HUR SKALL JAG BLI STYV I MATEMATIK

Handledning för självstudium

AV

GÖSTA SETTERBERG
Lektor, Fil. dr.

STOCKHOLM

BOKFÖRLAGET NATUR OCH KULTUR

Printed in Sweden

TRYCKERI AKTIEBOLAGET THULE
STOCKHOLM 1934.
340196

Förord

Strax ett ord till studiecirklarnas medlemmar, men först vänder jag mig till skolungdomen.

En gymnasist får underbetyg i matematik på våren, och jag skall läsa upp honom. Han har svårt för matematik, heter det. I början av sommaren får jag dagligen söka upp honom på fotbollsplanen för att taga honom med till lektionerna. Men jag låter honom inte slippa undan. Och mot slutet av sommaren är det han, som söker upp mig även på sin fritid för att fråga, hur det och det problemet skall lösas. På hösten blir han flyttad, vid julen har han *a* i matematik och vid läsårets slut *A*.

Var det sant, att han hade svårt för matematik? Nej, men han hade inga grundliga kunskaper, och därför syntes honom matematiken som något ofattbart. Och det är många med honom, hos vilka bristande insikter i ämnet förväxlas med bristande begåvning. Då skulle de genom att läsa erforderliga kapitel i föreliggande handledning kunna förvärva dessa insikter och reda sig bra med ämnet utan dyrbara privatlektioner. Och vid studiet på egen hand kunna de arbeta i lugn och ro utan att jäkta samt därför få tid att ordentligt smälta det lästa, så att varje sak hinner klarna, innan de gå vidare. Så blir matematiken lätt.

Men även de, som hastigt fatta en matematisk tankegång, kunna ha nytta av följande framställning, om de vilja arbeta i förväg, vilket med de moderna kraven på individuella studier uppmuntras från lärarhåll mer än förr. Och för dem är det en stor fördel att få räkna på egen hand i stället för att följa med klassundervisningen, där takten måste vara för långsam för dem av hänsyn till kamraterna.

Och icke minst studiecirklarna kunna ha nytta av följande framställning, likaså enskilda studerande. Det torde framgå av det redan sagda.

Förf.

Ekvationer med en obekant.

1. *Pelle säger till Nisse: "Jag har 12 kr. Har du så mycket?" — "Nej", svarar Nisse, "men om jag hade dubbelt så mycket som jag nu har och dessutom 1 kr., så skulle jag ha lika mycket som du."*

Hur mycket pengar har Nisse?

För att räkna ut detta anteckna vi, vad vi veta, men skriva för korthets skull "x" i stället för "Nisses kassa", fastän vi läsa ut det som "Nisses kassa". Vi sätta sålunda $2 . x$ eller $2x$ och läsa ut det 2 gånger Nisses kassa. Då vi fått uppgivet, att 2 ggr Nisses kassa + 1 kr. skall vara 12 kr., skriva vi det alltså på följande sätt:

$$2x + 1 = 12 \quad .... \quad (1)$$

och läsa ut det: "2 ggr Nisses kassa + 1 kr. = 12 kr."

Att det är fråga om kronor brukar man hålla reda på utan att sätta ut det i *ekvationen.* Ett sådant uttryck som ovanstående kallas nämligen *ekvation* och kan, som vi strax skola se, hjälpa oss att räkna efter, hur mycket x (läs: Nisses kassa) är. Vi ha nu att förenkla eller, som man kallar det, *hyfsa* ekvationen, och vi skriva för den skull blott 2 ggr Nisses kassa utan att taga med den överskjutande kronan. När den ej medtages, blir beloppet 1 kr. mindre, således

$$2x = 11 \text{ (läs 2 ggr kassan = 11 kr.)},$$

varpå vi erhålla

$$x = 5{,}50,$$

vilket vi utläsa: *Nisses kassa är 5,50 kr.*

Nu kunna vi pröva, om vi räknat rätt. Nisses kassa skulle fördubblas, står det i uppgiften, och $2 \cdot 5{,}50$ kr. är 11 kr. Därtill skulle 1 kr. adderas, och då erhålles 12 kr., som ju var Pelles kassa. Vi ha tydligen räknat rätt.

2. Nu är det skäl att sätta ihop och räkna några liknande exempel på Nisses kassa men med andra siffror. Man kan lätt tillverka exempel själv. För att förebygga, att svaret blir bråkdelar av öre, är det klokast att först tänka sig ett visst svar, såsom kassan = 2,25 kr. Om detta belopp tages t. ex. 5 gånger, erhålles 11,25 kr., vilket vi kunna öka med 1,75 kr. till 13 kr. och säga, att *5 ggr Nisses kassa plus 1,75 kr. utgör 13 kr.* Tänka vi oss, att vi ej veta, hur stor hans kassa är, kunna vi beräkna det genom att skriva

$$5x + 1{,}75 = 13 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

och läsa ut $5x$ som 5 ggr Nisses kassa samt fortsätta räkningarna som nyss.

Här ha vi en ny ekvation, och man har ofta nytta av att numrera ekvationerna, varför vi sätta (2) i slutet av raden vid denna ekvation liksom (1) vid den första. Ekv. (2) löses på samma sätt som (1), varpå den studerande fortsätter och tillverkar nya uppgifter eller problem, sådana som det ovan kursiverade. Sedan uppställes erforderlig ekv. för varje exempel liksom nyss ekv. (2). Dessutom bör man begagna någon exempelsamling[1] och där börja med det kapitel, som innehåller *problem till ekvationer av första graden med en obekant,* även om detta kap. ej står först i boken.

Ett påpekande, innan vi gå till nästa exempel. 100 är 2 mer än $98 = 100 - 2$, d. v. s. om vi låta bli att minska 100 med 2 och taga jämnt 100, få vi 2 mer, än om vi minska 100 med 2. Vi få strax se, vad vi ha för nytta härav.

3. Så ett annat problem. *Om 4 ggr kassan minskas med 2 kr., återstår 9,80 kr.*

Ekvationen blir tydligen

$$4x - 2 = 9{,}80 \qquad (3)$$

I vilket fall få vi mera, om vi minska 4 ggr kassan med 2 kr. eller om vi låta bli att minska den? Givetvis om vi låta bli minskningen. Då få vi ju 2 kr. mera kvar, således

$$4x = 9{,}80 + 2 = 11{,}80$$

och

$$x = 2{,}95 \text{ kr.}$$

Pröva svaret här liksom i följande problem:

$$x = 2{,}95$$
$$4x = 11{,}80$$
$$4x - 2 = 9{,}80.$$

Det stämmer således.

Sätt sedan ihop och räkna några flera liknande exempel. Därpå gå vi till en ny typ, då vi få en

[1] *Lindhagen, Sifferekvationer* är mycket bra för nybörjare, ty den innehåller rikligt med lätta uppgifter, varav man kan lösa så många, man behöver för att komma in i saken och våga sig på någon svårare exempelsamling, såsom *Hedström och Rendahl, Algebra.* Många andra exempelsamlingar finnas för övrigt att välja på.

bråkdel av vad vi söka, vilket för omväxlings skull ej antages vara pengar.

4. *"Jag tänker sälja 11 kor", säger en bonde. "Det är väl tredjedelen av alla korna i ladugården", undrar sonen. "Nej", blir svaret, "det är 7 kor mindre än en tredjedel av alla". Hur många kor hade han?*

Här få vi ekvationen

$$\frac{x}{3} - 7 = 11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

som utläses "tredjedelen av korna minskad med 7 blir 11 kor". Låta vi bli att minska med 7 kor och taga jämnt tredjedelen, få vi 7 kor mer eller 18 kor, således

$$\frac{x}{3} = 18$$

och då hela antalet är 3 ggr så mycket som tredjedelen,

$$x = 3 \cdot 18 = 54.$$

Svaret blir sålunda 54 kor.

5. Nu antaga vi, att det i stället varit fråga om $\frac{2}{3}$ av korna, men f. ö. lika uppgifter, så att vi vetat, att *om två tredjedelar av korna minskas med 7, återstår 11.* Då hade ekvationen blivit

$$\frac{2x}{3} - 7 = 11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

och efter första reduktionen (*reduktion* av en ekvation betyder förenkling av densamma)

$$\frac{2x}{3} = 18.$$

Då en tredjedel är hälften av 2 tredjedelar, få vi

$$\frac{x}{3} = 9$$

$$\therefore \quad x = 27.$$

(Tecknet $\therefore$ läses ut "alltså".)

Svar: *27 kor.*

6. Ett annat exempel. Vare sig x betyder en kassa, ett antal päron, antalet kg. eller något annat, tänka vi oss, att vi ha

$$\frac{3x}{4} - 2 = 9 - \frac{x}{6} \qquad (6)$$

Om vi liksom förut i vänstra ledet[1] stryka -2 och således låta bli att minska med 2, få vi 2 mer eller

$$\frac{3x}{4} = 11 - \frac{x}{6}$$

Högra ledet öka vi nu till 11, varför vi även måste öka vänstra membrum[1] med $\frac{x}{6}$.

$$\therefore \quad \frac{3x}{4} + \frac{x}{6} = 11$$

och efter förlängning av bråken

$$\frac{9x}{12} + \frac{2x}{12} = 11$$

[1] Uttrycket före likhetstecknet benämnes *vänstra ledet* eller *vänstra membrum*, uttrycket efteråt *högra ledet* eller *högra membrum*. *Pluralis* av det latinska ordet membrum heter *membra*.

$$\therefore \frac{11x}{12} = 11$$

$$\frac{x}{12} = 1$$

$$x = 12.$$

Eller också kunde man i stället för dessa räkningar genast ha skaffat bort nämnarna i den givna ekvationen genom följande tankegång. Vi fingo nyss ett helt x i st. f. $\frac{1}{12}x$ genom att i slutet av våra räkningar multiplicera med 12. Men vi kunde i stället från början ha multiplicerat den givna ekv. (6) med 12, som ju är minsta gemensamma nämnaren till bråken i vår ekv. Om vi i (6) ersätta $\frac{3x}{4}$ med $3x$, ha vi fått 4 gånger så mycket, eftersom vi byta ut fjärdedelar mot hela. När vi multiplicerat med 4, återstår att multiplicera den erhållna produkten med 3 för att få 12 ggr så mycket som från början. Då $3 . 3x$ är $9x$, blir 12 ggr första termen[1] $9x$. Men utom första termen innehåller vänstra membrum i (6) — 2 eller en skuld på 2. För att få hela vänstra membrum multiplicerat med 12 måste vi multiplicera både tillgång och skuld med 12. Då få vi

$$9x - 24.$$

Högra membrum beräknas på samma sätt. $-x$ är 6 ggr så mycket som $-\frac{x}{6}$, och sedan återstår att

[1] Med *term* förstås ett uttryck, som skall adderas till eller subtraheras från det övriga. I (6) ha vi således två termer i vartdera membrum och t. ex. i (1) två termer i vänstra membrum och blott en i högra.

fördubbla till $-2x$ för att få 12 ggr så mycket som från början. Ekvationen blir nu

$$9x - 24 = 108 - 2x$$

och efter ökning av vartdera membrum med dels 24, dels $2x$

$$11x = 132$$
$$\therefore \quad x = 12.$$

7. Stundom möter man mer invecklade ekvationer, såsom

$$\frac{4(2x-3)}{5} - \frac{3(x-2)}{2} = \frac{x+2}{6} \quad \ldots . \quad (7)$$

Här multiplicera vi med minsta gemensamma nämnaren eller 30. Om vi i första bråket stryka nämnaren och skriva $4(2x-3)$, få vi 5 ggr så mycket, varpå återstår att multiplicera med 6 för att få 30 ggr så mycket som från början. Motsvarande med de övriga bråken.

$$\therefore \quad 6 \cdot 4\,(2x-3) - 15 \cdot 3\,(x-2) = 5\,(x+2)$$
$$24\,(2x-3) - 45\,(x-2) = 5\,(x+2)$$
$$(48x-72) - (45x-90) = (5x+10)$$

Den första och den tredje parentesen i det sist erhållna uttrycket kunna vi, som vi veta från aritmetiken, utan vidare borttaga, då t. ex. 72 lika väl skall subtraheras, vare sig parentesen står där eller ej. Vi skriva därför

$$48x - 72 - (45x - 90) = 5x + 10 \ldots \quad (7b)$$

Innan vi gå vidare, jämföra vi med ett sifferexempel, låt oss säga

$$481 - 98.$$

Här är det bekvämare att först minska 481 med 100, varvid vi draga ifrån 2 för mycket och få lägga till det igen. Vi skriva ut denna räkning:

$$481 - 98 = 481 - (100 - 2).$$

Taga vi

$$481 - 100 = 381,$$

minska vi som sagt med 2 för mycket och måste öka med 2 igen för att få rätt.

$$\because\ 481 - (100-2) = 481 - 100+2 = 383,$$

d. v. s. efter parentesens borttagande få vi $+2$ i stället för -2.

Samma sak med vänstra membrum i (7b). Minska vi $48x - 72$ med $45x$, draga vi ifrån 90 för mycket och få då 90 för litet kvar, varför vi måste lägga till 90 för att få rätt. Således blir vår ekvation

$$48x - 72 - 45x + 90 = 5x + 10.$$

Genom fortsatt räkning erhålla vi

$$3x + 18 = 5x + 10$$
$$18 = 2x + 10$$
$$8 = 2x$$
$$x = 4.$$

8. Nu ett exempel på *rabatt* och *diskont*. Antag, att jag lånar pengar i en bank på 3 mån. mot 6 % pr år. Jag skriver ut en växel eller skuldförbindelse på 200 kr., vilket belopp jag förbinder mig att betala om 3 mån. Mot denna växel får jag ej fullt 200 kr., emedan banken skall ha ränta. 6 % på 200 kr. är 12 kr. pr år och 4 gånger så litet eller 3 kr. på 3 mån. Då återstår 197 kr., som jag får ut, och som benämnes *diskonterade värdet*, under det att avdraget på 3 kr. kallas *diskont*.

När en växel diskonteras, beräknas sålunda räntan på *slutkapitalet* (här 200 kr.), alltså på mer än vad man får låna. Egentligen borde räntan räknas på precis det begynnelsekapital, som man får låna, och i så fall säger man att växeln *rabatteras*. Vi rabattera nu 200 kr. på 3 mån. efter 6 %, d. v. s. vi räkna efter, vilket belopp på nämnda tid förräntas till 200 kr. Är lånesumman x kr., blir räntan

på ett år $\frac{6x}{100}$ kr. och på 3 mån. fjärdedelen därav

eller $\frac{1{,}5\,x}{100}$ kr. och vi erhålla ekvationen

$$x + \frac{1{,}5x}{100} = 200$$

samt efter multiplikation med 100

$$100x + 1{,}5x = 20000$$

eller

$$101{,}5x = 20000.$$

Nu ha vi att multiplicera med 2 för att få bort decimalkommat, varvid resultatet blir

$$203x = 40000$$

$$x = \frac{40000}{203} = 197{,}04 \text{ kr.}$$

Detta är sålunda det *rabatterade värdet,* och *rabatten* eller räntan blir återstoden av de 200 kr. eller 2,96 kr. Skillnaden mellan rabatt och diskont är påtagligen ytterst liten, i detta fall blott 4 öre, varför den bekvämare metoden med diskont alltid användes i bankerna.

Ett påpekande här. Om man t. ex. köper något för 100 kr. och betalar kontant, får man ofta avdrag t. ex. på 2 % och behöver sålunda blott betala 98 kr. De 2 kr. som avdragas benämnas *rabatt* och ej, som man i enlighet med det ovan sagda kunde tro, diskont. *Ordet diskont användes blott i fråga om växlar.*

9. Hittills har varje problem varit tillräckligt enkelt, för att det ej skulle vålla någon svårighet att ställa upp en ekvation. Men äro uppgifterna mer invecklade, kan man göra saken överskådligare genom att ordna det givna och det sökta i en tabell. Ett exempel härpå: *A och B, som bo 3 mil från varandra, cykla varandra till mötes. A:s hastighet är 12 och B:s 15 km. i timmen. A ger sig i väg kl. 8 och B kl. 8,15. När mötas de?*

Vi sätta i vårt räknehäfte upp en tabell med rubrikerna V, T, H, d. v. s. väg, tid, hastighet.

Är tiden före mötet x tim. för B, så är den tydligen $\left(x+\frac{1}{4}\right)$ tim. för A, som beger sig av $\frac{1}{4}$ tim. tidigare, och tabellen i vårt räknehäfte kommer till en början att se ut sålunda:

	V.	T.	H.
A		$\left(x+\frac{1}{4}\right)$ tim.	12 km. i tim.
B		x „	15 „ „ „

Nu återstår emellertid att sätta ut vägen för vardera, innan tabellen blir färdig. Då B varje tim. hinner 15 km., hinner han på alla x tim. $15x$ km. Likaså hinner A på $\left(x+\frac{1}{4}\right)$ tim. $12\left(x+\frac{1}{4}\right) = (12x+3)$ km.

Skriva vi in detta i tabellen, får den följande utseende:

	V.	T.	H.
A	$(12x+3)$ km.	$\left(x+\frac{1}{4}\right)$ tim.	12 km. i tim.
B	$15x$ „	x „	15 „ „

Eftersom de sammanlagt ha att färdas 3 mil eller 30 km. för att mötas, erhålles genom att lägga ihop vägsträckorna

$$12x+3+15x=30$$
$$27x+3=30$$
$$27x=27$$
$$x=1$$

d. v. s. B är 1 tim. på väg, ty tabellen visar, att x betyder B:s tid. De träffas alltså 1 tim. efter 8,15, då B startar, eller *kl. 9,15.*

Detta problem kunde ha åskådliggjorts genom en teckning. Vi tänka oss, att de mötas i C. Vi sätta som nyss B:s tid till x tim. och A:s till $\left(x+\frac{1}{4}\right)$ tim. Genom samma resonemang som ovan få vi A:s väg att vara $12\left(x+\frac{1}{4}\right)$ km. och B:s väg $15x$ km., vilket vi sätta ut på figuren sålunda:

A $12\left(x+\frac{1}{4}\right)$ km. C $15x$ km. B

30 km.

Då vi ha sträckorna $AC+BC=AB$, innebär detta, att

[illegible]

vilken ekvation är densamma, som vi förut erhöllo. Teckningen kan här ersätta tabellen, eller kanske läsaren finner det klokast att använda både teckning och tabell.

10. Så ett par exempel ur kemien.[1] *Hur många procent väte (H) och klor (Cl) ingå i klorväte (HCl)? Atomvikt: H = 1, Cl = 35,5.*

Tänka vi oss x gr. H på 100 gr. HCl, få vi 35,5 gånger så mycket Cl eller 35,5 x gr., vilket vi för att från början vänja oss vid åskådlighet tabellera:

H	Cl	HCl
x gr.	35,5 x gr.	100 gr.

Ekvationen blir nu efter sammanläggning av beståndsdelarnas vikter

$$x + 35{,}5x = 100$$
$$\therefore\ 36{,}5x = 100$$
$$x = \frac{100}{36{,}5} = 2{,}74.$$

På 100 gr. går följaktligen 2,74 gr. Alltså få vi *2,74 % H.* Resten utgör *97,26 % Cl.*

11. För att finna procenten av beståndsdelarna i *kaliumnitrat* (KNO_3) kunna vi, sedan vi slagit upp atomvikterna, lämpligen sätta följande vikter, vare sig vi tänka oss dem uppmätta i gram eller annan enhet.

K	N	O_3	KNO_3
$39{,}1x$	$14x$	$48x$	100

[1] Exemplen överhoppas av dem, som ej läst kemi.

$$\therefore\ 39{,}1x + 14x + 48x = 100$$
$$101{,}1x = 100$$
$$x = \frac{100}{101{,}1}.$$

Här är det olämpligt att beräkna x genom att utföra divisionen, då vi i stället behöva ha reda på $39{,}1x$ o. s. v. Vid förvandlingen av x till decimalbråk skulle vi på grund av avkortningen göra ett fel, som vid beräkningen av $39{,}1x$ bleve $39{,}1$ gånger så stort. För att undvika denna förstoring av felet skriva vi direkt

$$39{,}1x = \frac{3910}{101{,}1} = 38{,}67$$

Likaså

$$14x = \frac{1400}{101{,}1} = 13{,}85$$

$$48x = \frac{4800}{101{,}1} = 47{,}48$$

Procenttalen för de olika ämnena bli sålunda:

38,67 % K.
13,85 % N.
47,48 % O.

Summan av dessa tal blir här 100. Stundom kan denna kontrollräkning ge en summa, som något avviker från 100, om vi vid alla divisionerna avjämnat uppåt eller vid alla nedåt.

Nu några exempel på *legeringar*. Rent guld är för mjukt för att enbart kunna användas, varför det sammansmältes med en liten mängd koppar för att bli hållbart. Ju mindre koppar, desto finare anses emellertid guldet. Dess finhet mätes i *karat* = antalet tjugofjärdedelar ren guldvikt, som legeringen innehåller. Så innehåller t. ex. 23 karats guld 23 tjugofjärdedelar rent guld, och den återstående tjugofjärdedelen är koppar.

För bekvämlighets skull begagna vi här nedan de kemiska beteckningarna Au = guld, Cu = koppar. Härvid uttalas varje bokstav för sig, så att Cu utläses se—u. Silver tecknas Ag (läs: a—ge). Att Cu är koppar, är lätt att komma ihåg, då C stundom uttalas som k eller första bokstaven i koppar. Och den, som läst latin, vet, att aurum betyder guld och argentum silver. Eljes är det ett stöd för minnet, att Argentina är silverlandet, varifrån silver utskeppas.

12. *Om 50 gr. 23 karats guld och 100 gr. 20 karats guld sammansmältas, hur fin blir legeringen?*

För att få svar härpå ställa vi upp följande tabell, där vi sätta ut vikten av enbart Au och av hela legeringen dels för den första sorten (I), dels för den andra (II), dels för den slutliga legeringen, som vi få vid sammansmältningen. Uppgifterna i tabellen här nedan erhållas tydligen av vad som säges i problemet.

	Leg.	Karat	Au
I	50 gr.	23	$\frac{23}{24}$ 50 gr.
II	100 „	20	$\frac{20}{24}$ 100 „
Tills.	150	x	$\frac{x}{24}$ 150 „

Då vikten av guldet i ena legeringen + vikten av guldet i den andra måste vara = vikten av guldet i den sammansmälta klimpen, få vi ekvationen

$$\frac{x}{24}\cdot 150 = \frac{23}{24}\cdot 50 + \frac{20}{24}\cdot 100$$

och, om vi dels multiplicera med 24, dels dividera med 50,

$$x \,.\, 3 = 23 + 20 \,.\, 2 = 63$$
$$x = 21,$$

d. v. s. vi få efter sammansmältningen *21 karats Au.*

Att svaret är riktigt, inse vi lätt. När vi togo dubbelt så mycket 20 karats Au som 23 karats, bör karat-talet komma dubbelt så nära intill 20 som intill 23, vilket 21 också gör.

13. *Vi ha 120 gr. 20 karats guld. Hur mycket rent Au behöva vi tillsätta för att få 21 karats guld?*

Leg.	Karat	Au
I 120 gr.	20	$\frac{20\cdot 120}{24}$ gr.
II x „	24	$\frac{24\cdot x}{24}$ „
Tills. $(120 + x)$ gr.	21	$\frac{21\,(120+x)}{24}$ „

Sammanlagda guldmängden är

$$\frac{20\cdot 120}{24} + \frac{24\cdot x}{24} = \frac{21\,(120+x)}{24}$$

Räkningarna bli

$$20 \,.\, 120 + 24 \,.\, x = 21 \,.\, (120 + x) = 21 \,.\, 120 + 21x$$

och efter minskning i första och tredje membrum med $20 \,.\, 120$ och $21\,x$ få vi

$$3x = 120$$

Svaret blir, att *40 gr.* rent Au behöver tillsättas.

Som nyss kontrollera vi genom att ge akt på, att det önskade karat-talet 21 kommer 3 gånger så långt ifrån 24 som ifrån 20, men vi behöva också ta 3 gånger så litet 24 karats Au som 20 karats.

En annan sak kunna vi vid räkningarna här observera, nämligen fördelen av att undvika onödiga räkningar och ej göra oss besvär att i ekvationen utföra den överflödiga multiplikationen 21 . 120, då vi sedan blott behöva en gång 120. Man bör vänja sig att se till, hur räkningarna skola kunna bli så enkla som möjligt.

Vidare kunna vi räkna ett exempel med silver. Även till Ag måste Cu tillsättas för hållbarhetens skull. Här räknas i 16-delar och användes uttrycket *lödighet*. Så innehåller 15-lödigt silver 15 viktsdelar Ag och 1 viktsdel Cu.

14. *Antag, att vi ha 130 gr. 15-lödigt silver och vilja göra det till 13-lödigt. Hur mycket koppar behöva vi sätta till?*

Tabellen blir, om vi med I numrera det givna silvret och med II tillsatsen av koppar:

	Legering	Lödighet	Ag
I	130 gr.	15	$\frac{15}{16} \cdot 130$ gr.
II	x „	0	0 gr.
Tills.	$(130 + x)$ gr.	13	$\frac{13}{16}(130 + x)$ gr.

$$\therefore \frac{13}{16}(130+x)=\frac{15}{16}.130$$

$$13(130+x)=15.130$$

$$13.130+13.x=15.130$$

$$13x=2.130$$

$$x=2.10=20.$$

Vi behöva tillsätta *20 gr. Cu* och få inalles 150 gr. 13-lödigt silver. Där är mängden Ag

$$\frac{13}{16}.150 \text{ gr.}$$

och från början var den

$$\frac{15}{16}.130 \text{ gr.}$$

Det ena är tydligen lika mycket som det andra, vilket det bör vara, då vi ej tillsatt något silver. Vi ha alltså räknat rätt.

Obs. Onödigt att utföra multiplikationerna 15.130 och 13.150.

Nu några exempel till.

15. *Ford har funnit, att före förbudets införande i U. S. A. vanskötte sig 2 % av hans arbetare, efter dess införande 0,2 %. På grund av ökad bilfabrikation måste efter hand flera arbetare anställas. Ett visst år före förbudet vanskötte sig 7 gånger så många arbetare som ett visst år efter förbudet. Med hur många procent hade arbetsstyrkan under tiden ökats?*

Vi sätta ökningen till x %, d. v. s. varje 100-tal arbetare har ersatts med $100+x$. För svaret är likgiltigt, hur många dylika 100-tal arbetare finnas, varför vi i tabellen tänka oss *ett* 100-tal.

	Före förbudet.	Efter förbudet.
Samtliga arbetare	100	$100 + x$
Icke skötsamma arbetare	2	$\frac{0,2}{100}(100 + x)$

$$2 = 7 \cdot \frac{0,2}{100}(100 + x)$$
$$200 = 1,4 \ (100 + x) = 140 + 1,4x$$
$$60 = 1,4x$$
$$300 = 7x$$
$$x = 43$$

d. v. s. ökningen var *43 %*.

16. *Harald kan rensa ett trädgårdsland på 2½ tim., Sven på 3½ tim. När bli de färdiga, om de hjälpas åt?*

	Tid		Del pr tim.
Harald	2,5	tim.	$\frac{1}{2,5}$
Sven	3,5	„	$\frac{1}{3,5}$
Tills.	x	„	$\frac{1}{x}$

Vi få den sammanlagda delen pr tim. = summan av varderas, alltså

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2,5} + \frac{1}{3,5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{14}{35} + \frac{10}{35} = \frac{24}{35}.$$

Multiplicera vi första och femte membrum med $35x$, få vi

$$35 = 24x$$

$$\therefore\ x = 1\tfrac{11}{24}$$

De behöva 1½ tim., vilket svar är tillräckligt noggrant, då 2,5 min. ej spelar någon roll och f. ö. arbetet ena gången går litet fortare än den andra, varför det blir meningslöst att ange minuterna.

