BERTIL HARBERG

Siffror och räkning i gångna tider.

FÖRFATTARENS FÖRLAG, SJÖGESTAD

Linköpings Tryckeri Aktiebolag 1927

FÖRORD.

Redan då jag år 1921 gav ut min »Lärobok i räkning och geometri för ungdomsskolor», hyste jag en önskan att i densamma taga med en liten historik över siffersystem och räknemetoder i gångna tider. Först i den nu utkomna fjärde upplagan har jag kunnat realisera denna tanke. Då emellertid ämnet är allt för rikt för att trängas in på ett par sidor i en lärobok och då det för övrigt innehåller mycket av kulturhistoriskt intresse, kan kanske denna något fylligare uppsats ha en uppgift att fylla, i synnerhet som det, mig veterligt, icke finnes något liknande arbete inom vår litteratur.

Sjögestad den 10 juli 1927.

BERTIL HARBERG.

Alltsedan vi började i skolan, ha vi fått syssla med siffror och räkning och äro nu så vana vid bådadera, att vi sällan tillerkänna dessa båda uppfinningar deras verkliga värde. Med tio små tecken kunna vi giva uttryck åt alla tal, de största såväl som de minsta. Med några blyertsstreck kan nu vilket barn som helst utföra en räkneoperation, som forntidens största snillen icke lyckades gå i land med. Det som vi tycker faller av sig själv har en gång varit problem, som människorna länge fått brottats med, innan lösningen vuxit fram och förenklats, tills den blivit allas vår egendom.

Att räknekonsten nu i mångt blivit en barnlek, medan den förr var en vetenskap endast för de lärde, ha vi nog delvis vårt nuvarande siffersystem att tacka för. Men dessa s. k. arabiska siffror äro icke gamla i Europa. Först vid den nyare tidens början konkurrerade de ut de romerska, som dock ingalunda äro de äldsta. Vad fanns då före dem, och hur gick det till att räkna med dessa äldre siffersystem? Den kommande framställningen kan ej lämna något utförligt svar på den frågan utan endast bliva en kort översikt av siffersystemens och räknekonstens historia.

Tal och talsystem.

Redan på mycket tidig kulturståndpunkt hade människan behov av att angiva tal, men hon behövde därför icke något ljudspråk. Det räckte med tecken, och hon använde sig då av det som låg närmast till hands, handen, foten eller bådadera. Även av våra dagars naturfolk kunna många endast räkna till fem, andra till tio och somliga ända till tjugo. Då ha de — som eskimåerna säga — räknat "en människa".

Var det frågan om att angiva större tal, skedde det ofta hos de gamla kulturfolken genom att böja och sträcka fingrarna på olika sätt. En sådan metod levde kvar under hela medeltiden. Med den gick det att uttrycka alla fyrsiffriga tal. Som synes av bilden, framställdes entalen med hjälp av vänstra handens lill-, ring-, och långfinger, tiotalen med samma hands pekfinger och tumme, hundratalen med högra handens pekfinger och tumme samt tusentalen med högra handens övriga fingrar.

Av särskilt intresse är framställningen av talet *sex* genom böjning av vänstra handens ringfinger. Talet *sex* är det första fullkomliga talet dvs. ett tal som är lika med summan av alla sina delar ($6 = 1 + 2 + 3$ liksom $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$, som är det andra fullkomliga talet). Talets fullkomlighet överfördes sedan på fingret, som därför blev mera värdigt att bära ring än de övriga fingrarna. Av detta skäl hade redan egypterna givit ringfingret dess särställning.

Det finns även andra metoder att angiva större tal än medelst fingerböjningar. I en sydafrikansk folkstam bruka hjordarna räknas genom att en man får på sina fingrar angiva entalen, en annan man tiotalen och en tredje hundratalen.

Men människan behövde också kunna uttrycka talen på ett mera varaktigt sätt än genom tecken med fingrarna. Enklast skedde det genom att i sten eller trä skära en skåra, ett streck eller en punkt för varje enhet. En sådan räkning med streck lever ju ännu kvar och användes, både då det gäller att räkna antalet säckar, som tröskats, och antalet röster, som avgivits vid ett val.

I stället för att rita ett streck kunde man för varje enhet kasta en sten i en hög, vars storlek sålunda angav mängden. Ibland tyckte man, att det var bekvämare att sätta stenarna på ett snöre för att lättare kunna räkna dem. Även detta lever kvar: ännu i dag räknar nunnan sina böner på radbandet.

Varken stenar eller skåror räckte emellertid till, då människan ville angiva talen muntligen. Hon behövde då namn på vilket tal som helst men så få benämningar som möjligt. Detta vann hon genom att använda sig av *vändtal* eller *grundtal.*

Om man vill räkna till 18 på fingrarna, måste man börja på ny räkning, antingen då man kommit till fem eller tio, beroende på om man räknar med endast den ena eller med bägge händerna. I förra fallet blir *fem* vändtal, i senare fallet *tio.* Vi använda ju *tio* som vändtal. När vi räknat till *tio,* börja vi på nytt och erhålla de nya talen dels genom att mångfaldiga tiotalen (*trettio, fyrtio, femtio* o. s. v.), dels genom att till desamma lägga enheterna (*trettioen, trettiotvå* o. s. v.). Att vi fått *tio* som vändtal har nog sin orsak i att man från början räknade på fingrarna. Nu har ju detta *decimalsystem* slagit igenom hos de flesta folk och användes även inom mått-, vikt- och myntsystemen.

Hade *tolv* varit vändtal, skulle vi räknat på samma sätt som nu t. o. m. *tolv,* därefter *tolv-en, tolv-två* o. s. v. t. o. m. *tolv-elva,* därefter *två-tolv, två-tolv-en, två-tolv-två* o. s. v. Sedan kommo *tre-tolv, fyrtolv* o. s. v. På det sättet kunde vi uttrycka talen intill 144, som vi fingo kalla *tolv-tolv*. Sedan följde *tolv-tolv-en, tolv-tolv-två* o. s. v. Talet 4532 skulle med *tolv* som vändtal heta *två-tolv-tolv-tolv sju-tolv-tolv fem-tolv-åtta,* ty $4532 = 2 \times 12 \times 12 \times 12 + 7 \times 12 \times 12 + 5 \times 12 + 8$. Ett fullständigt sådant *duodecimalsystem* har icke använts någonstans, men spår därav möta vi i dussin och gross samt även i de gamla tolvdelade måtten. Fördelen med de senare var ju att de voro jämnt delbara med både två och tre. Talet *tolv* skulle sålunda vara ett ganska gott vändtal.

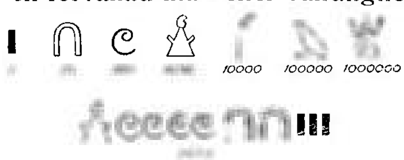
Vändtalet *sextio* är i viss mån ännu bättre, ty det är även delbart med fem. Det har kommit till användning i babyloniernas *sexagesimalsystem* och lever ännu kvar i vår tids- och vinkelindelning.

Tack vare vändtal av vare sig den ena eller andra typen blev det möjligt att på ett relativt enkelt sätt angiva talen icke endast muntligt utan även skriftligt. Den närmaste uppgiften blir nu att se efter, huru forntidens kulturfolk löste detta problem.

Egypten.

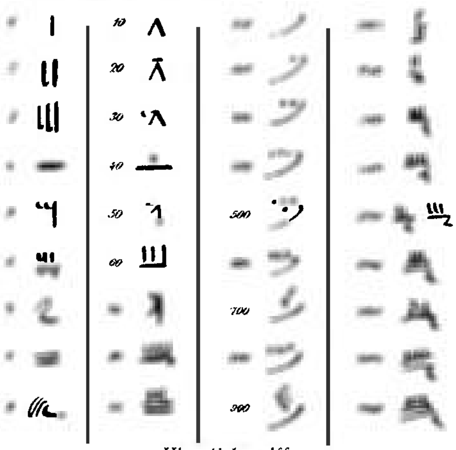
Egyptens uråldriga kultur säges vara en skänk av Nilen, som mitt i den livlösa öknen skapat en fruktbar dalgång. Nilen har även varit en bidragande orsak till egypternas intresse för matematik. Genom dess översvämning utplånades ägogränserna, och en ny delning av jorden måste därför göras, då floden hade dragit sig tillbaka. Härigenom uppstod hos egypterna ett stort intresse för jordmätning och för beräkningar, som stodo i samband därmed. Även deras kultur i övrigt vittnar om räknekonstens höga ålder. Sålunda har icke byggandet av sådana väldiga byggnadsverk som pyramiderna kunnat komma till stånd utan ganska stora insikter i geometri och räkning. Om denna matematikens första utveckling veta vi dock ingenting.

De äldsta spåren av egyptiska siffror har man funnit på en segerstod från 3300 f. Kr. och på en konungabild från 2900 (tiden för pyramidernas byggande). Den egyptiska skriften, *hieroglyfskriften*, var till en början en ren bildskrift, där skrivtecknen, de s. k. *hieroglyferna*, utgjordes av avbildningar av föremål såsom människor i olika ställningar, djur och växter, husgeråd, delar av människo- eller djurkroppen m. m. De egyptiska siffrorna voro byggda efter samma princip. Sålunda föreställde siffran 1 en stav, 10 en hästsko, 100 en palmstängel eller präststav, 1000 en lotusblomma eller lampa, 10000 en pekande finger, 100000 en groda, 1000000 en förvånad man eller oändlighetens gud.



Egyptiska siffror.

Då man ville skriva ett tal, satte man tecknen efter varandra och tog så många av varje sort, som talet angav. Ett sådant beteckningssätt säges vara *additivt,* eftersom man erhåller talet genom att addera de olika sifferteckncn.



Hieratiska siffror.

Under tidernas lopp ändrades taltecknen avsevärt, genom att man skrev hastigare och sammanförde flera tecken. Så uppstod det *hieratiska* siffersystemet med särskilda tecken för varje en-, tio-, och hundratal, varigenom själva talskrivningen blev lättare men hela siffersystemet mera betungande för minnet.

Huru egypterna räknade, känner man ganska väl till tack vare en egyptisk räknebok, vars ålder man kunnat bestämma till tiden 2200—1700 f. Kr. Den utgöres av en 20 m. lång och 3 dm. bred papyrusrulle och kallas vanligen *Ahmes* räknebok. Denne Ahmes var dock troligen icke bokens författare utan endast avskrivare.

Begynnelseorden lova ganska mycket: "Föreskrift att nå alla dunkla ting, alla hemligheter, som finnas i alla föremål". Så mycket egendomligare verka därför de prosaiska slutorden: "Fånga ohyra, möss, friskt ogräs, många spindlar. Bed Ra om värme, vind och högt vatten". Det sista var ju en bön, som passade den jordbrukande befolkningen, men boken har nog ej varit avsedd för menig man, ty den innehåller ganska svåra exempel.

