra en barnahjärna, som till äventyrs inte är alltför klar av naturen.

Så länge förhållandet uttryckes med helt tal, innehåller den ena storheten endast en del, och den andra är en jämn mångfald av denna del. Men när förhållandet uttryckes med ett bråktal, betecknar täljaren antalet delar i den ena storheten och nämnaren antalet delar i den andra. 15 m : 5 m = 3 kan illustreras så:

Men 12 m : 16 m = $^3/_4$ skall illustreras så:

Så länge man har helt tal i förhållandet, kan man (enligt K. P. Nordlund) tala om det hela, delarna och delarnas antal.

Men när förhållandet uttryckes med ett bråk, måste man (enligt samma författare) tala om det föregående, det efterföljande och förhållandet.

Även med helt tal i förhållandet blir man visserligen beroende av de bägge storheternas inbördes ordning. 15 m : 5 m = 3 men 5 m : 15 m = $^1/_3$. Så länge man räknar med de hela talen, använder man emellertid endast den första uppställningen, ty då ordnar man inte räkneuppgiften så, att svaret skall uttryckas med ett bråk. Dessutom, hur man än vänder på uppgiften, så blir under alla förhållanden 15 m det hela, 5 m varje del, och delarnas antal är och förblir 3.

Men 16 m : 12 m = $1^1/_3$ är något helt annat än 12 m : 16 m = $^3/_4$. Visserligen kan man invända, att i uppgiften 15 m : 5 m förhållandet i själva verket skulle betecknas med $^3/_1$, och att uppgifterna följaktligen bli fullkomligt analoga. Men detta är ett faktum, som kan stå klart för läraren, men för barnet är det tills vidare något mycket fjärran liggande.

Så länge bråket begagnas som multiplikator, äro de nya svårigheterna ännu tämligen rimliga. Barnet är inte främmande för sådana uttryck som »hälften av 3 m, $^2/_3$ av 6 m, $^3/_4$ av $1^1/_2$ m». Dylika enkla uppgifter kunna övas som huvudräkning, och så småningom övergår man till uppgifter med större tal och mindre delar. Emellertid är det nödvändigt, att man hela tiden håller sig inom snäva gränser. Redan inför en sådan fråga som t. ex. $^5/_7$ av $4^2/_3$ m = ? ha många av barnen vanligen tappat kontakten med uppgiftens verkliga innebörd.

När man övergår till skriftlig behandling av uppgifterna, bör det från början inskärpas, att man inte säger $^3/_4$ gånger $^2/_3$ m utan att multiplikationstecknet utläses »av».

Så äro vi då på allvar framme vid folkskolekursens sorgebarn, division i allmänna bråk med bråk i divisorn. Det kan man verkligen kalla ett problembarn i ordets bokstavliga mening.

Det mest besvärliga med detta problembarn är att det inte existerar, men att man ändå till varje pris skall uppehålla föreställningen om att det lever och befinner sig i högönsklig välmåga.

Visserligen *tecknar* man en del uppgifter som division, men man utför dem inte så, utan genom den bekanta »upp- och nedvändningen» av divisorn överför man räkningen till multiplikation. Divisionen existerar som tecknad uppgift men inte som räknesätt.

Under sådana förhållanden kan man ha rätt att undra, varför vi egentligen skola syssla med begreppet division i allmänna bråk med bråk i divisorn. De praktiska uppgifter, som man använder för att illustrera — och motivera — räknesättet, kunna i regel med större fördel tecknas och från början behandlas som multiplikation eller regula de tri, där de inte helst borde bannlysas. Det sista är nog den riktigaste behandlingen av uppgifter som följande: S. får 2,4 l. bär. Detta är $^3/_5$ av de bär, G. hade. Hur mycket bär hade G.?

Däremot är en uppgift som följande givetvis korrekt: Vad kostar 1 kg kaffe, när $3^1/_2$ kg kostar $5^3/_5$ kr.? Att en sådan beräkning aldrig behöver göras i verkligheten får man väl bortse ifrån, liksom också från att man aldrig räknar med femtedels kronor. Men det är fullständigt onödigt att behandla den som division. Det är t. o. m. endast ägnat att försvåra uppfattningen av den att göra så. Enklast är naturligtvis att använda regula de tri: $3^1/_2$ kg $= {}^7/_2$ kg. Vad kostar $^1/_2$ kg, när $^7/_2$ kg kostar $5^3/_5$ ($^{28}/_5$) kr.? Svar: $^4/_5$ kr. Vad kostar då 1 kg.? Svar: $2 \cdot {}^4/_5$ kr $= {}^8/_5$ kr $= 1^3/_5$ kr.