17. *Stenberg har vid årets början 1 kr. mindre på bank än Ågren, men vid årets slut 2 kr. mer, emedan hans pengar förräntats mot 4,5 % och Ågrens blott mot 4 %. Hur mycket hade vardera vid årets början?*

Vi tänka oss, att St. har x kr. vid årets början och Å. $(x + 1)$ kr. Tabellen blir då

	Stenberg	Ågren
Kap.	x kr.	$(x + 1)$ kr.
Ränta	$\frac{4{,}5\,x}{100}$ kr.	$\frac{4\,(4+1)}{100}$ kr.
Slutkap.	$\left(x + \frac{4{,}5\,x}{100}\right)$ kr.	$\left[x + 1 + \frac{4\,(x+1)}{100}\right]$ kr.

St:s slutkap. är 2 kr. mer än Å:s, som således måste ökas med 2 kr. för att bli lika med St:s.

$$\therefore\ x + \frac{4{,}5\,x}{100} = x + 1 + \frac{4\,(x+1)}{100} + 2$$

$$\frac{4{,}5\,x}{100} = \frac{4x+4}{100} + 3$$

och efter multiplikation med 200

$$9\,x = 8x + 8 + 600$$
$$x = 608.$$

Stenberg har vid årets början 608 kr. och Ågren 609 kr.

Kontroll: Stenbergs ränta $\frac{4{,}5 \cdot 608}{100}$ kr. $=$ 27,36 kr. och hans slutkap.

$$608 + 27{,}36 = 635{,}36 \text{ kr.}$$

Ågrens ränta $\frac{4 \cdot 609}{100} =$ 24,36 kr. och hans slutkap.

$$609 + 24{,}36 = 633{,}36 \text{ kr.}$$

St. har följaktligen 2 kr. mer än Å. vid årets slut.

18. *På de sparbanksböcker, Stockholms Stads Sparbank gratis utdelat åt folkskolebarn 1911—29, fanns i slutet av ett visst år i medeltal insatt 83,50 kr. pr bok. Frånräknas de böcker, som dödats genom fullständig uttagning, blir medeltalet 103 kr. Hur många proc. av böckerna ha dödats?*

Då procenten är densamma, vare sig böckerna äro fler eller färre, kunna vi räkna med 100, varav x dödats, och tabellen blir

	Antal	Medel-belopp	Sammanlagt belopp på alla böcker
Samtliga böcker . . .	100	83,50 kr.	100 . 83,50 kr
Icke dödade böcker	100-x	103 „	(100-x) 103 „

Eftersom sammanlagda beloppet utgöres av samma pengar i vartdera fallet, få vi

$$(100-x) \cdot 103 = 100 \cdot 83{,}50$$
$$10300 - 103x = 8350$$
$$1950 - 103x = 0$$
$$103x = 1950$$
$$x = 19.$$

19 böcker på 100 eller 19 % hade dödats.

Ekvationer med två eller flera obekanta.

Nisse lägger av 4 dagars inkomst, Pelle 3 dagars, och då få de tillsammans 10 kr. Med ledning av denna uppgift skola vi söka beräkna, vad de förtjäna. Beteckna vi Nisses dagsinkomst med x, kunna vi beteckna Pelles med y, varvid ekvationen blir

$$4x + 3y = 10.$$

Vi se här, att vi kunde ha

$$x = 1, \quad y = 2,$$

vilka värden tydligen satisfiera[1] ekvationen. Det är således tänkbart, att Nisses dagsinkomst är 1 kr. och Pelles 2 kr. Men det går ihop med uppgiften, om den ena får mer än vad vi nyss antogo och den andra i stället mindre, t. ex. Nisse 1,75 kr. och Pelle 1 kr., d. v. s.

$$x = 1{,}75\,; \quad y = 1.$$

Det finns således olika svar, som duga. För att erhålla ett bestämt svar räcker sålunda ej *en* uppgift, utan vi behöva två, varför vi tänka oss, att vi dessutom veta, att *om Nisse lägger av 2 dagars inkomst och Pelle 3 dagars, få de tillsammans 8 kr.* Denna uppgift jämte den förra ger oss två ekvationer:

[1] En lösning säges *satisfiera* ekvationen, när den gör vänstra och högra membrum lika.

$$\left.\begin{aligned}4x + 3y &= 10\\ 2x + 3y &= 8\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Eftersom $2x + 3y$ är lika mycket som 8, bör det bli lika mycket kvar, om vi i första ekvationen minska dess vänstra membrum med $2x + 3y$, som om vi minska dess högra membrum med 8 eller m. a. o. subtrahera den andra ekvationen i (1) från den första.

$$2x = 2$$
$$\therefore \; x = 1.$$

När vi nu känna x, visar t. ex. den andra ekvationen, om vi där ersätta x med 1, att

$$2 + 3y = 8$$
$$\therefore \; y = 2.$$

Svaret blir sålunda, *att Nisse förtjänar 1 kr. om dagen och Pelle 2 kr.* Detta gör på 4 dagar för N. 4 kr. och på 3 dagar för P. 6 kr., summa 10 kr., samt på 2 dagar för N. och 3 dagar för P. tillsammans 8 kr., vilket stämmer med vad vi hade uppgivet.

För övnings skull tillverka vi ett nytt liknande ekvationssystem.[1] Vi bestämma t. ex., att svaret skall bli $x = 2$, $y = 3$. Till omväxling ge vi denna gång x samma koefficient[2] i vardera ekvationen. Med de nämnda värdena på x och y få vi, om till koeff. för x väljes 7 och till koeff. för y resp. 6 och 2,

$$\left.\begin{aligned}7x + 6y &= 32\\ 7x + 2y &= 20\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

---

[1] De bägge ekvationerna i (1) sägas tillsammans utgöra ett ekvationssystem.

[2] *Koefficient* kallas det siffertal, varmed ett bokstavsuttryck, såsom x, skall multipliceras. Koefficienten för x i (1) är således i första ekvationen 4, i den andra 2, och koefficienten för y är 3.

Nu antaga vi, att vi ej känna värdena på x och y utan skola beräkna dem. Genom subtraktion erhålla vi liksom nyss

$$4y = 12$$
$$\because\ y = 3.$$

I andra ekvationen få vi sålunda $2y = 6$, varför återstoden $7x$ blir $= 14$ och

$$x = 2.$$

Även här kunna vi pröva, att de funna värdena satisfiera ekvationerna. Likaså i följande exempel.

Men sällan äro ekvationerna så enkla, att vi för en av de obekanta ha samma koefficient i vardera ekvationen.

Vi kunna t. ex. ha

$$\left.\begin{aligned} 10x + 3y &= 43 \\ 2x + 7y &= 15 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nu få vi samma koefficient för x genom att multiplicera den andra ekvationen med 5 och bibehålla den första oförändrad, alltså

$$10x + 3y = 43$$
$$10x + 35y = 75$$

Genom att subtrahera den övre ekvationen från den undre erhålles

$$32y = 32$$
$$\because\ y = 1.$$

Med detta värde på y få vi ur t. ex. första ekvationen i (3)

$$x = 4.$$

Här gick den ena koefficienten för x jämnt upp i den andra. Och innan vi gå vidare, kan det vara skäl att på egen hand sätta ihop eller taga ur boken och lösa några flera ekvationssystem, där detta är fallet. Men svårigheten är ej mycket större, om vi t. ex. ha

$$\left.\begin{aligned} 12x + 9y &= 72 \\ 9x + 8y &= 59 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Då 36 är minsta gemensamma dividenden till 12 och 9, kunna vi få 36 till gemensam koefficient för x genom att multiplicera den första ekvationen med 3 och den andra med 4, således

$$\begin{aligned} 36x + 27y &= 216 \\ 36x + 32y &= 236 \end{aligned}$$

Om vi subtrahera den övre ekvationen från den nedre, erhålla vi

$$\begin{aligned} 5y &= 20 \\ \therefore\ y &= 4. \end{aligned}$$

Genom insättning i endera av ekvationerna i (4) få vi

$$x = 3.$$

Glöm ej prövningen här eller i följande exempel.

Sedan vi tillverkat eller tagit ur boken och löst några flera ekvationer av denna typ, gå vi till det fall, då vi ha negativa koefficienter.

$$\left.\begin{aligned} 13x + 6y &= 56 \\ 11x - 4y &= 2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Här är tydligen bäst att multiplicera den första ekvationen med 2 och den andra med 3, således

$$\begin{aligned} 26x + 12y &= 112 \\ 33x - 12y &= 6. \end{aligned}$$

Då summan av $+12y - 12y$ är noll, få vi bort y genom att *addera* ekvationerna, varvid erhålles

$$59x = 118$$
$$x = 2$$
$$y = 5.$$

Men antag, att ekvationerna se ut sålunda:

$$\left.\begin{aligned} 6x + 17y &= 35 \\ 4x - 9y &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Då erhålles först

$$\left.\begin{aligned} 12x + 34y &= 70 \\ 12x - 27y &= 9 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6b)$$

För att få bort x måste vi taga skillnaden, d. v. s. tänka efter, hur mycket mer $12x + 34y$ är än $12x - 27y$. Skillnaden mellan $12x$ och $12x$ är $= 0$, varför vi blott ha att avgöra, hur mycket mer $+34y$ är än $-27y$. För jämförelses skull gå vi till termometern och fråga oss, hur mycket mer $+34°$ är än $-27°$. Skillnaden utgöres av $34°$ över nollpunkten jämte $27°$ under nollpunkten, tillsammans $61°$. Skillnaden mellan $+34$ och -27 är givetvis alltid 61, vare sig det är fråga om grader eller y, d. v. s. $+34y$ är $61y$ mer än $-27y$, och då i högra membrum 70 är 61 mer än 9, blir skillnaden mellan ekv. i (6b)

$$61y = 61.$$

Vi få nu

$$y = 1;\ x = 3.$$

Räkna först tillräckligt många exempel på detta sätt, vare sig självgjorda eller ur boken. När det går bra, kan man, om man vill, försöka med en annan metod. Vi kunde nämligen också ha resonerat på följande sätt. Vi skola i (6b) ej minska $12x + 34y$ med fullt $12x$, utan blott med $12x - 27y$. Skriva vi

$$\begin{array}{r} 12x + 34y \\ -12x \\ \hline 34y \end{array}$$

så minska vi med jämnt $12x$, d. v. s. vi minska med $27y$ för mycket, varför vi för att få rätt måste lägga tillbaka eller öka med $27y$, således

$$\begin{array}{r} 12x + 34y \\ -12x + 27y \\ \hline 61y \end{array}$$

och, om vi även minska första ekvationens högra membrum med den andras,

$$\left.\begin{array}{rcr} 12x + 34y &=& 70 \\ -12x + 27y &=& -9 \\ \hline 61y &=& 61 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6c)$$

Emellertid är det vid räkningen onödigt att skriva om ekvationerna så ofta, utan när (6b) är färdigt, skriver man blott dit de ändrade tecknen samt parentes om de ursprungliga tecknen, och räkningarna få följande utseende:

$$\begin{array}{rcr} 12x + 34y &=& 70 \\ (\mp)\,12x\,(\pm)\,27y &=& (\mp)\,9 \\ \hline 61y &=& 61 \end{array}$$

Här ha vi (6b) och (6c) på en gång.

Vi ha nu sett två olika utvägar att lösa våra exempel. Det är klokt av nybörjaren att sätta ihop eller hämta ur boken flera liknande exempel och

grundligt tänka igenom deras lösning medelst var-
dera metoden, åtminstone den första, då vi jämföra med termometern. Särskilt genom den första metoden uppövar man nämligen sitt matematiska omdöme, och arbetet med följande svårare uppgifter underlättas väsentligt.

Ej alltid äro ekvationerna så enkla som de, vi nu sysslat med. Vi taga därför ett svårare exempel:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3(2x-y+1)}{2} &= 3-\frac{x+y-5}{3} \\ 10x-3y &= 11 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7)$$

Om vi i första ekvationen skriva jämnt 3 i högra membrum, innebär detta en ökning med $\frac{x+y-5}{3}$, varför vi måste öka med lika mycket i vänstra membrum, och vi erhålla

$$\frac{3(2x-y+1)}{2}+\frac{x+y-5}{3}=3$$

eller

$$\frac{6x-3y+3}{2}+\frac{x+y-5}{3}=3.$$

I fortsättningen få vi, om vi att börja med multiplicera med 6, d. v. s. om vi först fördubbla första bråket genom att stryka nämnaren och sedan multiplicera med 3, samt motsvarande med andra bråket,

$$18x-9y+9+2x+2y-10=18$$

$$\because\ 20x-7y=19$$

Den andra ekvationen i (7) ger

$$20x-6y=22$$

Ur dessa två ekvationer få vi eliminera $20x$ genom att taga skillnaden. Vi jämföra åter med termometern. Liksom $-6°$ är $1°$ högre temperatur än $-7°$, är $-6y$ också $1y$ eller y mer än $-7y$. Taga vi skillnaden mellan ekvationerna, d. v. s. tänka efter, hur mycket mer vi ha i den andra ekvationen än i den första, få vi sålunda

$$y = 3.$$

Vi kunna nu ur andra ekv. i (7) lätt erhålla

$$x = 2.$$

En ny erfarenhet göra vi, om vi söka lösa ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y - 1 &= 2x + y + 3 \\ 4x + y + 2 &= 2x + 11y + 10 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (8)$$

Efter hyfsning få vi

$$\begin{aligned} x - 5y &= 4 \\ 2x - 10y &= 8. \end{aligned}$$

Multiplicera vi den första med 2 eller dividera vi den andra med 2, finna vi, att båda ekvationerna säga samma sak. *Dylika ekvationer benämnas identiska.* De bägge identiska ekvationerna i (8) äro i grund och botten blott en ekvation, vilken, såsom vi sett, *ej ger bestämda värden åt x och y.*

Antag emellertid, att vi i stället haft följande ekvationssystem:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y + 1 &= 2x + y + 3 \\ 4x + y + 2 &= 2x + 11y + 10 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (9)$$

Här blir resultatet efter hyfsning

$$\begin{aligned} x - 5y &= 2 \\ 2x - 10y &= 8. \end{aligned}$$

Genom att dividera andra ekvationen med 2 erhåller man

$$x - 5y = 4,$$

d. v. s. $x - 5y$ skall på en gång vara 2 och 4, vilket är otänkbart. Ekvationssystemet (9) är sålunda orimligt eller *olösligt*.

Vi ha nu talat om ekvationer med två obekanta, men vi kunna även räkna med flera obekanta. Ha vi tre obekanta (x, y och z), måste ekvationssystemet omfatta tre ekvationer, t. ex.

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 7 \\ 5x + 2y - z &= 11 \\ 7x - y + 3z &= 16 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Vi börja med att skaffa bort z genom att till första ekvationen addera 2 ggr den andra:

$$\begin{array}{l} 4x - 3y + 2z = 7 \\ \underline{10x + 4y - 2z = 22} \\ 14x + y \qquad = 29 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Likaså addera vi tre ggr andra ekvationen i (10) till den tredje:

$$\begin{array}{l} 15x + 6y - 3z = 33 \\ \underline{7x - y + 3z = 16} \\ 22x + 5y \qquad = 49 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Sedan multiplicera vi (a) med 5 och minska med (b):

$$\begin{array}{l} 70x + 5y = 145 \\ \underline{22x + 5y = 49} \\ 48x \qquad = 96 \end{array}$$

$$x = 2.$$

Ur t. ex. (a) erhålles nu

$$y = 1$$

och ur en av ekvationerna i (10)

$$z = 1.$$

Nu några problem, som leda till ekvationer med två eller flera obekanta.

1. *Anders ror 1,5 km. uppför en ström på 1 tim. och tillbaka på ½ tim. Beräkna hans hastighet i lugnt vatten.*

Ror han i stillastående vatten x km. i timmen, och rinner vattnet y km. i tim., drives han på uppvägen tillbaka på 1 tim. y km. av de x km. han ror, och hans hastighet blir $(x\text{-}y)$ km. i tim. Eftersom han var jämnt 1 tim. på väg uppför, blir hans vägsträcka då $(x\text{-}y)$ km. På återvägen hjälper strömmen till och ökar hans hastighet från x till $(x + y)$ km. i tim., och på en halv timme blir hans väg 0,5 $(x + y)$ km. Vi sätta nu ut i tabellen hastighet, tid och väg i vardera riktningen.

	H.	T.	V.
Uppför	$(x - y)$ km. i tim.	1 tim.	$(x - y)$ km.
Utför	$(x + y)$ „ „ „	0,5 „	$0{,}5\,(x + y)$ „

Då både vägen uppför och utför är 1,5 km., få vi

$$x - y = 1{,}5$$
$$0{,}5\ (x + y) = 1{,}5$$
$$\because\ x + y = 3$$

Genom att dels taga summan av, dels skillnaden mellan första och tredje ekv. erhålles

$$2x = 4{,}5 \qquad \therefore\ x = 2{,}25$$
$$2y = 1{,}5 \qquad \therefore\ y = 0{,}75$$

Han ror sålunda 2,25 km. i timmen, och strömmen flyter 0,75 km. i tim.

2. *Begär någon värnpliktig civil värnplikt på grund av samvetsbetänkligheter mot krigstjänst, ökas tjänstetiden med 120 dagar; vill han tjänstgöra vid trupp men slippa vapenövning, blir förlängningen 90 dagar. 8 samvetsömma ynglingar få på en ort sammanlagt 870 dagars förlängning. Hur många voro de av vartdera slaget?*

Om de förra voro x och de senare y, få de förra tiden förlängd sammanlagt $120x$ dagar och de senare $90y$ dagar. Ekvationerna bli:

$$x + y = 8$$
$$120x + 90y = 870$$

Vi multiplicera den första ekv. med 90

$$90x + 90y = 720$$

Subtraktion av den nu erhållna ekv. från föreg. ger

$$30x = 150$$
$$x = 5$$
$$y = 3$$

d. v. s. *5 tjänstgjorde fullständigt civilt och 3 gjorde civil tjänst vid armén.*

3. *En person har 3000 kr., av vilka en del årligen ger 6 % och resten 10 %. Årsräntan är 284 kr. Beräkna, hur mycket är placerat mot vardera räntesatsen.*

	Kap.	Proc.	R.
I	x kr.	6 %	$\frac{6x}{100}$ kr.
II	y „	10 %	$\frac{10y}{100}$ „
Tills.	3000 kr.	—	284 „

$$x + y = 3000$$

$$\frac{6x}{100} + \frac{10y}{100} = 284$$

$$6x + 6y = 18000$$
$$6x + 10y = 28400$$
$$4y = 10400$$
$$y = 2600$$
$$x = 400$$

Svar: 400 kr. mot 6 % och 2600 kr. mot 10 %.

Innan vi gå till ett nytt exempel, först några ord om *nominellt värde* och *kurs*. På en obligation eller en aktie står t. ex. tryckt, att dess pris är 500 kr. Detta belopp säges vara det *nominella värdet.* Men är den begärlig i marknaden, kanske den säljes för 700 kr., vilket benämnes dess *reella värde* eller *kursvärde.* I detta fall är kursvärdet tydligen 140 % av det nominella värdet eller *kursen* 140 %, och den kan bli mycket högre på aktier i företag som ge riktigt stor vinst. Med *pari* menas 100 % kurs, d. v. s. när det reella värdet är lika med det nominella. Går affären dåligt, sjunker kursen under pari. Säljes t. ex. nyssnämnda aktie efter 80 % kurs, kostar den 400 kr. Likaså kan kursen sjunka i ett företag, som nu går bra, om det befaras, att det kommer att gå illa. *Räntan beräknas alltid på det nominella värdet.*

Nu ett exempel på nominellt värde och kurs.

4. *En person äger nominellt 53.000 kr. och reellt 67.000 kr., en del placerad till pari och mot 8 % ränta, en del mot 160 % kurs och 12 % ränta samt resten mot 80 % kurs och 5 % ränta. Allt detta ger en årsinkomst på 4.990 kr. Beräkna fördelningen av hans nominella kapital.*

	Nom. belopp	Reellt värde	Räntefot	Utdelning
I	x kr.	x kr.	8 %	0,08 x kr.
II	y „	1,6 y kr.	12 %	0,12 y „
III	z „	0,8 z „	5 %	0,05 z „
Tills.	53000 kr.	67000 „	—	4990 „

Ekvationerna bli

$$x + y + z = 53000 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$
$$x + 1{,}6y + 0{,}8z = 67000 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$
$$0{,}08x + 0{,}12y + 0{,}05z = 4990 \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Drages (a) från (b), erhålles

$$0{,}6y - 0{,}2z = 14000$$

(a) och (c) ge

$$\begin{array}{r} 8x + 8y + 8z = 424000 \\ \underline{8x + 12y + 5z = 499000} \\ 4y - 3z = 75000 \end{array}$$

De två ekvationer, som blott innehålla y och z, multiplicera vi med resp. 30 och 2

$$\begin{array}{r} 18y - 6z = 420000 \\ \underline{8y - 6z = 150000} \\ 10y \qquad = 270000 \\ \because\ y = 27000 \end{array}$$

Ur endera av ekvationerna med 2 obekanta få vi

$$z = 11000$$

och ur (a)

$$x = 15000.$$

Han har sålunda 15.000 kr. placerade till pari, 27.000 kr. mot överkurs och 11.000 kr. under pari.

Bokstavsräkning.

I. *Hela tal.*

I ekvationsläran ha vi sett, att vi kunna räkna med obekanta tal. Om vi t. ex. skriva

$$3x - y,$$

så mena vi, att vi först skola multiplicera det obekanta talet x med 3 och sedan minska produkten med y. Likaså kunna vi multiplicera ihop två obekanta tal, t. ex. $x \cdot y$ eller $a \cdot b$. Vanligen skriver man dock ej ut något multiplikationstecken utan låter ab beteckna produkten av a och b och t. ex. $4abc$ produkten av talen 4, a, b och c. Vet man, att låt oss säga $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$, så får man

$$4abc = 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 280.$$

Men känner man ej storleken av talen, kan man likväl utföra åtskilliga räkningar med dem, vilket vi komma att se i det följande.

Skola vi multiplicera a med a, skriva vi a^2 i stället för $a \cdot a$ och läsa ut a^2 som *a i kvadrat* eller *a upphöjt till andra digniteten.* Vidare teckna vi

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

och läsa ut a^3 som *a i kub* eller *a upphöjt till tredje digniteten.* Likaså kunna vi upphöja till *fjärde och femte digniteten* o. s. v., således

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4,$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5,$$

o. s. v. Vanligen sker utläsningen enklare, och man upprepar ej ordet dignitet, utan när det står a^2, säger man blott "*a* två", och när det står a^3, säger man "*a* tre", samt likadant med övriga digniteter. I stället för "dignitet" användes stundom ordet "*potens*", så att vi t. ex. tala om "sjätte potens", när vi ha a^6.

Uttrycket

$$a^2 \,.\, a^3$$

betyder sålunda, att vi först ha 2 faktorer *a* och sedan ytterligare 3, således *sammanlagt 5 faktorer a* att multiplicera ihop, varför vi få

$$a^2 \,.\, a^3 = (a \,.\, a) \,.\, (a \,.\, a \,.\, a) = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,. = a^5.$$

Här ha vi för tydlighetens skull skrivit ett andra membrum med parenteserna, men snart blir man van och skriver efter första membrum direkt tredje eller hoppar över det också och går genast till fjärde, således

$$a^2 \,.\, a^3 = a^5.$$

Räkna på samma sätt ut

1) $a^3 \,.\, a^6$; 2) $a^4 \,.\, a^7$; 3) $a^6 \,.\, a^3$; 4) $a^3 \,.\, a^6 \,.\, a^7$.

Nu gå vi till ett uttryck med flera obekanta tal, t. ex.

$$3\, a^2\, b^3\, c^5 \,.\, 5\, a^4\, b^6\, c^2.$$

Här må vi komma ihåg, att faktorernas ordning vid hopmultipliceringen är likgiltig. Vi veta ju, att

$$2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 7.$$

I enlighet därmed kunna vi skriva

$$3\, a^2\, b^3\, c^5 \,.\, 5\, a^4\, b^6\, c^2 = 3 \,.\, 5 \,.\, a^2 \,.\, a^4 \,.\, b^3 \,.\, b^6 \,.\, c^5 \,.\, c^2 =$$
$$= 15\, a^6\, b^9\, c^7.$$

När man blir van, skriver man även här tredje ledet direkt utan att sätta ut det andra emellan.

Ett nytt exempel:

$$4\,a^2\,b^3\,(5\,a^3\,b^4 + 8\,a^2\,b^5).$$

Här har parentesen satts ut för att ange, att både första termen inom parentesen eller $5\,a^3\,b^4$ och andra termen $8\,a^2\,b^5$ skola multipliceras med faktorn före parentesen. Vi använda ordet *term* dels om uttryck, vilka såsom här $5\,a^3\,b^4$ och $8\,a^2\,b^5$ skola adderas till varandra, dels om uttryck, mellan vilka man skall taga skillnaden, liksom vi sett i ekvationsläran.) Vi få nu

$$4\,a^2\,b^3\,(5\,a^3\,b^4 + 8\,a^2\,b^5) = 4\,a^2\,b^3 \,.\, 5\,a^3\,b^4 + \\ + 4\,a^2\,b^3 \,.\, 8\,a^2\,b^5 = 20\,a^5\,b^7 + 32\,a^4\,b^8.$$

Längre kunna vi ej komma, då summan av $20\,a^5\,b^7$ och $32\,a^4\,b^8$ ej kan beräknas. Det är lika omöjligt som att utföra addition av 50 öre och 2 francs utan att veta, hur många öre 1 fr. är.