En av uppgifterna lyder sålunda: "Föreskrift att dela 700 bröd till 4 personer, $^2/_3$ till den förste, $^1/_2$ till den andre, $^1/_3$ till den tredje, $^1/_4$ till den fjärde". Förklaringen till exemplet är följande: "Addera $^2/_3$ $^1/_2$ $^1/_3$ $^1/_4$, det ger 1 $^1/_2$ $^1/_4$. Dela 1 med 1 $^1/_2$ $^1/_4$, det ger $^1/_2$ $^1/_{14}$. Tag $^1/_2$ $^1/_{14}$ av 700, det är 400." Uppgiften är således löst på samma sätt, som vi nu löser första grads ekvationer.

Som synes, sysslade egypterna även med bråkräkning, men de kände endast till stambråk d. v. s. bråk med täljaren 1 samt $^2/_3$. I stället för $^2/_7$ skrevo de $^1/_4 + ^1/_{28}$. På samma sätt är $^2/_{13} = ^1/_8 + ^1/_{52} + ^1/_{104}$.

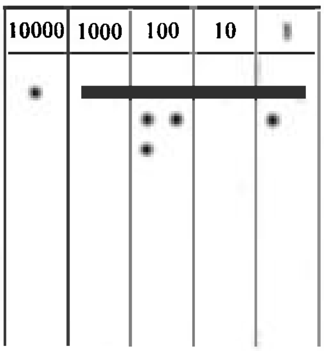
Hur egypterna räknat för att komma till ett sådant resultat, vet man ej med säkerhet. Bråken skrevos ej med bråkstreck, utan egypterna satte en punkt över siffran, som skulle ange nämnaren. I stället för $^1/_2$ skrev man sålunda 2, i stället för $^1/_7$ 7 o. s. v.

Större delen av Ahmes räknebok är ägnad åt bråkläran. Läran om hela tal genomgås mera summariskt. I multiplikation och division voro egypterna icke lika hemma som i bråkräkning. Troligen ha de icke känt till multiplikationstabellen. Deras multiplicerande var ett slags fördubbling. Om de ville räkna t. ex. 11×19, gingo de till väga på följande sätt: $2 \times 19 = 38$, $4 \times 19 = 2 \times \cdot \times 38 = 76$, $8 \times 19 = 2 \times 76 = 152$, därefter adderades $152 + 38 + 19 = 209$, ty $11 \times 19 = 8 \times 19 + + 2 \times 19 + 19$. Division utfördes på liknande sätt, t. ex. $162 : 18$. $18 \times 2 = 36$, $18 \times 4 = 72$, $18 \times 8 = = 144$, $162 = 144 + 18$, alltså $162 = 8 \times 18 + 18$, alltså $162 = 9 \times 18$, alltså $162 : 18 = 9$.

Endast de bildade klasserna, ämbetsmän och präster, kände till de nu omtalade räknemetoderna. Den stora massan av folket begagnade sig av *fingerräkning* och räkning på *räknebräde.* Att dessa två mekaniska räknemetoder använts, vet man av urkunder, men man saknar utförlig beskrivning på huru man gått till väga.

Fingerräkningen har nog inte varit detsamma som våra dagars "räkna på fingrarna" utan troligen varit lik den fingerräkning, som är omtalad å sid. 6.

Räknebrädet utgjordes av ett bräde med lika breda kolumner. I varje kolumn lades stenar, och varje sådan betecknade i första kolumnen från höger ental, i andra tiotal o. s. v. Räknebrädet användes i första hand till att framställa talen. Den kommande framställningen skall visa, att alla fyra räknesätten kunde utföras på ett dylikt bräde, men om redan egypterna förstått den konsten, veta vi icke.



Talet 12513 på ett räknebräde.

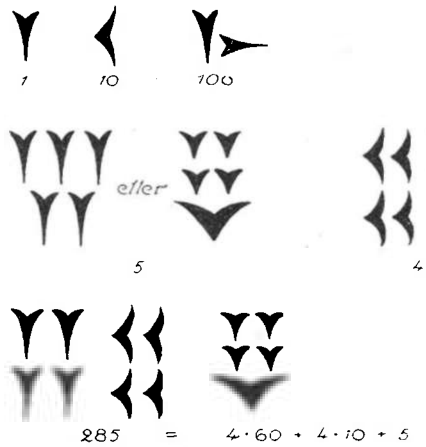
Babylon.

Den andra stora härden för den mänskliga kulturen var landet mellan Eufrat och Tigris. Årtusenden före vår tideräkning fanns här ett blomstrande land, som nu är nästan öde öken, där endast de många ruinhögarna vittna om de svunna kulturcentra såsom Babylon, Sippar, Nippur, Nineve.

Matematikens uppblomstring hade sin grund i babyloniernas stora intresse för företeelserna på himlavalvet. Astrologi, astronomi och tideräkningskonst voro urgamla vetenskaper i Babylon. En annan bidragande orsak till räknekonstens omhuldande var babyloniernas stora handelsintresse. De äldsta sifferteckmen har man funnit just i bokförings- och inventarieförteckningar från tredje årtusendet f. Kr.

Liksom i Egypten hade även i Babylon siffrorna påverkats av skriften, den s. k. *kilskriften.* Denna har fått sitt namn av att bokstäverna utgjordes av kilar eller liknande figurer, som uppstodo, då man skrev på mjuka lertavlor.

Siffrorna skrevos på samma sätt. Entalen betecknades med kilar, tiotalen med trianglar. Dessa tecken sattes antingen bredvid eller under varandra. Beteckningssättet var således även här rent additivt men endast upp till 100. Tecknet för detta tal utgjordes av en stående och en liggande kil.



Babyloniska siffror.

Ville man nu ange t. ex. 300, satte man tre entalskilar framför hundratalstecknet. Ett sådant beteckningssätt är *multiplikativt,* då ju de tre entalen måste multipliceras med 100. Detta system är helt decimalt.

Det fanns dock även ett annat system, som t. o. m. användes mera än det decimala och framför allt begagnades i vetenskapliga kretsar. Det var det förut omnämnda sexagesimalsystemet. Beteckningssättet för en- och tiotalen var detsamma i detta som i det decimala. Alla talen t. o. m. 59 skrevos lika i båda systemen. Talet 60 betecknades i det sexagesimala systemet på samma sätt som talet 1, således med en kil. Två kilar kunde betyda 2 eller 61 (första kilen 60, andra kilen 1) eller 120 (båda kilarna 60). Sattes en kil framför en triangel, fick man 70 (60 + 10). Två kilar framför en triangel blev 130 (60 + 60 + 10). Om man nu vill skriva 285 enligt sexagesimalt system, måste man dividera 285 med 60, varvid man finner, att det består av 4 60-tal, 4 10-tal, 5 ental, varför det måste skrivas, som figuren anger.

Förr har man velat härleda sexagesimalsystemet astronomiskt, d. v. s. indelningen i 60 skulle ha sin grund i årets längd, som babylonierna räknade till 6 × 60 dagar. Så lär dock icke ha varit fallet, utan systemet har troligen uppstått genom sammansmältning av två siffersystem, det ena med 6, det andra med 10 som vändtal.

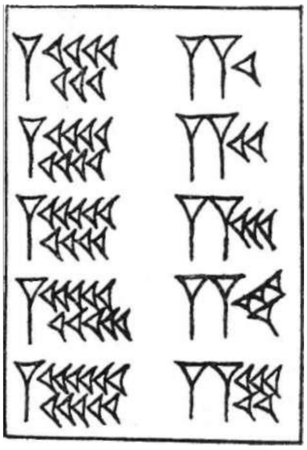
I babyloniernas system finns lika lite som i egypternas någon nolla. Skulle man skriva 480, d. v. s. 8 × 60, ritade man upp 8 kilar, vilka således även kunde läsas som 8 enheter. För att undvika förväxling kunde man efter de 8 kilarna sätta ett *Soss*, som betydde 60. Först i astronomiska arbeten från tredje århundradet efter Kr. påträffas ett tecken, som i viss grad motsvarar nollan. Det förekommer dock endast i bråkräkning.

De babyloniska bråken voro också sexagesimala d. v. s. uttrycktes som delar av 60, 60 × 60 eller 60 × 60 × 60 o. s. v. Ett bråk kunde sålunda få detta utseende 5 $^{5}/_{60}$ $^{120}/_{3600}$ $^{2400}/_{216000}$. Om nu $^{120}/_{3600}$ saknades, skrevs det 5 $^{5}/_{60}$ $\stackrel{<}{<}$ $^{2400}/_{216000}$ för att ange att en talsort fattades. Dessa liggande vinklar kunna dock icke sägas helt motsvara vår nolla, ty vi använda denna icke endast för att uttrycka att något saknas utan även för att angiva talens storhetsordning.

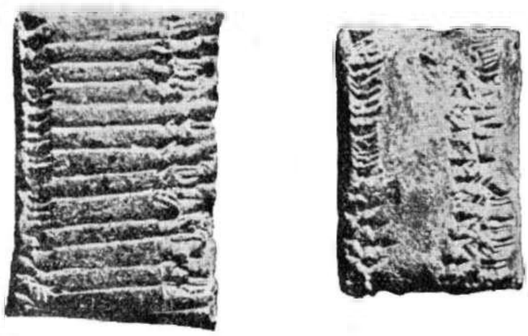
Eftersom nollan saknades, hade babylonierna svårt för att uttrycka stora tal. Genom att sätta en triangel (10-talstecknet) framför 100-talstecknet fingo de ett tecken för 1 000. Satte man ännu en triangel framför, fick man 10 000 och icke som man skulle ha väntat 2 000. Ville de skriva 100 000, satte de 100-talstecknet framför 1 000-talstecknet.

I allmänhet hade de icke någon uppfattning av sådana stora tals egentliga värde, utan sifferuppgifter över 1 000 använde de mest för att uttrycka något mycket stort. Det framgår av många ställen i bibeln, som påverkats av den babyloniska kulturen efter fångenskapens tid. "Tusen sinom tusen tjänade honom och tiotusen sinom tiotusen stodo inför honom". (Daniel 7: 10.) Är det frågan om ännu större tal, uttrycktes dessa icke genom siffror utan genom jämförelse. "Se upp till himmelen och räkna stjärnorna, om du kan räkna dem. Sådan skall din säd bliva." (Mose I. 15: 5.)

Vid Nippur ej långt från Babylon har man grävt fram ett tempel med tillhörande skolbyggnader och bibliotek, varvid man funnit över 20 000 texter på lertavlor, flera med matematiskt innehåll. Somliga av dessa utgöras av övningar i sexagesimalsystemet. Vidstående övningstabell läses 60 + 7 × × 10 — 2 × 60 + 10, 60 + + 8 × 10 = 2 × 60 + 2 × × 10 o. s. v. Multiplikationstabeller funnos i stor mängd. Den vänstra av de avbildade återgiver en sådan med 1 × 6 upptill 60, den högra 1 × 9, men man har även funnit tavlor med 1 × 1 350. Då lertavlornas ålder har kunnat



Övningstabell.