Om man nu nödvändigtvis skall teckna uppgifterna som division, så kan man ändå vid uträkningen överföra resonemanget till sådana mera lätthanterliga former. Delningsdivisionen kan alltid utföras som regula de tri. Vid innehållsdivision är det enklast att göra dividend och divisor liknämniga och sedan bortse från nämnarna och räkna med täljarna som med hela tal. Täljarna komma nämligen då att beteckna antalet delar i de båda jämförda storheterna (jfr sid. 50).

Vad beträffar decimalbråken, så är hela decimalbråksläran en mekanisering, och man torde få låta det bero vid detta. Den allt dominerande svårigheten där är placeringen av decimalkommat, och detta blir särskilt fallet vid multiplikation och division, i all synnerhet då man har bråk i multiplikator och divisor. Vid multiplikationen kan man möjligen ha hjälp av den i det föregående nämnda ferrolska multipliceringsmetoden (sid. 39). Denna bygger nämligen på att vid multiplikation av ental med ental får man ental, ental med tiotal ger tiotal, tiotal med tiotal ger hundratal. Härifrån är det inte svårt att härleda, att ental med tiondelar ger tiondelar och tiondelar med tiondelar ger hundradelar o. s. v.

$$\text{Ex.:}\quad \begin{array}{r} 3{,}7 \\ \cdot\ 2{,}4 \\ \hline 2{,}6 \\ 6{,}28 \\ \hline 8{,}88 \end{array}$$

Man resonerar: $2 \cdot 7$ är 14, $4 \cdot 3$ är 12, $14 + 12$ är 26 tiondelar. $4 \cdot 7 = 28$ hundradelar. $2 \cdot 3 = 6$ ental. Svar: 8,88.

### 3. Allmänna anmärkningar rörande bråkläran.

Enligt undervisningsplanen böra inte andra praktiska exempel komma ifråga än sådana, som förekomma i livet. Ett strängt tillämpande av denna grundsats skulle leda till att de flesta tillämpningar av allmänna bråkläran skulle försvinna ur räkneböckerna. Sedan vi fått decimalsystemet genomfört i hela vårt mått- och viktsystem, är det ingen som räknar med andra bråkdelar av de olika måtten. $^1/_2$ meter kan nog komma ifråga, $^1/_4$ kg (ett kvarts kilo) likaså, men vem frågar efter $^2/_3$ meter, $^4/_5$ liter eller ens $^3/_4$ kilogram? Alla våra vanliga räkneuppgifter med dylika måttbestämningar äro i hög grad verklighetsfrämmande. Inte ens en byggnadsingenjör räknar med tredjedels meter. 0,33 m ger tillräcklig precision för honom och är bekvämare att använda. De tillfällen, då andra bråkdelar än decimalbråkens förekomma i praktiska livet, äro ytterst få. Tack vare bibehållandet av de en gång inarbetade halvstops- och kvartersbuteljerna ha vi kvar storlekarna $^2/_3$ l (helbutelj) och $^1/_3$ l (halvbutelj, halva). Vidare räknar man med halva, tredjedels och fjärdedels procent, men dessa beteckningar ersättas alltmera med decimalbråk även de. Däremot räknar man och torde väl alltjämt få räkna med 12-delar och 360-delar av år, då ränta skall beräknas för kortare tid än ett år. Slutligen ha vi hemmansbeteckningen, som kan skena åstad till hur små delar som helst. Men även detta sätt att räkna är ställt på avskrivning. Vid nutida jorddelning räknar man i hektar och kvadratmeter. Eljest räknar man inte i hemmantal annat än vid laga skiften. Samma är förhållandet med de reduktionstal, som läggas till grund för utdelning i konkurser och fördelning av bolagsvinster. Även för deras räkning användas decimalbråk och procenttal. Och så återstår knappast mera än lödighetstal för silver och karattal för guld, vilka väl emellertid liksom talen för andra legeringsförhållanden endast äro förenklade populariseringar av verkliga förhållandet för det mesta.

De allmänna bråken få därför betraktas som ställda på avskrivning i levande livet. Man märker också mycket lätt vid genomläsningen av vilken räknebok som helst, vilken svårighet författaren haft att finna praktiska exempel för tillämpningen av allmänna bråkläran. De flesta dylika exempel äro mer eller mindre krystade och verklighetsfrämmande. Och det kan knappast vara annorlunda.

Någon gång kan det väl hända, att ett äpple skall delas mellan tre e. d., men sådana delningar kan man göra utan att ha lärt sig allmänna bråk.