Ha vi i stället

$$4\,a^2\,b^3\,(5\,a^3\,b^4 - 8\,a^2\,b^5),$$

så kunna vi betrakta uttrycket inom parentesen som dels en tillgång på $5\,a^3\,b^4$, dels en skuld på $8\,a^2\,b^5$. Eftersom såväl tillgången som skulden skall göras $4\,a^2\,b^3$ gånger så stor, få vi

$$4\,a^2\,b^3\,(5\,a^3\,b^4 - 8\,a^2\,b^5) = 4\,a^2\,b^3 \,.\, 5\,a^3\,b^4 - \\ - 4\,a^2\,b^3 \,.\, 8\,a^2\,b^5 = 20\,a^5\,b^7 - 32\,a^4\,b^8.$$

Vi ha nu tänkt oss, att ena faktorn blott består av en term och den andra av två. Men vardera faktorn kan utgöras av två eller flera termer. Först emellertid några ord om addition och subtraktion. Göra vi för att underlätta tankegången en jämförelse med siffertal och skriva

$$(6-4)+(8-7),$$

så betyda parenteserna, att vi först skola räkna ut skillnaden mellan 6 och 4 samt mellan 8 och 7 för att sedan addera. Men resultatet blir, som man lätt finner, detsamma, om vi taga bort parenteserna och skriva

$$6-4+8-7=2+8-7=10-7=3.$$

Samma sak gäller, om vi ha

$$(3\,a^3\,b^2+2\,a^2\,b^3)+(5\,a^3\,b^2-4\,a^2\,b^3).$$

Det är lika mycket efter borttagandet av parenteserna, alltså

$$3\,a^3\,b^2+2\,a^2\,b^3+5\,a^3\,b^2-4\,a^2\,b^3.$$

Antalet $a^3 b^2$ är först 3, sedan (i tredje termen) 5, summa $8\,a^3\,b^2$. Vidare ha vi andra och fjärde termen. Liksom en tillgång på 2 kr. jämte en skuld på 4 kr. utgör en skuld på 2 kr., ha vi här en tillgång på 2 stycken $a^2\,b^3$ och en skuld på $4\,a^2\,b^3$, vilket tillsammans gör en skuld på $2\,a^2\,b^3$ eller $-2\,a^2\,b^3$. Då vi redan av första och tredje termen erhållit $8\,a^3\,b^2$, få vi till svar

$$8\,a^3\,b^2-2\,a^2\,b^3.$$

En hårsmån svårare kan det bli att taga *skillnaden* mellan två parenteser, men även här blir saken klarare genom en jämförelse med siffertal, t. ex.

$$127-98,$$

som vi enklast beräkna genom att först minska 127 med 100, således

$$127 - 100 = 27.$$

Nu ha vi dragit ifrån 2 för mycket, varför vi fingo 2 för litet kvar och måste lägga till 2 för att få rätt. Räkningarna bli alltså

$$127 - 98 = 127 - (100 - 2) = 127 - 100 + 2 = 29.$$

På samma sätt med uttrycket

$$(4\,a^5\,b^4 - 6\,a^4\,b^5) - (3\,a^5\,b^4 - 2\,a^4\,b^5)$$

Vi inse lätt, att $3\,a^5\,b^4$, om det icke minskas med $2\,a^4\,b^5$, är $2\,a^4\,b^5$ mer än $3\,a^5\,b^4 - 2\,a^4\,b^5$.

$$(4\,a^5\,b^4 - 6\,a^4\,b^5) - 3\,a^5\,b^4$$

betyder således, att vi minska med $2\,a^4\,b^5$ för mycket och få lägga till $2\,a^4\,b^5$ igen, varvid vi erhålla

$$(4\,a^5\,b^4 - 6\,a^4\,b^5) - (3\,a^5\,b^4 - 2\,a^4\,b^5) = 4\,a^5\,b^4 - \\ - 6\,a^4\,b^5 - 3\,a^5\,b^4 + 2\,a^4\,b^5.$$

Nu ha vi först att räkna ut, hur många $a^5\,b^4$ vi ha. Av första och tredje termen efter likhetstecknet få vi

$$4\,a^5\,b^4 - 3\,a^5\,b^4.$$

Lika väl som $4 \,.\, 17$ öre minskat med $3 \,.\, 17$ öre är en gång 17 öre eller 17 öre, är

$$4 \,.\, a^5\,b^4 - 3 \,.\, a^5\,b^4 = a^5\,b^4.$$

De termer, vi ha kvar att beräkna, äro

$$-6\,a^4\,b^5 + 2\,a^4\,b^5.$$

Liksom en skuld på $6 \,.\, 23$ kr. jämte en tillgång på $2 \,.\, 23$ kr. blir en skuld på $4 \,.\, 23$ kr., få vi, om vi byta ut 23 kr. mot $a^4\,b^5$, en skuld på 6 stycken $a^4\,b^5$ jämte en tillgång på 2 stycken $a^4\,b^5$ att bli en skuld på $4\,a^4\,b^5$, således

$$-6a^4b^5 + 2a^4b^5 = -4a^4b^5.$$

Vi taga nu om räkningarna i sin helhet:

$$(4a^5b^4 - 6a^4b^5) - (3a^5b^4 - 2a^4b^5) = 4a^5b^4 -$$
$$- 6a^4b^5 - 3a^5b^4 + 2a^4b^5 = 4a^5b^4 - 3a^5b^4 -$$
$$- 6a^4b^5 + 2a^4b^5 = a^5b^4 - 4a^4b^5.$$

När man blir van, behöver man dock ej skriva ut tredje ledet utan går direkt från det andra till det fjärde.

Liksom här ovan kan man i varje fall tänka efter, om man får plus eller minus framför en term vid borttagandet av en parentes, tills man blir så van, att man genast ser det. ***Även här liksom i det föregående behöva många exempel räknas för att få tankegången klar, så att man utan att frestas till tanklöshet kan lära sig någon regel.***

Genom att addera och subtrahera termer av samma sort, såsom vi gjorde vid uträkningen av tredje ledet här ovan, få vi uttrycket enklare. Denna förenkling benämnes *reduktion,* som alltså sker genom *addition och subtraktion av termer av samma slag.*

Räkna nu åtskilliga liknande exempel ur exempelsamlingen. Sedan gå vi till frågan om multiplikation då varje faktor består av mer än en term. Till jämförelse taga vi ett sifferexempel

$$34 \cdot 83$$

och ställa upp till uträkning.

$$\begin{array}{r} 83 \\ \underline{34} \\ 332 \\ \underline{249} \\ 2822 \end{array}$$

Här räkna vi i tredje raden ut $4 . 83$, i den fjärde $30 . 83$ och addera produkterna. Tankegången blir densamma vid ett bokstavsuttryck, såsom

$$(2a^3b^4 + 3a^2b^3)(5a^4b^5 - 4a^3b^4).$$

Vi multiplicera först uttrycket inom andra parentesen med $2a^3b^4$ och skriva produkten i tredje raden här nedan. Sedan multiplicera vi samma uttryck med $3a^2b^3$ (se fjärde raden), ty här blir *bekvämast att börja räkningarna från vänster,* då vi ej behöva hålla reda på något "minne". Således

$$\begin{array}{rrr}
5a^4b^5 & - 4a^3b^4 & \\
2a^3b^4 & + 3a^2b^3 & \\
\hline
10a^7b^9 & - 8a^6b^8 & \\
 & 15a^6b^8 & - 12a^5b^7 \\
\hline
10a^7b^9 & + 7a^6b^8 & - 12a^5b^7
\end{array}$$

Liksom en skuld på 8 kr. jämte en tillgång på 15 kr. blir en tillgång på 7 kr., få vi här tydligen en tillgång på $7a^6b^8$ av en skuld på $8a^6b^8$ jämte en tillgång på $15a^6b^8$.

En smula svårare blir att komma till rätta med ett exempel av typen

$$(2a^2 - 3ab)(4ab - 5b^2).$$

Ställa vi upp det till uträkning, få vi, när vi multiplicerat andra faktorn endast med $2a^2$, följande *halvfärdiga* resultat:

$$\begin{array}{rr}
4ab & - 5b^2 \\
2a^2 & - 3ab \\
\hline
8a^3b & - 10a^2b^2
\end{array}$$

Sedan ha vi att minska med $3ab(4ab - 5b^2)$. Vi börja då med att minska med $3ab . 4ab$, varvid vi komma ett steg längre med räkningarna och få

$$\begin{array}{r} 4\,ab - 5\,b^2 \\ 2\,a^2 - 3\,ab \\ \hline 8\,a^3\,b - 10\,a^2\,b^2 \\ -\,12\,a^2\,b^2 \end{array}$$

Enligt samma tankegång, som ovan gav oss

$$127 - (100 - 2) = 127 - 100 + 2,$$

se vi, att vi här minskat med $3\,ab \cdot 5\,b^2$ för mycket och sålunda få öka därmed, varför resultatet blir

$$\begin{array}{r} 4\,ab - 5\,b^2 \qquad\quad \\ 2\,a^2 - 3\,ab \qquad\quad \\ \hline 8\,a^3\,b - 10\,a^2\,b^2 \qquad\quad \\ -\,12\,a^2\,b^2 + 15\,a\,b^3 \\ \hline 8\,a^3\,b - 22\,a^2\,b^2 + 15\,a\,b^3 \end{array}$$

Denna tankegång är det skäl att gå igenom med *många exempel,* vare sig tagna ur boken eller självgjorda,[1] så att saken ingår ordentligt i medvetan-

[1] Tillverkar man exempel själv, är det klokt att välja termerna med erforderlig symmetri, såsom

$$(6\,a^4\,b - 5\,a^3\,b^2)(4\,a^3\,b^4 - 3\,a^2\,b^5).$$

I första faktorn ingår a^4 i första termen och a^3 i andra, således en faktor a mindre där. Digniteten eller potensen av a säges då *falla* med 1. Även i andra faktorn faller den med 1, liksom den för b *stiger* med 1 i vardera faktorn, således lika mycket på vartdera hållet. En annan gång kan man låta potensen för a falla med 3 överallt och potensen för b stiga med 2 överallt eller på annat sätt låta potensen för a ständigt stiga lika mycket eller falla lika mycket och d:o med potensen för b. Jfr. föreg. och nästa ex. samt exemplen på kvadreringen i fortsättningen. Detta är samma princip, som när i ett siffertal varje siffra undantagslöst betecknar en 10 gånger så liten talsort som den föregående, d. v. s. vi ha fallande dignitet av 10.

det, innan man lär sig regeln, att *produkten av två negativa tal är positiv.* Endast om regeln kommer som den mogna frukten av en upprepad eftertanke, blir den av verkligt värde för ens matematiska bildning. Och *denna vana vid eftertanke leder i framtiden till tidsbesparing genom den ökade säkerhet den medför.*

Givetvis kunna räkningarna utföras på samma sätt, om vi ha flera termer i faktorerna, t. ex.

$$\begin{array}{l}
2a^5b^4 - 3a^4b^5 + 4a^3b^6 \\
\underline{3a^4b^3 - 2a^3b^4 - 2a^2b^5} \\
6a^9b^7 - 9a^8b^8 + 12a^7b^9 \\
\qquad\quad - 4a^8b^8 + 6a^7b^9 - 8a^6b^{10} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{- 4a^7b^9 + 6a^6b^{10} - 8a^5b^{11}} \\
6a^9b^7 - 13a^8b^8 + 14a^7b^9 - 2a^6b^{10} - 8a^5b^{11}
\end{array}$$

Följande uttryck behöver man ofta använda, och de erhållas genom alldeles samma räkningar, som vi nu utfört.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ \ldots\ldots \quad (1)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \ \ldots\ldots \quad (2)$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \ \ldots\ldots \quad (3)$$

Det är en god övning att *sätta upp och räkna ut flera dylika exempel av alla tre typerna med mer invecklade termer, såsom*

$$(5a^7b^2 + 4a^5b^4)^2 = 25a^{14}b^4 + 40a^{12}b^6 + 16a^{10}b^8$$
$$(5a^7b^2 - 4a^5b^4)^2 = 25a^{14}b^4 - 40a^{12}b^6 + 16a^{10}b^8$$
$$(5a^7b^2 + 4a^5b^4)(5a^7b^2 - 4a^5b^4) =$$
$$= 25a^{14}b^4 - 16a^{10}b^8.$$

Då lär oss vanan småningom, var vi få kvadrater på och dubbla produkter av de givna termerna, samt var vi få plus eller minus.

Nu övergå vi till *division*. Den, som vill, kan på egen hand och med ledning av sin kännedom om division med siffertal försöka med något exempel ur sin exempelsamling. Men då är det bäst att börja med ett exempel med alla termer positiva både i dividend och divisor samt där man i facit förvissat sig om att även termerna i kvoten äro positiva. Eller också kan man själv tillverka ett exempel genom att multiplicera ihop två uttryck och taga det ena till divisor och produkten till dividend. (Jfr. noten sid. 46).

Emellertid skola vi nu räkna ett exempel. Om någon ej förstår räkningarna ändå, bör han *samtidigt med exemplet läsa förklaringarna, som följa efteråt i texten.*

$$
\begin{array}{l}
a^4 + 2a^3b - 4a^2b^2 \qquad + b^4 \mid \underline{a - b} \\
\hline
\qquad 3a^3b - 4a^2b^2 \\
\qquad \underline{3a^3b - 3a^2b^2} \\
\qquad\qquad - a^2b^2 \\
\qquad\qquad \underline{- a^2b^2 + ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad - ab^3 + b^4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{- ab^3 + b^4}
\end{array}
$$

Först ge vi akt på att ingen term ab^3 finnes i dividenden, varför vi vid uppställningen lämna ett tomrum, där den termen skulle ha stått, motsvarande en nolla t. ex. på tiotalets plats i 107, där intet tiotal finnes.

Sedan talet är uppställt, börja vi med att dividera a^4 med a, liksom vi vid division av siffertal, såsom 861 : 21, börja med att dividera våra 8 hundratal med 2 tiotal. Därvid få vi a^3 att skriva upp i kvoten. Nu multiplicera vi divisorn med a^3 och skriva liksom vid sifferräkningar produkten under dividenden samt subtrahera vår produkt för att se, vad som återstår att dela. Skillnaden mellan a^4 och a^4 är noll, och sedan ha vi att taga skillnaden mellan $2a^3b$ och $-a^3b$, d. v. s. tänka efter, hur mycket det förra är mer än det senare. Då jämföra vi som vanligt med termometern, där $+2°$ är $3°$ mer än $-1°$, varför det är lätt att inse, att $+2$ är 3 mer än -1, även om det är fråga om a^3b och ej om grader. Vi få sålunda till rest $3a^3b$, varjämte vi ha $-4a^2b^2$ att flytta ned.

Nu ha vi således närmast rad 3 kvar att dividera och få som nästa term i kvoten skriva dit $3a^2b$. När vi multiplicera divisorn därmed och subtrahera, finna vi, att om från en skuld på $4a^2b^2$ borttages en skuld på $3a^2b^2$, återstår en skuld på ett enda a^2b^2, d. v. s. $-a^2b^2$ återstår, varför nästa steg blir att dividera $-a^2b^2$ med a eller finna ett tal, varmed vi skola multiplicera a för att få $-a^2b^2$. Det talet är $-ab^2$, som sålunda skrives upp i kvoten och därpå multipliceras med $a-b$, varpå produkten (rad 6) subtraheras från återstoden av dividenden. Skillnaden mellan $-a^2b^2$ och $-a^2b^2$ är $=0$, och då vi därefter minska 0 med ab^3, få vi en skuld på ab^3. Sedan återstår blott en term att finna i kvoten, nämligen $-b^3$, och när vi multiplicera divisorn därmed, går räkningen jämnt ut.

Så kan en division utföras. Men mången brukar i stället ändra tecken framför varje term, som skall subtraheras. Vi hade ju nyss bl. a. att minska $3a^3b-4a^2b^2$ med $3a^3b-3a^2b^2$. Då kan man först skriva upp, att man skall minska med $3a^3b$, således

$$\begin{array}{r} 3\,a^3\,b - 4\,a^2\,b^2 \\ \underline{-3\,a^3\,b } \end{array}$$

Därvid draga vi emellertid ifrån $3\,a^2\,b^2$ för mycket, varför vi måste lägga dit det igen och få

$$\begin{array}{r} 3\,a^3\,b - 4\,a^2\,b^2 \\ \underline{-3\,a^3\,b + 3\,a^2\,b^2} \\ -\,a^2\,b^2 \end{array}$$

Det är dock lättare att undvika fel, om man först skriver dit de tecken, man får direkt vid multiplikationen, sedan sätter parentes om dem och skriver de ändrade tecknen ovanför, så att det kommer att se ut sålunda:

$$\begin{array}{rrrr} & 3\,a^3\,b & - & 4\,a^2b^2 \\ - & & + & \\ \underline{(+)} & \underline{3\,a^3\,b} & \underline{(-)} & \underline{3\,a^2\,b^2} \\ & & - & a^2\,b^2 \end{array}$$

Likadant förfares vid övriga subtraktioner av delprodukterna i divisionen, om man vill ändra tecknen.

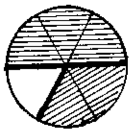
Vi kunna också tänka på följande sätt. När vi skola minska $-4\,a^2\,b^2$ med $-3\,a^2\,b^2$, gäller det att minska med en skuld. Och lika väl som vi bli 25 kr. rikare, om någon tager ifrån oss en skuld på 25 kr., lika väl får man $3\,a^2\,b^2$ mer eller en ökning på $3\,a^2\,b^2$, om man tar bort $-3\,a^2\,b^2$ eller tar bort en skuld på $3\,a^2\,b^2$. Således få vi ändra tecknet till plus framför $3\,a^2\,b^2$.

När man skall lära sig division, är det dock klokast att först öva sig med många exempel utan teckenändring. Så kommer man säkrast in i tankegången och tränar sitt matematiska omdöme. Sedan kan man, om man har lust, inlära teckenändringsmetoden också. Men då bör man till en början tänka efter, *varför* man ändrar tecken, och ej sluta med detta eftertänkande för snart, så att blott den mekaniska färdigheten stannar kvar och den verkliga insikten glömmes bort.

II. *Bråk.*

För jämförelses skull addera vi ett par sifferbråk, såsom

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(a)}$$



Delas det hela i sjättedelar, gå 3 sjättedelar på en halv (se fig., övre streckade delen), således

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(b)}$$

Likaså utgör (se fig., nedre streckade delen) en tredjedel 2 sjättedelar, d. v. s.

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(c)}$$

och räkningarna bliva

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

När vi delade sönder en halv i sjättedelar, fingo vi både täljare och nämnare multiplicerade med 3, d. v. s. bråket blev *förlängt* med 3. Det andra bråket blev förlängt med 2. Vi ha i (b) och (c) kunnat sätta likhetstecken emellan bråken, emedan vår figur visar, att bråken efter förlängningen förbli lika stora som förut. Och vi behövde förlänga dem för att få dem till samma sort, här sjättedelar. Enligt denna metod kunna vi visa genom en uppdelning på sådant sätt som i vår figur, att ett bråk blir lika stort, om vi förlänga med 4, med 5 eller vilket tal som helst. Gör en teckning för att se, att vi efter förlängning med 4 få $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. Hitta sedan på några flera exempel själv.

Även vid bokstavsuttryck måste vi för att addera ett par bråk *göra dem liknämniga genom förlängning.*

Om vi skola addera

$$\frac{2a^2}{3b^2} + \frac{5b^2}{2a^2}$$

se vi lätt, att minsta gemensamma nämnaren är $6a^2b^2$, varför första bråket skall förlängas med $2a^2$ och det andra med $3b^2$, och vi få

$$\frac{2a^2}{3b^2} + \frac{5b^2}{2a^2} = \frac{4a^4}{6a^2b^2} + \frac{15b^4}{6a^2b^2} = \frac{4a^4 + 15b^4}{6a^2b^2}$$

Ha vi åter uttrycket

$$\frac{7a^3}{6b^3} - \frac{4a^2}{9b^2} + \frac{5a}{4b} - \frac{3b}{2a},$$

så se vi, att $2 . 2 . 3 . 3 = 36$ är minsta gemensamma dividenden till nämnarnas koefficienter. Vidare måste vi taga med en faktor a, för att sista nämnaren skall gå jämnt upp i den sökta minsta gemensamma nämnaren, och dessutom behövas 3 faktorer b, för att första nämnaren skall gå jämnt upp, varvid även andra och tredje nämnaren göra det. Plocka vi tillsammans de nämnda faktorerna, blir minsta gemensamma nämnaren

$$36ab^3.$$

För att få denna nämnare måste de fyra givna bråken förlängas med resp. $6a$, $4ab$, $9ab^2$, $18b^3$, och räkningarna bli

$$\frac{7a^3}{6b^3}-\frac{4a^2}{9b^2}+\frac{5a}{4b}-\frac{3b}{2a}=$$
$$=\frac{42a^4-16a^3b+45a^2b^2-54b^4}{36ab^3}.$$

Ett annat exempel:

$$\frac{6a^2-7b^2}{3ab-6b^2}-\frac{5ab-8b^2}{2a^2-4ab}.$$

Här kunna nämnarna upplösas i faktorer sålunda:

$$3ab-6b^2=3b(a-2b);$$
$$2a^2-4ab=2a(a-2b).$$

Vi säga då, att vi *bryta ut* faktorn $3b$ ur första nämnaren och $2a$ ur den andra.

Bägge nämnarna ha tydligen en gemensam faktor, och dessutom ha vi faktorerna $3b$ på ena hållet och $2a$ på det andra, varför

$$3b\,.\,2a\,.\,(a-2b)=6ab\,(a-2b)=6a^2b-12ab^2$$

blir minsta gemensamma nämnaren. Det första bråket skall förlängas med $2a$, det andra med $3b$, och vi få

$$\frac{6a^2-7b^2}{3ab-6b^2}-\frac{5ab-8b^2}{2a^2-4ab}=\frac{12a^3-14ab^2-(15ab^2-24b^3)}{6a^2b-12ab^2}=$$

$$=\frac{12a^3-14ab^2-15ab^2+24b^3}{6a^2b-12ab^2}=\frac{12a^3-29ab^2+24b^3}{6a^2b-12ab^2}.$$

Nu gå vi till ett något svårare exempel.

$$\frac{2a^2}{a^2-9b^2}-\frac{b^2}{a^2-6ab+9b^2}.$$

Här är tydligen enligt (3) och (2) sid. 47.

$$a^2-9b^2=(a+3b)(a-3b)\quad\ldots\ldots\;(d)$$

$$a^2-6ab+9b^2=(a-3b)^2\quad\ldots\ldots\ldots\;(e)$$

Vid sökandet av m. g. d. (minsta gemensamma dividenden) måste vi taga med två faktorer $(a-3b)$, för att nämnaren (e) skall gå jämnt upp, och dessutom en faktor $(a+3b)$, för att även nämnaren (d) skall gå jämnt upp. M.g.d. blir då

$$(a+3b)(a-3b)^2=(a^2-9b^2)(a-3b)=$$
$$=a^3-3a^2b-9ab^2+27b^3.$$

Det första bråket skall förlängas med

$$a-3b,$$

det andra med

$$a+3b,$$

och räkningarna bli

$$\frac{2a^2}{a^2-9b^2}-\frac{b^2}{a^2-6ab+9b^2}=$$

$$=\frac{2a^2(a-3b)-b^2(a+3b)}{a^3-3a^2b-9ab^2+27b^3}=\frac{2a^3-6a^2b-ab^2-3b^3}{a^3-3a^2b-9ab^2+27b^3}.$$

De nämnare, vi hittills haft, ha varit lätta att upplösa i faktorer. När vi ur exempelsamlingen fått tillräcklig övning på dylika enklare exempel, kan den, som har lust att spänna sina krafter ytterligare, söka upplösa i faktorer ett så invecklat uttryck som (a) här nedan. Men är det för svårt, så räkna flera lättare exempel ur boken först och, om det inte går sedan heller, hoppa alldeles över upplösningen av (a). Man kan lära sig matematik ändå.

$$48a^6b^3 - 24a^4b^5 + 3a^2b^7 \quad \text{———} \quad (a)$$

Där se vi, att $3a^2b^3$ ingår som faktor i alla termerna, och bryta vi ut denna faktor, få vi

$$48a^6b^3 - 24a^4b^5 + 3a^2b^7 =$$
$$= 3a^2b^3(16a^4 - 8a^2b^2 + b^4) \quad \text{———} \quad (b).$$

Innan vi gå vidare, upprepa vi typexemplen från sid. 47, men skriva högra ledet först, således

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{———} \quad (1)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \text{———} \quad (2)$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \text{———} \quad (3)$$

Här finna vi, att om vi ha uttrycket $a^2 - 2ab + b^2$, så kan det upplösas i faktorerna $(a - b)(a - b)$ eller $(a - b)^2$ liksom motsvarande med de övriga uttrycken. I överensstämmelse därmed se vi, om vi skola upplösa i faktorer

$$16a^4 - 8a^2b^2 + b^4,$$

att $16a^4$ är kvadraten på $4a^2$ och b^4 kvadraten på b^2 samt mellantermen dubbla produkten av $4a^2$ och b^2 med minustecken framför sig. Hela uttrycket är tydligen en *jämn kvadrat* enl. (2), om vi där byta ut a mot $4a^2$ och b mot b^2, och vi kunna skriva

$$16\,a^4 - 8\,a^2 b^2 + b^4 = (4\,a^2 - b^2)^2 \;\ldots\ldots\; (c)$$

Enligt (3) kunna vi upplösa i faktorer, när vi ha *skillnaden mellan två kvadrater,* såsom det nyss erhållna uttrycket

$$4\,a^2 - b^2,$$

vilket enligt (3) kan skrivas

$$4\,a^2 - b^2 = (2\,a + b)\;(2\,a - b) \;\ldots\ldots\; (d)$$

Vi ha nu sett exempel på tre olika möjligheter att upplösa i faktorer, nämligen *utbrytning, jämn kvadrat* och *skillnaden mellan två kvadrater.* Uttrycket (a) upplösa vi alltså till en början genom utbrytning (b), sedan andra faktorn i (b) med hjälp av (c), därpå vardera faktorn i (c) med hjälp av (d). Vi få då

$$\begin{aligned}
&48\,a^6 b^3 - 24\,a^4 b^5 + 3\,a^2 b^7 = \\
&= 3\,a^2 b^3 (16\,a^4 - 8\,a^2 b^2 + b^4) = 3\,a^2 b^3\,(4\,a^2 - b^2)^2 = \\
&= 3\,a^2 b^3\,[(2\,a + b)\;(2\,a - b)]^2 = \\
&= 3\,a^2 b^3\,(2\,a + b)^2\;(2\,a - b)^2.
\end{aligned}$$

Den stora parentesen [ ] är ditsatt för att utmärka, att hela uttrycket $(2\,a + b)\,(2\,a - b)$ skall kvadreras.

Vi tänka oss nu, att vi skola beräkna

$$\frac{5\,a^6 b^3 \qquad 7\,a^3 b^6}{48\,a^6 b^3 - 24\,a^4 b^5 + 3\,a^2 b^7} \qquad \frac{6\,a^3 + b^3}{8\,a^3 - b^3}.$$

Vi ha redan sett, vilka faktorer den första nämnaren innehåller. Kan den andra nämnaren upplösas i faktorer, så intresserar det oss endast om någon av dessa faktorer är densamma som i första nämnaren. Vi försöka därför att dividera $8a^3 - b^3$ med $2a + b$, men det går inte jämnt upp. Då dividera vi i stället med $2a - b$ och finna, att vi ha

$$8a^3 - b^3 = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2).$$

För att få liknämnigt behöva vi sålunda ej förlänga första bråket med hela den andra nämnaren utan endast med

$$4a^2 + 2ab + b^2,$$

och minsta gemensamma nämnaren är

$$3a^2b^3(2a + b)^2(2a - b)^2(4a^2 + 2ab + b^2).$$

Nu är det ingen konst att utföra förlängningarna och sedan subtrahera, men det blir långa räkningar, där man lätt gör fel, varför det kan vara klokare att först räkna några enkla exempel ur exempelsamlingen, även om man anser ett så invecklat exempel som vårt sista värt den tid det kostar. Vi ha dock tagit upp det för att visa olika metoder för den speciellt intresserade, vilken också klarar ut de fortsatta räkningarna på egen hand. Och den, som ej är road av invecklade räkningar, använder tiden bättre till andra matematiska uppgifter.