Multiplikationstabeller.

bestämmas till 2500 f. Kr., torde dessa multiplikationstabeller vara de äldsta kända i världen. Andra tabeller upptaga kvadrattal, kvadratrötter, kubikrötter, divisioner, t. o. m. ränteberäkningar, där året är fastställt till 360 dagar. Allt vittnar om huru högt räknekonsten stod i Babylon.

Liksom egypterna ha även babylonierna begagnat sig av fingerräkning och räknebräde. Visserligen har man icke funnit något räknebräde vid utgrävningarna, men det är nästan otänkbart, att det icke skulle vara känt i Babylon med dess livliga handelsförbindelser åt alla håll, då räknebrädet sedan urminnes tider begagnats i mellersta Asien ända bort till Kina.

Eftersom jag icke kommer att gå in på den kinesiska matematiken, då dess bidrag till räknekonstens historia är ganska ringa, vill jag i detta sammanhang nämna något om det kinesiska räknebrädet, som ännu lever kvar i våra småskolor.

Kines vid räknebrädet.

I den kinesiska litteraturen har man kunnat följa räknebrädet, *swanpan,* tillbaka till 2600 f. Kr. Som synes av bilden, utgöres det av en ram med trådar, som genom en mittråd är delad i två hälfter, den ena med två, den andra med fem kulor. Dessa skötos mot mittråden. De två hade värdet *fem,* de fem värdet *ett.* Det kinesiska räknebrädet har sedan vandrat tvärs över Asien till Ryssland. Där ändrades det, så att det påminde mera om våra dagars kulram. Ännu så sent som på 1700-talet användes en sådan räkneapparat av föreståndaren för den ryska skattkammaren. Det är ju då icke att undra på att den i början av 1800-talet allmänt begagnades i de ryska handelsbodarna. En fransk officer Poncelet, som råkat i fångenskap under de napoleonska krigen mot Ryssland, förde sedan med sig en sådan apparat till Frankrike. Här infördes den i skolorna för inlärandet av de första räknebegreppen. Lite var ha vi väl en gång gjort bekantskap med denna kulram, som sålunda kan räkna sina anor i fyra och ett halvt årtusende.

Grekland.

Från Nilens och Eufrats floddalar spred sig kulturen småningom västerut, och Grekland blev den första kulturstaten i Europa. De tankar, som vuxit fram hos de vise i Egypten och Babylon, förädlades i Grekland till vetenskap. Det gäller även matematiken, fast icke så mycket aritmetiken utan fr. a. geometrien, som mera lämpade sig för grekernas spekulativa sinne.

Även med risk att komma in på geometriens historia vill jag räkna upp några av dessa grekiska matematici, som kunna stå som representanter för de förnämsta matematiska skolorna. För övrigt ha de nästan samtliga lämnat något bidrag till aritmetiken, även om deras flesta arbeten berört geometrien.

Med Grekland menas icke endast den lilla halvön på Balkan utan alla de orter, där den grekiska kulturen blomstrade. Dennas första centrum var *Mindre Asien.* Här levde *Thales från Miletos* (640—548 f. Kr.), en av Greklands "sju vise". Under en vistelse i Egypten lärde han känna den egyptiska geometrien och förde den över till Grekland.

Den grekiska kulturen flyttade sedan över till *Syditalien* och *Sicilien.* Den störste matematikern från denna tid var *Pythagoras av Samos* (580—500

f. Kr.), känd bl. a. för den pythagoreiska satsen: kvadraten på hypotenusan = summan av kateternas kvadrater. Pythagoras vistades icke endast i Egypten utan även i Babylon. Han har således liksom Thales bidragit till att dessa äldsta kulturländers matematiska resultat kommit grekerna till godo.

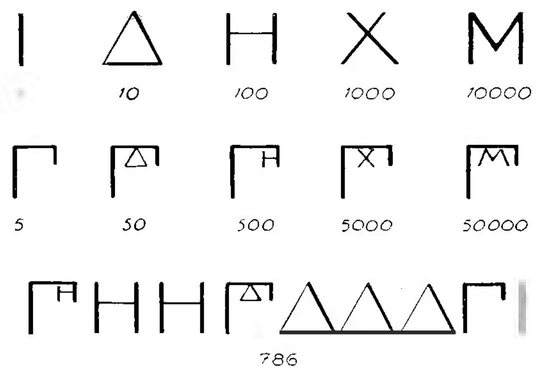
Athen blev nästa kulturcentrum. Till matematikens stormän, som verkade här, räkna vi även *Platon* (427—347 f. Kr.). Han stod på höjden av sin tids matematiska vetande och har bl. a. bevisat, att primtalens antal är oändligt.

Sedan Alexander den store erövrat Egypten och anlagt *Alexandria,* kom denna stad att överglänsa Athen som kulturhärd. Matematiken vände tillbaka till sitt hemland och upplevde då sin största blomstringsperiod. Här utgav *Euclides* (omkr. 300 f. Kr.) sitt stora arbete "Elementa", som bestod av 13 böcker av både geometriskt och aritmetiskt innehåll. Den geometriska delen har in i våra dagar använts som lärobok i skolorna, vilket vittnar gott om dess betydelse och förtjänster. Den aritmetiska delen handlar bl. a. om primtal och sammansatta tal, tals delbarhet, minsta gemensamma nämnare o. s. v. Nästan samtidigt med Euclides levde *Arkimedes av Syracusa* (287—212 f. Kr.), känd för sitt arbete om klot och cylinder samt sina talspekulationer, den s. k. sandräkningen.

Till sist må nämnas *Heron av Alexandria* (omkr. 100 f. Kr.), vars namn lever kvar i Herons formel, som ger oss en metod att beräkna en triangels yta, då sidorna äro kända.

Vad siffersystemen beträffar, växte det fram två sådana i Grekland, båda decimala. De tyckas vara ungefär lika gamla, från 8—600 f. Kr. Det ena benämnes dock ofta det *äldre*, eftersom det användes mest i äldre tider, under det att det småningom överflyglades av det andra, det *yngre.*

Det äldre systemet angav siffrorna med talens begynnelsebokstäver. Talen för 50, 500 o. s. v.,



Herodianska systemet.

fick man genom att hänga upp tecknen för 10, 100 o. s. v. i femmans tecken, som liknar en galge. Dessa siffror uttrycktes således multiplikativt. I övrigt var uttryckssättet additivt: man skrev tecknen efter varandra och upprepade dem så många gånger som det behövdes. Detta siffersystem kallas ofta det *herodianska* efter en bysantinsk lärd, *Herodianus* (200 e. Kr.).

Det yngre systemet har även ett annat namn, kallas ofta det *milesiska,* eftersom det troligen

α	β	γ	δ	ε	[illegible]	ζ	η	[illegible]
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	[illegible]
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	[illegible]	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

$\overline{\omega\,\lambda\,\delta} = 834.$

Milesiska systemet.

uppstått i den joniska huvudstaden *Milet* på Mindre Asiens västkust. I det använde man sig av det grekiska alfabetet, så att varje bokstav betecknade en siffra. För att utmärka att bokstäverna skulle läsas som siffror och icke som skrift drog man en linje över dem. Detta sätt att angiva siffrorna med tillhjälp av alfabetet var säkerligen en grekisk uppfinning, medan själva alfabetet ju är en gåva från fenicierna. Dessa, den gamla världens egentliga handelsfolk, tyckas egendomligt nog icke lämnat något bidrag till räknekonstens utveckling.

Svagheten i det milesiska systemet var att det hade så många tecken. Det grekiska alfabetet bestod egentligen endast av 24 bokstäver, varför det måste utökas med tre äldre bokstavstecken. Med dessa 27 tecken kunde grekerna sålunda skriva talen upp till 1 000. Tusentalen erhöllo de genom att sätta ett komma framför enhetssiffran t. ex. ,$\beta = 2\,000$. Tiotusen betecknades med ett Mw eller M och kallades *myriad.*

Detta var den största talsort, som grekerna använde. Arkimedes gjorde dock ett försök att uttrycka oändligt stora tal i ett arbete, som han kallar "sandräkning". "Många tro", säger han i början av detta, "att sandkornens antal är av obegränsad mängd. — Det finns åter andra, som visserligen ej antaga, att detta tal är obegränsat, men att ingen kan nämna ett så stort tal, som överträffar dess mängd. — — Men jag vill genom geometriska bevis försöka visa, att bland de av mig benämnda talen, som finnas i min skrift till Zeuxippos, några icke blott överträffa antalet sandkorn i en sandhög, som är lika stor som jorden, utan antalet i en sandhög, som är lika stor som världsalltet". Vad Arkimedes menade med världsalltet, framgår av ett brev till konung Gelon, vilken boken tillägnas. "Nu vet du", säger han, "att de flesta astronomer med världsalltet mena det klot, vars medelpunkt är jordens medelpunkt, och vars radie är sträckan mellan solens och jordens medelpunkter. Detta har du lärt av astronomernas framställningar. Aristarkos av Samos har nu utgivit en av vissa hypoteser bestående bok, i vilken antaganden leda till det resultatet, att världsalltet är många gånger större än det som jag nyss har nämnt. Han antager, att fixstjärnorna och solen äro orörliga, att jorden rör sig i en cirkellinje kring solen, som ligger i banans mittpunkt." Citatet har sitt stora intresse, då den aristarkoska åskådningen är densamma, som Kopernicus hävdade 2 000 år senare.

För att få så stora tal som det här gällde, utgick Arkimedes från myriaden och tänkte sig en ny talsort en myriad myriader d. v. s. $10000 \times 10000 = 100000000 = 10^8$. Denna kallade han *oktad.*

Sålunda räckte

1:sta oktaden till 10^8

2:dra " " $10^8 \times 10^8 = 10^{16}$

3:dje " " $10^8 \times 10^8 \times 10^8 = 10^{24}$

o. s. v. ända till 100 000 000 oktaden, som utgjorde $10^{800\,000\,000}$, (den oktada oktaden). Denna enhet kallade han *period.* På samma sätt bildade han perioder upp till den 100 000 000 perioden, $10^{800\,000\,000\,000\,000\,000}$, vilket sålunda blev ett tal bestående av en etta och 800 000 billioner nollor. Arkimedes förstod, att så stora tal behövde han icke tillgripa, utan att ett sandklot, som var lika med det aristarkoska världsalltet, endast kunde rymma 10^{64} sandkorn.

Värdet av ett tal med 800 000 billioner nollor kunna vi ej uppfatta. Talets storhet kan dock åskådliggöras på andra sätt. Om man skriver 2 nollor på 1 cm., skulle det behövas 400 000 miljarder km. för att skriva talet, d. v. s. en längd som går 10 millioner gånger runt jorden. Eller om en person kunde skriva 100 nollor i minuten, hade 800 000 människor haft sysselsättning med att skriva talet ända från Kristi födelse intill våra dagar. Arkimedes stora tal har dock distanserats av den moderna astronomiens ljusårstal.