Den huvudsakliga betydelse, de allmänna bråken ha för räkneundervisningen, reduceras på detta sätt till att vara ett lämpligt och nödvändigt underlag för läran om decimalbråk. Dessutom förekommer det naturligtvis ofta, att man rör sig med de allra största bråkdelarna, halva, tredjedelar, fjärdedelar och femtedelar, knappast sjättedelar och sjunde delar, snarare då åttondelar och tolftedelar. Och det har sitt stora värde att få även dessa elementära begrepp ordentligt klarlagda och genomtröskade. Så arbetet med allmänna bråkläran är nog inte bortkastat. Men det kan inskränkas högst betydligt. Egentligen räcker det med en någorlunda omfattande uppläggning av vad vi nu bruka kalla inledningen till allmänna bråk. Och denna inledning kan och bör huvudsakligen övas som huvudräkning.

En helt annan ställning ha decimalbråken. Deras användning i det praktiska livet är mycket omfattande, och på grund av kulturens ständigt fortgående utbredning i allt vidare kretsar, bli också de kretsar allt vidare, där decimalbråken komma till användning. Emellertid är det bokstavligen sant, som det brukar framhållas, att räkneoperationerna vid decimalbråk äro överensstämmande med dem vid hela tal. Om man räknar med kronor och öre eller med kronor och hundradels kronor, det kommer tämligen på ett ut. Redan i tredje och fjärde skolåret kan man utan olägenhet använda beteckningen 3,25 för 3 kronor 25 öre. Barnen komma till och med själva och föreslå att få skriva på det sättet, ty de ha sett det hemma och i de butiker, där de gå ärenden. Och vad som kan göras med kronor och öre, det kan givetvis också göras med meter och centimeter och andra mått. Skillnaden mellan hela tal och decimalbråk blir i vissa fall rent av hårfin.

En sak, som behöver på allvar uppmärksammas, är själva beteckningen med decimalbråk, inte minst när det gäller penningbelopp under 1 krona. Det är mycket brukligt att i sådana fall skriva t. ex. 0,15 kr i stället för 15 öre. Ganska fatala misstag ha därvid blivit begångna. Ett stort oljebolag offererade på sin tid olja till svenska flottan till 0,15 öre pr kg! I turiststugan vid Tännforsen fann en resande skolklass ett anslag, enligt vilket man kunde få köpa smörgås för 0,25 öre stycket. Försök att få det angivna priset tilllämpat ville dock inte lyckas. Sådana misstag äro emellertid skäligen blamerande för vederbörande, och det kan vara en uppgift även för folkskolans undervisning att förebygga dem. Om en enkel snickare skriftligen erbjuder sig att leverera rockhängare till en affär för 0,05 öre, så är det förresten inte otänkbart, att han kunde bli tvingad att stå sitt kast. Så det är nog bäst att se upp.

Ett fel, som ofta begås, är att man iakttar alltför stor noggrannhet vid räkningen. Det tjänar ingenting till att beräkna en väglängd i meter och centimeter, när man vid uppmätningen kanske gjort fel på flera centimeter. Och beräkningar med bråkdelar av öre äro som oftast malplacerade. I vissa fall kunna de ju ha fog för sig. En timpenning kan vara bestämd till låt oss säga 83,5 öre, och det halva öret strykes först i slutsumman, när man räknar med udda antal timmar. Men att sitta i skolan och räkna med räntor på små bråkdelar av öre, medan bankerna obönhörligen stryka allt som kommer utanför hela öretal, det tjänar naturligtvis ingenting till. För en ingenjör räcker i de flesta fall den noggrannhet, som han kan vinna med tillhjälp av räknestickan. Varför en tolvårig barnunge då skall sitta i folkskolan och svettas över bråkdelar av millimeter tillsammans med kilometer och mil, det övergår en normalt funtad människas förstånd.

## III.

# Sorter.

Metersystemet ger oss en mångfald av olika måttenheter med olika reduktionstal. Visserligen har man sluppit undan de gamla icke dekadiska sorterna, och det var väl meningen, att detta skulle medföra en stor förenkling i användningen. Men när reduktionstalet är än 10, än 100 och än 1000, så är detta tillräckligt för att vålla en hel del huvudbry.

Emellertid visar det praktiska livet en bestämd tendens att minska på antalet sorter så mycket som möjligt. Man säger aldrig 3 m 2 dm 5 cm, utan man säger 3,25 m eller 325 cm. Denna tendens bör uppmärksammas i skolan, och tendensen i undervisningen bör gå i samma riktning. Man får väl inte alldeles utelämna någon av de metriska sorterna, men man kan göra en uppdelning av dem, så att de allmänt använda förekomma till inövning och innötning i lärobokens uppgifter, medan det för de övriga är tillräckligt, om de finnas i en tabell i slutet av boken, så att de kunna tas fram vid behov, t. ex. vid lösandet av geometriska uppgifter.

Av längdmått använder man huvudsakligen de förutnämnda meter och centimeter samt för längre sträckor kilometer. Ofta använder man endast metern för kortare sträckor och ersätter de mindre måtten med decimalbråk.