När addition och subtraktion inövats tillräckligt, gå vi till *multiplikation.* Sifferexemplen

$$15 \cdot 4 = 60$$

och

$$3 \cdot 4 = 12$$

visa, att om ena faktorn bibehålles oförändrad, men den andra faktorn göres 5 gånger så liten, blir

produkten 5 gånger så liten. Samma sak kan konstateras med ytterligare exempel, som läsaren själv kan sätta ihop. Tillämpad på bråkläran innebär detta, att $3 \cdot \frac{2}{9}$ är nio gånger så litet som $3 \cdot 2$, d. v. s.

$$3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 2}{9} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

och om vi göra första faktorn 5 gånger så liten och skriva

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9},$$

blir produkten 5 gånger så liten som i (1), alltså

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 9} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

**Men vi få räkningarna enklare genom att *förkorta* ***korsvis* och skriva

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ty i andra ledet är första faktorn 3 gånger så liten som från början och andra faktorn i stället 3 gånger så stor, då varje tredjedel är 3 gånger så mycket som en niondel, varför produkten blir oförändrad. Av samma skäl ha vi vid bokstavsräkning rätt att om möjligt förkorta korsvis, innan vi multiplicera täljare med täljare och nämnare med nämnare, varför kapitlet ej bör vålla någon svårighet. Vi taga nu ett exempel, där upplösningen i faktorer går enligt vad vi nyss lärt, så att vi *i föl-*

jande exempel kunna förkorta tredje membrum korsvis med $(a - b)$ liksom med a^2 och med b:

$$\frac{a^2}{a^2b-b^3}\cdot\frac{a^2b-2ab^2+b^3}{a^3}=\frac{a^2}{b(a^2-b^2)}\cdot\frac{b(a^2-2ab+b^2)}{a^3}=$$

$$=\frac{a^2}{b(a+b)(a-b)}\cdot\frac{b(a-b)^2}{a^3}=\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a-b}{a}=\frac{a-b}{a^2+ab}.$$

Så återstår *division.* Även där börja vi med sifferexempel. Skola vi dela upp ett snöre i delar på $^3/_5$ cm., så blir varje del 5 gånger så liten, som om vi dela upp det i delar på 3 cm. I stället måste det räcka till 5 *gånger så många delar.* Är snörets längd 12 cm., är antalet 3 cm. långa delar

$$12:3=4.$$

Är däremot varje del $\frac{3}{5}$ cm., få vi 5 gånger så många delar eller $4 \cdot 5$, varför vi kunna skriva

$$12:\frac{3}{5}=4\cdot 5$$

eller, eftersom $4=\frac{12}{3}$, kunna vi i högra membrum

här ovan ersätta 4 med $\frac{12}{3}$ och skriva

$$12:\frac{3}{5}=\frac{12}{3}\cdot 5=12\cdot\frac{5}{3}.$$

Så se vi, att vi i stället för att dividera kunna *multiplicera med divisorns inverterade värde* $\left(\frac{5}{3}\right.$ är ju inverterade värdet av $\left.\frac{3}{5}\right)$.

Vi taga nu ett nytt exempel, där även dividenden är ett bråk. Vi låta snöret vara $10\frac{1}{2}$ cm. och dela först upp det i bitar på 3 cm. Antalet blir då

$$10\tfrac{1}{2} : 3 = \frac{21}{2} : 3 = \frac{7}{2} = 3\tfrac{1}{2},$$

och vi få tre hela bitar och dessutom en hälften så stor som de andra. Skall snöret däremot delas i bitar på $^3/_5$ cm. eller 5 gånger så små som nyss, blir antalet i stället 5 gånger så stort, vilket innebär, att

$$\frac{21}{2} : \frac{3}{5}$$

är fem gånger så mycket som

$$\frac{21}{2} : 3 = \frac{21}{2 \cdot 3},$$

d. v. s. vi få fem gånger så mycket som i högra membrum här ovan eller

$$\frac{21}{2} : \frac{3}{5} = \frac{21}{2 \cdot 3} \cdot 5 = \frac{21 \cdot 5}{2 \cdot 3}.$$

Tredje ledet kunna vi dela upp i två bråk och sätta

$$\frac{21}{2} : \frac{3}{5} = \frac{21}{2} \cdot \frac{5}{3}.$$

Vi ha således även här funnit, att vi kunna *invertera divisorn och multiplicera därmed.* Nu återstår blott uträkningen, vilken underlättas genom förkortning korsvis.

och vi få 17 bitar på $^3/_5$ cm. och dessutom en hälften så stor bit.

Dylika exempel kunna sättas upp i oändlighet, så att vi förvissa oss om regeln, att vi få invertera divisorn och multiplicera därmed. Sedan återstår ingen svårighet, utan vi kunna taga ett algebraiskt exempel.

$$\frac{a^3-4ab^2}{a^2-9b^2}:\frac{a^3-4a^2b+4ab^2}{a^2+6ab+9b^2}=\frac{a^3-4ab^2}{a^2-9b^2}\cdot\frac{a^2+6ab+9b^2}{a^3-4a^2b+4ab^2}=$$

$$=\frac{a(a^2-4b^2)}{a^2-9b^2}\cdot\frac{a^2+6ab+9b^2}{a(a^2-4ab+4b^2)}=$$

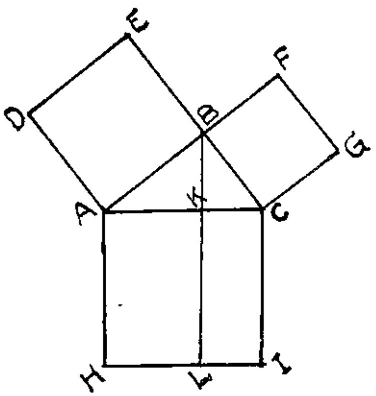
$$=\frac{a(a+2b)(a-2b)}{(a+3b)(a-3b)}\cdot\frac{(a+3b)^2}{a(a-2b)^2}=$$

$$=\frac{a+2b}{a-3b}\cdot\frac{a+3b}{a-2b}=\frac{a^2+5ab+6b^2}{a^2-5ab+6b^2}.$$

Efter detta bör det ej vålla något hinder att räkna bokens exempel.

Kvadratrötter.

Kap. I.



I en rätvinklig triangel benämnes ju den sida, som står emot den räta vinkeln, *hypotenusa* och de övriga sidorna *kateter*. I geometrin få vi lära oss, att summan av kvadraterna på kateterna är = kvadraten av hypotenusan. Är i vidstående figur $\triangle ABC$ rät, och rita vi upp kvadraterna samt draga BL vinkelrät mot AC, kunna vi nämligen bevisa, att kvadraten $ABED$ = rektangeln $AKLH$ och kvadraten $BFGC$ = rekt. $KCIL$,[1] alltså summan av kvadr. på de två kateterna = summan av de två nämnda rekt., vilket blir = kvadr. på hypotenusan AC. Detta teckna vi sålunda:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

Denna sats har uppställts av den grekiske matematikern *Pytagoras* och fått sitt namn efter honom.

[1] Se t. ex. *Euklides* bok I sats 47 eller *Hedström*, Geometri, sid. 126.

Antag nu, att vi veta, att $AB = 4$ cm. och $BC = 3$ cm. Hur stor är då AC?

Pytagoreiska satsen ger likheten

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \text{ kvcm.} \ldots \quad (1)$$

Eftersom

$$25 = 5^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1b)$$

få vi

$$AC = 5 \text{ cm.}$$

Men ej alltid bli räkningarna lika enkla. Är $AB = 9$ m. och $BC = 6$ m. blir ekv.

$$\overline{AC}^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117 \text{ kvm.} \ldots \quad (2)$$

Här gäller det att finna längden på hypotenusan, för att kvadraten skall bli 117 kvm. Ungefär riktigt komma vi genom att ge akt på, att

$$11^2 = 121,$$

varför 11 m. är något för mycket men ett rätt bra svar. Innan vi söka ett noggrannare värde, skola vi dock införa ett nytt uttryck, nämligen *kvadratroten*. I (1b), där vi ha $25 =$ kvadraten på 5, säga vi, att *kvadratroten ur 25* eller *roten ur 25 är 5*, vilket tecknas

$$\sqrt{25} = 5.$$

Roten ur 25 betyder sålunda ett tal som höjt i kvadrat är 25, och det märke, vi här sätta över 25, benämnes *rotmärke*. Visserligen duger även -5 till rot, då

$$(-5)^2 = 25.$$

Men vi hålla oss till den positiva roten.

I (2) gäller det sålunda att taga reda på det tal, som höjt i kvadrat är 117, eller finna

$$AC = \sqrt{117}.$$

Detta kunna vi göra med hjälp av *Hedström och Rendahl,* Räknetabeller, sid. 24—25 (eller något olika sidnummer i olika upplagor). Där stå kvadratens (117 kvm. är ju ytan av *kvadraten* på AC) tiotal i vänstra kanten rakt under ordet "Tal" och entalen till höger om nämnda ord. Då 117 kan uppdelas i 11 tiotal och 7 ental, söka vi upp 11 i vänstra kanten och 7 i översta raden. Fortsätta vi från våra 11 tiotal rakt åt höger, tills vi komma mitt under våra 7 ental, finna vi den sökta roten vara 10,817, vilket innebär att vi ha

$$\sqrt{117} = 10{,}817$$

$$\because AC = 10{,}817 \text{ m.}$$

Detta är ett så noggrant svar, som man i praktiken kan behöva, men ej fullt riktigt. Det innehåller ju tre decimaler, varför man, om man höjer det i kvadrat, får 6 decimaler, varav den sista tydligen är en nia och således decimalerna ej kunna bli jämnt 0. Då kan kvadraten ej bli precis 117, som vi önskade, utan svaret måste vara avkortat. Hur många decimaler vi än skaffa oss i $\sqrt{117}$, uppnå vi aldrig full noggrannhet. Likaså kan man resonera sig till, att $\sqrt{117}$ ej precis riktigt kan skrivas som tredjedelar, sjundedelar eller vad det må vara för bråk. Ett sådant tal, som ej kan uttryckas i hela tal eller bråk, benämnes *irrationellt* i motsats mot de *rationella* talen, dit vi räkna hela tal och bråk.

Vidare må varnas för en förväxling. Man vill i början gärna tro, att eftersom 117 står under rotmärket, är 117 roten. Men 117 är ju *kvadraten* på 10,817, som är *roten.* Kvadraten är således det tal, som står under rotmärket.

Vi skola nu taga ett nytt exempel på rotutdragning.

$$\sqrt{385{,}6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Våra tabeller ge ej upplysning om roten ur ett tal med 4 siffror utan blott

$$\sqrt{385} = 19{,}621$$
$$\sqrt{386} = 19{,}647$$

När kvadraten här ökas från 385 till 386 eller med 1, ökas roten med 26 tusendelar. Men det tal, vars rot vi skulle söka, var 385,6, vilket vi erhålla genom att öka 385 med 6 tiondelar i stället för 1. Då bör också roten ur 385 eller 19,621 ökas med 0,6 ggr 26 tusendelar eller 15,6 tusendelar, vilket vi jämna av till 16 tusendelar. Vi få sålunda

$$\sqrt{385{,}6} = 19{,}621 + 0{,}016 = 19{,}637.$$

Vi jämnade av de 15,6 tusendelarna till 16. Skälet härtill var följande. Hade vi haft roten ur 385 liksom ur 386 uträknade med t. ex. 4 decimaler, så hade vi ej fått precis samma värde som nu utan några tiotusendelar mer eller mindre på vartdera hållet. Vi äro sålunda fullständigt osäkra på tiotusendelarna, och det skulle ej vara någon mening i att sätta ut några sådana, utan vi addera jämnt 16 tusendelar. Då kunna vi rätt bra lita på de siffror, vi taga med, och ge oss ej ut för att veta något om tiotusendelarna.

Beräkna nu för övnings skull några nya tal med tre heltalssiffror och en decimal. I början är det bäst att sätta upp räkningarna på papperet, sedan går det bra i huvudet. Tag därefter, när erforderlig övning erhållits, exemplet

$$\sqrt{38{,}56} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Gå vi till följande två sidor i tabellen, finna vi där heltalen i kolumnen till vänster och tiondelarna i raden överst, således

$$\sqrt{38{,}5} = 6{,}205$$
$$\sqrt{38{,}6} = 6{,}213$$

Här se vi, att när kvadraten ökas från 38,50 till 38,60 eller med 10 hundradelar, växer roten med 8 tusendelar. Men nu skall kvadraten blott ökas från 38,50 till 38,56 eller med 6 hundradelar. Då bör roten ej ökas med 8 tusendelar som nyss utan blott med 6 tiondelar därav, således med

$$0{,}6 \cdot 8 \text{ tusendelar} = 4{,}8 \text{ tusendelar},$$

vilket vi jämna av till 5 tusendelar, och resultatet blir

$$\sqrt{38{,}56} = 6{,}205 + 0{,}005 = 6{,}210.$$

Visserligen kunde man taga hänsyn till, att tabellen genom ett streck över femman i 6,205 angiver, att 6,205 är ungefär 0,5 tusendel för mycket. Men vi få tillräckligt noggrant resultat utan att tänka härpå.

Men är det ej onödigt att i svaret sätta ut nollan i stället för att skriva 6,21?

Nej, vi sätta ut våra 0 tusendelar för att visa, att tusendelarna i det närmaste bli 0. Därmed ge vi noggrannare upplysning om svaret.

Efter erforderlig övning på dylika exempel gå vi till sådana, som ej fås direkt ur tabellen. Först ett påpekande. Vi ha

$$\sqrt{2400} = \sqrt{24} \cdot \sqrt{100} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

ty kvadraten på vänstra membrum eller 2400 är = högra membrum höjt i kvadrat eller

$$(\sqrt{24})^2 \cdot (\sqrt{100})^2 = 24 \,.\, 100 = 2400.$$

Vi få således kvadraten på högra membrum i (a) = kvadraten på vänstra membrum, och då är även vänstra membrum i (a) = det högra.
På samma sätt visa vi, att

$$\sqrt{0{,}24} = \sqrt{0{,}01 \cdot 24} = \sqrt{0{,}01} \cdot \sqrt{24} = 0{,}1 \cdot \sqrt{24}\ ^{1}.$$

Däremot få vi akta oss för att vid en summa eller skillnad draga roten ur varje term för sig. Det skulle ju innebära, att vi hade

$$\sqrt{25} = \sqrt{16+9} = 4+3$$
$$\because\ 5 = 7$$

samt

$$\sqrt{16} = \sqrt{25-9} = 5-3$$
$$\because\ 4 = 2.$$

Dylika misstag begås emellertid ofta i sådana fall, då felet ej är lika påtagligt som här, varför en maning till försiktighet är välbehövlig.

Men vi återgå till kvadratrötterna.

$$\sqrt{3856}.$$

Då 3856 ej finns i tabellen, begagna vi nyss angivna metod och skriva

[1] Vi ha $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ emedan $0{,}1^2 = 0{,}1 \,.\, 0{,}1 = 0{,}01$.

$$\sqrt{3856} = \sqrt{100 \cdot 38{,}56} =$$
$$= \sqrt{100} \cdot \sqrt{38{,}56} = 10 . 6{,}210 = 62{,}10 \ldots \quad (5)$$

Likaså

$$\sqrt{3{,}856} = \sqrt{0{,}01 \cdot 385{,}6} = \sqrt{0{,}01} \cdot \sqrt{385{,}6} =$$
$$= 0{,}1 \cdot 19{,}637 = 1{,}9637 \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Vi må här observera, att

$$0{,}1^2 = 0{,}1 . 0{,}1 = 0{,}01,$$

varför vi tydligen inse, att $0{,}1^2$ är mindre än 0,1 eller kvadraten mindre än roten. Så snart kvadratroten är mindre än 1, ha vi ständigt kvadraten mindre än roten, ty om ett tal (här roten), som är mindre än 1, multipliceras med sig självt och således med mindre än 1, blir produkten (= kvadraten) ännu mindre.

Likaså må vi ge akt på, att vi ej ha nytta t. ex. av uppdelningen

$$\sqrt{3856} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{385{,}6}$$

emedan 10 ej är jämn kvadrat.

Vidare exempel:

$$\sqrt{0{,}3856} = \sqrt{0{,}01 \cdot 38{,}56} = 0{,}1 \cdot 6{,}210 = 0{,}6210 \ldots \quad (7)$$
$$\sqrt{0{,}03656} = \sqrt{0{,}0001 \cdot 385{,}6} = 0{,}01 \cdot 19{,}637 = 0{,}19637 \quad (8)$$

Sammanställa vi svaren på ex. (3) — (8), få vi

$$\sqrt{3856} = 62{,}10$$
$$\sqrt{385{,}6} = 19{,}637$$
$$\sqrt{38{,}56} = 6{,}210$$
$$\sqrt{3{,}856} = 1{,}9637$$
$$\sqrt{0{,}3856} = 0{,}6210$$
$$\sqrt{0{,}03856} = 0{,}19637.$$

Här se vi, att vi varannan gång få igen samma siffror och blott decimalkommat olika placerat. När vi i vänstra membrum dividera kvadraten med 10, få vi nämligen i högra membrum roten delad med

$$\sqrt{10} = 3{,}16228,$$

vilket ger helt nya siffror. Dividera vi däremot kvadraten med 100, så divideras roten med 10, och endast decimalkommat behöver flyttas.

Nu bör det gå lätt att slå upp kvadratrötterna ur flera tal, vare sig självgjorda eller tagna ur boken.

Kap. II.

I föregående kap. ha vi lärt oss att *med hjälp av tabeller* finna kvadratrötter ur siffertal. Nu kan man *även utan tabeller* räkna sig till en kvadratrot. Väl är användningen av tabeller mera praktisk och värdefullare att kunna, då man snabbare än med enbart räkningar når samma resultat. Men den matematiskt intresserade kan önska sätta sig in i bägge metoderna, särskilt som den senare går att använda även på bokstavsuttryck, varmed vi nu börja. Vi finna lätt, att

$$\sqrt{9\,a^6\,b^4} = 3\,a^3\,b^2.$$

Och då enligt vad vi lärt oss i kapitlet om bokstavsräkning

$$(2\,a^2\,b + 3\,ab^2)^2 = 4\,a^4\,b^2 + 12\,a^3\,b^3 + 9\,a^2\,b^4,$$

är

$$\sqrt{4\,a^4\,b^2 + 12\,a^3\,b^3 + 9\,a^2\,b^4} = 2\,a^2\,b + 3\,ab^2 \;\ldots\; (1)$$

Nu tänka vi oss, att vi i (1) blott känna kvadraten, d. v. s. uttrycket under rotmärket, och skola beräkna roten eller högra membrum. Eftersom

$$4a^4b^2 = (2a^2b)^2,$$

få vi $2a^2b$ att vara första termen i roten, d. v. s.

$$\sqrt{4a^4b^2 + 12a^3b^3 + 9a^2b^4} = 2a^2b \;+ \dots \quad (1a)$$

Vad som kommer efter plustecknet, återstår att tänka ut. Den termen skall bli lagom stor, för att $9a^2b^4$ skall vara kvadraten på densamma och $12a^3b^3$ dubbla produkten, vilket vi lärt oss i kapitlet om bokstavsräkning. Detta under förutsättning, att uttrycket under rotmärket verkligen är en jämn kvadrat. Vi ha således, förutsatt att räkningarna gå jämnt upp, två utvägar att finna andra termen. Dels kunna vi tänka på dubbla produkten, dels på kvadraten på andra termen. Vi välja den förra utvägen, vilken i mer invecklade fall leder säkrare till målet, såsom vi i det följande skola finna. När $12a^3b^3$ är dubbla produkten, är $6a^3b^3$ enkla produkten av $2a^2b$ och den sökta andra termen i roten. Eftersom vi känna en av faktorerna i produkten $6a^3b^3$, få vi den andra genom en enkel division:

$$6a^3b^3 : 2a^2b = 3ab^2.$$

Andra termen är således $3ab^2$, som vi ha att skriva till i (1a), varvid vi erhålla

$$\sqrt{4a^4b^2 + 12a^3b^3 + 9a^2b^4} = 2a^2b + 3ab^2.$$

Här kunde vi emellertid ha gjort en förenkling i räkningen. Vi dividerade dubbla produkten $12a^3b^3$ först med 2 och sedan med första termen, men vi kunde i stället med ens ha dividerat med 2 ggr första termen, d. v. s. med $4a^2b$.

Nu beräkna vi kvadraten på andra termen.

$$(3\,ab^2)^2 = 9\,a^2\,b^4.$$

Det stämmer med vad vi ha under rotmärket. Räkningarna gå alltså jämnt ut.

Hade vi i (1) i stället haft minustecken framför dubbla produkten, så hade vi fått

$$\sqrt{4\,a^4\,b^2 - 12\,a^3\,b^3 + 9\,a^2\,b^4} = 2\,a^2b - 3\,ab^2 \ldots (2)$$

Tankegången blir här alldeles densamma. Vi få, när vi dividera dubbla produkten med 2 ggr första termen, andra termen att bli

$$-12\,a^3\,b^3 : 4\,a^2\,b = -3\,ab^2,$$

och när vi för kontrollen höja andra termen i kvadrat, erhålla vi $+9\,a^2\,b^4$, emedan produkten av två negativa tal är positiv.

Nu skaffa vi oss ett nytt exempel genom att multiplicera ett uttryck med sig självt. Vi välja nedanstående, där för enkelhets skull varje term är av samma grad, här andra graden.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & a^2 - 2\,ab & + 3\,b^2 & \\
 & & a^2 - 2\,ab & + 3\,b^2 & \\
\hline
 & a^4 - 2\,a^3\,b & + 3\,a^2\,b^2 & & \\
 & - 2\,a^3\,b & + 4\,a^2\,b^2 & - 6\,a\,b^3 & \\
 & & 3\,a^2\,b^2 & - 6\,ab^3 & + 9\,b^4 \\
\hline
a^4 & - 4\,a^3\,b & + 10\,a^2\,b^2 & - 12\,ab^3 & + 9\,b^4
\end{array}$$

Vi tänka oss nu, att vi ej känna utan skola beräkna

$$\sqrt{a^4 - 4\,a^3\,b + 10\,a^2\,b^2 - 12\,ab^3 + 9\,b^4} \ldots (3)$$

Då bör som i (1) och (2) kvadratens första term, här a^4, vara kvadraten på första termen i roten, vilken term sålunda är a^2. Och $-4a^3b$ är dubbla produkten av detta a^2 och andra termen, varför andra termen måste vara negativ. Vi skriva därför $= a^2 -$ efter rotuttrycket, och de ofullbordade räkningarna komma att se ut sålunda:

$$\sqrt{a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4} = a^2 -$$

Andra termen i roten finna vi genom att dels dividera $-4a^3b$ med 2 för att få enkla produkten av a^2 och den sökta andra termen, dels med a^2 för att få denna andra term, vilken således blir

$$-4a^3b : 2a^2 = -2ab,$$

och vi kunna skriva $2ab$ efter minustecknet i svaret.

Här se vi, att vi ej kunnat få $-2ab$ genom att draga kvadratroten ur $10a^2b^2$, vilket vi finna helt naturligt, om vi gå tillbaka till räkningarna ovan, där vi multiplicerade

$$a^2 - 2ab + 3b^2$$

med sig självt för att få vår kvadrat. Där fingo vi blott $4a^2b^2$ som kvadrat på $-2ab$ och de återstående $6a^2b^2$ som dubbel produkt av a^2 och $3b^2$. Hur mycket av $10a^2b^2$ som utgör kvadraten på andra termen eller dubbla produkten, kunna vi ej veta, om vi ej känna roten i förväg. Därför måste vi i stället söka andra termen med ledning av att $-4a^3b$ är dubbel produkt.

Återgå vi till rotutdragningen, ha vi hunnit till det *ofullbordade* uttrycket

$$\sqrt{a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4} = a^2 - 2ab$$

Här ha vi att från kvadraten under rotmärket subtrahera

$$(a^2 - 2ab)^2 = a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2$$

för att med ledning av återstoden finna tredje termen. Vi skriva därför i våra räkningar dit denna kvadrat och subtrahera densamma, således

$$\begin{array}{l} \sqrt{a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4} = a^2 - 2ab \\ \underline{a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2} \\ \qquad\qquad\qquad 6a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4 \end{array}$$

Om vi nu komma överens om att som första term räkna hela uttrycket $a^2 - 2ab$, ha vi från den givna kvadraten subtraherat kvadraten på hela första termen i roten, och återstoden, som vi därvid fingo, är dels dubbla produkten av hela första termen och den ännu ej funna andra termen, dels kvadraten på andra termen. Början av vår återstod bör vara dubbla produkten, varför vi finna vad vi kallat andra termen genom divisionen

$$(6a^2b^2 - 12ab^3) : 2 . (a^2 - 2ab)$$

eller enklare

$$6a^2b^2 : 2a^2 = 3b^2,$$

och svaret blir

$$\sqrt{a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4} = a^2 - 2ab + 3b^2.$$

Sedan skulle blott återstå att kontrollera att talet går jämnt ut. Men därmed vänta vi och upprepa i stället tankegången med en mera systematisk uppställning. Vi skriva här nedan först ut räkningarna och förklara sedan, hur vi fått dem. Det är sålunda bäst för läsaren att börja med förklaringen, som står efteråt, och steg för steg jämföra med räkningarna.

$$\begin{array}{ll}
{}^{(4)}2a^2 - {}^{(6)}2ab & \sqrt{a^4 - 4a^3b + 10a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4} = {}^{(1)}a^2 - {}^{(5)}2ab + {}^{(11)}3b^2 \\
\underline{\phantom{{}^{(4)}2a^2} - {}^{(7)}2ab} & \underline{{}^{(2)}a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
{}^{(10)}2a^2 - 4ab + {}^{(12)}3b^2 & {}^{(3)} - 4a^3b + 10a^2b^2 \\
\underline{\qquad\qquad\qquad {}^{(13)}3b^2} & \underline{{}^{(8)} - 4a^8b + 4a^2b^2 \qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad {}^{(9)}6a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4 \\
 & \qquad {}^{(14)}6a^2b^2 - 12ab^3 + 9b^4
\end{array}$$

I och för förklaringen ange vi med siffror inom parentes framför olika uttryck ordningen för deras tillkomst. En dylik siffra inom parentes kan än avse en enda term, t. ex. (1), än ett uttryck på två termer, t. ex. (10), än ett på tre termer, t. ex. (9). Läsaren gör klokast i att själv skriva upp rotuttrycket i sitt räknehäfte och sedan steg för steg sätta till vad nedan uträknas men naturligtvis ej upprepa siffrorna inom parentes.

Först se vi, att roten ur a^4 är a^2, som vi sålunda skriva efter likhetstecknet (1). Sedan höja vi a^2 i kvadrat (2) och subtrahera från hela kvadraten. Resten, varav vi liksom vid division blott skriva ut början (3), innehåller främst dubbla produkten av första termen (1) och den ännu ej funna andra, vilken vi sålunda få genom att dividera med dubbla första termen, som vi skriva upp till vänster (4). Såsom kvot mellan dubbla produkten (3) och dubbla första termen (4) erhålles först $-2ab$, som vi sätta ut i svaret såsom andra term (5). Nu ha vi att höja $(a^2 - 2ab)$ i kvadrat och subtrahera för att se, vad som blir över. Kvadraten på a^2 ha vi redan subtraherat (2), och det återstår blott att subtrahera dubbla produkten och kvadraten på $-2ab$. För den skull skriva vi till vänster $-2ab$ dels i övre raden (6), dels i undre (7). Då kommer övre raden att innehålla dels rotens dubbla första term, dels dess andra term. Multiplicera vi övre raden (4), (6) med $-2ab$ (7), få vi nyss nämnda dubbla produkt och kvadrat (8), som vi subtrahera från (3), varpå vi flytta ned återstoden av den givna kvadraten. Härmed ha vi subtraherat hela kvadraten på (a^2-2ab), (2), (8), och erhålla som rest (9). Betrakta vi nu (a^2-2ab) som första term, är nämnda rest (9) främst dubbla produkten av denna första term och den andra, vilken andra term återstår att finna. För den skull dividera vi vår dubbla produkt med 2 ggr vad vi kallat första termen. Denna dubbla första term erhålles genom att till vänster summera (4), (6) och (7), så att vi få (10). För att erhålla den sökta termen i svaret ha vi således att dividera dubbla produkten eller början av (9) med dubbla (a^2-2ab) eller (10). Därvid räcker det med divisionen

$$6a^2b^2 : 2a^2 = 3b^2,$$

varför vi i svaret skriva upp $+3b^2$ (11). Nu återstår att undersöka, om $(a^2-2ab+3b^2)^2$ blir precis = uttrycket under rotmärket, eller om vi få någon positiv eller negativ rest, när vi subtrahera sistnämnda kvadrat. Som vi kommit överens om att kalla uttrycket a^2-2ab för första termen, ha vi redan subtraherat kvadraten på denna första term (2), (8), och det återstår att från (9) subtrahera dels dubbla produkten, som vi till höger få genom att multiplicera dubbla första termen (10) med andra termen (13), som vi skriva dit, dels andra termen (12), som vi dessförinnan skriva dit i övre raden, med sig själv (13). Produkten (14) blir = återstoden (9) av den givna kvadraten. Vi få sålunda ingen rest, utan det går jämnt ut.