Vår kännedom om den skriftliga räkningen i Grekland är ganska ringa. Vi veta ej med säkerhet, huru grekerna ställt upp en enkel addition, om talen ställts efter eller under varandra med ental under ental o. s. v. Hur besvärlig även den enklaste uppgift har varit på grund av olika tecken för en-, tio- och hundratal, torde framgå ur en jämförelse med våra dagars räkning.

$$\begin{array}{r} 427 \\ \underline{186} \\ 613 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \nu\,\varkappa\,\zeta \\ \underline{\varrho\,\varpi\,\varsigma} \\ \chi\,\iota\,\gamma \end{array}$$

Då detta kan räcka som exempel på det grekiska siffersystemets olämplighet för skriftlig räkning, skall jag använda våra siffror för att demonstrera grekernas tankegång vid en multiplikation.

Ex. $38 \times 542 =$

$$
\begin{array}{rcrcr}
30 & \times & 500 = & 15\,000 \\
8 & \times & 500 = & 4\,000 \\
30 & \times & 40 = & 1\,200 \\
8 & \times & 40 = & 320 \\
30 & \times & 2 = & 60 \\
8 & \times & 2 = & \underline{\quad 16} \\
 & & & 20\,596
\end{array}
$$

Grekerna kände till en början endast stambråken, som de skrevo genom att efter den grekiska bokstaven sätta två accenter t. ex. $\delta'' = {}^{1}/_{4}$ o. s. v. Sedermera uppstodo bråk med större täljare. Dessa skrevos genom att efter täljaren sätta *en* accent och efter nämnaren *två*, vartill kom, att nämnaren ofta skrevs två gånger t. ex. ${}^{11}/_{45} = \iota\alpha'\ \mu\varepsilon''\ \mu\varepsilon''$.

Den alexandrinska skolan började omkr. 200 f. Kr. använda sig av babyloniernas sexagesimalbråk. Genom grekerna kommo dessa över till Europa och levde kvar där under hela medeltiden samt bildade den grund, varur decimalbråken växte fram. Av denna anledning vill jag lämna ett par exempel på huru man räknade med dem.

Nämnarna utsattes i allmänhet icke, då ju varje nämnare alltid var 60 mindre än den föregående. I stället för $5\ {}^{17}/_{60}\ {}^{135}/_{3600}$ skrev man sålunda:

$$5\ \overset{\text{I}}{17}\ \overset{\text{II}}{135}\ .$$

Multiplikation.

Ex. $25\ 8^{\mathrm{I}}\ 45^{\mathrm{II}} \times 18\ 15^{\mathrm{I}}\ 32^{\mathrm{II}}$.

Den övre faktorn multipliceras först med 18, sedan med 15, som är 60 gånger mindre än 18, varför samtliga resultat vid denna multiplikation flyttas ett steg till höger. Vid multiplikation med 32 flyttas delprodukterna ytterligare ett steg åt höger.

	I	II	III	IV
25	8	45		
18	15	32		
450	144	810		
	375	120	675	
		800	256	1 440
450	519	1 730	931	1 440

Härefter förvandlar man till högre sort genom division med 60 med början från höger, varefter resultatet blir

$459\ 8^{\mathrm{I}}\ 5^{\mathrm{II}}\ 55^{\mathrm{III}}$.

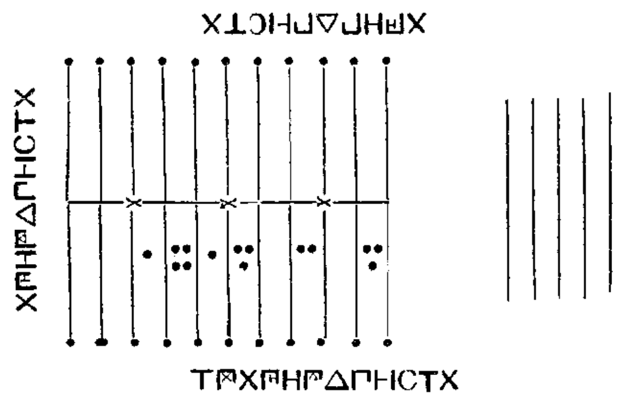
Division.

Ex. $749\ 17^{\mathrm{I}}\ 48^{\mathrm{II}} : 15\ 17^{\mathrm{I}}\ 8^{\mathrm{II}}$

						Kvot
		I	II			
15 i 749 går 49	749	17	48			49
15 × 49	735					
Rest	14					
Förvandla till I		840				
Summa		857				
17 × 49		833				
Rest		24	48			
8 × 49		6	32			
Rest		18	16			I
15 i 18 går 1, 1 × 15		15				1
Rest		3				
Förvandla till II			180			
Summa			196			
1 × 17			17			
Rest			179	III		
1 × 8				8		
Rest			178	52		II
15 i 178 går 11, 11 × 15			165			11
Rest			13			
Förvandla				780		
Summa				832		
11 × 17				187		
Rest				645	IV	
11 × 8				1	28	
Rest				643	32	III
15 i 643 går 42				630		42

		I	II	III	
Kvoten blir således	49	1	11	42	.

Liksom i Babylon användes de nu omtalade skriftliga räknemetoderna endast i vetenskapliga kretsar. I det praktiska livet begagnade man sig av fingerräkning och räknebräde. Det grekiska räknebrädet *abax*, utgjordes i allmänhet av en platta beströdd med sand, vari kolumner drogos upp och stenar placerades. Man känner till sådana räknebräden både från litteraturen och från avbildningar å vaser o. d. På Salamis har man även funnit ett räknebräde av marmor med herodianska tecken.



Räknebrädet från Salamis.

Tecknet T längst till vänster i sifferraden angiver 6000, de fyra tecknen längst till höger angiva bråkdelar $^1/_2$, $^1/_{12}$, $^1/_{24}$, $^1/_{48}$. Avdelningen till höger på tavlan är avsedd till bråkräkning. Detta bräde har möjligen använts även som spelbord och varit avsett för två personer, som suttit mitt emot varandra vid tavlans långsidor. Å tavlan framställes talet 9 823.

Rom.

Redan två hundra år före den grekiska matematikens blomstringsperiod i det sydliga Italien hade på halvöns mellersta del uppstått en ny stat, Rom, som fick kulturell betydelse, i samma mån den vidgade sitt område och kom i beröring med de äldre kulturstaterna. Det var för resten ett av dess utvidgningskrig, som berövade den grekiska matematiken dess största man, Arkimedes (212 f. Kr.).

Till en början utvecklade sig den romerska matematiken oberoende av den grekiska. Sålunda har det romerska siffersystemet uppstått utan grekisk påverkan. Det har vuxit fram på italiensk botten, men när och hur vet man icke. Det kan ju sägas leva kvar in i våra dagar. Ännu möta vi de romerska siffrorna på urtavlor, gravvårdar och offentliga byggnader.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Romerska siffror.

Den mest karaktäristiska för det romerska systemet var att det begagnade icke endast addition utan även subtraktion vid talskrivningen. Om en lägre siffra ställdes framför en högre, skulle den förra dragas från den senare t. ex. IX eller XL. Högre tal än 1 000 framställdes på olika sätt. Man hade särskilda tecken för dem men kunde även draga en linje över de siffror, som angåvo tusentalen t. ex. $\overline{XX} = 20\,000$, $\overline{C} = 100\,000$.

Även romarnes bråkräkning var deras egen skapelse. Det var ett *duodecimalsystem* och grundade sig på 12 som nämnare: $^{12}/_{12}$ = as, $^{11}/_{12}$ = = deunx o. s. v. med olika namn och olika tecken för alla tolftedelar ned till $^{1}/_{12}$ = uncia, vidare $^{1}/_{24}$, $^{1}/_{36}$, $^{1}/_{48}$, $^{1}/_{72}$, $^{1}/_{96}$ o. s. v. Additioner och subtraktioner med dessa bråk voro icke så svåra. Värre var det med multiplikationer och divisioner, och det var därför ej att undra på att man hellre tog resultatet ur räknetabeller, en metod, som romarne använde sig mycket av, även då det var frågan om enklare räkning.

Det romerska siffersystemet var icke synnerligen lämpligt för skriftlig räkning, vilket torde framgå av följande exempel:

Addition.

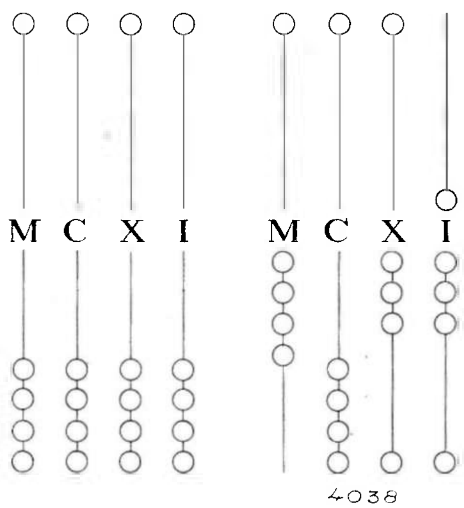
DCCXLVI	746
CDLXXXVIII	488
MCCXXXIV	1234

Multiplikation.

CCLXVII	267
XV	15
MMDCLXX	1335
DDCCLLXXVVV	267
MMMMV	4005

Vid multiplikationen började man med tiotalssiffran och multiplicerade från vänster.

Det är klart, att romarne med deras praktiska läggning och deras ringa intresse för teoretisk matematik gärna begagnade sig av räknebrädet, *abacus*. Det utgjordes liksom det grekiska av en platta med sand. Stenarna, med vilka man räknade, kallades *calculi*, varur vårt kalkulera härleder sig.



Romersk abacus.

Ovanför linjerna på brädet lades en sten på varje linje, och varje sådan hade värdet *fem*. Nedanför linjerna lades fyra stenar, vilka hade värdet *ett*. Ville man på räknebrädet angiva t. ex. 4 038, flyttade man upp fyra stenar på första raden, inga på den andra, tre på den tredje samt på den fjärde tre av de undre jämte den övre (3 + 5 = 8). Det fanns även räknebräden av metall med skåror. På räknebrädet utfördes alla fyra räknesätten. Det torde icke vara så svårt att tänka sig, huru man på abacusen adderade t. ex. 4 038 + 1 246. Vid multiplikationer och divisioner fick man skriva upp talen och på abacusen angiva summan av delprodukterna eller resten av dividenden efter delkvoternas fråndragning. (Vid redogörelsen för räknebänken, den sista abacusen, skall jag lämna utförligare exempel, sid. 65.)

Strax före vår tideräknings början stod i spetsen för det romerska världsväldet en man med stora matematiska intressen, *Julius Cæsar*. Det var han, som införde en förbättrad tideräkning. En annan matematisk uppgift, som han satt sig före, var uppmätningen av det romerska riket. Denna tanke kom till utförande först under hans efterträdare, Augustinus, antagligen 37—20 f. Kr. Många av de lantmätare, som deltogo i denna, voro framstående matematici. Den romerska geometrien upplevde då en blomstringsperiod. Den byggde dock till stor del på grekiska källor, på arbeten av Heron av Alexandria, som troligen deltagit i den stora mätningen.