Ytmåtten komma endast sällan ifråga för en vanlig människa, så länge hon inte får med jord att göra. Får hon det, så är det en hektar, som blir det aktuella måttet för gårdar och åkerarealer, kvadratmeter för tomter.

De allmännast använda rymdmåtten äro liter och hektoliter. Alla de övriga kunna saklöst överhoppas. Decilitern användes nog i minuthandeln med grädde, men den går under benämningen »mått». Centilitern förekommer vid utminutering av brännvin, men det behöver skolan knappast undervisa barnen om.

Vikterna äro kilogram, hektogram och gram. Hektogrammet är egentligen överflödigt och kommer väl så småningom att försvinna. Men tills vidare brukas det allmänt i en del förpackningar, särskilt kakao, och därför måste det tas med. Sedan vi numera fått förpackningar av hushållsvaror om t. ex. 225 gram, torde man väl snart införa en uniformering och ersätta hektogrammet med det mera praktiska »100 gram», och då kan även skolan slopa hektogramvikten. Den är opraktisk även av det skälet, att den gängse förkortningen alltför lätt förväxlas med kilogrammets. Mellan kg och hg är skillnaden alltför liten, framför allt i skriven text. På vikterna ser man också valören mycket ofta angiven med 100 gram, inte med 1 hektogram. Vad en metrisk ton är behöva barnen känna till, emedan den ofta förekommer vid grafiska framställningar till geografiundervisningen. Men reduktion av ton till g eller kg till mg saknar allt värde. Sådana sammanställningar komma praktiskt taget aldrig ifråga.

Åkerarealer och tomter mätas ännu alltjämt i tunnland och kvadratfot, men fastän man ser detta nästan lika ofta som de nya måtten får väl skolan i sin undervisning pliktskyldigast låtsa, som om den ingenting har reda på härvidlag.

Annorlunda ställer det sig med längdmåttet tum. Det har alldeles försvunnit ur räkneböckerna, men det kan ifrågasättas, om detta är riktigt. Det är emellertid inte vår gamla verktum eller decimaltum det är frågan om, utan engelsk tum. Den förekommer nästan som enda mått vid bestämmande av virkesdimensioner, längder på spik och skruv o. s. v. Och den utgör ett bra underlag för övningsuppgifter i allmänna bråk, därigenom att den alltid brukar halveras ända till 32-delar, någon gång ännu längre.

Eljest är det gallring man behöver och inte utökning av sorterna. Även styeketalen böra kunna gallras åtskilligt. En hel del av dessa måttbestämningar ha förlorat sin aktualitet numera. Dussin och tjog få vi naturligtvis behålla, likaså tolfter när det gäller bräder. Visserligen blir det alltmera vanligt att sälja virke pr meter, och det är länge sedan man började med försöken att få äggen sålda efter vikt, men varken det ena eller det andra har ännu lyckats tränga undan den gamla traditionen. Annorlunda ställer det sig med papper. Att räkna sådant i böcker har kommit alldeles ur bruk. Det passar inte för brevpapper och maskinskrivningspapper i enkla ark, som numera fått en dominerande ställning bland papperssorterna. De säljas i 100-tal eller i paket om 500 stycken. Balarna behöver man inte bry sig om, förrän man blivit boktryckare eller tidningsredaktör. Den senare ser väl mestadels papperet i rullar för resten och förblir främmande för både ris och balar.

Ännu i denna dag kan man i använda räkneböcker träffa på den gamla uppgiften om 24 ark skrivpapper pr bok. För att radikalt göra slut på denna föråldrade trafik är det bäst att ta steget fullt ut och stryka boken helt och hållet som måttbestämning.

Detsamma kan saklöst ske med skock (för kålhuvud) samt kast och val (för strömming). De sista kunna ju användas mera privat i skolorna på östkusten, där strömmingsfisket förekommer och måtten i viss utsträckning ännu användas. Men i landet i övrigt böra de ej komma ifråga.

Mera aktuella äro tidsbestämningarna. Dem få vi nog behålla hela bunten. Klockan och almanackan äro var mans egendom.

En måttbestämning, som ännu inte gjort sitt inträde i skolan, är »standard». I uppgifter om vår träindustri ser man alltid detta ord användas, och det kunde vara skäl ta upp det i räkneundervisningen så pass mycket, att begreppet inte är alldeles främmande för barnen, när de komma ut i livet. Detsamma gäller olika slag av famnmått.

