MATEMATIKEN I FINLANDS SKOLA

SEVERIN JOHANSSON

MATEMATIKEN I FINLANDS SKOLA

HELSINGFORS 1938

HELSINGFORS 1938
MERCATORS TRYCKERI

Severin Johansson erhöll år 1922 av Regeringen uppdraget att utarbeta ett förslag till omorganisation av matematikundervisningen vid landets lärdomsskolor. Den närmaste orsaken härtill var det mycket uppmärksammade föredrag, Johansson hade hållit vid forskarmötet föregående sommar. Det dröjde emellertid fem år innan Johansson förmådde sig att utföra det givna uppdraget. Orsaken till det långa dröjsmålet var tvivelsutan delvis känslan av svårighet att sammanfatta den rikedom av tankar, som småningom mognat under loppet av de två decennier, under vilka Severin Johansson verkat som skollärare, som examinator i studentexamen och som lärare vid Universitetet, Tekniska Högskolan och Åbo Akademi. Delvis plågades han även av medvetandet, att han i sin uppfattning om nödvändigheten av en grundlig omläggning av undervisningens program och metoder knappast bland sina kolleger hade att påräkna något starkare stöd.

Det betänkande, som slutligen kom till stånd, är ett märkligt dokument. Severin Johansson målar med bred pensel i snabba drag. Färgerna äro klara och starka. Framställningen sprudlar av liv, medan formella detaljer behandlas med suveränt förakt.

Det förslag till revision av den matematiska skolundervisningen, som Johansson framför, har emellertid icke karaktären av något hugskottsartat infall, utan grundar sig på en under decennier mognad övertygelse om möjligheten av en sådan omläggning av undervisningens metod och en sådan omstädning av lärostoffet, att matematiken som läroämne ur elevens synpunkt bleve väsentligt lättare, medan värdet av det inhämtade matematiska vetandet samtidigt skulle ökas.

Då jag icke är matematiker och aldrig verkat som skollärare, saknar jag självfallet kompetens att uttala mig om detaljerna i Severin Johanssons betänkande. Att jag icke i alla punkter kan omfatta hans mest radikala förslag saknar sålunda i detta sammanhang varje betydelse. Däremot tror jag mig äga vissa förutsättningar att riktigt värdesätta författaren och rätt förstå hans intentioner. Som skolpilt blev jag bekant med den stränge, 26-årige magister Johansson, jag mötte docenten Johansson som examinator i studentexamen och åhörde som student hans glänsande föreläsningar för att slutligen vid mognare ålder i Rektorn för Åbo Akademi vinna en av mina närmaste vänner. Min personliga kännedom om halten av författarens andliga arsenal gör att jag med glädje understött tanken på en publicering av Johanssons betänkande och gärna åtagit mig att förse detsamma med ett kort förord.

Det är med en viss känsla av vördnad jag genomläst detta betänkande. Severin Johansson hade redan tidigt kommit i beröring med de reformmatematiska strävandena i utlandet och med oföränderligt intresse tagit del av all åtkomlig litteratur rörande den matematiska undervisningens problem. Han hade experimenterat med sina reformidéer på olika skolstadier och sålunda förskaffat sig en personlig uppfattning om deras värde. Med detta vetande och denna erfarenhet som bakgrund bildade han sig steg för steg en klar uppfattning om *huru* matematiken skulle läras: »Icke genom regler och dekret skall matematiken bibringas, utan genom att *användas* såsom ett förnuftigt uttrycksmedel för tankar och handlingar, som eljes icke kunna bringas till uttryck.» — Men Johansson inskränkte sig ingalunda till att blott och bart diskutera undervisningens metod. Han såg större på den uppgift, som givits honom. Matematiken skulle icke få givas för stor plats i skolundervisningen.

Det står fullt klart för Severin Johansson, att matematiken icke är skolans enda ämne, och att dess slutliga ställning bör bestämmas med beaktande av det *suum cuique*, som här bör äga utslagsrätt. »Endast den upplysta omtanken om det helas välgång, det allmänt mänskligas framhävande som motvikt mot ensidigheten kan här få vara utslaggivande.» Johansson har, med glödande intresse för skolans sociala uppgift, sökt frigöra sig från de tvångsföreställningar, vilka för varje pedagog inom varje läroämne med nödvändighet uppträda som en följd därav, att det invanda lärostoffet genom inslitning tenderar att framstå som en nödvändig beståndsdel i varje människas utdaning, oberoende av huru godtyckligt detta lärostoff möjligen sammanbragts.

Är man icke nog lyhörd, får man lätt vid genomläsandet av Johanssons betänkande den uppfattningen, att han ansåg den traditionella matematikundervisningen komplett underhaltig såväl med avseende å vad som lärdes, som även med avseende å undervisningens metod. Så var emellertid icke förhållandet. Johansson ansåg utan tvivel i själ och hjärta att allt var ganska gott, men att i fråga om matematiken endast det bästa var gott nog. Då han ansåg en radikal förbättring möjlig, borde denna därför självfallet genast och beslutsamt genomföras.

Slutligen några ord om Severin Johanssons ovanligt pregnanta litterära stil. Då hans tankar mognade till full klarhet, framstodo de för honom själv med en så våldsam relief, att det oväntade spelet mellan ljus och skugga ofta utlöste hans humoristiska reflexioner. Det lönar sig att lystra, då denna humor tränger fram till ytan. Då Johansson, djupt övertygad om det rätta i sin förkunnelse, vädrar motstånd och invändningar, blir tonen lätt både arrogant och agressiv. Därav bör man dock icke låta sig störas. Det knastrar och viner litet, då den heliga elden brinner.

Helsingfors i oktober 1938.

Jarl A. Wasastjerna.

INLEDNING.

Uppgiften att utarbeta en plan för matematikundervisningen i landets lärdomsskolor ställer oss inför tvenne särskilda problem, om uppgiften tages i sin allmännaste fattning. Det gäller först och främst att taga ställning till frågan om omfånget av det matematiska lärostoff, som skall indragas i undervisningen. Men det gäller också att ingå på de med detta lärostoffs bibringande sammanhängande metodiska frågorna. Det handlar sålunda om *lärostoff* och *metod* eller på ett annat sätt uttryckt: det gäller att utveckla, *vad* som skall läras och *huru* detta skall läras.

Det skall under den fortsatta framställningen visa sig, att dessa båda moment icke äro från varandra avgränsbara. I sina detaljer sammanhänger visserligen metodiken med den pedagogiska erfarenheten, sådan den hos dem, som hava sig undervisningen anförtrodd, utvecklar sig under årslångt samarbete med eleverna, men i sin syntetiska gestaltning är metoden beroende av den allmänna syftning, som med lärostoffets fixerande avses, och ingår såsom en integrerande beståndsdel i kunskapsförrådets uppbyggande.

Vad själva lärostoffet vidkommer, handlar det härvidlag om frågan, vilka delar av den vittutgrenade matematiken som skola upptagas på lärdomsskolans arbetsprogram. Detta är givetvis icke en fråga, där den matematiska vetenskapen ensam skall föra ordet. Visserligen förutsätter dess diskuterande också betydande matematiska insikter. Men lärdomsskolan finnes icke till för vetenskapens skull. Lika litet kan denna fråga enbart läggas i händerna på dem som företräda matematiken inom lärdomsskolan. Den är nämligen långt ifrån en pedagogisk specialfråga. Frågan om det matematiska lärostoffet i lärdomsskolan är en fråga om lärdomsskolans hela uppgift. Matematiken kan givetvis där icke göra anspråk på någon annan ställning än den, som för matematikens vidkommande betingas av denna uppgift.

Emellertid är lärdomsskolan icke, eller bör åtminstone icke vara, någon isolerad del av undervisningsväsendet i dettas helhet. Lärdomsskolans och därmed också den inom skolan meddelade matematikundervisningens uppgift tecknar sig därför mot bakgrunden av undervisningens allmänna problem. Vi ställas med andra ord inför frågan: *Vad är och vad vill skolan?*, där vi under den syntetiska benämningen *skolan* sammanfatta undervisningens totalitet. Skolans hela problem reser sig inför oss.

I högre grad än om lärdomsskolan kan väl sägas, att detta problem icke är något problem, som skall lösas av specialister, vare sig vetenskapsmän eller pedagoger. Det är ett *allmänt samhällsproblem.* Det tillkommer samhället, att, givetvis med anlitande av all den sakkunskap i detaljerna som från dessa håll kan erbjudas, upplägga detta samhällsproblems lösning så, att skolan i sin verklighet motsvarar samhällets behov. Därvid bör samhällets behov fattas i sin vidaste bemärkelse såsom totaliteten av den utbildning och bildning, som samhällets materiella och andliga stabilitet och dess framåtskridande erfordra.

Nu är samhällets behov, på detta sätt fatta‘, en historiskt betingad företeelse, som undergår förändring med tiden. Härav följer att skolans problem har ett av tiden betingat innehåll, som bör följa den allmänna utvecklingen åt eller åtminstone, där en dylik kontinuerlig anpassning icke är med förhållandena förenlig, undergå en tidvis skeende revision, för att skolan icke skall äventyra att med sin verksamhet tillfredsställa ett samhällsbehov, som icke längre föreligger, medan betydelsefulla, av nuet betingade utbildnings- och bildningsfrågor stanna utom dess värld.

Min uppgift är ju att avge ett utlåtande över matematikundervisningen i lärdomsskolan och inkomma med eventuella förslag till dess omorganisation. Vi ha nu sett, hurusom denna uppgift icke kan lösgöras från frågan om lärdomsskolans allmänna uppgift, vilken i sin tur sammanhänger med frågan om vad jag kallat skolans problem. Utan klara begrepp i alla dessa frågor, är min uppgift rätt konturlös och under sådana förhållanden svår att lösa. Om jag åter skapar sådana klara begrepp och lägger en skolbild till grund för min framställning, äventyrar jag, att den plan jag framlägger för matematikundervisningen inom den i denna allmänna skolbild ingående lärdomsskolan icke skall i nuvarande förhållanden ega den tillämplighet, som väl med uppdraget avses. Jag vill emellertid redan på denna punkt förutskicka, att på grund av särskilda omständigheter de utvecklingar, till vilka jag efterhand skall komma ifråga om stoffet och metoden, ega sin omedelbara användbarhet och kunna betraktas såsom en revision av matematikundervisningens ställning vid den nu verkande lärdomsskolan såsom denna nu fattar sina uppgifter.

Det kan icke nekas, att en deskriptiv behandling av vår skola stöter på en del säregna omständigheter, som sammanhänga med dess historiska tillkomst. Den företer en rätt så heterogen karaktär, där man i en del enskildheter och måhända i hela dess totalitet har svårt att finna resultaten av en fullständig genomarbetning av problemet. Vi ha skolor av skiftande typ: folkskolan, fackskolan, lärdomsskolan, högskolan. De sakna emellertid enligt mitt förmenande det inbördes sammanhang, som skulle låta dem framträda såsom beståndsdelar i samma enhetliga system. *Folkskolan* har sin särskilda uppgift. Den *förbereder icke för lärdomsskolan.* Visserligen kan eleven på en viss punkt utgå ur folkskolan och inträda i lärdomsskolan, men detta markerar ingen kontinuerlig inarbetning av kurserna i varandra. Det finnes över huvud ingen förberedelse av denna art för lärdomsskolan, vilket sakförhållande som bekant uppkallat det privata initiativet till grundande av utom den egentliga skolans ram fallande förberedande skolor. En liknande egenartad diskontinuitet ha vi att observera ifråga om fackskolan. Lärdomsskolan förbereder icke för fackskolan. Här är sakförhållandet ungefär detsamma som vid övergången från folkskolan till lärdomsskolan, om man också betecknat det för inträde i fackskolan nödvändiga avbrytandet av lärdomsskolevistelsen med ett särskilt namn, mellanskole-examen. Denna mellanskoleexamen betecknar i övrigt icke en genomtänkt examen, med kurser som avslipats mot varandra med tanke på denna examens användbarhet, utan kurserna beteckna endast ett avbrytande av den fortlöpande, mot andra mål siktande lärdomsskolekursen. Högskolan, d. v. s. tekniska högskolan och handelshögskolan med sina specificerade program samt universitetet med sina från fakultet till fakultet vexlande uppgifter, bygger på lärdomsskolans allt vetande omfattande problem. Därutöver bildar lärdomsskolans dimissionsexamen en allmän medborgarexamen, med vars kunskapsmaterial dimissus har att möta den mångskiftande möjlighet till värv, som faller utom de rena fackområdena.

Hela denna heterogena anordning saknar det väl genomtänktas prägel. Denna bild har också komponerats av beståndsdelar, vilka tillkommit oberoende av varandra, allteftersom nya idéer brutit sig fram.

Mest bekymmersam är i detta sammanhang lärdomsskolans ställning. Den börjar först och främst icke så att säga från början. Dess uppgift är också icke alldeles klar. Det måste väl ändock betecknas såsom vittskilda uppgifter att förbereda för universitetsstudier och för en allmän medborgarexamen. Likaså är det en uppgift, som icke löses genom betygutdelning i en viss klass, att förbereda för fackskolan. I allmänhet har väl utvecklingen varit den, att den allmänna högre medborgarbildningens tanke varit lärdomsskolans bärande tanke, vilket tydligen återspeglas i lärdomsskolans historia, där de vexlande tidsepokernas vexlande bildningsideal tryckt sin prägel på skolan och ofta för länge fått göra sig gällande.

Emellertid äro denna heterogena skolbilds brister på en punkt av en annan art än den, som betingas enbart av bristande anslutning mellan bildens beståndsdelar. Det är ju en historiskt begriplig anordning, som tagit sig uttryck uti de undervisningens tvenne linjer, av vilka den ena leder fram över lärdomsskolan, medan den andra utmynnar i folkskolans slutexamen och vilka linjer kunna betecknas såsom divergerande. En sådan anordning, som tidigt etablerar en skiljoväg med utpräglad prädestination för framtida värv, sammangår emellertid icke längre med vår uppfattning om samhället. Skall skolan genom sin organisation återspegla den allmänna samhällsuppfattningen, kan denna tudelning av bildningsvägen icke längre bli beståndande.

Jag säger detta fullt medveten om den allmänna konsekvens för skolans organisation, som följer ur denna tankegång. En skall den väg vara, som leder till bildningen. De, som vandra där, få träda ut, när de andliga resurserna tryta och lämna vägen fri för dem, som av naturen utsetts att vandra längre. Den första stationen betecknar den bildningsgrad, som nu eftersträvas av folkskolan. Den andra etappen är den punkt på vägen, som ligger ungefär där nu mellanskoleexamen har sin plats. Därifrån gå bivägarna till olika arter av fackskolor, tekniska läroverk, handelskolor m. fl., medan examen på samma gång bygges ut till den allmänna medborgarexamen, som är tillräcklig för inträde på en hel del mindre fackbetonade banor, där nu studentexamens gymnasialvetande icke ger just något nämnvärt tillskott av kapacitet.

Nu är att märka, att de två stationerna på denna bildningsbana icke äro avsedda att endast innebära en avstigning från tåget, ett avbrytande av resan. De äro avsedda att vara grundligt genomtänkta examina med i varandra väl inkomponerade kurser, som i sin sammanfattning ge just det som i vartdera fallet är lämpligt, medan de på samma gång äro ett solitt underlag för dem, som syfta längre.

Vad sedan den fortsatta utvecklingen efter den allmänna medborgarexamen vidkommer, så skall denna icke enligt mitt förmenande syfta till en allmän studentexamen. Den skall fastmer på olika gymnasiallinjer söka utforma den kompetens, som förbereder för högskolan, här tagen i sin allmänna fattning såsom skolans högsta utbildningstyp.

Så fattad blir den enhetliga skolan en enhetlig väg, som leder från början, från okunnigheten till vetandets högsta höjder. Under vägen utgår genom ett naturligt urval i huvudsak trenne typer av samhällsarbetare, som vi med en skematisk benämning kunna fixera såsom soldater, underofficerare och officerare i samhällets armé eller, med en fredligare formulering, såsom arbetare, verkmästare och ingenjörer i samhällsverkstaden.

Denna tanke skall jag icke utforma närmare. Den är för resten icke ny. Folkskolan som bottenskola är ett slagord, kring vars innehåll många strider stått. Och linjeindelningen på gymnasialklasserna är en gammal fråga. Jag vill endast ytterligare understryka vad jag tidigare sade, att problemet ända till denna punkt icke är ett vetenskapligt och icke heller ett pedagogiskt problem. Samhället besluter i denna punkt suveränt om sin skola och kan sedan giva vetenskapens och pedagogikens företrädare i uppdrag, att inom den utstakade ramen framlägga sina förslag till vetandets parcellering. Emellertid bör icke heller här det slutliga avgörandet läggas i händerna på speciella uppfattningars förespråkare. Samhällets suveränitet sträcker sig längre än till själva ramens utläggande, och dess hand bör ordna de inbördes om en plats i solen tävlande disciplinerna. Endast den upplysta omtanken om det helas välgång, det allmänt mänskligas framhävande såsom motvikt mot ensidigheten kan här få vara utslaggivande.

Mitt betänkande skulle givetvis få en fastare struktur, om detsamma kunde uppbyggas förslagsvis på en sådan skolbild, som den ovan utvecklade. Redan frågan om själva lärostoffets avgränsning skulle få en fastare grund. Emellertid kommer, såsom jag framhöll, betänkandet i varje fall, också om detsamma utgår från ovan utvecklade allmänna skolbild, att även för den nu existerande lärdomsskolan ega sin tillämplighet. Ty om också svagt avtecknar sig i lärdomsskolans undervisning redan nu denna allmänna planläggning. Visserligen saknas där den första ringen, men den andra med sin uppåt begränsande mellanskoleexamen motsvarar i huvudsak min planläggnings av den allmänna medborgarexamen uppåt avgränsade ring. Och vad sedan gymnasiallinjerna vidkommer, så ha vi redan i lyceernas linjeindelning en god ansats till den förberedelse för universiteten jag avsett. Lägges allt detta tillsamman, så inses, att mitt betänkandes förslag ega sin tillämplighet även på den nu arbetande lärdomsskolan. Därvid vill jag emellertid med all tydlighet framhäva, att mitt betänkande icke arbetar med studentexamen såsom något slags avslutad medborgarexamen.