Utom dessa lantmätare, *agrimensorer*, hade den romerska matematiken ej några framstående matematici att uppvisa. Vid tiden för det romerska rikets fall levde dock en man, som särskilt under medeltiden ansetts som en mycket stor auktoritet på det matematiska området. Det var filosofen *Boethius* (470—525). Hans matematiska arbeten innehålla ej något egentligt nytt utan äro byggda på grekisk matematik. Sin största betydelse har han som översättare. Han bildar en förbindelselänk mellan den klassiska kulturen och medeltidens, just då kontakten mellan dessa två höll på att brytas.

Under medeltiden tillskrev man honom förtjänsten av att ha infört de arabiska siffrorna i Europa. I sin geometri skulle han ha beskrivit en abacus, på vilken man begagnade sig av marker med *apices* d. v. s. en form av de arabiska siffrorna. Troligen är denna s. k. Boethius geometri ej skriven av honom utan av senare datum.

Emellertid ha vi nu nått fram till den tid, då de arabiska eller rättare de indiska siffrorna började göra sitt segertåg genom världen. Vi ha sett, huru matematiken vandrat allt längre och längre mot väster, och funnit, att romarne icke lyckats fördjupa den eller föra den framåt. Förnyelsen kom från öster. Vi få åter gå österut, bort till Indien för att se huru våra dagars siffror växa fram, huru de vandra mot väster och till sist slå rot i det medeltida Europa.

Indien.

Liksom i Egypten och Babylon gav den fruktbara naturen i Indien upphov till ett rikt andligt liv, men den indiska kulturen var av betydligt yngre datum än de nämnda ländernas.

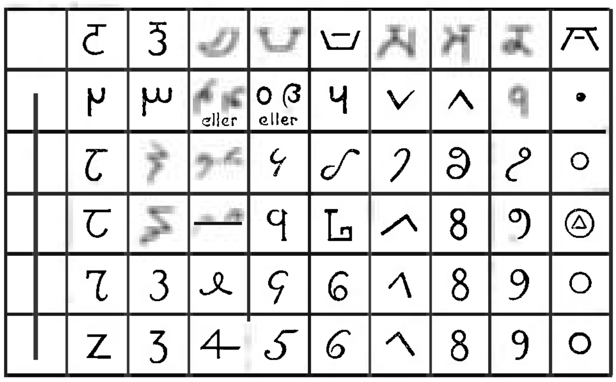
Vad räknekonsten beträffar, synes en blomstringsperiod inträffa först omkring 500 e. Kr., och då är matematiken huvudsakligen en hjälpvetenskap till astronomien. År 1881 gjordes ett egendomligt fynd i *Bakhshali* i Nordvästra Indien. Man fann delar av en räknebok skriven på näver. Denna, som vanligen går under namn av räkneboken från Bakhshali, torde vara från 7—900 men misstänkes vara en avskrift av en bok från tiden för Kr. f. Det första mera kända arbete, vars ålder man kunnat bestämma, är utgivet av en astronom och matematiker *Aryabhatta* (född 476).

Indierna intresserade sig för egentlig räkning mer än något av de förut nämnda folken. Detta deras intresse för sifferräkning kan nog ha sin orsak i att de hade en bättre metod att skriftligen uttrycka talen. Alla de siffersystem, som behandlats i det föregående, ha haft samma olägenhet: de lämpa sig icke för räkning, varken för addition eller subtraktion och ännu mindre för multiplikation och division. Det beror på att de icke använda sig av siffrornas *ställningsvärde*, då de uttrycka talen. Med ställningsvärde menas, att siffrorna ha ett värde icke blott i och för sig utan även på grund av sin ställning inom talet. I talet 42945 betyder sålunda den första fyran tiotusental och den andra fyran tiotal.

Även om det har funnits ansatser till att ge siffrorna ett visst ställningsvärde, så har det dock tillämpats konsekvent först i det indiska systemet genom införandet av *nollan.* Då siffrorna hade ställningsvärde, och då det kunde hända, att en viss talsort fattades, satte man i det indiska systemet en punkt för att ange den tomma platsen. Denna punkt ändrades sedan till en ring. Nollan var uppfunnen, och det var en uppfinning av den största betydelse. "Endast i en indisk hjärna", har någon sagt, "kunde en sådan tanke uppstå att hitta på ett tecken för ingenting och med dess hjälp beteckna de största tal". Första gången man träffar på nollan i form av en ring i den indiska litteraren är år 738. Nollan som punkt har man funnit i skrifter från 400-talet.

Både i det babyloniska och grekiska systemet har nollan haft föregångare (sid. 17), och man kommer kanske sanningen närmast, om indierna få äran av att ha bragt tanken på siffrornas ställningsvärde och nollans betydelse till sin fulländning, under att de äldre systemen fr. a. det babyloniska få gälla som denna idés upphovsman.

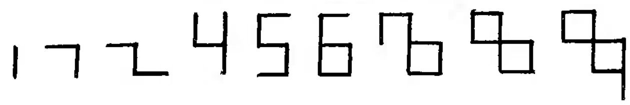
Av det indiska siffersystemet är det inte endast nollan, som intresserar oss, utan även de övriga siffrorna, eftersom de äro föregångare till våra dagars siffror. Huru gamla de indiska siffrorna äro vet man ej, icke heller huru de uppkommit. Enligt en åsikt skulle de icke vara annat begynnelsebokstäverna till de nio talorden. Mest överensstämma de med de bokstäver, som användes under andra



1 raden: Indiska siffror från andra århundradet e. Kr.
2 „ Ostarabiska siffror.
3 „ Västarabiska „
4 „ Apices.
5 „ Siffror från 1200-talet.
6 „ „ „ 1500- „

århundradet. Under tidernas lopp ha de ändrats rätt avsevärt, innan de fått det utseende, som de ha i våra dagar. Vi kalla dem icke indiska utan arabiska, beroende på att de kommit till Europa via araberna.

I detta sammanhang kan jag icke underlåta att nämna om en fantastisk förklaring av siffrornas uppkomst. En tysk på 1830-talet ville icke ge indierna hedern därav utan germanerna. Till varje tecken skulle dessa ha använt lika många streck, som siffrans värde angav och på det sättet skapat siffror av den typ, som bilden anger. I ett tyskt



populärvetenskapligt arbete från 1912 har jag återfunnit samma teori, men där tillskrives idéen indierna och icke germanerna.

De indiska räknemetoderna påminna mycket om våra dagars, vilket är ganska naturligt, då siffersystemet, på vilket både indierna och vi bygga, är detsamma. Vid räkningen begagnade de sig av en tavla beströdd med fin sand, på vilken de skrevo med griffel. På en sådan sandtavla kunde de lätt stryka ut en siffra och sätta en annan i stället. Därför betydde det icke så mycket, om de vid en addition började från vänster eller från höger. Ville de räkna t. ex. $695 + 132$ och de började från vänster, fingo de $6 + 1 = 7$ och sedan $9 + 3 = 12$, men då måste de stryka ut 7 och sätta 8 i stället. Om vid en subtraktion subtrahendens ena siffra var större än minuendens, gjorde de antingen som vi d. v. s. lånade en enhet av högre talsort eller gjorde motsvarande talsort i subtrahenden en enhet större. Var uppgiften 362 — 149, räknade man sålunda antingen: 9 från 12 = 3, 4 från 5 = 1, 1 från 3 = 2 eller: 9 från 12 = 3, 5 från 6 = 1, 1 från 3 = 2.

Vid multiplikation begagnade man sig av flera metoder, såsom följande exempel visa.

Metod I. *Ex. 374 × 245 =*

För att tankegången skall framstå klarare har jag delat upp multiplikationen i tre avdelningar. Vidare är att märka, att man icke skrev vare sig de mindre eller större siffrorna ovanför varandra, såsom jag har gjort, utan att man bara strök över och ändrade. De mindre siffrorna angiva vad som skall adderas, de större vad som erhölls efter varje addering samt de kursiva indiernas sifferbild vid början och slutet av delmultiplikationen.

1. Ställ upp faktorerna så, att den nedre faktorns ental kommer under den övres hundratal. Multiplicera 3 med 2, 4 och 5.

735
15
72
12
6
374
245

Alltså

3 × 2 = 6. Skriv 6 över 3 i 374.

3 × 4 = 12. Skriv 2 över 7 i 374,
lägg 1 till 6 = 7.

3 × 5 = 15. Skriv 5 över 4 i 374,
lägg 1 till 2 = 3.

Efter denna multiplikation blir uppställningen följande:

735
374
245

2. Flytta den nedre faktorn ett steg åt höger. Multiplicera 7 med 2, 4 och 5.

9065
35
903
28
87
14
735
374
245

Indiernas uppställning:

9065
374
245

3. Flytta den nedre faktorn ytterligare ett steg åt höger. Multiplicera 4 med 2, 4 och 5.

91630
20
9161
16
914
8
9065
374
245

Indiernas uppställning:

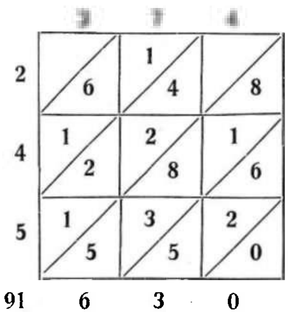
91630
374
245

Metod II. Något enklare var s. k. *blixtbildande* eller *sick-sack-multiplikation,* som bestod i att man genom huvudräkning tog reda på, huru många ental, tiotal, hundratal o. s. v., som bildades genom talens multiplicerande samt adderade samtliga tal av samma storhet, varefter man kunde skriva ut produkten siffra för siffra. Följande exempel må tjäna som förklaring:

Ex. 374
245
91630

5 e. × 4 e. = 20 e.	0 skrives upp, 2 t. i minne.
4 e. × 4 t. = 16 t. 5 e. × 7 t. = 35 t. i minne 2 t.	53 t., 3 skrives upp, 5 h. i minne.
4 t. × 7 t. = 28 h. 5 e. × 3 h. = 15 h. 4 e. × 2 h. = 8 h. i minne 5 h.	56 h. 6 „ „ 5 tu. „
4 t. × 3 h. = 12 tu. 2 h. × 7 t. = 14 tu. i minne 5 tu.	31 tu., 1 „ „ 3 tiotu. „
2 h. × 3 h. = 6 tiotu. i minne 3 tiotu.	9 tiotu. skrives upp.

Metod III. Den minst ansträngande metoden var s. k. *nätmultiplikation.* Skulle två tresiffriga tal multipliceras med varandra, ritade man upp en kvadrat med 9 rutor, vilka alla delades genom diagonaler. Det ena talet ställdes horisontellt, det andra vertikalt. Därefter multiplicerades de vertikala



och horisontala talen med varandra, och produkterna skrevos i motsvarande kvadrater, så att entalen sattes i den nedre kvadrathalvan och tiotalen i den övre, därefter adderade man diagonalt snett nedåt vänster.