När man vid räkneundervisningen vill markera skillnaden mellan talet som storleksbestämning och talet som beteckning för ett förhållande, så måste man, som förut framhållits, i allmänhet komplettera storleksbestämningarna med en måttbestämning. Detta blir på samma gång en utsträckt träning i användningen av de olika måtten. Det är emellertid viktigt, att man inte vållar oreda i barnens hjärnor genom att använda än det ena måttet, än det andra. Det blir för överskådligheten i framställningen en viktig förutsättning, att man använder endast ett fåtal olika sorter, och även av dessa bör man inte ta med mer än en eller ett par i sänder. Den ovan påyrkade gallringen av i undervisningen använda sorter har sitt värde inte bara för barnets framtid som människa utan även för undervisningen som sådan.

För att ge barnen säkerhet i måttens uppfattning och användning är det också värdefullt att gå sakta framåt. Införandet av nya mått bör ske i ännu försiktigare tempo, än undervisningsplanen tillråder. Ytmått och rymdmått (utom liter och hektoliter) kunna samtliga uppskjutas, tills geometriundervisningen gör dem aktuella, och decimeter och millimeter kunna vänta ända till sjätte klassens kurs med sin entré.

Övningarna i sortförvandling böra inskränkas till sådana måttreduktioner, som äro verkligt aktuella. Ingen människa behöver förvandla kilometer till millimeter eller ton till milligram. Men kilogram och gram, meter och centimeter, kronor och öre, liter och hektoliter, det är »förvandlingar», som höra det dagliga livet till, och som man inte får för mycket av i en räknebok. De böra övas, så att de gå som rinnande vatten. Och de bli mångskiftande nog för att ge barn på folkskolans stadium full sysselsättning.

IV.

## Huvudräkningsövningar.

Den heuristiska metoden gör räknebokens uppgifter till verkliga arbetsövningar. Meningen med metoden är, att barnen genom eget arbete skola finna ut de olika räknesättens innebörd och vinna den träning, som är nödvändig för en snabb och säker räkning. Men det egna arbetet efter räkneboken måste förberedas. Och detta sker genom huvudräkningsövningarna.

Detta blir vid tillämpandet av den heuristiska metoden huvudräkningsövningens viktigaste uppgift. Varje nytt moment i räkningen förberedes med en serie huvudräkningsexempel. Räkneboken kan visserligen ge ett antal exempel som prov på hurudana de böra vara och huru de lämpligast ordnas. Men dels räcka dessa exempel inte till, dels bli de inte huvudräkningsexempel i egentlig mening, om barnen själva kunna läsa exemplen i boken. De måste därför alltid kompletteras, och vid denna komplettering får läraren minst av allt vara sparsam.

Huvudräkningen måste man givetvis bedriva som klassundervisning. Men den följande mera självständiga räkningen efter räkneboken bör helst ordnas så, att det finnes lagom tillrättalagt arbete både för den långsammare och den mera fortfärdiga lärjungen. De övningsexempel, som avse ett och samma moment, böra vara så många, att en del av dem saklöst kunna överhoppas av den, som inte hinner med dem alla. De böra också ordnas strängt progressivt, så att det blir de svåraste uppgifterna, som komma till sist och ge tillräckligt huvudbry åt den, som hinner så långt. Att vinna en tillfredsställande uppställning av räkneböckerna i detta avseende har varit en strävan för många författare, men ännu saknas inte möjligheter till förbättringar.

De huvudräkningsövningar, som avse att förbereda ett nytt moment i undervisningen, böra alltid dels ordnas i serie, dels utföras med benämnda tal. Det kan vara svårt för ett barn i tredje klassen att på en gång säga, vad man får av 30 · 40 m. Men om man börjar med 2 · 40, 3 · 40, 4 · 40 o. s. v., sedan övergår till 10 · 10, 10 · 20, 10 · 30 o. s. v. för att till sist komma fram till 10 · 40 m, 20 · 40 m, och 30 · 40 m, så slinker svaret ur barnamunnen utan att barnet ens vet, varifrån det har kommit. Det är de progressiva serierna, som ge kunskapen och förståelsen av sammanhanget.

Benämnda tal äro förutsättningen dels för att storleksbestämningen skall bli konkret och åskådlig, dels för att den skall skilja sig bestämt från förhållandebeteckningen. Isynnerhet blir detta sista av värde vid inledningen till allmänna bråk, såsom förut framhållits. (sid. 46 f.). $^3/_5 + ^4/_5$ kan vålla barnen huvudbry, ty de göra sig inte reda för vad det innebär, men $^3/_5$ m $+ ^4/_5$ m blir endast en sammanläggning av 3 och 4 stycken (med grav accent = bitar, sträckor för att använda geometrisk terminologi). som vardera äro $^1/_5$ m. Måttbestämningen flyter samman med nämnaren och blir den måttenhet, med vilken man räknar. Svaret blir inte $^7/_5$ m utan 7 femtedelsmeter. Det är skillnad på de båda uttrycken. $^7/_5$ m är eller blir åtminstone lätt 7 m : 5, och det är det som är det farliga. 7 femtedelsmeter kan inte bli annat än 7 stycken (fortfarande med grav accent), vardera 1 femtedelsmeter långt.