Jag går nu in på frågan om *lärostoffet* i matematik vid lärdomsskolan. Vi ställas då inför frågan, vilka allmänna principer skola tillämpas vid utmätandet av detta lärostoff.

För vetenskapsmannen hava en del åskådningar inom hans vetenskap genom årslång inslitning så ingått i hans medvetande, att han löper fara att betrakta dem såsom någonting, som bör höra till varje människas andliga utrustning. På den vägen ha under senaste tid sådana saker som längre avancerade utvecklingar ur den analytiska geometrien och grunderna av differential- och integral-kalkylen kommit in i skolkursen, för att blott nämna några exempel.

För pedagogen ställer sig saken i stort sett lika, men i en annan riktning. Också här har inslitningen verkat så, att det invanda stoffet kommer att framstå såsom en nödvändig beståndsdel i en människas utdaning. Den matematiska skolkursen i sin nuvarande gestaltning erbjuder talrika exempel på dylika invanda begrepp, vilkas avlägsnande helt visst skulle på pedagogiskt håll vålla bekymmer inför de »luckor» i kursen, som en dylik åtgärd vore egnad att framkalla.

De ledande principerna för skolkursens utformande äro enkla nog att utsäga. Det gäller att lära eleven den matematik, han behöver för den fortsatta utbildning han efter slutad skolgång inleder eller för den verksamhet varmed han då vidtager. Därvid fatta vi begreppet behov i den vidsträcktare mening, att detsamma icke endast avser den direkta praktiska användbarhet det bibragta lärostoffet erbjuder, utan även det mått av matematiskt omdöme, han kan behöva. Emellertid böra vi vid tillgodoseendet av detta program ihågkomma, att matematiken icke är skolkursens enda ämne och att dess slutliga ställning bör bestämmas med beaktande av det suum cuique, som här måhända i högre grad än annorstädes bör äga utslagsrätt.

Om den nuvarande skolkursen kan icke sägas, att den skulle med beaktande av dessa principer ha uppstått ur en allsidig genomarbetning av frågan. Den är till sitt innehåll produkten av en historisk utveckling, som kan följas i dess lärostoff. Denna historiska utveckling har varit så tillvida egenartad, att den ihärdigt fasthållit vid engång inkomna stoffliga beståndsdelar och begrepp, vilka bilda det skolkursens underlag, över vilket de senaste decenniernas nyorienteringar avsatt sitt växande skikt av sedimentära avlagringar.

Det måste rättvisligen framhållas, att skolkursen egt mycket ringa möjlighet till utveckling och nyrevision av sitt lärostoff. Studentexamensuppgifterna ha tvungit varje lärare att hålla alla kursens delar under bevakning. Erfarenheten har nämligen visat, att en uppgift kan falla ner på vilken del som helst. Under tidernas gång ha visserligen efterhand olika delar varit under eld. Sålunda voro en tid de algebraiska problemen förhärskande och ledde givetvis till, att man på skolan sammandrog krafterna kring dessa uppgifter, som då löstes i hundradetal. De geometriska tankeproven kastade för någon tid arbetet in på lösandet av geometriska problem och bevisandet av geometriska teorem. Men ingenting hindrar ju en lekfull examinator att göra detta kraftuppbåd illusoriskt genom att förelägga uppgifter från alldeles oanade områden av kursen.

Detta har haft sin ödesdigra inverkan på skolkursen. Dels har den såsom jag framhöll verkat stagnerande på skolkursen; den entusiastiske av nydaningar hänförde läraren har snart lämnat alla nymodigheter för att lära det gamla på det gamla sättet, sedan han upplevat ett par studentexamenskracher på sin abiturientklass. Dels har det emellertid också tvungit matematiklärarne att med fullständigt negligerande av varje tanke på suum cuique pretendera på flere timmar för sitt läroämne, detta läroämne, där anspråken på en sådan behärskning, att man på varje punkt kan möta en studentuppgift, kräver ett ofantligt arbete på grund av den omfattning kursen efterhand vunnit och från vilken den har svårt att retirera på de skäl som just utvecklats.

Jag talade om de senaste årtiondenas nyorienteringar uti skolkursen. Främst av tyska universitetsmän har ett reformarbete inletts inom den tyska matematikundervisningen för att modernisera densamma. Samma strävan har gått igen inom andra länder. Denna rörelse har utan tvivel arbetat med livgivande uppslag. Mycket av vad därunder framkommit ligger förresten till grund för vad jag i det följande kommer att framställa. Emellertid har denna rörelse, som sträckt sina verkningar också till oss, i sitt praktiska framträdande icke kommit särdeles stora ting åstad. En blick i tyska läro- och exempelböcker visar inga större förskjutningar. Hos oss har denna rörelse, uppriktigt sagt, komplicerat sakläget och verkat åt en ytterligare utvidgning av kursen med nya anspråk på ökat utrymme för matematiken. På en del punkter har rörelsen, åtminstone vad oss vidkommer, skjutit över målet. Det är nu alls icke så, att den i verkligheten svårfattbara differential- och integralkalkylen skulle höra till det, som, enligt de principer jag ovan utvecklat, hör hemma i skolkursen. Här ha vetenskapsmännen haft för stor talan. Lika litet hör den analytiska geometriens undersökningar över koniska sektioner till skolkursen. Icke heller hör teorien för de imaginära talen, om än ur matematisk synpunkt aldrig så vacker, på något sätt till skolkursen.

Vi se här de samverkande omständigheter, som alla strävat att förstora lärostoffets omfång, utan att förstoringens motivering närmare genomtänkts och begrundats ur synpunkten av den princip jag ovan utvecklade. Vi ha först den vis inertiae, som bibehållit redan införlivade begrepp och åskådningar. I samband därmed står den begripliga, men också av yttre makter påverkade strävan hos läraren att grundligt behandla varje detalj i skolkursen och kring densamma uppbygga teoretiska utvecklingar och praktiska övningar. Detta leder till den inre dilatation av kursen, som kring i stort sett betydelselösa frågor förbrukar ett ansenligt kraftuppbåd. Därtill kommer den moderniserande utbyggnaden av kursen med nya begrepp och nya åskådningar.

Den revision, vars ideer jag i det följande utvecklar, går ut på att i grunden omlägga kurserna med beaktande av de principer jag ovan utvecklat. Därvid skall varken ålderns rätt eller det ungas krav respekteras, försåvitt de icke hålla inför granskningen.

För att ställningen genast från början skall vara klar, vill jag redan på denna punkt säga ifrån, att den matematikkurs, till vilken jag vid denna granskning kommer, är avsevärt enklare än den som tillkommit på det sätt jag ovan beskrivit och som nu är lärdomsskolans matematikkurs. En omedelbar följd härav blir, att om denna kurs tillämpas, timantalet i matematik kan genomgå den reduktion som ur synpunkten av andra läroämnens krav redan länge bland dessas företrädare stått på dagordningen. Populärt formulerat blir mitt resultat, att *lärdomsskolans matematikkurs är överhövan stor och de för matematiken anslagna lektionstimmarnas antal överhövan stort.*

Den metod jag inslår, då jag nu skrider till detaljbehandling av min uppgift, är dels av kritisk eller negativ art, dels av uppbyggande eller positiv art. Jag ärnar in i detaljerna kritiskt studera den nuvarande matematikkursen och samtidigt såsom denna gransknings positiva resultat framlägga den också i detaljerna utarbetade undervisningsplan jag har för avsikt att förorda. Givetvis kommer min plan att innehålla också moment, som sakna motsvarighet i den nu följda planen.

Jag egnar på denna punkt också några ord åt min uppgifts andra moment, *metoden.* Därvid önskar jag dröja vid en särskilt för den nya läroplanens uppbyggande betydelsefull sak. Det gäller den reservation mot ett överdrivande av tudelningen i stoff och metod, jag redan inlade. Jag kan nämligen icke vid det slutliga uppbyggandet av min undervisning hålla upp denna tudelning.

Den matematiska undervisningsmetoden kan ses ur olika synpunkter. Man kan inskränka den till själva undervisningstekniken, där reda och klarhet framträda såsom en enligt mitt förmenande lägre potens av undervisningsmetoden. I den nuvarande matematikundervisningen finnes icke heller i stort sett rum för en högre undervisningsmetod och det synes som om normallyceernas lärarutbildning och lärarprövning närmast skulle gå ut på att tillföra läraren och hos honom pröva innehavet av denna förmåga att redigt och klart framställa sin sak. Emellertid är det därvid ännu fråga om ett rätt ringa mått av psykologisk blick och handlar kanske om alldeles andra, mera på ytan liggande läraregenskaper. Emellertid erbjuder den matematiska undervisningen, sådan jag tänkt mig den, en rik möjlighet till en alldeles annan art av metod, som på ett integrerande sätt deltar i själva kunskapsuppbyggandet. Man kan ju kalla denna metod heuristisk, om man också icke därmed täcker begreppet. Snarare är det en arbetsmetod, en empirisk metod, där lärjungen såsom deltagare i en matematisk arbetsverksamhet, närmast jämförbar med en lärling i matematikens egen verkstad, på empirisk väg inhemtar eller snarare uppbygger lärostoffet. Räknandet blir sålunda icke den posthuma tillämpningen av det redigt och klart upplästa lärostoffet, utan lärostoffet växer fram såsom en sekundär produkt under lärlingens flitiga hand på samma sätt som yrkeskunnighetens lärostoff silar in i yrkeslärlingens själ. Läraren är mästaren, som icke har så mycken användning för sin talande tunga som för sin ordnande hand och sin psykologiska blick.

Ett sådant tillvägagångssätt, som på varje punkt har känning med elevernas psykologiska betingelser och leder utvecklingen med ett psykologiskt förfinat beaktande av deras med åren vexlande väsen, kan icke utsöndras till en fristående pedagogisk metod, vars signaturer kunna skarpt formuleras. Jag har velat förutskicka detta för att mina utvecklingar i det följande skola klart kunna fattas. Jag är numera beredd att skrida till *en undersökning av matematikundervisningen vid lärdomsskolan* och avge *förslag till dess omläggning.*

Min kritik av lärdomsskolans matematikundervisning går fram på två linjer. Jag vill först egna den en granskning i stort, en makroskopisk prövning av dess innehåll, för att sedan ingå på detaljerna.

Vi hade för kursens omfattning uppställt en princip, som vi kort kunna kalla behovets princip. Jag nämnde redan, att skolkursen icke tillkommit enligt denna princip. Principens användning förutsätter förresten givetvis en klar formulering av behovet. En sådan har icke givits, utan lärostoffets tillblivelse har sin historia på sidan om denna princips klara formulering och tillämpning. En följd härav är, att lärostoffet överflödar av historiska residuer, medan vi likaså överallt påträffa inre utbyggnader, som äro ett verk av den pedagogiska byggnadskonsten inom skolans murar. Såsom sådana residuer måste jag i aritmetiken beteckna det i vår tid onödiga drillandet med sorter, den sammansatta reguladetrien, de borgerliga räknesätten m. m., vilka dessutom alla och särskilt den sammansatta reguladetrien utbyggts till övningsfält för allehanda för verkligheten främmande konklusioner. Inom algebran ha vi särskilt att anteckna såsom en åldrig kvarleva de algebraiska problemen, medan polynomräknandet med klausuler, klamrar, parenteser, sysslandet med invecklade ekvationssystem, det över långa tider utsträckta räknandet med rotexpressioner m. m. hör till den matematisk-pedagogiska verksamhetens inlägg i kursen. De här nämnda och många andra saker i kursen försvara icke sin plats inför behovets princip, vilket jag lugnt kan förklara på basen av min verksamhet inom vetenskapen, inom skolans alla olika stadier och inom flera praktiska områden, där matematiken kommer till användning. De representera en särskild matematisk värld, som har sin tillvaro för sig, och ge en utbildning, som åtminstone är obehövlig.

Det vore emellertid att taga för lätt på uppgiften att inom lärostoffet utpeka de onödiga sakerna och föreslå deras avlägsnande. Givetvis kommer mitt betänkande att bl. a. innehålla sådana förslag både ifråga om de ovan mera som exempel nämnda beståndsdelarna och många andra. Vi lämna emellertid för ett ögonblick dessa detaljfrågor, till vilka vi i senare sammanhang skola återkomma, för att gå in på själva frågan om den nu i skolkursen undervisade aritmetikens och algebrans ställning.

Om den nu undervisade aritmetiken som helhet måste väl sägas att den fullgör ett värv inom skolans utbildningsuppgift. Den efterlemnar i alla fall förmågan att röra sig med de hela talen, bråken och decimalbråken och en visserligen på något underliga vägar förvärvad insikt om räkn konstens användning i samhället. Jag tror också, att en bestämd förståelse av det helas gång ernås, ehuru jag för min del hyser en annan mening om den förståelse som bör eftersträvas, liksom jag har en från den nu följda tankegången avvikande mening om de vägar, som böra insläs för att aritmetikens ställning till det samhälleliga livet skall klart framträda för eleverna.

Annat är sakläget med den nu i skolan undervisade algebran. Man kan här utan att alls ingå på frågan om algebrans ställning på skolprogrammet med fog fråga sig, om den nu undervisade algebran överhuvudtaget leder till någon verklig uppfattning om vad saken gäller. Jag har vid samtal med omdömesgilla och objektiva laici inhemtat, att de mycket väl sentera vad de lärt inom aritmetiken, ja till och med inom geometrien och trigonometrien, men att de på något sätt stannat utanför ifråga om algebran. Och de, som fortsatt sin utbildning på ett eller annat sätt i matematikens tecken, ha vid sitt fortsatta arbete erfarit sensationen att uppleva algebran ånyo i ny förståelse.

Var ligger nu orsaken till detta? Givetvis icke hos algebran. Det ligger i det sätt, på vilket algebran framföres i skolan. Jag vill göra gällande, att framställningen icke når fram till sakens verkliga kärna. Sedan undervisningen med lätt hand klarat bokstaven såsom tecken för ett tal, åt vilket man kan ge vilket värde som helst, styr den in mot ett årslångt formellt bokstavsräknande, som redan i något sammanhang likställts med något slags bokstavspatience. Däremot klarlägges icke, vad som dock är det väsentliga, den aritmetiska realitet, som ligger under bokstavssymbolernas transponering. Resultatet blir, att detta tillvägagångssätt såsom all formell träning kan uppdriva en hög grad av skicklighet i den formella transponeringen, utan att emellertid efterlemna nämnvärd förståelse.

Jag vill göra gällande, att denna min diagnos i fråga om algebran är riktig. Jag reserverar mig emellertid på denna punkt, liksom i övrigt i min kritik, mot den uppfattning, att jag icke skulle veta, att sakerna på många håll bedrivas annorlunda. Jag dömer rätt mycket efter läroböckerna och exempelsamlingarna, väl vetande vilken roll de dock spela för undervisningens dirigerande.

Jag är villig erkänna att det ligger någonting groteskt i min kritik av algebraundervisningen, vilken ju går ut på ingenting mindre än att man generation efter generation undervisar något, som eleverna icke förstått. Emellertid har jag under den tid jag examinerade abiturienter haft rikt tillfälle att vinna bekräftelse på denna snart sagt hemska misstanke. Jag tror också, att varje uppriktig lärare skall medgiva, att han inom algebran känt sig tveksammare och osäkrare än inom sin undervisnings övriga grenar och särskilt haft svårt att komma ifrån mer kritiska elevers fråga, vad det hela egentligen syftar till.

Härmed har jag icke uttalat mig om algebran såsom sådan och dess plats på skolprogrammet. En viss kännedom av densamma är nödig redan för att kunna intränga i naturvetenskaperna, framförallt för dem, som över mellanskoleexamen eller studentexamen gå till fortsatt teknisk utbildning, samt givetvis för dem, som över studentexamen söka sig in i de matematiska fakulteterna. Någon kännedom i algebra måste väl också anses böra ingå i den allmänna kunskapsbilden hos dem, som vandra andra vägar, ehuru för dem behovets princip måste ges en subtilare tolkning än ifråga om de tidigare nämnda. Man bör emellertid icke gå så långt som man trott sig böra gå i den nuvarande skolalgebran och framförallt bör man uppställa som en oeftergivlig fordran, att det helas allmänna syftning och meningen med den enskilda detaljen skall för eleverna framstå med från varje grummel befriad klarhet.

Jag har ännu icke berört geometriundervisningen. Vad man här främst fäster sig vid, är att inom den alla vanliga skolmetoder för bibringande av vetande med ens överges och det hela ordnas närmast såsom ett seminarium vid universiteten, med uppgift att intränga i ett från första början till sista slutet logiskt uppbyggt vetenskapligt system. Där är det sålunda icke endast detaljer, som stå kvar som residuer från förgångna tider, utan hela undervisningen från början till slut. Visserligen ha läroböckerna något justerats, ofta på bekostnad av den logiska strukturen, men systemet står orubbat kvar, åtminstone i de mest använda läroböckerna. Och därmed följer, att man allt fortfarande på de flesta ställen bevisar sig stegvis fram från definitioner och axiom till sats efter sats. Detta har naturligtvis varit galet i alla tider, men verkar särdeles främmande i vår tid, då den pedagogisk-psykologiska åskådningen med sådana subtila begrepp som hänsyn till barnasjälens kontinuerliga utveckling vill göra sig gällande i undervisningens värld.

Vad själva kunskapsinnehållet vidkommer, så är därom att säga, att detsamma på ett alldeles annat sätt än algebrans är egnat att motsvara behovets princip. Dock har man naturligtvis också här skjutit över målet och begärt rum för alltför mycket, särskilt om man besinnar hela undervisningsprogrammets stabilitet.

Jag säger icke mera om geometrien på denna punkt. Det torde emellertid av det sagda framgå, att jag särskilt kommer att ha ett och annat att framlägga ifråga om denna till sin metodik så över alla gränser groteska undervisning.

Trigonometrien kan jag på denna punkt förbigå. Den ligger förresten redan uppe i linjedelningen och skall sålunda bedömas från universitetets ståndpunkt. Åsyftar emellertid reallinjen att också leda till en avslutad medborgarexamen, så måste man ställa sig skeptisk inför formelymnigheten och triangellösandet.