Samma metod kan, sedan tillräckligt många ex. på det föregående räknats, användas till utdragning av kvadratroten ur siffertal, t. ex.

$$\sqrt{28589}.$$

Då 100 och 10000 äro jämna kvadrater, dela vi här nedan genom streck upp kvadraten i 2 tiotusental, 85 hundratal och 89 ental. Vi numrera som nyss räkningarna med siffror, så att läsaren även här kan utföra och skriva ut dem på egen hand med ledning av efterföljande text, vilken även här bör läsas i samband med räkningarna.

(4) 2 (6) 6	$\sqrt{2'85'89}$ = (1) 1 (5) 6 (11) 9, (17) 08
(7) 6	(2) 1
(10) 3 2 (12) 9	(3) 185
(13) 9	(8) 156
(16) 3 3 8 (18) 08	(9) 2989
(19) 08	(14) 2961
	(15) 28,0000
	(20) 27,0464

Räkningarna bli följande. De 2 tiotusentalen kunna ej vara jämn kvadrat, utan 1 tiotusental är kvadraten på 100, varför vi i svaret (1) sätta ut 1, som, när flera siffror komma till, blir hundratal. Det andra tiotusentalet måste höra till dubbla produkten av hundratal och tiotal. Vi höja nu 100 i kvadrat (2), och den vid (2) utsatta ettan är tydligen tiotusental, eftersom den står under tiotusentalen. Även i det följande måste vi genom placeringen hålla reda på talsorten. När vi subtrahera vårt tiotusental (2), nöja vi oss med att skriva ut 185 hundratal (3), varpå vi fördubbla hundratalet i svaret och skriva det liksom vid rotutdragningen ur bokstavsuttrycket till vänster (4). Dividera vi dubbla produkten eller de 185 hundratalen vid (3) med dubbla första termen eller 2 hundratal (4) och nöja oss med en talsort i taget, få vi visserligen 9 tiotal, således tillsammans med vårt hundratal 19 tiotal i svaret. Men 19 tiotal är för mycket, då kvadraten därpå är 361 hundratal och vi blott ha 285 hundratal givna. Även 18 och 17 tiotal befinnas vara för mycket. Orsaken till att vi få för mycket är att våra 185 hundratal (3), som vi tänkte oss vara dubbla produkten av hundratal och tiotal, dessutom innehålla kvadraten på tiotalet, varför blott en del därav är dubbel produkt. Vi finna genom försök, att 6 tiotal är lagom, och vi skriva dit det (5), (6), (7), sedan vi på vartdera hållet fått stryka ut både 9 och 8 samt 7, då det befinnes vara för mycket. När vi satt ut 6 tiotal i svaret (5), ha vi 16 tiotal att kvadrera för att subtrahera från 28589. Därav ha vi redan subtraherat kvadraten på 100 (2), varför återstår att draga ifrån dels dubbla produkten av 100 och 60 eller produkten av 20 tiotal och 6 tiotal, dels 6 tiotal i kvadrat, vilket erhålles genom att multiplicera 26 tiotal (4), (6) till vänster med 6 tiotal (7) i raden under. Produkten, 156 hundratal, skriva vi ut (8) för att ytterligare subtrahera förutom (2). Återstoden (9) utgör huvudsakligen dubbla produkten av våra 16 tiotal och de sökta entalen. För att finna dessa ental dividera vi nämnda återstod (9) med 2 ggr de 16 tiotalen eller 32 tiotal, som fås när vi (10) summera (4), (6) och (7). I (9) ha vi 298 tiotal, vari 32 tiotal (10) innehålles 9 ental ggr, och vi skriva till 9 ental i svaret (11). Nu ha vi att kvadrera 169 och subtrahera från 28589 för att se, om det blir något över. Men 16 tiotal i kvadrat ha vi redan subtraherat (2) och (8), och det återstår att subtrahera dels dubbla produkten av 160 och 9, dels kvadraten på 9. Vi ha fördubblat 160 (10) genom nyss nämnda addition. Den fördubblade första termen (10) skall multipliceras med 9 ental (13) för att få dubbla produkten, och vi ha dessutom att multiplicera 9 ental (13) med 9 ental (12). Produkten av 9 ental (13) och 329 ental (10), (12) ha vi således kvar att subtrahera. Denna produkt (14) skriva vi upp under föregående rest (9). Nu ha vi heltalen i roten klara och få sätta ut decimalkommat. För att finna bråksiffrorna gå vi till den återstående dubbla produkten 28 hela (15). Den skall divideras med 2 ggr 169 eller summan av (10), (12) och (13), d. v. s. med 338 hela (16). Vid divisionen få vi först 0 tiondelar, sedan 8 hundradelar (17). Nu skola vi höja 169,08 i kvadrat. 169^2 ha vi i (2), (8) och (14), varför vi ha kvar att taga dubbla produkten, d. v. s. multiplicera 338 ental, som vi summerat ned i (16), med 8 hundradelar (19), samt multiplicera dessa 8 hundradelar med sig självt (18). Utföra vi denna multiplikation (20), se vi, att det nästan går jämnt ut eller knappt blir en hel kvar. Emellertid kunde vi fortsätta och beräkna hur många decimaler som helst på samma sätt.

Hade vi haft att draga roten ur ett decimalbråk utan heltal, så hade tankegången blivit densamma, t. ex.

$$\sqrt{0,'00'02'85'89.}$$

Då hade 2 tiotusendelar ej varit jämn kvadrat utan 1 tiotusendel kvadraten på 1 hundradel och den andra tiotusendelen hört till dubbla produkten. Vi hade sålunda fått skriva upp 0,01 som första term.

och sedan hade vi fått samma räkningar som ovan. Likaså

$$\sqrt{0{,}00\,'28\,'58\,'90.}$$

Av våra 28 tiotusendelar kunna blott 16 vara jämn kvadrat, och då 16 tiotusendelar är kvadraten på 4 hundradelar, skriva vi ut 0,04 som första term och fortsätta sedan räkningarna enligt den metod vi lärt oss.

Ekvationer av andra och högre grad

I.

Som vi sett i kapitlet om bokstavsräkning, finns det två tal, som höjda i kvadrat bli 9, nämligen $+3$ och -3. Därav följer, att vi till ekvationen

$$x^2 = 9 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

få två lösningar, nämligen

$$x = +3$$

och

$$x = -3,$$

vilka benämnas ekvationens bägge *rötter*, eftersom $+3$ och -3 äro kvadratrötterna ur 9, som vi ha i högra membrum. För korthets skull skriver man ofta de två rötterna tillsammans sålunda:

$$x = \pm 3.$$

Ha vi i stället ekvationen

$$(x-2)^2 = 25 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

så få vi på samma sätt

$$x - 2 = \pm 5.$$

Använda vi här plustecknet, så erhålles $x - 2 = 5$, som, om vartdera membrum ökas med 2, ger $x = 7$.

Den andra möjligheten, $x - 2 = -5$, ger på samma sätt $x = -3$. Nu brukar man numrera rötterna genom att skriva svaret sålunda:

$$x_1 = 7;$$
$$x_2 = -3.$$

Hade vi från början haft

$$x^2 - 4x + 4 = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

så hade man blott behövt tänka på, att x^2 är jämn kvadrat på x och 4 jämn kvadrat på 2 samt $-4x$ dubbla produkten av x och -2, varför vänstra membrum i (3) är en jämn kvadrat (se kap. om bokstavsräkning). Vi kunna därför skriva vänstra membrum i (3) som en jämn kvadrat och få då ekv. (2), vilken vi redan lärt oss lösa.

Men antag, att vi i stället hade haft

$$x^2 - 4x = 21 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Där är x jämn kvadrat, $-4x$ duger till dubbel produkt, men vi ha ingen kvadrat på andra termen, utan en sådan måste vi skaffa oss. Då se vi, att x^2 är jämn kvadrat på x, och när $-4x$ skall vara dubbla produkten av vårt x och den andra term vi önska oss, måste enkla produkten vara $-2x$. För att $-2x$ skall bli enkla produkten av x och andra termen, måste denna andra term vara -2, och det tal, vi skola skaffa oss höjt i kvadrat, är $x-2$. Nu är

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4,$$

varför vi i ekv. (4) behöva 4 mer i vänstra membrum. Eftersom $x^2 - 4x$ enligt (4) är 21, måste $x^2 - 4x + 4$ vara 4 mer än 21 eller 25, och vi få

$$x^2 - 4x + 4 = 25.$$

Här känna vi igen (3), och lösningen går som ovan.

En annan ekvation:

$$x^2+5x+6=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Då är x^2 som förut kvadraten på x och $5x$ dubbla produkten eller $\frac{5x}{2}$ enkla produkten av x och andra termen, varför andra termen måste vara $\frac{5}{2}$ och vi i vänstra membrum behöva

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$$

vilket är detsamma som

$$x^2+5x+\frac{25}{4}.$$

Detta uttryck är $\frac{1}{4}$ mer än vänstra membrum i (5), varför värdet ökas från 0, som vi ha i (5), till $\frac{1}{4}$, således

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$$

$$x_1=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-2;$$

$$x_2=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-3.$$

Vi kunna nu sätta ihop nya ekvationer själva. Vi bestämma t. ex., att x skall vara 6, och skriva

$$x^2 - 7x,$$

där vi välja koefficienten -7 på måfå. När vi ha $x = 6$, finna vi lätt, att $x^2 - 7x = -6$, d. v. s. vi behöva öka uttrycket med 6, för att det skall bli $= 0$, och vi få ekvationen

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

vilken kan lösas på samma sätt som (5). En annan gång låta vi x vara 4 och skriva t. ex.

$$x^2 - 3x,$$

vilket befinnes bli $= 4$, och vi kunna sätta

$$x^2 - 3x = 4,$$

vilken ekv. vi lösa på samma sätt som (4).

Fabricera på detta sätt exempel efter exempel och lös dem. Och låt ibland den rot vi utgå från vara ett bråk, såsom $x = \frac{2}{3}$ eller $3x = 2$.

$$\because (3x)^2 + 8 \cdot 3x = 20.$$

Detta ger ekvationen

$$9x^2 + 24x = 20 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\because x^2 + \frac{8x}{3} = \frac{20}{9}$$

$$x^2 + \frac{8x}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{20}{9} + \frac{16}{9}$$

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{36}{9}$$

$$x + \frac{4}{3} = \pm \frac{6}{3}$$

$$x = \frac{-4 \pm 6}{3}$$

$$x_1 = \frac{2}{3};\ x_2 = -3\tfrac{1}{3}.$$

Antag nu att vi ha ekvationen

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Räkningarna bli då

$$(x - 4)^2 = 0$$
$$x - 4 = 0$$

och vi få egentligen blott ett svar, men för att varje andra gradens ekv. skall få 2 rötter, säga vi, att vi här ha *två lika rötter:*

$$x = 4 \pm \sqrt{0}$$

eller

$$x_1 = x_2 = 4.$$

I dessa fall ha vi haft hela tal eller bråk till rötter. Hela tal och bråk kallas med ett gemensamt namn *rationella tal,* som vi nämnt i föreg. kap.

När tillräcklig övning vunnits på ekvationer med rationella rötter, gå vi till exempel med *irrationella* rötter.

$$x^2 - 7x = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 2 + \frac{49}{4} = \frac{57}{4}$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{57}{4}$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm \frac{\sqrt{57}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8b)$$

eller, om vi skriva varje rot för sig,

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{57}}{2};$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{57}}{2}.$$

Ett rotuttryck säges, som vi veta, vara ett *irrationellt* tal. Vi ha sålunda löst ekvationer både med *rationella* och *irrationella* x-värden som rötter, och vi kunna skaffa oss nya exempel genom att på måfå sätta ett siffervärde som koefficient för x och ett som tredje term i vänstra membrum såsom i (5) eller som högra membrum såsom i (8). När vi sedan skaffa en jämn kvadrat i vänstra membrum, riskera vi att få ett negativt tal i det högra, men då spara vi ekvationen, tills vi löst (10) här nedan, och sätta upp en annan ekvation i stället.

I (8b) kan man slå upp i tabellen eller beräkna $\sqrt{57}$ för att få rötterna uttryckta i avkortat decimalbråk. Men har man erforderlig övning häri, kan man nöja sig med (8b) som svar och draga ut kvadratroten endast i de fall, ekvationen uppställts för att lösa ett problem, i vilket krävves ett svar, noggrant på decimaler.

När ekvationen erhållits av ett problem, kan det hända att blott ena roten eller t. o. m. ingendera ger lösning åt problemet. *Om en sten får falla rakt nedåt, ökas dess hastighet, så att den vid slutet av en sekund är 9,8 m. pr sek.*[1] *större än vid se-*

[1] I vårdslöst tal säges ofta, att hastigheten är 9,8 m. eller hastigheten ökats med 9,8 m., men 9,8 m. är en

kundens början. Slungas den rakt uppåt, minskas däremot dess hastighet varje sekund med 9,8 m. pr sek., tills den vänder och faller nedåt. Vi släppa den på en höjd av 9,8 m. och fråga, när den träffar jordytan.

Vi kunna uppställa följande tabell, om vi antaga, att stenen når marken efter t sek.

Begynnelsehast.	Sluthast.	Medelhast.
0 m. pr sek.	9,8 t m. pr sek.	4,9 t m. pr sek.

Då vägen är = medelhast. ggr tiden, få vi ekv.

$$4{,}9\, t^2 = 9{,}8$$

$$t^2 = 2$$

$$t = \overset{+}{(-)} \sqrt{2} = \overset{+}{(-)}\, 1{,}41$$

Den träffar sålunda marken 1,41 sek. *efter* det den släpptes. Den negativa roten skulle betyda, att stenen varit vid marken i förväg, innan den släpptes. Det svaret hade varit rimligt, om vi tänkt oss, att stenen förut varit i rörelse uppåt och vänt på höjden 9,8 m. Men det duger ej, om den släppes ned som i vårt exempel, varför vi sätta parentes om minustecknet.

Vi gå sedan till en ny typ av rötter:

---

längd och ej en hastighet. Om stenen släppes, är således dess hastighet efter 1 sek. ej 9,8 m. utan 9,8 m. pr sek., d. v. s. om den finge fortsätta och falla med den fart, den vid första sekundens slut har, skulle den på en sekund hinna 9,8 m. Men under andra sekunden ökas åter hastigheten med 9,8 m. pr sek. Farten är sålunda vid andra sekundens början 9,8 m. pr sek. och vid dess slut 19,6 m. pr sek. Då hastigheten ökas lika mycket i början som i slutet av sekunden, är medelhastigheten under andra sekunden 14,7 m. pr sek., och den faller under andra sekundens lopp 14,7 m.

$$x^2 = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$
$$x = \pm \sqrt{-1}.$$

Denna ekvation har egentligen ingen lösning. Svaret $x = -1$ duger ej, då det ger $x^2 = 1$. Vi kunna ej finna något tal, som höjt i kvadrat blir -1. Men vi vilja ha, vad vi ej kunna få, nämligen två rötter till varje ekvation av andra graden. Därför låtsas vi, att $\sqrt{-1}$ finnes, och vi sätta

$$\sqrt{-1} = i.$$

Då kunna vi också låtsas, att (9) har två lösningar, nämligen

$$x = \pm i.$$

Ett sådant obefintligt tal som $i = \sqrt{-1}$ benämnes *imaginärt,* vilket betyder inbillat. I motsats däremot kallas de verkliga talen *reella, vare sig* de äro *rationella eller irrationella.*

Vi våga oss nu på exemplet

$$x^2 - 6x + 11 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$
$$\because x^2 - 6x + 9 = -2$$
$$(x-3)^2 = -2$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{2} = \pm i\sqrt{2}$$
$$x = 3 \pm i\sqrt{2}.$$

Här har vardera roten en reell del, nämligen 3, och en imaginär, nämligen $i\sqrt{2}$ eller $-i\sqrt{2}$. När den ena delen är reell och den andra imaginär, kallas talet *komplext.* Ekv. (1) — (8) ha således reella rötter, varav de 7 första ekv. ha sina rötter rationella och den 8:e har dem irrationella. I (9) äro rötterna imaginära, i (10) komplexa.

Vi återgå nu till exemplet om *stenen*, men antaga i stället, att den *slungas lodrätt uppåt med en hastighet av 19,6 m. pr sek. När har den nått höjden a m.?*

Vi räkna hastigheten positivt uppåt. Att hastigheten nedåt under en sek. ökas med 9,8 m. pr sek. innebär ju, att hast. uppåt minskas med lika mycket och således på t sek. minskas med $9{,}8\,t$ m. pr sek., varför vi få följande tabell:

Begynnelsehast.	Sluthast.	Medelhast.
19,6 m. pr sek.	$(19{,}6 - 9{,}8\,t)$ m. pr sek.	$(19{,}6 - 4{,}9\,t)$ m. pr sek.

Den väg på a m., som tillryggalägges på t sek., är ju t ggr medelhast., och ekv. blir

$$t\,(19{,}6 - 4{,}9\,t) = a$$
$$0 = a - 19{,}6\,t + 4{,}9\,t^2$$

och, om vi vid divisionen med 4,9 skriva högra membrum först,

$$t^2 - 4\,t + \frac{a}{4{,}9} = 0$$

$$t^2 - 4\,t + 4 = 4 - \frac{a}{4{,}9}$$

$$t - 2 = \pm\sqrt{4 - \frac{a}{4{,}9}}$$

$$t = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{a}{4{,}9}}\,.$$

Nu kunna vi tänka oss olika höjder och få därvid följ. tider, om vi i varje slutresultat skriva den kortare tiden först.

1) $a = 9{,}8$; $t = 2 \pm \sqrt{4 - 2} = 2 \pm \sqrt{2} = 2 \pm 1{,}41$;
$t_1 = 0{,}59$; $t_2 = 3{,}41$.

2) $a = 14{,}7$; $t = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$; $t_1 = 1$; $t_2 = 3$.

3) $a = 19{,}6$; $t = 2 \pm 0$; d. v. s. $t_1 = t_2 = 2$.

4) $a = 24{,}5$; $t = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i$.

Stenen har sålunda uppnått höjden 9,8 m. efter 0,59 sek. på uppvägen och 3,41 sek. på nedvägen. För höjden 14,7 m. ha tiderna ryckt närmare varandra och svaret blivit efter 1 sek. på uppvägen och 3 sek. på nedvägen. I fråga om 19,6 m. rycka tiderna fullständigt ihop och sammanfalla, d. v. s. dit kommer stenen blott en gång och vänder där. Alltså når den aldrig höjden 24,5 m., och intet reellt svar erhålles för densamma, utan svaret blir komplext eller låt oss säga verklighetsfrämmande.

Ur exempelsamlingen erhållas nu flera problem, vilka kunna lösas efter de anvisningar, vi i det föregående givit. Sedan erforderlig vana erhållits, kunna vi gå till en ekvation med bokstäver i stället för siffror till koefficienter.

$$x^2 + px + q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

eller

$$x^2 + px = -q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11b)$$

Vi tänka oss här, att p och q äro bekanta tal och x skall sökas. Räkningarna bli, eftersom $\frac{px}{2}$ är enkla produkten.

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$$

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \ldots\ldots \quad (11c)$$

Sist erhållna formel (11c) gäller alltid, vare sig p och q äro positiva eller negativa, och den, som har långvarig övning med ekvationer av andra graden, kan utan att förlora sin matematiska tankeförmåga våga gå genvägen och vid lösningen av en ekv. av andra graden använda formeln, om han bryr sig om det.

En annan sak. Om rötterna till en ekvation äro x_1 och x_2, måste vi ha

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

vare sig vi göra $x=x_1$ eller $x=x_2$, ty i vartdera fallet blir endera faktorn $=0$ och således produkten eller vänstra membrum $=0$. Denna ekv. måste följaktligen vara samma en som den givna. Efter hopmultiplicering få vi vår ekvation att bli

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Detta gäller om *vilken ekvation av andra graden som helst*, varför vi få följande regel. Om koefficienten för x^2 är 1, är *koefficienten för x = summan av rötterna med ombytt tecken, och vi ha tredje termen = produkten av rötterna.* Ha vi löst en ekvation, t. ex. (5), kunna vi medelst denna upptäckt pröva, om vi räknat rätt. Här äro rötterna -2 och -3 eller summan -5, vilket är = koeff. för andra termen med ändrat tecken. Produkten av -2 och -3 är $+6$, vilket tydligen är $=$ tredje termen. Skola vi pröva svaren på ekv. (8) eller (10) enligt denna metod, komma vi lättast till rötternas produkt genom formeln

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

I (8) blir sålunda rötternas produkt

$$\frac{7+\sqrt{57}}{2} \cdot \frac{7-\sqrt{57}}{2} = \frac{7^2 - (\sqrt{57})^2}{4} = \frac{49-57}{4} =$$
$$= -\frac{8}{4} = -2,$$

och genom att i (8) minska vartdera membrum med 2 få vi även tredje termen att vara -2.

I (10) blir rötternas produkt

$$(3 + i\sqrt{2})(3 - i\sqrt{2}) = 9 - (i\sqrt{2})^2 =$$
$$= 9 - 2 \cdot i^2 = 9 - 2 \cdot (-1) = 9 + 2 = 11,$$

således $=$ tredje termen. I vardera ekvationen erhålles rötternas summa lätt, då de positiva och de negativa rotuttrycken taga ut varandra.

II.

Ha vi ekvationer av andra graden med flera obekanta eller ekvationer av högre grad än andra, finns det ej någon metod, som duger för alla fall, men vi skola taga några exempel, där lösning är möjlig.

1. *Vid en rektangulär damm är vägen längs kajen från ett hörn till det motsatta 83 m. och vattenvägen längs diagonalen 59 m. Beräkna dammens längd och bredd.*

Är längden x m. och bredden y m., få vi

$$x + y = 83 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

samt enligt pytagoreiska satsen

$$x^2 + y^2 = 59^2 = 3481 \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Nu ger (a) efter kvadrering

$$x^2 + 2xy + y^2 = 83^2 = 6889,$$

och genom att därifrån subtrahera (b) erhålles

$$2xy = 3408 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

samt genom att minska (b) med (c)

$$x^2 - 2xy + y^2 = 73 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

$$\therefore \quad x - y = \sqrt{73} = 8{,}5 \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Av (a) och (e) få vi

$$x = 45{,}75 \,;\; y = 37{,}25.$$

Vi jämna av dessa värden till hela meter, varvid *dammens längd blir 46 m. och dess bredd 37 m.*

När vi i (e) drogo roten ur ekv. (d), använde vi den positiva roten. Hade vi tagit den negativa, så hade blott värdena på x och y blivit omkastade, d. v. s. längd och bredd omkastade men resultatet likväl blivit detsamma.

2. Vi tänka oss i stället ekv.

$$x^2 - y^2 = 24$$
$$x + y = 12.$$

Genom att dividera första ekv. med den andra erhålles

$$x - y = 2.$$
$$\therefore \; x = 7 \,;\; y = 5.$$

3. $$x^4 - 12x^2 + 27 = 0.$$

Vi sätta

$$x^2 = y$$

$$\therefore\ y^2 - 12y + 27 = 0,$$

varav erhålles

$$y_1 = 9;\ y_2 = 3.$$

Således antingen

$$x^2 = 9;\ x = \pm 3$$

eller

$$x^2 = 3;\ x = \pm \sqrt{3}.$$

Vi få här 4 rötter, vilket var att vänta vid en 4:e gradens ekvation.

4. $$x^3 - 2x^2 + 3x = 0.$$

Här är påtagligt, att även vänstra membrum blir $= 0$ för $x = 0$.

Vi få sålunda en rot

$$x_1 = 0.$$

Är ej $x = 0$, kunna vi dividera med x och erhålla därvid

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1-3} = 1 \pm \sqrt{-2}$$

$$x_2 = 1 + i\sqrt{2}$$

$$x_3 = 1 - i\sqrt{2}.$$

5. $$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Här upptäcka vi lätt genom att på försök ersätta x med 1, att en rot är

$$x_1 = 1,$$

vilket värde tydligen gör vänstra membrum $= 0$. Då bör detta vänstra membrum vara $(x - 1)$ ggr en annan faktor,[1] vilken faktor vi erhålla genom att dividera vänstra membrum med $x - 1$, varvid vi finna, att

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$
$$\therefore \quad (x - 1)(x^2 - 3x + 2) = 0.$$

För att produkten skall bli noll, måste endera faktorn vara $= 0$. Första faktorn $= 0$ ger oss den rot, vi redan erhållit. Nu återstår

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$\therefore \quad x_2 = 2; \; x_3 = 1.$$

Första och tredje roten bli här lika. Jfr. (7) sid 84.

6. $$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Denna ekvation är symmetrisk, i det att första och sista termen har samma koefficient, likaså näst första och näst sista. En dylik ekvation dividera vi med x^2, så att vi få symmetri även i fråga om exponenterna.

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\therefore \quad 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) = 38$$

och efter ökning med $6 \cdot 2$ för att få jämn kvadrat inom första parentesen

[1] Jfr ekv. (12) sid. 90.

$$6\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)=50$$

eller med införande av

$$y=x+\frac{1}{x}$$

$$6y^2+5y=50$$

$$y_1=2\tfrac{1}{2};\ y_2=-3\tfrac{1}{3}$$

a) $x+\dfrac{1}{x}=2\tfrac{1}{2}$

$$\therefore\ x^2-2\tfrac{1}{2}x+1=0$$

$$x_1=2;\ x_2=\frac{1}{2}.$$

b) $x+\dfrac{1}{x}=-3\tfrac{1}{3}$

$$x^2+3\tfrac{1}{3}x+1=0$$

$$x_3=-\frac{1}{3};\ x_4=-3.$$

Här kunna vi genom insättning i ekvationen pröva, om värdena stämma. Därjämte kunna vi ge akt på, att den givna ekvationen efter divisionen med x^2 blivit symmetrisk med avseende på x och $\frac{1}{x}$, så att ekvationen blir oförändrad, om vi byta ut x mot $\frac{1}{x}$. Således böra vi kunna utbyta $x=2$ mot $x=\frac{1}{2}$ och $x=-3$ mot $x=-\frac{1}{3}$, utan att vänstra membrum ändrar värde, d. v. s. duger $x = 2$ och $x = -3$, så bör också $x = \frac{1}{2}$ och $x = -\frac{1}{3}$ duga. Detta gör det även utan kontroll högst sannolikt, att vi räknat rätt.

En annan sak kunna vi iakttaga här. I fallet a) är rötternas summa $= 2\frac{1}{2}$ och deras produkt 1. Då behöver man knappast lösa ekv. på vanligt sätt, utan man ser genast, att värdena 2 och $\frac{1}{2}$ ha nämnda summa och produkt och därför måste vara de sökta rötterna. I b) ser man likaså, att $-3\frac{1}{3}$ skall vara summan av rötterna och $+1$ produkten, samt att summan av -3 och $-\frac{1}{3}$ är $-3\frac{1}{3}$ och produkten av -3 och $-\frac{1}{3}$ är $+1$, varför rötterna måste vara -3 och $-\frac{1}{3}$. Så erhållas rötterna utan direkt uträkning.