För att få dessa övningar tillräckligt allsidiga måste man tyvärr tumma med sitt sinne för verkligheten. Våra måttenheter med sin dekadiska indelning lämpa sig inte för vilka bråkdelar som helst. Detta har framhållits förut, men det kan inte påpekas för ofta. $^1/_7$ m, $^5/_9$ m, $^7/_{12}$ m äro missfoster, som helst borde bannlysas från undervisningen, men det är ingen annan råd än att hålla till godo med dem. Man aktar sig för dem i de praktiska tillämpningsövningarna, men man får använda dem vid de förberedande huvudräkningsövningarna, och i den mån det visar sig lämpligt även vid de skriftliga träningsuppgifterna.

Härmed äro vi framme vid det andra momentet i kapitlet om huvudräkningsövningarna. De äro också det bästa medlet för inträning av talförhållanden, som man måste ha klara i medvetandet. Dit höra först och främst additions- och multiplikationstabellerna med deras omvändningar. De måste övas flitigt hela skoltiden igenom. Och även här skall det vara övningar, ordnade i serier och med benämnda tal. Skälen äro desamma, som förut angivits. Någon gång kan man roa sig och barnen med att hoppa hit och dit i tabellerna. Det är en god repetition och även en god kontroll på hur pass säkra barnen hunnit bli. Men man skall inte göra så, när det är fråga om att träna. Då går man i tur och ordning. Man hoppar inte hit och dit i en psalmvers, när man skall lära den utantill. Det gör man inte i en siffertabell heller.

Jämte dessa båda första uppgifter ha huvudräkningsövningarna även andra syften att tjäna. De äro en god övning att behålla siffror i minnet. I själva verket är ju all räkning huvudräkning, men vi göra den åtskillnaden, att när det är få siffror och enkla förhållanden mellan dem, då säga vi att vi räkna talet i huvudet, men när siffrorna bli flera och talförhållandena mera omständliga, då måste vi skriva upp siffrorna för att komma ihåg dem. Och det kalla vi att räkna på papperet. Förmågan att hålla ihop en uppgift i minnet kan tränas högst betydligt, om man lägger an på den saken, och det är under alla förhållanden en nyttig övning. Även om inte barnen bli några mästare i huvudräkningens konst av det, så bidrar det ändå i hög grad att ge en snabbare och klarare uppfattning av siffrorna, och även räkningen på papperet har stor fördel härav.

Ett gott sätt är att vid huvudräkningen dela upp en uppgift i flera moment och för vart och ett tillhålla barnen att fixera resultatet.

Ex.: $35 \cdot 48$ m =

Dela 35 i faktorer, $5 \cdot 7$; Kom nu ihåg det! Vi tar femman först. $5 \cdot 48$? $5 \cdot 50 = 250$. $5 \cdot 2 = 10$. Skillnaden = 240 m. Kom nu ihåg det! Det är $5 \cdot 48$ m. Hur många gånger ha vi kvar att ta? (Återstår att se, om de komma ihåg det). 7 gånger. $7 \cdot 240$ m alltså. $7 \cdot 25$ m? 175. $7 \cdot 250$? 1750. $7 \cdot 10$? 70. Skillnaden? 1680. Svar: 1680 m.

Eller: $5 \cdot 7 = 35$, $6 \cdot 8 = 48$. $7 \cdot 6 = 42$. Kom nu ihåg det! $5 \cdot 8 = 40$. $40 \cdot 42 = ?$ $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 4 = 16$, och så en nolla till, alltså 16, 8, 0. Svar 1680.

Frånsett eventuella speciella syften, som sådana övningar kunna tjäna, äro de alldeles förträffliga för träning av räknefärdigheten i allmänhet.

Ibland kan man gå en medelväg, skriva upp utgångssiffrorna men utföra resten i huvudet. Man får då delvis stöd för minnet i de uppskrivna siffrorna. På det sättet kan man vänja barnen att reda sig med ganska svåra uppgifter utan att ta till den fullständiga räkningen på papper.

Överhuvud taget bör man vänja barnen vid att inte skriva upp på papperet mera än som är nödvändigt.

Ex.: $7 \cdot 16$ m + $9 \cdot 26$ m = ?

$7 \cdot 16 = 112$ och $9 \cdot 26 = 234$ kan räknas i huvudet, och man skriver endast upp additionen.

Dock böra sådana genvägar inte drivas så långt, att säkerheten i räkningen äventyras.