Efter all denna förberedelse, som avsett att orientera över den föreliggande uppgiftens art, skrider jag nu till detaljerna. Såsom jag redan förebådade kommer mitt tillvägagångssätt att vara på samma gång en kritik av detaljerna i den nu följda undervisningen och ett samtidigt framläggande av ett i detaljerna genomfört förslag till ett undervisningssystem.

Jag hade uppställt två principer för undervisningens omfattning. Den ena var vad jag kort kallat behovets princip. Den andra var helt enkelt den, som bjuder, att matematiken i sina anspråk skall taga hänsyn till andra läroämnens ur behovets princip framsprungna anspråk. Det blir sålunda givetvis en kompromiss, som emellertid icke nämnvärt kommer att ledera behovets princip, blott behovet verkligen tages i sin riktiga fattning. Den matematik, som behövs, är egentligen icke så vidlyftig, som man vill göra gällande. Den mot matematikens herravälde i skolan reagerande allmänheten är sanningen att säga inne på riktig väg.

Jag vill genast, innan jag går vidare, tillbakavisa misstanken, att jag i det följande skulle vilja omplantera den s. k. reformmatematiken i vår skola. Ehuru jag gillar dennas allmänna tendens, kan jag icke frigöra mig från misstanken, att det hela kan jämföras med ett jordskred, som visserligen förändrar det gamla landskapets utseende, men sedan lemnar detsamma låt vara i en ny gestalt, men dock i samma förstelning som tidigare. De utan tvivel synnerligen betydelsefulla uppslagen ha i händerna på allehanda entusiaster tillfört undervisningen nya arter av formell träning. Jag vet icke, om t. ex. differentierandet och integrerandet innehåller sakligt värdefullare beståndsdelar än polynomräknandet o. a. dyl.

Det är sålunda icke reformmatematik jag föreslår. Det är helt enkelt en matematikundervisning, som på alla punkter strävat att söka sig tvärs genom det formella in mot det väsentliga.

Givetvis har denna matematikundervisning vissa ledande idéer. Jag känner mig starkt frestad att kalla den översta och ledande av dem det sunda förnuftets idé.

Det sunda förnuftets idé är att låta det som är enkelt och naturligt också framträda just så naturligt och enkelt som det faktiskt är. Det är sålunda, för att välja ett exempel, icke förenligt med det sunda förnuftets idé att över den samhällsverksamhet, som vi kalla lånerörelsen, inom skolans värld bygga upp en intresseräkning, som behandlar allehanda frågor, som logiskt kunna anslutas till, men icke i verkligheten förekommer inom denna lånerörelse. Lika litet utrymme har det sunda förnuftet, för att välja ett till karaktären alldeles annat exempel, då man på den logiska deduktionens väg tillför de små eleverna geometriens elementära vetande, ofta med uppbåd av allmänna tankar och slutsatser, som för konceptionen te sig avsevärt svårare än den kärna av geometrisk sanning, som skall utvinnas.

Emellertid uppbäres min följande framställning av idéer, som äro klarare till sin formulering än denna allmänna tankegång.

Matematikundervisningen vill ge ett visst lärostoff, men den vill också förmedla ett inslag uti själva *tänkandet.* Det är härvid icke fråga om den »städning av huvudet», den logiska träning, som engång och helt säkert ännu mångenstädes givit matematiken en särställning uti en mot det formella inriktad undervisning. Matematiken har givetvis därvidlag ingen särställning, utan deltar jämte andra läroämnen uti upparbetandet av förmågan att tänka i det logiska planet. Men matematiken har ett särskilt moment, som den tillför det allmänna tänkandet.

Uti allt vad vi komma i förbindelse med gör sig en bestämd mobilitet gällande, som ger bilden av i dag ett annat utseende än bilden av i går. Särskilt ha vi att i det kvantitativas värld beakta denna variabilitet, som gör denna värld snarare till en det kvantitativa skeendets film än till den stela fotografi, vars åskådande varit matematikundervisningens uppgift. Nu underlyder det kvantitativa skeendet i sin mångfald ofta enkla, matematiskt lätt formulerbara lagar. Matematiken har sålunda här en betydande uppgift. Den har att tillföra tänkandet detta det kvantitativa skeendets variabilitet och förmågan att söka för händelseförloppet, där detta kan ske, de enkla variabilitetslagarna. Det är detta, som reformmatematiken kallar det *funktionala tänkandet*.

Detta måste betecknas såsom ett huvudmoment i den matematiska undervisningen. Det bör genomgå densamma från början till slutet. Därvid böra givetvis ända från början de hjälpmedel tas i bruk, som matematiken utbildat för att kunna följa det kvantitativa skeendets funktionala beroende. De *grafiska* metoderna, *diagrammet* i sina olika former, bör bli ett dagligen använt verktyg i matematiklärlingens hand.

Det är ett annat moment i tänkandet, som står det just utvecklade nära och vars utformande hör matematikundervisningen till. Det är vad jag ville kalla det *kvantitativa omdöme*, som tillförsäkrar sin innehavare den riktiga orienteringen i det kvantitativas värld. Förmågan att ställa in kvantitativa företeelser i deras riktiga storleksmiljö, att bedöma storleksordningen av kvantitativa händelsers effekt, utan att behöva genom minutiösa kalkyler följa processens detaljerade gång, detta är exempelvis saker, som falla inom området för det kvantitativa omdömet.

För att emellertid det ovan utvecklade skall ega sin tillämplighet, måste givetvis undervisningen röra sig inom det kvantitativa skeendets värld, sådan den s. a. s. i verkligheten föreligger, och icke inom en fingerad, det kvantitativa stillaståendets värld. Härmed äro vi emellertid framme vid en tankegång som kommer att trycka sin prägel på hela den följande framställningen.

Reformmatematiken, till vars mindre lyckliga idéer måste räknas att överallt söka efter ett slagord, har i detta sammanhang talat om *talmaterialets realitet.* Emellertid är denna rubrik träffande. Det gäller verkligen att låta matematikundervisningen röra sig inom en kvantitetsvärld, som eger realitetens fasta grund. Ty endast så eger matematikundervisningen möjlighet att verkligen skapa det funktionala tänkande och det kvantitativa omdöme, som i högre grad än lärostoffet ega betydelse för den, som skall fortsätta sin utbildning i specialanstalter eller verka på den allmänna medborgerliga verksamhetens arbetsfält.

Talmaterialets realitet måste vi härvid skänka en allmän omfattning. Det är icke endast fråga om den s. a. s. krassa realitet, som det från samhällslivets maskineri hemtade talmaterialet eger, utan denna realitet tillskriva vi också det talmaterial, som hemtas från andra vetenskapers kvantitativa förhållanden, särskilt fysikens och astronomiens, samt givetvis det talmaterial, som hemtas från matematiken själv. Vi få icke på någon punkt glömma, att matematikundervisningen också avser att undervisa i matematik.

En på talmaterialets realitet baserad undervisning för läroområdet utöver matematikens gränser och leder genom sysselsättningen med den reala, kvantitativa världen till ett värdefullt innehav av ett bestämt substantiellt vetande om samhällets funktioner, andra vetenskapers lärostoff och deltar sålunda uti uppbyggandet av den allmänna kunskapsbilden. Detta följer på visst sätt gratis med på köpet. Vad detta innebär skola vi snart få se särskilt, då vi komma till aritmetiken, där talmaterialets realitet vinner sitt prägnantaste och mest allmänfattliga uttryck. Här må blott sägas, att denna princip driver bort all förkonstling ur undervisningen, som förresten inför de reala uppgifternas enkla och naturliga frågeställningar genast skall finna, att den anhopning av krafter, som nu ingå i förberedelsernas system, alls icke har någon motsvarighet i uppgifternas svårighet, i det som skall övervinnas.

Detta är de idéer, som skola fälla utslaget i det följande. Jag vill blott tillägga, att jag också lemnar rum för något, som jag ville kalla en *kulturhistorisk idé.* Man kan, för att taga ett exempel, icke gärna med den nu uppbyggda idévärlden som bakgrund tillmäta logaritmerna någon särskild betydelse i en blivande humanists kunskapsvärld. De motsvara icke behovets princip och äro svårligen heller egnade att verksamt påverka tänkandet. Men de ha haft sin betydelse i räknandets konst, de ha varit sin tids räknemaskin, som möjliggjort många för den materiella världsbildens uppbyggande erforderliga kalkyler. Det är ur denna synpunkt kännedomen om deras idé bör ha sin plats i undervisningen, om också inträningen i deras användning icke åtminstone på alla gymnasiallinjer bör förekomma.

Lemnande alla dessa allmänna utvecklingar gå vi nu in på de särskilda delarna av matematikkursen. Jag vill härvidlag förutskicka att jag icke håller så alldeles strängt på gränslinjerna mellan de skilda områdena. Åtminstone kunna inga formella betänkligheter avhålla mig från att exempelvis i aritmetiken upptaga ett begrepp ur algebran eller geometrien, då dess koncipierande faller inom området för elevernas psykologiska fattningskraft och detsamma eljes för befästandet av det som just behandlas är av betydelse. Den »rena» metoden kan vara ett värdefullt vetenskapligt experiment, men har givetvis ingenting med skolans undervisning att skaffa. En undervisning förslagsvis, där rektangeln »införes» och dess area beräknas först i sin systematiska inpassning i sjätte klassens geometrikurs, är på avvägar.

ARITMETIK.

Inom aritmetiken är behovets princip klar och aritmetikens plats på undervisningsprogrammet sålunda utom all debatt. Den ingår i undervisningens primäraste plan att lära eleverna *läsa, skriva* och *räkna*.

Här behöver man icke heller kollidera med principen om andra ämnens rätt. Eleverna måste lära sig räkna. Inskränkes timantalet, får det hela föras längre och inkräktar då på den övriga matematiken.

Det är överhuvudtaget en fråga, på vilken man tagit för lätt och det är frågan om aritmetikens plats i undervisningens tidsföljd. Såsom saken nu är, hör aritmetiken de tre lägsta klasserna till och är sedan ett »avslutat läroämne» som det heter. Nu innehåller emellertid aritmetiken redan såsom den nu bedrives och även i den form jag önskar ge den moment, med vilken de åldrar, som ha att emottaga undervisningen, icke äro förtrogna. Jag har också den föreställningen, att det formella och tekniska i rätt hög grad blir den egentliga behållningen.

Enligt mitt förmenande borde också aritmetikundervisningen vara uppdelad i tvenne delar. Den elementära delen hör de lägsta klasserna till och resulterar i behärskning av de tekniska hjälpmedlen, givetvis med iakttagande av vad jag i det följande utvecklar. Den andra delen genomgås på den klass, med vilken förberedelsen för mellanskoleexamen avslutas.

Det lämpliga snittstället mellan dessa aritmetikkursers båda delar ger sig osökt. Med procentbegreppets införande inträder en alldeles nyartad behandling av talmaterialet, där både tekniken och begreppen markera ett språng i anspråken på fattningsförmåga. Man kunde följaktligen stanna inför detta begrepp i den elementära delen och sålunda i denna genomgå qvattvor species med hela tal, metersystemet, mynten, tiden samt qvattvor species med bråk och decimalbråk, medan man till den senare för alla de finare kvantitativa undersökningar, som inledas med procentbestämningar, samt de för de små eleverna på de lägsta klasserna främmande utvecklingarna från lånerörelsen och bankväsendet samt ränta på ränta och amortering. Därvid talar jag icke ens om det gamla systemets reguladetri och borgerliga räknesätt, som aldrig kunna bli och icke ens eftersträva att vara annat än olika namn på olikartade former av formell träning.

Jag kommer i det följande att göra ett förslag, som beaktar det jag ovan utvecklat och som sålunda tänker sig en tudelning av aritmetikundervisningen.

Talmaterialets realitet får inom aritmetikundervisningen ett alldeles särskilt konkret innehåll genom det nära samband i vilket denna del av matematiken står till det samhälleliga livet. Man träffar det riktiga, då man säger, att aritmetiken är det samhälleliga livets matematik. Den har vuxit upp ur dess behov, om den också senare sublimerats uti vetenskapens värld och där framträder såsom en subtil del av matematikens tankevärld. Det gäller för undervisningen att följa denna utveckling åt, att sammanpressa den mångtusenåriga vandringen inom sina terminers ram och sålunda skänka en totalbild av denna fina konsts utveckling till dess nuvarande förunderliga fulländning.

Aritmetiken är området framför andra för skolningen av det funktionala tänkandet och framförallt det kvantitativa omdömet vardera i en synnerligen substantiell och praktiskt värdefull fattning. Det gäller det allmänna medborgaromdömets förseende med ett känsligt, kvantitativt riktigt arbetande aritmetiskt omdöme, som opererar med en riktig uppfattning om samhällets kvantitativa företeelser och deras variationer.

Jag vill icke förneka, att den nuvarande aritmetikundervisningen bär spår av ett bestämt medvetande om aritmetikens nära samband med det medborgerliga livet. Men den hemtar icke sitt talmaterial ur detta liv sådant detsamma just i undervisningsögonblicket har sin gång i den samhälleliga omgivningen, utan håller sig till en genom tiderna nedärvd fingerad kvantitetsvärld. I denna värld förekommer givetvis ingen mobilitet, vars variations facer skola följas och dryftas. Och liksom sålunda det funktionala tänkandet stannar utanför, så finnes där givetvis icke heller någon möjlighet för fostran till kvantitativt omdöme.

Snarare är den farlig för ett dylikt omdömes utdanande, liksom inlevelsen i sagans värld kan förrycka proportionerna i den verkliga tillvaron. Det hela saknar livets levande prägel, ehuru det på sätt och vis framträder i dess namn.

Givetvis ger detta hela aritmetikundervisningen en bestämd prägel av overklighet, som framträder grellare än inom andra områden av undervisningen överhuvudtaget därför att den avtecknar sig mot något så närliggande som det omgivande dagliga livet, livet utanför skoldörren. Denna overklighet stegras ytterligare av den behandling det fingerade talmaterialet undergår. Medan räknesätten i sin historiska tillblivelse utvuxit ur reala frågor, går undervisningen i omvänd riktning, i det den i de flesta fall skapar räknesättet genom en abstraktion och sedan såsom en sekundär åtgärd »inövar» det på talmaterialets övningsexempel.

Redan en ändring av dessa sakförhållanden innebär en omläggning av hela aritmetikundervisningen. Men den innehåller andra moment, vilka betinga ett fullkomligt intill roten gående uppbrytande av stora områden av dess arbetsfält.

Jag har i många sammanhang, i uppsatser och föredrag samt också redan i denna framställning riktat uppmärksamheten på reguladetrien och de borgerliga räknesätten. Det är, som går till deras indrillande, måste betecknas såsom förspillt. Den enda behållningen är den tekniska inträningen av sifferkalkyler. I övrigt äro de i stort sett skolräknesätt, som ingen utom skolans murar sysslar med. Mitt förslag kommer att gå ut på dylika räkneschabloners slutgiltiga utmönstrande. Pladdret kring de sammansatta reguladetriuppgifterna under matematiktimmarna måste en gång upphöra. Intresseräkningen, som väcker bankmännens löje, skall ge vika för de enkla kalkylerna ur lånerörelsens värld. Hela den affärsrörelse, som avtecknar sig i de borgerliga räknesättens värld och som väl aldrig ens haft sin motsvarighet i verkligheten, skall definitivt avhysas och lemna rum för de enkla räkningar, som återspegla denna affärsrörelses allmännaste behov av räknekonsten.

Sådant är mitt program på denna punkt. Självfallet innebär detta en in mot detaljerna gående fullständig omläggning av hela aritmetikundervisningens system. Det är sålunda intet reparationsarbete det här är fråga om, utan en nybyggnad, som uppföres på den gamla byggnadens plats.

Mitt program för aritmetikundervisningen har framträtt i sina huvudanspråk i det föregående under framställningens gång. Dess principer äro klara. Det gäller nu att framlägga detaljerna och visa det helas funktion i skolklassen.

Jag vill förberedelsevis infoga en alldeles betydande sak i frågan om talmaterialets realitet. Liksom varje läroämne bör aritmetiken deltaga i uppbyggandet av den allmänna kunskapsbilden. Den är i detta avseende, vore jag frestad att tro, i ett gynnsammare läge än de flesta andra läroämnen. Man hör ofta den uppfattning uttalas, att matematiken är ganska onyttig. Jag skall senare ingå på denna egendomliga uppfattning och dess orsaker. Den måste i varje fall icke endast kapitulera inför den rätt ledda aritmetikundervisningen, utan övergå till ett erkännande av att någonting nyttigare knappast läres på skolan. Ty i den mån aritmetiken låter sina räknesätt växa ut ur det inom samhället ymnigt föreliggande primära talmaterialet för att genom dessa räknesätt vinna nya kvantitativa upplysningar, blir undervisningen i detta ämne en undervisning, vars lärostoff växer utöver matematikens egna gränser. Där följer med såsom ett resultat av arbetsmetoden en undervisning, som från en kvantitativ omgivnings- och hembygdslära växer ut till en kvantitativ samhällslära i dess vidaste fattning. Det är därvid väl att märka icke en deskriptiv och kvalitativ topografisk och folkloristisk samhällslära, utan en som utkristallerar sig i fast samhällsstatistik och ett bestående grepp på samhällets kvantitativa jämvikt.

Aritmetikundervisningen möter genast i sin begynnelse en svårighet. Eleverna både kunna och icke kunna qvattvor species. Såsom lärdomsskolan nu är inrättad börjar den ju med vissa inträdesfordringar, vilkas bibringande överlemnas åt det privata initiativet. Detta har också tagit form i de olika typer av moster Malms skola, som finnas överallt och som leda tanken till tidigare samhällsförhållandens patriarkaliska skolväsen. Den undervisning, som där meddelas, står utom hela undervisningens system. Och dock handlar det om en dyrbar utvecklingsperiod i människosjälen, som är egnad att påkalla en alldeles särskild pedagogisk psykologi. Det är alldeles icke likgiltigt, utan snarare av en grundläggande betydelse, huru den primära kontakten med talet och räknekonsten gestaltar sig och huru de första årens utveckling handledes. Såsom saken nu är, vet läraren egentligen icke, huru han skall börja. Det blir någotslags repetition, som är någonting annat än undervisning, eller en undervisning, där dess drivande moment, kunskapsbegäret och upptäckarglädjen, redan avtrubbats.

