# LÄROBOK

I

# ARITMETIK

FÖR

## SKOLANS LÄGRE STADIUM

AF

J. OTTERSTRÖM.

STOCKHOLM,
TRYCKT HOS A. L. NORMANS BOKTRYCKERI-AKTIEBOLAG,
1880.

# Förord.

---

Detta lilla arbete vill vara en lärobok i Aritmetik för skolans lägre stadium och till ledning för de lärare och lärarinnor, som icke fått göra bekantskap med Algebrans metod, som här följes.

En matematiker, som gifvit skolan en utmärkt väl ordnad exempelsamling för öfning efter nämnda metod, men utan lärobok, säger i *sitt* förord: »en lärobok i aritmetikens elementer, som sökte vara så tydlig att den skulle begripas af *alla*, skulle helt säkert afskräcka *alla*». Detta må vara rätt sagdt. Men det måtte väl äfven här finnas ett *lagom* att söka, ty med än större skäl kan här tillämpas hvad en annan vetenskapsman sagt om sin vetenskaps elementer: »en professor kan med skelettet framför sig grundligt framställa menniskokroppens byggnad, men för studentens sjelfstudium är skelettet icke nog.»

I denna lilla lärobok äro endast de allranödigaste exemplen gifna, dels emedan skolan har så många och rika exempelsamlingar i tryck, dels ock emedan hvarje lärare och lärarinna med praktisk duglighet kan sjelf göra sig exempel i oändlighet efter gifna mönster.

Den polemik mot den häfdvunna »räknekonsten», som i boken framskymtar, kan ej stöta någon, som sjelf vet hvad han har af algebrans metod, och öfrige hafva rätt att deröfver döma, när de tillegnat sig denna metod och följt den konseqvent vid barns undervisning.

Yrkandet på denna metods användning från och med början i småskolan skulle vara ensidigt, om ej hvarje erfaren barnalärare visste, att vårt intelligenta folks barn, med behöfligt *minne* för *benämningar*, äfven hafva *förstånd* för *sak*, *sakförhållande* samt för deraf beroende *operationer*, för hvilka axiomer ligga till grund.

Att så enkelt och utan all »konst», så snabbt, så säkert och varaktigt leda barnens förståndsutveckling till förmågan af aritmetikens praktiska användning, som man har det i sin makt genom algebrans metod, förmår ej den snällaste räknekonstnär.

Han kan ju ej bland annat undgå att på sin väg ställa sina lärjungar rådlöse och hjelplöse framför många ganska simpla praktiska frågor, sedan de i tio år svettats ensamt på den vägen.

Att framställningen i boken här och der fått formen af lek med mina käre »pysar», har jag alltid funnit vara för dem uppiggande.

Varola i April 1880.

*Författaren.*

---

# Inledning.

*Aritmetik* är den vetenskap, som för gifna ändamål behandlar *tal*.

1. *Tal* kallas det, som uttrycker *storleken*, *mängden*, i allmänhet *värdet;* kallas ock *storhet* (qvantitet).
2. Talet kallas *benämndt* (konkret), då värdet uppgifves fästadt vid visst föremål, t. ex. ett *bord*, två *stolar*, tre *bänkar* o. s. v.
3. Talet kallas *obenämndt* (abstrakt), då värdet tänkes i och för sig, utan att vara fästadt vid något visst föremål, t. ex. *ett*, *två*, *tre*, *fyra* o. s. v.
4. Talet åskådliggöres medelst *siffrorna* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 äfvensom med 0 (noll) och en bokstaf, här $x$, med eller utan tecken.
5. Talet kallas *tecknadt*, då det är uttryckt i sina beståndsdelar medelst tecken, hvilka egentligen äro $+$, $-$, $\times$, ——, t. e. $3 + 2$, $3 - 2$, $3 \times 2$, $\frac{3}{2}$, uttaladt: tre, *två mer;* tre, *två mindre;* tre, *gånger två mer;* tre, *gånger två mindre;* eller tre *lagdt till* två, tre *minskadt med* två, tre *gånger* två, tre *deladt genom* två.

Tecknet $+$ uttalas ock »*plus*» (mer), tecknet $-$ uttalas ock »*minus*» (mindre). Det tecknade talet kallas äfven *sammansatt.* Uttrycket för det tecknade talet formuleras på flera andra sätt. Men som vi läsa och skrifva från venster åt höger, så bör man tala och fråga så, att nybörjaren utan bryderi kan skrifva och teckna såsom talas och frågas. Under fortsättningen får barnet steg för steg lära förstå att samma sakförhållande kan annorlunda formuleras t. ex. »två *från* tre», »två uti tre» eller »hälften af tre» o. s. v. så att barnet utan misstag kan skrifva och teckna »ändavändt» mot lärarens talande och frågande.

6. Talet kallas *utfördt* (reduceradt till mindre form och enklare uttryck), då så många tecken som möjligt bortfallit, t. ex. $2 + 3$ detsamma som 5, $2 \times 3$ detsamma som 6, $\frac{8}{4}$ detsamma som 2 o. s. v.

Då alla tecken bortfallit, kallas talet äfven *enkelt*. Men allmänna öfverenskommelsen att utlemna ett tecken, der det skulle stå, gör talet icke enkelt, t. ex. $1\frac{1}{2}$, som är $1 + \frac{1}{2}$, der både det hela och dess ena del äro *sammansatta* tal.

7. Talet kallas *bekant*, då det är till värdet kändt i dess helhet eller i alla dess beståndsdelar. Det uttryckes genom *siffror*, eller *siffror och noll*, med eller utan tecken, t. ex. 9, $7 + 5$, $10 - 2$, $\frac{8}{4} + 3$, o. s. v.

8. Talet kallas *obekant*, då man ej känner dess värde, som betecknas med $x$. Men äfven der $x$ genom tecken är förknippadt med bekanta tal, är talet i sin helhet obekant, emedan man ju icke kan känna det hela, då man ej känner alla dess beståndsdelar, t. ex. $x + 2$, $x - 2$, $2 - x$, $2 \times x$ o. s. v. Der åter $x$ är ensamt, lika till värdet med något bekant, der föreställes det blott såsom obekant, men är till sitt värde bekant genom likheten med det bekanta.

9. Likheten mellan tal tecknas med $=$, som derför kallas *likhetstecknet*, t. ex. $2 + 5 = 7 = 4 + 3 = 9 - 2 = 2 \times 3 + 1$ o. s. v. $x = 7 - 5 = 2$ o. s. v.

*Detta likhetsuttryck kallas* **Eqvation.**

10. Talet kallas *jakadt* (positivt) då det bidrager till det helas *förökning* t. ex. 5 kronors *inkomst*, *förtjenst*, *fordran* o. s. v. Det utmärkes med tecknet $+$ framför talet, hvilket tecken dock ej utsättes, då det jakade talet står ensamt eller då det börjar ett tecknadt tal, t. ex. 5, $4 - 2$, $4 + 2$, o. s. v.

11. Talet kallas *nekadt* (negativt), då det bidrager till det helas *förminskning*, t. ex. 5 kronors *utgift*, *förlust*, *skuld* o. s. v. Det utmärkes *alltid* med tecknet $-$ framför sig, t. ex. $-5$, $4 - 2$, $-2 + 4$, o. s. v.

När man, såsom här, har ett af jakadt och nekadt sammansatt tal, låter man gerna det jakade gå förut, hellre $4 - 2$ än $-2 + 4$, ehuru det i saken gör detsamma, ty fyra kronors vinst och två kronors förlust, eller två kronors förlust och fyra kronors vinst kommer ju i resultatet på ett ut.

Om man från 0 (intet) fortgående åt venster ökar med 1, får man
» » » 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0, allt *jakadt.*
Man ser att + 4 är 1 mindre än + 5, + 3 ett mindre än + 4, + 2 ett mindre än + 3, + 1 ett mindre än + 2 och 0 ett mindre än + 1.

Går man nu på samma sätt från 0 åt höger, får man allt *nekadt*

0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 » » »

då — 1 är 1 mindre än 0, — 2 ett mindre än — 1 (således 2 mindre än 0), — 3 ett mindre än — 2 (således 3 mindre än 0) o. s. v.

12. Ett tecknadt tal kallas en *tecknad summa* (2 + 2), en *tecknad rest* (6 — 2) en *tecknad produkt* (2 × 2) och en *tecknad qvot* ($\frac{8}{2}$).

Alla här tecknade tal gifva, om de utföras, samma tal 4, som då kan kallas en utförd *samma, rest, produkt* eller *qvot,* med afseende på dess *uppkomst* af hvad tecknadt var.

13. Summans beståndsdelar kallas *addender* (som sammanläggas); restens beståndsdelar kallas *minuend* (som minskas) och *subtrahend* (som fråndrages); produktens beståndsdelar kallas *faktorer* (produktens *görare*) och qvotens beståndsdelar kallas *dividend* (som delas) och *divisor* (delaren).

Den tecknade qvoten kallas äfven »*bråk*», då dividenden får namn af »*täljare*» och divisorn kallas »*nämnare*», men olika *benämningar* på samma *sak,* förändra ej sakens natur, eller talens inbördes förhållande till hvarandra.

14. Bekanta tal, i sin sammansättning såsom enheter af högre och lägre ordning, kunna utan teckan uttryckas medelst de nio siffrorna och 0 i enlighet med hvad man kallar *tiotalsordningen* (decimalsystemet). Enligt denna ordning få siffrorna, omedelbart ställda intill hvarandra, ett tiofaldigt högre värde i nästa rum åt venster och följaktligen ett tiofaldigt mindre värde i nästa rum åt höger. Om således talet 1, uttryckande grundenheten, får framför sig åt venster 1, såsom uti 11, så uttrycker detta nya 1 en ny enhet tio gånger större än den förra och kallas derför en *tia*, ett *tiotal*, eller *tio*. Om denna nya enhet får framför sig åt samma håll 1, så får den värdet af tio gånger tio, som nu kallas 1 hundratal eller

blott *hundra*. Fortsättes så, får man 10 gånger hundra, som kallas *tusen*, tiotusen, hundratusen, tusen gånger tusen, som kallas million o. s. v. billion, trillion o. s. v.

Går man åter från grundenheten åt höger, såsom uti 1,1, så får man en ny enhet, tio gånger mindre än grundenheten eller en tiondedel deraf. Fortgår man vidare åt samma håll, får man en tiondedel af tiondedelen, d. v. s. en hundradedel af grundenheten o. s. v. Och så uppkommer hvad man kallar »decimalbråk», som ju är en qvot, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ o. s. v. fastän med de hela inrymd i decimalsystemet.

En tia och en grundenhet har man kallat *elfva* (11), en tia och två enheter *tolf* (12) o. s. v. *tretton* (13), *fjorton* (14), *femton* (15), *sexton* (16), *sjutton* (17), *aderton* (18), *nitton* (19).

En tia tecknas 10, 2 tior kallas *tjugo* (20), 3 tior *trettio* (30), 4 tior *fyrtio* (40), 5 tior *femtio* (50), 6 tior *sextio* (60), 7 tior *sjuttio* (70), 8 tior *åttio* (80), 9 tior *nittio* (90), 10 tior *hundra* (100) o. s. v.

För att lätta öfversigten indelas decimalkedjan i »klasser», tre sifferrum i hvarje, medelst »komma», och skrifvas de »decimaler», som uttrycka tiondedelen, hundradedelen o. s. v. af grundenheten, något mindre, och utmärkes millionen med *en* och billionen med *två* punkter o. s. v. t. ex.

1··,111,111·,111,111,111,111·, som utsäges *en billion, etthundra elfva tusen etthundra elfva millioner, etthundra elfva tusen etthundra elfva hela, ett hundra elfva tusen etthundra elfva milliondelar.*

Klart är, att hvarje annan siffra, som uppgifves gällande för det eller det rummet, måste i sitt rum skrifvas, samt att de rum, för hvilka ingen siffra uppgifves, måste med 0 fyllas, dels för att utmärka detta, dels för att de gällande siffrorna skola kunna intaga sina behöriga rum, t. ex. *sexhundra sjuttio billioner, fyrahundrasex tusen trettiosju millioner, tjugotusen sju* skrifves 670··,406,037·,020,007.

15. Vid opererandet med tal har man fyra *sätt*, hvarpå man har att gå till väga, antingen medelst *addition*

(sammanläggning), eller *subtraktion* (fråndragning), eller *multiplikation* (mångfaldigande), eller *division* (delning). Och som tecknen detta anvisa, kallas de äfven *additions-*, *subtraktions-*, *multiplikations-* och *divisionstecknet*.

---

På här uppgifna hufvudgrunder låta vi Aritmetiken utgöra två delar:

## Förra Delen.

*Läran om bekanta tals tecknande och utförande, eller hvad man kallat »qvatuor species i hela tal, sorter och bråk».*

## Sednare Delen.

*Eqvationsläran, eller läran om att ur sin förknippning med bekanta tal i en aritmetisk fråga utlösa det obekanta till likhet med ett bekant tal, hvilket utlösande i egentlig mening kallas problemlösning (eqvationslösning).*

---

# Förra Delen.

## Läran om bekanta tals tecknande och utförande till möjligast enkla form

(»qvatuor species i hela tal, sorter och bråk»).

I hvarje förnuftigt och tydligt framstäld aritmetisk fråga ligger såsom grundsanning, att *något är lika med något*, eller hvad man kallar en *Eqvation*. Med att rätt uppfatta och uttrycka denna grundsanning ligger genom tecknens anvisning vägen öppen och klar för de förståndets operationer, som man vidare kan hafva att utföra med tillämpning af »solklara» axiomer.

När du, min k. Petter Pys, förmår rätt uppfatta och uttrycka hvad jag talat och frågat och när du dermed fått åskådliggjordt, att det, som efterfrågats *(x)*, är lika med något bekant, då har du med detsamma frågan löst. Men som det bekanta talet likväl kan hafva en så invecklad form, att det för dig kan vara svårt att i denna form fatta talets totalvärde, så har du att bringa det till ett för dig enklare och lättfattligare uttryck. Det är nu detta som vi kalla *tecknade tals utförande* och hvarmed vi hafva att sysselsätta oss inom omfånget för »qvatuor species».

### **Addition** och **Subtraktion**, samtidigt öfvade.

För dessa räknesätt ligga följande hufvudsanningar till grund för ditt förstånds operationer:

1. Genom *addition* får du *summan* af gifna *addender*. Summan lika med addenderna tillsammans t. ex. $3 + 2 = 5$.

2. Genom *subtraktion* får du en *addend* af den gifna *summan* minskad med den gifna *addenden.* En addend lika med summan minskad med den andra addenden, t. ex. $5 - 3 = 2$, $5 - 2 = 3$.
3. Genom *addition* göres ett tal så *mycket* större, som det tal gäller, hvilket dertill *adderas*, och detta så mycket större talet är *summan*, t. ex. $3 + 2 = 5$; summan 5 *tre mer* än 2, och *två mer* än 3.
4. Genom *subtraktion* göres ett tal så *mycket* mindre, som det tal gäller, hvilket derifrån *subtraheras*, och detta så mycket mindre talet är *resten*, t. ex. $5 - 3 = 2$; $5 - 2 = 3$; resten 2 *tre mindre* än 5 och resten 3 *två mindre* än 5.
5. Vid dessa hvarandra motsatta operationer, då man i det ena fallet söker *summan* och i andra fallet en dess *addend*, kallar man i sednare fallet summan för *minuend* och summans addender för *subtrahend* och *rest.* Men du förstår, att här blott är olika *benämningar* för samma tal, olika *benämda* med afseende på det olika sätt, hvarpå man opererar med dem.

Det kan då icke vara dig svårt att veta huru du får *minuenden* (summan), då *subtrahenden* och *resten* (addenderna) äro gifna, eller huru du får *subtrahenden* (den ena addenden), då *minuenden* (summan) och *resten* (den andra addenden) äro gifna.

Ex. 1. Om Anders har 7 öre i sin ficka, huru många öre har då Carl i sin?

Pysen såg nu undrande på mig och sade: »det vill jag icke gissa». Ja, Petter, frågan var orimlig, emedan i den icke låg någon eqvation, och i aritmetiken finnes intet rum för »gissning», utan allt visst och säkert gifvet med den förnuftigt och tydligt framställda frågan.

Ex. 2. På småskolans bord lades fram 6 äplen och 5 äplen med frågan: huru många äro de tillsammans? Petter tecknade på taflan $x = 6 + 5$.

Men nu fingo pysarne A, B, C och D, hvilka börjat räkning på »kulramen», utföra det tecknade med att räkna äplena på bordet. A sade att det var »sju och fyra», B »åtta och tre», C »nio och två», D »tio och ett» äple tillsammans, men längre i utförande kunde de ej komma. Alla fyra fingo dock välförtjent beröm för sin räknefärdighet, emedan de blott en timma dagen förut fått öfva sig inom första tiotalet. A hade hunnit i *minnet* inpregla *benämningarne* för de utförda summorna till och med »sju», B till och med »åtta», C till och med »nio» och D till och med »tio», men äfven han hade ännu ej hört nämnas summan »elfva». Alla fyra visste dock att säga huru många äplena voro. Tog jag bort ett äple från högen, så sade de mig huru många voro qvar; lade jag till ett eller flera äplen, så sade de huru många äplena voro, alldeles så som den gamla gumman redogör för sin skatt, då hon säger, att hon har tre femtioöringar, fyra tjugofemöringar, sju tioöringar och två femöringar. Hon vet hvad hon har, ehuru hon ej lärt att utföra det till enklare uttryck. Du finner således, Petter, att du ej bör anse $6 + 5$ för ett obekant tal eller kalla det så. För A, B, C och D var min fråga *förtidig*, för dig var den *oegentlig*, ty dig hade jag egentligen bort fråga: hvad enklare uttryck kan du gifva åt den bekanta summan $6 + 5$?

Ex. 3. Anders uppfiskade 15 ålar, men 9 af dem rände sin kos; huru många hade han qvar?

$$x = 15 - 9 =$$

Ex. 4. Anders sålde 6 af sina dufvor och hade ändå 7 qvar. Huru många hade han från början?

$$x = 6 + 7 =$$

(6 subtrahend, 7 rest, $6 + 7$ minuend.)

Ex. 5. Anders hade 7 dufvor och 5 ankor; huru många tillsammans?

$$x = 7 + 5 = 12.$$

Månne 12 dufvor? Månne 12 ankor? Nej! De två olika *benämnda* talen kunde ej utföras förrän du tänkte dem *likbenämnda*, såsom *foglar*, *fjäderfän*, *djur*, o. s. v. som du kunde kalla dem alla 12, såsom 1 tia och 1 enhet ej blir $1 + 1 = 2$ tior eller 2 enheter, hvarför du »förvandlar» 1 tia till 10 enheter, då du får $10 + 1 = 11$ enheter.

När man således har olika benämda tal att addera eller subtrahera, kan ej utförandet ske, utan att man »förvandlar» det ena till lika benämning med det andra, eller bägge till en benämning gemensam för begge, t. ex. 1 krona + 10 öre = 100 öre + 10 öre = 110 öre; 7 fiskar + 8 kråkor = 15 *djur*.

Ex. 6. a) Anders hade 28 öre och Emil 15 öre mindre än Anders; huru många öre hade Emil?

$$x = 28 - 15 =$$

b) A hade 37 kronor och B hade 22 kronor mer än A; huru många kronor hade B?

$$x = 37 + 22 =$$

Ex. 7. Af sina 16 äplen åt Anders upp 7; huru många hade han då?

$$x = 16 - 7 =$$

De äplen, som A åt upp, bidrogo ju till äplehögens *förminskning* och voro således *nekade*, hvarför de måste läggas till de 16 *jakade* med tecknet — framför sig. Samma 7 äplen voro förut hans egendom bland de $16 = 9 + 7$ och hade derför + framför sig såsom bidragande till att han med de 9 hade 16. I exemplet ser du det axiomet: *att tillägga ett nekadt är detsamma som att fråntaga ett lika stort jakadt.*

Ex. 8. Anders har 6, Carl 7, Emil 5, Frans 8, Gustaf 9 och Ivar 4 öre; huru många tillsammans?

$$x = 6 + 7 + 5 + 9 + 4.$$

Här ser du sex addender, men du kan utmärka dem såsom två, eller tre, eller fyra, eller fem. Detta utmärkes derigenom att du »klammar» om de tal, som du vill betrakta såsom *ett*. Du får då

$(6 + 7 + 5) + (8 + 9 + 4)$ en tecknad summa af två tecknade summor.

$(6 + 7) + (5 + 8) + (9 + 4)$ en tecknad summa af tre tecknade summor.

$(6 + 7) + (5 + 8) + 9 + 4$ en tecknad summa af två tecknade summor och två enkla tal.

$(6 + 7) + 5 + 8 + 9 + 4$ en tecknad summa af en tecknad summa och fyra enkla tal.

»Klamme»n spelar hos oss en vigtig rol och räknas till aritmetikens behöfliga tecken, ehuru den i detta exempel var mindre behöflig.

Ex. 9. Carl hade två dufhus. I det ena hade han blott 3 *dufhanar* och 2 *dufhonor;* i det andra hade han blott 4 *hanar* och 5 *honor*, sedan katten knipit från det förra dufhuset 6 *hanar* och 7 *honor*, samt från det sednare 8 *hanar* och 9 *honor*.

a) Huru många *dufvor* hade Carl qvar i det förra dufhuset? $x = 3 + 2$.

b) Huru många *dufvor* hade katten knipit från det dufhuset? $x = 6 + 7$.

c) Huru många *dufvor* hade Carl i det huset, innan katten knipit någon? $x = (3 + 2) + (6 + 7)$.

d) Huru många *dufvor* hade C qvar i det andra dufhuset? $x = 4 + 5$.

e) Huru många *dufvor* hade katten knipit från det dufhuset? $x = 8 + 9$.
f) Huru många *dufvor* hade C i det huset, innan katten knipit någon? $x = (4 + 5) + (8 + 9)$.
g) Huru många *dufvor* tillsammans hade C qvar i begge dufhusen? $x = (3 + 2) + (4 + 5)$.
h) Huru många *dufvor* tillsammans hade katten knipit från begge dufhusen? $x = (6 + 7) + (8 + 9)$.
i) Huru många *dufvor* tillsammans i begge dufhusen hade C, innan katten hade knipit någon? $x = (3 + 2) + (6 + 7) + (4 + 5) + (8 + 9)$.
k) Huru många *dufhanar* tillsammans hade C qvar i begge dufhusen? $x = 3 + 4$.
l) Huru många *dufhanar* tillsammans hade katten knipit i begge husen? $x = 6 + 8$.
m) Huru många *dufhanar* tillsammans i begge husen hade C, innan katten knipit någon? $x = (3 + 4) + (6 + 8)$.
n) Huru många *dufhonor* tillsammans hade C qvar i begge dufhusen? $x = 2 + 5$.
o) Huru många *dufhonor* tillsammans i begge husen hade katten knipit? $x = 7 + 9$.
p) Huru många *dufhonor* tillsammans hade C, innan katten knipit någon? $x = (2 + 5) + (7 + 9)$.
q) Huru många flera *dufvor* voro qvar i det sednare, än i det förra dufhuset? $x = (4 + 5) - (3 + 2)$.
r) Huru många *flera dufvor* knep katten från det sednare, än från det förra dufhuset? $x = (8 + 9) - (6 + 7)$.
s) Huru många *färre dufvor* hade C qvar, än de som katten hade knipit? $x = (6 + 7 + 8 + 9) - (3 + 2 + 4 + 5)$.
t) Huru många *dufhanar flera* hade katten tagit, än de, som C hade qvar? I det förra dufhuset? I det sednare? I begge husen tillsammans?
u) Huru många *färre dufhonor* hade C qvar, än de, som katten hade tagit? I det förra dufhuset? I det sednare? I begge?
v) Huru många *flera* eller *färre* voro *hanarne*, än

*honorna*, i det förra dufhuset? innan katten hade huserat? och sedan katten hade gjort det?

Af detta exempel ser du huru ett kombineradt sakförhållande gifver anledning till en massa speciella frågor för öfning. Men de kunna ju varieras i oändlighet blott genom att förändra de abstrakta talen.

Konsten att göra frågor är således ej stor, men större den praktiska förmågan att göra frågor, som gå i ordning steg för steg för förståndets gradvisa utveckling, så att allt hinner »smältas», utan att barnet utträkas med ett och samma »räknesätt» i månader, ja hela terminen.

Vid frågornas tecknande fästes barnets uppmärksamhet på klammens inverkan. I frågan *q)* hade kunnat tecknas $x = 4 + 5 - 3 - 2$, men tecknades $x = (4 + 5) - (3 + 2)$, der 3 och 2 inom klammen hafva $+$ men der $-$ framför klammen säger att det hela derinom utan klam har $-$. Klart är, att »facit» blir detsamma antingen man minskar $4 + 5 = 9$ först med 2 och derefter med 3 eller man minskar på en gång med deras summa 5. Man minskar ock en summa dermed att man minskar dess addend, hvarför man i $4 + 5$ kunde hafva minskat 4 med 2, och 5 med 3, då man hade fått samma facit $2 + 2 = 4$.

De dufvor, som katten knep, har du fått behandla såsom hade de varit *jakade*, ehuru de för Carl verkligen voro *nekade*. Men du hade lika gerna kunnat taga dem såsom *nekade* och beteckna dem med $-$ framför sig, i hvilket fall du äfven då hade fått samma facit, men med $-$ framför sig, då facit skulle blifva de dufvor, som katten knipit.

Ex. 10. Emil sålde 20 af sina kaniner och hade 30 qvar; huru många hade han före försäljningen? $x = 20 + 30 =$

Ex. 11. A. har 47 öre och B. har 32, huru många öre har B. mindre än A.?

Resten, som uppkommer, då det mindre talet drages från det större, uttrycker *skilnaden* emellan talen, d. v. s. huru mycket det större är större än det mindre, eller huru mycket det mindre är mindre än det större. Detta »mer» kallas ock »öfverskott» och detta »mindre» kallas »brist».

Då talen äro det ena *jakadt* och det andra *nekadt*, säger resten tillika att öfverskottet är jakadt, om det större talet är jakadt, men nekadt, om det större talet är nekadt, t. ex. $5 - 3 = +2$; $3 - 5 = -2$.

Ex. 12. A eger 46 kronor, men är bortskyldig 58 kronor; hvad har han, sedan han med hvad han eger gjort afbetalning på sin skuld? $x = 46 - 58 = -12$.

Skilnaden mellan förmögenheten och skulden är ju skuld, emedan skulden var större, än förmögenheten.

När du, min käre Petter Pys, väl förstår tiotalsordningen och fått färdighet i att operera med ensiffriga tal, är det dig likgiltigt, huru mångsiffriga talen äro, som du får att addera eller subtrahera. Du opererar i alla fall endast med en och en siffra.

Af tiotalsordningen förstår du, att de tior, som vid additionen fås af enheterna, skola sammanräknas med tiorna, samt att vid subtraktionen en näst högre enhet i minuenden måste »lånas», reduceras till näst lägre enheter och med dem sammanföras, om en större siffra är i subtrahendens än som var i minuendens samma rum; vidare att om 0 är i det rum, hvarifrån skulle »lånas», lånet måste tagas från den gällande siffra, som först kan träffas, och lånet gå från rum till nästa rum undan för undan, så långt som behöfs. Till ditt ögnamärke må du få signera det rum, hvarifrån lånet tagits, för att erinra dig både hvad som lånats och hvad som finnes qvar i det rummet. »Konsten» är ingen, då förståndet får syn på *saken* och sakförhållandet.

Ex. 13. Patron A. har ett hus värdt 5,672 kronor, lösörebo i värde 895 kronor och en säker kontant fordran hos B. af 3,431 kronor; huru stor är hans förmögenhet?

$$x = 5{,}672 + 895 + 3431 =$$

Nu först torde »uppställning» af talen under hvarandra vara användbar, för att du lättare må hafva sigte på hvar du har samma sorter att addera.

Ex. 14. Samme patron A har dock en skuld till C på 2,700 kronor, har derjemte förlorat på en affär 7,908 kronor och måste infria sin borgen för den utfattige D på 5,000 kronor; huru mycket utgör detta hans »minus»? $x = -2{,}700 - 7{,}908 - 5{,}000 = -15{,}608$.

Ex. 15. När nu samme patron A nödgas »realisera» och betala sina skulder så långt hans förmögenhet (Ex. 13) räcker; hvad har han då?

$$x = (5{,}672 + 895 + 3{,}431) - (2{,}700 + 7{,}908 + 5{,}000).$$

Ex. 16. För byggandet af en jernväg var anslaget 5,600,082 kronor, men vid arbetets utförande hushållades så, att 325,300 kronor inbesparades; hvad kostade då jernvägen? $x = 5{,}600{,}082 - 325{,}300 =$

Ex. 17. A och B idka bolagsrörelse. A. har i bolaget insatt 5,890 kronor och B 16,786. Huru stor är skilnaden mellan begges andelar i bolaget? Huru mycket har A *mindre* än B. deri? Huru mycket har B *mer* än A deri? Hvarmed öfverskjutes A:s andel af B:s? Hvad brister i A:s andel för att vara lika med B:s?

Fem frågor i olika form, men månne ock fem serskilda eqvationer och uträkningar?

Ex. 18. Anders reste till staden med 9 kronor på fickan och en gris i kärran. För grisen fick han 7 kronor. Derefter köpte han sig en mössa för 4 kr. och kaffe och socker åt »mor» för 3 kronor; huru mycket hade han då hem af de penningar han hade med sig bort? $x = (9 + 7) - (4 + 3) = 9$.

Här ser du det axiomet:
*ett tal blir till* sitt värde *oförändradt, om det ökas och minskas med till värdet samma tal.*

Ex. 19. I en gemensam hönsgård hade Anna 7 hönor och 1 tupp, Emma 8 hönor och 2 tuppar, Lina 9 hönor och 3 tuppar och Nina 6 hönor och 2 tuppar. Men så kom den listige Mickel in i hönsgården och knep från Anna 3 hönor, från Emma 4 hönor och 1 tupp, från Lina 5 hönor och 2 tuppar och från Nina 4 hönor.

Nu kan du, käre Petter, öfva dig med att ur detta sakförhållande ställa frågor för addition och subtraktion till dina yngre kamrater på första bänken! (se Ex. 9) ty det är en väl så god och behöflig tankeöfning i att fråga som i att svara rätt.

Ex. 20. A hade 800 kronors förmögenhet, men tillika en skuld på 600 kronor. Då minskade hans fader hans skuld med 400 kronor; huru stor var sonens verkliga förmögenhet före och efter fadrens tillgörande?