Division tyckas indierna icke ha ägnat samma intresse som multiplikation. Åtminstone har man icke lyckats få så noga reda på deras divisionsmetoder. Deras bråkräkning överensstämde i huvudsak med vår. De tecknade bråken på samma sätt som vi: täljaren över nämnaren men utan bråkstreck. I räkneboken från Bakhshali äro t. o. m. de hela talen uttryckta som bråk med 1 som nämnare. Blandade tal skrev man genom att sätta de hela ovanför bråket t. ex.

$$2\,{}^1/_3 = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\,.$$

I de indiska räkneböckerna förekommer både regula de tri och ränteräkning. I Aryabhattas räknebok fanns följande regula de tri uppgift: "En 16-årig slavinna kostar 32 nishkas, vad kostar en 20-årig?" Indierna brukade anordna offentliga tävlingar i räkning som folknöje. Exemplen gjordes därför så poetiska som möjligt. På 1100-talet utgav *Bhaskara Acarya* d. v. s. Bhaskara den lärde ett astronomiskt arbete, där två kapitel äro ägnade åt räkning. Det ena av dessa kapitel har till överskrift: "Det sköna". Även där begagnades ett poetiskt språk, såsom framgår av följande exempel: "Av en svärm bin satte sig $^1/_5$ på en kadambablomma och $^1/_3$ på en silindablomma. Tre gånger så många som skillnaden mellan dessa skaror flögo till en kutajablomma. Blott 1 bi blev kvar och svävade fram och åter, lockat av den ljuva doften av både en jasmin och en pandanus. Säg mig, hulda flicka, antalet bin". Ett annat exempel vänder sig även till det kvinnliga könet, som tydligen måste ha hyst ganska stort intresse för räkning: "Sköna flicka med glittrande ögon, säg mig vilket är det tal som multiplicerat först med 3, sedan med $^3/_4$, delat med 7, minskat med $^1/_3$ av kvoten, multiplicerat med sig själv, minskat med 52, varefter kvadratroten, drages och sedan det ökats med 8 och dividerats med 10, ger till resultat 2".

Arabien.

Sedan det romerska världsväldet fallit i spillror, råkade den vetenskapliga forskningen i förfall men räddades från glömskan av araberna. Genom kalifernas erövringskrig blev det muhammedanska väldet en världsmakt, som trädde i kontakt med de andra kulturländerna. Snart uppstod i de underkuvade staterna en stab av lärde, som dock ingalunda voro huvudsakligen araber utan män från nästan alla medelhavsländerna, men då deras religion, språk och kultur var densamma, kan det vara rätt att sammanföra dem till enhet. Till en början voro dessa arabiska lärde huvudsakligen översättare av både grekiska och indiska arbeten.

Den arabiska matematiken byggde på sådana översättningar. År 773 översattes ett framstående matematiskt-astronomiskt arbete av en indisk astronom *Brahmagupta*, och omkr. 800 voro Euclides arbeten översatta från grekiskan.

Arabernas äldre siffersystem var liksom grekernas byggt på alfabetet, och för övrigt begagnades även metoden att skriva ut räkneorden fullständigt. Emellertid undanträngdes båda sätten av de indiska siffrorna, som dock icke voro enhetliga utan olika bland ost- och västaraber (sid. 40). Även om de ost- och västarabiska siffrorna visa rätt stora olikheter, äro de dock båda mera lika de indiska siffrorna från andra århundradet än de moderna indiska. Detta tyder på en ganska tidig utvandring.

Redan i andra århundradet kommo de indiska siffrorna till Alexandria, varifrån de utbredde sig västerut över hela det västarabiska väldet ända bort till Spanien. Då nollan kom till i det indiska systemet, införlivades den med de västarabiska siffrorna, utan att dessa undergingo någon nämnvärd förändring. Dessa siffror kallas ofta *gubar*- eller *stoftsiffror* på grund av den indiska metoden att skriva i sand.

Ostaraberna lärde känna de indiska siffrorna först på 800-talet genom de förut omtalade översättningsarbetena, och då hade dessa blivit något annorlunda än de voro under andra århundradet.

Från araberna ha vi ärvt ordet *siffra*. Nollan heter på arabiska *al sifr* (al = bestämd artikeln, sifr = tom, alltså det tomma). Detta sifr blev i Europa *zephirum* eller *cifra*. Då de övriga siffrorna gingo under namn av *figurae*, kallades hela sifferraden *ciphrae et figurae*, men detta uttryck förkortades sedan till *ciphrae*, även då man menade samtliga siffror och icke endast nollan. Vårt noll kommer av det latinska *nulla* (= intet), som började användas på 1200-talet.

Den första verkligt framstående matematikern var *Muhamed ibn Musa Alchwarizmi* (början av

800-talet). Hans räknebok grundade sig huvudsakligen på indiska källor, men då han även tagit med fördubbling och halvering, tyder detta på egyptiskt eller grekiskt inflytande. Addition, subtraktion och multiplikation behandlade han på samma sätt som indierna. Division genomgick han utförligare än dessa.

Ex. $57235 : 254 =$

Divisorn skrevs först under dividendens tre första siffror, och kvoten sattes ovanför divisorns sista siffra (a). Kvoten multiplicerades med divisorn med början från vänster, varvid siffra efter siffra ströks från minuenden sålunda: 2 h. × 2 h. = 4 tiotu., 5 — 4 = 1 tiotu., 2 h. × 5 t. = 10 tu. = 1 tiotu., 1 — 1 = 0 tiotu., 2 h. × 4 e. = 8 h., 72 h. — 8 h. = = 64 h.

2	22	225	225
57235	6435	1355	85
254	254	254	254
a	b	c	d

På så sätt uppstod 6435 (b). Divisorn flyttades nu ett steg till höger, och divisionen fortsatte som förut. Slutresultatet framgår av (d).

Alchwarizmis bok innehöll även den indiska bråkräkningen men genomgick sexagesimalbråken utförligare.

Araberna räknade liksom indierna på sandtavlor. Då de kände till nollan, behövde de inte använda någon abacus med kolumner. Detta räknande med siffror utan abacus har fått namnet *algorithmus,* vilket är en förvrängning av Alchwarizmi. De som räknade efter denna metod kallades *algoritmer* i motsats till *abacisterna,* som använde abacus.

Striden mellan dessa båda räknemetoder blev det karaktäristiska för den matematiska utvecklingen i det medeltida Europa, en strid som slutade med att sifferräkningen avgick med seger.

Europa.

I.

Då klostren började anläggas på 500-talet i Europa, var det av stor betydelse, att det arbete, som påbjöds i klosterreglerna, icke endast var kroppsarbete utan även andligt sådant. Ej heller behövde detta senare utgöras enbart av teologiska studier utan även av t. ex. översättning eller avskrivning av vetenskapliga och klassiska arbeten. Den som fr. a. arbetade för sådana studier var *Cassiodorus,* en italiensk statsman (omkr. 490—580), som själv drog sig tillbaka till klosterlivet och blev en flitig författare. Han ägnade även sitt intresse åt matematiken, men hans bidrag utgjordes huvudsakligen av en samling definitioner, hämtade från grekiska källor eller från arbeten av Boethius (sid. 37).

Under den äldre medeltiden voro klostren de enda kulturhärdarna, och det är inom dess murar, vi träffa de män, som omhuldade räknekonsten och förde den framåt. En sådan var den engelske munken *Beda Venerabilis* (674—735), den engelska historieskrivningens fader. Han var även den som började att datera alla händelser från Kristi födelse och som sålunda lagt grunden till vår nuvarande tideräkning. Han har bl. a. utgivit ett arbete om "Fingerräkning", vilket har sitt stora intresse, då det är det första arbete om denna räknemetod, som vi finna omtalad redan hos egypter och babylonier. Så synnerligen upplysande är dock inte Bedas arbete. Han talar visserligen om huru man skall framställa de olika talen men går inte närmare in på huru metoden praktiserats. Det är troligt, att man egentligen räknade i huvudet, men för att inte tappa bort talen tecknade man dem samtidigt med fingrarna. Under hela medeltiden användes fingerräkningen ganska allmänt och upphörde först på 1500-talet.

Som en sista återstod av fingerräkningen får man kanske betrakta ett multiplikationsförfarande, som ännu lever kvar i så skilda delar av Europa som Auvergne och Valakiet. Vid multiplikation av 7×9 går man till väga på följande sätt. Fingrarna på varje hand numreras 6, 7 o. s. v. med början av tummen. Av den ena handens fingrar sträcker man 6 och 7, av den andras 6—9, medan de övriga fingrarna hålles böjda. Därefter adderas de sträckta fingrarna, vars summa blir tiotalssiffra ($4 + 2 = 6$). De böjda fingrarna multipliceras, och produkten bildar enhetssiffran ($1 \times 3 = 3$). Tack vare denna metod räcker det att lära multiplikationstabellen upptill 5×5 Att metoden är riktig framgår av formeln $(10 - a) \times (10 - b) + 10 \times (a - 5 + b - 5) = ab$, om talen betecknas med a och b.

Vid medeltidens skolor, såväl klosterskolorna som de senare tillkomna katedral- och domskolorna, omfattade arbetsordningen "de sju fria konsterna": grammatik, retorik, dialektik, aritmetik, musik, geometri och astronomi. Då såväl musiken som astronomien räknades som matematiska vetenskaper, intog visserligen matematiken en ganska framskjuten plats å skolschemat, men musiken var den enda gren, som omhuldades. Av de övriga behandlades endast så mycket som var nödvändigt för att kunna bestämma de kyrkliga högtiderna. Trots skolorna trängde således mycket lite av räknekonsten utanför de lärdes krets. Det praktiska livets män fingo använda sig av fingerräkning, tabeller och räkning på abacus.

Abacusräkningen, som var mycket otymplig, undergick en avsevärd förbättring och förenkling omkr. 800—1000, varigenom räknekonsten tog ett mycket stort steg framåt. Förtjänsten härav tillkommer återigen en kyrkans man, *Gerbert av Reims* (940—1008), som till sist blev påve under namn av Sylvester II. Hans abacus utgjordes av en tavla med kolumner med de romerska siffrorna I, X, C o. s. v. Vid räknandet begagnade han sig av marker med de romerska siffrorna eller oftare med de indiska siffrorna i en form, som

M	C	X	I
4		3	8

Gerberts abacus.

mest överensstämde med de västarabiska gubar-siffrorna. Dessa siffertecken kallas vanligen *apices*. Huru Gerbert lärt känna dessa tecken, veta vi ej. Enligt några forskare skulle han ha varit den förste, som begagnat dem i Europa efter att ha fått kännedom om dem i Spanien, där han vistats någon tid. Enligt andra skulle han ha hämtat dem ur Boethius geometri (sid. 37), som dock i allmänhet anses vara förfalskad och troligen från Gerberts egen tid.