Envar, som arbetat på detta stadium eller skrivit en lärobok i aritmetik för lärdomsskolan, har haft förargelse av denna sak och sett ett för hela undervisningens inriktning betydelsefullt område undanryckt det systematiska bearbetandet.

Jag vill nu emellertid utveckla aritmetikundervisningen från början, oberoende av denna av de nuvarande förhållandena betingade situation. Vi ställa oss alltså inför uppgiften att börja från början.

Den första fråga, som då möter oss, är själva *numerationssystemets uppbyggande*.

Jag har det intryck, att denna sak i allmänhet avfärdas rätt hastigt. Åtminstone offra läroböckerna i aritmetik icke många sidor åt saken, ehuru detta naturligtvis kan bero på, att ingressen mera betraktas såsom en repetition av någonting tidigare inlärt. Vad som emellertid kan såsom en graverande anmärkning sägas är, att det hela går i motsatt riktning mot vad det borde gå. Numerationssystemet faller färdigt ner från himmelen, utan att något behov påkallat dess ankomst. Räknesätten postuleras i hela sin tekniska fulländning utan att föranledas av någonting i kvantiteternas värld. Och då den formella, jag ville nästan säga kalligrafiska tekniken lika lätt rör sig med litet flera siffror, så är eleven i en handvändning inne i miljonernas och biljonernas värld. Det är sedan en cura posterior att avprova denna tekniska apparat på de strödda övningsexemplen. Jag har i dessa saker en alldeles annan mening som jag i det följande skall bringa till uttryck.

Numerationssystemet. Numerationssystemet är i all sin enkelhet en av människoandens finaste prestationer, som det tagit årtusenden att komma till. Inom den högt stående antika kulturen, både den grekiska och den romerska, hade man som känt ett synnerligen otympligt sätt för antalens betecknande. Det råder förresten intet tvivel, att analysens utveckling under denna tid strandade just på den saken, medan geometrien i Grekland hade en lysande utvecklingsperiod. Det är inför detta perspektiv redan skäl att med varsam hand låta systemet framväxa, så att de svårigheter, som genom detsamma efterhand undanrödjas, i någon mån komma till synes. Det gäller att här liksom på andra punkter i matematikundervisningen låta skolans lilla utveckling i förkortning avspegla något av människoandens mödosamma vandring, där det tvingande behovet av uttrycksmöjligheter varit den drivande kraften. Det är en lång väg, som leder från den primitive mannens valhänta försök att räkna sina egodelar till det dekadiska talsystemets med en underbar sinnrikhet arbetande metod.

Den primitive mannen är den lille matematikadepten. Han har att orientera sig över sin lilla världs, sin närmaste miljös kvantitativa förhållanden. Han möter där allra först problemet att kunna *jämföra* olika antal med varandra och avgöra, vilken av två föreliggande mängder innehåller flera element. Den primitivaste metoden är ju att koordinera elementen i de till jämförelse föreliggande mängderna parvis. Han inser också, att detta kan underlättas genom att införa *kortet* såsom räkneenhet. Men han förstår redan ur sin omgivnings sina förhållanden, klassernas elevnumerärer, att här behövs bättre vapen icke för att principiellt lära uppgiften, men väl för dess praktiska fullgörande.

Han vet ingenting om numerationssystemet. Överhuvudtaget är en viss hemlighetsfullhet på sina punkter i matematikundervisningen en god pedagogisk taktik. Särskilt i den undervisning jag företräder är den ingenting annat än ett uttryck för det gemensamma letandet, som här träder i stället för katederförkunnandet. Ett förhastat utlämnande av en teknisk apparat hör sålunda icke denna undervisning till och är inom all form av undervisning egnad att avbryta intresset för apparatens uppbyggande.

Han vet således ingenting om numerationssystemet. Men han skall rätt snart förklara, att det hela skulle gå enklare, om de skilda antalen skulle bära skilda namn och i skrift bära skilda symboler, så att man endast genom att höra namnen eller se symbolerna kan lösa jämförelseproblemen. Han inser emellertid också, att man måste utfinna någon metod för att inskränka namnens och symbolernas antal. Han står vid numerationssystemets tröskel. Med sina tio symboler och sin positionsmetod löser detta system på ett suveränt sätt problemet.

Quattvor species. Emellertid får återigen icke allt detta komma med ett slag. Bakom varje symbol och varje genom positionsmetoden skapat aggregat av symboler bör ligga en real verklighet. I den mån och endast i den mån den reala verkligheten vidgas, vidgas numerationssystemet.

Det framhölls redan att talmaterialet är det primära. Det närmast till hands liggande talmaterialet är det, som det omgivande lilla samhället, skolan, erbjuder. Uppgiften att bestämma totalantalet elever ur uppgifter över de enskilda klassernas elevantal leder till *additionen* och för förresten samtidigt över från den då redan konc ipierande storleksordning, som klassen representerar, till den högre storleksordning, som skolans hela elevnumerär företräder. Samtidigt beaktas andra utom skolans murar liggande liknande frågeställningar, som röra sig med samma klasser av tal. Den nyförvärvade ur operationerna och sålunda icke ur ett godtyckligt dekret utgående storleksklassen, representerad av hela skolans i bönsalen församlade till några hundratal uppgående elevkontingent, växer in i medvetandet som en fast realitet, ett indexställe på uppräknandets och antalets skala. En första etapp är utvunnen, ett viloställe, innan marschen anträdes mot andra kvantitetsförhållanden. Eleven vet, vad några hundra vill säga i verkligheten.

Vad själva additionens teknik vidkommer, så är att märka, att densamma i motsats till vad ur läroböckerna kan avläsas bör stödas av särskilda *additionstabeller*. Eljes kan det hända, att eleven aldrig lemnar den primitivaste additionsmetoden att räkna på fingrarna, en metod, som visserligen i sitt utförande i varje ögonblick håller additionens idé uppe, men som ohjälpligt blir efter inför en teknik, som bygger på additionstabellerna. Jag har i min lärobok i aritmetik visat huru dylika tabeller kunna uppbyggas med tillhjälp av ett kvadratgaller, så att additionen får ett bestämt geometriskt innehåll, varjämte eleverna vänjas vid en bild, som senare ofta skall möta dem. De förfärdiga själva sina tabeller med stöd av detta kvadratgaller, som de förresten också själva rita.

Innan utvecklingen går vidare sätter *subtraktionen* in. Där finnes en annan betydande fråga, som skall klaras inom skolans statistik. Man vill veta, huru mycket större en klass är än en annan. Liknande frågor med tal av samma storleksordning möta också på andra gebit i samhället. Det blir också fråga om, med huru mycket ett bestånd förändras med åren. Den kvantitativa världen börjar få liv och röra på sig.

Vad själva den pedagogiska taktiken i fråga om dessa räknesätt och även i fråga om de övriga vidkommer ville jag särskilt förorda *korthögen* eller *lappbunten* såsom det konkreta underlaget för de olika detaljdiskussionerna om »minnessiffror», »lånandet», m. m. Kortet är ju den statistiska enheten, som fixerar beståndets individ. Redan kortens ordnande leder till hopbuntning av korten, och man kan såsom en helt enkelt praktisk metod förorda hopbuntning enligt det dekadiska numerations-systemets princip, så att tio lappar buntas ihop till en *tiobunt*, tio tiobuntar till en *hundrabunt* o. s. v. Jag har i min lärobok i aritmetik genomgående använt denna konkreta fixering av det i siffror angivna antalet och tror mig ha vunnit i åskådlighet. Givetvis måste en dylik klassanordning uppläggas, då det gäller att först starta själva numerationssystemet, ty eljes blir det hela från början endast formellt och s. a. s. kalligrafiskt vetande.

Nu måste väl sägas, att öppnandet av numerationssystemets mysterium samt den på ovan angivet sätt förda undervisningen i addition och subtraktion äro fascinerande uppgifter för en lärare. Men *multiplikationen* betecknar dock numerationssystemets triumf, den första värkligen överraskande förenklingen, där räknekonstens skönhet och förträfflighet får sin senare nästan oöverträffade illustration.

Multiplikationsproblemet kan startas ur ett bestämt i talmaterialet rotat behov på många olika sätt. I varje fall skall det framträda såsom en additionsuppgift, där alla addender äro likastora. Man inser, att här förestår en verklig utveckling av kunnandet, ty man kan givetvis icke låta det stanna vid det vanliga förfaringssättet, då det gäller att addera 237 addender, envar likamed 395.

Det sorgfälliga genomtänkandet av en dylik specificerad additionsuppgift upprullar efterhand hela multiplikationens panorama. Dess lagar träda fram i konkret gestaltning såsom nödvändiga för det helas felfria funktion. Kommutationslagen, ingalunda på något sätt självklar, får sin åskådlighet, då uppgiften bringas i förbindelse med rektangelareans beräkning. Den distributiva lagen blir implicite hela förfarandets möjliggörande tanke.

Divisionen är åter det successiva subtraherandet. Kvoten anger, huru många gånger divisorn kan subtraheras från dividenden. Det är allt skäl att eleverna inledningsvis få känning med denna primitiva divisionsmetod, som förresten liksom det successiva adderandet i multiplikationen ligger till grund för multiplikations- och divisionsmaskinernas konstruktion.

Det empiriska insamlandet av realt talmaterial går som känt på tvenne linjer. Det närmast till hands liggande är *uppräkningen*, det statistiska insamlandet, som på detta stadium givetvis är det primära och som icke nödvändigtvis behöver inskränka sig endast till statistiskt olika avgränsade människobestånd. Men också redan på detta stadium bör *mätningen* såsom talalstrande empirisk verksamhet skära in. Självfallet är det här icke ännu fråga om mätningsenheternas hela system, metersystemet, utan om det helt naturliga mätandet av längder och areal.

Här har särskilt multiplikationen åter en vinning att anteckna. Den löser nämligen för första gången, visserligen i en anspråkslös fattning, problemet att genom beräkning ur vissa längdmätningsresultat kalkylera en area. Det gäller rektangelarealen, vars beräkning icke enligt mitt förmenande behöver invänta tidpunkten för någotslags systematisk inpassning i metersystemet.

Diagrammet och tabellen.

Det har ju diskuterats om frågan, var det av reformmatematiken framförda *diagrammet* skall komma in, och man har i mera modernt betonade läroböcker kunnat finna detsamma någonstädes högt uppe i algebran, där ett särskilt kapitel egnats denna nya detalj. Här företräder jag en annan mening. Man kan inför den primära uppgiften att anställa jämförelse mellan olika antal med skäl fråga, vad som är ursprungligare för uppfattningen, talet eller bilden. Utan att alls ingå på denna fråga vill jag dock ha sagt, att denna grafiska åskådning skall inarbetas i medvetandet ända från början, så att densamma blir ett lika välbekant och innött verktyg inom forskandet i kvantiteternas värld som talet. Det är en kärnpunkt uti min undervisnings allmänna program det här är fråga om. Det sammanhänger djupt med frågan om det funktionala tänkandets träning och det kvantitativa omdömets uppbyggande, vilka jag utvecklade såsom undervisningens ledande idéer.

Stapeldiagrammet, det av rektanglar uppbyggda jämförelsediagrammet, är det primära. Det innebär ju ingenting annat, än att de statistiska korten läggas invid varandra och sålunda genom sin sammanlagda bredd åskådliggöra jämförelseobjektets kvantitativa omfattning. Det är den givna bilden, då det gäller att jämföra samtida bestånd. Då det sedan blir fråga om ett bestånds variation, förslagsvis en folkmängds förändring med åren, träder *linjediagrammet* in såsom det åskådningen bäst biträdande hjälpmedlet. *Kurvdiagrammet*, diagrammets vetenskapliga renodling, hör ett senare stadium till, då det funktionala tänkandet utkristalliserat särskilda funktionslagar i det kvantitativas värld.

Det är en annan sak, som jag här vill skjuta fram och som är okänd i den gamla undervisningen. Det är *tabellen*. Den är den analytiska motsvarigheten till diagrammet och ger i siffrornas kalla språk samma sakliga upplysningar i abstraktare formulering som diagrammet i sin livfullare till den visuella åskådningen vädjande gestaltning erbjuder. Redan från början bör tabellen vara den form, i vilken erfarenhetens data bokföras och de ur dem genom kalkyl utvunna resultaten sammanfattas.

Det är vid båda dessa nyheter icke fråga om särskilda skolbildningar. Tabellen och diagrammet gå väl ihop med behovets princip och äro typiska exempel på strävan att låta samhällets arbetsmetoder träda in genom skolans dörrar. Tabellen och diagrammet komma dagligdags till användning överallt, där man i samhället sysslar med kvantitativa förhållanden. Vi begära rum för sådant i skolan.

För att emellertid dessa begrepp verkligen i sin användning skola ha ett realt underlag, måste vi på själva det efterhand fortgående räknearbetet uppställa en bestämd fordran. Det är icke längre fråga om den isolerade uppgiften, vars talmaterials intresse avslutas, då den lösts, utan det är fråga om det kalkylatoriska vidarebyggandet på vunna resultat. Givetvis kan detta anspråk på *räknearbetets kontinuitet* icke konsekvent upprätthållas. Avbrott måste ske för att bereda rum för formell träning. Dessutom uppträda ju också i verkligheten isolerade räknefrågor. Men i stort sett bör räknearbetet bibehålla ett sådant syntetiskt sammanhang, att det vunna lägges till grund för nya vinningar, så att ett allsidigt kalkylatoriskt utnyttjande av primärmaterialet försiggår alldeles som i den räknande verkligheten.

Det är i anslutning till de små talens värld, som de fyra enkla räknesätten utvecklas. De små talens värld är skolans och med den i storleksordning jämförbara samhällens, över vilka den första empiriska insamlingen av talmaterial går fram, uppräknande och mätande. Emellertid blir om jag så får säga stugan efterhand för trång. Hemstaden och dess kvantitativa förhållanden blir den närmaste etappen. Stadsdelsindelningen ger ett gott statistiskt nätverk för uppräknandet, längd- och arealförhållanden inryckas i mätandet. Den tidigare uppritade plankartan över skolan och dess plan är prototypen för plankartan över staden.

Förresten gör sig nu ett nytt inslag i arbetet gällande. Det egenhändiga insamlandet av primärmaterial får träda tillbaka för det redan färdigt i kalendrar och statistiska handböcker föreliggande, av läraren föredragna eller i lärobokens materialsamling ingående materialet. Det sociala samarbetet träder in i medvetandet.

Staden efterträdes av länet och landet, världsdelen och jorden. De äro i kvantitativt hänseende, i uppräknandets och mätandets värld, bestämda etapper och giva i stort sett fixa indexställen på den kvantitativa skalan. De stora talen träda efterhand in såsom behövliga uttrycksmedel, lika otvunget som engång de små talen och i viss mening lika fattbara. Åtminstone står i varje fall bakom dem en real verklighet, ett samhälle, en bild och de framträda sålunda icke som ett typografiskt positionsaggregat av de tio siffrorna.

Det kan synas som om jag i mitt uppdrags fullgörande ginge för långt, då jag på sätt ovan skett tränger ner ända till undervisningens detaljer. Jag har emellertid fattat uppdraget så, att det icke endast avser en makroskopisk omställning av lärostoffet. Med en sådan är undervisningen icke tillrättalagd. Där reser sig såsom ett minst lika betydande spörsmål frågan om undervisningens strategi och taktik. Det torde redan ha framgått vad jag inledningsvis förebådade, att stoff och metod här ingått en koalition, som ur båda skapat en odelbar väsensenhet. Jag kommer därför också i fortsättningen att, där så för fullständig fattning av det hela är nödvändigt, gå in i skollektionsarbetets detaljer.

Det torde redan på denna punkt i den deskriptiva skildringen vara klart, att det är fråga om en alldeles annan aritmetikundervisning än den hittills tillämpade. Den har en alldeles annan syftning till hela sitt stoff och den söker djupare förankringsställen i barnasjälen. Jag ville säga, att här är ett svalg befäst. Huru djupt detta svalg är skall genom den följande utvecklingen ännu grellare komma till uttryck.

Meter-systemet. Efter fulländat inlärande av de hela talen går den vanliga utvecklingen över *metersystemet* in mot *sorter*.

Jag ville om detta metersystem återigen säga, att dess kärna givetvis icke ligger i den här vanligen igångsatta förvandlingen, som förresten enkelt klaras genom detta sinnrika måttsystems anpassning till det dekadiska talsystemet. Det är här snarare själva måttens reala storleksförhållanden, som skola tillföras medvetandet. Därtill kommer att areans problem får sin lösning för tvenne nya arter av figurer, *triangeln* och den *allmänna polygonen*. Därjämte löses volymens problem för det *rättstående prismat* eller *pelaren*. Vad som vidare framträder såsom en av dess vinningar är sambandet mellan *volym* och *vikt*, som möjliggör viktens fixerande i vissa fall genom mätning av längder. Räknekonsten har kommit långt, då den på denna punkt blickar tillbaka.

Om något kan och skall metersystemet inläras i omedelbar och levande kontakt med den omgivande, av material fyllda verkligheten. Det gäller någonting praktiskt och enkelt. Likvisst har man också här lyckats skapa en teoriens torrluft, där inlärandet av de väldigaste, aldrig använda kubikmåtten bedrives med samma logiska gravallvar som ägnas de på varje steg i världen oss mötande enklare längd- och ytmåtten. Där kan emellertid också enligt mitt förmenande göras en annan anmärkning. I mitt undervisningssystem ha eleverna redan långt innan de nå fram till metersystemet varit upptagna av mätningar och allteftersom behovet yppat sig stiftat bekantskap med olika längdmått, ytmått och vikter så att säga på empirisk väg. De glida sålunda kontinuerligt och oförmärkt in uti en undervisningsperiod, då de vinna klarhet över de empiriskt inhemtade måttens inre sammanhang och se sina möjligheter att mäta växa till större fulländning. Och då de lemna denna alldeles särskilda period bakom sig, så lägga de icke dess kunskapsinnehåll såsom »genomgånget» ad acta, utan ega blott större teoretisk och teknisk färdighet att döma i senare ofta återkommande frågor om dimensioner och mått i den materiella världen. I motsats därtill, jag har det intrycket, är metersystemets musealt betonade rum i den nuvarande undervisningens system ett rum, som eleverna genomvandra, bese och sedan aldrig återse. Det kommer sedan nya rum i följden. Där ordnas ingenting, som förut empiriskt tillförts ur praktiken, där säges blott vad allting heter och så förvandlas det och så är det avslutat och borta. Över huvudtaget kan detta sägas såsom en allmängiltig iakttagelse om denna undervisning, som mera söker att genom logiska begreppsgrupper sönderdela kursen i parceller än få den att framträda såsom en enhetlig och lärorik vandring i kvantiteternas värld. Jag nämnde redan ordet *sorter*, som i den nuvarande undervisningen framträder såsom universalbenämning på de icke-dekadiska måttens förvandlingar. Hela detta kapitel, som allt fortfarande tar lång tid i anspråk, skall avlägsnas. Det saknar helt och hållet betydelse ur kunskapsbibringandets synpunkt. De där behandlade måtten ha i de flesta fall karaktären av specialmått från specificerade verksamhetsgrenar. Dessutom ges ingen ingående behandling av deras *Sorter.*

kvantitetsförhållanden, utan de läggas helt enkelt till grund för allehanda omotiverade förvandlingar och så genomarbetas med dem som substrat liksom i metersystemet de fyra räknesätten med obönhörlig konsekvens.