Vid öfversigten af sonens »Credit» och »Debet», egde han $+800 - 600 = +200$ kronor. Nu *minskade* fadren hans *skuld* med 400 kronor, d. v. s. han *drog ifrån* honom $-400$ kronor. Då hade sonen sina $(800 - 600) - (-400)$, ty tecknet $-$ framför 400 inom klammen säger att de 400 kronorna voro skuld och $-$ framför klammen säger att den *skulden frândrogs*, eller att hvad A hade, minskades med den *skulden.* Men nu skedde detta dermed att fadren skänkte sonen 400 kronor; alltså hade sonen nu $(800 - 600) + 400$ kronor $= +600$. Vi se således att $(800 - 600) - (-400)$ är detsamma som

(800 — 600) + 400. Vi se således här att det att *lägga* en skuld (— 600) till en *förmögenhet* (800) är detsamma som att frândraga en *förmögenhet* lika stor, ty 800 — 600 = 200; hvaremot det att *frândraga* en skuld (— 400) är detsamma som att *tillägga* en *förmögenhet* lika stor, ty (800 — 600) + 400 = + 600. Nu är förmögenhet *jakadt* och skuld *nekadt*; alltså hafva vi den allmänna sanningen: *att frândraga ett jakadt är detsamma som att tillägga ett lika stort nekadt, och att frândraga ett nekadt är detsamma som att tillägga ett lika stort jakadt.*

Ex. 21. Alla »sorttal», hvilkas indelning grundas på decimalsystemet, kunna genast i summa skrifvas utan tecken och såsom hela tal behandlas.

a) Hvad är summan af 7 stycken tiokronesedlar och 5 stycken enkronesedlar? x = 75 kronor.

b) Hvad är skilnaden mellan dem? x = 70 — 5 =

c) Hvad är summan af 15 tiokronestycken i guld och 8 enkronestycken i silfver? x = 158 kronor.

d) Hvad är skilnaden mellan dem? x = 150 — 8 =

e) Huru mycket tillsammans 36 sedlar à 100 kronor stycket och 9 sedlar à 10 kronor stycket, samt en sedel à 5 kronor? x = 36,9,5 kronor.

f) Huru mycket tillsammans 25 sedlar à 1000 kronor, 2 sedlar à 100 kronor, 7 sedlar à 10 kronor och 8 enkronestycken i silfver? x = 25,2,7,8.

g) *Huru mycket mer* äro 19 sedlar à 1000 kronor stycket och 98 sedlar à 10 kronor stycket, än 125 sedlar à 10 kronor och 9 enkronestycken? x = 19,98,0 — 125,9 =

Endast då kan summan ej utan tecknande eller »hufvudräkning» genast skrifvas, när flera tal af samma »sort» äro, hvilkas summa ej inrymmes i samma decimalkedjans rum, t. ex. hvad är summan af 3 sedlar à 100 kronor, 8 sedlar à 10 kronor och 9 sedlar à 10 kronor, der 8 och 9 tillsamman ej få rum i tiotalsrummet, hvarför måste tecknas 380 + 90 eller 390 + 80, eller fullt i »hufvudet» utföras = 470.

h) A hade två sedelbundtar, den ene innehållande 27 sedlar à 100 kronor stycket och 9 sedlar à 10 kr. st.; den andre innehållande 120 sedlar à 10 kr. st. och 1 sedel à 5 kronor. Nu köpte han hästar och vagn och selar för 3,050 kronor. Kunde han betala inköpet med hvad han hade i »kontanter»?

Sedan han gifvit ifrån sig den ene sedelbundten såsom betalning, huru mycket fick han taga från den andra för att fylla bristen?

Ex. 22. Af din lilla geometri får du lära att kortaste afståndet mellan två punkter är den raka linie, som drages mellan dem. Måttet för denna linie, »längdmåttet», har kallats *fot*, som, indelad i »sorter» efter decimalsystemet, gifvit 1 *ref* = 10 *stänger*, 1 stång = 10 *fot*, 1 fot = 10 *tum*, 1 tum = 10 *linier*. Talet 11111 uttrycker detsamma, sedt från venster. Talet 26857 uttrycker således 2 ref, 6 stänger, 8 fot, 5 tum och 7 linier, hvarföre ju ock detta »sorttal» kan genast så skrifvas utan tecken och såsom helt tal behandlas.

Om jag vill hafva sorttalet uttryckt endast i *linier*, så har jag det sådant det är och således tjugosextusen åttahundra femtiosju linier. Vill jag hafva det uttryckt endast i *tum*, så afskiljer jag tum och får $2685,_7$ d. v. s. tvåtusen sexhundra åttiofem tum och sju tiondedels tum (= 7 linier). Vill jag hafva talet uttryckande endast *fot*, så afskiljes *fot* $268,_{57}$ d. v. s. tvåhundra sextioåtta fot och femtiosju hundradels fot (= 5 tum och 7 linier).

Jag kan således genom afskiljande få uttryckt hvad »sort» jag vill, huru många de olika sorterna än äro. Klart är att jag måste fylla de sortrum med 0, hvari något af den lägre sorten icke finnes efter en högre sort, ty talet t. ex. 207 säger mig icke att det är 207 fot, utan att det är 207 linier, hvarför, om det skall uttrycka fot, rummen för tum och linier måste fyllas med 0, alltså $207,_{00}$, såsom 0 mellan 2 och 7 fyller rummet för stång.

Handlanden A inköpte 4 klädesstycken, det ena 52 fot 7 tum, det andra 28 fot 6 tum, det tredje 64 fot 9 tum, det fjerde 80 fot 6 tum; huru många fot och tum innehöllo styckena tillsammans? $x = 527 + 286 + 649 + 806$.

Här behöfver man naturligtvis icke fylla linierummen med 0 emedan man vet att allt är blott fot och tum. I handeln räknar man »alngods» blott i *fot* och *tum*, emedan den lilla liniesmulan »prutas» bort. Att räkna äfven i *ref* och *stång* lemnar man åt landtmätaren.

När du funnit ditt facit, min käre Petter, och reducerat det, så underlåt icke att afskilja och utsäga hvad du har af hvarje sort!

Ex. 23. Ingeniören uppmätte gränserna för ett femsidigt fält och fick sidan a) 8 ref 9 stänger 2 fot 7 tum 8 linier lång. Sidan b) fick han 7 ref 5 st. 9 f. 6 t.; sidan c) 7 st. 9 t.; sidan d) 4 ref 7 f. 9 lin.; sidan e) 4 st. 3 f. 6 l.

Huru stor var hela fältets gräns?

Nu, Petter, torde vara skäl för »uppställning». Du uppställer här från venster, samma »sorter» under hvarannan.

$$\begin{aligned} x = {} & a)\ 89278 \\ + {} & b)\ 7596 \\ + {} & c)\ \ 709 \\ + {} & d)\ 40709 \\ + {} & e)\ \ 4306. \end{aligned}$$

Vill du nu fylla linierummen i b) och c), så gör så; dock ser du ju ändå att intet är i rummen.

Ex. 24. Ett annat fält uppmättes äfven. Der var sidan a) 15 ref 4 f.; sidan b) 8 ref 2 tum 3 linier; sidan c) 36 ref 2 st.; sidan d) 5 ref 2 fot; sidan e) 56 f. 4 lin.

Huru mycket är detta fältets gräns *större* än det förras (i Ex. 23)?

För frågans besvarande måste ju först summan af sednare fältets gränser utföras. Alltså teckna, Petter!

$$\begin{aligned} x = {} & a)\ 15{,}04 \\ + {} & b)\ \ 8{,}0023 \\ + {} & c)\ 36{,}2 \\ + {} & d)\ \ 5{,}02 \\ + {} & e)\ \ \ 5604. \end{aligned}$$

Från dessa exempel (23 och 24) kan du göra dig oändligt många exempel för subtraktion, när du jemför talen med hvarandra.

Ex. 25. Det nyast antagna *längdmåttet* är *metern*, indelad i sorter på samma sätt som *foten*, men i än flera: 1 *myriameter* = 10 kilometer, 1 kilometer = 10 *hektometer*, 1 hektometer = 10 *dekameter*, 1 dekameter = 10 *meter*, 1 meter = 10 *decimeter*, 1 decimeter = 10 *centimeter*, 1 centimeter = 10 *millimeter*. 1 myriameter kallas äfven *mil*.

Talet 11111111 uttrycker nu detta sedt från venster. Talet 23456789 uttrycker således 2 myriameter, 3 kilometer, 4 hektometer, 5 dekameter, 6 meter, 7 decimeter, 8 centimeter 9 millimeter.

Afskild från höger får man den »sort», som man ensamt vill hafva i hela, och tiondedelar, hundradelar o. s. v.

När du, Petter, hunnit i *minnet* inpregla de olika sorternas *benämningar*, så har ditt förstånd lika lätt för operationerna med metern som för operationerna med foten.

Såsom man i allmänna samfärdseln räknat endast i fot och tum, så kommer man ock att räkna endast i meter, decimeter och centimeter, bortprutande millimetern, förbehållande åt de mycket stora afstånden räknandet i de öfver metern högre sorterna.

Vi begagna förkortad beteckning för myriametern *mil*, för kilometern *km*, för hektometern *hm*, för dekametern *dkm*, för metern *m*, för decimetern *dcm*, för centimetern *cm*, och för millimetern *mm*.

Det är påbjudet att *decimeterns* förkortning skall vara *dm*, der i allmänna samfärdseln *dekametern* ej omtalas; men der begge i räkning brukas, använda vi *dcm* för decimetern och *dkm* för dekametern till förekommande af förvexling.

a) En handlande har inköpt 900 meter kläde och dertill 726 meter 8 decimeter och 9 centimeter kläde; huru mycket tillsammans?

$$\begin{aligned} x &= 900 \\ &+ 72689 = \end{aligned}$$

b) A sålde 5720 *m* 8 *dcm* och 6 *cm* af en sorts tyg och 356 *m* 7 *dcm* 5 *cm* af en andra sorts tyg; huru många flera meter af den förra än af den sednare sorten?

$$x = 572086 - 35675 = \begin{array}{r} +\ 572086 \\ -\ \ 35675 = \end{array}$$

Utför resten och säg ut alla de särskilda sorterna i densamma, då du lärer få 5 *km* 3 *hm* 6 *dkm* 4 *m* 1 *dcm* och 1 *cm*, men ingen *millimeter*, emedan denne ej ingick i någon af addenderna. Kunna vi kalla talen addender?

Ex. 26. För en jernväg hade ingeniörerna A och B att uppmäta en linie från punkten a) till punkten c) öfver punkten b). A mätte från a) till b) och fick på håret 68 *km* 423 *m* 5 *dcm* 7 *cm* och 9 *mm*. B mätte från b) till c) och fick 95 *km* 78 *m* 4 *dcm* och 9 *mm*. Huru lång blef hela jernvägslinien?

$$\begin{aligned} x &= 68423579 \\ &+ 95078409. \end{aligned}$$

Utför summan och säg ut alla särskilda deri ingående sorter! Glöm icke heller att af talen göra dig frågor för subtraktion!

Och nu, Petter, sedan du i öfning kommit så långt, förstått och erfarit sanningen i vår grundregel, att summan fås af addenderna sammanlagda, och att addenden fås af summan minskad med andra addenden, så bör du en gång för alla veta, att du i det ena har din »proba» för rigtigheten af din operation i det andra. När du derför öfvar dig på egen hand med att lösa exempelsamlingarnes frågor, så kasta bort den följaktiga, mer än onödiga »facitboken», som vill befria dig från att sjelf tänka, pröfva och undersöka riktigheten af hvad du gjort, och hindra dig att samtidigt och vexelvis öfva de motsatta räknesätten, hvilken samtidiga öfning är af så stort gagn för förståndsutvecklingen.

Ex. 27. En »hvitvaruhandlare» »inventerade» sitt »lager» och fann att han af »kaliko» hade en »packe» på 245 *m*, 8 *dcm*, 7 *cm*, en annan packe på 96 *m*, 6 *dcm*, 5 *cm*, en tredje packe på 125 *m*, 8 *dcm*, en fjerde på 68 *m*, 8 *cm* samt en »stuf» på 8 *m*; huru många meter tillsammans?

$$\begin{aligned} x = & \ 24587 \\ + & \ \ \ 9665 \\ + & \ \ 1258 \\ + & \ \ \ 6808 \\ + & \ \ \ \ \ \ \ 8 = \end{aligned}$$

Derefter sålde han 1:sta och 2:dra packen samt stufven; huru mycket hade han då på lager?

Men detta reducerade lager förstärkte han med en packe på 3,050 *m*, 9 *dcm*, samt med en packe på 709 *m*, 8 *dcm* och 7 *cm*; huru mycket hade han nu på lager?

Ex. 28. Vårt nyaste *vigtmått* kallas *gram* och indelas, såsom längdmåttet, efter tiotalsordningen; 1 *kilogram* = 10 *hektogram*, 1 hektogram = 10 *dekagram*, 1 dekagram = 10 *gram*, 1 gram = 10 *decigram*, 1 decigram = 10 *centigram*, 1 centigram = 10 *milligram*.

Talet 1111111 uttrycker detta. Benämningarne äro andra, sorterna *en* mindre än i längdmåttet, föröfrigt allt lika, så att du förstår att behandla det ena när du förstår att behandla det andra.

Såsom beteckningsförkortningar antagas *kg*, *hg*, *dkg*, *g*, *dcg*, *cg* och *mg*.

A »exporterade» 85 *kg*, 9 *gr*, 7 *dcg* fläsk; 67 *kg*, 5 *hg*, 8 *dkg* och 7 *g* kött; 56 *kg*, 5 *dkg*, 3 *g* och 9 *dcg* »primasmör» och 60 *kg*, 8 *hg*, och 7 *g* »secundasmör»; huru mycket i vigt voro dessa varor tillsammans?

$$x = 850097 + 67587 + 560539 + 60807 =$$

Reducera den tecknade summan och säg ut alla sorterna deri! Obs. att *mg* ej förekommer, men att det (milligram) kan i formen förekomma, om man vill fylla dess rum med 0.

Såsom »proba» subtrahera från den utförda summan de tre addendernas summa, så måste du ju få fjerde addenden; eller subtrahera från utförda summan de två addendernas summa, så måste du ju få de två andra addendernas summa till rest; eller subtrahera från den utförda summan dess ena addend, så måste du ju få till rest summan af de tre andra addenderna; och nog är detta bättre, än att förstulet titta i »facitboken», som ju kan hafva »tryckfel».

Ex. 29. En guldsmed smälte tillsammans i sin »degel» 12 *g*, 7 *dcg*, och 8 *mg* fint guld, 26 *g*, 5 *dcg* och 9 *mg* mindre fint guld och 4 *g*, 8 *cg*, och 7 *mg* koppar; huru mycket vägde hela den blandade guldklimpen?

Ex. 30. Man väntade med säkerhet en förhöjning i »importtullen» å tobak. Då skyndade »patrioterne»(?) A, B och C att importera tobak, A 4328 *kg*, 6 *hg* och 98 *g*; B 3050 *kg*, 7 *dkg* och 9 *g*; C 187 *kg*, 5 *hg* och 38 *dcg*; huru mycket tobak i vigt blef då utan förhöjd tull införd?

Huru mycket införde A *mer* än B?

Huru mycket C *mindre* än B?

Huru mycket A *mer* än B och C tillhopa?

Huru mycket *mindre* B än A och C tillhopa?

Ex. 31. Vårt nyaste mått för *målkärl* kallas *liter* och indelas i sina sorter såsom längdmåttet och vigtmåttet efter tiotalsordningen; 1 *hektoliter* = 10 *dekaliter*, 1 dekaliter = 10 *liter*, 1 liter = 10 *deciliter*, 1 deciliter = 10 *centiliter*.

Talet 11111 uttrycker detta. Här äro *benämningarne* andra, sorterna färre, men för öfrigt allt lika i hvad lärdt är om behandlingen af längdens och vigtens sorttal. Äfven här hafva vi beteckningsförkortningar *hl*, *dkl*, *l*, *dcl*, *cl*.

En vinhandlare hade 5 *hl*, 8 *l*, 9 *dcl* och 7 *cl* vin så fint och dyrt, att han ej fick det såldt. Då blandade kan det med 12 *hl*, 6 *dkl*, 7 *dcl* och 9 *cl* vin af en mindre fin och mindre dyr sort, och så sålde han blandningen med stor vinst. Huru mycket var att sälja?

$$x = 50897 + 126079.$$

Ex. 32. Vårt mynt *kronan* indelas efter *hundratalsordningen*, 1 krona = 100 öre. Talet 1,01 uttrycker således 1 krona och 1 öre.

a) A eger en fastighet värd 12,870 kronor 75 öre, kontant kapital 6,856 kronor 68 öre. B har en fastighet värd 30,675 kr. 59 öre, men har tillika en skuld på 11,860 kr. 8 öre. Hvad eger den ene mer än den andre?

$$x = (12{,}870{,}_{75} + 6{,}856{,}_{68}) - (30{,}675{,}_{59} - 11{,}860{,}_{08}).$$

b) År 1870 ärfde A 8,570 kronor 78 öre och under följande år har han till denna dag ökat sin förmögenhet med 2,356 kr. 75 öre. B ärfde vid samma tid 1,454 kr. 97 öre *mer* än A ärfde. Men B har uppoffrat 12,860 kr. 28 öre på oförnuftiga spekulationer och under tiden till dato lefvat upp 8,093 kronor utan att hafva förtjenat ett öre. Huru stå nu begges affärer?

A. $x = 8{,}570{,}_{78} + 2{,}356{,}_{75} =$

B. $x = (8{,}570{,}_{78} + 1{,}454{,}_{97}) - (12{,}860{,}_{28} + 8{,}093).$

Ex. 33. Af sin lilla åskådningsgeometri lära barnen att vårt *ytmått*, *qvadratfoten*, har sin sortindelning efter hundratalsordningen, såsom vårt mynt kronan har det. Men här äro sorterna lika många som hos foten såsom längdmått; alltså 1 *qvadratref* = 100 *qvadratstänger*, 1 qvadratstång = 100 *qvadratfot*, 1 qvadratfot = 100 *qvadrattum*, 1 qvadrattum = 100 qvadratlinier. Här intager således hvarje sort två rum i decimalkedjan, då längdmåttets sorter intaga blott ett.

Talet 1010101010 uttrycker således hvad vi här hafva, och beteckningens förkortningar äro *qr*, *qst*, *qf*, *qt*, *ql*.

A uppmäter en ytas innehåll 6 *qr*, 79 *qst*, 86 *qf*, 96 *qt* och 25 *ql*. B uppmäter en yta, som innehåller 65 *qr*, 3 *qst*, 50 *qf*, 8 *qt* och 76 *ql*. Hvad innehålla begge ytorna tillsammans?

$$\begin{aligned} x = &\ \ 6, 79, 86, 96, 25 \\ &+ 65, 03, 50, 08, 76 = \end{aligned}$$

Huru mycket är den sednare ytan större än den förra?

Ex. 34. A och B läto »enskifta» sitt hemman.

A fick af *åkerjorden* 275 *qr*, 90 *qst*, 86 *qf*
och af *ängen* 127 *qr*, 79 *qst*, 50 *qf*
B fick af *åkerjorden* 320 *qr*, 99 *qst*, 87 *qf*
och af *ängen* 94 *qr*, 85 *qst*.

a) Huru stor var hela hemmanets *åkerjord?*

b) Huru stor var hela hemmanets *äng?*

c) Huru stor hela hemmanets »areal» i åker och äng?

d) Huru mycket af *åkerjorden* fick den ene *mer* än den andre?

e) Huru mycket af *ängen* fick den ene mer än den andre?

f) Huru mycket af åker och äng tillsammans fick den ene mer än den andre?

Vårt nyaste ytmått är qvadratmetern. När man känner meterns sorter såsom längdmått, kan man väl veta att den har motsvarande sorter såsom qvadratmått, alltså *1 qv.-myriameter* eller qvadratmil = 100 *qv.-kilometer*, 1 qv.-kilometer = 100 *qv.-hektometer*, 1 qv.-hektom. = 100 *qv.-dekameter*, 1 qv.-decam. = 100 *qv.-meter*, 1 qv.-meter = 100 *qv.-decimeter*, 1 qv.-decim. = 100 *qv.-centimeter*, 1 qv.-centim. = 100 *qv.-millimeter*.

Beteckningens förkortningar äro:
*qmil, qkm, qhm, qdkm, qm, qdcm, qcm, qmm.* Vid uppmätning af jordområden kallas 100 *qm* 1 *ar*, detsamma således som en qvadratdekameter, och 100 *ar* kallas *1 hektar*, detsamma således som en qvadrathektometer. 1 hektar är således = 100 × 100 qvadratmeter = 10,000 *qm*. Skrif ut enligt decimalsystemet sorttalet 36 *qmil*, 8 *qkm*, 72 *qhm*, 5 *qdkm*, 85 *qm*, 19 *qdcm*, 3 *qcm* och 50 *qmm*! Afskilj sorterna!

36, 08, 72, 05, 85, 19, 03, 50.

Indela talet 80370005046805 i sina sorter och säg ut dem!

Tre landtmätare, A, B och C fingo att uppmäta en skogstrakt i Norrland. A uppmätte deraf 5 *qmil*, 76 *qdkm* och 9 *qm*. B 86 *qkm*, 96 *qhm* och C, som räknat »på håret» 2 *qmil*, 70 *qkm*, 8 *qhm*, 22 *qdkm*, 4 *qm*, 62 *qdcm*, 9 *qcm* och 99 *qmm*.

Huru stor var hela traktens »areal»?

$x$ = A 5,00,00,76,09
+ B 86,96
+ C 2,70,08,22,04,62,09,99.

Talen uppställas så *från venster*, men om alla sortrummen i A- och B-addenden fyllas med 00, kunna talen lika lätt uppställas från höger.

Ex. 35. Vårt ännu begagnade *vigtmått* är indeladt såsom ytmåttet efter hundratalsordningen: 1 *centner* = 100 *skålpund*, 1 skålp. = 100 *ort*, 1 ort = 100 *korn*.

En jordbrukare ville på jernvägen skicka sin spannemål till exportören och betingade sig derföre en vagn, som lastade 260 centner. Först inlastade han hvete, som vägde 120 centner, 95 skålpund, 89 ort, 78 korn; derefter inlastade han råg i vigt 130 centner, 49 skålpund, 7 ort och 96 korn. Slutligen ville han äfven »lägga på» hafre, som vägde 1,300 skålpund. »Nej stopp!» sade jernvägsmannen, »vagnen lastar blott 260 centner = 26,000 skålpund.» Huru mycket af hafren fick jordbrukaren återtaga?

Såsom du finner, Petter, upplöser sig frågan i tre frågor:

a) Huru mycket väga hvetet och rågen tillsammans?

$x = 120{,}95{,}89{,}78 + 130{,}49{,}07{,}96 =$

b) Huru mycket lastar vagnen mer än detta?

$x = 260{,}00{,}00{,}00 - a)$

c) Huru mycket *mer* än detta är hafrens vigt?

$x = 13{,}00{,}00{,}00 - b)$

hvilket öfverskott var att återtaga.

Nu hade man väl i *en* eqvation kunnat uttrycka hufvudfrågan sålunda:

*Hvad som af hafrens vigt är att återtaga, utgör skilnaden emellan hafrens vigt och hvad vagnen lastar mer än rågen och hafren väga tillsammans.* Men dels med afseende på nybörjarens behof af att få fatta saken så enkelt som möjligt, dels ock med afseende på talens vidlyftighet, upplöses hufvudfrågan, då reduktionen i a) gifver kortare tal i b), och reduktionen der gifver ännu kortare tal i c).

Ex. 36. Vårt ännu begagnade *målkärlsmått* är indeladt i sorter efter decimalsystemet, men hvarken ensamt efter tiotals- eller hundratals- eller tusentalsordningen; 1 kubikfot = 10 *kannor*, 1 kanna = 100 *kubiktum*. Talet 1,1,01 uttrycker detsamma.

A gaf sina hästar hafre, i Januari 35 kfot, 8 kannor, 67 ktum; i Februari 47 kfot, 9 kannor, 23 ktum; i Mars 69 kfot och 890 ktum; huru mycket tillsammans?

$x\ 35867 + 47923 + 69890.$

Orsaken till den egna indelningen är den, att Svensken hade så svårt för att lemna den kära »kannan». Men som en kanna = 100 kub.-tum, så får man en »rationel» kubikindelning efter tusentalsordningen, om man lemnar kannan (med sitt »stop, halfstop, qvarter och jumfru») 1 kub.-fot = 1000 k.-tum. Huru qvadraten uppkommer af längden och kuben af qvadraten får du lära af din lilla åskådningsgeometri.

Ex. 37. A inköpte 232 kfot, 7 kannor, 38 ktum hvete, vägande 111 centner, 28 skålp., 72 ort, 53 korn, som kostade 568 kronor 75 öre. Dertill inköpte han 427 kfot, 8 kannor, 78 ktum råg, vägande 210 centner, 95 skålpund, 46 ort och 89 korn, som kostade 840 kronor 67 öre. Slutligen inköpte han 3,856 kfot, 9 kannor, 87 ktum hafre, vägande 1,195 centner, 60 skålp. 38 ort och 79 korn, som kostade 2,390 kronor 96 öre.

Hvad innehöll all säden i *mått?*
» » » » i *vigt?*
» » » » i *penningevärde?*
Huru mycket var hafren *mer* än hvetet i mått?
» » » » » » » i vigt?
» » » » » » » i penningevärde?
Huru mycket var hafren mer än rågen i mått?
» » » » » » » i vigt?
» » » » » » » i penningevärde?

Huru mycket var hafren mer än rågen och hvetet tillsammans i mått? i vigt? i penningevärde?

Ex. 38. Kubikfoten har äfven sina öfverafdelningar; 1 *kub.-ref* = 1000 *kub.-stänger*, 1 kub.-stång = 1000 *kub.-fot.*

En sjö skall uttappas medelst en kanal. Den jordmassa som skall utgräfvas, skall mätas till sitt kubikinnehåll, ty derefter kan kanalgräfningens kostnad beräknas. På ett stycke af kanalleden måste utgräfvas 8 kub.ref, 728 kub.st., 53 kub.fot, 359 kub.-tum, 90 kub.linier; på ett andra stycke 15 kub.ref, 20 kub.st., 985 k.fot; på sista stycket 36 kub.ref, 9 kub.st., 500 kub.fot, 390 kub.tum, 705 kub.linier. Huru mycket tillsammans?

$$x = \begin{array}{l} 8{,}728{,}053{,}359{,}090 \\ +\ 15{,}020{,}985 \\ +\ 36{,}009{,}500{,}390{,}705 \end{array}$$

Vi se, att kubikmåttets sorter upptaga tre rum hvardera i decimalkedjan, då qvadratmåttets upptogo *två* och längdmåttets *ett*, allt af begripliga skäl. Enheten af hvarje sort uttryckes genom talet 1,001,001,001,001.

Ex. 39. Vårt nyaste kubikmått, *kubikmetern*, fördelas i sina sorter på samma sätt och grund.

Beteckningens förkortningar äro: kubikmyriameter eller kubikmil *kmil*, kubikkilometer *kkm*, *khm*, *kdkm*, *km*, *kdcm*, *kcm*, *kmm*. Talet 1,001,001,001,001,001,001 uttrycker de särskilda sorternas enhet i decimalkedjan.

Ex. a) 2 *kmil*, 50 *kkm*, 7 *khm*, 90 *kdkm*, 479 *km*, 25 *kdcm*, 8 *kcm* och 350 *kmm*, samt dertill 1 *kmil*, 307 *kkm*, 508 *khm*, 709 *kdkm*, 4 *km*, 798 *kdcm*, 807 *kcm* och 8 *kmm*. Huru mycket tillsammans?

$$x = \begin{array}{l} 2{,}050{,}007{,}090{,}479{,}025{,}008{,}350 \\ +\ 1{,}307{,}508{,}709{,}004{,}798{,}807{,}008. \end{array}$$

Reducera, utsäg derefter alla särskilda sorter.

I allmänhet räknar man blott i kkmeter, k.decimeter och k.centimeter. Man »prutar» bort k.millimetern, der det ej gäller mycket fina, vigtiga eller dyrbara föremål för mätning. De öfver k.metern liggande högre sorterna användas för mätning af mycket stora föremål, såsom jordklotet m. m.

Ex. b) En dubbelklippa skall bortsprängas och arbetet betalas med 10 kronor för hvarje full kubikmeter. Ingeniören A har uppmätt klippan och fått den ena delen innehållande 8,536 *km*, 996 *kdcm* och 798 *kcm*, den andra delen 9,758 *km*, 869 *kdcm* och 579 *kcm*. Huru mycket tillsammans?

$$x = \begin{array}{l} 8536{,}996{,}798 \\ +\ 9758{,}869{,}579. \end{array}$$

Reduceradt = 18,295 fulla kubikmeter.

Huru mycket skall för dessas bortrödjande betalas?

Lika många tior af kronan, alltså 182,950 kronor. Detta var nu en liten »anticipation» på multiplikation, hvarmed vi ännu ej haft att göra, men af så oskyldig art, att du är bekant dermed af decimalsystemets uppfattning.

Behandlingen för addition och subtraktion af andra »tal i sorter» än de, som grunda sin indelning på decimalsystemet, äfvensom af andra »bråk» än »decimalbråk», kommer följdrigtigast före, sedan man gjort sig bekant med grunderna för multiplikation och division »i hela tal» och i samband dermed för addition och subtraktion, då termerna äro äfven tecknade produkter eller qvoter.

---

## **Multiplikation** och **division,**

samtidigt öfvade:

*Hufvudgrunder:*

1. *Multiplikation* är en *förkortad addition af samma addender.* Hvad t. ex. $3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 + 4 = 12$ säger, nemligen att summan 12 uppkommit af 4 *treor* eller 3 *fyror,* detsamma säger produkten $4 \times 3 = 3 \times 4 = 12$.
2. *Division* är en *förkortad subtraktion med samma subtrahender.* Hvad $12 - 3 - 3 - 3 - 3 = 12 - 4 - 4 - 4 = 0$ säger, nemligen att 3 ligger i 12 *fyra gånger* och att 4 ligger i 12 *tre gånger,* eller att 3 är fjerdedelen af 12 och 4 tredjedelen af 12, detsamma säga qvoterna $\frac{12}{3}$ och $\frac{12}{4}$ *).

*) När aritmetik öfvades uteslutande i lärdoms- och högskolan, skrefs likhetstecknet med fyra punkter ::, hvilka längre fram fingo löpa samman till =. Då tecknades ock qvoten med två punkter :, hvilka längre fram fingo löpa samman till / med talen i en tryckrad t. ex. $^8/_2$, $^2/_8$, sednare till $\frac{8}{2}$, $\frac{2}{8}$ med talen i två tryckrader.