Allt som allt äro huvudräkningsövningarna ett utomordentligt medel för vinnande både av kunskap och färdighet i räkning. Med den heuristiska metoden som underlag skulle man nästan kunna utesluta det tråkiga arbetet vid svarta tavlan ur räkneundervisningen. Dess uppgift har varit att för klassen demonstrera de typexempel, ur vilka man skulle härleda regeln. I och med slopandet av denna metod har det därför förlorat det mesta av sin betydelse. Klassundervisning och förberedande övningar få formen av huvudräkning, barnens träningsarbete efter räkneboken drives som individuell arbetsövning. Inte minst i mindre gynnade skolformer skulle med en sådan fördelning kunna organiseras en rent idealisk arbetsmetod. Huvudräkningsövningarna kunna nämligen till stor del drivas med alla klasserna på en gång.

V.

## Tillämpningsuppgifter.

I regel bör man vara särskilt noga med att undvika stora tal och små delar i tillämpningsuppgifterna. I träningsuppgifterna har barnet endast det använda räknesättet att koncentrera sig på. Om talen, det vill då först och främst säga storleksbestämningarna, här komma att innehålla ett större antal siffror betyder inte så mycket. Men i tillämpningsuppgiften kommer »problemet» i förgrunden. Vilket eller vilka räknesätt skola användas? Hur skall talet tecknas? Hur skall det ställas upp? Allt detta blir svårare att genomskåda, om talen innehålla många siffror. Och därtill kommer, att när man är inställd på problemlösning, så bör inte tiden för de enskilda exemplen alltför mycket tas i anspråk för mekanisk räkning. Uppgifterna bli roligare för barnen och på samma gång tjäna de bättre sitt särskilda syfte, om de röra sig med små och enkla talförhållanden.

Ett mellanting mellan problem och träningsuppgift äro de additions- och subtraktionsuppgifter med siffror hämtade från statistiken, som man ofta ser i våra räkneböcker. Då det i dessa fall just inte råder någon tvekan om hur problemet skall lösas, så äro i detta fall de mångsiffriga talen inte i vägen.

De flesta lärare ha nog gjort den erfarenheten, att geometriska exempel äro svårtillgängliga för barn. Ofta känns det som körde man huvudet i väggen, när man försöker arbeta med sådana. Till en del hänger det nog samman med att även här formler och regler äro oförståeliga för barn. Det är träning de behöva, inte definitioner. Sådan träning kan man också här vinna med hjälp av huvudräkning. Man kan nöta med kvadrater och rektanglar. De ensiffriga och tvåsiffriga talens kvadrater, åtminstone till och med 20, och sedermera de jämna tiotalens till 100 kunna övas om och om igen, tills de i barnens medvetande ingå i multiplikationstabellen, där de ju också höra hemma. Likaså rektanglarnas ytor. Kvadratens och rektangelns omkrets är också ett tacksamt underlag för sådan träning. Sedan kan man sätta upp uppgifterna i tabellform, t. ex.:

| Kvadratens | | |
|---|---|---|
| sida | yta | omkrets |
| 7 m | | |
| 12 m | | |
| 23 m | | |
| o. s. v. | | |

Eller för rektanglar:

| Rektangelns | | | |
|---|---|---|---|
| längd | bredd | yta | omkrets |
| 3 m | 9 m | | |
| 12 m | 17 m | | |
| o. s. v. | | | |

Barnen fylla i de tomma rutorna. Försök, och det skall visa sig, att barnen få bråttom, när de få en sådan uppgift. Tabellerna kunna tas om och om igen, och man ökar försiktigt uppgifternas svårighet. Så småningom lämnar man olika kolumner tomma t. ex.:

| Kvadratens | | |
|---|---|---|
| sida | yta | omkrets |
| | | 96 m |
| | 64 m² | |
| | 144 m² | |
| | | 32 m |
| | o. s. v. | |

I mittkolumnen får man naturligtvis endast ta med tal, som barnen känna igen och utan vidare kunna genomskåda.

Eller för rektanglar:

| Rektangelns | | | |
|---|---|---|---|
| längd | bredd | yta | omkrets |
| | 7 m | | 40 m |
| 8 m | | 104 m² | |
| | o. s. v. | | |

Liknande tabeller kunna ställas upp för kuber och andra parallellepipeder och för övrigt för de geometriska storheterna i allmänhet.

När man kommer till cirkeln, skall det alltid multipliceras eller divideras med 3,14. Det uppmuntrar barnen mycket i deras arbete, om man ger dem anvisning på lämpliga genvägar vid sådana ofta återkommande räkneoperationer. Man sätter upp en tabell över mångfalderna av talet till och med 10 sålunda:

$$1 \cdot 3{,}14 = 3{,}14$$
$$2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$$
$$3 \cdot 3{,}14 = 9{,}42 \text{ o. s. v.}$$

Tabellen åstadkommes lättast, om man adderar ihop talen. Skriv 3,14 i underkanten på en liten papperslapp:

| |
|---|
| 3,14 |

Denna lapp lägges ovanför den sist erhållna summan. När man fått t. ex. 9,42, lägger man lappen ovanför denna summa, adderar och skriver den nya summan under:

| |
|---|
| 3,14 |

9,42
12,56

Sedan flyttar man ner lappen ett steg och fortsätter adderingen med 12,56 o. s. v. undan för undan, tills man kommer till 31,40. Om man får denna summa, så har man där kontroll på att tabellen är riktigt räknad hela vägen.