Överhuvudtaget är detta förvandlande ett plågoris för undervisningen. Såsnart någon ny *sort* kommer in så blir det genast fråga om att förvandla och att utföra qvattvor species, men framförallt att förvandla, liksom om detta förvandlande vore en fristående operation, som har sig själv till orsak och ändamål. Det är naturligtvis ett led i andra processer, men den saken framträder icke. Naturligtvis är detta ett slags pedagogisk slentrian, som skapar några veckors stilla frid i den pedagogiska verksamheten, medan eleverna förvandla.

Jag har i min lärobok i aritmetik avlägsnat hela detta kapitel och ersatt detsamma med ett mera ingående studium av *tiden* och dess mätning och *vinkeln* och dess mätning. Vardera ger anledning till ett verkligt riktande av kunskapsmaterial och motsvarar behovets princip.

Särskilt är tiden egnad att rikta och befästa vårt vetande. Genom att kalkylera dagens längd ur almanackans uppgifter över solens upp- och nedgång kunna vi följa dagslängdens fluktuation under årets lopp. Eleverna komma under sina räkningar till förbluffande empiriska upptäckter. Vintersolståndet, vårdagjämningen, sommarsolståndet och höstdagjämningen inställa sig i kalkylerna med sina data. Dagslängdens diagram befäster ytterligare de vunna erfarenheterna. Med sin sköna kurva ger detta diagram bilden av dagens längdvariation, där maximistället markerar sommarsolståndet och minimistället vintersolståndet. Ett nytt över samma axel nedlagt diagram över nattlängderna ger i sina skärningsställen med daglängdernas diagram vår- och höstdagjämningspunkterna. Huru mycket mera av vetande och färdighet ger icke ett allsidigt genomarbetande av denna stora uppgift än veckolånga förvandlingar? Förresten bjuder den också på förvandlingar, men de framstå såsom ett nödvändigt led i eftersträvandet av ett allvarligare mål och inläras sålunda tvångsfritt.

Naturligtvis innehåller en sådan framställning av tiden ett ingående på den astronomiska grunden till själva tidsmåtten, varvid den av våra klockor utvisade medeltiden inställes i sin riktiga fattning. Detta är om något talmaterialets realitet och eger också som sådant ett högt kunskaps- och bildningsvärde.

Jag behöver väl knappast tillägga, att tidsintervallsbestämningar särskilt åldersberäkningar ingå i denna framställning, givetvis i en annan form än den nästan löjeväckande räkneschablon, som i denna fråga upprepas från lärobok till lärobok och allt fortfarande inövas i våra skolor.

Också *vinkeln* och dess mätning har sin givna plats i aritmetikundervisningen. Den spelar en roll som ett element i triangeln och polygonen, och den har sin betydelse i den geografiska och nautiska orienteringens latituds- och longituds-uppgifter och i den allmänna astronomiska himmelsorienteringen.

Om jag ännu tillfogar, att också *temperaturens* och *lufttryckets* mätning egnas en liten uppmärksamhet, så har jag angivit, vad som enligt mitt förmenande bör komma på den plats, där sorter förut funnos.

Den första avdelningen i aritmetikundervisningen är härmed avslutad. Dess signaturer ha flerfaldiga gånger bragts till formulering. Vad eger nu den unge adepten, då han kommit så här långt? Vad har det blivit av den lille primitive mannen, för vilken numerationssystemet öppnade porten till räknandets konst?

Han vet åtskilligt. Framförallt kan han utföra qvattvor species. Så mycket anspråk måste dock den rena matematiken få uppställa. Så vet han, när han skall tillgripa det ena eller det andra räknesättet. Han har icke att i urvalet hålla sig till de klara och vägvisande rubriker, som de gamla exempelböckerna i sin starka systematisering erbjuda, om också de »blandade exemplen» satts till för att också något öva urvalsförmågan.

Men han utgår också ur undervisningen med en hel del sammanhängande sakligt vetande om samhällenas liv och verksamhet, deras vexlande kvantitativa relationer, folkmängder och arealer, handel och vandel, import och export, intrader och kostnader. Han har en bottengrund av medborgarvetande och orientering i världen, som överallt arbetar med riktigt fattade talförhållanden. Han har en bestämd kvantitativ struktur inmurad i sitt väsen. Men han har också sett det helas föränderlighet. Samhällets kvantitativa variabilitet, dess framflytande utvecklingar har han följt i sina kalkyler och vet, att den kvantitativa konstellationen av i dag icke längre skall vara det i morgon. Relativiteten, fluktuationen, dessa betydande tankemoment, har han på empirisk väg tillägnat sig. Den primitive mannen har gjort en mängd kvantitativa erfarenheter och blickar nu omkring sig i världen med andra ögon.

Han har emellertid icke heller blivit utan deduktiv tanketräning. Räknesättets uppfattning ända in i tankemaskineriets innersta skrymslen har man fordrat av honom. Ingen mutter har lemnats oprövad, då det gällt att deduktivt uppbygga de fyra enkla räknesätten. Man får icke ett ögonblick tro, att jag vill låta undervisningen glappa på någon punkt. Snarare vill jag göra gällande, att varje enskild detalj skall vara fullkomligt klar eller också skall det hela alls icke deduceras. Detta är som allmän uppfostringsprincip viktigt. Dess försummande leder till den i det allmänna planet resonnerande typ, vars sköra och dunkla tanketråd brister vid minsta press.

Den utveckling, som nu börjar i aritmetikundervisningen, rör sig på ett annat plan och ställer stegrade anspråk på det deduktiva finmaskineriet i den unge adeptens själ. Han har att intränga i *bråkläran* med dess rätt stora anspråk på teoretiskt tänkande.

Det måste genast sägas, att bråken icke längre uti praktiken ha samma ställning, sedan det dekadiska systemet överförts på de vanliga måtten. På sätt och vis kan man säga, att bråken äro ställda på avskrivning. Detta betingar naturligtvis med hänsyn till min undervisnings allmänna tendens en bestämd måttfullhet i deras behandling på skolan. Bråkläran på skolan måste betydligt förenklas. Emellertid äro bråken ännu långt ifrån avförda. De enkla bråken $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ o. a. möta överallt i praktiken och en fullständig kännedom om deras mekanism är för den praktiska orienteringen erforderlig. Dessutom är det här fråga om en betydande matematisk tillökning av talsystemet med alla de teoretiska spekulationer detta för med sig, en synpunkt, som givetvis också måste tillmätas betydelse, då det är fråga om undervisning i matematik. Slutligen går över bråken och deras studium vägen fram till den fulla förståelsen av de i praktiken åter ofantligt viktiga *decimalbråken*. ***Bråk.***

Vanligen sker övergången till bråkläran så, att tals delbarhet och upplösning i faktorer behandlas. Sedan utvecklas minsta gemensamma dividenden och eventuellt även största gemensamma divisorn. Och därpå kommer man efter dessa »förberedelser» till bråkläran. Dylika förberedelser passa emellertid alls icke i mitt system. Genom dem läderas dels det heuristiska momentet i undervisningens gång, dels komma på detta sätt saker och ting nedramlande utan att något påkallat deras ankomst. Huru skall man på ett acceptabelt sätt förklara för eleverna, att man med ens börjar upplösa talen i faktorer? Någon i talmaterialet eller i det på detsamma uppbyggda kalkylationsförfarandet liggande grund kan icke uppvisas. Och det måste väl ändock i varje undervisning vara för eleverna uppenbart åtminstone vart man styr hän. Det är här åter den starkt systematiserande undervisningen, där den schematiska redan och ordningen är en väsentlig princip, som gör sig gällande. I motsats till den vill jag åter här understryka en undervisningskonst, som kan för den ytlige betraktaren te sig mindre klar eller som åtminstone icke framträder med klarhetens yttre kategoriindelning, men som på djupet följer den klarhetens linje, som betingas av det helas förnuftiga och sunda uppbyggande.

Det har varit debatt om huruvida bråken eller decimalbråken skola läras först i skolan. Mellan dem består som känt ingen väsensolikhet, utan decimalbråken äro endast bråk med specialiserad nämnare. Naturligtvis ha de, som ansett, att decimalbråken äro »lättare att undervisa», närmast tänkt på, att deras beteckning ansluter sig till positionsprincipen och att de sålunda framträda såsom den närmaste utvidgningen av de hela talen. Men detta är också allt. Givetvis skall man emellertid med detta som bas kunna rätt behändigt insmyga räknesättens formella teknik uti undervisningen. Om nu detta är huvuduppgiften med undervisningen, så böra decimalbråken betraktas såsom lättare. Men jag tvivlar på, att man på den vägen kan komma till någon verklig förståelse av exempelvis multiplikationen. Överhuvudtaget äro ju decimalbråken med sina stora nämnare i ringare grad överskådbara och till sin storlek för åskådningen fixerbara än de enklaste bråken, varför det hela också ur den kvantitativa uppfattningens synpunkt förefaller högst tvivelaktigt. Månne icke hela denna på inga djupare motiv byggande uppfattning vara att hänföra till den formella undervisningens hemmagjorda taktik.

Det är nu icke häller att rekommendera att såsom ofta sker med ett ryck kasta eleverna in bland bråk med stora nämnare, där räknesätten med tidigare utvecklingar om minsta gemensamma dividenden som bas utvecklas med klarhet och fart. Det är slutligen alls icke det formella inlärandet av räknesätten som är det viktigaste, utan själva den inre uppfattningen om de lagar, som reglera de nya talens storleksförhållanden och inbördes relationer.

Enligt mitt förmenande bör bråkläran behandlas i två olika delar, mellan vilka behandlingen av decimalbråken inskjutes. Jag anser, att detta riktigast avväger svårigheterna och ger bilden av den successiva och kontinuerliga utvecklingsgång, som jag ställer högre än den reda, som visar sig i särskilda inhägnader för bråken och decimalbråken. Decimalbråken äro ju speciella bråk och det är väl mest överensstämmande med sunda förnuftets krav att gå in på dem, då man drivit det propedeutiska bråkstudiet så långt, att metoderna räcka till för att lösa decimalbråkens specialiserade problem.

Vad själva anknytningen av bråkläran till den föregående utvecklingen vidkommer, så har man i divisionen ju haft skäl att mången gång med längtan blicka bort mot den tid, då dunklet över de divisioner, som icke gå jämnt upp, skall skingras. Det är också med en dylik divisionsuppgift som utgångsbas nödvändigheten av nya tal och nya beteckningar för dem skall diskuteras.

Vad talmaterialets realitet vidkommer så är denna i likhet med övriga min undervisnings ledande principer icke någonting, som i tid och otid skall om också på konstlad väg föras till torgs. Givetvis skall de enkla bråkens behandling ständigt rekurrera till deras förekomst i verkligheten, men utvecklingen passerar eljes här en punkt, då det deduktiva, det s. a. s. matematiska har spiran, såsom redan tidigare framhölls, då det var fråga om bråkens frekvens uti det praktiska livet.

Bråkläran har sin svåra punkt. Det möter nämligen här en avsevärd svårighet, då det gäller att avgöra, vilketdera av två bråk är störst, denna inom de hela talens värld så enkla distinktion. Denna svårighet är så betydande, att det är för dess övervinnande frågan om tals delbarhet och tals dividender måste genomarbetas. Det synes mig riktigt, att eleverna få känning av denna svårighet och sålunda fullt förstå nödvändigheten av dylika betraktelsers inryckande i utvecklingen.

Det är inför denna svårighet den första propedeutiska delen av min bråklära hesiterar, efter att först ha visat på dess förekomst. Här avbryter utvecklingen och decimalbråken, som icke ha kännedom av denna svårighet, men väl behöva alla de före dess övervinnande utvecklade satserna träda in som undervisningsobjekt.

Den propedeutiska bråkläran inledes med ett ingående, med grepp ut i praktiken understött studium av de enkla bråkens storleksförhållanden och egenskaper. Det gäller att låta dem växa in i det levande medvetandet, så att förslagsvis $2\frac{3}{4}$ väcker en lika klar kvantitetsbild som vilket helt tal som helst. Likaså genomarbetas icke med slutregeln som mål utan den verkliga inre förståelsen som syfte ett bråks funktionala beroende av täljaren och nämnaren. Här har den *grafiska* arbetsmetoden sitt jag ville säga suveräna fält. Förkortandets och förlängandets mekanism framträder genom den grafiska bilden i evident gestaltning.

Inom denna undersökningscykel faller multiplikationens och divisionens uppbyggande. Jag misstänker, att på denna punkt svåra misstag skola kunna bokföras inom undervisningskonsten. Multiplikationsdefinitionen från de hela talens rike faller; den bygger på den itererade additionen med samma addend, något som icke mera eger tillämplighet, då bråket icke längre har det hela talets antalsegenskap. Det gäller alltså nu för första gången i undervisningens fortskridande, att lägga upp en ny definition för ett redan definierat räknesätt, påkallad av att nya tal uppträtt på skådebanan. Ögonblicket har sin högtidlighet. Det är vidare att märka, att en bestämd ekonomisk eller utilitetsprincip fordrar att denna definition skall uppläggas så, att tidigare lagar gälla, som prövats föreligga hos ifrågavarande räknesätt i dess tidigare definition.

Det handlar således om en definition. Jag vill ge den tillsvidare all betydelse saknande beteckningen

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

innehåll. Här får jag icke i undervisningen väja undan för de deduktiva svårigheterna. Saken skall föras till grunden.

Om jag utgår från frågan, vad $\frac{3}{4}$ meter av en vara kostar, som kostar $\frac{5}{7}$ mk per meter, så kan denna fråga lätt lösas. Vi finna, att priset i mk måste återges av bråket

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$$

Men å andra sidan, om vi önska före kalkylens utförande beteckna resultatet i enlighet med vad vi lärt oss inom de hela talens värld, så är multiplikationsbeteckningen

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

den naturliga. Skall sålunda multiplikationsbeteckningen vid detta speciella problem kunna användas på samma sätt som vid tallösa andra liknande frågeställningar i de hela talens rike och sålunda fylla den första betingelsen för sin ändamålsenlighet, måste vi tilldela denna beteckning

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} \text{ betydelsen } \frac{3 \times 5}{4 \times 7}$$

Jag går icke längre i detaljer. Jag har blott velat visa, med vilken logisk uppriktighet man måste gå tillväga, och att man i ingen händelse genom något om än aldrig så väl uttänkt pedagogisk konstgrepp kan undgå ovanstående resonnemangs klara pretension. Detta är icke den enda punkt, där förståelsen kan vinnas endast genom en ända fram till vetenskapens egen analys gående framställning.

Divisionen framträder naturenligt i anslutning till vad fallet är med de hela talen såsom multiplikationens inversion.

Additionen stannar i sin fullaste utgestaltning icke längre inom de gränser jag utstakat för bråklärans propedeutik. Dess utveckling hesiterar just inför den svårighet, som betecknade denna propedeutiks övre gräns.

Vilken är då denna additionens speciella svårighet? Om vi ha att verkställa additionen

$$\frac{\text{[illegible]}}{13} + \frac{\text{[illegible]}}{13}$$

upptäcka vi ingen svårighet; resultatet blir $\frac{\text{[illegible]}}{13}$.

Men om vi ha att verkställa additionen

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$$

så framträder den prägnant. Vi kunna visserligen övervinna den. Ty bland de bråk, vilka kunna erhållas ur de båda bråken genom förlängning och vilka äro med dem identiska,

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \text{ o. s. v.}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{14}{16} = \frac{21}{24} = \frac{28}{32} = \text{ o. s, v.}$$

finnas ju tvenne $\frac{20}{24}$ och $\frac{21}{24}$ vilka kunna ersätta de ursprungliga bråken, så att de omvandla den förelagda additionen uti den från alla svårigheter befriade additionen

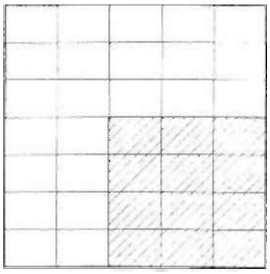
$$\frac{20}{24} + \frac{21}{24}$$

som är av den förstangivna additionens typ. Denna process, som avser att göra bråken liknämniga och sålunda lätt adderbara, kan naturligtvis alltid användas. Men den avger uppenbarligen ingen slutgiltig metod. Dess uppställande måste baseras på ett ingående studium av de tal, som kunna vid den successiva förlängningen uppträda som nämnare d. v. s. på ett studium av tals *dividender*. Särskilt bör detta studium inriktas på de tal, som uppträda samtidigt i båda räckorna som nämnare, d. v. s. de *gemensamma dividenderna* till två eller flera tal och på grund av det matematiska räknandets ekonomiska princip alldeles särskilt på den *minsta* av dessa gemensamma dividender.

I övrigt är om ovanstående metod principiellt ingenting att säga. Vilken additionsuppgift som helst kan visserligen genom ett ansenligt uppbåd av arbete på den vägen lösas. Jag anser det också nyttigt, att några uppgifter lösas på detta sätt. Därigenom framstår klart, vad det vid additionen egentligen är fråga om och vad det nu gäller att utreda för att få maskinen att arbeta snabbt och i enlighet med den matematiska ekonomins optimumprincip. Detsamma gäller naturligtvis subtraktionen.