Sedan aritmetiken införts i svenska byskolan, blef det snart nog häfdvunnet att kalla qvotformen 8 : 2 »divisionstal», tecknet »kolon», och tecknen i allmänhet »skiljetecken mellan talen». $\frac{8}{2}$ såsom $\frac{2}{8}$ kallades »bråk» och tecknet »bråkstreck». Hvad ett »skiljetecken» betydde fick barnet veta af sin renläsningsöfning, och hvad »bråkstrecket» betydde fick det sluta till af öfriga »streck» kors och tvärs för »uppställningen». Hvad häfd skapade nedifrån sträckte sig snart högre upp.

Den häfdvunna förklaringen öfver »bråkets uppkomst» har det emot sig att den ligger längre bort för barnets förstånd, erfordrande minst två operationer i barnets hufvud och passar ej in på alla »bråk». Att t. ex. $\frac{5}{4}$ uppkommit »af 1 deladt i 4 lika stora delar, och sedan man tagit 5 sådane delar», kan barnet icke ens

3. Såsom addition och subtraktion äro motsatta operationer, så måste ock deras »förkortningar», multiplikation och division, vara motsatta. Medelst *multiplikation* kommer *produkten* af *faktorerna*, multiplicerade den ene med den andre. Medelst *division* kommer en *faktor* af *produkten*, dividerad genom den andra *faktorn*.

Att *produkten* nu kallas *dividend* och faktorerna *divisor* och (utförd) *qvot* härrör af sättet, hvarpå opereras med dem, men ingalunda af någon olikhet i deras inbördes förhållande. Alltså är här blott olika *namn* på samma sakförhållande, hvarför du, käre Petter, icke behöfver bråka t. ex. med »Innehållsdivision», då du har att söka divisorn, utan må du taga saken enklare än så.

4. Medelst ett tals multiplikation eller division med 1, förändras ej talets värde, men väl dess form, om operationen tecknas, t. ex. $8 = 1 \times 8 = \frac{8}{1}$.

Den här förekommande qvotformen $\frac{8}{1}$, som »räknekonsten» haft så behöflig för sina operationer, och som kallats »*att förvandla helt tal till bråk i enklaste form*», behöfva vi icke, utan säga hellre: »*faktorn 1 behöfver ej tagas med i räkningen*». Att begagna äfven den formen, såsom här, blott till *förevisning*, är dock oskyldigt.

5. Medelst *multiplikation* med ett tal, *till värdet mer än 1*, göres ett tal *så många gånger större*, som det tal gäller, med hvilket det multipliceras, t. ex. $2 \times 8 = 8 \times 2 = 16$. Talet 16 *två* gånger större än 8 och *åtta* gånger större än två.

---

*tro*, då det väl förstår, att man ej kan få 5 delar der man har blott 4 sådane.

Barnet lär sig derföre denna förklaring såsom en snart glömd minneslexa. Att »bråket» $\frac{5}{4}$ och $\frac{4}{5}$ uppkommit såsom tecknade qvoten af 5 divideradt genom 4 och 4 genom 5, eller derigenom att man tagit fjerdedelen af 5 och femtedelen af 4, tecknadt, ligger enkelt och klart för barnets förstånd och öga. Det inläres äfven med tecknade qvoters behandling under division »i hela tal» och behöfver ej kastas undan, att för barnet blifva ett alldeles nytt »räknesätt», efter divisionens »i hela tal» afslutande. Vi teckna derför qvoten såsom bråk i allmänhet med tecknet i samma form, att barnen redan deraf må se och förstå, att här endast äro olika *benämningar* på samma sakförhållande. Men vi förkasta ej dermed det äldsta qvottecknet der det behöfs för formens bättre utseende t. ex. i $\frac{3}{4} : \frac{4}{5}$.

Här ser du, Petter, ett gammalt godt axiom: »*samma faktorer gifva samma produkt*».

Detta axiom gör de särskilda *namnen* på faktorerne af »multiplikand» och »multiplikator» mindre behöfliga; det befriar från föreskriften att vid tecknandet sätta den förre »före» och den sednare »efter» tecknet, oftast ändavändt mot hvad läraren med läroboken talat och frågat. Af praxis lär du att det i *saken* är detsamma, hvilkendera faktorn du multiplicerar med den andre, men att det är *vigare* att multiplicera den större med den mindre.

6\. Medelst *division* genom ett tal, *till värdet mer än 1*, göres ett tal *så många gånger mindre* som det tal gäller, genom hvilket det divideras, t. ex. $\frac{8}{4} = 2$ och $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Man säger ock hvad man här ser tecknadt och utfördt, att *fjerdedelen* (2) är tagen af 8 och åttondelen ($\frac{1}{2}$) är tagen af 4.

7\. a) Om ett tal, t. ex. 8, (enligt hufvudgrunden 5) gjorts t. ex. 3 gånger större till $3 \times 8 = 24$, så återställes det till sitt värde (8), om det nu så förstoradt göres 3 gånger mindre till $\frac{3 \times 8}{3} = 8$. Och om ett tal, t. ex. 9 (enligt hgr. 6) gjorts t. ex. 7 gånger mindre till $\frac{9}{7}$, så återställes det till sitt värde (9), om det nu så förminskadt göres lika många gånger större till $\frac{7 \times 9}{7} = \frac{63}{7} = 9$.

b) Af dessa två axiomer följer nu det, att ett tal blir till värdet *oförändradt, då det på en gång göres så många gånger större och lika många gånger mindre, d. v. s. multipliceras och divideras med samma tal*, såsom talen 8 och 9 här blefvo det, $\frac{3 \times 8}{3} = 8$, $\frac{7 \times 9}{7} = 9$.

c) Nu kallas talet i sin tecknade form »*förlängdt*» och du förstår då hvad det vill säga att »förlänga» ett tal, då du ser att talet 8 är *förlängdt* $= \frac{3 \times 8}{3} = \frac{24}{3}$ och att talet 9 är förlängdt till $\frac{7 \times 9}{7} = \frac{63}{7}$ med *oförändradt värde*, således blott till *formen* förändradt.

d) Men nu kallas det så förlängda talet $\frac{7 \times 9}{7} = \frac{63}{7}$ »förkortadt» till 9, då du genom utförande medelst motsatt operation borttager den gemensamma faktorn 7.

I $\frac{7 \times 9}{7}$ är denne faktor synlig, i $\frac{63}{7}$ är den fördold i 63, men ej mer fördold än att du tar rätt på den, då du vet att $7 \times 9 = 63$. Att så göra en faktor *synlig*, kallas »*att slå (upplösa) ett tal i sina faktorer*».

e) Ett tal kan dock *förlängas* eller *förkortas* med tal, som väl ej äro *samma* tal, men *till värdet samma* tal, t. ex. $9 = \frac{6 \times 9}{2 \times 3} = \frac{(2+3)\,9}{5} = \frac{(16-4) \times (3 \times 3)}{(7+5)}$ o. s. v.

I $\frac{6 \times 9}{2 \times 3}$ kan du lätt se hvad som der är gemensamma faktorer och i öfrige exemplen finner du den gemensamma faktorn under utförandet efter tecknens anvisning.

Obs! att tecknet $\times$ ej utsättes, när en enkel faktor, såsom ofvan, kommer intill en klammad sammansatt.

8. När du under division »i hela tal» har att utföra en tecknad qvot t. ex. $\frac{13}{2}$, som utgör $\frac{12}{2} + \frac{1}{2}$, så finner du att 2 går jemt upp i qvotens ena del, men ej i den andra, hvilken andra del derför måste blifva tecknad såsom den är, hvarför $\frac{12}{2} + \frac{1}{2}$ blir $= 6 + \frac{1}{2}$. Men nu brukar man ej utsätta tecknet, utan skrifver $6\frac{1}{2}$ och kallar den så utförda qvoten »*blandadt tal*», en summa af »helt och bråk», tecknad, ehuru tecknet ej utsatts, utan blott tänkes vara der.

Att »ett bråk adderas till helt tal dermed att det sättes omedelbart intill det hela», är ju således icke en additions *utförande*. Skola talen $6\frac{1}{2}$ i summa utföras, måste de bringas till samma *benämning*. Alltså måste talet 6 *förlängas* d. v. s. *förvandlas* till en qvot till värdet lika med 6, men uttryckande hälften af det talet, såsom $\frac{1}{2}$ uttrycker hälften af 1, alltså $\frac{2 \times 6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$, och detta kallas nu att »*förvandla blandadt tal till oegentligt bråk med den nämnare man vill hafva*».

Orsaken hvarför man icke velat kalla t. ex. $6 - \frac{1}{2}$ ett »blandadt tal», är den, att man för barnen kastat bort begreppet af *nekade* tal och således här begreppet af en summa af *jakadt* och *nekadt*.

Men skall nu denna summa af jakadt och nekadt eller denna rest af jakadt och jakadt $6 - \frac{1}{2}$, utföras, så måste äfven nu det hela talet 6 förlängas till $\frac{2 \times 6}{2} = \frac{12}{2}$, då man får $\frac{12}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$, der äfven $6 - \frac{1}{2}$ såsom »blandadt tal förvandlats till oegentligt bråk», (qvot).

Detta *förlängande* af det hela talet till en tecknad qvot, *likbenämd* med en annan, har man ock kallat att förvandla helt tal till »bråk med *bestämd* nämnare». Men icke behöfde du derför först »förvandla» det hela talet till bråk i enklaste form?

Hvad angår »minnesregeln» för blandadt tals förvandling: »multiplicera det hela talet med bråkets nämnare och addera dertill bråkets täljare och sätt bråkets nämnare derunder såsom nämnare», så går äfven det för sig, men veta väl barnen då grunden för hvad de göra? och huru länge *minnas* de den långa inkrånglade minnesregeln?

9. När ett tal (enl. hgr. 5) multipliceradt med ett tal *till värdet mer än 1*, blir *så många gånger större*, då slutar ditt förstånd att ett tal, multipliceradt med ett tal *till värdet mindre än 1*, måste blifva *så många gånger mindre*, t. ex. $\frac{1}{2} \times 8 = 8 \times \frac{1}{2} = 4$, hvarför det att multiplicera 8 med $\frac{1}{2}$ är detsamma som att dividera det med 2, att taga hälften af det.

Ett barn, som får dertill lof, säger lika qvickt i »hufvudet», hvad $8 \times \frac{1}{4}$ är, som det säger hvad 8 gånger 1 är, lika qvickt hvad 8 gånger ($^3/_4$) trefjerdedelar är, som, hvad 8 gånger 3 äplen är. Har barnet lärt att teckna, hvad som talas, så att det kan teckna tjugofyra fjerdedelar $\frac{24}{4}$, nog kan barnet äfven utföra denna qvot.

10. När ett tal, (enligt hgr. 6), divideradt genom ett tal *till värdet mer än 1*, blir *så många gånger mindre*, då slutar ditt förstånd att ett tal, divideradt genom ett tal *mindre än 1*, måste gifva ett tal, *till värdet lika många gånger större* t. ex. $8 : \frac{1}{2} = 16$. Ty när du vet att 1 ligger i 8 åtta gånger, så måste ju $\frac{1}{2}$, som är 2 gånger mindre än 1, ligga deri 2 gånger mer d. v. s. 16 gånger, hvarför det att dividera 8 genom $\frac{1}{2}$ är detsamma som att multiplicera det med 2.

»Räknekonsten» säger här:

1:o förvandla det hela talet till bråk i enkläste form;

2:o vänd upp och ned på divisorn; 3:o multiplicera täljare med täljare och nämnare med nämnare.»

Att med ögonen se att något blir *detta*, är dock ej detsamma som att förstå att *detta* måste vara *detta*, och det förståndet får intet barn af den »minnesregeln».

11. Om du har att med helt tal multiplicera eller dividera en tecknad summa eller rest; så antingen utför du denna summa eller rest och derefter multiplicerar eller dividerar du den utförda summan eller resten; eller ock multiplicerar eller dividerar du hvarje term särskildt i summan eller resten och derefter adderar eller subtraherar du produkterna eller qvoterna.
T. ex. $(2 + 3)\,5 = 5 \times 5$, eller $5 \times 2 + 5 \times 3 = 10 + 15 = 25$;
$(8 - 6)\,7 = 2 \times 7$, eller $7 \times 8 - 7 \times 6 = 56 - 42 = 14$;
$\frac{(12 + 3)}{5} = \frac{15}{5}$, eller $\frac{12}{5} + \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = 3$;
$\frac{14 - 6}{4} = \frac{8}{4}$, eller $\frac{14}{4} - \frac{6}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

12. Redan här förut har du funnit huru likbenämnda qvoter lika lätt adderas och subtraheras som andra likbenämnda tal. Du förstår ock, att olikbenämda qvoter kunna lika litet som andra olikbenämda tal adderas eller subtraheras förr än de blifvit gjorda likbenämda, t. ex. $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$; $\frac{2}{3} - \frac{5}{7}$. Detta liknämniggörande sker ock allmänt, när hvardera qvoten *förlänges* med den andras divisor, alltså här $\frac{2}{3}$ med 7 och $\frac{5}{7}$ med 3, då du af $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ får $\frac{7 \times 2}{7 \times 3} + \frac{3 \times 5}{3 \times 7} = \frac{14}{21} + \frac{15}{21} = \frac{14 + 15}{21} = \frac{29}{21} = 1\frac{8}{21}$; och då du af $\frac{2}{3} - \frac{5}{7}$ får $\frac{7 \times 2}{7 \times 3} - \frac{3 \times 5}{3 \times 7} = \frac{14}{21} - \frac{15}{21} = \frac{14 - 15}{21} = -\frac{1}{21}$ (nekadt) eller om du haft $\frac{5}{7} - \frac{2}{3}$, så hade du på samma sätt fått facit $\frac{1}{21}$ men jakadt.

*Likbenämda* (med samma divisor) måste ju qvoterna vara emedan $7 \times 3 = 3 \times 7$. *Till värdet oförändrade* måste de ju ock vara, emedan de blott blifvit *förlängda*, den ena qvoten gjord 3 gånger större och 3 gånger mindre, den andra qvoten 7 gånger större och 7 gånger mindre, tecknadt. Såsom likbenämda kunde qvoterna adderas och subtraheras.

13. När du, käre Petter, gör dig väl förtrogen med dessa enkla hufvudgrunder skall du, för alla dina vidgöranden för teck-

nade qvoters förändringar till värde eller form, se yttersta hufvudgrunden deri, att den tecknade qvoten uttrycker förhållandet, hvari dividend och divisor stå till hvarandra, så att, om de äro lika stora, så går divisorn upp i dividenden jemt en gång; om dividenden är t. ex. 2 gånger större än divisorn, så går divisorn jemt upp 2 gånger; om dividenden är 2 gånger mindre än divisorn så går divisorn deri upp blott en half gång o. s. v., hvaraf den allmänna lag följer, att qvotens värde ökas i samma mån som dividenden ökas, och minskas i samma mån som dividenden minskas, då divisorn är oförändradt densamme. Om åter dividenden förblifver densamme, men divisorn *ökas*, måste qvotens värde *minskas* i samma mån, och qvotens värde måste *ökas* i samma mån, som divisorn *minskas*. Praxis visar det för ögonen. Alltså måste du vid tecknade qvoters behandling oaflåtligt tänka på den förändring i förhållandet mellan dividend och divisor, som uppstår, då du förändrar till värdet särskildt dividenden eller särskildt divisorn.

Under alla operationer med tecknade qvoter (bråk) upplöser sig ock allt i operation med hela tal, antingen man har att addera eller subtrahera eller multiplicera eller dividera, »förlänga», »förkorta», »förvandla».

## Öfningsexempel:

Naturligtvis få barnen börja med multiplikation och division i hela ensiffriga tal, inom produkten 81 och, vid division särskildt, med de produkter, hvari en ensiffrig faktor går jemt upp. Med tiotalets multiplikation och division hafva barnen redan vid decimalsystemets inhemtande fått göra bekantskap. Men innan man öfvergår till andra flersiffriga tal än de som börja med *en* siffra och sluta med 00, böra barnen få öfva sig med division af de produkter inom 81, hvari en enskild siffra ej går jemt upp, der barnen få till facit ett »blandadt tal», äfvensom med att teckna de qvoter af ensiffriga tal, hvari en siffra går upp blott *till en del*. Härvid få barnen tidigt lära att uttrycka delar af hela tal, se dem i deras uppkomst och form. Hafva de förut lärt att förstå hvad t. ex. $\frac{8}{4}$ är mer än 1, böra de äfven få lära förstå hvad t. ex. $\frac{3}{4}$ är mindre än 1, med grunden för det ena och det andra.

Ex. 1. a) Carl har 8 kronor och Emil har 3 gånger mer; huru många kronor har Emil? $x = 3 \times 8 =$

b) Men när nu Emil har $3 \times 8$ kronor och Ivar har 4 gånger mindre än Emil; huru många kronor har då Ivar? $x = \frac{3 \times 8}{4} =$

c) När nu Ivar har $\frac{3 \times 8}{4}$ kronor och Anders har 7 kronor mindre än Ivar; huru många kronor har då Anders? $x = \frac{3 \times 8}{4} - 7 =$

d) När Anders har $\frac{3 \times 8}{4} - 7$ kronor och Lars har 9 kronor mer än Anders, huru många kronor har då Lars? $x = \frac{3 \times 8}{4} - 7 + 9 =$

e) När Lars har $\frac{3 \times 8}{4} - 7 + 9$ kronor och Frans har 5 gånger så mycket, huru många kronor har Frans? $x = \left(\frac{3 \times 8}{4} - 7 + 9\right) 5.$

f) När Frans har $\left(\frac{3 \times 8}{4} - 7 + 9\right) 5$ kronor och Didrik har 8 gånger mindre; huru många kronor har Didrik? $x = \left(\frac{3 \times 8}{4} - 7 + 9\right) 5 : 8.$

Men alla dessa frågor (och vore de än flera) kunna vi kombinera i en enda fråga:

g) När Carl har 8 kronor, Emil 3 gånger mer än Carl, Ivar 4 gånger mindre än Emil, Anders 7 kronor mindre än Ivar, Lars 9 kronor mer än Anders, Frans 5 gånger så mycket som Lars, och Didrik 8 gånger mindre än Frans (åttondelen af hvad Frans har); huru många kronor har då Didrik?

Tecknadt såsom talades hade du ju fått det såsom i punkten f), och med någon öfning i tecknande blir frågan ej svårare att teckna, icke heller svårare att utföra, om du lärt dig att förstå hvad tecknen bjuda.

Ex. 2. a) Om du har 3 kaninhanar och 4 kaninhonor och om honorna födt 5 ungar hvar; huru många kaniner har du då? $x = 3 + 4 + (5 \times 4)$.

b) Men om råttorna knipa hälften af ungarne, huru många kaniner har du då? $x = (3 + 4 + 5 \times 4) - \frac{5 \times 4}{2}$.

c) Men när nu afveln ökas, så att 18 ungar komma till hvad du i b) hade, huru många kaniner har du då? $x = (3 + 4 + 5 \times 4) - \frac{5 \times 4}{2} + 18 =$

Frågorna kombinerade blifva denna:

d) Om du har 3 kaninhanar och 4 kaninhonor, om honorna föda 5 ungar hvar, men råttorna knipa hälften af ungarne, hvarefter 18 ungar tillkomma, huru många kaniner har du då? Eqvationen c).

Ex. 3. a) Anders hade 6 äplen, som ökades så att hans äplehög blef 4 gånger så stor. Nu åt han upp så många att högen blef 3 gånger mindre; huru många hade han då? $x = \frac{6 \times 4}{3}$.

b) Huru många äplen hade Anders ätit upp?

Klart är ju, att du måste minska högen $4 \times 6$, sådan den var *före* ätandet, med högen $\frac{4 \times 6}{3}$, sådan den var *efter* ätandet, alltså $x = 4 \times 6 - \frac{4 \times 6}{3} =$

c) När Anders hade ätit upp 16 äplen och hade qvar $\frac{4 \times 6}{3}$ äplen, huru många äplen voro i hans hög före »snaskandet»?

Nu finner du, att summan (minuenden) sökes, alltså $x = 16 + \frac{4 \times 6}{3} =$

d) När Anders från början hade vissa äplen ($x$) och fick den äplehögen 4 gånger så stor, men åt upp 16 äplen, så att han nu hade så många äplen som från början och dertill 2 äplen: huru många hade han då från början?

I frågan ligger eqvationen $4x - 16 = x + 2$.

Huru roligt får du ej, Petter, när du i Sednare Delen fått lära att enkelt lösa en så simpel »räknegåta»?

Ex. 4. a) D har 12 sedlar gällande 100 kronor stycket och E har 10 gånger så mycket, huru många kronor har E? $x = 12 \times 100 \times 10 = 12000$ kronor (se decimalsystemet).

b) När E har 12000 kronor och F har 10 gånger mindre (tiondedelen deraf), huru många kronor har F? $x = \frac{12000}{10} = 1200$ (se dec.-system.).

c) När F har 1200 och G har 10 gånger mindre? hvad har då G? $x = \frac{1200}{10} = 120$ (se dec.-system.).

d) När G har 120 kronor och H har tiondedelen deraf, huru mycket har då H? $x = \frac{120}{10} = 12$ (se dec.-syst.).

e) När H har 12 och L har 10 gånger mindre, hvad har då L? $x = \frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10} = 1\frac{1}{5} = 1{,}2$ (se hufvudgr. 8 och 6 d) samt dec.-system.)

Ex. 5. a) Anders har 8 tioöringar, Carl har 3 tioöringar mindre än Anders har, och Emil har femtedelen af hvad Carl har; huru många öre har nu Emil? A har 8, C har 8 — 3, Emil har $\frac{8-3}{5} =$

b) När nu Frans har $\frac{8-3}{5}$ öre och Gustaf har $\frac{17-5}{2}$ öre, hvad hafva Frans och Gustaf tillsammans? $x = \frac{8-3}{5} + \frac{17-5}{2}$.

Ex. 6. När Göran har 3 femtioöringar och 6 tioöringar och Ivar har 10 gånger mindre, huru många öre har då Ivar? $x = \frac{3 \times 50 + 6 \times 10}{10} = 3 \times 5 + 6 = 21$ (se hufvudgr. 7 a) och 11).

Här är den tecknade qvoten först »förkortad», eljest hade du fått $\frac{150+60}{10} = \frac{210}{10} = 21$.

Ex. 7. Anders hade lånat 4 tioöringar af Birger och 2 tioöringar af Carl, men han hade att fordra 8 tioöringar af Emil och 7 tioöringar af Gustaf. Nu ville han betala sin skuld med tredjedelen af sin fordran, som han fick in. Men hur gick det? tredjedelen af hans fordran $\frac{80+70}{3}$, tillsammans med skulden — 40 — 20, hvad gaf det till facit?

$$x = \frac{80+70}{3} - 40 - 20 = \frac{150}{3} - 60 = 50 - 60 = -10.$$

Anders hade således ännu 10 öres skuld till Birger.

Ex. 8. Här följa abstrakta exempel, som för barnen kunna klädas i konkret drägt, om man så vill.

1) $x = \frac{9-3}{2}$; 2) $x = (7-2)\,8$; 3) $x = \frac{8}{4} + 6 - 2$; 4) $x = \frac{8}{4-2}$; 5) $x = \frac{14+8}{2 \times 3}$; 6) $x = \frac{4-3}{2+3}$; 7) $x = \frac{6-5}{2+4}$; 8) $x = \frac{9-6}{2+5}$; 9) $x = \frac{8-5}{2 \times 4}$; 10) $x = (\frac{28}{4} - 3)\,5$; 11) $x = \frac{23}{2\,(4-2)}$; 12) $x = (8-6) \times (7-9)$; 13) $x = (4-7) \times (6-8)$; 14) $x = (5-9) \times (2+3)$; 15) $x = \frac{5+2}{1-2}$; 16) $x = \frac{3-8}{2+3}$; 17) $x = \frac{4-8}{2-4}$; 18) $x = \frac{8}{4} + \frac{9}{3}$; 19) $x = \frac{14}{7} + \frac{9}{4}$; 20) $x = \frac{7-9}{2} - \frac{12-3}{3}$.

Hafva begge faktorerne samma tecken, begge + eller begge —, får produkten »plus» (+); hafva de olika tecken, den ene + den andre — får produkten »minus» (—). Detsamma gäller om dividend och divisor vid division. Att *jaka* till ett *jakadt*, blir *jakadt;* att *jaka* till ett *nekadt* blir *nekadt*. Att *neka* till ett *jakadt* är att antaga det såsom *nekadt;* att *neka* till ett *nekadt* är att antaga det såsom *jakadt*. A säger om B att han har 5000 kronor förmögenhet d. v. s. + 5000 kr. Nej, säger C, det är ej förmögenhet, hvad är det då? — 5000 (skuld). Nej, säger D, det är ej skuld, hvad är det då? + 5000 (förmögenhet).

Ex. 9. Anders har 85 äplen och Birger har 16 äplen mindre än A, men Carl har 4 gånger så många äplen som B. Huru många har C? $x = (85 - 16)4$.

När du nu utför hvad du har tecknadt inom klammen, är ju det hvad Birger har $= 69$ och då är $69 \times 4$ hvad Carl har (tecknadt). Men nu har du ett tvåsiffrigt tal att multiplicera med 4. Af decimalsystemet vet du att detta 69 är $= 6$ tior + 9 enheter, en summa af två ensiffriga tal. Nu vet du tillika (se hufgr. 11) att en summas hvarje del skall multipliceras, om hela summan skall med samma vara multiplicerad. Alltså går du från höger eller venster, från venster sålunda:

$4 \times 6$ tior $=$ 24 tior $= 240$ enheter
$4 \times 9$ enheter $=$ ......... $+$ 36 enheter $= 276$.

Men, Petter, du bör gå från höger en allmänt befaren god väg, som har den förtjensten att minska skrifbesväret, utan att för ditt tänkande vara en »genväg»; ty du får i »hufvudet» utföra alla operationerna, men blott *skrifva facit* sålunda:

I hufvudet multiplicerar du enheterna, uttager de tior, som möjligen ligga i produkten, gömmer i hufvudet dessa tior och *uppskrifver de öfverblifna enheterna*. Derefter multiplicerar du tiorna och lägger till dem de gömda tiorna, och uttager så ur tiornas summa de hundratal, som möjligen finnas der, gömmer dessa hundratal och *uppskrifver de öfverblifna tiorna*, och så fortgår du undan för undan åt venster, om det tal,„ som skall multipliceras, vore än så mångsiffrigt. Är äfven det tal flersiffrigt, hvarmed multipliceras, sker multiplikationen med hvarje siffra i talet särskildt, hvarigenom du får så många produkter att addera som siffrorna voro, med hvilka multiplicerades.

Ex. 10. Om Carls äplehög (85—16)4 göres 8 gånger mindre d. v. s. om åttondelen tages af densamma, huru många äplen har då Carl?

$$x = \frac{(85-16)4}{8} =$$

Nu kan du genast *förkorta* talet, ty gemensam faktor 4 ligger i dividenden och divisorn, eftersom $8 = 4 \times 2$, då du får $\frac{85-16}{2} = \frac{69}{2}$.

Ex. 11. Anders fiskade 15 ålar, men 9 af dem rännde bort. Emil fiskade 3 gånger så många ålar som Anders hade i behåll. Huru många ålar hade Emil? $x = (15 - 9)\,3 =$

Men när Emil kom hem, hade under vägen så många ålar rännt bort äfven för honom, att han blott hade fjerdedelen af sina fiskade ålar. Huru många? $x = \frac{(15-9)3}{4} = \frac{6 \times 3}{4} =$

Nu kan ju förkortas med 2 till $\frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$. »Var den halfva ålen lefvande?» frågade Petter småslugt. Ja, svarades, ty det var en ålunge, som i räkningen upptogs till det värdet i förhållande till en af de 4 större.

Ex. 12. Anders förlorade af sina penningar 25 kronor och hade 37 kronor qvar. Emil hade hälften så många kronor som A. hade innan han hade gjort sin förlust; huru många kronor hade Emil?

$$x = \frac{25+37}{2} =$$

Ex. 13. A sålde 16 af sina dufvor och hade 14 dufvor qvar, men B hade blott femtedelen så många som A hade före försäljningen. Huru många hade B?

$$x = \frac{16+14}{5}$$

Ex. 14. A hade 30 dufvor och 24 ankor. B hade 6 gånger mindre fjäderfän. Huru många fjäderfän hade B?

$$x = \frac{30+24}{6}$$

Förkorta nu (se hgr. 11) då får du

$$x = 5 + 4 = 9.$$

Ex. 15. Af sina 26 äplen åt Anders upp fjerdedelen, huru många äplen hade han då?

Gif akt, Petter! Det är en väsentlig skilnad i begreppet af att taga fjerdedelen af något, d. v. s. att göra det 4 gånger mindre, eller att taga fjerdedelen af något derifrån. Nu tecknade Petter

$$x = 26 - \tfrac{26}{4}$$

förkorta $\tfrac{26}{4}$ alltså $x = 26 - \tfrac{13}{2}$.

Om nu $\tfrac{13}{2}$ utföres till $6\tfrac{1}{2}$, så har du att draga det »blandade talet» från det hela, då du först kan taga 6 hela från 26, så återstår 20 och derefter $\tfrac{1}{2}$ derifrån, så återstår $19\tfrac{1}{2}$. Men du kunde hafva dragit de $\tfrac{13}{2}$ äpplena från de 26, sedan du gjort dessa 26 till halfva (se hgr. 8), då du får

$$\frac{2 \times 26}{2} - \frac{13}{2} = \frac{52 - 13}{2} = \frac{39}{2} = 19\tfrac{1}{2}.$$

Alltså två vägar att välja efter behag.

Ex. 16. Carl hade ett snöre 6 fot 4 tum långt, men Emils snöre var 5 gånger så långt; huru långt?

Petter erinrade sig, att 1 tum var $\tfrac{1}{10}$ fot, följaktligen 4 tum $= \tfrac{4}{10}$ fot, och tecknade

$$x = 6\tfrac{4}{10} \times 5.$$

Nu såg han att $\tfrac{4}{10}$ kunde förkortas med 2 och fick

$$x = 6\tfrac{2}{5} \times 5.$$

Han såg på det blandade talet och visste att det var $6 + \tfrac{2}{5}$, och han visste nu att hvarje summans del skulle multipliceras med 5 och fick

$$x = 5 \times 6 + \frac{5 \times 2}{5} = 30 + 2 = 32 \text{ fot}.$$

Men nu kom Petter att tänka på hvad han lärt, att ett »sorttal», fördeladt i sina sorter enligt tiotalsordningen, kunde genast skrifvas såsom helt tal och såsom sådant behandlas, hvarför han tecknade $x = 6{,}4 \times 5 = 320$ (trehundratjugo tum), ty de sextiofyra voro tum; men dessa 320 tum, fördelade i sina sorter, blefvo $32{,}0$ = trettiotvå fot och ingen tum.