Abacusräknandet blev sålunda förenklat till ett slags kolumnräkning. Addition och subtraktion kom icke att nämnvärt skilja sig från våra dagars.

C	X	I
	1	6
	2	8
	~~4~~	8
~~1~~	~~6~~	
~~2~~	4	
4		
4	4	8

Även multiplikation blev ganska lätt, som torde framgå ur närstående exempel. Då det här icke går att stryka ut och sätta dit en ny siffra, som man då gjorde, har jag i stället strukit över siffrorna och placerat den nya siffran under. Gången har varit följande: 6 e. × 8 e. = = 4 t. + 8 e. (4 i X, 8 i I), 6 e. × 2 t. = 1 h. + 2 t., 2 t. + + 4 t. = 6 t. (4 i X ändras till 6, 1 i C), 1 t. × 8 e. = 8 t., 8 t. + 6 t. = 1 h. + 4 t. (6 i X ändras till 4, 1 i C ändras till 2), 1 t. × 2 t. = = 2 h., 2 h. + 2 h. = 4 h. (2 i C ändras till 4).

I division använde man två metoder: den "gyllene" och "järndivision". *Den gyllene* skilde sig icke nämnvärt från våra dagars. Man räknade sålunda:

16 i 44 t. går 2 t., $2 \times 16 = 32$, $44 - 32 = 12$ (4 i C ändras till 1 och 4 i X till 2), kvoten 2 sättes nederst i X, 16 i 128 e. går 8 e. (8 sättes nederst i I).

C	X	I
4	1 4	6 8
~~4~~ 1	~~4~~ 2	8
	2	8

Betydligt svårare var *järndivision* eller, som den också kallades, *komplementär division*, eftersom divisorn kompletterades till jämnt tiotal. I vidstående exempel blir sålunda divisorn 20. Men då den erhållna resten blir för liten, måste kvotsiffran (i detta fall 20) multipliceras med 4 (utfyllningstalet) och läggas till den för låga resten, innan divisionen fortsätter. Schemat torde räcka

	Ex. 448 : 16	
	448 : 20	20
20 × 20	400	
Rest	**48**	
4 × 20	80	
Summa	128 : 20	6
6 × 20	120	
Rest	8	
4 × 6	**24**	
Summa	32 : 20	1
1 × 20	20	
Rest	**12**	
4 × 1	4	
Summa	16 : 16	1
Kvot 20 + 6 + 1 + 1 = 28		

C	X	I	
	1	6	*Divisor*
		4	*Utfyllningstal*
4	4	8	*Dividend*
~~4~~	~~4~~	~~8~~	
~~1~~	~~2~~	~~2~~	*Dividendens ändringar*
	~~3~~	~~6~~	
	~~1~~		
	2	6	
		1	*Delkvoten*
		1	
	2	8	*Kvotsumma*

som förklaring på tillvägagångssättet i fortsättningen. Sista gången måste divisorn vara 16 och icke 20. Kvoten erhålles genom sammanläggning av alla delkvoterna. På abacusen skulle divisionen haft det utseende, som bilden visar. Räknemetoden är ju inte synnerligen elegant, och det var därför icke att undra på att man, sedan man lärt känna enklare metoder, talade om "svettande abacister".

Den abacistiska räknemetoden upplevde sin blomstringsperiod på 1100-talet, varefter den småningom undanträngdes av den indiska.

II.

Gerbert, som införde det förenklade abacusräknandet, kan även åtminstone indirekt sägas ha bidragit till att den indiska räknemetoden vann insteg i Europa. Han var långt ifrån någon ensidig matematiker utan intresserade sig för alla klassiska vetenskaper. Framför allt sysslade han med Aristoteles, som under hela medeltiden gällde för den förnämsta auktoriteten inom snart nog alla vetenskapliga forskningsgrenar. Gerberts skrifter blevo impulsen till ett uppsving inom det vetenskapliga livet på 1100-talet. Detta tog sig uttryck fr. a. i ett livligt översättningsarbete från arabiskan, på vilket språk de klassiska författarna voro lättare tillgängliga än på grekiskan. Kontakten med araberna blev ännu livligare under korstågen, då Europa genom korsfararna fick upp ögonen för den arabiska kulturens överlägsenhet.

Båda faktorerna medverkade till att även göra de arabiska siffrorna och räknemetoderna kända i Europa. Detta blev ännu mera fallet, sedan Alchwarizmis räknebok blivit översatt från arabiskan omkr. år 1150. Översättningen började: "Talat har Algorithmi." Egentligen borde det ha stått: "Talat har Alchwarizmi", ty som redan är nämnt (sid. 50), är algoritmi endast en förvrängning av det arabiska personnamnet.

Den förnämste representanten för den algoritmiska skolan var medeltidens störste matematiker, *Leonardo Pisano,* köpman från Pisa (omkr. 1175—1220). Han fick i sin ungdom lära sig att räkna både med abacus och efter den indiska metoden. Genom handelsresor Medelhavet runt ökade han sina kunskaper och behärskade snart samtidens matematiska vetande. I sitt arbete "Liber abaci", vars första upplaga troligen utkom 1202, slog han ett slag för de indiska siffrorna och räknemetoderna. Boken innehöll talskrivning med de arabiska siffrorna, framställning av talen genom fingerböjningar, olika multiplikations- och divisionsmetoder, bråk, regula de tri, bolagsräkning m. m. Vad hans egna bidrag till matematiken beträffar, ligga de utanför den egentliga aritmetikens område, varför jag förbigår dem. De äro dock så betydande, att han måste anses som den störste matematikern under medeltiden. För övrigt kan Leonardo sägas vara den förste lekmannen bland matematikerna. Som sådan står han även ganska ensam, ty också efter hans tid utgöras matematikerna av klostrens och kyrkans män, fastän det vetenskapliga arbetet i och med universitetens uppkomst på 1200-talet delvis flyttade utanför klostermurarna.

Under 1200- och 1300-talet utgåvos även andra arbeten än Leonardos om den algoritmiska metoden, men det dröjde ännu länge, innan det nya bekväma räkneförfarandet trängde tillbaka abacusräknandet. Dels hade allt nytt svårt att tränga ut i vidare kretsar i dessa tider, då böcker ännu voro sällsynta. Dels kunde ett räknebräde användas huru många gånger som helst — man hade ju bara att skaka om sanden. Papperet, som användes vid räkning enligt den nya metoden, dugde endast en gång, vilket betydde mycket då för tiden, när även papper var sällsynt. Först genom korstågen hade konsten att göra papper kommit till Europa från araberna, och tillverkningen var tämligen liten, ända tills boktryckerikonsten framtvingade en ökad produktion.

Räknandet på papper nödvändiggjorde delvis ändringar i räknemetoderna. I stället för att stryka ut siffrorna såsom förut, strök man över dem och skrev de nya siffrorna ovanför. Så uppstod *uppåtgående multiplikation* eller, som den även blivit kallad, *galärmultiplikation*, eftersom bilden av alla siffrorna tillsammans bilda konturerna av ett segelfartyg. Vidare ansågs metoden vara den snabbaste, liksom galären var det snabbaste fartyget.

Galärmultiplikationen var dock ingalunda synnerligen enkel, såsom framgår av vidstående exempel, där 374 multiplicerats med 245. Slutresultatet utgöres av de kvarstående icke överstrukna siffrorna i sifferbergets övre del. Den nedre delen har uppstått ur

6
1~~5~~
~~04~~3
[illegible]
~~8735~~
[illegible]
~~62~~374
24555
244
2

den undre faktorn, som först skrives så att dess entalssiffra kommer att stå under den övre faktorns hundratalssiffra, men som för varje ny multiplikation flyttas ett steg åt höger, för att det skall vara lättare att veta, till vilken siffra i sifferberget man skall addera den första siffran, som fås vid delmultiplikationen.

För att förtydliga tillvägagångssättet skall jag skriva upp sifferbergets utseende efter varje delmultiplikation.

1. Faktorn 245 multipliceras med den siffra i den andra faktorn, som står ovanför entalssiffran i den förra (3).

$3 \times 2 = 6$ skrives över 2 i 245.

$3 \times 4 = 12$, 1 adderas till 6, 7 sättes över 6, som överstrykes, 2 skrives över 4 i 245.

$3 \times 5 = 15$ 1 adderas till 2, 3 sättes över 2, som överstrykes, 5 skrives över 3 i 374.

$$\left.\begin{array}{r} 15 \\ 12 \\ 3 \times 245 = 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \\ 374 \\ 245 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 735 \\ \cancel{6}\cancel{2}374 \\ 245 \end{array}$$

2. Faktorn 245 flyttas ett steg åt höger och multipliceras med den siffra i den andra faktorn, som nu står ovanför entalssiffran i den förra (7).

$7 \times 12 = 14$, 4 adderas till 3, 1 till 7 o. s. v.

		0
		996
35		8735
28	735	[illegible]
7 × 245 = 14	62374	62374
	2455	2455
	24	24

3. Faktorn 245 flyttas ytterligare ett steg åt höger. Därefter 4 × 2 = 8, 8 adderas till 6 o. s. v.

		[illegible]
		15
	0	043
	996	[illegible]
20	[illegible]	8735
16	73500	[illegible]
4 × 245 = [illegible]	[illegible]	62374
	24555	24555
	244	244
	2	2

Galärdivision var knappast så besvärlig, åtminstone blev sifferberget något mindre, såsom framgår av vidstående exempel, där 57235 dividerats med 254. Kvoten sattes till höger om sifferberget, och kvarstående icke överstrukna siffror utgjorde rest.

118	
230	
1645	
57235	225
25444	
255	
2	

Följande må tjäna som förklaring:

$$
\begin{array}{r|c}
\cancel{1}64 & \\
57235 & 2 \\
254 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|c}
1 & \\
\cancel{2}3 & \\
\cancel{1}\cancel{6}\cancel{4}5 & \\
\cancel{5}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{3}5 & 22 \\
2544 & \\
25 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r|c}
\cancel{1}\cancel{1}8 & \\
\text{[illegible]} & \\
\cancel{1}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{5} & \\
\cancel{5}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{3}5 & 225 \\
25444 & \\
255 & \\
2 &
\end{array}
$$

254 i 572 går 2	**254 i 643 går 2**	**254 i 1355 går 5**
8	**8**	**20**
10	**10**	**25**
2 × 254 = 4	**2 × 254 = 4**	**5 × 254 = 10**

Galärmetoderna voro dock inte de enda, som användes. I synnerhet förekom multiplikation i flera variationer. Vår nuvarande metod, *den nedåtgående multiplikationen,* har vuxit fram ur den indiska nätmultiplikationen (sid. 45). Denna förekom i italienska läroböcker i slutet av 1400-talet under namn av "svartsjukemultiplikation", ty nätet, vari siffrorna skrevos, påminde om fönstergallret i de italienska jungfruburarna. Utom den sedvanliga nätmetoden fanns även följande typer:

	3	7	4	
	7	4	8	2
1	4	9	6	4
1	8	7	0	5
9	1	6	3	0

I

374

245

	1	8	7	0
1	4	9	6	
7	4	8		
9	1	6	3	0

II

$$\begin{array}{r l} 374 & \\ \hline 1870 & /\ 5 \\ 1496 & /\ 4 \\ 748 & /\ 2 \\ \hline 91630 & \end{array}$$

III

I den första av dessa sker multiplikationen liksom i nätmetoden snett från höger. I den andra har nätet ändrats, och om detsamma borttages, överensstämmer metoden med vår nuvarande. Den tredje påminner mest om vår, men i faktorernas uppställning finns ännu en rest kvar av nätmetoden.