7.

$$x^3 - y^3 = 98 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$x - y = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Dividera vi på försök $(x^3 - y^3)$ med $(x - y)$, finna vi, att

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\because\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 98$$

I denna ekvation är enligt (b) första faktorn i vänstra membrum $= 2$, varför andra faktorn måste vara 49, således

$$x^2 + xy + y^2 = 49$$

Efter kvadrering ger (b)

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4,$$

och genom att subtrahera denna ekv. från föreg. erhålles

$$3xy = 45$$
$$xy = 15$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = 49 + 15 = 64$$
$$x + y = \pm 8.$$

Vi få här två fall:

$$\text{a)}\quad x + y = 8$$
$$x - y = 2$$
$$\therefore\ x_1 = 5;\ y_1 = 3.$$
$$\text{b)}\quad x + y = -8$$
$$x - y = 2$$
$$\therefore\ x_2 = -3;\ y_2 = -5.$$

8. $$x^4 - 2x^3y - x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 = 13 \ldots \text{(a)}$$
$$x^2 + xy + y^2 = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Här gäller det att få med gradtalet till andra graden, varför vi försöka, om vänstra membrum i (b) går jämnt upp i vänstra membrum i (a). Genom att utföra divisionen finna vi, att

$$x^4 - 2x^3y - x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 =$$
$$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$$
$$\therefore (x^2 + xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2) = 13 \ldots \text{(c)}$$

Eftersom vi ha

$$x^2 + xy + y^2 = 13$$

måste andra faktorn i (c) vara $= 1$, d. v. s.

$$x^2 - 3xy + y^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(d)}$$

Skillnaden mellan (b) och (d) blir

$$4\,xy = 12$$
$$\therefore\ xy = 3$$

och genom addition härav till (b)

$$x^2 + 2\,xy + y^2 = 16$$
$$\therefore\ x + y = \pm\,4.$$

Likaså erhålles, om vi subtrahera

$$3\,xy = 9$$

från (b)

$$x^2 - 2\,xy + y^2 = 4$$
$$\therefore\ x - y = \pm\,2.$$

Vi få här 4 fall:

a)
$x + y = 4$
$x - y = 2$
$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

b)
$x + y = 4$
$x - y = -2$
$x_2 = 1;\ y_2 = 3$

c)
$x + y = -4$
$x - y = 2$
$x_3 = -1;\ y_3 = -3$

d)
$x + y = -4$
$x - y = -2$
$x_4 = -3;\ y_4 = -1.$

9. $$x^4 - 12\,x^2 + 16 = 0.$$

Här betrakta vi x^2 som obekant, varför vi enligt förut genomgången metod få

$$x^2 = 6 \pm \sqrt{20}$$

$$\therefore\ x = \pm\sqrt{6 \pm \sqrt{20}}$$

Men detta uttryck går att förenkla. Först en jämförelse.

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{15} + 3 = 8 + 2\sqrt{15}$$

$$\therefore \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

Uttrycket

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}$$

kan således förenklas, så att vi slippa dubbla rotmärken. För att få veta, om det uttryck på x, vi erhållit, kan förenklas på liknande sätt, skriva vi

$$\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\therefore 6+\sqrt{20} = a + 2\sqrt{ab} + b$$

Skola a och b vara rationella tal, få vi de rationella delarna i vartdera membrum lika och roturycken lika, d. v. s.

$$a + b = 6$$

$$2\sqrt{ab} = \sqrt{20}$$

$$\therefore 4ab = 20$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 36$$

$$-4ab = -20$$

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 = 16.$$

Då det är likgiltigt, om vi låta a eller b vara det större talet, kunna vi antaga, att a är större, varför vi få

$$a - b = +4,$$

varjämte vi ha

$$a + b = 6$$

$$\therefore a = 5;\ b = 1.$$

$$\therefore \sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{5} + 1.$$

På samma sätt få vi

$$\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{5}-1.$$

$$\because \; x=\pm(\sqrt{5}\pm 1).$$

Det blir här fyra rötter, vilket vi vänta av en 4:e gradens ekvation, nämligen

$$x_1=\sqrt{5}+1;$$
$$x_2=\sqrt{5}-1;$$
$$x_3=-\sqrt{5}+1;$$
$$x^4=-\sqrt{5}-1.$$

10. $$x^4+4x^2=21.$$

Här sätta vi

$$x^2=y$$
$$\because \; y^2+4y=21$$
$$y_1=3;\, y_2=-7$$
$$x=\pm\sqrt{3}$$

eller

$$x=\pm i\sqrt{7}.$$

11. $$\sqrt{\frac{5x}{x^2+6}}-2\sqrt{\frac{x^2+6}{5x}}+1=0.$$

Vi sätta

$$\sqrt{\frac{5x}{x^2+6}}=y.$$

$$\because \; y-\frac{2}{y}+1=0$$

$$y^2-2+y=0$$

$$y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$y_1 = 1\,;\ y_2 = -2$$

a) $$\sqrt{\frac{5x}{x^2+6}} = y_1 = 1$$

$$\frac{5x}{x^2+6} = 1$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = 3\,;\ x_2 = 2.$$

b) $$\sqrt{\frac{5x}{x^2+6}} = -2.$$

Här kunde vi få ytterligare två x-värden, men vi måste förkasta dem och nöja oss med de två första, emedan vi med roten ur ett tal mena den positiva roten och sålunda

$$\sqrt{\frac{5x}{x^2+6}}$$

ej kan vara $= -2$.

L o g a r i t m e r

Kap. I.

När vi ha

$$10^2 = 100$$

eller

$$10^3 = 1000$$

kallas exponenten logaritm, således

$$\log 100 = 2$$

vilket utläses logaritmen för 100 lika med 2.[1] Likaså

$$\log 1000 = 3.$$

I ovanstående uttryck benämnes talet 10 *bas*. Också andra tal än 10 kunna användas som bas, t. ex.

$$2^3 = 8$$
$$2^4 = 16$$

3 blir då logaritmen för 8 och 4 blir logaritmen för 16 med 2 till bas. Men vid praktiska räkningar begagnas 10 alltid som bas, varför vi i det följande hålla oss till 10-logaritmerna. För att se, hur vi kunna få logaritmer för olika positiva tal, skriva vi till en början upp potenserna

[1] Förväxla ej tal och logaritm. Då vi ha $\log 100 = 2$, är 2 logaritmen och 100 talet. Vi säga ju logaritmen *för* (talet) 100 och ej att logaritmen är 100.

$$10^5 = 100000$$
$$10^4 = 10000$$
$$10^3 = 1000$$
$$10^2 = 100$$
$$10^1 = 10$$

Varje gång vi minska exponenten med 1, blir här talet 10 ggr så litet. Då är det likaså skäl att med 10^0 mena 10 gånger så litet som 10^1, således

$$10^0 = 1.$$

På samma sätt kunna vi fortsätta och minska exponenten till -1, -2 o. s. v. samt för varje gång göra talet 10 ggr så litet, alltså

$$10^{-1} = 0{,}1$$
$$10^{-2} = 0{,}01$$
$$10^{-3} = 0{,}001$$

Så få vi mening i även negativa heltal som exponenter eller logaritmer. Ty som sagt låta vi orden exponent och logaritm betyda samma sak, varför vi i stället för ovanstående kunna skriva

$$\log 100000 = 5$$
$$\log 10000 = 4$$
$$\log 1000 = 3$$
$$\log 100 = 2$$
$$\log 10 = 1$$
$$\log 1 = 0$$
$$\log 0{,}1 = -1$$
$$\log 0{,}01 = -2$$
$$\log 0{,}001 = -3$$

Hittills ha vi blott talt om hela tal som logaritmer. Därvid se vi, att ju större tal vi ha, desto större blir logaritmen. 0,1 t. ex. är mer än 0,01, och motsvarande logaritm -1 är mer än -2. I följande kap. få vi emellertid lära oss, vad vi mena med att upphöja 10 till ett bråk. Sålunda sätta vi

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

Varför vi göra det, skola vi som sagt i följ. kap. förklara, och läsaren får ge sig till tåls till dess och i väntan på utredningen lita på, att det ligger något förnuft även i att upphöja 10 till ett decimalbråk och t. ex. skriva

$$10^{2,7582} = 573$$

eller

$$\log 573 = 2,7582.$$

Men som sagt, ju större tal vi ha, desto större är logaritmen. Och eftersom

$$1000 > 573 > 100$$ [1]

eller

$$10^3 > 573 > 10^2$$

bör 573 vara 10 upphöjt till mer än 2 men mindre än 3, d. v. s. till ett tal, vilket kan skrivas som 2 hela och några decimaler. Dessa decimaler erhållas ur en tabell. Nu finnas olika tabeller med olika noggrannhet, d. v. s. där logaritmerna äro uträknade med fler eller färre decimaler. I vanliga fall kan det räcka med *4-ställiga* logaritmer, d. v. s. med 4 decimaler uträknade, såsom i *Hedström och Rendahl, Räknetabeller,* som vi här komma att an-

[1] Tecknet $>$ betyder större än, liksom $<$ betyder mindre än. Vi förväxla ej dessa beteckningar med varandra om vi ge akt på, att spetsen alltid är vänd mot det mindre talet.

vända. Skola vi söka logaritmen för 573, ge vi akt på, att vi där ha 57 tiotal och 3 ental. Slå vi upp sid. 2—3 i nämnda tabeller, finna vi lätt de 57 tiotalen i vänstra kanten under ordet "Tal" och de 3 entalen överst efter ordet "Tal". Inuti tabellen står *mantissan*, varmed vi mena logaritmens decimaler. Att *karaktäristikan*[1] eller heltalsdelen av logaritmen är 2, ha vi nyss räknat ut själva. Mantissan till 573 står i tabellen rakt till höger om nyss nämnda 57 tiotal och rakt under de tre entalen och befinnes således enligt tabellen vara 7582, d. v. s. vi ha 7582 tiotusendelar förutom de 2 hela, sålunda

$$\log 573 = 2{,}7582$$

eller

$$10^{2{,}7582} = 573.$$

Då tabellerna blott ge log för 3-siffriga tal, är det klokast att taga några flera exempel just på tresiffriga tal och slå upp logaritmen för dem. Sedan erforderlig övning härvidlag vunnits, gå vi till

$$x = \log 340{,}83.$$

Eftersom talet 340,83 är mer än 100 men ej 1000, är logaritmen 2 hela och något mer. De överskjutande decimalerna få vi ur tabellen, som ger

$$\log 340 = 2{,}5315 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\log 341 = 2{,}5328 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

[1] Förväxla ej orden karaktäristika och mantissa. Karaktäristikan karaktäriserar talet genom att ange dess storleksordning. I vårt exempel upplyser logaritmens karaktäristika eller 2:an, att 573 karaktäriseras av att vara 100-tal. Om karaktäristikan i logaritmen är 3, anger den, att motsvarande tal är 1000-tal. O. s. v.

När talet ökas från 340 till 341, d. v. s. med 1, ökas tydligen logaritmen med 13 tiotusendelar eller mantissan med 13. Undersöka vi i tabellen ökningen av logaritmerna för föregående och efterföljande tal, finna vi, att när talet ökas med 1, t. ex. från 334 till 335 eller från 343 till 344, ökas mantissan ständigt med 13 eller i det närmaste med 13, om vi ej gå för långt bort från 340. Ökningen sker sålunda tillräckligt likformigt, för att vi skola kunna antaga, att när talet ökas med 0,83 i stället för 1, ökas mantissan ej med 13 utan blott med 0,83 därav. Då mantissan utgöres av tiotusendelar, skall alltså log 340 ökas med

$$0{,}83 \cdot 13 \text{ tiotusendelar} = 11 \text{ tiotusendelar}$$

eller mantissan med 11, om vi jämna av log till tiotusendelar. Vi få sålunda

$$\log 340{,}83 = 2{,}5315 + 0{,}0011 = 2{,}5326.$$

Slå nu upp och beräkna några logaritmer för tal med tre heltalssiffror och en eller två decimaler. Gå därpå igenom eller spar till senare följande metod.

I stället för att utföra multiplikationen $0{,}83 \cdot 13$ kunna vi använda sidotabellerna till höger om logaritmerna. Längst ned på sid. 2 finna vi den tabell, som ger oss de olika tiondelarna av 13, varför tabellen har 13 till rubrik. Där se vi, att $0{,}8 \cdot 13 =$ $= 10{,}4$ och $0{,}3 \cdot 13 = 3{,}9$, således $0{,}03 \cdot 13 = 0{,}39$. Genom addition finna vi, att ökningen av mantissan är

$$0{,}83 \cdot 13 = 10{,}4 + 0{,}39 = 10{,}79$$

eller efter avkortningen 11. Sedan blir tankegången densamma som nyss. Man kan alltså beräkna ökningen av mantissan både med och utan sidotabellerna.

Hade talet innehållit samma siffror men decimalkommat varit placerat annorlunda eller intet decimalkomma funnits, utan vi i stället kanske haft en eller flera nollor efteråt, så hade mantissan blivit densamma men karaktäristikan en annan. Beträffande logaritmer för rena tiotal ha vi sett, att om talet multipliceras med 10, ökas logaritmen med 1, och om talet divideras med 10, minskas logaritmen med 1. Denna regel gäller också för andra tal. När vi nyss funnit, att den fjärde av nedanstående likheter är riktig, måste sålunda även de övriga vara det, vilket vi lätt se genom att gå steg för steg uppåt och nedåt från den fjärde.

$$\log 340830 = 5{,}5326$$
$$\log 34083 = 4{,}5326$$
$$\log 3408{,}3 = 3{,}5326$$
$$\log 340{,}83 = 2{,}5326$$
$$\log 34{,}083 = 1{,}5326$$
$$\log 3{,}4083 = 0{,}5326$$

När nästa gång logaritmen göres en enhet mindre, är det bekvämast att skriva

$$\log 0{,}34083 = 0{,}5326 - 1$$ [1]

och likaså

$$\log 0{,}034083 = 0{,}5326 - 2$$

o. s. v. Så få vi även här i mantissan behålla de siffror, tabellen ger, vilket medför enklare räkningar, än om vi skulle göra oss det onödiga besväret

[1] Det blir tydligen lika mycket, om vi i stället skriva

$$\log 0{,}34083 = 9{,}5326 - 10.$$

Men den beteckningen behöva vi ej här, utan vi påpeka saken för dem, som efteråt ämna syssla med trigonometri.

att räkna ut skillnaden mellan den positiva och den negativa termen i logaritmen.

Försök nu att slå upp log för flera tal med 4 eller 5 värdesiffror. Av ovanstående framgår, att vi för att beräkna mantissan blott behöva uppsöka talets två första siffror i vänstra kanten och den tredje i översta raden, oberoende av vilken talsort de äro. Deras talsort inverkar blott på karaktäristikan och ej på mantissan.

Men antag, att vi i stället ha logaritmen given och söka talet, t. ex.

$$\log x = 2{,}4738.$$

Enligt det föregående se vi, att eftersom logaritmen ligger mellan 2 och 3, ligger talet mellan 100 och 1000 och är således tresiffrigt. Nu leta vi i tabellen reda på de mantissor, som komma närmast under och närmast över 4738, varvid vi finna

$$2{,}4728 = \log 297 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$2{,}4742 = \log 298 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Utgå vi från (3), skall där mantissan ökas med 14, när talet växer från 340 till 341 eller när det ökas med 1. Men mantissan skall blott ökas med 10 för att bli $= \log x$, varför motsvarande ökning av talet 297 endast blir

$$\frac{10}{14} = 0{,}714$$

för att vi skola komma till x. Medtaga vi endast en decimal, blir svaret

$$x = 297 + 0{,}7 = 297{,}7.$$

Och vi inse utan svårighet, att vi böra nöja oss med en decimal. Det är nämligen lätt att räkna ut, att tabellen ger samma värde på den fyrställiga logaritmen för 297,68 och för 297,74, d. v. s. skillnaden mellan logaritmerna för nämnda tal är så liten, att den först kan framträda med femställiga logaritmer. Detta innebär, att 297,7 blott behöver vara ungefär riktigt.

Enligt det föregående ha vi

$$\log 100 + \log 1000 = 2 + 3 = 5 = \log 100000$$

d. v. s. addera vi logaritmerna för 100 och 1000, få vi logaritmen för 100 . 1000. För att se, om motsvarande alltid gäller, slå vi upp

$$\log 2 = 0{,}3010 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\log 7 = 0{,}8451 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\log 14 = 1{,}1461 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Genom addition av (1) och (2) finna vi, om vi jämföra med (3), att

$$\log 2 + \log 7 = \log 14$$

Taga vi i stället andra tal, ge tabellerna t. ex.

$$\log 3 + \log 8 = \log 24$$
$$\log 4 + \log 9 = \log 36$$
$$\log 3 + \log 4 + \log 7 = \log 84$$

o. s. v. Fortsätta vi försöken, finna vi ständigt, att *summan av logaritmerna för talen är = logaritmen för talens produkt.*

Nej, svarar någon, det stämmer inte riktigt. När jag försöker med 2 och 3 samt deras produkt 6, blir i log 6 mantissan 1 för mycket.

Medgives. Men det beror på att en logaritm, uttryckt i decimaler, ej brukar bli fullständigt riktig, utan efter de fyra siffrorna skulle hur många som helst kunna uträknas. Och då kan man genom avkortningen ibland få något för mycket, såsom i log 6, ibland för litet, såsom i log 2 och log 3. Men detta spelar ingen roll vid våra räkningar.

Uttrycken (1) — (3) visa även, att

$$\log 14 - \log 7 = \log 2$$

d. v. s.

$$\log 14 - \log 7 = \log (14 : 7).$$

Försök med andra tal ge samma resultat, varför vi se, att *när vi minska log för dividenden (eller täljaren) med log för divisorn (eller nämnaren), få vi log för kvoten (eller bråket).*

Vi ha nu valt enkla och lätt kontrollerade exempel för att upptäcka våra regler. Sedan återstår att se, vilken nytta vi ha av dem. Vi börja med följande exempel:

$$x = 21{,}13 \cdot 4{,}372.$$

Här ge tabellerna oss faktorernas logaritmer, som vi kunna summera, eftersom log x enligt det sagda måste vara $= \log 21{,}13 + \log 4{,}372$.

$$\begin{array}{ll} \log 21{,}13 & = 1{,}3249 \\ \log 4{,}372 & = 0{,}6407 \\ \hline \log x & = 1{,}9656 \end{array}$$

Nu visa tabellerna, om vi som ovan söka motsvarande talet till 1,9656, att

$$x = 92{,}38.$$

Då ovanstående addition av logaritmerna går mycket fortare än att multiplicera de givna talen, finna vi *med hjälp av logaritmerna* produkten *mycket* *bekvämare* än med en vanlig multiplikation. *Likaså* blir *en division* bekväm att räkna ut medelst logaritmer, som vi nu skola visa. Vi tänka oss i stället för nyss

$$x = 21{,}13 : 4{,}372.$$

Här få vi subtrahera logaritmerna:

$$\begin{array}{rl} \log 21{,}13 = & 1{,}3249 \\ -\log 4{,}372 = & -0{,}6407 \\ \hline \log x \quad = & 0{,}6842 \\ x = & 4{,}833. \end{array}$$

Ett mera invecklat exempel:

$$x = \frac{22{,}04 \cdot 3{,}272}{0{,}6595}.$$

Genom addition av logaritmerna för täljarens faktorer (jfr räkn. här nedan) få vi täljarens logaritm att vara 1,8580. Om vi ville, kunde vi i tabellen se efter, hur stor täljaren är. Men det intresserar oss inte, då vi i våra räkningar ej behöva täljaren utan blott dess logaritm för att minska med nämnarens logaritm, varför vi skriva

$$\begin{array}{rl} \log 22{,}04 = & 1{,}3432 \\ \log 3{,}272 = & 0{,}5148 \\ \hline & 1{,}8580 \\ -\log 0{,}6595 = & -0{,}8192 + 1^{1} \\ \hline \log x \quad = & 2{,}0388 \\ x = & 109{,}35 \end{array}$$

[1] Då log 0,6595 = 0,8192 — 1 och detta värde skall subtraheras, draga vi ifrån 1 för mycket genom att subtrahera 0,8192, varför vi måste lägga till 1 igen.

vilket värde lättast erhålles ur tabellen sid 32—33 i *Hedström och Rendahl* i stället för sid. 2—3, som vi använda i de flesta fall, d. v. s. då talet ej börjar med 10. Det kunde f. ö. ha räckt att uttrycka x med 4 siffror, men då blir sista siffran lika nära 3 som 4, varför man går medelvägen genom att även sätta till femman.

Ett annat exempel:

$$x = 0{,}3142^4.$$

Här ha vi 4 lika faktorer att multiplicera ihop, varför det blir 4 lika logaritmer att addera, således

$$\log x = 4 \,.\, \log 0{,}3142 = 4 \,.\, (0{,}4972 - 1) =$$
$$= 1{,}9888 - 4 = 0{,}9888 - 3$$
$$\therefore x = 0{,}009745.$$

Visserligen skulle ett fullt noggrant svar innehålla 16 decimaler, då x är produkten av 4 faktorer, vardera med 4 decimaler. Men i praktiken är det fullt tillräckligt med de 6, som vi här få medelst tabellerna.

Likaså kunna vi draga kvadratroten, tredje, fjärde, femte roten o. s. v. ur ett tal, såsom

$$x = \sqrt[3]{0{,}1219}$$
$$\therefore x^3 = 0{,}1219$$
$$\log x^3 = \log 0{,}1219$$
$$3 \log x = \log 0{,}1219$$
$$\log x = \frac{1}{3} \log 0{,}1219 = \frac{1}{3}(0.0860 - 1) =$$
$$= \frac{1}{3}(2{,}0860 - 3) = 0{,}6953 - 1$$
$$x = 0{,}4958.$$

Fjärde ledet här ovan är lämpligt att taga med för att slippa dubbla decimalbråk vid divisionen med 3.

I nästa kap. behöva vi tionde och tiotusende roten ur 10, varför vi först beräkna

$$x = \sqrt[10]{10}.$$

På samma sätt som nyss erhålles:

$$x^{10} = 10$$
$$\therefore \log x^{10} = \log 10 = 1$$
$$10 \log x = 1$$
$$\log x = 0{,}1000$$
$$x = 1{,}259$$
$$\therefore \sqrt[10]{10} = 1{,}259.$$

Motsvarande räkningar ge (se Hedström o. Rendahl sid. 2 och sid. 32)

$$x = \sqrt[10000]{10}$$
$$10000 \log x = 1$$
$$\log x = 0{,}0001$$
$$x = \sqrt[10000]{10} = 1{,}00023.$$

Kap. 2.

I det föregående ha vi genom undersökning av tabellerna funnit lagarna för logaritmräkningen. Men nu återstår att ge en matematisk utredning, *varför* de gälla. Vidare återstår att avgöra, vad vi mena med en potens eller dignitet där *ett bråk* är exponent och således logaritm. 10^2 betyder ju 2 faktorer 10, varför $10^{0,5}$ borde betyda en halv faktor 10, men det förefaller meningslöst att tala om en halv faktor. Vi måste hitta på någon förnuftig mening i $10^{0,5}$. För den skull göra vi följande överenskommelse. Lika väl som vi i

$$10^2 \cdot 10^3 = 10^5$$

addera exponenterna vid multiplikation av talen, lika väl bestämma vi oss för att låta $10^{0,5}$ betyda ett så stort tal, att vi få

$$10^{0,5} \cdot 10^{0,5} = 10^{0,5+0,5} = 10^1 = 10.$$

Då första membrum är = fjärde, kunna vi skriva

$$(10^{0,5})^2 = 10.$$

$10^{0,5}$ betyder sålunda det tal, vars kvadrat är 10, eller kvadratroten ur 10, som vi nämnt i föreg. kap.

$$\therefore 10^{0,5} = \sqrt{10} = 3{,}162\ [1]$$

eller

$$0{,}5 = \log 3{,}162$$

På samma sätt kunna vi i likhet med nyss gjorda överenskommelse skriva

$$10^{0,1} \cdot 10^{0,1} \ldots 10^{0,1} \text{(tio faktorer)} = 10^{0,1+0,1 \ldots +0,1} = 10^1$$

$$\therefore 10^{0,1} = \sqrt[10]{10} = 1{,}259\ [2]$$

$$\log 1{,}259 = 0{,}1.$$

---

[1] Här må påpekas, att även $(-\sqrt{10})^2 = 10$, men det är mest praktiskt att med $10^{0,5}$ mena den positiva roten.

[2] Om man hade obegränsad tid, kunde man genom att multiplicera ihop 10 faktorer 1,259 kontrollera att produkten blir ett tal, som kan avkortas till 10. Men vi tillråda ingen försöket, då vi med hjälp av logaritmer finna nämnda produkt oändligt mycket lättare.

Det blir alldeles oförändrad tankegång med tiotusen faktorer $10^{0,0001}$ och vi kunna sätta

$$\left(10^{0,0001}\right)^{10000} = 10$$

$$\therefore \quad 10^{0,0001} = \sqrt[10000]{10} = 1{,}00023 \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\therefore \quad \log 1{,}00023 = 0{,}0001.$$

Här ha vi utan att fråga läsaren om lov "tittat i facit" och tagit logaritmtabellerna till hjälp för att få reda på tionde och tiotusende rötterna ur 10. Men vårt resonemang både hittills och i fortsättningen blir i alla fall fullt bindande, ty om i stället 1,000234 eller vilket annat tal som helst vore lagom stort för att multiplicerat med sig självt 10000 ggr bli 10, hade vi blott att i våra räkningar byta ut 1,00023 mot det rätta talet, och vi skulle få fullständigt samma tankegång.

Om vi multiplicera ihop t. ex. 6341 faktorer $10^{0,0001}$ är det lämpligt att beteckna produkten

$$\left(10^{0,0001}\right)^{6341} = 10^{0,6341} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

eller

$$1{,}00023^{6341} = 10^{0,6341} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Därmed ge vi sådan mening åt $10^{0,6341}$ att vi fortfarande få addera exponenterna vid multiplikation.

Av dessa uttryck är (2) det absolut noggranna, då 1,00023 är avkortat. Vi medtaga dock även (3) för att göra tankegången åskådligare. Antag nu, att vi ha tillräckligt många decimaler i 1,00023 för att få ett svar, noggrant på tre decimaler, om vi multiplicera ihop 6341 dylika faktorer. Då skulle vi få

$$10^{0,6341} = 1{,}00023^{6341} = 4{,}306 \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dock tillråda vi ej heller här någon att söka utföra dessa orimligt tidsödande multiplikationer. I stället få vi av logaritmtabellerna veta, att produkten i (4) är den riktiga, d. v. s. att

$$0{,}6341 = \log 4{,}306 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Med hjälp av högre matematik, än vi på vårt stadium kunna förstå, är det nämligen möjligt att på långt bekvämare sätt än genom nämnda 6341 multiplikationer räkna ut, att (5) eller det därmed liktydiga uttrycket (4) måste gälla, ävensom att övriga logaritmer i tabellen äro riktiga.