Ex. 17. Handlanden A har sålt 8 meter 7 decimeter och 9 centimeter sidenband och fått 8 öre för hvarje centimeter; huru mycket för hela bandpartiet fick han då i penningar (kronor och öre)?

$$x = 879 \times 8 =$$

Ex. 18. Från Amerika lästes i en tidning: »På ön S:t Christoph har den 4 dennes (Jan. 1880) en öfversvämning egt rum, vid hvilken 200 menniskor omkommo. Skadan beräknas till 250,000 dollars.»

Efter orden taget, hvad värde i medeltal har ett menniskolif i Amerika?

$$x = \frac{250{,}000}{200}$$

Du kan på talen se att här kan förkortas med 10 och åter 10 d. v. s. med $10 \times 10 = 100$. I allmänhet då dividend och divisor sluta med 0, förkortas med så många gånger 10 som nollorna äro lika många i begge. Man »stryker» lika många nollor, har sagts. Hvad har du nu?

$$x = \frac{2500}{2} = \frac{2000}{2} + \frac{400}{2} + \frac{100}{2} = 1000 + 200 + 50 = 1250 \text{ dollars.}$$

Ex. 19. Carl har 75 kronor 68 öre, men Emil har blott femtedelen deraf. Huru mycket har E?

$$x = \frac{7568}{5}.$$

Såsom vi funno det i föregående Ex., kan man genom den tecknade qvotens fördelning i qvoter, hvari divisorn går jemt upp, lätt genom »hufvudräkning» på den vägen komma till facit. Men vi hafva en allmän väg från venster, då vi säga vid $\frac{7568}{5}$

5 ligger i 7 en gång, men $1 \times 5 = 5$, alltså är 2 öfver. När nu dessa 2 från sjuans rum lägges till 5 i dess rum, får du 25, hvari 5 ligger jemt 5 gånger. I följande 6 ligger 5 en gång, då du har 1 öfver, som från sexans rum lagdt till 8 i dess rum gör 18, hvari 5 ligger 3 gånger, då 3 blir öfver. I dessa 3 ligger ej 5 någon hel gång, hvarför den qvoten blir tecknad $\frac{3}{5}$. Alltså med aktgifvande på hvad siffrorna gälla i dividenden, får du summan af de särskilda utförda qvoterna $= 1513\frac{3}{5}$.

Kan du icke operera i »hufvudet», så att du slipper skrifva mer än de derunder uppkommande utförda qvotsiffrorna, då får operationen följande omständliga utseende:

| ena faktoren divisorn | produkten dividenden | andra faktorn utf. qvoten |
|---|---|---|
| 5 | 7568 | $1513\frac{3}{5}$ |
| | 5 | |
| | 25 | |
| | 25 | |
| | 006 | |
| | 5 | |
| | 18 | |
| | 15 | |
| | 3 | |

Ex. 20. A hade utsått 9 kub.fot, 6 kannor hvete, men B blott 3 k.fot, 2 knr hvete. Huru många gånger mindre var B:s utsäde?

$$x = \frac{96}{32} = 3 \text{ (gånger mindre).}$$

Obs.! När divisor är flersiffrig, divideras med densamma sådan den är i sin helhet.

Ex. 21. Vinhandlaren A har 8 hektoliter 6 dekaliter och 9 liter vin. Yrkesbrodern B har blott 76 liter af samma vara. Deras yrkesbroder C har 4 gånger mindre än de förra tillsammans; huru mycket?

$$x = \frac{(869 + 76)}{4}.$$

Ex. 22. Anders har 26 kronor 48 öre. Carl har 4 gånger mindre än A. Huru mycket hafva de tillsamman?

$$x = 2648 + \frac{2648}{4}.$$

Nu utföres först den tecknade qvoten, som här är addend, och derefter den tecknade summan.

Ex. 23. Exportören A har 5 kilogram 8 gram hafre och exportören B har *4 gånger mindre* af samma vara. Huru *mycket mindre* i vigt är B:s än A:s hafre?

$$x = 5008 - \frac{5008}{4}.$$

Ex. 24. A egde 3 hela hemman, men sålde 7 sextondedels hemman; huru mycket i hemmantal hade han sedan?

Gif akt! Här säges icke att A sålde sju sextondedelar af sina tre hemman $\left(\frac{7 \times 3}{16}\right)$, utan att han sålde sju sextondels hemman d. v. s. sju sextondedelar af 1 hemman.

$$x = 3 - \tfrac{7}{16} \text{ (se hgr 8).}$$

Hvad du här har att göra, har kallats »att subtrahera bråk från helt tal» och det är så. Vigast sker det dermed att du af det hela tager 1, förlängdt till likbenämdt med bråket då du får:

$$2 + \tfrac{16}{16} - \tfrac{7}{16} = 2 + \tfrac{9}{16} = 2\tfrac{9}{16}.$$

Ex. 25. A hade en tomtplats innehållande 9 qvadratmeter 68 qvadratdecimeter, B hade en tomtplats innehållande 6 qvadratmeter. Huru *många gånger mindre* var den sednare tomtplatsen?

a) $x = \frac{968}{600} = 1\frac{46}{75}$, eller 1,613.. gånger mindre.

Men huru *mycket* mindre?

b) $x = 968 - 600 = 368$ qvadratdecimeter $= 3$ qvm, 68 qdcm $= 3{,}68$ qvm.

Vid multiplikation och division, der man har att göra med företrädesvis s. k. »decimaler», finner du att utförda produkten får så många decimaler som de äro i begge faktorerna, t. ex. $3{,}024 \times 2{,}2351 = 6{,}7589424$; samt att utförda qvoten får så många decimaler mindre som de äro flera i dividenden än i devisorn t. ex. $\frac{4,2300}{2,35} = 1,80$. Äro flera decimaler i divisor än i dividenden, tillsättas 00 till dividenden, att decimalerna i begge blifva lika många. I allt opereras såsom med hela tal.

Ex. 26. A reser till staden med 672 kronor på fickan, »inkasserar» der 825 kronor och köper hem »diverse» för 378 kronor. B reser ock till staden utan ett öre på fickan, men gör »affärer» och kommer hem med 7 gånger större summa än A hade; huru många kronor har B?

$$x = 7\,(672 + 825 - 378).$$

Ex. 27. Tre mjölhandlare sålde en dag, A 1574 gram mjöl, B 689 gram och C 5 gånger mindre än skilnaden mellan hvad A och B sålde. Huru många gram sålde C?

$$x = \frac{1574 - 689}{5} =$$

Ex. 28. Lille Ivar eger icke ett öre, utan har skuld »öfver öronen», ty han har lånat 5 öre af Emil och 8 öre af Carl. Men lille Frans är ändå sämre i sina affärer, ty han är bortskyldig 3 gånger mer än Ivar. Huru stor är Frans skuld?

$$x = (-5 - 8)\,3 = -39 \text{ öre.}$$

Nu är Frans ledsen öfver sin stora skuld, hvarför en hans vän säger: »Jag vill döda hans skuld», då han till »lilla vännens» $-39$ lägger $+39$ öre, eller gifver Frans 39 öre förmögenhet. Frans har då $-39 + 39 = 0$, hvarken skuld eller förmögenhet. En annan vän säger: Jag vill göra Frans skuld 2 gånger större, men *nekadt*, så att det icke är en fördubblad skuld, utan en förmögenhet till krontalet lika stor. Han multiplicerar icke då skulden $-39$ med $+2$ *(jakadt)*, ty då blir skulden fördubblad, utan med $-2$ *(nekadt)*, hvarför $-39 \times -2 = +78$.

Men hvad får nu denne vän praktiskt göra för att »förvandla» denna skuld till en 2 gånger så stor förmögenhet? Jo, först får han gifva Frans 39 öre, hvarmed skulden dödas, och dertill $2 \times 39$ öre, som blir hans förmögenhet $= +78$. $3 \times 39$ öre förmögenhet och 39 öre skuld, $3 \times 39 - 39$ är ock $= 2 \times 39 = +78 = -39 \times -2$.

För division med nekadt, se Ex. 8.

Ex. 29. »Tal i sorter», som ej äro indelade efter decimalsystemet, äro vanliga »blandade tal», som derför kunna såsom »blandade tal» behandlas.

Du har hört, Petter, berättas att 1 tunna $= 32$ kappar och då kan du förstå att 1 kappe $= \frac{1}{32}$ tunna. När du detta vet och förstår, då förstår du att t. ex. 4 tunnor $= 4 \times 32$ kappar och att 4 kappar $= 4 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$ tunna.

Det är ju i sjelfva verket intet annat än multiplikation och division »i hela tal» tecknadt, och som på vanligt sätt utföres.

a) 12 tunnor, huru många kappar? $x = 12 \times 32 =$

b) 96 kappar, huru många tunnor? $x = \frac{96}{32} =$

c) Hvad tal är det, som uttrycker 12 kappar mindre än 3 tunnor? $x = 3 \times 32 - 12$ kappar; eller de 3 tunnorna fördelade i 2 tunnor 32 kappar, då man har 2 tunnor 32 kappar $- 12$ kappar. $= 2$ tunnor 20 kappar $= 2\frac{20}{32} = 2\frac{5}{8}$ tunnor.

Ex. 30. A utsådde 9 tunnor 24 kappar hvete och B utsådde 5 gånger mer hvete; huru mycket sådde B? $x = 9\frac{24}{32} \times 5 = 5 \times 9 + \frac{5 \times 24}{32} = 45 + \frac{120}{32} = 45 + 3\frac{24}{32}$ $= 48\frac{24}{32}$ (48 tunnor 24 kappar) $= 48\frac{3}{4}$ tunna (efter förkortning som du fördelaktigast kunnat göra från början).

Ex. 31. C behöfde till brödföda för hushållet 16 tunnor, 8 kpr råg, D behöfde för sitt hushåll *4 gånger mindre*, eller *fjerdedelen* af hvad C behöfde, huru mycket?

$x = 16\frac{8}{32} : 4 = 4\frac{2}{32}$ (fyra tunnor 2 kappar), förkortadt $4\frac{1}{16}$ tunna.

Ex. 32. A skördade på en åker 9 tunnor 8 kpr hafre, B skördade på en lika stor åker 5 tunnor 17 kpr, huru *mycket mindre* än A skördade B?

$$x = 9\tfrac{8}{32} - 5\tfrac{17}{32}.$$

Alla vårt lands gamla sorttalsindelningar oaktadt, olika för »torra och våta varor», olika för olika städer, orter och yrken, i obeskrifligt virrvarr, så att ingen ännu kunnat framställa en fullständig »sorttabell», eller länge *minnas* densamma, kunna dock alla »sorttal» behandlas efter enahanda grundlag, så att barnen ej behöfva råka i stor villrådighet om »reduktionstalet», blott de få *höra* huru man i Norrland eller i Skåne behagat indela »sorttalet».

Såsom de fått inse af de sorttal, som indelats efter decimalsystemet, att näst högre sortens enhet är tio, hundra eller tusen gånger större än den näst mindre sortens, och att den mindre sortens enhet följaktligen är tio, hundra eller tusen gånger mindre än den större sortens enhet, så kunna barnen förstå, att t. ex. en tolft är tolf gånger större än 1 stycke och att detta är tolf gånger mindre än tolften, så att de kunna teckna $12 \times 1$ och $\frac{1}{12}$. När de få höra att 1 »pund» (lispund) fördelas i 20 »marker» (skålpund), så förstå barnen, att 1 pund är 20 gånger 1 mark och 1 mark 20 gånger mindre än 1 pund och de kunna teckna $20 \times 1$ och $\frac{1}{20}$ o. s. v. Icke behöfver man då göra »sorträkning» till ett särskildt femte »räknesätt», hvarmed barnen ej i någon fråga fått att skaffa förr än de arbetat sig igenom »de fyra räknesätten i hela tal» kanske sysselsatte med hvarje särskildt räknesätts enahanda hela terminen, såsom praxis varit i allmänhet. Hvar man känner dock det gamla ordspråket: *omvexling förnöjer.*

Ex. 33. Ur hvarje exempel, som man haft för addition eller subtraktion, kan man taga konkreta exempel för multiplikation och division. Man behöfver ju endast till en der förekommande summa eller addend foga en faktor efter behag. T. ex. från vårt Ex. 26.

a) Ingeniör A uppmätte 68 km, 423 m., 5 dcm, 7 cm och 9 mm. Ingeniör D uppmätte 3 gånger så mycket; huru mycket uppmätte D?

b) Ingeniör B uppmätte 95 km, 78 m., 4 dcm och 9 mm. Ingeniör C. uppmätte 23 gånger mindre än B. Huru mycket uppmätte C?

Ex. 34. A har uppmätt 106 qkm, men B har uppmätt 174 gånger mindre. Huru mycket har då B uppmätt? $x = \frac{106}{174}$.

Obs.! Alla jemna tal kunna divideras jemt genom 2. »Förkorta» derför qvoten, så får du? $x = \frac{53}{87}$.

Att här är mindre än 1 qvadratkilometer ser du af förhållandet mellan dividend och divisor (se hufgr. 13). Du har svårt för att fatta hvad åttiondesjundedelen af 53 qvadratkilometer är. Men du vet ju att kilometern har många sorter under sig. Uttryck derföre 53 qv.kilometer i minsta sort så får du 53,00,00,00,00,00,00 qv.millimeter. Gå sedan på med division genom 87, så får du se huru många qhm, qdkm, qm, qdcm, qcm och qmm du får, då du får lättare för att fatta talet.

Ex. 35. En fader behöfde 15 f. 7 t. kläde för sin egen räkning. För sin son Axel behöfde han tredjedelen och för sin son Jonas behöfde han fjerdedelen deraf. Huru mycket behöfde han för sönerna tillsammans?

$x = \frac{157}{3} + \frac{157}{4}$ tum $= 52\frac{1}{3} + 39\frac{1}{4} = 91 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Nu kunna $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ hvarken blifva två tredjedelar eller två fjerdedelar af 1 tum. Men se hgr. 12 och gör så med de qvoterna, som der säges, så får du $\frac{4\times1}{4\times3}+\frac{3\times1}{3\times4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$ och då har du svaret på frågan i $91\frac{7}{12}$ tum d. v. s. 9 fot $1\frac{7}{12}$ tum.

Ex. 36. Då 4 bröder lika dela 250 kronor, hvad få de hvar?

$$x=\frac{250}{4}=62\tfrac{2}{4}\text{ krona.}$$

Nu är $\frac{2}{4}$ krona detsamma som fjerdedelen af 2 kronor, och som 2 kronor är detsamma som 200 öre, så är ju fjerdedelen af 2 kronor detsamma som fjerdedelen af 200 öre $=\frac{200}{4}=50$ öre, detsamma som 50 hundradelar af 1 krona, hvarför du enligt decimalsystemet har $62\frac{2}{4}$ kronor $=62{,}50$.

Ex. 37. Men om nu bröderna hade varit 3 att lika dela 250 kronor, hvad hade de då fått hvar?

$$x=\frac{250}{3}=83\tfrac{1}{3}\text{ kr.}$$

Nu är tredjedelen af 1 krona detsamma som tredjedelen af 100 öre, alltså $=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$ öre. Alltså blir frågans facit $x=83{,}33\frac{1}{3}$.

Om jag till grundenheten 1 sätter 0, så får jag icke 1 »förvandladt till 10, utan till $\frac{10}{10}=1$. Alltså om jag har t. ex. $\frac{2}{3}$ och till 2 sätter 0, får jag tredjedelen af 20 tiondedelar. Tredjedelen af 20 är $6\frac{2}{3}$. Jag har således 6 hela tiondedelar, som jag enligt dec.-systemet skrifver 0,6 och derutöfver $\frac{2}{3}$, tredjedelen af 2 tiondedelar. Sätter jag nu 0 till 2, så får jag de två tiondedelarne till 20 hundradelar. Utför jag nu divisionen genom 3, får jag åter sexhundradelar och har således 0,66; men som jag äfven nu fick $\frac{2}{3}$ öfver, så fortsätter jag på samma sätt och får 6 tusendelar, 6 tiotusendelar o. s. v. emedan 3 aldrig går jemt upp i ett tal slutande med 0.

När så förekommer, nöjer man sig med så många decimaler, som man anser sig behöfva, såsom i exemplet 0,66, der $\frac{2}{3}$ var tredjedelen af 2 kronor, som blef $66\frac{2}{3}$ öre. I fina räkningar nöjer man sig vanligen med 5 decimaler, emedan den sista uttrycker hundratusendedelen af enheten, som, t. ex i fråga om ett skålpund kött, ej kan släcka en »talgoxes» hunger.

Emellertid ser du häraf huru man »förvandlar» hvad annat »bråk» som helst till »decimalbråk».

Ex. 38. a) Carl har tvåfemtedels krona, d. v. s. 2 kronor 5 gånger mindre, eller femtedelen af 2 kronor, eller femtedelen af 1 krona 2 gånger. Emil har trefjerdedels krona d. v. s. 3 kronor 4 gånger mindre, eller fjerdedelen af 3

kronor, eller fjerdedelen af 1 krona 3 gånger. Huru mycket hafva de tillsammans?
$x = \frac{2}{5} + \frac{3}{4}$.

Nu kan du taga qvoterna abstrakt, göra dem likbenämda och addera dem, då du får $x = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}$ krona.

Men du kan ju ock taga talen konkret, då du vet, att 2 kronor är 200 öre och 3 kronor 300 öre, då du får $x = \frac{200}{5} + \frac{300}{4} = 40 + 75 = 115$ öre $= 1{,}15$ (en krona 15 öre).

b) Carl har 5 kronor, Emil har 6 gånger mindre än Carl har, och Gustaf har 2 sjundedelar af 1 krona mindre än Emil. Huru mycket hafva de tillhopa Emil och Gustaf?

$$x = \frac{5}{6} - \frac{2}{7}.$$

Gör såsom i förra exemplet, akta på tecknet! Gå begge anvisade vägarne, så får du se hvilkendera är den genaste vägen till facit!

Den ena $x = \frac{7 \times 5}{7 \times 6} - \frac{6 \times 2}{6 \times 7}$ kronor.

Den andra $x = \frac{500}{6} - \frac{200}{7}$ öre.

Ex. 39. a) Carl har tvåfemtedels krona. Emil har trefjerdedelar af hvad Carl har. Huru mycket har Emil?

Trefjerdedelar af något vill ju säga fjerdedelen af detsamma 3 gånger, eller detsamma gjord 4 gånger mindre och 3 gånger större. Klart är då, att detsamma måste blifva *mindre*. Vi veta ju att en tecknad qvot (här $\frac{2}{5}$) blir 4 gånger mindre, då *divisorn* göres 4 gånger *större* och att den blir 3 gånger större, då *dividenden* göres 3 gånger större (se hufgr. 13). Att af $\frac{2}{5}$ taga $\frac{3}{4}$ är att taga $\frac{2}{5}$ trefjerdedels gånger, alltså i frågan

$$x = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 0{,}30 \text{ öre.}$$

Att sätta 0 till 0,3 förändrar ej värdet, ty $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$.

b) Carl har trefjerdedels krona och Emil har två femtedelar af hvad Carl har; huru mycket har Emil?

$$x = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = 0{,}30 \text{ öre.}$$

Klart är att facit skulle blifva detsamma som i a) efter axiomet: *samma faktorer gifva samma produkt*, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$.

Ex. 40. Carl har $\frac{2}{5}$ krona. Emil har $\frac{3}{4}$ krona. Huru många gånger innehålles hvad Emil har i hvad Carl har? $x = \frac{2}{5} : \frac{3}{4}$.

En fjerdedel går upp i ett tal, hvilket som helst, 4 gånger *mer* än 1 går upp deri, eftersom $\frac{1}{4}$ är 4 gånger mindre än 1. Således går $\frac{1}{4}$ upp i $\frac{2}{5}$ 4 gånger mer än 1 d. v. s. åtta femtedels gånger, $\frac{4 \times 2}{5} = \frac{8}{5}$. Men $\frac{3}{4}$ är 3 gånger mer än $\frac{1}{4}$, alltså måste $\frac{3}{4}$ gå upp i talet $\frac{8}{5}$ tre gånger mindre, alltså $\frac{8}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$ gånger. Vi se häraf att, då *divisorn* är en tecknad qvot, vi få att göra *dividenden* (må vara hvad tal som helst) så många gånger större som den tecknade qvotens divisor utvisar och så många gånger mindre, som den tecknade qvotens dividend utvisar. Att ställa divisorn (bråket) på hufvudet med »räknekonsten» kunna vi sålunda undvika, men vi få icke heller göra, hvad vi här i praxis se, till en mekanisk »minnesregel».

Är divisorn en »egentlig» tecknad qvot (»egentligt bråk») mindre än 1, måste alltid den utförda divisionen gifva ett tal, *större* än dividenden, såsom vid multiplikation en »egentlig» tecknad qvot såsom faktor gifver en produkt *mindre* än den andra faktorn — allt i rak motsats till division och multiplikation med ett tal större än 1.

Ex. 41. A har en egendom, värd 27,800 kronor. B har en egendom, värd 3400 kr. Huru många gånger är det förra egendomsvärdet större än det sednare? $x = \frac{27800}{3400} =$

Har du gifvit akt på föregående sådane fall, så vet du att man genast kan »stryka» lika många nollor i dividend och divisor, d. v. s. »förkorta» med 10, 100, 1000 o. s. v.

Ex. 42. I ett helt hemman har A $\frac{1}{8}$, B $\frac{5}{16}$ och C resten. Huru stor del har C? $x = 1 - (\frac{1}{8} + \frac{5}{16})$.

Nu ser du att du lätt får $\frac{1}{8}$ likbenämd med $\frac{7}{16}$, då du »förlänger» $\frac{1}{8}$ med 2, alltså $x = 1 - (\frac{2}{16} + \frac{5}{16}) = 1 - \frac{7}{16}$. När du nu förlänger 1 till likbenämndt med $\frac{7}{16}$, får du $\frac{16}{16} - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$.

Ex. 43. I 3 hela hemman eger D åttondelen, E sjettedelen 5 gånger och F resten. Huru mycket eger F efter 1 helt hemman räknadt?

D $x = 3 \times \frac{1}{8}$, B $x = 3 \times \frac{5}{6}$, alltså F $x = 3 - (\frac{3}{8} + \frac{15}{6})$.

Förlänges nu hvardera qvoten med hela den andres divisor, så blifva de likbenämnda. Men förlängas de blott med den faktor i den andres divisor, som *icke* är gemensam för begge divisorerne, så blifva de likbenämda i mindre form. Gör på begge sätten, så ser du vinsten af mindre skrifbesvär på det ena eller på det andra sättet! och orsaken? I förra fallet får du qvoterna förlängda med den gemensamme divisorn, som då kan genom förkortning uttagas ur begge, utan att likheten i deras värden rubbas, men qvoterna ändå blifva likbenämda.

Ex. 44. En väglängd innehöll $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{5}{8} + \frac{3}{10}$ kilometer; huru mycket tillsammans?

a) Nu ser du att qvoternas divisorer 3 och 9 hafva gemensam faktor 3. Då vet du huru vigt du får dem likbenämnda till $\frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}$. Du ser ock, att divisorerne 8 och 10 hafva gemensam faktor 2. Då vet du att du i minsta form får dem likbenämda till $\frac{25}{40} + \frac{12}{40} = \frac{37}{40}$. Nu har du $\frac{10}{9} + \frac{37}{40}$. Nu måste du förlänga med hela den andres divisor, då du får $\frac{400}{360} + \frac{333}{360} = \frac{733}{360} = 2\frac{13}{360}$ kilom. Och vill du nu veta hvad $\frac{13}{360}$ kilom. gör i hektometer, dekameter, meter, decimeter, centimeter och millimeter, så har du lärt det förut (Ex. 34).

b) Men, Petter, när man har så der många oliknämnige »bråk» att addera, så, för att slippa ifrån den allmännaste vägen att göra alla bråken liknämnige dermed att hvartdera förlänges med alla de öfriges divisorer, kan man uppsöka den minsta gemensamma divisorn för alla »bråken» (de tecknade qvoterna), hvilken minste gemensamme divisor är en produkt af alla divisorernes *gemensamme och icke gemensamme faktorer.*

Alltså har du i vårt Ex. i divisorerne

| | | |
|---|---|---|
| 3 och 9 gemensamme faktorn | 3 | |
| icke gemensamme faktorerne | | 1 och 3 |
| i 8 och 10 gemensamme faktorn | 2 | |
| icke gemensamme faktorerne | | 4 och 5 |

Alltså »minsta gemensamma divisorn» $3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 4 \times 5 = 360$. Men det är ju icke nog med att de ursprunglige divisorne blifvit så förlängda hvar och en till 360. För bibehållandet af qvoternas värden, måste ju ock dividenden förlängas med det tal, hvarmed divisorn blifvit förlängd. Och denna faktor finner du naturligtvis, när du dividerar den ursprungliga divisorn uti »minsta gemensamme divisorn», hvaraf man tagit sig anledning kalla denne för »den minsta gemensamma dividenden».

Enligt denna väg har du således med vår fråga att vidtaga 1:o fyra särskilda divisioner, för att uttaga divisorernes gemensamme och icke gemensamme faktorer; 2:o fyra särskilda multiplikationer för att få »den minsta gemensamme divisorn»; 3:o fyra särskilda divisioner, för att ur den »minsta gemensamme dividenden» få ut de faktorer, med hvilka de ursprunglige dividenderna skola förlängas; 4:o fyra särskilda multiplikationer för sagde ändamål; 5:o att addera de fyra nya dividenderna; 6:o att till helt eller blandadt tal utföra den tecknade qvoten, ifall den ej blir sjelf en tecknad qvot, mindre än 1.

Men nu, Petter, må du se dig om, huruvida vägen b) var genare än vägen a). Säkrast är att icke binda sig vid den ena eller andra vägen, utan se sig före, ty ofta är »genvägen» senväg.

Ex. 45. I patron E:s hus fanns 230 skålp. 68 ort och 25 korn silfver. I B:s hus fanns $6\frac{3}{4}$ gånger mindre. Huru mycket silfver var då i B:s hus?

$$x = 230,68,25 : 6\tfrac{3}{4}.$$

Gif akt! När ett blandadt tal är *dividend*, t. ex. $6\frac{3}{4} : 3$, kan man dividera särskildt hvardera termen i summan $6 + \frac{3}{4}$, då du får $2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$, eller ock kan man förvandla $6\frac{3}{4}$ till »oegentligt bråk», d. v. s. utföra summan $6 + \frac{3}{4}$ till *en* benämning $\frac{27}{4}$, då man har $\frac{27}{4} : 3 = \frac{27}{3 \times 4} = \frac{17}{12} = 2\frac{1}{4}$.

Men när man, såsom här, har det blandade talet såsom divisor, så kan man ej dividera med hvarje dess term särskildt, ty då skulle t. ex. $3 : (6 + \frac{3}{4})$ blifva $3 : 6 + 3 : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{2}$. Man måste här i $3 : 6\frac{3}{4}$ förvandla det blandade talet till »oegentligt bråk», då man får $3 : \frac{27}{4} = \frac{4 \times 3}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.

Här är samma grund som vid division i hela tal, der man ej dividerar med divisor i sina beståndsdelar särskildt, utan med hela divisorn, och här är $\frac{27}{4}$ det hela af $6 + \frac{3}{4}$.

Ex. 46. A har $25\frac{2}{5}$ kronor, B har $\frac{3}{4}$ krona. Huru många gånger större, än det sednare, är det förra kapitalet?
$x = 25\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$.

Här äro flera vägar att gå:

a) att göra bråken af kronan till öre då man får $\frac{25,40}{0,75}$.

b) att dividera först 25 med $\frac{3}{4}$ och derefter $\frac{2}{5}$ med $\frac{3}{4}$, då man får $\frac{100}{3} + \frac{8}{15}$.

c) att förvandla $25\frac{2}{5}$ till $\frac{127}{5}$, då man får $\frac{127 \times 4}{5 \times 3}$.

d) att abstrakt förvandla $\frac{2}{5}$ och $\frac{3}{4}$ till decimalbråk, då man får $\frac{25,4}{0,75}$, hvilket dock är detsamma som a), emedan man kan lägga till så många nollor man vill, utan att gällande decimalen förändras till värdet.

Ex. 47. För genomskärning af en jordkulle, der jernväg skulle gå fram och arbetskostnaden skulle beräknas efter den jordmassa, som var att bortgräfva, mätte A och fick 428 kubikmeter 350 kub.decimeter. B mätte och fick jordmassan till fyra femtedelar af hvad A hade fått. Huru många kub.meter och kub.decimeter fick B?

$$x = \frac{428350 \times 4}{5} =$$

Vigast att först förkorta, men nödvändigt är det ju icke.

Ex. 48. Anders har 69 kronor, B har 3 gånger mindre än Anders. Carl har 216 kronor och Emil har 4 gånger mindre än Carl. Huru mycket hafva alla fyra tillsammans?

$$x = 69 + \tfrac{69}{3} + 216 + \tfrac{216}{4} =$$

Ex. 49. A eger en femtedel i en egendom, värd 56,867 kronor och B eger resten. Huru mycket eger B i egendomen?

$$x = 56,867 - \tfrac{56867}{5} =$$

Ex. 50. Man har antagit 1 fot = $0,_{29690}$ meter och 1 meter = $3,_{3681}$ fot.