Sådana tabeller kunna göras upp även i andra sammanhang, konkursutdelningar, vinstutdelningar i bolag o. s. v.

Procenträkningen är ett moment i undervisningen, som är synnerligen tacksamt för behandling som huvudräkningsövningar. Man kan göra upp långa serier: Vad är 5 % av 6 kr? 10 %? 15 %? 20 %? 25 %? o. s. v. Vad man inte bör glömma är de stora procenttalen, 50 %, 75 %, 125 %, 150 %, 200 % o. s. v. Även de behöva övas, för att man skall känna sig fullt hemmastadd, när man möter dem i praktiska livet.

Särskild uppmärksamhet förtjäna uttrycken »% mer än» och »% mindre än». En vara kostar 30 % mera än en annan, en obligation säljes till 8 % mindre än parivärdet o. s. v. Övningarna kunna göras mera åskådliga, om man förbereder dem med motsvarande uppgifter, uttryckta i allmänna bråk: $^1/_4$ mer än, $^1/_5$ mindre än o. s. v. Dessa uttryck kunna sedan översättas till procent.

En liten detalj härvidlag, som kanske behöver observeras särskilt, är att %-talet ändras, när man vänder på det. 25 % mer än 160 kr är 200 kr, men 25 % mindre än 200 kr är 150 kr. Barn tycka i början, att detta är onaturligt, och man behöver ge dem åtskilliga exempel, innan de känna sig fullt övertygade och genomskåda sammanhanget.

Ett särskilt kapitel är tidsberäkningarna. De voro mycket aktuella på den tiden, då det var brukligt att i dödsannonser sätta ut den dödes ålder i år, månader och dagar. Sedan man nu frångått denna vana och uppger åldern mera summariskt eller också med angivande av födelsedatum, ha uppgifterna inte längre samma praktiska betydelse. Men de äro en god tillämpningsuppgift på subtraktion, och för övrigt har det sitt nöje för ett barn att få räkna ut sin egen ålder så precis som möjligt. Det skadar därför inte att någon gång ta fram sådana uppgifter till behandling.

Det är anmärkningsvärt i detta sammanhang, att de använda beräkningsmetoderna aldrig givit pålitliga resultat. Ibland har det blivit rätt, ibland galet, beroende på »lånet» av månad, när inte dagantalet räckt till. Om en person är född den 27 februari och dör den 2 augusti, så brukar uppgiften tecknas sålunda (varvid siffrorna ange datum resp. månadens ordningsnummer):

$$\begin{array}{rcrcr} & & 8 & — & 2 \\ — & & 2 & — & 27 \\ \hline \end{array}$$

För lånet anvisas olika tillvägagångssätt. Antingen skall man räkna med en teoretisk månad med 30 dagar eller också med den föregående månadens verkliga dagantal, i detta fall juli månad = 31 dagar. Resultatet blir 5 månader och 5 resp. 6 dagar. Om man tänker efter, så är det jämnt 5 månader från den 2 mars till den 2 augusti. Och från den 27 februari till den 2 mars är det endast 3 dagar. Det rätta svaret är därför 5 månader och 3 dagar. Detta riktiga svar erhålles, om man lånar från den månad, som angives i subtrahenden, i detta fall februari med 28 dagar, 28 + 2 = 30; 30 — 27 = 3.

I mån av tid kan man fylla ut räknebokens uppgifter med andra. Material kan bl. a. hämtas från Sveriges kommunikationer. Barnen böra då helst ha var sitt lika exemplar, och gamla sådana brukar man kunna få köpa för billigt pris. Man kan beräkna avståndet mellan olika stationer, tågtider och biljettpriser.

Vid all räkning är det viktigt, att barnen tillhållas att inte släppa en uppgift, förrän de övertygat sig om att den är rätt löst. Olika kontrollmetoder ha försökts och rekommenderats. Bäst blir det nog i längden att räkna talet minst två gånger. Får man då samma resultat, så är det bra. Annars får man fortsätta räkningen, tills man får samma värde två gånger å rad. De räknesätt, som innebära omvändningar av addition och multiplikation, nämligen subtraktion och division, kontrolleras genom att vändas om igen och återföras till sina ursprungliga räknesätt. En addition räknas alltid i båda riktningarna, neråt och uppåt.

## INNEHÅLL.