Här är propedeutikens slutsten. Den unge adepten har vunnit en genom många medel befastad uppfattning om de enkla bråkens storleksförhållanden. Han är också i besittning av multiplikationen och divisionen, givetvis med den begränsning, som ännu pålägges honom av hans bristande teknik i fråga om bråks förkortning. Han har också för additionen och multiplikationen en teoretiskt oantastbar metod, vars praktiska brister han känner. Denna metod har givit honom de problem, över vilka vägen till den fulla behärskningen av additionen och subtraktionen går. I den efterhand sig framåt arbetande undervisningen är här ett givet ställe, ett teoretiskt ypperligt motiverat ställe för andhemtning.

Jag nämnde tidigare i min framställning av denna bråklärans propedeutik den nytta de grafiska metoderna medföra. Sålunda framträder multiplikationen på ett utomordentligt åskådligt sätt. $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$ är ju också uttrycket för arean av en rektangel i m², vars sidor äro $\frac{3}{5}$ och $\frac{4}{7}$ m. Inritas denna i kvadraten, vars sida är 1 m så omspänner den en area, som uppenbarligen består av 3×4 små rektanglar, av vilka 5×7 ingå i 1 m², följaktligen framträder här på ett åskådligt sätt, att $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}$ Också på många andra sätt kan den grafiska metoden på sitt säregna sätt befästa ett resultat genom att inetsa sin bild i det visuella minnet. Men den har sitt värde högt däröver. Den är en detalj i det för det matematiska tänkandets enhet värdefulla projicierandet av tankebilder över från analysen till geometrien och tvärtom. Det är icke meningen att hålla de båda åskådningsvärldarna åtskilda, utan så öva förmågan att samtidigt tänka i de båda



världarna och samla allt flere samband, som låta dessa världar kooperera för en frågas allsidiga belysande. Här i det ovan relaterade exemplet tecknar sig denna unitet, denna koincidens mellan skeende i analysens värld och i geometriens. Medan tanken steg för steg följer det analytiska uppbyggandet av $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$, illustrerar bilden i varje ögonblick varje denna tankeakts skiftning, femte delen av $\frac{4}{7}$ framträder som en väl fixerad strimma i bilden, tre femtedelar fogar i hop tre sådana strimmor till resultatet.

Decimalbråk.

Sedan nu alla bråkens grundegenskaper inlärts är det på tiden att studera de specialiserade bråk, som vi kalla *decimalbråk*. Naturligtvis skiftar nu materialet karaktär och söker åter sina beståndsdelar i den omgivande värld, där decimalbråken komma till daglig användning, men det kommer till en dragning mot andra talmaterial, vilkas realitet har en annan grund än deras hemortsrätt i det medborgerliga livets värld. Det börjar komma in material från andra delar av matematiken, särskilt geometrien. Talet π visar sig. Det blir fråga om cirkelarean såsom närmaste area efter den redan beräknade triangeln. Cylinderns volym kommer in. De olika ämnenas specifika vikt kommer till prägnantare uttryck än tidigare o. s. v. Talsystemets utvidgning med decimalbråk kännes som en utvidgning av den andliga atmosfären. Det kommer in en vidgad rörlighet, kommats platsförändringar göra hela räknekonsten med ens smidigare. Men där kommer också till ett nytt sätt att tänka, som följer med flyttningen ur de hela talens stela värld med dess grova storleksskala till den ytterliga mot kontinuiteten gående förfining av storleksdistinktionerna, som decimaltalen föra med sig. Det kommer till sådana frågor, som om exakthet och approximation.

Det är icke mycket att säga om räknesätten. Efter den propedeutiska kursen i bråk faller hela decimalbråksläran som en mogen frukt i vår hand. Kommats vandringar framstå såsom ett alldeles naturligt uttryck för dessa specialbråks egna sätt att formellt reagera inför operationerna. På varje punkt nås den fullständiga förståelse, som helt säkert aldrig kan nås genom vädjan till formella analogier med de hela talen.

Egentligen kan man nu säga, att eleven fått en överblick över räknekonsten i dess aritmetiska gestaltning. Han kan alltså utföra alla de operationer, som komma till användning i det honom omgivande praktiska livet, blott han ännu lär sig de specialbegrepp, som på varje särskilt område användas. Han kan visserligen ännu icke fullständigt addera och subtrahera bråk och känner ingenting om faktorer och dividender. Men dessa saker visa sig heller icke i samhällets vardagspraktik.

Minsta gemensam- [illegible] upplösning i faktorer.

Framställningen av bråken avbröts inför de svårigheter, som reste sig i additionens och subtraktionens väg och vilka såsom också framhölls äro desamma som de, vilka mötte vid det kapitala problemet, att avgöra, vilketdera av två bråk är störst. Emellertid avbröts utvecklingen icke planlöst, utan fördes fram till en punkt, där dessa frågor kunde på en teoretiskt oantastbar väg lösas, en väg, som ligger klar och som det nu endast gäller att i detaljerna utforma. Jag skulle anse detta vara en särdeles remarkabel pedagogisk taktik. Eleverna få här icke ett sorgfälligt förberett och tillrättalagt kunskapsmaterial, utan få följa den historiska utvecklingsgången, känna av svårigheterna och vara med om att utarbeta metoder för deras övervinnande. Mot bakgrunden av en sådan, för övrigt hela min undervisning dominerande princip bör avbrottet i bråklärans framställande ses och bedömas.

Den propedeutiska behandlingen av bråken utmynnade i nödvändigheten att kunna göra två bråk *liknämniga*. Men detta problem leder över till ett annat, att studera de båda nämnarnas gemensamma dividender. Varje gemensam dividend och endast en sådan egnar sig till gemensam nämnare och de båda bråken bringas i den form, att de uppvisa denna gemensamma nämnare, genom att förlängas med det tal, som anger, huru många gånger den ursprungliga nämnaren ingår i den gemensamma dividenden. Detta är hela problemet. Att man särskilt fikar efter att använda den minsta av de oändligt många gemensamma dividenderna till de båda nämnarena har intet särskilt teoretiskt berättigande, utan sammanhänger med den räknekonstens ekonomiska princip, som ofta framskymtat.

Två tal, förslagsvis 6 och 8, ha alltid en lätt funnen gemensam dividend. Vartdera talet har sin särskilda dividendräcka, bestående av alla de tal, som kunna divideras med talet och som sålunda givetvis består av talets alla multipler. Vi få sålunda för talen 6 och 8 dividendräckorna

$$6,\ 2\cdot6,\ 3\cdot6,\ 4\cdot6,\ 5\cdot6 \text{ o. s. v.}$$
$$8,\ 2\cdot8,\ 3\cdot8,\ 4\cdot8,\ 5\cdot8 \text{ o. s. v.}$$

Men i första räckan uppträder slutligen $8\cdot6$ och i den senare $6\cdot8$, vilka tal äro identiska och sålunda bilda en gemensam dividend till 6 och 8. Vi ha härmed en osviklig och enkel metod att finna en gemensam dividend till två nämnare, vilka som helst, och sålunda en första metod att lösa bråklärans svårighet. Emellertid är detta icke det sista ordet, men det är en etapp i utvecklingen, som på ett eklatant sätt låter det sakligt väsentliga träda i dagen. Problemets fortsatta utveckling och metodens ytterligare förfining har alldeles andra motiv, såsom också ovan uttryckligen framhölls.

Den ekonomiska principen, som syftar åt räknearbetets förenkling, ställer oss inför problemet att finna den minsta av de gemensamma dividenderna till 6 och 8. Utöver det speciella behov, denna minsta gemensamma dividend på denna punkt tillfredsställer, har den ju sin teoretiska betydelse, då alla de gemensamma dividenderna uppenbarligen äro dividender till den minsta bland dem. Särskilt riktar sig blicken genast vid denna upptäckt in mot frågan, vilken ställning den just inaugurerade genom en mycket primitiv tankeakt funna dividenden 6. 8 eller talens produkt intar till den minsta gemensamma dividenden. Ibland är ju såsom vid 24 och 35 talens produkt också på samma gång talens minsta gemensamma dividend. Frågorna tätna och ge vid handen, att vi stå vid randen av något, som den unge forskaren har att vinna inblick i för att kunna känna sig lugn.

Man kan ge problemet om minsta gemensamma dividenden många synonyma fattningar, som äro egnade att på sitt sätt materialisera problemet. Tvenne personer ha till exempel ledigt, den ena var 6:te dag och den andra var 8:de. De äro en dag samtidigt lediga och man frågar efter alla deras ledighets koincidenser. Eller man har ett galler, sammansatt av likariktade rektanglar med sidorna 6 och 8 cm och man vill i detta avgränsa kvadrater, vilkas sidor följa gallerstängerna åt. Varje sådan uppgift ger sitt bidrag till det fulla sakliga inträngandet i dividendernas mekanism och den minsta gemensamma dividendens ställning i deras komplex.

Det fortsatta begrundandet av dividenderna till 6 och 8 ger efterhand anledning till värdefulla iakttagelser. Här föreligger ett alldeles särskilt tilltalande fält för den sökande och trevande matematiska undervisningskonsten, som i sitt försiktiga vidarebyggande ger i sin ringhet en bild av själva forskandet. Det hela skall ju utmynna i det slutliga suveräna utformandet av själva det slutliga förfaringssättet för minsta gemensamma dividendens finnande, men vägen dit är lång och färden skall bland annat avbrytas för att en ny konst skall inläras, nämligen konsten av upplösa tal i primfaktorer. Jag återvänder till talen 6 och 8. En dividend till 6 skall givetvis kunna divideras med 6 och sålunda med 2 och 3. En dividend till 8 skall åter kunna tre gånger divideras med talet 2. Följaktligen skall varje gemensam dividend till 6 och 8 innehålla åtminstone 3 faktorer 2 och en faktor 3. Den minsta gemensamma dividenden är den, som är fri från allting annat, och den är således sammansatt just av detta minimiaggregat av faktorer och sålunda precis likamed 2·2·2·3 eller 24.

Härmed har problemet lagts på en ny bas. Det gäller att kunna säga, vilka faktorer de tal innehålla, vilkas minsta gemensamma dividend skall uppletas. Uppgiften att finna den minsta gemensamma dividenden har ställts i beroende av ett nytt problem, som först skall lösas, nämligen problemet att *upplösa ett tal i primfaktorer*.

Detta utsökta tillfälle till heuristik och deduktiv uppfostran försummas i den vanliga undervisningen. Här genomlöpes alls icke denna utvecklingslinje. Den minsta gemensamma dividendens problem växer icke ut ur något genom utvecklingens gång inkommet behov. Icke heller framträder tals delning i primfaktorer såsom påkallat av dividendernas problem. Det hela går i rakt motsatt ordning, den »systematiska förberedelsens» ordning. Utan att något behov kan uppvisas skrider man till att undersöka tals delbarhet. Så upplöser man tal i primfaktorer. Så bildar man någonting högst omotiverat, nämligen den minsta gemensamma dividenden. Sedan äro kanonerna laddade för angreppen på bråks addition. Givetvis går detta utan friktion. Men den behållning, som därigenom tillföres, är av en alldeles annan och enligt mitt förmenande lägre valör än den som genom den naturliga undervisningskonst, jag ovan gjort mig till tolk för, inkommer i den arbetande barnasjälen. Det är särskilt ett ställe i det helas gång, som måste med all varsamhet överbyggas och det är det moment, då frågan om två tals dividender med ens vänder sig in mot frågan om de båda talens faktorer och sålunda frågan om tals delbarhet glider in i undersökningens förgrund. Här måste saken belysas från många olika angreppspunkter.

Tals delbarhet.

Vi ha kommit fram till tals delbarhet. Det ligger i hela min undervisnings tendens att icke hasta. Det illa uppfattade är värdelösare än det alls icke behandlade. Också tals delbarhet bör genomgås med grundlighet. Det måste exempelvis bli in i alla sina skrymslen klart, varför ett tals delbarhet med 3 eller 9 beror av tvärsummans delbarhet med 3 eller 9. Därvid ha vi den enda metoden i det grundliga rekurrerandet till ett tals dekadiska uppbyggnad. Talet 483 består av 4 hundrabuntar, 8 tiobuntar och 3 lösa lappar. Vi uttaga ur varje hundrabunt en lapp och få då idel buntar, som kunna delas med 3 och 9. På samma sätt utdraga vi ur varje tiobunt en lapp och få då idel buntar, som kunna delas med 3 och 9. Genom detta få vi utöver dessa med 3 och 9 delbara buntar 4 + 8 + 3 lösa lappar och talets delbarhet med 3 eller 9 beror på denna *tvärsummas* delbarhet med 3 eller 9. Föres samma resonnemang utan stödet av denna till undervisningens första tider tillbakagripande reala antalsfixering torde den ställa sig betydligt svårare för uppfattningen.

Jag vill här icke gå längre in mot detaljerna. Jag vill blott varna för det på denna punkt onödiga tränandet. Det kan vara nog att hålla sig till måttfulla tal och icke driva upplösandet i faktorer såsom någotslags särskilt betydande angelägenhet. Där en bestämd träning skall inläggas är, då det gäller de mindre talen, särskilt de under hundra liggande. I fråga om större tal med stora primtalsfaktorer bör man icke tveka att lägga *faktortabeller* i elevens hand, enär uppletandet av sådana stora faktorer icke skänker något andlig behållning.

Man bör icke underlåta att klarlägga för eleverna, att tals delbarhet är ett av matematikens gamla problem. Där står en särskild stämning över dessa frågor. Primtalen ha följt den aritmetiska tanken genom tiderna. Eleverna böra få känning med detta. Genom Eratosthenes' såll få de sikta de första elementen i primtalens nyckfulla räcka. Genom andra lämpligt valda exempel få de en inblick i, vad man sysslat med inom denna värld, så långt detta nu kan ske.

Återgången till bråkläran kan numera ske. Bråks förkortning är en enkel sak. Bråks addition och subtraktion erbjuder ingen svårighet mer.

Också på denna punkt ville jag åter varna för ett lössläppande av den överdrivna tekniska träningen. Bråken spela som sades icke mera så stor roll i praktiken och denna bråklärans senare del betecknar mera en teoretisk fulländning av bråkläran med hela den i det matematiska planet lärorika deduktion, som för fram till denna fulländning, än en av det praktiska behovet påkallad, slutgiltig utbyggnad av bråklärans tekniska maskineri. Det tröttsamma genomarbetandet av otaliga övningsexempel enligt den monotona indelningen i addition, subtraktion, multiplikation och division är icke alltid i sin schematiska tillämpning på sin plats. Man måste något låta det sunda omdömet avgöra, när det är lämpligt och när icke.

Nu äro då de hela talen, bråken och decimalbråken inlärda. Därmed är skolaritmetikens tekniska apparat utformad. Det gäller nu att välja den riktiga fortsatta utvecklingen. Det är den, som nu skall bliva föremålet för en ingående diskussion. Det genomgångna har ju bjudit på många förändringar både ifråga om lärostoffet, den allmänna pedagogiska strategien och det dagliga undervisandets taktik. Innan jag emellertid går in på detta vill jag upptaga till debatt en annan fråga som redan tidigare fördes fram.

Det är ju givet, att decimalbråkens stora praktiska betydelse skall leda till uppgiften att angiva bråk i decimalbråk och att sålunda också utforska, vilka bråk som kunna exakt utvecklas i decimalbråk och vilka icke. Särskilt den senare frågan leder till den förnuftiga avkortningen av decimalbråk för utvinnande av en av uppgiftens art betingad approximation. Därmed föres ett viktigt moment in i undervisningen, egnat att kasta ett ljus över den ofullkomlighet med vilken verktyg och observation arbeta. Emellertid vill jag icke ingå på dessa lockande frågor och deras ställning just på detta ställe i utvecklingen. Men med utvecklingen i decimalbråk sammanhänger nära ett av det medborgerliga livets kapitalaste begrepp, nämligen *procentbegreppet.* Dettas fullständiga in mot den fullständigaste klarhet gående konception bör på denna punkt utbyggas till undervisningens centrala punkt.

Procentbegreppet.

Emellertid kan, och nu är jag framme vid den sak jag ville draga under debatt, den frågan framkastas, om det icke är redan på denna punkt undervisningen i aritmetik borde avbrytas för att återupptagas först på den klass, som förbereder för den allmänna mellanskoleexamen. I ingen händelse bör utvecklingen drivas längre än möjligen till och med det moment, som innehavet av procentbegreppet markerar. Jag är också en smula tveksam redan inför ett så långt framträngande. Ty om vi rätt besinna saken är detta procentbegrepp till sitt innehåll ingenting så alldeles lätt fattbart. I varje fall betecknar det en alldeles ny tankeakt, som i de absoluta talens ställe inför de relativa procenttalen vid kvantitativa jämförelser. Man får icke låta vilseleda sig av den jämförelsevis lätta tankeakt, genom vilken man kan formellt utveckla ett begrepp och tro, att begreppet i och med detta blivit själens egendom. Å andra sidan är procentbegreppet anknutet till tidigare talmaterial, och har icke i likhet med den härefter följande utvecklingen sin grund i någon icke ännu behandlad specificerad form av samhällsverksamhet. Det är ett allmänt samhällsbegrepp om jag så får säga och hör sålunda måhända ändock slutligen inne i den första kursen i aritmetiken. Om än icke utan tvekan tar jag således procentbestämningen med.

Procentbestämningen har ju sin givna utgångstanke. Om jag i en skola med 247 elever i första klassen har 32 elever och i en annan skola med 389 elever har i första klassen 47 elever, så säga dessa absoluta tal oss rätt litet om den första klassens ställning i de båda skolorna. Emellertid är första klassen i den förra skolan $\frac{32}{247}$ av hela numerären och i den andra $\frac{47}{389}$ av hela numerären. För att jämföra dessa bråk kunde jag ju göra dem liknämniga, men föredrar att utveckla dem i decimalbråk. Jag får vid avkortning till 2 decimaler

$$\frac{32}{247} = 0{,}13$$

$$\frac{47}{389} = 0{,}12,$$

vilket jag utsäger så, att första klassen i de båda skolorna är resp. 13 och 12 % av hela numerären.