När du, Petter, i *minnet* väl inpreglat dessa antagna grundtal, då reder du dig lätt och utan »konst» med förvandlingen af fot till meter och meter till fot, vare sig i längd, yta eller rymd. Ty

a) när du vet att 1 f = $0,_{29690}$ m, då förstår du att t. ex. 8 f måste vara $8 \times 0,_{29690}$ m.

b) När du vet att 1 m = $3,_{3681}$ f, då förstår du att t. ex. 9 m måste vara $9 \times 3,_{3681}$ f.

c) Hvad är då 9 f 7 t 3 l i m räknadt?
$x = 9,_{73} \times 0,_{29690}$ m.

d) Hvad är då 5 m 4 dcm 3 cm 8 mm i f?
$x = 5,_{438} \times 3,_{3681}$ f.

e) Hvad är 3 ref 8 st 7 t i m?
$x = 380,_{7} \times 0,_{29690}$ m.

f) Hvad är 7 km 6 dkm 8 cm i f?
$x = 7060,_{08} \times 3,_{3681}$ f. o. s. v.

g) När du vet att 1 f = $0,_{39690}$ m, så förstår du att 1 qvf måste vara = $0,_{29690} \times 0,_{29690} = 0,_{088149}$ qvm.

h) När du vet att 1 m = $3,_{3681}$ f, så förstår du att 1 qvm måste vara = $3,_{3681} \times 3,_{3681} = 11,_{34409}$ qvf.

i) Hvad är då 12 qvref 9 qvf 8 qvt i qvm?
$x = 120009,_{08} \times 0,_{088149}$ qvm.

k) Hvad är då 13 qvhm 26 qvdkm 7 qvm 62 qdcm i qvf?
$x = 132607,_{62} \times 11,_{334409}$ qvf o. s. v.

l) När du vet att 1 qvf = $0,_{088149}$ qvm och 1 f = $0,_{29690}$ m, då förstår du att 1 kbf måste vara = $0,_{088149} \times 0,_{29690} = 0,_{026171}$ kbm.

m) När du vet att 1 qvm = $11,_{34409}$ qvf och 1 m = $3,_{3681}$ f, då förstår du att 1 kbm måste vara = $11,_{34409} \times 3,_{3681} = 38,_{2080}$ kbf.

n) Hvad är då 5 kbf 9 kbt i kbm?

$$x = 5,_{009} \times 0,_{026171} \text{ kbm.}$$

o) Hvad är då 3 kbm 7 kbdcm i kbf?

$$x = 3,_{007} \times 38,_{2080} \text{ kbf. o. s. v.}$$

Vill du hafva förvandlingen ännu mer »på håret nära», så tager du med dig än flera decimaler ur de erhållna produkterna.

På ett »ungefär» antager man 1 m = $1\frac{1}{3}$ f., följaktligen 3 m = 10 f; 30 mm (= 3 cm) = 1 decimaltum; 25 mm (= $2,_5$ cm) = 1 verktum; 1 qvm = $11\frac{1}{3}$ qvf; 9 qvm = 100 qvf.; 9 qvcm = 1 qvadrattum; 1 kbm. = $38,_{21}$ kbf.; 1 liter = $0,_{3821}$ kanna o. s. v.

Först då, när du lärt att sjelf från grundtalen göra förvandlingarne, må du få lära att begagna »genvägarne» i de tryckta »tabeller», som utgifvas dels till hjelp för de räkneokunnige, dels till lindring i besväret för de kunnige. »Latberger» äro nog goda att hafva till hands, men bäst att kunna reda sig dem förutan, när det gäller en affär der »Latberg» ej är på fickan.

Ex. 51. Af din lilla åskådningsgeometri vet du, Petter, att du af 10 tum multiplicerade med 10 tum, i fråga om qvadrater, får en qvadrat, som innehåller 100 qvadrater på en tums linie = 1 qvadrat på 10 tums linie. Nu säga vi ock i aritmetiken, att hvilket tal som helst, multipliceradt med sig sjelft, gifver det talets *qvadrat* och vi kalla den produkten för talets andra »dignitet», och vi utmärka den digniteten af t. ex. $5 \times 5 = 25$ med $5^2$, der tvåan utmärker andra digniteten af 5 eller qvadraten af 5, uppkommen af $5 \times 5$. Talet 5, i förhållande till dess qvadrat $5^2$ kalla vi qvadratens »rot».

På samma sätt uppkomma allt högre digniteter, t. ex. tredje digniteten, som kallas *kub* af t. ex. $5 \times 5 \times 5$, som tecknas $5^3$, kuben af 5, der talet 5 kallas *kubikroten*. Kuben af 5 meter är således $5 \times 5 \times 5 = 125$ kuber af 1 meter. Du kan således upphöja hvad tal som helst till hvad dignitet som helst, då det intet annat är än en multiplikation med samma faktorer. Att åter genom division utdraga hvad rot som helst ur hvad dignitet som helst, går ej så lätt och förbehålles derför åt skolans högre stadium. Men en hel hop qvadratrötter, ja till och med kubikrötter, kan du genom division utdraga, när du t. ex. aktgifver på huru du af vissa tal fått qvadrater och kuber. Du vet, att du af $2 \times 2$ fått 4, och då vet du att du af qvadraten 4 får roten 2. Af qvadraten 9 får du roten 3, emedan du vet att $3 \times 3 = 9$. Du vet att $8 = 2 \times 2 \times 2$, att således 8 är kuben af 2 och att 2 är roten till kuben 8. Qvadraten 9 hade till rot 3 och qvadraten 16 har till rot 4, emedan $4 \times 4 = 16$. Men hvad qvadratroten är till 10, 11, 12, 13, 14, 15, de tal som ligga emellan 9 och 16, kan du ej veta, ty det måste vara ett tal, som är något mer än 3 och något mindre än 4. Om derföre något 5:te »räknesätt» skulle finnas utöfver de fyra, som vi hittils haft att göra med, så vore det »rotutdragning» ur bekanta utförda digniteter.

Roten till qvadraten $7^2 = 7 \times 7 = 49$ tecknas $\sqrt{49}$;

Roten till kuben $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ tecknas $\sqrt[3]{27}$;

Utför nu $9^2$, $13^2$, $17^2$ o. s. v. Det kan du. Men utför $\sqrt{32}$, $\sqrt{44}$, $\sqrt{48}$ o. s. v. Det kan du ej med grundlighet lära förr än du kommit ett långt stycke i geometrien, längre än som nu öfvas inom lärdomsskolans tre första klasser.

---

## Tillägg.

När du, käre Petter, härefter kommer till egentlig problemlösning, så får du, hvad du undsluppit inom »qvatuor species», operera äfven med det obekanta ($x$), och du får operera med detsamma alldeles på samma *sätt*, som du opererat med ett helt bekant tal, och efter samma axiomer.

Såsom du vet, att t. ex. 1 och $\frac{1}{4}$, i talens egenskap af olikbenämda, icke kunnat i summa utföras till 2 hela eller till 2 fjerdedelar, utan måste vara en tecknad summa $1 + \frac{1}{4}$, intilldess du kunnat »förvandla» det ena till samma benämning med det andra; så finner du äfven att du ej i summa kan utföra t. ex. $x + 2$ förr än du får veta hvad $x$ är i sin enhet likbenämd med tvåans enhet.

Att samma lag gäller för utförande af subtraktion, vet du, hvarför äfven $x - 2$ eller $2 - x$ såsom sådant ej kan utföras.

Hvarhelst $x$ förekommer i samma problem, i huru många termer som helst och förknippadt huru som helst, har det öfverallt sitt samma värde, såsom t. ex. talet 2 abstrakt är detsamma, der det förekommer.

Såsom du vet att t. ex. $3 + 3 + 3 + 3$ genom »förkortad addition är detsamma som $4 \times 3$ (fyra treor), så måste ju ock $x + x + x + x$ vara detsamma som $4 \times x$ (fyra $x$), skrifves äfven $4x$ utan tecknet. Du förstår då, att $4x$ icke är en summa af 4 och $x$ $(4 + x)$ utan en produkt af 4 och $x$ $(4 \times x) = 4x = x + x + x + x$. Den bekante faktorn i $4x$ kallar man »coefficienten» för $x$.

Du vet, att $5 \times (6 \times 3)$ är detsamma som $(5 \times 6)3 = 30 \times 3$; du förstår ock då att $5 \times 6x$ måste vara detsamma som $(5 \times 6)x = 30\,x$. Du ser, att multiplikationen utföres genom coefficienternas multiplicering.

Du vet, att summan $5 \times 3 + 6 \times 3$ är detsamma som $(5 + 6)\,3 = 11 \times 3$. Du förstår då, att $5x + 6x$ måste vara detsamma som $(5 + 6)x = 11x$, så att du här utför summan $5x + 6x$ genom coefficienternas addering och $x$ satt dertill såsom faktor.

Du vet, att $(5 \times 3) \times (6 \times 3$ är detsamma som $(5 \times 6)$ $3 \times 3 = (5 \times 6)3^2 = 30 \times 3^2$. Du förstår då ock att $(5 \times x) \times (6 \times x) = (5 \times 6)\,x \times x = (5 \times 6)x^2 = 30x^2$.

Du vet, att t. ex. femtedelen af hvad tal som helst är talet, divideradt med 5, alltså femtedelen af $x = \frac{x}{5}$.

Du vet, att $\frac{5 \times 3}{5} = 3$, alltså ock $\frac{5x}{5} = x$.

Du vet, att $\frac{10 \times 3}{5} = 2 \times 3$, alltså ock $\frac{10x}{5} = 2x$.

Du vet, att $\frac{4 \times 3^2}{8 \times 3} = \frac{4 \times 3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{3}{2}$, alltså måste ock $\frac{4x^2}{8x}$ vara $= \frac{4x \times x}{8x} = \frac{x}{2}$, allt genom »förkortning» med samma faktor.

Du vet, att $\frac{8 \times 3}{4 \times 3^2} = \frac{8 \times 3}{4 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$; så måste ock $\frac{8x}{4x^2} = \frac{8x}{4x \times x} = \frac{2}{x}$ o. s. v.

# Sednare delen.

## Eqvationsläran.

Min k. Petter! Af »quatuor species» underbygd kan du ej undgå att inse sanningen i följande våra enkla grundlagar.

1. Ett tal (t. ex. 8) blir genom *addition* till värdet så *mycket större*, som det tal (t. ex. 4) gäller, hvilket dertill *adderas* t. ex. $8 + 4 = 12$.
2. Ett tal blir genom subtraktion till värdet så *mycket mindre*, som det tal gäller, hvilket derifrån *subtraheras*, t. ex. $8 - 4 = 4$.
3. Ett tal blir genom *multiplikation* till värdet så *många gånger större*, som det tal (mer än 1) gäller, med hvilket det *multipliceras*, t. ex. $8 \times 4 = 32$.
4. Ett tal blir genom *division* till värdet så *många gånger mindre*, som det tal (mer än 1) gäller, genom hvilket det *divideras*, t. ex. $\frac{8}{4} = 2$.
5. Ett tal, som genom *addition* blifvit till värdet *så mycket större*, blir återstäldt till sitt värde, då det genom *subtraktion* göres *lika mycket mindre* t. ex. $(8 + 4) - 4 = 8$.
6. Ett tal, som genom *subtraktion* blifvit till värdet så *mycket mindre*, blir återstäldt till sitt värde, då det genom *addition* göres *lika mycket större* t. ex. $(8 - 4) + 4 = 8$.
7. Ett tal, som genom *multiplikation* blifvit till sitt värde så *många gånger större*, återställes till sitt

värde, då det genom *division* göres lika *många gånger mindre*, t. ex. $(8 \times 4) : 4 = \frac{8 \times 4}{4} = 8$

8. Ett tal, som genom *division* blifvit till sitt värde så *många gånger mindre*, återställes till sitt värde, då det genom *multiplikation* göres lika *många gånger större* t. ex. $\frac{8}{4} \times 4 = \frac{8 \times 4}{4} = 8$.

9. Två tal, *till värdet lika*, begge enkla eller sammansatta, eller det ena enkelt och det andra sammansatt, *blifva till värdet lika, om man genom någon operation till värdet förändrar dem lika*, hvilket axiom upplöser sig i dessa fyra:
   a) *adderas lika till lika, blifva summorna lika;*
   b) *subtraheras lika från lika, blifva resterna lika;*
   c) *multipliceras lika med lika, blifva produkterna lika;*
   d) *divideras lika genom lika, blifva qvoterna lika.*

Dessa äro nu dina »reglor» för lösningen af problemer, och

*med egentliga problemer förstå vi sådane aritmetiska frågor, som uttryckas i en eqvation, i hvilken ett obekant (x) ingår, så förknippadt med andra tal, att man endast genom slutledning, och deraf beroende operationer, kan få kunskap om det obekantas värde, genom dess utlösning ur sin förknippning till likhet med något bekant.*

## Åskådningsexempel.

Anna hade från början 8 äplen och dertill fick hon 6 äplen. Denna äplehög minskades med 4 äplen. Den så minskade högen gjordes 5 gånger större och 2 gånger mindre. Huru många äplen hade nu Anna i högen?

Petter tecknade hvad som låg i frågan och utförde

$$x = \frac{(8 + 6 - 4) 5}{2} = 25$$

»Men detta var ju en *hufvudräkning* för småbarnen», sade Petter.

Ja, men som du nu har eqvationen

$$\frac{(8 + 6 - 4) 5}{2} = 25$$

så kan du få roa dig med att ur det förknippade talet till venster utlösa ett af deri ingående talen; t. ex. 8, så att du får se hvad det är lika med, då du nu vet, att det hela är $=25$.

Du vet ju hvad du gjort, att du ökade de 8 äplen, som Anna hade, med 6 genom addition, att du minskade denna summa med 4 genom subtraktion, att du gjorde den »högen» 5 gånger större genom multiplikation, och den »högen» 2 gånger mindre genom division, allt såsom tecknen säga dig och med tillämpning af axiomerna 1, 2, 3, 4.

Nu kan du upplösa denna kombinering dermed att du gör motsatsen af hvad du gjort, hvarigenom du *återställer* hvarje tal till hvad det förut var, med tillämpning af axiomerna 5, 6, 7, 8. Men du får väl då gå i omvänd ordning, »baklänges», så att du först får bort tvåan till återställande af produkten $(8+6-4)\,5$, genom att multiplicera $\frac{(8+6-4)\,5}{2}$ med 2.

Derefter återställer du $8+6-4$ genom att dividera $(8+6-4)\,5$ genom 5. Derefter återställer du $8+6$ genom att till $8+6-4$ addera 4 och slutligen återställer du 8 med att från $8+6$ subtrahera 6.

Men vid hvarje förändring af talet på den ena sidan, underlåt ej att göra *samma* förändring med det på andra sidan lika talet, eljest kan du omöjligen få talet 8 lika med sin like (9:de axiomet). Du *utför* dina operationer till venster, men du kan teckna eller utföra dem till höger.

Eqvationerna komma nu i ordning sålunda:

1 Eqv. $\frac{(8+6-4)\,5}{2} = 25$

2 Eqv. $(8+5-4)\,5 = 2 \times 25 \qquad = 50$ (ax. 8, 9)

3 Eqv. $8+6-4 \qquad = \frac{2\times 25}{5} \qquad = 10$ (ax. 7, 9)

4 Eqv. $8+6 \qquad = \frac{2\times 25}{5} + 4 \qquad = 14$ (ax. 6, 9)

5 Eqv. $8 \qquad = \frac{2\times 25}{5} + 4 - 6 \qquad = 8$ (ax. 5, 9)

Nu ser du af hvad till höger är utfördt att 8 är lika med 8. Det visste du förut, men att du så fått det, bevisar att du gjort rätt efter dina axiomer

Af det i 5:te Eqv. till höger tecknade, jemfördt med det i 1:sta Eqv. till venster tecknade, ser du att de tal, hvarmed 8 var förknippadt, sprungit öfver från venster till höger med motsatta tecken, en naturlig följd af dina motsatta operationer.

## Problemer.

Ex. 1. Anna hade en äplehög ($x$) och fick dertill af Eva 6 äplen. Nu skänkte hon Emma 4 äplen. Då kom den artige Carl med fickorna fulla af äplen och gjorde Annas äplehög 5 gånger större. Men derefter åtos upp så många, att Annas äplehög blef 2 gånger mindre, så att hon nu hade blott 35 äplen. Huru många äplen hade Anna från början?

Petter tecknade sanningen i frågan:

1 Eqv. $\frac{(x+6-4)5}{2} = 35.$

2 Eqv. $(x + 6 - 4)\,5 = 2 \times 35 \qquad = 70$ (ax. 8, 9)

3 Eqv. $x + 6 - 4 \qquad = \frac{2 \times 35}{5} \qquad = 14$ (ax. 7, 9)

4 Eqv. $x + 6 \qquad = \frac{2 \times 35}{5} + 4 \qquad = 18$ (ax. 6, 9)

5 Eqv. $x \qquad = \frac{2 \times 35}{5} + 6 - 4 = 12$ (ax. 5, 9)

Ex. 2. Anna hade 12 äplen, fick dertill af Eva en hop äplen ($x$), skänkte Emma 10 stycken, fick derefter sin äplehög af Carl fördubblad; hvarefter Anna gjorde ett äplekalas för kamraterna, så att högen bringades till fjerdedelen af hvad den var, så att hon nu hade 50 äplen. Huru många hade hon fått af Eva?

1 Eqv. $\frac{(12+x-10)2}{4} \qquad = 50$

2 Eqv. $(12 + x - 10)\,2 = 4 \times 50$ (ax. 8, 9)

3 Eqv. $12 + x - 10 \qquad = \frac{4 \times 50}{2}$ (ax. 7, 9)

4 Eqv. $12 + x \qquad = \frac{4 \times 50}{2} + 10$ (ax. 6, 9)

5 Eqv. $x \qquad = \frac{4 \times 50}{2} + 10 - 12$ (ax. 5, 9)

Ex. 3. Anna hade 16 äplen, fick af Eva 12 stycken, men den snåla Cari åt upp en hop ($x$) af Annas äplen med löfte att betala Anna med lika många. Nu lade den artige Anders så många äplen till Annas hög att den blef 4 gånger större, hvarefter Carl tog bort så många, att Annas äplehög blef 3 gånger mindre, så att hon nu hade 24 äplen. Huru många åt Cari upp?

1 Eqv. $\frac{(16+12-x)4}{3} \quad =$

2 Eqv. $(16 + 12 - x)\,4 = 3 \times 24$ (ax. 8, 9)

3 Eqv. $16 + 12 - x \qquad = \frac{3 \times 24}{4}$ (ax. 7, 9)

Om du nu plockar bort, särskildt 16 och särskildt 12, så får du två särskilta eqvationer, men tar du bort begge talen eller deras summa på en gång, får du en eqvationslösning mindre, alltså

4 Eqv. $-x = \frac{3 \times 24}{4} - 16 - 12$ (ax. 5, 9)

Reducera nu det bekanta talet, så får du

$$-x = -10.$$

Tecknet — säger dig, att de 10 äplena, som Cari åt upp, voro hennes skuld till Anna. Men om nu Cari icke egde några äplen att betala med, så hade ju Cari i denna sin skuld 10 äplen mindre än 0 äplen.

Ex. 4. Anna hade 36 äplen, fick dertill 18 och gaf bort 14, fick så sin äplehög *vissa gånger* ($x$) förökad och 6 gånger förminskad och hade då 68 äplen. Huru många gånger fick hon högen förökad?

1 Eqv. $\frac{(36 + 18 - 14)x}{6} = 68$

2 Epv. $(36 + 18 - 14)x = 6 \times 68$ (ax. 8, 9)

Du vill ju hafva $x$ ensamt. Du ser att det nu är en faktor i en produkt och du vet, att du får en faktor, när du dividerar produkten med den andra faktorn, som här är $36 + 18 - 14$. Alltså får du:

3 Eqv. $x = \frac{6 \times 68}{36 + 18 - 14} = 6\frac{18}{31}$ (ax. 7, 9)

Ex. 5. Anna hade 45 äplen, fick dertill 28 och gaf bort 37 äplen. Derefter fick hon högen 3 gånger större, men slutligen *vissa gånger* mindre, och då hade hon 54 äplen. Huru många gånger mindre gjordes hennes äplehög?

1 Eqv. $\frac{(45 + 28 - 37)3}{x} = 54$

2 Eqv. $(45 + 28 - 37)3 = 54x$ (ax. 8, 9)

Nu ser du att $x$ sprang öfver till andra sidan med motsatt tecken, ehuru tecknet ej der utsättes ($54\,x = 54 \times x$). Du får nu lösa $x$ der det står såsom faktor.

3 Eqv. $\frac{(45 + 28 - 37)3}{54} = x$ (ax. 7, 9)

$$2 = x$$

Men, Petter, hvaraf vet du eller kan du få veta, att du rätt löst och rätt funnit ditt facit, då du icke haft någon »facitbok» att förstulet titta uti?

»Åh, det måtte väl finnas någon proba här så väl som i quatuor species», svarade Petter.

Ja, och denna proba är, att du i första eqvationen insätter ditt funna facit i stället för $x$. Om du då vid reduktionen får till värdet samma tal på begge sidor, så har du rätt löst din eqvation, eljest icke. Använd nu proban på Ex. 1

(1 Eqv.). Insätt facit 12 i st. f. $x$, så får du $\frac{(12+6-4)5}{2} = 35$, hvaraf, efter reduktion, $35 = 35$. Probera så alla andra lösningar, der du vill vara viss på din sak. »Nå, sade nu Petter, då kunna ju småbarnen få säga mig om jag rätt löst min eqvation.» Visserligen, Petter.

Ex. 6. Om skräddaren ej »fuskat» äro ju skörten på en rock lika långa. Emils rockskört voro 12 tum långa. Då tyckte han att de voro förlånga och klippte bort 6 tum. »Hvart tänker du gå med dina skörtstumpar», sade Carl smågrinande, hvarför Emil misslynt lät skräddaren »tillskarfva» 9 tum. »Huru långskörtad du är», anmärkte nu Frans, pekande finger, hvarför Emil klippte bort 7 tum. »Dina skörtstumpar räcka ju ej halfvägs till knäna», sade nu Anders försmädligt, hvarför Emil lät skräddaren tillskarfva dem, så att de blefvo 3 gånger så långa. Men när nu Emil fått rocken på, så tyckte han sjelf att skörten voro allt för långa, hvarför han klippte bort så mycket att de blefvo *hälften* så långa. Huru långa hade Emils 12 tums långa rockskört nu blifvit, efter allt detta tillskarfvande och klippande?

»Det var mig ett långt problem», sade Petter. Men, Petter, då nu rockskörten voro lika långa, så kan du ju låta $x$ föreställa det ena, då du tecknar hvad som ligger i uppgiften. Petter tecknade:

$$x = \frac{(12-6+9-7)3}{2}$$

»Jaså, jag ser att här icke var något problem, utan blott en hufvudräkning för småbarnen», sade Petter, men reducerade och fick skörten hvarken längre eller kortare än de voro från början.

Ex. 7. En »fuskare» hade gjort en »långrock». När den »kom på» befanns det ena skörtet ($x$) behöfva tillskarfvas $2\frac{1}{2}$ tum för att blifva lika med det andra, som var $28\frac{3}{4}$ tum långt; huru långt var det kortare skörtet?

1 Eqv. $x + 2\frac{1}{2} = 28\frac{3}{4}$.

Nu äro skörten lika, och då förstår du att du måste göra detsamma med begge, om stumpen $x$ skall blifva lika med något i det andra skörtet, alltså

2 Eqv. $x = 28\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} =$ (ax. 5, 9.)

Ex. 8. Från det ena skörtet ($x$) på en långrock fick klippas bort $1\frac{2}{3}$ tum, hvarigenom det blef lika långt med det andra som var $22\frac{5}{6}$ tum långt; huru långt var då det längre skörtet?

1 Eqv. $x - 1\frac{2}{3} = 22\frac{5}{6}$.

2 Eqv. $x \quad = 22\frac{5}{6} + 1\frac{2}{3}$. (ax. 6, 9).

Ex. 9. Om den penningesumma, som A har ($x$), tredubblas, så har han lika mycket som B, hvilken har 75 kronor, huru mycket har A?

1 Eqv. $3\,x = 75$.

2 Eqv. $x \;= \frac{75}{3}$. (ax. 7, 9.)

Ex. 10. Om fjerdedelen tages af hvad C har, så har han de 300 kronor, som D har; huru mycket har C?

1 Eqv. $\frac{x}{4} = 300 =$

2 Eqv. $x = 4 \times 300 =$ (ax. 8, 9.)

Nog kan man så formulera dessa simpla frågor, att barnet, tecknande såsom talas, får deri en hufvudräkningsfråga hörande till qvatuor species. Men uttryckas frågorna såsom i Ex. 7—10, så göres barnet mindre bryderi, om det får teckna såsom talas och lösa frågan såsom här skett.

Ex. 11. Till längden af Carls rockskört ($x$) skarfvades en tredjedel af samma längd $\left(\frac{x}{3}\right)$, hvarefter 6 tum klipptes bort, så att skörtet blef så långt som det från början var. Huru långt var det från början?

1 Eqv. $x + \frac{x}{3} - 6 = x$.

»Nå lustigt, här måtte vara en räknegåta?» frågade Petter. Du ser nu, att du har $x$ på begge sidor, men du vill ju komma dertill att du får det ensamt på den ena sidan. Du har ett helt $x$ på bägge sidor. Tag bort dem (se ax. 9 b) så får du:

2 Eqv. $\frac{x}{3} - 6 = 0$.

Tag bort $-6$ (se ax. 6, 9 a), så får du

3 Eqv. $\frac{x}{3} = 6$, hvaraf (ax. 8, 9).

4 Eqv. $x = 3 \times 6 = 18$.

Är du ej säker på din sak, så använd proban på 1:sta Eqvationen, då du får:

$$18 + \frac{18}{3} - 6 = 18$$

reduceradt $18 = 18$.

Ex. 12. Till Carls skört ($x$) skarfvades tredjedelen deraf ($\frac{x}{3}$), hvarefter 6 tum klipptes bort. Härigenom blef det så långt som det från början var, om sjettedelen deraf lägges dertill. Huru långt var det från början?

1 Eqv. $x + \frac{x}{3} - 6 = x + \frac{x}{6}$.

Nu ser du att du kan taga bort ett $x$ från begge de lika »skörten», då du får

2 Eqv. $\frac{x}{3} - 6 = \frac{x}{6}$.

Nu kan du göra qvoterna likbenämda, då du har på ena sidan $\frac{2x}{6}$ och på andra $\frac{x}{6}$. Tar du nu bort från begge »skörten» en sjettedel $x$, så får du:

3 Eqv. $\frac{x}{6} - 6 = 0$.

Tag nu bort $-6$, så får du

4 Eqv. $\frac{x}{6} = 6$, hvaraf

5 Eqv. $x = 6 \times 6 = 36$.

Du hade i 1:sta Eqv. till venster kunnat af $x + \frac{x}{3}$ få $1\frac{2}{6}\,x$, ty i $x + \frac{x}{6}$ till höger har du $1\frac{1}{6}\,x$, då du genast kunnat från begge sidor subtrahera $1\frac{1}{6}\,x$, hvarigenom du hade kommit förbi 2:dra Eqv. d. v. s. funnit lösningen i 4:de »draget». Men »genvägarne» finner du nog många efterhand och minst får du hafva dem såsom »minnesregler», som ditt förstånds blick på talen ej af sig sjelf frammanar.

Ex. 13. Patron A slog 15 tunnor råg, vissa tunnor hafre och hälften så många tunnor korn som hafre i en binge och rörde om massan. »Blandsäden» var nu 38 tunnor. Huru många tunnor hafre? Huru många tunnor korn voro deri inblandade?

1 Eqv. $15 + x + \frac{x}{2} = 38$.

Du ser här att du först och lättast kan bli af med talet 15 genom subtraktion, alltså

2 Eqv. $x + \frac{x}{2} = 23$.

Du ser, att det »blandade» talet $x + \frac{x}{2}$, eller $1\frac{1}{2}\,x$, kan »förvandlas» till $\frac{3x}{2}$, då du får

2 Eqv. $\frac{3x}{2} = 23$.

Du ser, att du, för att få $x$, måste multiplicera med 2 och dividera med 3, alltså

3 Eqv. $x = \frac{2 \times 23}{3}$ hafretunnor =

följaktligen $\frac{2 \times 23}{2 \times 3}$ korntunnor, enligt uppgiften.

När man har, såsom i 2 Eqv. $x + \frac{x}{2} = 23$, så kan man af $\frac{x}{2}$ få $x$, då man multiplicerar $\frac{x}{2}$ med 2 (se axiomet 8), och detta kallar man att »häfva bråk», hvarigenom man får att göra med helt tal i stället för med bråk. Men den förändring i värde, som man gör med det ena »rockskörtet», måste man göra med det andra. Följaktligen måste du med hela $x + \frac{x}{2}$ göra den förändring som du vill göra med $\frac{x}{2}$, emedan du måste göra samma förändring till värdet med talet 23 på andra sidan. Alltså, då du på begge sidor multiplicerar $x + \frac{x}{2} = 23$ med 2, får du

$$2x + x = 46.$$

Nu har du $3x = 46$, hvaraf

$$x = \frac{46}{3} \text{ hafretunnor}$$

och hälften deraf $\frac{46}{2 \times 3}$ korntunnor.

Ex. 14. B blandade 3 tunnor råg tillsammans med vissa tunnor hafre, så att blandsäden blef 2 tunnor och dertill fem fjerdedelar af hafretunnornas antal. Huru många tunnor hafre voro då inblandade?

1 Eqv. $3 + x = 2 + \frac{5x}{4}$. Subtrahera 2!

2 Eqv. $1 + x = \frac{5x}{4}$.

Nu är $x$ på venstra sidan detsamma som $\frac{4x}{4}$, och du har $\frac{5x}{4}$ på andra sidan. När du då subtraherar $\frac{4x}{4}$, får du

3 Eqv. $1 = \frac{x}{4}$, hvaraf

4 Eqv. $4 = x$.

Men i 2:dra Eqv. $1 + x = \frac{5x}{4}$, hade du kunnat »häfva bråket» med att multiplicera öfver allt med 4, då du hade fått

2 Eqv. $4 + 4x = 5x$, hvaraf, då $4x$ subtraheras,

3 Eqv. $4 = x$.

Du får nu, Petter, i de fall, då du har $x$ i en tecknad qvot (bråk), göra på det ena eller andra sättet som dig vigast synes.

Men ännu ett att här lära. Icke var det nödigt att du ens tänkte dig de olika sädesslagen »blandade», för att finna tunnornas antal, då du ju i frågan helt simpelt hade en summa tunnor lika med en annan summa tunnor, antingen de voro hoprörda eller ej. På samma sätt, om här tillika hade varit fråga om värdena på de särskilda sädesslagen, så hade ju äfven då i frågan helt simpelt varit ett massvärde lika med ett annat massvärde, antingen sädesslagen hade varit hoprörda eller ej. För guldsmeden äro flera guldstycken af gifven vigt och »halt» tillsammans af ett bestämdt värde, antingen han smälter dem tillsammans eller ej, likavisst som kökspigans äpplen hafva sitt samma värde före och efter deras förvandling till äpplemos. Du kan häraf finna onödigheten af att göra lösningen af sådane frågor till ett särskildt »räknesätt».