Om vi i (2) och (3) sätta exponenten till 26341, leder motsvarande resonemang, som vi se, med hjälp av förklaringen strax efteråt, till

$$10^{2,6341} = 1{,}00023^{26341} = 1{,}00023^{20000} \,.\, 1{,}00023^{6341} =$$
$$100 \,.\, 4{,}306 = 430{,}6 \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

emedan de 26341 faktorerna i andra ledet kunna delas upp i 20000 och 6341 stycken faktorer, såsom vi skrivit i tredje ledet, och produkten av de 20000 faktorerna är

$$1{,}00023^{20000} = \left(\sqrt[10000]{10}\right)^{20000} = 10^2 = 100$$

samt produkten av de 6341 faktorerna erhållas av (4). Eftersom logaritm och exponent är samma sak, kunna vi i stället för första och sista ledet i (6) skriva

$$2{,}6341 = \log 430{,}6 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Ävenså innebär uttrycket

$$10^{0,6341-2} = 1{,}00023^{6341-20000}$$

att vi ha 6341 faktorer 1,00023 och få dividera med 20000 dylika faktorer, således

$$10^{0,6341-2} = 1{,}00023^{6341} : 1{,}00023^{20000} = 4{,}306 : 100 =$$
$$= 0{,}04306 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

eller

$$0{,}6341 - 2 = \log 0{,}04306 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Då dessa exempel valts fullkomligt godtyckligt, kunna vi inlägga mening i att använda vilka positiva eller negativa bråk som helst till exponenter eller logaritmer. Vi få därmed bekräftelse på, att *om exponenten eller logaritmen ökas eller minskas med 2, d. v. s. med log 100, så multipliceras resp. divideras talet med 100. Motsvarande gäller, om exponenten ökas eller minskas med vilket helt tal som helst.* Det inses på samma sätt.

Nu återstår att visa, varför lagarna för logaritmräkningen gälla, även om ingendera logaritmen är ett helt tal, t. ex. om vi ha

$$x = 0{,}4179 \cdot 43{,}06 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Tabellerna ge

$$\log 0{,}4179 = 0{,}6211 - 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

och

$$\log 43{,}06 = 1{,}6341 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Alltså är enligt den förklaring, vi ovan givit på en logaritm,

$$0{,}4179 = 10^{0{,}6211-1} = 1{,}00023^{6211-10000}$$

och

$$43{,}06 = 10^{1{,}6341} = 1{,}00023^{16341}.$$

Genom insättning härav i (10) erhålles i likhet med föregående

$$x = 0{,}4179 \cdot 43{,}06 = 1{,}00023^{6211-10000} \cdot 1{,}00023^{16341} =$$
$$= 1{,}00023^{6211-10000+16341} = 10^{0{,}6211-1+1{,}6341}$$

$$\log x = 0{,}6211 - 1 + 1{,}6341 \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Med stöd av (10) — (12) ger (13)

$$\log(0{,}4179 \cdot 43{,}06) = \log 0{,}4179 + \log 43{,}06 \quad (14)$$

Logaritmen för produkten är sålunda = summan av logaritmerna för faktorerna. Samma tankegång kan nämligen upprepas med vilka positiva tal som helst, varför vi kunna sätta

$$\log a + \log b = \log ab, \text{———} \quad (15)$$

där a och b få vara vilka positiva tal som helst. Införa vi beteckningen

$$ab = c,$$

så blir

$$b = \frac{c}{a}$$

och (15) ger

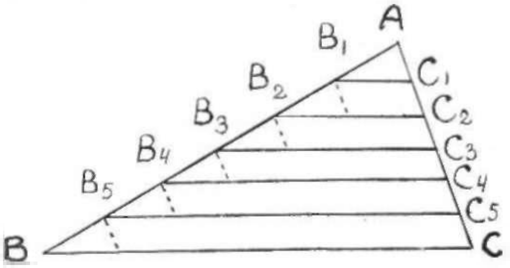
$$\log a + \log \frac{c}{a} = \log t$$

$$\therefore \quad \log \frac{c}{a} = \log c - \log a. \text{———} \quad (16)$$

Härav följer, *att logaritmen för en kvot är = logaritmen för dividenden minskad med logaritmen för divisorn.* Således ha vi fått bekräftelse på våra logaritmlagar.

Proportionalitet

I vidstående figur dela vi linjen AB i 6 lika stora delar och draga från delningspunkterna linjer parallella med BC. Dessa dela även AC i 6 lika delar, vilket man geometriskt kan bevisa, eller också kan man genom mätning övertyga sig om, att även AC:s delar äro lika, som vi sålunda förutsätta att vi veta. Den, som vill bevisa saken, kan ha ledning av de prickade linjerna och trianglarnas kongruens samt likheten mellan motstående sidor i en parallellogram.



Här ha vi

$$AB_5 = \frac{5}{6} AB$$

och

$$AC_5 = \frac{5}{6} AC,$$

AB_5 är sålunda lika stor del av AB som AC_5 av AC. Tänka vi på ABC, så avskär den med basen

BC parallella linjen B_5C_5 *lika stor bråkdel* av AB och av AC, nämligen $\frac{5}{6}$ av vardera. *De avskurna delarna AB_5 och AC_5 sägas nu vara proportionella mot sidorna AB och AC.* De äro ju förminskade *i samma proportion,* nämligen proportionen eller förhållandet 5 till 6 eller 5 : 6. Likaså kunna givetvis ett par storheter ökas i samma proportion, såsom om vi dragit den med BC parallella linjen utanför triangeln.

Vi ha alltså

$$\frac{AB_5}{AB} = \frac{AC_5}{AC}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

eftersom vartdera bråket i (1) är $\frac{5}{6}$, och att de fyra linjerna äro proportionella utsäges genom (1).

I praktiken ha vi *kartan* som exempel på proportionalitet. Avståndet mellan två orter på kartan är alltid lika stor del av motsvarande avstånd på jordytan, vilka punkter vi än välja — eller åtminstone så nära lika stor del, som det är möjligt att åstadkomma på kartan, fastän jordytan är buktig och kartan plan. Men den felkällan spelar så liten roll, att vi kunna betrakta kartan som en proportionellt förminskad bild av jordytan. Och om en sträcka *på kartan* är t. ex. 4/7 av en annan, så är också *i verkligheten* den förra sträckan 4/7 av den senare.

Proportionen mellan ett avstånd på kartan och jordytan benämnes *skala.* På generalstabens karta motsvaras 1 km. av 1 cm. Varje längd är således 100 000 gånger så liten på kartan, och skalan är

1 : 100000.

I fysiken ha vi åtskilliga exempel på proportionalitet, såsom *gasers tryck och täthet.* Väl gäller här samma sak som vad vi nyss sade om kartan, nämligen att proportionaliteten ej är fullständig, men den är för en och samma gas fullständigare vid högre temperatur och för olika gaser fullständigare ju svårare gasen är att förtäta till vätska. Således är proportionaliteten vid vanlig temperatur så gott som fullständig för luft, d. v. s. syre och kväve, men ej för vattenånga. Vi välja därför luft som exempel.

Vid normalt barometerstånd, d. v. s. då kvicksilverpelaren i barometern står på 760 mm., väger 1 liter 0-gradig luft 1,293 gr., och 760 mm. tryck säges utgöra en atmosfär. På ett laboratorium kan man fördubbla trycket till 2 atm. eller $2 \cdot 760$ mm., tredubbla det till 3 atm. eller $3 \cdot 760$ mm. o. s. v. Vid 2 atm. pressas luften ihop, så att 1 lit. väger $2 \cdot 1{,}293 = 2{,}586$ gr. Vid 3 atm. blir vikten $3 \cdot 1{,}293 = 3{,}879$ gr. *Således är tätheten — eller vikten av 1 lit. — proportionell mot trycket.*

Men vi kunna hålla oss till lägre tryck. Ökas trycket från 760 till 768 mm., så blir det $\frac{768}{760}$ av det ursprungliga, och då blir på grund av proportionaliteten även specifika vikten, d. v. s. vikten i gram av 1 liter,

$$\frac{768}{760} \cdot 1{,}293 = 1{,}307.$$

Ha vi en liter luft vid 1 atm., och ökas trycket till 2 eller 3 atm., så pressas vår luftmängd ihop till $\frac{1}{2}$, resp. $\frac{1}{3}$ l. När vi sålunda få dividera volymen med samma tal, varmed vi multiplicera trycket, säges volymen vara *omvänt proportionell* mot trycket. Ökas trycket från 760 till 768 mm., så blir det som sagt $\frac{768}{760}$ ggr så stort, och då blir den ursprungliga litern av vår luft $\frac{768}{760}$ ggr så liten, d. v. s.

$$\frac{768}{760} = \frac{760}{768}.$$

Ett annat område, som ger oss exempel på proportionalitet, är *akustiken* eller ljudläran. Vid ett piano eller en fiol måste varje sträng spännas lagom för att ge den rätta tonhöjden, d. v. s. utsända det rätta antalet ljudvågor pr sekund, så att örat uppfattar den önskade tonen. Ju mer vi skruva åt en dylik sträng, desto större blir dess spänning, och desto högre blir tonen, d. v. s. desto större blir svängningstalet. Men vi ha en apparat, *monokordet*, vid vilken vi i stället kunna åstadkomma strängens spänning genom att i dess ena ända hänga upp den vikt, vi önska. Ju tyngre vikt, desto starkare spänning och desto flera svängningar pr sekund. Men svängningstalet beror dessutom av strängens längd, diameter och specifika vikt. Vi tänka oss dessa tre faktorer vid vår sträng avpassade så, att en belastning av 1 kg. ger ett svängningstal av 435 (pr sek.) eller den s. k. *normaltonen* (a). Ändra vi spänningen, d. v. s. den påhängda vikten, visar det sig, som vi finna i fysiken, att vi få följande resultat:

Spänning.	Svängningstal.
0,25 kg.	$217{,}5 = 0{,}5 \cdot 435 = \sqrt{0{,}25} \cdot 435$
0,5 „	$307{,}5 = 0{,}707 \cdot 435 = \sqrt{0{,}5} \cdot 435$

1	kg.	435
2	„	$615 = 1{,}414 \cdot 435 = \sqrt{2} \cdot 435$
3	„	$753{,}5 = 1{,}732 \cdot 435 = \sqrt{3} \cdot 435$
4	„	$870 = 2 \cdot 435 = \sqrt{4} \cdot 435$

Svängningstalet är här tydligen *proportionellt mot kvadratroten ur spänningen.* Om vi sålunda veta, att spänningen vid nyss nämnda sträng är 7,3 kg., kunna vi beräkna svängningstalet till

$$\sqrt{7{,}3} \cdot 435 = 2{,}702 \cdot 435 = 1175.$$

Likaså lär oss fysiken, att svängningstalet är *omvänt proportionellt* mot strängens längd, mot dess diameter och mot kvadratroten ur dess specifika vikt. Utbyta vi sålunda vår sträng mot en annan med dubbelt så stor längd, hälften så stor tjocklek och 4 gånger så stor spec. vikt men spänningen fortfarande 7,3 kg., få vi dividera svängningstalet 1175 med 2 på grund av att strängens längd blir 2 ggr så stor, vidare med 0,5, emedan strängen får 0,5 ggr så stor genomskärning, och med $\sqrt{4}$, eftersom spec. vikten fyrdubblas, varför svängningstalet blir

$$\frac{1175}{2 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{4}} = 587{,}5.$$

Här ovan angivna svängningstal äro dock mer avkortade än ett musikaliskt öra skulle godkänna.

Från *elektricitetsläran* taga vi följande exempel. Om vi koppla in en koppartråd av viss längd i ett elektriskt element, t. ex. elementet från en ficklampa, får den elektriska strömmen en viss styrka, t. ex. 1 ampère (uttalas ampär med tonvikten på ä). Hur mycket en ampère är, kunna vi ej här inlåta oss på, men det är den enhet, vari strömstyrkan mätes. Taga vi en lika lång koppartråd som nyss men med dubbelt så stor genomskärningsyta, kan dubbelt så mycket elektricitet flyta fram pr sekund, och strömstyrkan blir 2 ampère (förkortat: amp.).[1] Göres trådens genomskärningsyta 3 eller 3,5 gånger så stor, blir strömstyrkan 3 amp., resp. 3,5 amp. *Strömstyrkan är sålunda proportionell mot trådens genomskärning,* förutsatt att vår koppartråd ständigt har samma längd.

I regel är trådens genomskärning cirkelrund. Har en cirkel dubbelt eller tredubbelt så stor radie, är dess yta 4, resp. 9 gånger så stor. Vi ha således *genomskärningsytan proportionell mot kvadraten på radien.* Därmed blir också *strömstyrkan proportionell mot kvadraten på radien.*

Nu tänka vi oss däremot, att trådens tjocklek är den ursprungliga men dess längd fördubblas. En dubbelt så lång koppartråd gör dubbelt så stort motstånd mot den elektriska strömmen, och blott hälften så mycket elektricitet kan flyta fram pr sekund. Strömstyrkan minskas sålunda från 1 amp. till $\frac{1}{2}$ amp. Är tråden 3 ggr så lång som från början, blir strömstyrkan 3 gånger så liten, d. v. s. 1/3 amp. eller 0,33 amp. Eftersom strömstyrkan *minskas* i samma proportion, som trådens längd *ökas,* är *strömstyrkan omvänt proportionell mot trådens längd.*

När trådens längd fördubblas, blir det som sagt dubbelt så svårt att driva fram elektriciteten, varför vi säga, att *motståndet* fördubblas. Motståndet är följaktligen *proportionellt mot trådens längd.* Fördubblas i stället trådens snittyta, får elektrici-

[1] Egentligen borde även elementet ändras, så att elektriciteten dubbelt så lätt kommer fram även där. Men vi se bort från den lilla felkällan.

teten blott hälften så svårt att komma fram, varför motståndet halveras. ***Motståndet är sålunda omvänt proportionellt mot trådens genomskärningsyta.*** Den enhet, vari vi mäta motståndet, benämnes *ohm*. Nu släppa olika kroppar olika lätt fram den elektriska strömmen, och kvicksilver har det minsta motståndet. Från början var det meningen att låta en *ohm* betyda motståndet hos en kvicksilverpelare av 1 m. längd och 1 kvmm. genomskärning vid 1°, ehuru detta blott ungefär stämmer, då man hade mindre fullkomliga mätningsmetoder på den tid då det fastslogs hur mycket 1 ohm skulle vara.

Motståndet vid 0° C av en kropp med en längd av 1 m. och en genomskärning av 1 kvmm. benämnes kroppens *specifika ledningsmotstånd*. Vi anföra några exempel härpå.

Ämne	Specifikt ledningsmotstånd
Silver (Ag)	0,015 ohm.
Koppar (Cu)	0,017 „
Bly (Pb)	0,20 „
Kvicksilver (Hg)	0,943 „

Nu kunna vi beräkna motståndet hos en koppartråd av längden 17,3 m. och genomskärningen 1,2 kvmm. Vore trådens längd 1 m. och dess genomskärning en kvmm., så vore motståndet enligt vår tabell 0,017 ohm. Eftersom motståndet är proportionellt mot längden, är det för en tråd av 17,3 m. längd och 1 kvmm. genomskärning

$$17{,}3 \cdot 0{,}017 = 0{,}2941 \text{ ohm.}$$

Har tråden nämnda längd och 1,2 kvmm. genomskärning, blir motståndet 1,2 ggr så litet som nyss, eftersom motståndet är omvänt proportionellt mot genomsnittet, således:

$$\frac{17{,}3 \cdot 0{,}17}{1{,}2} = 0{,}2451 \text{ ohm.}$$

Vi övergå nu från beräkningen av motstånd till att beräkna strömstyrkan. Vi tänka oss, att vi i ett och samma element utbyta tråden mot en tråd med dubbelt så stort motstånd. Då kan blott hälften så mycket elektricitet komma fram pr sekund, och strömstyrkan blir hälften så stor. Var den förut 3 amp., blir den nu 1,5 amp. Taga vi en tråd med 3,4 ggr så stort motstånd, blir strömstyrkan 3,4 ggr så liten eller

$$\frac{\text{[illegible]}}{3{,}4} = 0{,}88 \text{ amp.}$$

Detta innebär, att *strömstyrkan är omvänt proportionell mot motståndet.*

Men vi kunna också i stället för vårt element använda ett annat, dubbelt så kraftigt. Då drives dubbelt så mycket ström fram, d. v. s. strömstyrkan fördubblas, förutsatt att samma ledningstråd användes. Och det finns olika slags element av olika styrka, förutom att elektrisk ström kan alstras av andra apparater än elektriska element. Den styrka, varmed energikällan producerar elektricitet, benämnes elektrisk *spänning* eller *potential* och mätes i *volt.* Enheten för volt har i samband med enheterna för ampere och ohm valts så, att *med 1 volt menas den spänning, som är lagom stark för att alstra en ström på 1 amp. vid ett motstånd av 1 ohm.* Och ju starkare spänning, desto starkare ström, så att *strömstyrkan är proportionell mot spänningen.* Ha vi ett motstånd på 1 ohm, alstrar således en spänning på 1,5 volt en strömstyrka på 1,5 ampere. Men med en tråd på 2 ohms motstånd ger en spänning på 1,5 ohm hälften så stor strömstyrka eller

$$\frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ ampère},$$

eftersom strömstyrkan är omvänt proportionell mot motståndet. Använda vi i stället ovan nämnda tråd med motståndet 0,2451 ohm, få vi ersätta 2 med 0,2451 i nämnaren för att få den omvända proportionaliteten, och strömstyrkan blir med 1,5 volt spänning

$$\frac{1,5}{0,2451} = 6,12 \text{ amp.}$$

I nästa kap. få vi exempel på att proportionerna blott kunna göras ungefär riktiga, emedan vi måste avjämna svaren till hela tal.

Proportionella val

Vi tänka oss ett val, t. ex. till riksdagen. Och vi antaga att en valkrets skall sätta till 10 representanter, samt att vi ha två listor med tio namn på vardera. Den ena får 600 röster, den andra 400. Enligt den gamla metoden med *majoritetsval* ansågs, att då var och en av de tio på den förra listan hade flera röster än någon på den senare, hade de förstnämnda tio i högre grad valmännens förtroende och måste därför bli valda. Vid de proportionella valen är tankegången, att varje lista bör få sätta in representanter i proportion mot sitt röstetal, således kräver rättvisan, att de 600 valmännen få 6 mandat, de 400 valmännen 4 mandat.

Så enkel är dock saken ej i praktiken, då röstetalen ej bli jämna mångfalder av platserna. Om vi fortfarande tänka oss 1000 röster men 654 på den ena listan och 346 på den andra, så finge vi proportionalitet genom att den förra tillsatte 6,54 platser och den andra 3,46. Då blir frågan, om vi skola jämna av till 7 och 3 platser eller 6 och 4. Den, som angivit en metod att lösa dylika problem, är den belgiske professorn *D'Hondt*, vars metod antagits även i svensk lag med åtskilliga jämkningar. Vi skola nu gå igenom ett exempel på ett sådant val.

Därvid ha vi först att tala om *partibeteckningen.* Om t. ex. en högerman ej får in någon eller ej så många av dem han röstar på, förutsättes han i alla fall vara mer belåten med att få en högerman från en annan lista vald än t. ex. en socialist. För att de röstande av ett parti skola kunna hålla tillsammans och hjälpa varandra, utsättes *partibeteckning* över namnen på listan. Och det kan hända, att frisinnade m. fl. hellre samarbeta med högern än med arbetarpartiet. Då kunna de enas om gemensam *kartellbeteckning* eller *överpartibeteckning* i hopp att därmed vinna någon plats åt sig själva eller ett närstående parti. Dessutom kan ett parti dela upp sig i *underpartier,* vart och ett med sin *fraktionsbeteckning,* men den saken befatta vi oss ej med i följande exempel, då den ej innebär någon annan princip än rätten till kartellbeteckning utan blott leder till ytterligare räkningar av samma slag.

Vi nöja oss i vårt exempel med fyra partier, av vilka moderata och frisinnade slutit sig tillsammans med kartellbeteckningen "Fram till val" samt socialdemokrater och kommunister hålla ihop som "Arbetarpartiet". Vi antaga, att 10 representanter skola väljas inom valkretsen. Är ett parti så stort, att det har hopp om alla platserna, sätter det upp 12 namn för att i händelse av förfall för en eller två av de valda ha två suppleanter, varom mera längre fram. Men i regel gör vissheten om medpartiernas utsikt till några platser, att det är lönlöst att ens komma med 10 namn på en lista.

Hos de moderata tänka vi oss två skilda listor för att få exempel på den saken. Hos socialdemokraterna antaga vi att en del strukit första och tredje namnet, så att i verkligheten två listor uppstått, en med och en utan dessa namn. Hur listorna se ut, finna vi å sid. 133. Och vi låta dem ha följande röstetal.

Fram till val.		Arbetarpartiet.	
Mod. I	5191	Soc. I	4213
Mod. II	2324	Soc. II	2984
Frisinn.	2039	Komm.	2177
	9554		9374

Här se vi, att röstetalet för vardera kartellen blir så nära lika, att vi kunna vänta oss 5 mandat på vartdera hållet. Men vi skola räkna ut saken noggrant. Enligt D'Hondts regel, vars formulering vi strax komma till, placera vi *ett mandat i taget.* Skulle blott en representant utses, tillkommer den de borgerliga, d. v. s. "Fram till val", som har större sammanlagt röstetal än arbetarna.

Sedan tänka vi oss, att platsernas antal är två. "Fram till val" har redan fått en och, om kartellen även finge den andra, kunde man säga att hälften av de 9554 väljarna eller 4777 tillsatte den ena platsen och de återstående 4777 den andra. Men då kräver rättvisan, att i stället de 9374 arbetarna få platsen, eftersom de äro fler än 4777.

Således få de borgerliga första platsen och arbetarna den andra. Nu antaga vi, att antalet platser är tre, varför vi av samma skäl som nyss räkna ut, att halva antalet arbetarröster är 4687. Detta är mindre än halva de borgerligas röstetal, vilket vi nyss beräknade, och de borgerliga få två platser, d. v. s. även plats n:r III.

Men vart går plats n:r IV?

De borgerliga ha redan fått platserna I och III. Finge de dessutom n:r IV, erhölle de tre platser, vilket utgör en plats på varje tredjedel av deras väljare, varför vi dividera deras röstetal med 3. Vid varje dylik division föreskriver lagen, att vi skola *stanna vid två decimaler och alltid jämna av nedåt,* alltså

$$9554 : 3 = 3184{,}66.$$

Väl vore det närmare riktigt att sätta 7 hundradelar, men att aldrig höja är bekvämare, och den lilla förlusten av en hundradels röst kan drabba det ena partiet lika väl som det andra. Tydligen är de borgerligas *jämförelsetal* (så benämna vi det tal, vi vid varje tillsättning ha att räkna med, d. v. s. här 3184,66) mindre än 4687, vilket vi funno vara arbetarnas jämförelsetal, och fjärde platsen går till arbetarna.

Den metod, vi här följt, benämnes *D'Hondts regel* och innebär, att för tillsättningen av varje plats *ett jämförelsetal beräknas genom att dividera partiets (kartellens, gruppens eller listans) röstetal med en enhet mer än det antal platser det erhållit* (d. v. s. med det antal platser vi skola undersöka om det har rätt till) *och ständigt låta mandatet gå dit, där största jämförelsetalet finnes.*

De resultat, vi hittills nått fram till, sammanföra vi i följande halvfärdiga tabell, som vi sedan skola komplettera. Vi sätta ut de olika jämförelsetalen, vi fingo av partiets röstetal, dettas hälft o. s. v. Framför ett jämförelsetal skriva vi en romersk siffra, som anger numret på den plats, kartellen får på dithörande jämförelsetal. Tabellen blir sålunda:

Fram till val.		Arbetarpartiet.	
I.	9554	II.	9374
III.	4777	IV.	4687
	3184,66		

Av utrymmesskäl ställa vi upp tabellen först nu, när vi förklara tankegången. Men vid de praktiska räkningarna sätta vi först ut blott jämförelsetalen 9554 och 9374, sedan jämförelsetalet 4777 o. s. v., allt eftersom de behövas. Och platsnumren sättas också dit ett och ett, så snart vi funnit dem. Skulle blott fyra platser tillsättas, få vi tydligen intet n:r framför det sist tillskrivna talet 3184,66, emedan fjärde platsen i stället går till arbetarna. Men vid tillsättningen av femte platsen ha de borgerliga nytta av nämnda tal, vilket vi se om vi fortsätta räkningarna och dividera arbetarnas röstetal med 3 som i tabellen här nedan. Därpå utföra vi divisionerna steg för steg enligt D'Hondts regel och sätta ut platsnumren, tills tabellen får följande utseende:

Fram till val.		Arbetarpartiet.	
I.	9554	II.	9374
III.	4777	IV.	4687
V.	3184,66	VI.	3124,66
VII.	2388,5	VIII.	2343,5
IX.	1910,8	X.	1874,8
	1592,33		

Tabellen visar tydligen, att fem mandat komma på vartdera hållet. Vi ha nu först att fördela de borgerligas fem mandat mellan de moderata och de frisinnade, varför vi summera rösterna på de bägge moderata listorna och skriva upp vartdera partiets röstetal och efter hand hälften därav, tredjedelen och vilka delar som behövas samt romerska siffror som nummer på de platser, man erhåller på resp. jämförelsetal.

Mod.		Fris.	
I.	7515	IV.	2039
II.	3757,5		1019,
III.	2505		
V.	1878,75		

De moderata få sålunda 4 platser och de frisinnade 1.

Likaså summera vi röstetalen på socialdemokraternas listor och jämföra med kommunisterna samt utföra steg för steg erforderliga divisioner.

Soc.		Komm.	
I.	7197	IV.	2177
II.	3598,5		1088,5
III.	2399		
V.	1799,25		

Socialdemokraterna få sålunda 4 platser och kommunisterna 1.

Nu återstår att se, vilka kandidater inom de olika partierna bli valda. Vi tänka oss följande listor och upprepa under dem ovan angivna röstetal.

Fram till val.
Moderata.
Direktör J. Ståhl
Fru Julia A. Andersson
Pastor J. Blomstrand
Major A. Nygren
Assessor P. Strömvall
Notarien V. Forsell

5191

Fram till val.
Moderata.
Kapten B. Ström
Fröken Anna K. Noren
Verkmästare G. Lundgren
Fru Sofi F. Lind

2324

Fram till val.
Frisinnade.
Professor B. Holm
Lektor H. Svensson
Fröken Ester N. Persson
Sergeant F. Nord

2039

Arbetarpartiet.
Soc.dem.
Snickare O. Jansson
Målare F. Andersson
Skomak. P. Johansson
Fröken Vera N. Ström
Lok-för. I. F. Pettersson
Målare H. Stensson

4213

Arbetarpartiet.
Soc.-dem.
Målare F. Andersson
Fröken Vera N. Ström
Lok.för. I. F. Pettersson
Målare H. Stensson

2984

Arbetarpartiet.
Kommunister.
Skrädderiarb. K. Gustavsson
Plåtslagare N. Hansson
Brovakt K. Lundström
2177

Lagen stadgar, att vid tillsättning av en plats *endast skall räknas med första ännu icke valda namn på varje lista.* Först av de *moderata* segrar sålunda *Ståhl* över Ström med 5191 mot 2324. Får första listan dessutom tillsätta *Andersson, som efter Ståhls val är dess första icke valda namn,* betyder det, som vi förut sett, att halva röstetalet eller 2595,5 sätter till henne och andra hälften Ståhl. Hon får således platsen före Ström, som blott har 2324 röster. Vi fortsätta fördelningen för de moderata enligt D'Hondts regel och utsätta de valdas namn inom parentes.

I.	5191 (*Ståhl*)	III.	2324 (*Ström*)
II.	2595,5 (*Andersson*)		1162
IV.	1730,33 (*Blomstrand*)		

De frisinnade få till sin enda representant *Holm,* listans första namn.