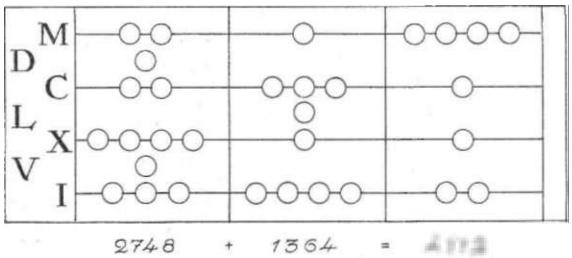
Den nedåtgående multiplikationen och divisionen, sådana som vi använda dem, har man funnit i räkneböcker från 1490-talet.

III.

Boktryckerikonsten verkade befruktande även på matematiken. Genom att böckerna paginerades med de arabiska siffrorna, blevo dessa mera kända. Det blev även möjligt att utgiva läroböcker, som voro avsedda icke endast för den lärda världen utan även för folket. I de läroböcker, som uppstodo i början på 1500-talet, upplevde abacusräknandet, mot vilket algoritmerna stridit, en ny blomstringsperiod. Dock hade abacusen ändrat utseende och namn. Den kallades vanligen *räkne-*

bänk eller *bankir* och utgjordes av en tavla med parallella vågräta linjer, på vilken man placerade räknepenningar, varför metoden ofta gick under namn av *räkning med räknepenningar* till skillnad från *räkning med fjäder* d. v. s. med arabiska siffror.

Räknepenningarna lades på och emellan linjerna. På den första linjen närmast den räknande placerade man enheterna, på den andra tiotalen, på

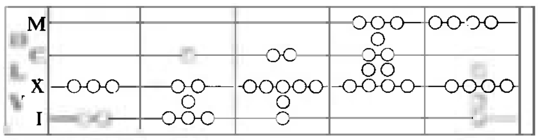


Räknebänk.

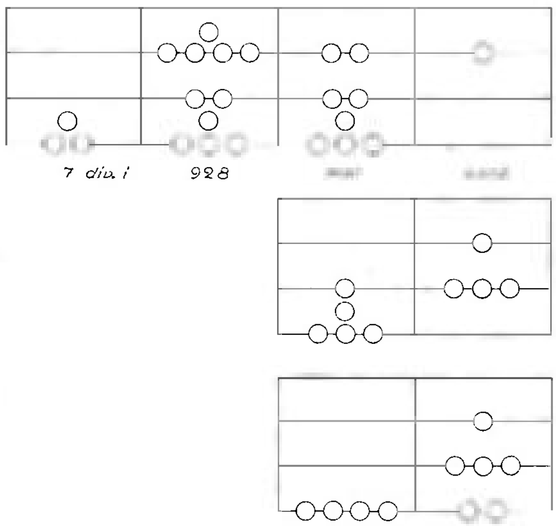
den tredje hundratalen o. s. v. En räknepenning i det första mellanrummet hade värdet *fem,* i det andra mellanrummet *femtio* o. s. v. Ville man addera t. ex. 2748 och 1364, skrev man d. v. s. lade man de båda talen till vänster på räknebänken och resultatet till höger. Man adderade så här: 3 e. + 4 e. = 7 e. = 2 e. + 5 e., 2 e. markeras, 5 e. + 5 e. = 1 t., 1 t. + 4 t. + 1 t. = 6 t. = = 1 t. + 5 t., 1 t. markeras, 5 t. + 5 t. = 1 h., 1 h. + + 2 h. + 3 h. = 6 h. = 1 h. + 5 h., 1 h. markeras, 5 h. + 5 h. = 1 tu., 1 tu. + 2 tu. + 1 tu. = 4 tu., som markeras.

Det torde icke vara svårt för läsaren att tänka ut huru det gick till, då samma tal subtraherades.

Vid multiplikation lade man först de produkter, som bildades, då den ena faktorn multiplicerades



med den andra faktorns entals- resp. tiotalssiffra, varefter de båda produkterna adderades. (2 e. × × 8 e. = 16 e., 2 e. × 2 t. = 4 t., 2 e. × 1 h. = 2 h.



samt 3 t. × 8 e. = 24 t., 3 t. × 2 t. = 6 h., 3 t. × × 1 h. = 3 tu.).

För att förtydliga tillvägagångssättet vid en division har jag å bilden angivit det utseende, räknebänken fick med avseende på rest och kvot efter varje deldivision.

Räkning med räknepenningar hade icke låtit tala om sig, förrän den helt plötsligt dök upp i 1500-talets räkneböcker. Det är dock troligt, att den vuxit fram ur abacusräknandet och under ett par århundraden begagnats av personer, som icke kunnat skriva. Metoden rekommenderades också särskilt åt "dem, som ej förstå betydelsen av siffror, såsom fallet är med flertalet handlande, snickare, krögare och andra personer i ringa villkor". Den förekom även i de första svenska räkneböckerna, som utgåvos i början av 1600-talet. Ända in i våra dagar lever det kvar en form av räkning med räknepenningar — virapullan.

Räknebänkens största förtjänst är att den brutit mark för sifferräkningen, ty samtidigt som man räknade med räknepenningar, brukade man även räkna med fjäder d. v. s. med de arabiska siffrorna. Detta framgår av titelbladet på en räknebok från 1568. Räknemästaren sitter i mitten och förklarar räknebänken, lärjungen t. v. löser uppgiften på linje och den t. h. med fjäder.

I detta sammanhang vill jag även nämna något om bilden å omslaget. Det är ett träsnitt från ett encyklopediskt arbete "Margaritha philosophica" från år 1503. Bilden inleder den del, som handlar om räknekonsten. I mitten står en kvinna, Typus arithmeticae, och bär i vardera handen en öppnad bok. T. v. på bilden sitter Boethius och räknar med siffror, t. h. Pythagoras, som räknar med räknepenningar. Huruvida Boethius har känt till de arabiska siffrorna har ännu ej kunnat utredas. Pythagoras har nog haft reda på räknebrädet men säkerligen icke i form av räknebänk. Trots dessa felaktigheter blir dock bilden en symbol för striden mellan medeltidens båda räknemetoder, den algoritmiska och abacistiska, ja, för den ännu äldre striden mellan verklig räkning och mekanisk.

IV.

Reformationen förde bl. a. med sig ett ökat intresse för folkundervisningens ordnande. I de många skolordningar, som därefter sågo dagen, påyrkades också undervisning i räkning. Sålunda har Luther i en av sina skrifter framhållit, att barnen icke endast böra lära sig modersmålet och historia utan även att sjunga samt lära sig "Musica med hela matematiken". Liksom under medeltiden ansågos fortfarande musik och matematik stå i nära samband med varandra.

Det var dock ganska minimala kunskaper, som meddelades t. o. m. vid universiteten. I programmet för matematikundervisningen i Wittenberg säger Melanchton: "Grunderna i aritmetik, addition och subtraktion, äro obetingat nödvändiga för det dagliga livet och så lätta, att gossar kunna lära dem, reglerna för multiplikation och division fordra visserligen en smula mer uppmärksamhet, men med någon ansträngning begripas de dock snart". Undervisningen i räkning vid universiteten på 1500-talet sträckte sig i allmänhet icke längre än till regula de tri och bråkräkning — således en knapp folkskolekurs.

Bråkräkningen hörde till universiteten och icke till skolorna. Först genom decimalräkningens införande trängde den ut i vidare kretsar.

Under tidernas lopp hade det vuxit fram fyra bråksystem: egypternas stambråk, babyloniernas sexagesimalbråk, romarnes duodenalbråk och indiernas bråk, som leva kvar i våra dagars bråksystem. Araberna skänkte oss bråkstrecket och utbildade bråkräkningen, så att den överensstämde med vår. Leonardo Pisano har den största förtjänsten av att ha infört denna i Europa. Under hela medeltiden användes dock även sexagesimalbråk, och det är ur dessa, som decimalbråken växa fram.

I äldre trigonometriska beräkningar uttrycktes alltid bråkdelar som sexagesimalbråk, således som delar av 60 eller 60 × 60 o. s. v. Sedan började man använda sig av 60 000-delar i stället för 60-delar. Dessa bråk voro således delvis sexagesimala delvis decimala. I mitten av 1500-talet togs steget fullt ut, och bråken uttrycktes i 100 000-delar. Därmed var i själva verket decimalräkningen införd, men den användes då endast i trigonometriska beräkningar.

Först omkring 100 år senare underkastades dessa decimalbråk en mera systematisk undersökning av en holländare *Stevin*, som därför brukar anses som decimalbråkens upphovsman. Hans arbete härom utkom år 1585. Han skrev icke decimalbråken på samma sätt som vi utan på ett mera opraktiskt sätt t. ex. 0,4694 = 4 ① 6 ② 9 ③ 5 ④, 5,24 = 5 ⓪ 2 ① 4 ② eller 0,37 37 ②. En addition och en multiplikation hade då följande utseende:

⓪	①	②	③
25	1	7	4
962	5	4	9
987	7	2	3

		④	⑤	⑥	
		7	2	1	
			3	7	②
	5	0	4	7	
2	1	6	3		
2	6	6	7	7	
④	⑤	⑥	⑦	⑧	

Vårt nuvarande skrivsätt, decimalkomma eller punkt, förekom för första gången år 1608 i ett trigonometriskt arbete men började användas mera allmänt först på 1700-talet. I Sverige infördes decimalräkningen av *Georg Stiernhjelm*, som lärt sig metoden under en utrikesresa 1625.

I sitt arbete om decimalbråk hade Stevin även riktat en uppmaning till alla regeringar att införa decimala mynt-, mått- och viktsystem, så att decimalräkningen kunde komma till full användning. Denna hans vädjan förklingade ohörd. Först under den franska revolutionen upptogs frågan om decimala mått- och viktsystem, vilket resulterade i att år 1799 vårt nuvarande metersystem antogs. Metersystemet, som nu har vunnit insteg i alla Europas länder (i Sverige sedan 1878), kan sägas utgöra den sista stora förenklingen inom den elementära aritmetiken.

INNEHÅLL:

	Sid.
Inledning	5
Tal och talsystem	6
Egypten	10
Babylon	15
Grekland	22
Rom	33
Indien	38
Arabien	47
Europa	51