Ex. 15. 8 tunnor råg till 16 kronors »pris» (så kallas värdet på enheten i massans *mängd*) och 12 tunnor hafre till visst pris såldes tillsammans för 200 kronor, hvad var då »priset» för hafren, d. v. s. hvad kostade hafretunnan?

Af qvatuor species vet du, Petter, att en massas värde är en produkt af massans *mängd* och värdet på enheten (priset). Teckna nu!

1 Eqv. $8 \times 16 + 12\,x = 200$. Subtrahera $8 \times 16$!
2 Eqv. $12\,x = 72$. Dividera genom 12!
3 Eqv. $x = \frac{72}{12} =$

Ex. 16. 16 tunnor råg till 14 kronors pris, en massa hafre till 7 kronors pris och lika mycket korn som hafre till 12 kronors pris såldes, hoprörda till blandsäd, för 371 kronor. Huru många voro hafretunnorna och korntunnorna?

1 Eqv. $16 \times 14 + x \times 7 + x \times 12 = 371$.
1 Eqv. $224 + 19\,x = 371$.

Detta reducerande kallas att »hyfsa» Eqvationen.

2 Eqv. $19\,x = 147$.
3 Eqv. $x = \frac{147}{19} =$

Ex. 17. 12 tunnor råg till 17 kronors pris och vissa tunnor hafre till 9 kronors pris såldes till 13 kronor »öfverhufvud» för tunnan råg och hafre. Huru många voro då hafretunnorna?

Att taga massor af olika pris »öfver hufvud» till samma pris, är att taga dem till hvad man kallar deras »medelpris». Tunnornas antal är i frågan $12 + x$ tunnor,
rågtunnornas värde $12 \times 17$ kronor,
hafretunnornas värde $x \times 9$ eller $9\,x$ kronor,

Medelvärdet eller medelpriset 13 kronor.
Alla tunnornas värde efter medelpriset $(12 + x) 13$.
Alla tunnornas värde efter deras särskilda pris $12 \times 17 + x \times 9$.

Frågans förnuftiga mening är ju den, att värdet för all säden är detsamma, antingen rågen säljes särskildt till sitt pris och hafren säljes särskildt till sitt pris, och dessa bägge värden sammanläggas, eller om all säden säljes på en gång såsom vore den af en sort till samma pris, som kallas *medelpris*. Teckna nu, Petter!

1 Eqv. $12 \times 17 + 9x = (12 + x) 13$.

Nu ser du, att du har $x$ inom en klam. Du kan ej komma åt detsamma förr än du upplöser klammen, d. v. s. utför multiplikationen af 13 gånger 12 och 13 gånger $x$. När du derjemte utför $12 \times 17$, då har du gjort hvad till eqvationens »hyfsning» hörer och du har då:

1 Eqv. $204 + 9x = 156 + 13x$.

Nu ser du att du kan från begge sidor subtrahera först 156 och derefter $9x$, eller begge dessa termer på en gång, då du får:

2 Eqv. $48 = 4x$, hvaraf

3 Eqv. $\frac{48}{4} = 12 = x$.

Der var således 12 tunnor hafre, såsom proban kan öfvertyga dig.

I sådane frågor, der en särskild massas *mängd* är obekant, säger »räknekonsten» att »de icke kunna lösas utan genom algebra», men vi se här att de lösas på samma sätt som andra närslägtade med tillämpning af samma våra axiomer, utan att något för algebran egendomligt förekommer. Endast algebrans metod och lagar följas såsom gemensamme för allt hvad okonstig aritmetik heter.

Ex. 18. Exportören A, skicklig i eqvationens användning, roade sig med en småhandlare B, som skröt öfver sin räknefärdighet. A sade att han i Mars exporterat ett mycket stort parti rågtunnor och lika mycket hafre, i April 2 gånger så mycket af hvarje slag som i Mars och i Maj 3 gånger så mycket af hvarje slag som i Mars, så att hela exporten utgjorde 9 gånger så mycket, som exporten i Mars och dertill 12 tunnor.

Utkommen till sina bekanta sade B: »det var mig en baddare Hr A. I kunnen aldrig tro huru många tusen tunnor spannemål han exporterat blott under 3 månader, enligt min uträkning.»

Räkna nu ut det, du Petter!

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Exporten i Mars} & x + x & = 2x \\ \quad \text{» i April} & 2 \times 2x = & + 4x \\ \quad \text{» i Maj} & 3 \times 2x = & + 6x \end{array}\right\} = 12x \text{ tunnor.}$$

Nu uppgafs dessa $12x = 9 \times 2x + 12$, alltså

1 Eqv. $12x = 18x + 12$. Subtrahera $12x$!
2 Eqv. $0 = 6x + 12$. Subtrahera $12$!
3 Eqv. $-12 = 6x$. Dividera genom $6$!
4 Eqv. $-\frac{12}{6} = x; -2 = x$.

»Det bär sig aldrig», sade Petter. »A skulle ju hafva exporterat 2 tunnor mindre än intet af hvarje sädesslag i Mars och 12 gånger 2 tunnor mindre än intet för de tre månaderna.» Rätt räknadt, käre Petter! Ty i stället för att ännu hafva exporterat den säd, som A hade på sitt magasin för export, *hade han fått partiet minskadt med 24 tunnor genom* »råttfrat» och intorkning. Det var ju omöjligt att $12x$ skulle kunna vara $= 18x + 12$, om ej deri hade varit förborgadt något *nekadt* (negativt), och det var detta, som A ville säga räknekonstnären B, och som äfven eqvationens lösning sade dig. »Ack, hur lustigt», inföll Petter Pys.

Ex. 19. Men Juni månad kom, då A med fördel kunde exportera sin säd, såsom han i förra exemplet uppgaf den exporterad i Mars, April och Maj. Men nu sade han, att hela exporten utgjorde 9 gånger exporten i Mars »så när som på» 100,000 tunnor. Huru mycket hade han då exporterat?

1 Eqv. $12x = 18x - 100{,}000$.
2 Eqv. $0 = 6x - 100{,}000$.
3 Eqv. $100{,}000 = 6x$.
4 Eqv. $\frac{100{,}000}{6} = 16{,}666\frac{2}{3} = x$.

Enligt uppgiften hade således hela exporten varit $12 \times 16{,}666\frac{2}{3}$ tunnor.

Ex. 20. Hvad man i allmänhet kallar »medeltal» är den qvot, som uppkommer, då flera till värdet olika tal af samma slag i deras summa lika fördelas på addendernas *antal*, t. ex.: Huru stor är folkmängden i *medeltal* för Elfsborgs och Skaraborgs län, då det förra har 291,000 och det sednare 259,000 innev.?

$$x = \frac{291{,}000 + 259{,}000}{2 \text{ län.}}$$

Ex. 21. Huru stor är folkmängden i *medeltal* för våra tre största städer, Stockholm, Göteborg och Malmö, då

Stockholm har 170,000, Göteborg 75,000 och Malmö 35,002 innevånare?

$x = (170{,}000 + 75{,}000 + 35{,}002) : 3$ städer.

Ex. 22. När »markegångspriset» för en kub.fot hafre är det ena året $1{,}_{50}$, andra $1{,}_{60}$, tredje $1{,}_{25}$, fjerde $1{,}_{10}$ och femte året $1{,}_{10}$ kronor, hvad är då medeltalet (»medelmarkegångspriset») för de 5 åren?

$x = (1{,}_{50} + 1{,}_{60} + 1{,}_{25} + 1{,}_{10} + 1{,}_{10}) : 5$ år.

Du ser nu att här i Ex. 20, 21, 22 endast är reduktion af bekanta tecknade qvoter.

Ex. 23. Men om jag frågar: När folkmängden i Elfsborgs län är 291,000 och folkmängdens medeltal för Elfsborgs och Skaraborgs län är 275,000, huru stor är då folkmängden i Skaraborgs län? Teckna nu!

1 Eqv. $\frac{291{,}000 + x}{2} = 275{,}000.$

2 Eqv. $291{,}000 + x = 2 \times 275{,}000.$

3 Eqv. $x = 2 \times 275{,}000 - 291{,}000 =$

Ex. 24. När folkmängden i Stockholm är 170,000, i Malmö 35,002 och »medelfolkmängden» för dessa städer och Göteborg är 93,334; huru stor är då folkmängden i Göteborg?

1 Eqv. $(170{,}000 + 35{,}002 + x) : 3 = 93{,}334$

2 Eqv. $170{,}000 + 35{,}002 + x \quad = 3 \times 93{,}334$

3 Eqv. $x = 3 \times 93{,}334 - (170{,}000 + 35{,}000).$

Om du reducerar 175,000 + 35,002 i 1 Eqvation (hyfsar den) så minskas skrifbesväret.

Ex. 25. När folkmängden i Göteborg är 75,000, folkmängden i Stockholm 5 gånger så stor som i Malmö, så när som på 5,010 personer, och då medeltalet för de tre städerna är 93,334, huru stor är då folkmängden i Stockholm? och huru stor i Malmö?

Folkmängden i Malmö $x$

alltså enligt uppgiften

1 Eqv. $\frac{75{,}000 + x + (5\,x - 5{,}010)}{3} = 93{,}334.$

Nu »hyfsar» du först eqvationen dermed att du reducerar dividenden i den tecknade qvoten, d. v. s. drar 5,010 från 75,000 och adderar $x + 5x$.

1 Eqv. $\frac{69{,}990 + 6x}{3} = 93{,}334.$

Nu kan du »häfva qvoten» eller »förkorta» den, i hvilket senare fall eqvationen blir ännu mer »hyfsad» till:

1 Eqv. $23{,}330 + 2x = 93{,}334$ subtrahera!
2 Eqv. $2x = 70{,}004$ dividera!
3 Eqv. $x = 35{,}002$ Malmö folkmängd.

Enligt uppgiften $5 \times 35{,}002 - 5{,}010$ Stockholms folkmängd.

Ex. 26. Första årets markegångspris talar jag icke om för dig. Andra årets var 10 öre mer, tredje årets var 35 öre mindre än andra årets, fjerde och femte årets voro hvardera 40 öre mindre än första årets. »Medelpriset» för de 5 åren var 1,31 kronor. Hvad var då priset alla 5 åren hvart för sig?

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{Enligt uppgift för första året} & & x & \text{öre} \\
\text{» » » andra »} & + & x + 10 & \\
\text{» » » tredje »} & + & x + 10 - 35 & \\
\text{» » » fjerde »} & + & x - 40 & \\
\text{» » » femte »} & + & x - 40 & \\
\text{» » medelpriset 131 öre} & & &
\end{array}\right\} = 5x - 95$$

Alltså enligt uppgiften

1 Eqv. $\frac{5x - 95}{5 \text{ år}} = 131$

Nu kan du »återställa» $5x - 95$ (se ax. 8) eller hvad man kallar »häfva bråket», då du får

1 Eqv. $5x - 95 = 5 \times 131 = 655$

eller kan du i stället för detta »förkorta» qvoten, då du får

1 Eqv. $x - 19 = 131$, hvilket ju är bättre.
2 Eqv. $x = 131 + 19 = 1{,}50$.

När du nu funnit $x$ (första årspriset) $= 1{,}50$, så finner du lätt de öfrige enligt uppgiften.

Ex. 27. I flera städer med olika »folknummer» var sammanräknade folkmängden 527,860 och medeltalet 105,572; huru många voro städerna?

1 Eqv. $\frac{527{,}860}{x} = 105{,}572$.
2 Eqv. $527{,}860 = 105{,}572x$.
3 Eqv. $\frac{527{,}860}{105{,}572} = x$.

Ex. 28. Der flera *massvärden* till olika pris (priset = värdet för *enheten* i massans *mängd*) äro i en summa der är »*medelpriset*» en qvot, uppkommen af denna värdesumma, dividerad genom summan af massornas *mängder*, såsom ses och förstås af föregående.

Hvad är *medelpriset* för 15 tunnor råg till 18 kronors pris och 12 tunnor hafre till 9 kronors pris?

$$x = \frac{15 \times 18 + 12 \times 9}{15 + 12} = 14$$

När du nu har detta tecknade medelvärde lika med det utförda, så får du, när du »häfver» qvoten,

$$15 \times 18 + 12 \times 9 = (15 + 12)\,14,$$

och nu har du värdet af råg- och hafretunnorna tillsammans lika med värdet af råg- och hafretunnorna tillsammans, men på ena sidan med olika priser för hvarje särskild »sort» och på andra sidan med samma pris (14) för tunnan »öfver hufvud» (medelpriset). Med denna sanning tecknad lösa vi alla hithörande frågor, hvad tal i frågan än må vara obekant, en »sorts» mängd eller *pris*, eller *medelpriset*. Alla lösas de genom tillämpning af samma våra axiomer utan särskilda »minnesreglor».

Ex. 29. A hade 250 tunnor råg till 16 kronors pris och 350 tunnor hafre. Nu sålde han hela sädespartiet till $12\frac{1}{2}$ kronors medelpris. Hvad var då priset för en tunna hafre ($x$)?

Rågens *mängd* 250 tr, dess *värde* $250 \times 16 = 4000$ kr.
Hafrens » 350 » » » $350 \times x = 350x$
Summa 600 » » » $4{,}000 + 350x$

Sädens värde efter medelpriset $600 \times 12\frac{1}{2} = 7500$.

Obs. När du så tecknar hvart särskildt i uppgiften och reducerar det, samt derefter tecknar eqvationen, så får du den »hyfsad»; alltså

1 Eqv. $4000 + 350x = 7500$ $x = 10$

Hade du omedelbart tecknat eqvationen ur uppgiften, hade den blifvit

1 Eqv. $250 \times 16 + 350 \times x = (250 + 350)\,12\frac{1}{2}$,

då »hyfsningen» fått följa, innan egentlig lösning med »rockskörtens» lika förändring till *värdet* kunnat ske. Du kan nu göra som du tycker och vill, ty besväret är lika stort i begge fallen.

Ex. 30. B hade 70 tunnor råg utan uppgifvet pris och 90 tunnor hafre till 10 kronors pris för hafretunnan. Nu sålde han hela sädespartiet till 12 kronors medelpris. Hvad pris hade då rågtunnan?

1 Eqv. $70 \times x + 90 \times 10 = (70 + 90)\,12$.

Ex. 31. C hade en hop tunnor råg ($x$) till 18 kronors pris och 98 tunnor hafre till 11 kronors pris, och sålde hela sädespartiet till 15 kronors medelpris. Huru många voro då rågtunnorna?

1 Eqv. $x \times 18 + 98 \times 11 = (x + 98) 15$.

När såsom här, en särskild sorts *mängd* är obekant, kan ej frågan lösas med »räknekonstens minnesreglor» eller »praktiska genvägar», erkänner den sjelf. Men lös du, Petter, frågan med dina axiomer efter tecknens anvisning och använd proban!

Om C hade rört om sin råg och hafre före försäljningen och sålt säden såsom »blandsäd», icke hade detta förändrat *saken, värdenas likhet*, på ena sidan efter sorternas olika pris, och på andra sidan efter medelpriset.

Ex. 32. A har en hop rågtunnor ($x$), till 19 kronors pris; en tunna mer af korn ($x + 1$), till 14 kronors pris. Nu säljer han hela sädespartiet till 16 kronors medelpris. Huru många voro rågtunnorna? Huru många korntunnorna?

1 Eqv. $x \times 19 + (x + 1) \times 14 = (x + x + 1) 16$
Hyfsa!

1 Eqv. $19 x + 14 x + 14 = 16 x + 16 x + 16$.
Hyfsa!

1 Eqv. $33 x + 14 = 32 x + 16$. Lös!

Klipp nu bort från »rockskörten» $32 x + 14$!

2 Eqv. $x = 2$ rågtunnor, alltså $2 + 1$ korntunnor.

Proban! $2 \times 19 + 3 \times 14 = 5 \times 16$.

Ex. 33. De ädla metallernas *massvärde* är en produkt af massans *vigt* och *finheten*. Det »bergfina», oblandade guldets *finhet* har man uttryckt genom talet 24, och kallat enheten deri »*karat*». Det »bergfina» oblandade silfrets finhet har man uttryckt genom talet 16 och kallat enheten deri »lod». Karat och lod har man med ett gemensamt namn kallat den ädla metallens »halt». Den ädla metallens blandning med oädel, vanligtvis koppar, medelst sammansmältning, har man kallat den ädla metallens »legering». Alltså

Om 4 ort bergfint (rent, oblandadt) guld smältes tillsammans med 2 ort 18 karat fint, huru många karat fint blir guldet? (Hvad blir guldets medelfinhet?)

$x = \frac{4 \times 24 + 2 \times 18}{4 + 2}$ der medelfinheten är = medelfinheten, eller $(4 + 2)\,x = 4 \times 24 + 2 \times 18$, deri värdet af guldet efter medelfinheten är = värdet af guldet efter de olika sorternas finhet, hvilken sanning allmännast lägges till grund (se Ex. 28.)

Ex. 34. Om 6 ort guld af obekant »halt» smältes tillsamman med 8 ort 18 karat guld, och om guldet då blir 21 karat fint, huru fint var då de 6 ortens guld?

1 Eqv. $6 \times x + 8 \times 18 = (6 + 8)\,21.$

Ex. 35. Om vissa ort ($x$) guld 23 karat fint smältes tillsammans med 12 ort guld 19 karat, så att massan blir 22 karat fin; huru många ort af det finare guldet är det då i massan? Huru mycket väger hela massan?

1 Eqv. $x \times 23 + 12 \times 19 = (x + 12)\,22.$

Ex. 36. Om 8 ort guld 24 karat fint, 7 ort guld 18 karat fint och 6 ort 22 karat fint smältas tillhopa med vissa ort ($x$) guld 19 karat fint, så att massan blir 20 karat fin; huru många ort af sista sorten är då i massan?

1 Eqv. $8 \times 24 + 7 \times 18 + 6 \times 22 + x \times 19 = (8 + 7 + 6 + x)\,20.$

Reducera så får du

1 Eqv. $450 + 19x = 420 + 20x.$

2 Eqv. $30 = x$ ort.

På enahanda sätt måste det ju tillgå att lösa frågor, hvari silfver ingår eller hvad det vara må, der flera sorter till olika värde för enheten och hela massans medelvärde förekommer i eqvation, antingen massorna äro smälta, sammanblandade, hoprörda, eller ej.

Ex. 37. Skedar vägande 25 ort af bergfint (16-lödigt) silfver såldes tillsammans med gafflar af 13-lödigt silfver vägande 30 ort, till pris för orten såsom hade alltsammans silfret varit lika fint.

Hvad medelfinhet ansågs det då hafva?

$x = 25 \times 16 + 30 \times 13 = (25 + 30)\,x$

Ex. 38. Det bergfina guldet och silfret är en mjukare metall, som derföre göres hårdare för nötning genom »legering» med koppar, hvarvid kopparen räknas för att hafva 0 värde, eftersom den ju icke har någon guld- eller silfverhalt. 10 ort koppar, smälta tillsammans med 20 ort finaste guld, gifver väl massan 30 orts vigt och nedsätter guldmassans finhet till 16 karat, men ökar ej den nya guldmassans värde, ty $20 \times 24 = 30 \times 16$ guldenheter.

Om 4 gram koppar kastas i smältdegeln med 6 gram finaste guld, 3 gram 22 karats, 5 gram 20 karats och 8 gram 18 karats guld; huru fin blir då den sammansmälta massan?

1 Eqv. $4 \times 0 + 6 \times 24 + 3 \times 22 + 5 \times 20 + 8 \times 18 = (4 + 6 + 3 + 5 + 8)\,x.$

Reducera!

1 Eqv. $0 + 144 + 66 + 100 + 144 = 26x$. Reducera vidare!

1 Eqv. $454 = 26x.$

2 Eqv. $x = \frac{444}{26} = 17\frac{6}{13}$ karat.

Ex. 39. Om en guldpjes af viss vigt ($x$) och finaste guld köpes tillsammans med en annan pjes 18 karat fin och vägande 8 gram, och en tredje pjes 20 karat fin köpes dertill, vägande 9 gram, och om slutligen dertill köpes en pjes af koppar vägande 7 gram, och om alla dessa pjeser skola betalas af köparen efter hvad de tillsammans innehålla i guldfinhet, och om denna medelfinhet är 19 karat; hvad väger då den finaste guldpjesen?

1 Eqv. $x \times 24 + 8 \times 18 + 9 \times 20 + 7 \times 0 = (x + 8 + 9 + 7)\,19.$

1 Eqv. $24x + 144 + 180 + 0 = 19x + 24 \times 19.$

1 Eqv. $24x + 324 = 19 + 456.$

2 Eqv. $5x = 132.$

3 Eqv. $x = \frac{132}{5} = 26\frac{2}{5}$ gram $= 26{,}4$ (26 gram 4 decigram).

Du ser nu såsom förut, i fråga om spannemål, att massorna ej behöfva vara eller tänkas vara sammanrörda eller sammansmälta, hvarför »alligationen» intet annat är än en summa af tal lika med ett annat tal, det må vara enkelt eller sammansatt, och du vet således att här är den vidsträcktaste användning af samma grundbegrepp.

Om nu i problemet tillika hade legat det, att köparen skulle betala hvarje gram med 2 kronor, så vet du nu, att grammen tillsammans äro $26{,}4 + 24$, alltså köpesumman $(26{,}4 + 24)\,2$ kronor.

Ex. 40. 25 ort »bergfint» (16 lödigt) silfver smältes tillsammans med 30 ort 14 lödigt, 18 ort 12 lödigt silfver jemte 9 ort koppar; huru fin blir silfverklumpen?

1 Eqv. $25 \times 16 + 30 \times 14 + 18 \times 12 + 9 \times 0 = (25 + 30 + 18 + 9)\,x$.

Ex. 41. Vissa ort ($x$) bergfint silfver säljas tillika med 2 gånger så många ort ($2\,x$) 15 lödigt och 3 gånger så många ort ($3\,x$) 14 lödigt och dertill 8 ort 11 lödigt och 6 ort koppar. All metallen betalas, såsom vore den 13 lödigt silfver, med 50 öre orten. Huru många *ort* är det bergfina? Huru många det 15 lödiga? Huru många det 14 lödiga silfret? Hvad kostar det bergfina? Hvad det 15 lödiga? Hvad det 14 lödiga? Hvad det 11 lödiga? Hvad kopparen? Hvad all metallen tillsammans, allt efter medelhalten och 50 öre *orten?*

Se här icke mindre än nio frågor att lösa. Först måste du taga ut ditt $x$ ur den eqvation du har, då du vet, att *summan* af de särskilda sorternas *värden* är lika med hela massans *mängd* multiplicerad med *medelvärdet*, d. v. ock s. hela massans *värde*. Alltså

1 Eqv. $x \times 16 + 2x \times 15 + 3x \times 14 + 8 \times 11 + 6 \times 0 = (x + 2x + 3x + 8 + 6)\,13.$

1 Eqv. (»hyfs») $16x + 30x + 42x + 88 + 0 = (6x + 14)\,13.$

1 Eqv. (vidare »hyfs») $88x + 88 = 78x + 182.$

2 Eqv. $10\,x = 94.$

3 Eqv. $x = \frac{94}{10} = 9{,}4$ ort, alltså enligt uppgiften

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Bergfina silfret | $9{,}4$ ort | $\times$ | $0{,}50$ öre | $= 470$ | |
| 15 lödiga » | $2 \times 9{,}4$ » | $\times$ | » » | $= 940$ | |
| 14 » » | $3 \times 9{,}4$ » | $\times$ | » » | $= 1410$ | $= 35{,}20$ kr. |
| 11 » » | 8 » | $\times$ | » » | $= 400$ | |
| Kopparen | 6 » | $\times$ | » » | $= 300$ | |

Ex. 42. Om jag åter hade sagt dig, att all metallen efter 50 öre orten kostade 35 kr. 20 öre, så hade du icke behöft fråga efter sorternas halt eller hela metallmassans medelvärde, ty då hade i frågan legat den enkla sanning, att alla sorternas penningevärden tillsammans var 35,20 kr. Huru hade du då fått din eqvation?

1 Eqv. $(x + 2x + 3x + 8 + 6)\,0{,}50 = 35{,}20$.

1 Eqv. (hyfsad) $(6x + 14)\,0{,}50 = 35{,}20$.

1 Eqv. $300x + 700 = 3520$.

2 Eqv. $300x = 2820$.

3 Eqv. $x = \frac{2820}{300} = 9{,}4$ ort.

Och så hade på samma sätt som förut de särskilda frågorna om kostnaden efter hvarandra besvarats.

Ex. 43. En mjölkförsäljare hade förbundit sig att till viss person lemna 50 kannor »nysilad» mjölk för 30 öre kannan. Men han ville göra sig en vinst derutöfver, hvarför han utspädde 45 kannor af mjölken med 5 kannor vatten. Hvad värde hade då kannan af den utspädda mjölken, när vattnet fanns »oköpandes» i brunnen?

1 Eqv. $45 \times 30 + 5 \times 0 = 50x$.

Ex. 44. En husmoder använde i sitt hushåll 25 kannor »oskummad» mjölk till 30 öre kannan och »skummad» mjölk till 14 öre kannan, så att kannan »öfverhufvud» kostade henne 20 öre. Huru många kannor skummad mjölk använde hon då?

1 Eqv. $25 \times 30 + x \times 14 = (25 + x)\,20$.

Obs. att mjölken ej »blandades».

Ex. 45. Jag såg en gång i en sockerbagarebutik 12 man af ett svenskt regemente i paraduniform, artistiskt utförda i *socker* till 25 öre stycket. Jag hade velat köpa dem, om fabrikanten hade velat göra mig 12 likadana figurer i *lera* till 1,75 kronor stycket, som jag erböd honom. Hvad hade då de 24 männen kostat mig »öfver hufvud» stycket?

1 Eqv. $12 \times 25 + 12 \times 1{,}75 = 24 \times x$.

Ex. 46. En konstälskare köpte nyss två stycken silfverpjeser. Den ena vägde 65 ort och var af 12 lödigt silfver. Den andra vägde 72 ort och var af finaste silfver. Den förra betalade han med 1 krona 25 öre för orten, den sednare betalade han med 85 öre för orten. Hvad kostade honom orten i begge pjeserna »öfver hufvud»?

»Det var besynnerligt», anmärkte Petter, »att man kan gifva 1 kr. 25 öre orten för det sämre silfret och 85 öre orten för det finaste, men jag förstår att här icke gjordes afseende på silfrets finhet.» Och så tecknade Petter:

1 Eqv. $65 \times 1{,}25 + 72 \times 0{,}85 = (65 + 72)\,x$.

Ex. 47. Men, Petter, huru hade en guldsmed förfarit, om han för nedsmältning hade köpt pjeserna efter sin taxa å orten af en viss medelhalt? Petter tecknade:

1 Eqv. $65 \times 12 + 72 \times 16 = (65 + 72)\,x$.

Om nu guldsmeden betalar 52 öre orten af denna medelhalt, huru mycket ville han då betala för hvardera silfverpjesen och för begge tillsammans.

Ex. 48. Huru många ort koppar skall jag lägga i degeln för att få de $79\frac{3}{4}$ orten 16 lödiga silfret att blifva jemt 14 lödigt? frågade en silfverarbetare sin förman. »Dumme Jöns», svarades, »du kan ju se efter i våra »tabeller», så får du veta det *ungefär*, ty hvarken du eller jag kunna räkna ut det, med alla räknekonstens minnesregler.»

Men, Petter, du var ju af en händelse närvarande och löste frågan i rappet med en kritbit på verkstadsbordet, har jag hört till ditt beröm. »Inte konstigare än så», sade Petter.

Ex. 49. A exporterade 500 tunnor råg till inköpspris 15 kronor, med tillägg af magasinshyra 2 öre, skyfflingskostnad 3 öre, lastningskostnad 4 öre, fraktkostnad 24 öre, skälig handelsvinst 28 öre för tunnan. På samma gång afsände han 800 tunnor hafre till inköpspris 8 kronor, med magasinshyra 3 öre, skyfflingskostnad 2 öre, lastningskostnad 3 öre, fraktkostnad 18 öre, skälig handelsvinst 25 öre för tunnan. När nu emottagaren fick betala allt detta, hvad kostade *honom* tunnan af all säden efter medelpris?

Här, Petter, äro 15 särskilda tal, af hvilka hvartdera kunde vara obekant, ja flera, ja alla i sin helhet, men eqvationen skulle ändå blifva densamma, ty sanningen i frågan är en. Nu har du dock ej mer än ett tal obekant, nemligen medelpriset. Låt dig aldrig förbluffas af talens mängd eller storlek, om de äro enkla eller sammansatta. Sök endast att göra dig reda för sakförhållandet i problemet.

Hvad kostar rågtunnan? 15,61.
Hvad kostar hafretunnan? 8,51.
Hvad kosta rågtunnorna? $500 \times 15{,}61$.
Hvad kosta hafretunnorna? $800 \times 8{,}51$.
alltså

1 Eqv. $500 \times 15{,}61 + 800 \times 8{,}51 = (500 + 800)\, x$.

Ex. 50. En vinhandlare hade vissa kannor ($x$) vin af en sort, och lika många kannor af en andra sort, så när som på 10 kannor. Af en tredje sort hade han så många kannor som af den första och andra sorten tillsamman. Allt vinet utgjorde 400 kannor. Huru många voro kannorna af hvarje sort?

Enligt uppgiften 1:sta sorten $x$
2:dra » $x - 10$.
3:dje » $2x - 10$ alltså

1 Eqv. $4x - 20 = 400$.

Nu kan du förfara såsom förut, men som du ser att talen kunna jemt divideras genom 4, så kan du först göra detta, om du finner det beqvämare, då du får:

2 Eqv. $x - 5 = 100$; $x = 105$.

Gör du på vanligt sätt, får du

2 Eqv. $4\,x = 400 + 20 = 420$; $x = 105$.

Ex. 51. Men om samme vinhandlare hade samma kanntal vin, första sorten till 16 kronors pris, andra sorten till 10 kronors pris och tredje sorten till 2 kronors pris; och om han då kunde sälja allt vinet till $7\frac{23}{40}$ kronors medelpris, huru många hade kannorna af hvarje sort då varit?

1 Eqv. $x \times 16 + (x - 10) \times 10 + (2\,x - 10) \times 2 = (4\,x - 20) \times 7\frac{23}{40}$.

1 Eqv. $16x + 10x - 100 + 4x - 20 = 30\frac{3}{10}\,x - 151\frac{1}{2}$.

1 Eqv. $30x - 120 = 30\frac{3}{10}x - 151\frac{1}{2}$.
2 Eqv. $30x = 30\frac{3}{10}x - 31\frac{1}{2}$.
3 Eqv. $0 = \frac{3x}{10} - 31\frac{1}{2}$.