Jag har härmed vunnit en metod för att få jämförelsetal, genom vilka jag kan karakterisera ett bestånds omfattning inom ett annat bestånd och sålunda göra jämförelser mellan den relativa storleken hos i olika bestånd ingående delbestånd.

Här träder också den grafiska åskådningen in med sina hjälpmedel. I procentdiagrammet är vardera skolans totala elevnumerär företrädd av en 100 mm hög rektangel, inom vilka de första klasserna vid skiktet fått sig 13 resp. 12 mm höga strimmor anvisade. För en enda skola ställer sig detta synnerligen vackert, då de skilda klassernas procentuella bidrag till elevnumerären kalkyleras och den 100 mm höga rektangeln på basen av dessa jämförelsetal utparcelleras i invid varandra liggande strimmor. Detta kan sedan utbyggas till andra bestånd såsom landets uppdelning i län, dessas invånarantal m. m. Särskilt skall den procentuella omfattningen av den odlade jorden inom några länder vara egnad att belysa procentbegreppets nya inlägg, på samma gång den i enkla tal koncentrerar jämförelsen mellan ländernas bördighet.

Nativitetsprocenten, mortalitetens styrka och andra åskådningar, som tidigare stått utom undersökningarna komma nu in. Procentbestämningen är ett nytt förfinat räkneinstrument, med vars tillhjälp nytt ljus kan kastas över den tidigare kvantitetskomplexen och nya komplexer kunna indragas i undersökningen.

Procentbegreppet har den mest vittgående användning i det medborgerliga livet. Det har förlorat varje spår av teoretiskt begrepp och ingått såsom hemvant i det dagliga språket. Det användes nu icke endast såsom ovan utvecklats för att skapa en ny art av jämförelsetal. Varje gång ett beroende etableras mellan två mot varandra proportionella kvantiteter såsom pris och rabatt, blandning och ingrediens o. s. v. anges proportionaliteten med användande av procentbegreppet.

Detta begrepp, som sålunda måhända i högre grad än något annat aritmetiskt begrepp gått in i det allmänna tänkandet, bör givetvis på skolan egnas den största uppmärksamhet. Den naturliga formen för dess införande och förklarande synes mig den vara, som ovan i samband med de båda skolorna och deras första klasser klarlades. Att blanda in den s. k. enkla reguladetrien i den frågan är alldeles missvisande och leder måhända till en fast beräkningsmetod, men till ingenting annat. Att någon elev verkligen skulle förstå det dunkla resonnerandet med 100 i reguladetriens schema är fullkomligt uteslutet.

Härmed är nu den första delen av aritmetikkursen avslutad. Det som nu följer har sin särkaraktär. Det har hittills varit fråga om alldeles allmänt medborgarvetande, allmänna storleksrelationer och deras studium samt det med dem såsom underlag efterhand uppväxande, numera till fullbordan bragta räknemaskineriet. Det talmaterial, som nu stundar är hemtat från mera specificerad samhällsverksamhet om också allt fortfarande av den art, att det motsvarar behovets princip. Det blir nu mera fråga om transaktioner inom det samhälle över vars kvantitativa struktur de tidigare utvecklingarna velat ge kunskap. Dessa transaktioner äro av den art, att den fulla uppfattningen av deras sakliga innehåll måhända icke lämpar sig för det ännu föreliggande tidiga stadiet. Därtill kommer, att en på denna punkt till fullständig avslutning driven aritmetikundervisning kommer att lägga aritmetiken ad acta så att den över den allmänna medborgarexamen, mellanskoleexamen, i livet utvandrande mannen har hunnit glömma det. En inför denna examen företagen »repetition» kan icke mera skänka det hela samma liv som en lugnt fortgående undervisning. Det synes mig därför som om den punkt nåtts, då aritmetikundervisningen kunde avbrytas, sedan dess propedeutiska del numera genomarbetats.

Det är också andra skäl, som tala för en dylik åtgärd. Den utvidgning av räknekonsten, som algebran innebär och till vilken jag med synnerlig utförlighet skall återkomma i det följande, ansluter sig i verkligheten på ett naturligt och kontinuerligt sätt till den just avslutade delen av aritmetiken. De praktiska exkurser, som bilda aritmetikkursens fortsättning, tillföra icke något sådant tillskott, som skulle föra utvecklingen närmare algebran, utan äro snarare egnade att fjärma tankegången från det, som i algebran skall vara det grundläggande. Detta skall vid uppbyggandet av algebraundervisningen visa sig vara en riktig uppfattning.

Likaledes är det på tiden, att geometrien kommer in så småningom. Den har ju visat sig redan uti aritmetiken där mätningen bragt eleverna i förbindelse med dess grundbegrepp. Jag skall, då jag kommer till frågan om geometriundervisningen, utveckla de alldeles särskilda synpunkter, som enligt mitt förmenande göra, att geometriundervisningen icke med nödvändighet behöver anses höra till det, som bör upptagas senare.

Jag går nu till den senare delen av aritmetikundervisningen. Jag vill redan på förhand säga, att jag kommer att egna den en alldeles särskild grundlighet, beroende på att jag här uppställer en undervisningsbild, som fullkomligt avviker från den hittills tillämpade. Här nöjer jag mig icke med inre förskjutningar och omläggningar, som i stort sett kan sägas ha varit fallet i det föregående. Där har ju ändock själva undervisningsbildens yttre kontur i stort sett uppvisat samma gestaltning som tidigare, om också innehållet inom denna allmänna inramning undergått väsentliga omläggningar. Det blir nu fråga om någonting helt annat.

Man kunde naturligtvis fråga om icke möjligen aritmetiken helt och hållet nu kunde avslutas och det som sedan följer överlämnas åt den i livet tillkommande undervisning, åt vilken skolan måste avstå så mycket av kunskapsbibringandet. En sådan frågeställning är ingalunda så olämplig, som den vid första påseende och under den konventionella uppfattningens tryck kan synas vara. Det är såsom ovan utvecklades fråga om en verklig avslutning och det som nu följer har i motsats till det föregående en specificerad karaktär. Det är givetvis så, att undervisningen icke skall ledas in mot specialiserade former av samhällsverksamhet, då ju en »förberedelse» i denna riktning på sin höjd är nyttig för någon eller några elever. Den skall hålla sig till, vad man kan anse falla inom området för allmän medborgarkunskap. Endast så har vad vi kallade behovets princip på ett riktigt sätt bragts till uttryck i undervisningen.

Nu är saken den, att det finnes former av samhällsverksamhet, som ega den allmänna utsträckning, att kännedomen om deras kvantitativa förhållanden bör vara var mans egendom. Envar bör ega en inblick uti vissa ekonomiska transaktioner, deras innebörd och betydelse, samt vissa statistiska förhållanden. Den del av aritmetiken, som nu följer, har att skänka en bild av det aritmetiska inlägget uti sådana arter av samhällsverksamhet. Det är med beaktande härav som tanken att nu helt avbryta aritmetikundervisningen kan tillbakavisas. Behovets princip har ännu icke i fullaste utsträckning tillgodosetts. Det finnes i det oss omgivande samhällets livsföring kvantitativa relationer, som ännu stå utom den unge adeptens kunskapsvärld och som äro av den allmänna fattning, att själva förståendet av samhällsmaskineriet förutsätter innehav av kunskap om deras olika reaktioner.

Alltså, aritmetikundervisningens organiska utveckling har icke ännu nått sin naturliga och berättigade avslutning.

Reguladetri. Vid den fortsatta aritmetikundervisningen kommer uti den vanliga undervisningen på denna punkt den s. k. *reguladetrien* in. Den uppdelas uti *enkel* reguladetri och *sammansatt* reguladetri. Hela det följande uppbyggandet av de s. k. *borgerliga räknesätten* grundar sitt tekniska utförande på denna reguladetri.

Den enkla reguladetrien är ett till sin tankegång enkelt, men väl att märka synnerligen specialiserat slutledningssätt. Den *direkta proportionaliteten*, representerad av formeln $y = ax$, tillater slutledningen, att $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$, liksom omvänt ett funktionalt sammanhang, där denna slutledning alltid kan göras, är en direkt proportionalitet. Också den *indirekta proportionaliteten* $y = \frac{a}{x}$ tillåter en liknande slutsats i det [illegible], medan också här ett funktionssammanhang, som alltid tillåter denna slutsats, är en indirekt proportionalitet.

Ur de båda formlerna följer sedan

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2} \cdot y_2 \text{ resp. } y_1 = \frac{x_2}{x_1} \cdot y_2,$$

som innehåller den enkla reguladetriens räkneschema och som möjliggör beräknandet av det mot x_1 svarande funktionsvärdet y_1, då man känner det mot x_2 svarande funktionsvärdet y_2.

Denna enkla tankes användbarhet på de s. k. borgerliga räknesätten beror naturligtvis på, att det inom dem handlar om proportionalitet.

Jag vet icke, om detta i allmänhet fullt koncipierats. Vad man givetvis måste ha klart för sig är, att denna slutledning icke har någon användning, då det blir fråga om andra funktionssammanhang än proportionalitet.

Vad jag på denna punkt har att invända är, att man först och främst alldeles överdriver betydelsen av detta visserligen ganska viktiga slutledningssätt. Man utsöndrar det ur sitt sammanhang och låter det bli ett särskilt räknesätt, för vars inövande talrika »exempel» mobiliseras. Dessa exempel, som konstruerats enkom för denna slutlednings intränande, höra till sitt innehåll till de mest världsfrämmande i skolkursen, varför den tid, eleven kvarhålles vid dem, icke ger honom någon valuta i form av utvidgat medborgarvetande. Men denna reguladetri för dessutom med sig, att den till sin deduktiva karaktär enkla slutledningen alls icke kommer till sin rätt, utan uppslukas av ett räkneschema, som likt en räknemaskin avlevererar resultaten, sedan de givna elementen riktigt inställts. Den tid eleven kvarhålles vid den uti undervisningen månatal i anspråk tagande reguladetrien tillför honom sålunda en rätt ringa övning i deduktiv och analyserande utveckling, om man frånser från det till leda upprepade motiverandet av talens placering ovanom och nedanom det väntande bråkstrecket.

Inom den sammansatta reguladetrien har den interna pedagogiska evolutionen firat triumfer. Här löses med monotont allvar uppgift efter uppgift, vilka i den mån utvecklingen fortskrider alltmera fjärma sig från verkligheten, förverkligande troligtvis någon måhända i den världen betydelsefull tankefiness. Och vid dylikt kvarhålles också aritmetikundervisningen i månatal. Cui bono?

De borgerliga räknesätten.

Sedan följer i utvecklingen de s. k. *borgerliga räknesätten* intresseräkning, bolagsräkning, kedjeräkning, alligationsräkning, betalningsterminers reduktion och vad allt de heta. Som allmän karaktäristik av deras ödsliga isolering kan måhända anföras, att en matematiker nyligen tillfrågad om dem medgav, att han känner om deras verkliga mening så där på rak arm just ingenting. För det aritmetiken praktiskt utnyttjande samhället stå de också främmande. Man kan icke värja sig från det intrycket, att det här handlar om residuer, som ha sin uppkomst förlagd i någon annan tids annorlunda beskaffade åskådning och som numera finnas kvar endast i skolan.

Nu kan ju denna dom synas hård, åtminstone, då det gäller intresseräkningen. Den är emellertid också ifråga om den riktig. Visserligen kommer den verkligheten närmare än de andra, såtillvida som dess allmänna vokabulär har avseende på den i samhällets livsföring viktiga lånerörelsen. Men den ger ingen som helst bild av denna lånerörelses behov av räknekonsten och fjärmar sig alldeles från verkligheten med sitt systematiska, monotona beräknande av kapital, ränta, tid och procent ofta med data, som icke skådas inom denna lånerörelse. Den ödelägger ett glimrande tillfälle att rikta adeptens vetandes värld och framträder närmast som tummelplats för ytterligare träning i den numera till alltings ledande tankeprincip upphöjda reguladetrien.

Bolagsräkningen är ett sällsamt gebit av räknekonsten. Det lovande namnet har ringa motsvarighet i innehållet. Det hela handlar om ett tals delning i delar, som äro proportionella mot vissa tal. Snabbt inkomma rationstalen och det hela inmönstras bland reguladetriens användningar. Det deduktiva tänkandet kopplas av och räknemaskinen arbetar. När det sedan går lös på sammansatt bolagsräkning med betande både hästar och kor med olik konsumtionskraft, så stannar redan vid rationstalens uppbyggande all verklig förståelse utanför.

Jag går alls icke in på de övriga borgerliga räknesätten, vilkas verklighetsfrämmande värld är fylld av hundra tals sällsamma frågor, som pocka på svar. Överallt är det reguladetrien, som levererar svaret.

Här sker nu under någon termin i skolan någonting, som icke borde få ske. En dyrbar tid, många timmar i veckan, användes uppriktigt sagt till ingenting. Den tekniska behållningen är enkel reguladetri, ett resultat, som till sitt värde bör beskådas med skepsis. Den substantiella behållningen är ingen alls. Eleverna lära sig kort sagt ingenting under vidpass ett år. Jag står för detta djärva påstående. Åtminstone lära de sig ingenting om samhällets funktioner och få ingen inblick i dess av allehanda sammanhang bundna kvantitetsvärld. Vad man icke kan förneka är, att de lära sig reguladetri och så tränas de naturligtvis i sifferkalkyler. Om nu detta sedan skall betraktas såsom någon behållning att tala om.

Jag vill här skjuta fram en annan sak, som ger sin prägel åt hela matematikundervisningen på alla dess områden och som jag icke tidigare explicite isolerat om den också implicite framskymtat. Matematikundervisningen behärskas av *exempelräknandet*. Det är som om hela undervisningen på varje stadium skulle längta fram till detta förövrigt ofta återkommande stadium, då exempelräknandet får sätta in. Nu är det ju klart att exempelvis i aritmetiken en viss träning erfordras, för att räknandets teknik skall befästas, men detta är något annat än dessa i hundradetal överallt uppträdande tillämpningar av det teoretiskt genomgångna. Vart vill man egentligen komma med detta? Särskilt i aritmetikens kapitel om de borgerliga räknesätten måste man ställa sig frågande angående det helas syfte och ändamål. Redan om exemplen vore valda »ur verkligheten», skulle dessa isolerade frågor och tillämpningar ge en bra ringa behållning och illa förbereda för kommande verksamhet. Såsom de nu äro orienterade ha de ingen annan plan än att utfinna svaret och så övergå till ett nytt exempel.

Vad är nu att göra med allt detta? Enligt mitt förmenande bör först och främst reguladetrien reduceras till sina riktiga mått. Den bör ställas in i sin riktiga dager såsom ett slutledningssätt, som hör ett särskilt beroende till. Den bör icke häller upptas såsom någotslags isolerat räknesätt, utan behandlas, då proportionaliteten såsom särskild funktionsform debatteras. Det övriga, den sammansatta reguladetrien och de borgerliga räknesätten böra åter helt enkelt avlägsnas ur kursen.

Inför en så radikal åtgärd reser sig genast frågan om, vad som i stället bör undervisas. Såsom redan sagts, bör nu här den utveckling av aritmetikens roll inom olika arter av samhällsarbete behandlas, som väl föresvävar undervisningen, också då de borgerliga räknesätten behandlas. Jag vill nu närmast visa, huru jag tänkt mig denna andra del av aritmetikundervisningen. Jag behöver icke trötta genom att åter framhäva alla de principer, tidigare framhävda och debatterade, vilka samarbetat vid skapandet av denna undervisningsbild.

Den förra avdelningen av min aritmetikundervisning utmynnade i procentbegreppet, som med ens förde in någonting nytt och betydande i våra undersökningars värld. Den proportionella nedpressningen eller dilatationen av ett bestånd till 100 eller överhuvudtaget rekurreringen till 100 som indextal för ett bestånd betecknade införandet av en ny typ av jämförelsetal och en alldeles ny åskådning, där den relativa storleken och den relativa kvantitetsjämförelsen trädde in såsom ett hjälpmedel, överlägset den tidigare absoluta jämförelsen.

Det blir nu en naturlig fortsättning av utvecklingen att anknyta till den samhällsverksamhet, där procentbegreppet historiskt hör hemma och där detsamma framträder i en särskilt renodlad och prägnant form. *Låne-rörelsen* blir den fortsatta utvecklingens första etapp.

Inom lånerörelsen möter oss *räntebegreppet* och dess relativa fixering i *procenten*. Anknytningen till verkligheten är genast etablerad, ty *procenten*, *räntefoten*, är en levande kvantitet, vars tillfälliga indextal djupt ingriper i samhällets förhållandena, både i det allmänna och det enskilda planet. Lånets roll i en värld, där allting bygger på lånet, upprullas. Dess kortvarighet påkallar intresse för dess återbetalningsmodus. *Amorteringens* enkla mekanism framträder sådan den är såsom en naturlig och till sin konstitution enkel avkortningsmekanism. *Låne-rörelsen.*

Vi välja ett exempel. Ett lån stort 10000 mk löper med 8 % ränta. Betalas då varje år 800 mk så fullgöres endast räntebetalningsskyldigheten och själva lånets grundstomme blir oförändrad. Om emellertid årligen betalas, låt oss säga 2000 mk, blir situationen en helt och hållet annan. Lånets vandring mot förintelse avläses kanske bäst ur följande *amorteringstabell*.

År.			
1	Kapital:	10000	
	Ränta:	800	
	Summa:	10800	
	Avbetalning:	2000	
	Återstod:	8800	
År			
2	Kapital:	8800	
	Ränta:	704	
	Summa:	9504	
	Avbetalning:	2000	
	Återstod:	7504	o. s. v.

Vi kunna ur denna tabell åse hela amorteringsförfarandets maskineris arbete. Vi se bland annat huru den årliga *annuiteten* 2000 mk fördelar sig på *ränta* för den oguldna delen av skulden och *amortering* d. v. s. avkortning av skuldbeloppet. Vi få efterhand i första omgången: 2000 = 800 + 1200

i andra omgången: 2000 = 704 + 1296 o. s. v.

vilken tablå visar, huru räntan givetvis efterhand avtar och lemnar en större anpart av annuiteten till avkortningen.