Besvärligare bli räkningarna med *socialdemokraternas* fyra platser, eftersom deras andra lista uppkommit genom strykning av två namn på huvudlistan. Först går *Jansson* in med högsta jämförelsetalet. Att Andersson även står på stora listan och således sammanlagt har flera röster än Jansson, kan enligt lag ej tagas hänsyn till, ty man räknar som sagt varje gång endast med första icke valda namn på listan. Men efter Jansson går *Andersson* in som enda icke valda första namn. Sedan blir frågan, hur många representanter vardera listan skall anses ha tillsatt. Andersson kan sägas ha fått $4213 : 2 = 2106,5$ röster från första listan och 2984 från den andra eller tillsammans 5090,5 röster. Den första listan har således blott tillsatt en del av honom, nämligen

$$\frac{2106,5}{5090,5} = 0,41.$$

Den andra listans andel i honom blir

$$\frac{2984}{5090,5}$$ [illegible]

Divisionerna kontrolleras genom att summera kvoterna. Summan av andelarna blir dock ej 1, utan 0,99, beroende på att vi på vartdera hållet följt lagens föreskrift och jämnat av hundradelarna nedåt.

Huvudlistan har alltså satt in 1,41 repr. och särlistan 0,58. Vi ha nu att undersöka, vilkendera som har rätt till nästa plats. d. v. s. om den första har rätt till 2,41 platser eller den andra till 1,58. Få de 4213 valmännen tillsätta 2,41 platser, blir det

[illegible]
$$\frac{\quad}{2,41}$$

valmän pr representant. För den andra listan få vi på samma sätt jämförelsetalet

$$\frac{2984}{1,58} = 1888,60.$$

Första icke valda namn där, *Ström*, har således högre jämförelsetal än Johansson och går in som tredje namn. Hade hon fått mindre jämförelsetal från listan n:r 2, hade hon ej gått in som n:r III, d. v. s. ingen hänsyn hade enligt lag kunnat tagas till att hon dessutom förekommer efter Johansson på huvudlistan, emedan man vid varje sammanräkning blott tänker på listans första ännu icke valda namn.

Till fjärde platsen kommer striden att stå mellan Johansson och Pettersson. Den förres jämförelsetal ha vi funnit vara

1748,13

och den senares blir enligt samma resonemang som nyss

2084

Johansson får således platsen. Ström måste betraktas som obefintlig på huvudlistan, då hon redan är vald utan medverkan av densamma, vilken därför enligt lag ej anses ha tillsatt någon del av henne.

Sedan återstår kommunisterna. De få en representant, alltså *Gustavsson.*

Vi ha talt om partiernas sammanslutning till karteller. Betydelsen därav är, att när ett parti får ett visst antal platser, hade det i allmänhet kunnat få samma antal med något färre röster, och överskottsrösterna skulle blott räcka till en bråkdel av en riksdagsman. Men sammanlagda antalet överskottsröster för t. ex. de olika borgerliga partierna kunna stundom förslå att inom valkretsen erövra ett helt mandat från arbetarna. Då t. ex. de moderata dels ha hoppet att själva få överskottsmandatet, dels hellre se att ett dylikt går till de frisinnade än till arbetarna, är det naturligt att de sluta sig tillsammans liksom att socialdemokrater och kommunister svara med att göra likadant.

Nu ett exempel på val med och utan kartell, då vi som förut skriva ut under varje parti dels valsiffror och jämförelsetal, dels framför varje jämförelsetal mandatets nummer. Vi tänka oss tre platser att besätta.

Mod.	Fris.	Soc.	Komm.
I. 514	255	II. 509	III. 258
257		254,5	

Sammansluta sig moderata och frisinnade, blir resultatet

Fram till val.	Soc.	Komm.
I. 769	II. 509	258
III. 384,5	254,5	

De borgerliga få sålunda 2 mandat, vilka bägge enligt första tabellen inses tillfalla de moderata, vilka bli det parti, som vunnit på sammanslutningen.

Men om arbetarna också enat sig? Låt oss se, hur det då gått.

Fram till val.	Arbetarpartiet.
I. 769	II. 767
III. 384,5	383,5

Arbetarna hade ej rått på de enade borgarna. Men en annan gång kunde siffrorna ha varit sådana, att de vunnit ett mandat genom sin kartell. Och i 28 valkretsar vore det en egendomlig slump, om de aldrig skulle göra det. När lagen ger rätt till karteller, är det sålunda naturligt, att vardera parten begagnar sig därav, då man vet, att motparten i alla fall kan göra det.

Nu återstår blott att säga ett par ord om *suppleanter,* som skola ersätta avgående representanter.

Antingen kunna på en riksdagsmannalista två suppleanter utsättas för varje namn, och då bör naturligtvis den första av den avgåendes suppleanter i främsta rummet komma i fråga och endast vid förfall även för honom den andra. Eller också förekomma inga personliga suppleanter. I så fall kan genom ett streck på listan suppleanterna avskiljas från kandidaterna. Men utsättes intet dylikt streck, betraktas första icke valda namn som första suppleant. Och till efterträdare utses den, vilken förekommer som första suppleant på de flesta av de valsedlar, som nedlagts i valurnan och upptaga den avgåendes namn.

Aritmetiska serier

I uttrycket

$$s = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 \ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

är tydligen skillnaden mellan två närliggande termer alltid 3. Så snart *skillnaden* mellan en term och den föregående ständigt är lika, säga vi, att vi ha en *aritmetisk serie*. För att beräkna summan enkelt skriva vi serien först med termerna ordnade som ovan och sedan med termerna i omvänd ordning samt addera, varvid vi få[1]

$$\begin{aligned} s &= 4 + 7 + 10 + \ldots + 19 + 22 \ldots\ldots \quad (1b) \\ s &= 22 + 19 + 16 + \ldots + 7 + 4 \ldots\ldots \quad (2) \\ \hline \therefore\ 2s &= 26 + 26 + 26 + \ldots + 26 + 26 \end{aligned}$$

Då termernas antal är 7, erhålles

$$2s = 7 \cdot 26$$

och

$$s = 7 \cdot 13 = 91.$$

Summan av termerna blir sålunda 91.

Är serien ej fullständigt utskriven, som den är i (1a), utan fattas mellantermerna som i (1b) eller (2), beräknas termernas antal sålunda. Skillnaden i (1b) fås omedelbart att vara 3. Sista termen erhålles genom att öka den första med $18 = 6 \cdot 3$,

[1] För att slippa besväret att skriva ut alla termerna sätta vi en rad punkter, där vi utlämnat mellantermerna, men hålla reda på termernas antal.

d. v. s. vi få sista termen genom att till den första addera 6 gånger skillnaden. Då vi få varje följande term genom att till den föregående addera skillnaden, innebära de 6 additionerna, att vi ha 6 termer förutom den första, således 7 termer.

Intet hindrar, att skillnaden i en aritmetisk serie är ett bråk eller såsom i (2) ett negativt tal.

Ett exempel. *En person skall vänja sig av med att röka. Den tobak, han brukat köpa pr vecka, delar han nu upp på 8 dagar, nästa gång på 9 dagar o. s. v. tills han kommit till 20 dagar. Då förmår han sluta. Hur lång tid tar det att bli kvitt ovanan?*

Summan av dagarna blir

$$\begin{array}{rl} s = & 8 + 9 + 10 + \ldots + 19 + 20 \\ s = & 20 + 19 + 18 + \ldots + 9 + 8 \\ \hline 2s = & 28 + 28 + 28 + \ldots + 28 + 28 \end{array}$$

Då skillnaden är 1 och 20 är 12 mer än 8, är termernas antal 12 förutom den första, d. v. s. 13, och vi få

$$2s = 13 \cdot 28$$
$$s = 13 \cdot 14 = 182.$$

Han behöver *182 dagar.*

Geometriska serier

I serien

$$s = 2 + 6 + 18 + 54 \text{ ———}$$

är kvoten mellan en term och den föregående ständigt 3. När *kvoten* sålunda hela vägen är densamma, säga vi, att vi ha en *geometrisk serie.* Vi få varje term genom att multiplicera den föregående med kvoten 3, således den tredje genom att multiplicera den andra med 3 eller multiplicera 3 gånger den första med 3, d. v. s. multiplicera den första med $3 \cdot 3$ eller 3^2. Likaså få vi den fjärde genom att multiplicera den första med 3^3 och den femte genom att multiplicera den första med 3^4. Är termernas antal 5, kan följaktligen serien skrivas

$$s = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 \; \ldots \; (1)$$

eller

$$s = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \text{ ——— } (1b)$$

För att beräkna summan multiplicera vi med kvoten och erhålla därvid följande uttryck:

$$3s = 6 + 18 + 54 + 162 + 486 \; \ldots . \; (1c)$$

Minskas (1c) med (1b), gå mellantermerna i högra ledet bort, och det återstår blott att minska 486 med 2, således

$$2s = 486 - 2 = 484$$

och

$$s = 242.$$

Resultatet hade blivit detsamma, om vi skrivit serien under formen (1) i stället. Då hade vi genom att här nedan subtrahera den övre likheten från den undre fått

$$\begin{array}{rl} s = & 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 \\ 3s = & \phantom{2 +{}} 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 \\ \hline 2s = & 2 \cdot 3^5 - 2 = 2 \cdot 243 - 2 = 2 \cdot 242 \end{array}$$

$$s = 242.$$

I en geometrisk serie kan kvoten även vara negativ, t. ex.

$$s = 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^5 \ldots\ldots \quad (2)$$

Kvoten är här -3, men det är bekvämast att multiplicera med $+3$ och *addera uttrycken,* varvid räkningarna bli

$$\begin{array}{rl} s = & 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^5 \\ 3s = & \phantom{2 -{}} 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 - 2 \cdot 3^6 \\ \hline 4s = & 2 - 2 \cdot 3^6 = 2 - 2 \cdot 729 \\ 2s = & 1 - 729 = -728 \end{array}$$

$$s = -364.$$

Hade termernas antal varit udda, så hade summan blivit positiv, vilket lätt inses.

Likaså kan kvoten vara ett bråk, t. ex. $\frac{1}{2}$ i serien

$$s = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \frac{5}{32} \text{ ——} \quad (3)$$

Subtrahera vi serien från dubbla serien, få vi

$$
\begin{array}{rl}
2s = & 10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} \\
s = & \phantom{10 +{}} 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \frac{5}{32} \\
\hline
s = & 10 - \frac{5}{32} = 9\frac{27}{32} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3b)
\end{array}
$$

Hade i stället kvoten varit $-\frac{1}{2}$, så att vi haft

$$s = 5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{8} + \frac{5}{16} - \frac{5}{32} \quad \text{———} \quad (4)$$

så hade vi fått *addera* nedanstående serier:

$$
\begin{array}{rl}
s = & \phantom{10 -{}} 5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{8} + \frac{5}{16} - \frac{5}{32} \\
2s = & 10 - 5 + \frac{5}{2} - \frac{5}{4} + \frac{5}{8} - \frac{5}{16} \\
\hline
3s = & 10 - \frac{5}{32}
\end{array}
$$

$$s = 3\frac{1}{3} - \frac{5}{96} = 3\frac{27}{96} = 3\frac{9}{32} \quad \text{———} \quad (4b)$$

I de båda sista exemplen ligger kvoten mellan $+1$ och -1, varav följer, att termerna bli allt mindre och mindre och komma allt närmare och närmare noll, ju längre vi fortsätta serien. I (3) kunna vi sålunda som 7:e term tillfoga $\frac{5}{64}$, och då se vi lätt, att summan blott understiger 10 med $\frac{5}{64}$

i stället för $\frac{5}{[illegible]}$ i (3b). Med ännu en term blir underskottet $\frac{5}{128}$ under 10, o. s. v. Summan närmar sig sålunda mer och mer 10, ju flera termer vi medtaga, och då säga vi, att 10 är *gränsvärdet,* om vi taga med oändligt många termer eller *göra serien oändlig.* Vi sätta sålunda

[illegible]

Punkterna efter sista termen beteckna här, att serien är oändlig, och de få ej förväxlas med att vi t. ex. i den ändliga serien (3) satt ut punkter för att hänvisa till 3:an inom parentesen som nummer.

Likaså kunna vi göra serien (4) oändlig. För att beräkna det allmänna uttrycket av en oändlig serie tänka vi oss en serie med n termer, där vi sätta ut punkter i stället för de ej utskrivna termerna före aq^{n-1}:

$$
\begin{array}{rl}
s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} & \quad \ldots (5) \\
qs = \phantom{a +{}} aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n & \\
\hline
(q-1)s = aq^n - a = a(q^n - 1) &
\end{array}
$$

Genom subtraktion erhålles

$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \qquad \text{———————} \quad (5b)$$

Är $q < 1$, subtrahera vi i stället den första ekv. från den andra, och slutresultatet blir

$$s = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \qquad \text{———————} \quad (5c)$$

I (4) ha vi, om termernas antal är n,

$$a = 5;\ q = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ s = \frac{5\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 + \frac{1}{2}}$$

Går n mot oändligheten, d. v. s. medtagas allt fler termer, kommer $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ hur nära noll som helst, och vi få som *gränsvärde*

$$s = \frac{5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{2 + 1} = 3\tfrac{1}{3}.$$

Och vilket värde q än har mellan $+1$ och -1, kunna vi göra n tillräckligt stort, för att q^n skall närma sig 0 hur mycket som helst, varför gränsvärdet av (5c) för n oändligt blir

$$s = \frac{a}{1 - q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5d)$$

Sådana oändliga serier, vilkas gränsvärde är ändligt, benämnas *konvergenta.* Om vi däremot öka på termernas antal i (1), växer summan över varje gräns. Då säges serien vara *divergent.* Även (2) är divergent. Visserligen erhålla vi vid fortsatt summering ömsevis positivt och negativt svar, men siffervärdet går i alla fall mot oändligheten.

Sammansatt ränta

I bankerna får man ett följande år ränta både på det insatta kapitalet och föregående års ränta, således *sammansatt ränta.* För att beräkna denna påpeka vi först, att t. ex. 784,23 kr. på ett år efter 5 % växer till

$$1{,}05 \cdot 784{,}23 \text{ kr.}$$

d. v. s. vi få taga 784,23 kr. en hel gång för att få med det ursprungliga kapitalet och dessutom fem hundradels gång för att få räntan. Vilket kapital vi än ha insatt mot 5 %, få vi på samma sätt multiplicera det med 1,05 för att få veta, vad det växer till på ett år. Ha vi i stället 6 %, få vi multiplicera med 1,06. Och motsvarande för annan räntefot.

Vi tänka oss nu, att vi sätta in 500 kr. vid början av ett år mot 5 %. Då ha vi vid årets slut

$$1{,}05 \cdot 500 \text{ kr.}$$

vilket tydligen också är kap. vid andra årets början och ytterligare bör multipliceras med 1,05, om vi vilja veta kap. vid andra årets slut, varvid vi få

$$1{,}05^2 \cdot 500 \text{ kr.}$$

Så kunna vi fortsätta år för år och få för varje år en ny faktor 1,05. Vi uppställa därför följande tabell, där vi för likformighetens skull säga efter 0 år i stället för i början.

Efter 0 år ——————— 500 kr.

„ 1 „ ——— $1{,}05 \cdot 500$ „

„ 2 „ ——— $1{,}05^2 \cdot 500$ „

„ 3 „ ——— $1{,}05^3 \cdot 500$ „

„ 4 „ ——— $1{,}05^4 \cdot 500$ „

För att få reda på $1{,}05^4$ begagna vi *Hedström och Rendahl, Räknetabeller,* där vi under rubriken ”Räntefaktorernas digniteter” finna uträknat med 4 decimaler det belopp, vartill en krona växer mot olika räntesatser på 1—50 år. Vi skulle i vårt ex. ha, vad kronan växer till efter 5 % på 4 år. Vi taga årtalet 4 i vänstra kanten under ”År” och gå därifrån rakt åt höger, tills vi komma mitt under 5 %, som står i översta raden. Då se vi, att

$$1{,}05^4 = 1{,}2155 \text{ kr.}$$

Och 500 kr. växer på samma tid till 500 ggr så mycket eller

$$1{,}05^4 \cdot 500 = 1{,}2155 \cdot 500 = 607{,}75 \text{ kr.}$$

Vi skola nu lära oss beräkna, vad årliga insatser på ett givet belopp förräntas till. Därvid må läsaren efter behag utföra lämpliga multiplikationer och divisioner med eller utan logaritmer,[1] då dock sista siffran i vartdera fallet kan bli olika på grund av olika avkortningar.

600 kr. insättas mot 5,5 % varje år fr. o. m. 1 jan. 1021 t. o. m. 1 jan. 1031. Vad har insättaren till godo 1 jan. 1031?

Den första insättningen förräntas på 10 år till $1{,}055^{10} \cdot 600$ kr. Den andra står blott inne i 9 år

[1] Erforderliga logaritmer finnas även å sidan efter räntefaktorernas digniteter i *Hedström och Rendahl.*

och växer till $1{,}055^9 \cdot 600$ kr. o. s. v. Den näst sista förräntas på 1 år till $1{,}055 \cdot 600$ kr. Den sista förräntas ej alls. Vi få sålunda, om vi ej skriva ut mellantermerna,

$$s = 1{,}055^{10} \cdot 600 + 1{,}055^9 \cdot 600 + \text{———} + \\ + 1{,}055 \cdot 600 + 600.$$

Här ha vi tydligen en geometrisk serie. Genom att multiplicera med $1{,}055$ och f. ö. utföra de räkningar, vi förut lärt oss vid geometriska serier, få vi

$$\begin{array}{rl} 1{,}055\,s = 1{,}055^{11} \cdot 600 + 1{,}055^{10} \cdot 600 + \ldots + 1{,}055 \cdot 600 & \\ s = \qquad\qquad\qquad 1{,}055^{10} \cdot 600 + \ldots + 1{,}055 \cdot 600 + 600 & \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore 0{,}055\,s = 1{,}055^{11} \cdot 600 - 600 = 1{,}8021 \cdot 600 - 600 = \\ = 0{,}8021 \cdot 600 = 481{,}26.$$

Här behöva vi blott räkna med första och femte leden, vilka vi multiplicera med 200 för att få bort decimalkommat.

$$11\,s = 96252$$
$$\therefore \quad s = 8750{,}18 \text{ kr.}$$

Dock bör påpekas, att detta belopp ej är fullt riktigt, emedan vi för tillräcklig noggrannhet behövt mer än fyra decimaler i tabellerna. Detta gäller även om beräkningarna i nästa kapitel.

För att kontrollera, om vi räknat ungefär rätt, må vi betänka, att vi på 10 år hunnit göra 11 insättningar, nämligen en vid *början* av vart och ett av de 10 åren 1921—30 och en elfte vid slutet av det tionde året eller början av 1931. Kapitalet är således

$$11 \cdot 600 = 6600 \text{ kr.}$$

och räntan återstoden eller $8750{,}18 - 6600 = \\ = 2150{,}18$ kr.

Då den första insatsen enligt tabellen ökats med drygt 70 % på de 10 åren, de följande med mindre och den sista ej alls, ser det rimligt ut, att summan ökats med 2150 kr., d. v. s. med inemot en tredjedel eller med drygt 30 % av våra 6600 kr.

A m o r t e r i n g

Ej sällan bruka lån gäldas genom regelbundna avbetalningar eller s. k. amorteringar, varvid inbetalningen ofta sker en gång om året men också kan verkställas t. ex. halvårsvis. Några exempel på dylik amortering.

1. *Vi låna 1000 kr. 31 dec. 1930 mot 6 % och avbetala årligen 200 kr. fr. o. m. 31 dec. 1935. Hur stor är skulden 31 dec. 1940?*

För att svara härpå ha vi att beräkna, dels vad själva skulden utan amorteringen hade vuxit till 31 dec. 1940, dels vad de olika avbetalningarna vuxit till då.

Skulden hade tydligen utan avbetalning vuxit till $1{,}06^{10} \cdot 1000$ kr. Den första avbetalningen på 200 kr. sker 1935 och är lika mycket värd som $1{,}06^{5} \cdot 200$ kr. inbetalda år 1940, vilket belopp vi få draga ifrån skulden. Övriga avbetalningar tänka vi oss likaså förräntade till 1940, således resp. på 4, 2, 1 och 0 år, innan vi draga ifrån dem. Därvid blir återstoden av skulden

$$1{,}06^{10} \cdot 1000 - 1{,}06^{5} \cdot 200 - 1{,}06^{4} \cdot 200 - \ldots - 1{,}06 \cdot 200 - 200 \qquad (1)$$

Ur tabellen få vi

$$1{,}06^{10} \cdot 1000 = 1{,}7908 \cdot 1000 = 1790{,}80 \text{ kr.} \ldots (2)$$

Därifrån skola vi draga

$$s = 1{,}06^{5} \cdot 200 + 1{,}06^{4} \cdot 200 + \ldots + 1{,}06 \cdot 200 + 200,$$

vilken summa vi beräkna som förut:

$$
\begin{array}{rl}
1{,}06\, s = & 1{,}06^6 \,.\, 200 + 1{,}06^5 \,.\, 200 + \ldots + 1{,}06 \,.\, 200 \\
s = & \qquad\qquad\quad 1{,}06^5 \,.\, 200 + \ldots + 1{,}06 \,.\, 200 + 200 \\
\hline
0{,}06\, s = & 1{,}06^6 \,.\, 200 - 200 = 1{,}4185 \,.\, 200 - 200 = \\
& = 0{,}4185 \,.\, 200
\end{array}
$$

$$6\, s = 41{,}85 \,.\, 200 \qquad (3)$$

$$s = \frac{1}{6} \,.\, 41{,}85 \,.\, 200 = 1395 \text{ kr} \qquad (4)$$

Av (1) se vi, att återstående skulden erhålles genom att minska lånet jämte ränta, som vi ha i (2), med amorteringarna jämte ränta, vilka vi finna i (4), varför *återstående skulden* blir

$$1790{,}80 - 1395 = 395{,}80 \text{ kr.}$$

---

2. *Om i föregående exempel avbetalningarna fortsätta, hur snart är lånet slutbetalt?*

I detta fall se vi tydligen, att två avbetalningar på 200 kr. ej räcka till att täcka en skuld på 395 kr. jämte ränta, utan att en mindre avbetalning dessutom kräves 3 år efter 1940 eller 31 dec. 1943. Men för övnings skull beräkna vi direkt, hur lång amorteringstid erfordras. Första avbetalningen sker 31 dec. 1935. Vi antaga nu, att sista avbetalningen sker x år efter nämnda datum och således $(x + 5)$ år efter lånets tagande. Då få vi skulden jämte ränta att vara

$$k = 1{,}06^{x+5} \,.\, 1000 \text{ kr.}$$

Genom uppdelning av de $(x + 5)$ faktorerna 1,06 i två grupper på resp. x och 5 stycken erhålla vi

$$k = 1{,}06^{x+5} \cdot 1000 = 1{,}06^{x} \cdot 1{,}06^{5} \cdot 1000 =$$
$$= 1{,}06^{x} \cdot 1{,}3382 \cdot 1000 = 1{,}06^{x} \cdot 1338{,}20 \text{ kr.} \quad ..(1)$$

Då den första amorteringen på 200 kr. förräntas i x år, den andra i $(x-1)$ år o. s. v., blir summan av amorteringarna jämte ränta

$$s = 1{,}06^{x} \cdot 200 + 1{,}06^{x-1} \cdot 200 + \ldots . + 1{,}06 \cdot 200 + 200$$

och

$$1{,}06\, s = 1{,}06^{x+1} \cdot 200 + 1{,}06^{x} \cdot 200 + 1{,}06^{x-1} \cdot 200 +$$
$$+ \text{———} + 1{,}06 \cdot 200$$

$$\therefore \; 0{,}06\, s = 1{,}06^{x+1} \cdot 200 - 200 = 1{,}06^{x} \cdot 1{,}06 \cdot 200 -$$
$$- 200 = 1{,}06^{x} \cdot 212 - 200$$

eller genom multiplikation med 50

$$3\, s = 1{,}06^{x} \cdot 10600 - 10000 \quad \text{———} \quad (2)$$

Eftersom skulden är slutbetald, är även 3 ggr det förräntade kap. eller $3\,k = 3\,s$, och vi få enligt (1) och (2)

$$1{,}06^{x} \cdot 4014{,}6 = 1{,}06^{x} \cdot 10600 - 10000$$
$$\therefore \; 0 = 1{,}06^{x} \cdot 6585{,}4 - 10000$$
$$1{,}06^{x} = \frac{10000}{6585{,}4} = 1{,}518.$$

Nu ger tabellen ungefär

$$1{,}06^{7} = 1{,}50\,;\; 1{,}06^{8} = 1{,}59,$$

varför x måste ligga mellan 7 och 8, d. v. s. det är för litet att sluta avbetalningarna på 200 kr. 7 år efter 1935 eller 1942 men för mycket att betala 200 kr. även 31 dec. 1943. Följaktligen skall mindre än 200 kr. betalas sistnämnda dag.

Men hur mycket skall då betalas?

För att få svar härpå göra vi först i (1), ex. 2, $x = 8$, varvid vi få

$$k = 1{,}06^{13} \,.\, 1000 = 2{,}133 \,.\, 1000 = 2133 \text{ kr.}$$

Så stor är alltså skulden jämte ränta. Tänka vi oss nu, att vi betala 200 kr. t. o. m. 31 dec. 1943, få vi värdet av sammanlagda avbetalningarna, förräntade till denna dag, om vi i (2) sätta $x = 8$.

$$s = \frac{1}{3}\left(1{,}06^{8} \,.\, 1{,}06 \,.\, 10000 - 10000\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1{,}06^{9} \,.\, 10000 - 10000\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1{,}6895 \,.\, 10000 - 10000\right) = \frac{1}{3}\, 0{,}6895 \,.\, 10000 =$$

$$\frac{1}{3} \,.\, 6895 = 2298{,}33 \text{ kr.}$$

Överbetalningen blir således

$$s - k = 2298{,}33 - 2133 = 165{,}33 \text{ kr.},$$

d. v. s. vi ha rätt att på våra 200 kr. sista gången få tillbaka 165,33 kr. och hade sålunda då blott behövt betala

34,67 kr.

Detta värde är dock ej fullt noggrant, emedan uttrycken i tabellerna äro avkortade.

---

3. Antag nu, att i stället amorteringssumman är obekant såsom i följande exempel: *1000 kr. lånas d. 31 dec. 1930 mot 6 % och skall återbetalas med*

lika stort belopp 31 dec. vart och ett av de 6 åren 1935—1940. Hur stort är detta belopp?

Enligt (2) i ex. 1 växer själva lånet på 10 år till

$$k = 1790{,}80 \text{ kr} \qquad \text{(a)}$$

Avbetalas årligen x kr., kan man liksom i ex. 1 beräkna summan av amorteringarna jämte ränta men utbyta 200 mot x, alltså

$$s = 1{,}06^5 \,.\, x + 1{,}06^4 \,.\, x + \ldots . + 1{,}06 \,.\, x + x.$$

Här kunde räkningarna ske på vanligt sätt, men när vi av (3), ex. 1, lätt få summan av en dylik serie, ehuru blott med den olikheten, att här 200 bör ersättas med x, kunna vi direkt skriva

$$s = \frac{1}{6} \cdot 41{,}85x \qquad \text{(b)}$$

Genom att sätta kap. jämte ränta (a) = summan av avbetalningarna jämte ränta (b) få vi

$$\frac{1}{6} \cdot 41{,}85x = 1790{,}80$$

$$\because \; x = 256{,}75,$$

d. v. s. vi få årligen inbetala 256,75 kr. Mera praktiskt är dock att jämna av summan uppåt t. ex. till 260 kr., då i stället sista amorteringsbeloppet blir något mindre. Och än en gång må påpekas, att det sist erhållna svaret liksom åtskilliga föregående ej äro noggranna på öret, då räntefaktorerna äro avkortade.

Innehållsförteckning