4 Eqv. $31\frac{1}{2} = \frac{3x}{10}$.

5 Eqv. $31\frac{1}{2} \times 10 = 3x$.

6 Eqv. $\frac{31\frac{1}{2} \times 10}{3} = 105 = x$.

Du skulle äfven här hafva $x = 105$ kannor, ty medelpriset på vinet var $7\frac{4}{1}\frac{3}{0}$ kr., hvilket medelpris du kunde söka och finna, när du af Ex. 50 fick kanntalen för hvarje sort kända och då du i Ex. 51 hade samma kanntals priser gifna.

Ex. 52. Fyra gossar bildade »bolag» för att köpa en dyr sångfogel. Emil tillsköt en summa penningar, Carl hälften så mycket, Anders dubbelt så mycket, men den stackars Frans kunde tillskjuta blott 10 öre. Fogeln kostade hvad de tillsköto, som utgjorde fyra gånger så mycket som Anders tillsköt, om det minskades med fyra gånger hvad Carl tillsköt. Huru mycket tillsköto Emil, Carl och Anders och hvad kostade fogeln?

Emil tillsköt $x$, Carl $\frac{x}{2}$, Anders $2x$, Frans 10 öre $= 3\frac{1}{2}x + 10$.

Fogeln kostade, allt enligt uppgiften, $4 \times 2x - 4 \times \frac{x}{2} = 6x$.

1 Eqv. $3\frac{1}{2}x + 10 = 6x$.

2 Eqv. $10 = 2\frac{1}{2}x$.

3 Eqv. $x = 10 : 2\frac{1}{2} = 10 : \frac{5}{2} = \frac{10 \times 2}{5} = 4$, Emils tillskott; Carls $\frac{4}{2}$, Anders' $2 \times 4$, Frans $10 = 24$ öre, fogelns kostnad; och således blef den »stackars» Frans den störste »bolagsmannen».

Ex. 53. Tre handelsbokhållare bildade bolag för att drifva vidsträckt grosshandel. A insatte i rörelsen fyra gånger så mycket som B (för att få af bolagsvinsten fyra gånger mer än B, såsom skäligt anses). C sade, att han icke förmådde tillskjuta mer än tre fjerdedelar af hvad B tillsköt. Nu utgjorde hela bolagskapitalet sex gånger så mycket som B tillskjutit »på en half krona när». Huru stort kapital hade de hvar i bolaget och huru stort var hela bolagskapitalet?

Enligt uppgiften tillsköts af B $x$, af A $4x$, af C $\frac{3x}{4}$, tillsammans $5\frac{3}{4}x$. Hela bolagskapitalet $6x - \frac{1}{2}$, alltså:

1 Eqv, $5\frac{3}{4}x = 6x - \frac{1}{2}$

2 Eqv. $0 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

3 Eqv. $\frac{1}{2} = \frac{x}{4}$

4 Eqv. $2 = x$.

B hade i bolaget insatt 2, A 8 och C $1\frac{1}{2}$ kronor. Hela bolagskapitalet således $11\frac{1}{2}$ kronor.

»Jag trodde att det ville mera till för att idka »grosshandel», sade Petter.

Goda kunskaper, stadga, hushållsanda, erfarenhet, flit och vunnen kredit kunna göra en stor grossör af en pys som du, käre Petter!

»Tro dä», sade pysen, och rätade upp sig.

Ex. 54. En fader förordnade genom testamente: »min son Anders skall af mina kontanter hafva $\frac{3}{4}$ af hvad min son Carl får. Min son Emil får så mycket som Carl och dertill 200 kronor. Min son Frans får så mycket som Anders på 300 kronor när. Mina kontanter ligga i min byrå, 7000 kronor i den öppna lådan, och Carls lott $x$ i lönnlådan, hvilken ej får uppbrytas förr än Anders, Emil och Frans fått på öret sitt af de 7000 kronorna. Sker uppbrytningen förr, går hela kapitalet till socknens fattige.»

Nu var fadren död och man började dividera. Men man kom ingen väg med »räknekonstens» alla »minnesreglor» och »praktiska genvägar». En slängd arfskiftesförrättare i orten tillkallades, men äfven han stod rådlös. Under tiden inkom Petter Pys, som hjelpte dem ur klämman och tecknade efter uppgiften:

| | | |
|---|---|---|
| Carls lott i lönnlådan | | $x$ |
| Anders lott | | $\frac{3}{4}x$ |
| Emils | » | $x + 200$ |
| Frans | » | $\frac{3}{4}x - 300$, tillsammans $3\frac{1}{2}x - 100$. |

Detta lika med kontanterna i byrån, alltså

1 Eqv. $3\frac{1}{2}x - 100 = 7000 + x$

2 Eqv. $2\frac{1}{2}x = 7100$

3 Eqv. $x = 7100 : 2\frac{1}{2} = \frac{7100 \times 2}{5} = 2840$

När vederbörande nu hade fått veta, hvad som var i lönnlådan, redde sig »räknemästarne» med »quatuor species», i enlighet med uppgiften.

Ex. 55. En vacker åkkälke var till salu. Af fyra kamrater A, B, C och D kunde ingendera köpa den med hvad han egde i mynt, icke heller två af dem, icke heller tre af dem. Men om alla fyra i bolag köpte kälken, då kunde de med hvad de tillsammans egde nätt och jemt köpa den. Gossen A egde 2 gånger så mycket som B, C hälften af hvad B egde; och D 5 gånger så mycket som C. Kälken kostade 10 gånger så mycket som D egde och dertill 4 öre. Huru mycket egde hvar »bolagsman»? och hvad kostade kälken? Petter tecknade:
B egde $x$, A $2x$, C $\frac{x}{2}$, D $\frac{5x}{2} = 6\,x$
kälken kostade $10 \times \frac{x}{2} + 4 = 5x + 4$ öre, alltså
1 Eqv. $6\,x = 5x + 4$;
2 Eqv. $x = 4$ öre.

»Detta», sade Petter, »var en simpel räknegåta, men jag måtte väl få svårare?»

Knappast, Petter, om du blott väl och säkert öfvats i tänkande, så att du kan uppfatta grundsanningen i frågan och teckna den, samt för lösningen tillämpa dina axiomer; ty många tal och stora tal i förknippningen fordra blott mer tid och skrifbesvär.

Ex. 56. Om till den förmögenhet, som A har, lägges hans skuld till trefjerdedelar af samma belopp, och om han då verkligen eger femtedelen af hvad han ansågs ega, innan hans skuld togs med i räkningen, och ändå dertill 1000 kronor; huru stor var då hans förstnämnda förmögenhet? Huru stor var den tillkomna skulden? Huru stor hans förmögenhet nu?

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Förmögenheten då} & x \\ \text{Skulden} & -\frac{3\,x}{4}\end{array}\right\} = \frac{x}{4}$$

förmögenheten nu $= \frac{x}{5} + 1000$, alltså
1 Eqv. $\frac{x}{4} = \frac{x}{5} + 1000$.

Nu kan du antingen göra begge $x$-bråken likbenämda, för att subtrahera bråken, eller kan du »häfva» begge bråken, då du får hela $x$-tal att subtrahera. Gör som du vill; för tankeöfningen gör på begge sätten! Proban har du till säkerhet.

Ex. 57. Anna hade en hop dufvor ($x$). Men emedan höken och katten hade »tullat» dem, sålde hon dem hon hade qvar för 75 öre stycket. En fjerdedel af hennes dufvor hade höken tagit och en åttondel hade katten knipit och ändå två dufvor dertill, så att hon nu icke hade mer än hälften af sina dufvor och dertill 1 dufva. Huru mycket fick hon nu för dessa sina dufvor vid försäljningen?

För att kunna besvara denna fråga, måste du ju först få veta huru många dufvor Anna hade qvar till 75 öre stycket, alltså

| | |
|---|---|
| Anna hade från början | $x$ |
| De af höken tullade | $-\frac{x}{4}$ |
| De af katten » | $-\frac{x}{8}-2$ |
| | $=\frac{5x}{8}-2,$ |

alltså

1 Eqv. $\frac{5x}{8}-2=\frac{x}{2}+1$, enligt uppgiften.

När $x$ blifvit löst och kändt är huru många dufvor Anna hade från början, kan du låta småbarnen genom »hufvudräkning» säga huru många dufvor höken tullade och katten knep äfvensom huru många dufvor Anna hade qvar och huru många öre hon fick för dem, såsom allt ligger i uppgiften uttaladt.

Ex. 58. Anders, Carl, Emil och Frans möttes på lekplanen. Då sade den liflige Emil: »nu, pojkar, skola vi leka eqvationslek, men praktiskt. Det skall blifva ett nytt »räknesätt» till de många i »räknekonsten». Jag vill kalla det *hoppakråkaräknesättet*. Ordet är något långt, men ej längre än räknekonstens »*betalningsterminersreduktionsräknesättet*». Från den punkt, der vi nu stå, hoppa Anders och Carl i rak linie åt norr, jag och Frans i samma raka linie åt söder. Anders och Carl få vara »negativa qvantiteter», jag och Frans »positiva». De två, som tillsammans hoppa längre åt det ena hållet än de två andra åt det andra hållet, skola af de besegrade till lika delning hafva att få så många sviskon, som de hoppat flera alnar.

Genast och med fröjd sattes den praktiska leken i gång. När så alla tröttnat och stannat för att hemta andan, uppmätte Emil tyst och ärligt alla afstånden och sade:

Den negative Anders har hoppat så långt som den negative Carl och ändå dertill sjundedelen deraf. Jag har positivt hoppat 53 alnar, om derifrån *drages* tiondedelen af Carls negativa hopp. Frans har positivt hoppat 57 alnar, om man dertill lägger tiondedelen af Carls negativa hopp. Tillsammans utgöra alla hoppen 114 positiva och $2\frac{1}{5}$ gånger Carls negativa hopp.

Nu lösa vi uppgiften medan vi hvila oss för nästa kroppsstärkande lek. Plånen fram och fingrarne i rörelse på axiomernas kommando!

| | | |
|---|---|---|
| Carl hade hoppat | | $-x$ |
| Anders | d:o | $-1\frac{1}{7}x$ |
| Emil | d:o | $53+\frac{x}{10}$ |
| Frans | d:o | $57-\frac{x}{10}$ |
| | Summa | $110-2\frac{1}{7}x.$ |

Detta enligt uppgiften $= 114 - 2\frac{1}{5}x$, alltså
1 Eqv. $110 - 2\frac{1}{7}x = 114 - 2\frac{1}{5}x$.

Lös nu, använd proban, så finner du att Emil och Frans, så positive de än voro, fingo till de negative Anders och Carl punga ut med en hel hop sviskon. Huru många?

Ex. 59. Nästa dag på lekplanen sade Emil: i dag skola vi kapplöpa om äran att få föreslå en eqvationslek att utföra medan vi hvila efter kapplöpningen. I kapplöpningen blef Emil segrare och sade: Vi skola sälja en del af våra kaniner för att kunna köpa oss en bolagshyfvelbänk. Vi få 75 öre för en helbregda och välfödd kanin. På en kanin när får jag af mina sälja så många som Anders säljer. Carl får sälja så många som trefjerdedelar af dem Anders säljer. Frans, som lyckats bäst med kaninafveln, får sälja tre gånger så många som Anders säljer, »så när som på» en kanin. Då blir hela kaninförsäljningen lika med fyra och niotiondedels gånger så många som Anders säljer.

Jag har uppgjort köpet för kaninerna och hyfvelbänken till samma kapitalbelopp för begge. Qvickt nu i vändningen! Hvad få vi för kaninerna?

Anders säljer $x$, Emil $x - 1$, Carl $\frac{3x}{4}$, Frans $3x - 1$, tillsammans $5\frac{3}{4}x - 2$ kaniner, alltså enligt uppgiften
1 Eqv. $5\frac{3}{4}x - 2 = 4\frac{9}{10}x$.

Efter lösningen befans att Anders fick sälja $2\frac{6}{17}$ kanin. »Det bär sig aldrig med $\frac{6}{17}$ kanin, lefvande såsom den bör vara», sade Frans. »Vi måtte hafva vanställt »rockskörten».

sade Carl. Men Anders, som redan hunnit använda proban, försäkrade att kanineqvationen var rätt löst. Ja, sade Emil, och jag får sälja $1\frac{6}{17}$ kanin, Emil $1\frac{13}{17}$ och Frans $6\frac{1}{17}$. Orsaken, hvarför jag så uppställt eqvationen, är den, att jag för Anders bortslutat en hans magre stackare att få gå i värde för $\frac{6}{17}$ helbregda kanin, en Carls benbrutne att få gå i värde för $\frac{13}{17}$ kanin och Frans blinde att få gå i värde för $\frac{1}{17}$ kanin. Ären I nöjde med kommersen, pojkar? Hurra! Hurra! blef svaret.

Ex. 60. Anders, Carl och Emil hade köpt sig en gemensam sparbössa, som icke lemnade ifrån sig hvad hon fick in, förr än hon sönderslogs. Deri inlade bolaget hvad hvar och en kunde förtjena med att tälja tandpetare för afsalu. Anders var bolagets räkenskapsförare. En dag ville C och E af räkenskaperna se hvad de hade i bolaget. Anders hade förlagt räkenskaperna, men visste att ur sitt goda minne säga: »Emil har i bössan 36 öre mer än jag har der, Carl har 2 öre mindre än jag har der, och hela bolagskapitalet är 56 öre mer än fjerdedelen af hvad jag har der». Med detta besked voro C och E belåtne, ty de kunde då sjelfve räkna ut allas bolagsandelar, emedan de fått lära att uppfatta, teckna och lösa så simpla eqvationer.

Anders har i bössan $x$
Emil » » » $x + 36$
Carl » » » $x + 2$.

Summan häraf $3x + 34$, alltså enligt uppgiften

1 Eqv. $3x + 34 = \frac{x}{4} + 56$.

Ex. 61. Komne på lekplanen, medan de hvilade efter en kroppsstärkande lek, togo gossarne upp sina plån för att leka en förståndsodlande eqvationslek. I veten, sade Emil, att man kan göra eqvationer om allt under himmelen. I veten, att »det är bättre att ha en fogel i näfven än tio i skogen». Nu kunna vi anse foglarne i näfven såsom *positiva* och foglarne i skogen *negativa*. Om nu Anders har sina foglar i skogen, och om jag har lika många foglar i skogen, som Anders har, och derjemte 4 foglar i min näfve; och om Carl har två gånger så många i skogen och i näfven, som jag har; och om Frans har så många foglar i skogen som Carl har i näfven; och om alla dessa foglar i skogen och i näfven tillsammans utgöra åtta gånger så många i skogen, som Anders har der, och dertill de foglar i näfven, som jag och Carl tillsammans hafva i våra näfvar, då skall den, som efter problemets lösning har de flesta foglarne i näfven, få af de andra en vacker bur, att dermed stänga in sina foglar, så att de icke flyga till skogs och för honom förvandlas från positiva till negativa».

Nu tecknades

| | | |
|---|---|---|
| Anders | har | $-x$ |
| Emil | » | $-x+4$ |
| Carl | » | $-2x+8$ |
| Frans | » | $-8.$ |

Summan $= -4x + 4$, alltså enligt uppgiften 1 Eqv. $-4x + 4 = -8x + 12.$

Carl fick således buren, om du rätt löst.

Ex. 62. Anders sade: »Min fars skrifbord kostar så mycket som hans skrifstol och dertill 16 kronor, hans byrå kostar så mycket som hans skrifbord så när som på 5 kronor, och alla tre pjeserna kosta tillsammans så mycket som skrifstolen. Hvad kostar då hvarje pjes? hvad kosta alla tre pjeserna tillsammans?

Ex. 63. Medan Ivar och några hans kamrater voro tillsammans på en ledig stund, sade Ivar: »Jag kan berätta för er en rolig historia om en eqvationslek, som vår skollärare lekte med sina två söner, som han har i stadsskolan. Han skickade dem nemligen fyra väl förseglade påsar och skref i bref: »här sänder jag äplen, men påsarne få ej öppnas förr, än ni uträknat huru många äplen äro i hvarje påse och skickat mig med budet uträkningen, så att jag kan veta, att ni räknat rätt, och så med nytt bud gifva er tillåtelse att öppna påsarne och njuta af innehållet. Första påsen innehåller så många äplen som den andra och tredje tillsammans; andra påsen innehåller så många som den tredje och fjerde tillsammans;

den tredje påsen innehåller så många som den fjerde, om man dertill lägger 10 äplen».

I glädjen skyndade gossarne att teckna, sedan de väl insett, att de hade sitt $x$ i fjerde påsen.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Äplena} & \text{i fjerde} & \text{påsen} & x \\ \text{»} & \text{i tredje} & \text{»} & x + 10 \\ \text{»} & \text{i andra} & \text{»} & 2x + 10 \\ \text{»} & \text{i första} & \text{»} & 3x + 20 \end{array}\right\} = 7x + 40.$$

Men längre kommo de ej med uppgiften, till sin stora häpnad, hvarför de skrefvo med budet: »Pappa har glömt att gifva oss den nödvändiga eqvationen, men den väntar ej förlänge, som väntar på sköna och välsmakande äplen».

Med nytt bud innan aftonen skref fadren: »Alla äplena i påsarne utgöra 2 gånger första påsens innehåll». Och han tillade: »Jag kan hälsa er från trädgården, att våra äplen torde mogna tre veckor härefter». »Ja—så», sade gossarne, »då innehålla påsarne nedfallen äplekart, men (tröstande sig) äfven den smakar godt, då den stekes».

Och så grepo de sig an med eqvationen och fingo

1 Eqv. $7x + 40 = 6x + 40$.

2 Eqv. $x = 0$ äplen.

Nu skrefvo de åter med budet: »Pappa måtte hafva misskrifvit något i uppgiften, ty vi få $x = 0$, som ju är orimligt, då vi kunna känna med händerna, att påsarne äro fulla af äplen». Derpå fingo de åter svar: »Rätt räknadt, mina snälla gossar, öppnen påsarne och njuten af frukten!» Påsarne öppnades och voro fulle af — färska potäter.

»Det der», anmärkte Carl, »var visserligen en mycket rolig historia, men det är ingen konst att tala om hvad man hört berättas». »Då får väl du», anmärkte Ivar, »för nästa lekstund *dikta* en rolig historia, om du är karl för din hatt». »Skall ske», svarade Carl, stolt i hågen.

Ex. 64. »Håll nu ditt löfte, Carl!» sades, då gossarne åter voro på lekplanen. Carl *diktade:* »Mickel jagade jösse. Men Jösse tar mycket längre skutt än Mickel tar steg, hvarför Jösse kom långt i förväg och satte sig så upprät på bakbenen, seende sig omkring. Jösse har likväl bättre hörsel än syn, hvilket väl kan märkas på hans långa, rörliga öron och stela ögon. Han såg derför icke Mickel, som närmade sig, men han hörde prasslet af Mickels steg och beredde sig till nytt skuttande. Mickel, som märkte Jösses oro, ville uppehålla honom med fagert snack och sade med sin vänligaste röst: det gör mig mycket ondt om dig, käre Jösse; du har så nyss i en enda storbugt tagit tvåtusen skutt och tvåhundra dertill, så att du väl kan vara trött och behöfva hvila.

Nu reste Jösse i ädel stolthet upp de långa öronen och sade helt kort: du storljugare! Som nu Mickel tvärstannade, förbluffad af denna Jösses ovanliga djerfhet, tillade Jösse: »Om jag till mina tagna skutt ville lägga hälften så många och en fjerdedel så många och dertill 80 skutt, då först skulle jag hafva tagit så många som du sade» — och dermed skuttade Jösse långt i förväg för Mickel, ty nog var han mycket rädd, ehuru han hade velat visa, att icke en gång en hare behöfver vara obekant med eqvationer för simpel problemlösning.

Nu fingo gossarne ur historiens uppgifter

1 Eqv. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 80 = 2000 + 200$

och kunde säga huru många skutt Jösse verkligen tagit.

Ex. 65. »Men», sade Carl, »historien är ännu ej slut».

Efter sitt nya skuttande i åtskilliga bugter, för att förvilla Mickel, satte sig åter Jösse med en tvärkastning in i en tät buske. Men Mickel, ifrig och njutande af harspårets söta lukt, förnam att Jösse måste vara honom nära. Då tänkte Mickel: Nu vill jag bära mig bättre åt, ty jag märkte väl, att Jösse hellre ville smickras, än beklagas, stolt som han är öfver sin räknefärdighet. Höjande rösten i läspande ton, sade Mickel: »Du är mycket klokare än en lamunge, käre Jösse, och springer ej genast bort af rädsla för mig, din bäste vän och så onödigt uttröttar dig med långt skuttande, utan stannar för vänligt samspråk. Nu har du sist för ditt nöje skull tagit blott 1000 skutt med frånräknande af en femtiondedel af de skutt, som du verkligen tagit och som du så väl har reda på».

»Du eländige smickrare!» svarade Jösse från sitt gömställe, om man från de skutt, som jag tagit, ville draga hälften deraf och femtedelen deraf och så dertill lägga 40 skutt, då skulle det vara de skutt du sade» — och härmed tog Jösse dubbelt så långa och många skutt för att komma alldeles ifrån den farlige smickraren. Snopen stod Mickel, ty han hade icke lärt att umgås med skuttproblemer eller andra »räknegåtor», och han fann, att det icke för honom dugde att med kunniga harar tala om slikt.

Här funno gossarne frågan vara

1 Eqv. $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{5} + 40 = 1000 - \frac{x}{50}$.

När frågan blifvit löst, skuttade gossarne på sitt vis under bollkastning och andra stärkande lekar.

Ex. 66. a) Såsom du lärde det vid »division i hela tal», uttrycker en tecknad qvot det förhållande hvari ett tal står till ett annat. Om du således i en fråga har, att ett tal förhåller sig så till ett andra tal, som ett tredje tal förhåller sig till ett fjerde; så har du ju der en tecknad qvot lika med en tecknad qvot, eller ett »bråk» lika med ett »bråk», t. ex. $\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$.

Hvar nu något af de fyra talen vore obekant, så kan du ju genast utlösa det alldeles på samma sätt som du i föregående exempel utlöst ditt $x$, der du haft det i en tecknad qvot lika med ett annat tal. Något särskildt »räknesätt» får du således icke der »räknekonsten» får sina många, der dock samma sanning ligger till grund, att något är lika med något.

b) Har du $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, så får du af dessa lika qvoter två andra lika qvoter, om du sätter divisor i förhållande till sin dividend som divisor till dividend, alltså $\frac{6}{3}=\frac{10}{5}$. Af $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$ får du äfven två andra lika qvoter, om du ställer den ena dividenden i förhållande till den andra som den förres divisor till den andres, alltså $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ äfvenså om du nu ställer divisor till dividend, som divisor till dividend, alltså $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$. Häraf ser du, att du, vid uttryckandet af eqvationen i frågan, kan börja med hvilketdera talet som helst, om du förstår att sätta talet i det förhållande till ett af de tre andra, att samma förhållande kan uttryckas genom de två öfrige.

c) Men du ser äfvenledes, att du af $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$ får två *produkter* lika, då du *multiplicerar* den ene qvotens dividend med den andre qvotens divisor, $3 \times 10=5 \times 6$, samt att du således i alla hithörande frågor kan utgå från den sanningen, att du har *två qvoter lika* eller från den, att du har *två produkter lika.*

Men har du nu fattat saken så, att du har två produkter lika t. ex. $3 \times 10=5 \times 6$, så kan du ju ock deraf göra dig den sanningen, att du har två qvoter lika, om du till dividend i den ena qvoten väljer en faktor i den ena produkten och till divisor en faktor i den andra produkten, samt till dividend i den andra qvoten tager den öfriga faktorn i den andra produkten och till divisor den återstående faktorn i den förra, så att du af $3 \times 10=5 \times 6$ får $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$, $\frac{10}{5}=\frac{6}{3}$ och $\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.

## Två spannemålshandlare A och B uppköpte hvar sitt sädesparti. A »gjorde» i råg och B i hafre. A köpte 426 tunnor råg till 16 kronors pris och B köpte 698 tunnor hafre till visst pris. Det befans då att A. hade betalat lika mycket för sina rågtunnor som B för sina hafretunnor. Hvad hade då B gifvit för tunnan hafre?

## 1 Eqv. $426 \times 16 = 698x$.

Nu är det i allmänhet så, att en massas mängd står i gifvet förhållande till sitt pris, och att en annan massas mängd står i förhållande till sitt pris, men likheten i två förhållanden beror af att massornas värden äro lika. Nu kan du i exemplet icke veta, huru det här är med likheten i förhållandet. Men du kan få veta det, om du af de två lika produkterna $426 \times 16=698 \times x$, som uttrycka massornas lika värden, bildar två lika qvoter (enligt c), då du får $\frac{426}{698}=\frac{x}{16}$, der du ser, att rågtunnorna stå i förhållande till hafretunnorna, icke som rågtunnans pris förhåller sig till hafretunnans, utan »omvändt», såsom hafretunnans pris förhåller sig till rågtunnans, eller att rågtunnorna förhålla sig till hafretunnans pris som hafretunnorna förhålla sig till rågtunnans pris o. s. v., huru du på öfrige sätt vill uttrycka det.

Du behöfver således aldrig fara vilse i uttryckandet af din eqvation, då du vet, att af två lika qvoter måste kunna blifva två lika produkter och af två lika produkter två lika qvoter.

Ex. 67. Du har, Petter, af din far hört, att han kallar det »*ränta*», eller »*intresse*», som han hos grannen fått betala för de penningar denne lånat honom, då han nemligen betalar räntan vid lånets »förfallotid», men att han kallar denna ränta för »*diskont*», då han lånar i banken, emedan han då betalar räntan i förskott, när lånet fås. Alltså om A lånar af grannen 200 kronor och derför betalar 7 kronors ränta vid förfallotiden, huru mycket lånar han då i banken, när han derför vid lånets erhållande betalar 21 kronors diskont, då nemligen det förra lånet förhåller sig till det sednare, som det förras ränta till det sednares diskont? Petter tecknade:

1 Eqv. $\frac{200}{x} = \frac{7}{21}$.

Nu tecknade du ordagrannt, såsom talades, och nu får du lösningen i tre tempo. Kan du teckna sanningen så att du får lösningen i *ett* tag? (se Ex. 66 b).

1 Eqv. $\frac{x}{200} = \frac{21}{7}$.

Ex. 68. Men nog förstår du, Petter, att man i allmänhet icke kan få låna andras penningar till begagnande för samma räntebelopp på längre tid som på kortare tid, om samma kapital lånas, utan att tidens längd och kapitalets storlek måste samverka till räntans större eller mindre belopp. Om således A lånar af sin granne 2000 kronor på 3 månader och derför betalar 30 kronors ränta, huru mycket lånar då B på 4 månader i banken mot 45 kronors diskont? då hvad A lånar på 3 månader förhåller sig till hvad B lånar på 4 månader, som hvad A betalar i ränta förhåller sig till hvad B betalar i diskont?

1 Eqv. $\frac{2000 \times 3}{x \times 4} = \frac{30}{45}$. (Förkorta först!)

Ex. 69. Anna har en äplehög och Emma har en dubbelt så stor så när som på 4 äplen. Annas äplen förhålla sig till Emmas som 3 till 4; huru många äplen hafva de hvar?

»En reguladetrigåta!» utropade Petter förnöjd och tecknade:

1 Eqv. $\frac{x}{2x-4} = \frac{3}{4}$, häfde bråket till venster och fick

2 Eqv. $x = \frac{6x-12}{4}$, häfde bråket till höger

3 Eqv. $4x = 6x - 12$ o. s. v.

$x = 6$.

Ex. 70. Då 67 fot kläde kosta 144 kronor, huru många fot kläde får du då för 11 kronor?

»Det kan jag alldeles icke uträkna», sade Pysen småslugt, »ty far fick betala *mer* för 6 fot kläde till rock åt mig, än grannen betalade för 6 fot af samma klädesstycke till rock åt sin Anders, och far betalade *mindre* för 6 fot vadmal till byxor åt mig, än grannen fick betala för 6 fot af samma vadmal till byxor åt Anders.»

Rätt anmärkt, Petter, ty det är ett ofta förekommande frågefel, att lärjungen får gissa sig till den frågandes mening. Min *mening* var nu, att samma pris skulle gälla för foten, så att 67 fot förhålla sig till hvad de kosta, 144 kronor, som $x$ fot förhålla sig till hvad de kosta, 11 kr.

Ex. 71. En dag hälsade Petter på farbror Lars, som sade: i fjor fick jag af 20 k.-fot rågutsäde 160 k.-fot 4 kannor afkastning. Du, som lärt att lösa räknegåtor, kan väl nu säga mig, huru mycket råg jag får i år efter mina utsådda 35 kub.f. 6 knor?

»Omöjligt, k. farbror, ty skörden står till Gud, såsom skolläraren lärt mig», svarade Petter. Ja — ja, sade fader Lars med blicken uppåt, jag *menade*, om jag i år får samma skörd i förhållande till utsädet, som i fjor, då rågen ser lika vacker ut i år som i fjor. »Ja — så», sade Petter och tecknade:

1 Eqv. $\frac{x}{35,6} = \frac{160,4}{20}$.

Ex. 72. En misshushållare, som kallade sig »landthushållare», hade många kor, men svälte dem. Han hade hört att mejeristen på Vreten fick 1 skålp. 50 ort smör af 6 kannor mjölk och frågade mejeristen: huru många kannor mjölk af mina kor får jag föra till mejeriet för att få ett lispund smör?

Det kan jag nu ej säga, svarades.

Den der är ej bättre räknemästare än jag», tänkte misshushållaren och gick.

Om nu all mjölken hade haft samma gräddhalt, huru hade mejeristen då besvarat frågan:

1 Eqv. $\frac{x}{20} = \frac{6}{1,50}$. $x = 80$.

Om åter, efter »afprofning», gräddhalten i misshushållarens mjölk förhållit sig till gräddhalten i Vretens mjölk, som 2 till 3, huru hade då svaret utfallit?

1 Eqv. $\frac{2 \times x}{20} = \frac{3 \times 6}{1,50}$. $x = 120$.

Ex. 73. Huru många tunnor råg till 17 kronors pris bör A sälja för att få samma summa penningar som B får för sina 150 tunnor 12 kappar hafre till 8 kronors pris?

1 Eqv. $x \times 17 = 150\frac{12}{32} \times 8$.

Rätt, Petter! Då i frågan ej uttryckes det lika förhållande, hvari talen stodo till hvarandra två och två, låg det dig närmare före att i frågan se rågmassans *värde* lika med hafremassans värde. Men nog kan du (enligt Ex. 66 c) veta huru du här kan uttrycka frågan så, att du får två *qvoter* lika på fyra sätt, om du så vill hafva det uttryckt.

Ex. 74. I 8 ort guld 24 karat fint äro $8 \times 24 = 192$ guldenheter; i 7 ort guld 18 karat fint äro $7 \times 18 = 126$ guldenheter. Huru vill du få den sednare guldmassan att med samma halt 18 karat innehålla lika många guldenheter som den förra massan?

»Jag får väl öka dess vigt med 18 karats guld», sade Petter och tecknade:

1 Eqv. $8 \times 24 = (7 + x)\,18$, deraf $x = \frac{11}{3}$ ort, alltså $7 \times 18 + \frac{11}{3} \times 18 = 192$.

Nu såg du i problemet de två produkterna lika, $8 \times 24 = (7 + x)\,18$, men då vet du ju, att frågan kunde så uttryckas, att du här får två qvoter lika $\frac{8}{18} = \frac{7+x}{24}$, eller $\frac{8}{7+x} = \frac{18}{24}$, eller $\frac{24}{18} = \frac{+x}{8}$, eller $\frac{24}{7+x} = \frac{18}{8}$.

Men, Petter, det var icke så nödvändigt, att du ökade de 7 orten 18 karat just med $x$ ort 18 karat, för att få guldenheterna att blifva 192.

Öka t. ex. med 20 karats guld!

1 Eqv. $7 \times 18 + x \times 20 = 8 \times 24$, deraf $x = \frac{33}{10}$ ort, alltså

$$7 \times 18 + \tfrac{33}{10} \times 20 = 192.$$

I förra exemplet fick du massans vigt $7 + \frac{11}{3} = 10\frac{2}{3}$ ort, och nu fick du vigten $7 + \frac{33}{10} = 10\frac{3}{10}$ ort. I förra exemplet fick du guldenheternas finhet 18 karat, emedan du ville så ha det, och nu fick du deras finhet $18\frac{66}{103}$ karat, om du räknar ut det; i begge fallen 192 guldenheter. Ja, du kan tillsätta de 7 orten 18 karat vissa ort koppar och få guldenheterna 192, men massans finhet blir derefter, allt lägre.

Ex. 75. Vi hafva förut haft exempel på »bolag», der fråga icke var om att dela bolagets vinst eller förlust i förhållande till hvarje bolagsmans andel i bolaget, hvilket eljest i allmänhet är rätts- och billighetsgrunden för bolagsbildning. Alltså, om A, B och C åtaga sig ett arbete, som erfordra 80 dagsverken och som betalas med 120 kronor, huru mycket få de hvar af förtjensten, 120 kronor, då A af de 80 dagsverkena gör 36, B 28 och C 16 och då de skola taga del i förtjensten i förhållande till hvars och ens arbete?

A 1 Eqv. $\frac{x}{36} = \frac{120}{80}$; B $\frac{x}{28} = \frac{120}{80}$; C $\frac{x}{16} = \frac{120}{80}$.

Att dessa eqvationer lågo i frågan, begrep du, Petter, af föregående, utan att du här behöfde ett särskildt »räknesätt» med särskilda »minnesregler». Det låg för ditt förstånd i sakförhållandet och du kunde, såsom du lärt, uttrycka de två lika förhållandena (qvoterna) på flere andra sätt.

Ex. 76. A, B, C och D drefvo bolagsrörelse och kändt var att A insatt 8,000, B 10,000, C 12,000 kronor. Men hvad D insatt ville man hålla hemligt äfvensom hvad affären gaf hvar och en bolagsman för året i vinst i förhållande till hans insats, för att icke låcka fram konkurrenter i den lönande affären. Men A ville inför en god vän »mellan fyra ögon» skryta med att vinsten varit 20,000 och hans andel i densamma icke mindre än fulla 1,000 kronor, och nu var hela hemligheten förrådd för vännen. Hvad har D insatt? Hvad är hela bolagskapitalet? Hvad har B fått af vinsten? Hvad C? Hvad D?

Hela bolagskapitalet sammanräknadt $= 30{,}000 + x$, och som du nu känner A:s andel i vinsten, så kan du börja med att uttrycka den sanning som gäller för honom, att hela bolagskapitalet förhåller sig till hans andel deri, som hela bolagsvinsten förhåller sig till hans andel deri, alltså

1 Eqv. $\frac{30{,}000 + x}{8{,}000} = \frac{20{,}000}{1{,}000}$;

D:s andel i bolaget 130,000.

Hela bolagets kapital 160,000.

B:s andel i vinsten?

1 Eqv. $\frac{160{,}000}{10{,}000} = \frac{20{,}000}{x}$, eller $\frac{10{,}000}{160{,}000} = \frac{x}{20{,}000}$,

hvarefter C:s och D:s andelar i vinsten finnas på samma sätt.

Ex. 78. Om 100 man på 8 dagar med 12 arbetstimmar om dagen gräfva en kanal 600 fot lång, 12 fot bred och 8 fot djup; huru många man behöfvas för att på 6 dagar med 10 arbetstimmar om dagen gräfva en kanal 480 fot lång, 8 fot bred och 9 fot djup?

Vi hafva redan i föregående fått begrepp om gemensamt verkande faktorer till *något*. Dessa faktorer äro här männen, arbetsdagarne och dagens arbetstimmar och detta *något*, som här blir verkan deraf, är kanalen. Men kanalen uttryckes genom sitt *kubikinnehåll*, som är produkten af dess längd, bredd och djup. Som nu arbetskraften å ena sidan förhåller sig till den kanal, som deraf uppkommer, så förhåller sig ock arbetskraften å andra sidan till den kanal, som deraf uppkommer, eller huru man vill på annat sätt uttrycka dessa två lika förhållanden, alltså

1 Eqv. $\frac{100 \times 8 \times 12}{600 \times 12 \times 8} = \frac{x \times 6 \times 10}{480 \times 8 \times 9}$.

Om nu begge qvoterna hvar för sig förkortas, får du

1 Eqv. $\frac{1}{6} = \frac{x}{48 \times 4 \times 3}$, deraf $\frac{48 \times 4 \times 3}{6} = x$, der du åter kan förkorta och få $8 \times 4 \times 3 = x = 96$ man.

Men denna sednare förkortning hade du kunnat göra i din först tecknade Eqv. på det sättet, att du hade uttagit de gemensamme faktorer, som funnos i begge divisorerne eller i begge dividenderna, ty i intetdera fallet rubbas likheten.

Hvar ligger den teoretiska och praktiska vinsten, här, eller i »räknekonstens» nymodiga sätt att utan eqvation, i en lång kedja af »hufvudräkningar» bundtvis hopsamla facit $\frac{100 \times 8 \times 12 \times 480 \times 8 \times 9}{600 \times 12 \times 8 \times 6 \times 10}$, för att så, fram- och medsläpande talen, få nöjet att slutligen verkställa reduktionen.

Och tänk, om det obekanta hade ingått, såsom det kan göra det, i två, eller än flera problemets faktorer, huru hade det då gått, om man ej fått taga saken lika enkelt och simpelt, på grund af samma sanning i problemet?

Ex. 79. Allmänt talas om »procent». Ordet betyder »för hundra», eller hvad som står i förhållande till 100, så att det är lika med 100, eller en viss del eller mångfald af 100. 5 procent är fem hundradedelar af hundra, $\frac{5}{100} \times 100 = 5$; 100 procent $\frac{100}{100} \times 100 = 100$; 150 procent = (ett hundrafemtio hundradelar af hundra) $\frac{150}{100} \times 100 = 150$. Men om jag säger om barnen i småskolan att de äro 50 procent af barnen i storskolan, så menar jag just icke det, att barnen i storskolan äro 100 och att barnen i småskolan äro 50, hvilket möjligtvis kunde vara fallet. Min mening är, att barnen i småskolan äro så stor del af barnen i storskolan som 50 är del af 100. Vet jag nu att barnen i storskolan äro 80 och barnen i småskolan äro 40 och säger om de sednare att de äro 50 procent af de förre, så innebär det, att de sednare äro så stor del af de förra som 50 är del af hundra. Alltså

a) Huru många äro barnen i småskolan, då de äro 75 procent af storskolans 120 barn?
1 Eqv. $\frac{x}{120} = \frac{75}{100}$; $x = \frac{75 \times 120}{100} =$

b) När barnen i småskolan äro 60 och utgöra 80 procent af storskolans, huru många äro då barnen i storskolan?
$\frac{60}{x} = \frac{80}{100}$, eller $\frac{x}{60}, = \frac{100}{80}$; $x = \frac{100 \times 60}{80} =$

c) När barnen i småskolan äro 40 och barnen i storskolan äro 125, huru många procent af de senare äro då de förra?
$\frac{40}{125} = \frac{x}{100}$; $x = \frac{40 \times 100}{125} = 32$ proc.

Hvilket tal som helst kan således vara obekant, utom talet 100, då det talas om »procent», emedan detta ligger i ordet procent.

Ex. 80. a) Huru mycket är 6 procent af 278 kronor?
1 Eqv. $\frac{x}{278} = \frac{6}{100}$; $x = 16{,}68$ kronor.

b) När jag får 25 kronor i ränta för 120 kronor, huru många procent får jag då för lånet?

1 Eqv. $\frac{25}{120} = \frac{x}{100}$; $x = 20\frac{5}{6}$ procent.

Ex. 81. a) När af 12 tunnors utsäde skördades 679 procent, huru många tunnor voro då skördade?

1 Eqv. $\frac{679}{100} = \frac{x}{12}$.

b) När 560 tunnor säd skördades och denna afkastning utgjorde 732 procent, hvad hade då varit utsädet?

1 Eqv. $\frac{x}{560} = \frac{100}{732}$.

c) När 35 tunnor utsåddes och 15:de »kornet» d. v. s. 15 × 35 tunnor skördades, huru många procent af afkastningen var utsädet?

1 Eqv. $\frac{x}{100} = \frac{35}{15 \times 35}$ $x = 6\frac{2}{3}$ procent.

d) Huru många procent af utsädet utgjorde skörden?

1 Eqv. $\frac{x}{100} = \frac{15 \times 35}{35}$ $x = 1500$ proc.

Ex. 82. En slagtare i staden S. vägde 3 centner, men det sades att han hade tio år derefter vid sin död ökat sin vigt med 25 procent. Hvad vägde han då?

1 Eqv. $x = 3 + \frac{25}{100} \times 3 = 3 + \frac{3}{4}$ centner $= 3 \times 5 + \frac{3 \times 5}{4}$ lispund $= 18\frac{3}{4}$ lisp. $= 18 \times 20 + \frac{3 \times 20}{4}$ skålpund $= 375$ skålp.

Ex. 83. I fråga om upp- och utlåning af kapitaler mot det att utlånaren får och låntagaren gifver hvad man kallar *ränta*, *intresse*, *diskont* eller *procent* (procent nemligen af hvad långifvaren får för hvarje hundratal eller del deraf som kapitalet innehåller), talar man om »årlig ränta» eller ränta för 1 års tid. Egentligen förstår man med ränta, intresse eller diskont hvad långifvaren får för begagnandet af hans utlånade kapital, för hvad tid som helst, beräknad efter hvad 100 gifver för 1 år, som egentligen kallas procent. Talet 100 med dess tid 1 år är således i alla hithörande frågor stående tal; alla öfriga äro omvexlande. Såsom hundra för 1 år förhåller sig till sin procent, så förhåller sig kapitalet, som lånas för bestämd tid till sin ränta, intresse eller diskont.

a) Hvad är räntan för 150 kronor för 1 års lånetid efter 5 procent (5 för 100 för 1 år)?

$$\frac{x}{150 \times 1} = \frac{5}{100 \times 1} =$$

b) Hvad är räntan för 700 kronor för 2 år efter 6 procent (6 för 100 för 1 år)?

$$\frac{x}{700 \times 2} = \frac{6}{100 \times 1}.$$

Som vi nu veta, att 100 i hithörande frågor *alltid* har med sig faktorn 1, men att denna hvarken ökar eller minskar, så kunna vi utlemna den.

c) Hvad är räntan för 987 kronor för 4 månader ($\frac{1}{3}$ år) efter 5 procent?

1 Eqv. $\frac{x}{987 \times {}^1/_3} = \frac{5}{100}$; $x = \frac{5 \times 987{}^1/_3}{100}$.

Vill du behålla de 4 månaderna såsom tid för kapitalet, så får du uttrycka tiden för hundra med 12 månader, då du får:

1 Eqv. $\frac{x}{987 \times 4} = \frac{5}{100 \times 12}$.

d) Om någon har i ränta för ett lån på 3 år betalat 540 kronor efter 4 procent; huru stort är då det lånta kapitalet?

1 Eqv. $\frac{540}{x \times 3} = \frac{4}{100}$, eller $\frac{x \times 3}{540} = \frac{100}{4}$.

e) Om man för 7 månader lånat 560 kronor och derför lemnat 16 kronor ränta, huru många procent gör det?

1 Eqv. $\frac{16}{560 \times 7} = \frac{x}{100 \times 12}$.

Det är merendels vigast att taga bort gemensamma faktorer, när man kan se dem, då antingen ett tals värde, eller lika tals likhet dermed ej rubbas.

Ex. 84. För ett lån af sin vän A gaf B honom sin jagthund, som hade ett dem emellan bestämdt värde. Vännen B fick inbetala lånet när han kunde och ville. Lånesumman var 175 kronor, och efter uträkning befanns hundens värde vara 8 procents diskont för lånesumman. Hvad penningevärde hade hunden?

1 Eqv. $\frac{x}{175} = \frac{8}{100}$.

Ex. 85. När 3,285 kronor, använde för »omsättning» i handel, lemnat en handelsvinst af 2,463,75 kronor efter 25 procent *för året*, huru lång tid har då rörelsen gått intill »bokslutet»?

1 Eqv. $\frac{2463,75}{3285 \times x} = \frac{25}{100}$.

2 Eqv. $\frac{2463,75}{3285} = \frac{25\,x}{100}$.

Ex. 86. A sade till sin granne: får jag låna ditt starka oxpar att plöja mina vallar med i 3 månader, så vill jag för hvarje oxe i månaden betala dig i kronor 6 procent. Huru mycket ville han då betala för oxparet för hela tiden?

6 procent i kronor är 6 kronor.

För oxparet i månaden således $2 \times 6 = 12$ kronor och för 3 månader $3 \times 12 = 36$ kronor.

Alltså eqvationen $x = 6 \times 2 \times 3$.

»Den simplaste hufvudräkning för småbarnen», anmärkte Petter Pys.

Ex. 87. En annan dag sade A till grannen: får jag låna (arrendera) ditt hemman, så vill jag årligen gifva dig i ränta (arrende) 75 procent af de 130 tunnor råg, som jag årligen har såsom arrendeafgift för mitt qvarnverk. Huru många tunnor ville han gifva?

1 Eqv. $\frac{x}{130} = \frac{75}{100}$.

Ex. 88. Penningar, såsom guld- och silfvermynt, eller deras »representanter», såsom sedlar och andra »kreditpapper», äro de allmännaste, men ej de enda köpe- och bytesmedlen.

En sjökapten, nyss hemkommen, omtalade, att han hos vildarne på en Söderhafsö köpte en oxe för tre fyrtumsspikar, som kostat honom 75 öre hundradet. Hvad kostade honom då oxen i vårt mynt?

Säg ut den sanning som ligger i frågan! »Hvad oxen kostade ($x$) är så många gånger mindre än 75 öre, som 3 spikar äro mindre än 100 spikar», sade Petter och tecknade:

1 Eqv. $\frac{x}{75} = \frac{3}{100}$.

Af dessa två lika qvoter får du de två lika produkterna $100 \times x = 3 \times 75$. Frågan hade derför äfven kunnat uttryckas sålunda:

1 oxe i värde = 3 spikar.
100 spikar » = 75 öre.
$x$ öre » = 1 oxe.

Detta hade varit hvad man kallat »kedjeräkning», »bytesräkning», »vexelräkning» m. m. Men då vi här använda vårt 9:de axiom, få vi af de tre eqvationerna blott en, $1 \times 100 \times x = 3 \times 75 \times 1$, alltså de två lika produkter, som vi fingo af de två lika qvoterna.

Vid kedjans uttryckande har man endast att observera, att de två talen af samma sort ej komma på samma sida, utan på hvar sin sida, såsom exemplet visar. Äro talen, som till värdet jemföras, många, blir naturligtvis kedjan längre, men »konsten» dermed ej större.

Ex. 89. Om 200 skålp. råg vid förmalning gifva 186 skålp. mjöl; huru många kub.fot råg fordras då till förmalning för att gifva 500 skålp. mjöl, då 2 kub.fot råg väger 96 skålp.?

200 skålp. råg = 186 skålp. mjöl,
500 » mjöl = $x$ kub.fot råg,
2 kub.fot råg = 96 skålp. råg. Häraf fås

1 Eqv. $200 \times 500 \times 2 = 186 \times x \times 96$, som åter visar, huru man kunnat uttrycka frågan i två lika qvoter på många vis.

I den större samfärdseln med sin olika »kurs», sitt olika mynt, vigt, mått m. m., är en mer kombinerad frågas uttryckande i »kedja» mycket lämplig. Eljest begagnar man ej detta »räknesätt» vid enklare frågors lösning.

Ex. 90. *Rabatt* kallas i allmänhet det *afdrag*, som man får på hvad man eljest måste lemna. I fråga om penningars betalande var det gamla stränga begreppet om rabatt det i enlighet med »ockerlagen», att rabatten ej fick tagas högre, än att den, som fick det (mindre) rabatterade kapitalet med räntan dertill lagd för samma tid efter högst 6 procent, skulle vid kapitalets förfallotid hafva samma sitt kapital. Härvid förutsättes, att kapitalet under tiden skulle vara räntefritt, eller att det kunde löpa med mindre ränta än efter den procent, hvarefter rabatten gjordes. Om således A ett år härefter skulle till B betala ett räntefritt kapital 100 kronor, men enligt A:s önskan nu ville betala det med 6 procents rabatt, så gick det icke an för B att betala A $100 - 6 = 94$ kronor, ty då tog han högre årsränta för sina 94 kronor än lagen medgaf till 6 procent. Han måste afdraga mindre och betala mer, så att A med *summan af det mindre kapitalet och räntan på detsamma* efter 6 procent för 1 år kunde vid årets slut hafva sina 100 kronor, som han då skulle få af B. Men hvad skulle då A nu betala?

1 Eqv. $x + \frac{x \times 6}{100} = 100$.

Nu är $x$ det mindre kapitalet, $\frac{x \times 6}{100}$ räntan på detsamma efter 6 procent, detsamma som rabatten, och begge i summa $= 100$.

Ex. 91. A säger till sin arrendator B: Vill du lemna mig nu i November de 95 tunnor råg, som du skall lemna mig i Mars, så rabatterar jag 5 tunnor?

Att nu göra frågan huru mycket som rabatteras eller huru mycket A vill hafva i stället för 95 tunnor, kan gå an vid den minsta pysens undervisning. Men om A säger, att han rabatterar 5 procent af de 95 tunnorna, så är det en fråga, som pysen, först efter något års öfning med »obligatorisk» aritmetik, ledigt bör kunna lösa.

1 Eqv. $\frac{x}{95} = \frac{5}{100}$.

Ingen eger rätt att tilltvinga sig rabatt å hvad han är skyldig att betala; men den som har en fordran, som ej är förfallen, och som han behöfver förr, får beqväma sig att gifva den rabatt, som gäldenären begär antingen skulden löper med ränta eller ej, om betalning skall ske före förfallotiden. Sådant aftal är numera fritt till hvad rabatt som helst, sedan räntan på korta »papper» blifvit fri. Öfverallt har derför den gamla i Ex. 90 afhandlade »rabatträkningen» försvunnit ur samfärdseln, så att man beräknar rabatten till viss procent af kapitalet, som är i fråga. Varan kostar 100 kronor på 4 månaders kredit med 6 procents ränta för år räknadt, säger handelsmannen. »Men», säger köparen, »får jag 10 procents rabatt, så betalar jag kontant (nu)», och så betalar han $100 - 10 = 90$ kronor i stället för $100 + 2 = 102$ kronor på 4 månader efter köpet. En sådan »prutmån» i handeln kan hafva många orsaker, allmännast den, att säljaren står på väg att »realisera», eller att han begärt för sin vara långt mer än han med skälig handelsvinst kan taga.

Ex. 92. B. köpte af C ett hemman för 12,000 kronor under följande betalningsvilkor: 4,000 kr. betalas efter 1 år med 2 procents ränta, 3,000 kronor betalas efter 2 år med 3 procents ränta för år räknadt, 5,000 kronor betalas efter 3 år med en sådan ränta för den tiden efter $x$ procent, att alla räntorna för de särskilda afbetalningarne på sina tider tillsammans utgöra den ränta efter 6 procent för året, som köparen bör betala om han hellre vill betala hela köpeskillingen efter $1\frac{1}{2}$ år. Efter hvad procent skulle nu räntan för sista köpeskillingsposten betalas, om köparen betalade hvarje post på sin tid? Petter tecknade enligt uppgiften:

a) räntan för 4,000 kr. för ett år efter 2 procent?

1 Eqv. $\frac{x}{4000} = \frac{2}{100}$.

2 Eqv. $x = \frac{4000 \times 2}{100} = 80$.

b) Räntan för 3,000 kr. för 2 år efter 3 procent?

1 Eqv. $\frac{x}{3000 \times 2} = \frac{3}{100}$.

2 Eqv. $x = \frac{3000 \times 2 \times 3}{100} = 180$.

Emedan Petter af a) och b), såsom af förra lösningar, sett och funnit att räntan af hvilket kapital som helst, för hvad tid som helst och efter hvad procent som helst, är en produkt af kapitalet, tiden och procenten, dividerad genom 100, så kunde han genast teckna

c) räntan för 5,000 kr. för 3 år, efter $x$ procent?

1 Eqv. Räntan $= \frac{5000 \times 3 \times x}{100} = 150\,x$.

Detta räntans tecknande blef nu för Petter icke en obegriplig diktatorisk »minnesregel», utan en ur klar grund härledd och insedd sanning, hvarför han tecknade:

d) Räntan för 12,000 kr. för $1\frac{1}{2}$ år efter 6 procent?

1 Eqv. Räntan $= \frac{12,000 \times 1^1/_2 \times 6}{100} = 1080$

och sist efter uppgiften

e) räntorna af alla tre posterna tillsammans lika med räntan å hela köpeskillingen?

1 Eqv. $80 + 180 + 150x = 1080$. $x = 5\frac{7}{15}$ procent.

Detta kallar nu »räknekonsten» med det långa namnet »betalningsterminers reduktion» och gör det till ett särskildt »räknesätt». Men här var ju nu icke fråga om att söka den »termin», på hvilken hela köpeskillingen kunde betalas, icke heller var procenten öfver allt densamma, hvarför »konstens» vanliga »minnesregel» icke räcker till för alla fall, äfven om den räknande förstode den. Och likväl var ju icke mer än ett enda $x$ ingående i frågan, då frågan likaväl kunnat vara sådan, att $x$ kunnat ingå i två eller flera af de särskilda talen, så att frågan blifvit en fullständig »räknegåta» för många s. k. »snälla räknemästare».

Ex. 93. I sjelfva småskolans exempelsamlingar förekomma »räknegåtor» som nu förbigås i skolan, t. ex. a) Två tal äro, hvilkas summa är 32 och hvilkas skilnad är 4. Hvilka äro de två talen?

I *en* exempelsamling anlitas eqvationen sålunda:
Låt det mindre talet vara $x$
Då är det större talet $x + 4$, alltså
1 Eqv. $2x + 4 = 32$, hvaraf $x = 14$.

b) I en annan exempelsamling förekomma »räknegåtor» utan »minnesregel» och utan hänvisning till eqvation, t. ex.: »En bonde sålde 1 kubikfot råg och 1 kubikfot hafre tillsammans för 3 kronor 50 öre. Om han fått 1 krona mer för rågen, så hade han fått dubbelt så mycket för rågen som för hafren. Huru mycket fick han för hafren? Huru mycket för rågen?»

Nu äro äfven här 2 tal, rågens och hafrens värde, obekanta, men att för ett barn, som ej fått begrepp om eqvation, pina in frågans facit under en diktatorisk »minnesregel», låter sig icke lätt göra.

Man har likväl inom Aritmetiken en allmän väg att gå för lösningen af alla frågor, hvari två obekanta tal ingå, utan hufvudbry, då man uttrycker det ena talet med $x$ och det andra med $y$ och tecknar de två eqvationer, som frågan innehåller.

Ex. 94. I förra exemplet a) kallar jag det ena talet $x$ och det andra $y$. Då har jag enligt uppgiften:
1:o) $x + y = 32$.
2:o) $x - y = 4$.

Nu finnas flera sätt, hvarpå man kan bringa dessa två eqvationer med två obekanta till en eqvation med en obekant, men för vårt ändamål behöfva vi blott det oftast begagnade sättet, och det är, att i den ena eqvationen taga ut värdet för det ena obekanta och sätta in samma värde för samma obekanta i den andra eqvationen, och så lösa den. Alltså är i Eqv. 1:o $x = (32 - y)$.

Insättes nu detta värde för $x$ i stället för $y$ i Eqv. 2:o, så får du
1 Eqv. $32 - y - y = 4$ (hyfsa!)
1 Eqv. $32 - 2y = 4$.
2 Eqv. $-2y = 4 - 32 = -28$.
3 Eqv. $-y = \frac{-28}{2} = -14$ (ombyt tecknen!)

Ville jag hafva det andra talet först, så hade jag i Eqv. 1:o $x + y = 32$ uttagit $y$ och fått $y = (32 - x)$.

Genom insättning i Eqv. 2:o af detta värde för $y$, hade jag fått:

1 Eqv. $x - (32 - x) = 4$, hvaraf
2 Eqv. $2x - 32 = 4$.
3 Eqv. $2x = 36$; $x = 18$.

Ex. 95. I Ex. 93 b) kallar jag det ena talet $x$, det andra $y$. Enligt uppgiften har jag då:

1:a Eqv. $x + y = 3{,}50$.
2:a Eqv. $x + 1 = 2y$.

Gör nu på samma sätt som i föreg. Ex., så blir af Eqv. 1:o $x = (3{,}50 - y)$, insatt för $x$ i Eqv. 2:o.

1 Eqv. $(3{,}50 - y) + 1 = 2y$ (hyfsa!)
1 Eqv. $4{,}50 - y = 2y$.
2 Eqv. $4{,}50 = 3y$; $y = 1{,}50$, hvadan $x = 3$ kr.

Ex. 96. Om 3 gånger ett tal och 4 gånger ett annat tal göra tillsammans 123 och om talens skilnad är 27, hvilka äro de två talen?

1:o. $3x + 4y = 123$.
2:o. $x - y = 27$.

Du kan nu uttaga ett af de obekanta i 1:a Eqv. såsom förut, och sätta in dess värde i Eqv. 2:a, men du ser att det är lättare att taga ut i 2:a Eqv., för att insätta i 1:a. Alltså $x = (27 + y)$.

1 Eqv. $3(27 + y) + 4y = 123$ (hyfsa!)
1 Eqv. $81 + 7y = 123$
2 Eqv. $7y = 42$, $y = 6$, $x$ 33.

Ex. 97. Fadrens och sonens lefnadsår voro tillsammans 70. Fadrens lefnadsår förhöllo sig till sonens som 6 till 1; hvad var deras ålder?

Fadrens lefnadsår $x$, sonens $y$.

1:o. $x + y = 70$.
2:o. $\frac{x}{y} = \frac{6}{1}$, eller $\frac{x}{y} = 6$. Lös!

Ex. 98. Om $\frac{3}{4}$ af hvad A eger och $\frac{5}{6}$ af hvad B eger gör tillsammans 24 kronor, och om B eger 6 kronor mer än A; hvad ega de hvar?

A eger $x$, B $y$.

1:o. $\frac{3x}{4} + \frac{5y}{6} = 24$.
2:o. $x = y - 6$.

Nu kan du ju »häfva» bråken i 1:o, om du vill hafva hela tal före insättningen af värdet för $x$ eller $y$.

Ex. 99. »Erik frågade Anders huru mycket penningar han hade. Sedan Anders svarat, sade Erik: gif mig 5 öre af dina, så få vi lika mycket hvar. Huru mycket hade hvar, då man vet, att de tillsammans hade 1 krona 44 öre?

Anders har $x$, Erik $y$.

1:o. $x = y + 5$.

2:o. $x + y = 1{,}44$.

Och så alla »räknegåtor» igenom, der man har två obekanta.

Men äfven då flera obekanta ingå i en fråga, och man får lika många eqvationer, bringas de på enahanda grund till en eqvation med en obekant att lösas på vanligt sätt; men dermed må gerna anstå tilldess du, Petter, kommer in på skolans högre stadium, om du ej förut på egen hand vill titta in i »algebran».

Ex. 100. Anders har vissa kronor ($x$) och Emil har 4 kronor. Tolftedelen af hvad Anders har är lika med hvad Emil har, om detta divideras med trefjerdedelar af hvad Anders har. Hvad har Anders?

Enligt uppgiften

1 Eqv. Tolftedelen af hvad Anders har

$\frac{x}{12} = 4 : \frac{3x}{4}$.

1 Eqv. $\frac{x}{12} = \frac{4 \times 4}{3x}$.

2 Eqv. $x \times x = \frac{12 \times 4 \times 4}{3} = 64$.

Men nu är $x \times x$ qvadraten af $x$; alltså

2 Eqv. $x^2 = 64$. Nu måtte väl ock 64 vara en qvadrat, uppkommen af ett tal, multipliceradt med sig sjelft; hvilket? $8 \times 8 = 64$. Då måste väl *qvadratroten* $x$ vara lika med *qvadratroten* 8.

3 Eqv. $x = 8$. Proban!

1 Eqv. $\frac{8}{12} = \frac{4 \times 4}{3 \times 8}$; $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Genom hufvudräkningsöfning kan du komma dertill att du lätt finner roten till många qvadrater, t. ex. roten 2 till qvadraten 4, roten 3 till qvadraten 9, roten 4 till qv. 16, roten till qvadraterne 25, 36, 49, 64, 81, 100, ja än flere. Snäll är du, men derför icke ett »underbarn», som kan visas för pengar, så att du kan draga ut roten af hvilken qvadrat som helst, innan du kommit längre i geometrien, så att du kan förstå grunden, hvarifrån du har att utgå. Och som jag icke vill göra det för dig till en »konst», får du dröja med allmän qvadrat- och annan rotutdragning tilldess du kommer till skolans högre stadium, hvartill jag önskar dig lycka, min käre Petter Pys!