Men detta är ju ett betydande vetande, som här helt elementärt utvunnits. Uti den vanliga undervisningen talas det nog också om amortering, men alls icke i aritmetiken, utan alldeles i slutet av algebran, då det är fråga om att »tillämpa» teorin för geometriska serier. Där fördunklas förresten hela frågeställningen och är senare i livet för de flesta en ur logaritmernas skumma värld framskymtande hågkomst. En amorteringstabell uppgöres aldrig.

Amorteringslånets huvudproblem kan redan på detta stadium fullt fattas. Det gäller att kunna fixera annuiteten så, att lånet gäldas inom en viss föreskriven tid. Det framträder icke endast som ett lockande perspektiv, utan som en bjudande nödvändighet att rå på detta problem.

Emellertid inställa sig andra uppgifter. De stora lån, som stater och kommuner och till och med stora privata företag äro i behov av, kunna icke placeras på en hand. De uppdelas i smärre lån, vilkas skuldsedlar såsom *obligationer* finna hugade inköpare. *Obligationslånet* är ett amorteringslån, vars mekanism arbetar så, att årligen ränta utbetalas på alla utestående obligationer, medan årligen ett visst antal inlösas, så att ränteutbetalningen och avkortningen, ränta och amortering, bilda en såvitt möjligt fix summa, som då är amorteringsförfarandets annuitet. Obligationerna äro från början numrerade och det bestämmes genom lottdragning eller utlottning, vilka numror årligen inlösas.

Det kritiska är i detta fall själva obligationernas första utbjudande d. v. s. lånets uppnegocierande. För att göra innehavet mera lockande tar man ibland spelpassionen till hjälp. Man utbetalar lägre ränta på de oinlösta obligationerna och kumulerar resterande räntemedel till vinster eller *premier*, vilka utlottas. Sådana obligationslån kallas *premieobligationslån*.

När vi nu se detta och höra dess enkla sammanhang, måste vi känna förvåning över att icke finna dessa saker uti den vanliga undervisningen. De motsvara ju dock på ett helt annat sätt behovets princip än alla möjliga konstlade, varje saklig resonans saknande övningsexempel. De skära med ens djupt in i den kvantitativa medborgarkunskap, som jag på denna linje i utvecklingen uppställt som mål.

Den yrkesmässiga låneförmedlingen ombesörjes av *bankerna*. Bankväsendet blir den närmaste etappen i min undervisning.

Nu drives undervisningen allt starkare in mot det dagliga samhällsarbetet. Bankerna arbeta runt om i städerna och på landsbygden. De äro sålunda eleverna inpå livet. I deras fönster finnas uppgifter över räntesatserna uthängda jämte vexelkurs och börsnoteringar. Det gäller att öppna denna värld för den blivande medborgaren.

Bankens verksamhets fördelning på *inlåning* och *utlåning* indras i undersökningen. Eleven genomskådar den enkla mekanismen och fattar *räntemarginalens* betydelse. Inlåningsformerna, främst *deposition* och *löpande räkning* och deras olika räntesatser och dessas orsaker behandlas. Utlåningens former, *lånet*, *kassakreditivet* och *vexeln* diskuteras och deras olika art och användbarhet inkommer i undersökningen. Ränteberäkningen blir någonting helt annat än intresseräkningens posthuma tilllämpningar. Den blir en levande och nödvändig handling i en levande värld, som sammanhänger med hela denna världs skiftande handlande och vandlande, dess merkantila och ekonomiska drift. Han ser också, den unge adepten, att det är ränteräkningen, som är det centrala för kalkylen. Kapitalet, tiden och procenten äro ju föralldel bekanta i denna bankvärld, och det är mera en gest åt nyfikenheten att utveckla formler för deras utkalkylerande.

Så ser nu det ut, som kommer i stället för den gamla undervisningens intresseräkning. Jag behöver väl knappast tillägga, att ränteberäkningen också klargör den i bankens usus förekommande *räntetabellens* konstruktion och att en del av en sådan kalkyleras. Bankväsendet, sådant det framträder i bankinstitutet, framlägges kort och gott i undervisningen.

Naturligtvis innesluter en dylik undervisning en exposé över statsbank och privatbank, över sparbank och handelsbank, en distinktion mellan huvudkontor och filial samt en överblick över olika dominerande bankinstitut både hemma och ute. Bankväsendets hela väldiga verksamhet föres fram i hela sin imposanta gestaltning.

Det göres i den vanliga skolaritmetiken ett ansenligt nummer av rabatt och diskont, åtminstone på en del håll. Bankens vexelberäkningsusus ger tillräckligt tillfälle till diskurs över denna sak. För att använda en nog så svävande terminologi utges här det diskonterade värdet i stället för det rabatterade. Man utger sålunda $k\left(1-\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right.$ i stället för $\frac{k}{1+\frac{\text{[illegible]}}{100}}$ vilket senare värde vore det teoretiskt riktiga. Att emellertid utbygga en särskild lära om den sanna rabatten och inbädda den i en mängd uppkonstruerade övningsexempel är alldeles onödigt, emedan det saknar resonans i verkligheten.

Detta är nu en art av samhällsverksamhet, som eger det allmänna intresse, att dess arbetsfält bör indragas i undervisningen. Det finnes emellertid också andra. Jag nämner här *försäkringsväsendet*, som ju i ännu högre grad än bankväsendet inträngt i det dagliga livet och berör snart sagt varje art av verksamhet. Det som här är det väsentliga, är att ge en bild av dess sätt att arbeta, dess premiesättning och fondavsättningar. Här möta på varje steg aktuella uppgifter i form av beräkning av premier vid skilda försäkringsrater, helst med de överallt erhållbara bolagstarifferna såsom underlag. Premiebegreppet har här sitt naturliga område för fattning och formell inträning. Det är förresten underligt och nära nog komprometterande för skolans aritmetikundervisning, att sådana saker som dessa härliga tillämpningar av principen om talmaterialets realitet få stå tillbaka för allehanda pladder kring onödiga övningsexempels absolut likgiltiga tankegång. Här är dock någonting att lära. Redan att ha ett livbolags eller annat försäkringsbolags tariff i sin hand och följa dess olika tabellers uppgifter är lärorikt och ger en uppfattning om, vad det här rör sig om för kvantitativa förhållanden och vad här utbildats för seder och bruk inom dessa områden av verksamhet. Till allt detta kommer nu sedan, att försäkringsväsendet som jag sade har en vidsträcktare samhällelig betydelse än bankväsendet. Med sin allmänna, på snart sagt alla områden ingripande försäkringslagstiftning har samhället gjort försäkringen till en samhällsanordning av betydande ekonomisk bärvid.

Jag nämner ytterligare *bolagsväsendet* såsom ett sakområde för den i samhället kring sig blickande aritmetikundervisningen. Begreppet *dividend* klargöres, likaså orsakerna till *aktiernas* värdefluktuationer. Överallt möta också här uppgifter, som icke behöva konstfärdigt uppbyggas, utan ge sig redan vid en blick i tidningarnas ekonomiska avdelningar.

Vi kunna ännu med sakområdet införliva *skatteväsendet*, där särskilt den progressiva beskattningen leder till en del intressantare naturliga räkneuppgifter.

De ekonomiska förbindelserna med utlandet leda frågan in på *kursnoteringar* och av dem betingade beräkningar. Här ha vi ett alldeles typiskt fall av direkt proportionalitet, som gör att den enkla reguladetrien här teoretiskt har en alldeles naturlig användning och finner sin rehabilitering. Ur kursnoteringens isolerade uppgift över två motsvarande tal i de båda proportionella myntskalorna kan varje motsvarighet etableras genom den enkla reguladetriens formel. Oftast behöves emellertid ingen sådan beräkning, då noteringen lagt det hela tillrätta, så att man känner övergångstalen för enheten inom de båda myntskalorna och sålunda kommer igenom med en enkel multiplikation.

Detta är vad jag närmast vill sätta på den plats, där förr reguladetrien och de borgerliga räknesätten funnos. Det blir nog icke så mycket räkneexempel som i den gamla undervisningen. Deras antal blir till och med alldeles avsevärt reducerat. Därmed sker emellertid ingen skada. I stället träder in ett i alla avseende för orienteringen i samhällets arbete nödvändigt vetande och en viss i olika riktning gående teknik.

Jag håller givetvis starkt på just denna förändring. En ofantlig tunga avlyftas från eleverna, en börda, som det icke haft någon nytta med sig att bära. I stället genomvandras verksamhetsgrenar, som ge en bild av det verkliga livet och dess relativt enkla anspråk på aritmetiken. Det hela blir förenklat. Men det kan man icke hjälpa. Verkligheten är nu engång sådan. Att lemna den bara för att få ihop prövande exempel är väl icke riktigt.

Ränta på ränta och amorteringslan.

Det blir på detta sätt tid övrig, och jag vill göra anspråk på åtminstone en del av denna tid för att ytterligare tillföra min undervisning en åskådning, som organiskt hör ihop med det ovan utvecklades andemening, men som jag icke nämnde bland de saker som jag inför i stället för de borgerliga räknesätten. Om jag nämner, att det är fråga om att införa *ränta på ränta*, så skall helt säkert en viss betänksamhet göra sig gällande, ty denna sak hör ju också till dem, som utgjorde användningar av teorin för geometriska serier och där spelade både logaritmer och exponentialekvationer och andra de yttersta skoldagarnas underliga saker in. Emellertid är en dylik tankegång helt på avvägar. Det hela är enkel aritmetik. Att för-lägga saken bortom serier och logaritmer är egnat att alldeles fördunkla den underbart enkla sak det är fråga om. Jag tar upp det i aritmetiken just emedan det är så genomenkelt. I varje fall underskrider dess svårighetsgrad de allra flesta av de nu i ymnighet förekommande exemplen med komplicerade kombinationer av olika borgerliga räknesätt.

Jag var en gång för många år sedan i tillfälle att stå en medborgare till tjänst med en del upplysningar han behövde angående ett kapitals tillväxt. Han blev ytterst överraskad över vad han erfor. Han hade icke kommit att tänka den enkla tankegången, som där behövdes, helt enkelt emedan han mindes, att saken hade någonting med serier och logaritmer att skaffa. Han antog apriori omedvetet, att varje enkelt sätt att aritmetiskt fatta saken innebär ett naivt villospår, som endast den olärde kunde lockas in på.

Sådan är den allmänna uppfattningen på denna punkt. Och dock gäller det som jag genast skall påvisa högst enkla och i varje detalj fattbara utvecklingar.

Jag sade, att jag tar denna sak till tals i aritmetiken, därför att den är så genomenkel. Naturligtvis har jag också andra mera vägande skäl. Den ansluter sig på ett alldeles givet sätt till ränteberäkningarna i framställningen av lånerörelsen. I bankfönstren finnas ju också uthängda tablåer över de belopp, som kunna nås på 10, 15 o. s. v. år genom regelbundna insättningar, vilka växa med ränta på ränta. Dessutom gäller det framförallt en fråga av stor betydelse. De vanliga lånerörelseformerna röra sig med begränsade tider, som falla inom de kortvariga, snabbt vexlande merkantila relationernas livslängds intervaller. De äro lånetransaktioner i den dagliga trafikens värld. Emellertid existera i staters, kommuners och stora företags tillvaro ekonomiska relationer, som spänna över större tidslängder. Särskilt i statens och kommunens liv, som fortgår genom generationer, ha generationerna att uppbära en ekonomisk kontinuitet, som består i fullgörande av ekonomiska avtal, avvecklande av låneförbindelser o. dyl., genom vilka på varje generations skuldror överförts en anpart av kostnaderna för samhällets materiella utveckling. Det blir sålunda isynnerhet här fråga om låneoperationer med en betydande livslängd.

Av alldeles grundläggande betydelse är den insikt om kapitalets variabilitet, som genom dessa betraktelser vinnas. Inom bankväsendets dagliga trafik kommer detta icke till uttryck. Men under tidernas vandring växer kapitalet. Det blir en funktion av tiden, vars momentana värde fixeras för olika tidpunkter. Detta är nyttiga åskådningar, som en medborgare bör ha med i sin proviantkista för att rätt kunna fatta det helas gång.

Vad är nu då ränta på ränta? Låt oss tänka oss, att 10000 mk bär en ränta av 5%. Om då räntan efter ett år fogas till kapitalet, stiger detta till 10500 mk. Detta belopp bär ränta under det följande året, vilken ränta stiger till 525 mk. Lägges denna ränta till det kapital, med vilket året inleddes, ha vi vid det andra årets slut 11025 mk o. s. v. Processen kan sammanställas i följande tabell

År			
1	K =	10000	
	r =	500	
2	K =	10500	
	r =	525	
3	K =	11025	
	r =	551,25	
4	K =	11576,25	o. s. v

som återger hela utvecklingsgången. På grund av kapitalets efterhand skeende förstoring, växer också årsräntan och det hela formar sig till en efterhand allt snabbare tillväxtprocess. Så enkel är den saken. Det är nu för dettas skull man mobiliserar serier och logaritmer.

Emellertid blir det hela betydligt genomskinligare genom en liten iakttagelse. Uppenbarligen växer vid denna process varje mark, när den än kommer in i affären, under ett år med 5 pi d. v. s. till 1,05 mk. Följaktligen fås ett kapitals värde efter ett års förräntning genom att kapitalet ifråga multipliceras med 1,05. Denna faktor, som kallas *räntefaktorn*, blir följaktligen av stor betydelse vid förräntningen. Går man in mot framtiden multiplicerar man för varje år man passerar med 1,05 och vill man gå in mot det förflutna och rekonstruera ett förräntning underkastat kapitals tidigare indexvärden, dividerar man med 1,05 för varje år man i den retrograda rörelsen passerat.

Man övertygar sig lätt om, att vår tabell följer denna enkla lag, ty

$$10000 \times 1{,}05 = 10500$$
$$10500 \times 1{,}05 = 11025$$
$$11025 \times 1{,}05 = 11576.25$$

o. s. v.

Går man nu exempelvis med ett slag 10 år framåt och frågar således, till vilket belopp 10000 mk växa på 10 år, så fås detta genom att 10 ggr multiplicera med räntefaktorn 1,05 eller således med $1{,}05^{10}$. Därav inses, att det är nyttigt att engång för alla kalkylera de successiva potenserna av 1,05. Detta kunna eleverna göra själva. Tabelleras dessa värden, så behöver man blott multiplicera med det till den givna tidsuppgiften hörande talet för att finna kapitalets *slutvärde* efter denna tid.

Naturligtvis får elevernas beräkning inskränka sig till en ringa del av tabellen. I övrigt finnas sådana tabeller färdigt beräknade för olika procentsatser och kunna, sedan man förvärvat ovanstående insikt om deras natur och kan beräkna dem, läggas i elevernas hand.

Det centrala i denna utveckling är renodlingen av räntefaktorn. Dess olika potenser åskådliggöra det enstaka kapitalelementets, markens, variationsprocess och beteckna dess för varje år föreliggande notering i processens gång.

Nu öppnar sig, då engång det ovanstående klarlagts, alldeles nya världar. Man kan följa kapitalets funktionala variation genom tiderna. Man kan lösa olika problem, som höra till denna variationsprocess. Först och främst kan man ange kapitalets storlek efter ett visst antal år. Emellertid kan man också kalkylera den tid, som åtgår för att ett kapital skall nå ett visst belopp. Ty om man t. ex. vill veta, på huru lång tid 2500 mk enligt 5 % växer till 12000 mk så behöver man endast dividera 12000 med 2500 för att finna det potensvärde av räntefaktorn, som verkat tillväxten. Resultatet 4,8 uppsökes i tabellens rad över de successiva potenserna av 1,05, varvid den tillhörande tidsuppgiften besvarar frågan. Man kan till och med besvara frågan om den procent, som bör garanteras för att ett kapital under en viss tid skall nå ett visst belopp. Skall exempelvis 3250 mk på 30 år drivas upp till 12000 mk, så erhåller man först genom att dividera 12000 med 3250 det potensvärde av räntefaktorn, som förverkligar detta. Resultatet blir 3,7. Man ser nu efter i tabellen, för vilken räntesats den 30:de potensen av räntefaktorn är 3,7 och har därmed löst uppgiften. Vid vardera av dessa båda senare uppgifter är svaret givetvis approximativt, men eger en för praktiken erforderlig approximation.

Inför alla dylika frågor som dessa sträcker nu medborgaren i regel vapen och vänder sig till en yrkesmatematiker för att få besked. Emellertid är det hela såsom av ovanstående framgår till den grad enkelt, att det såsom redan sades vida underskrider i svårighet mycket som nu utan tvekan läres. Särskilt blir denna enkelhet prägnant, då det ingår uti en arbetande och långsamt framåtsträvande undervisning, där hela maskineriet på empirisk väg efterhand uppbygges av eleverna själva.

Sakområdet ger nu nya utbyggnader. Livbolagets *engångspremie* kan i sin mån diskuteras och skärskådas ur sparandets synpunkt. Donationen med stipulationer om kapitalets tillväxt kan likaså fattas och med räkning följas in i sitt detaljerade tillväxande genom tiderna in mot realisationens tidpunkt. Folkmängdsvariationer uppträda inom vissa gränser som förräntningsproblem.

Emellertid kan utvecklingen föras vidare mot väntande problem. Livbolagets *årspremie* är en inför försäkringsårets *början* årligen återkommande betalningsrat, en s. k. *praenumerando ränta*, medan exempelvis ett amorteringslåns *annuitet* (ränta och amortering) är en vid låneårets *slut* till betalning förfallen rat, en s. k. *postnumerando ränta*. Det gäller att intränga i sådana årsraters eller *räntors* mekanism.

Den första huvudfrågan är, till vilket belopp en praenumerando ränta växer på ett visst antal år. Detta kan utan alla tekniska konster enkelt och flärdlöst beräknas. Om det t. ex. är fråga om en sådan ränta, stor 250 mk, och man vill veta, till vilket belopp den växer enligt 5 % på 10 år, så sönderfaller problemet i 10 förräntningsproblem. Den första raten på 250 mk växer nämligen under 10 år, den andra, som göres vid det andra årets början, i 9 år, den tredje i 8 år o. s. v., den sista, som göres i början av det 10:de året förräntas 1 år. Men detta förräntningsproblem kunna vi utan alla tabeller genom successiv beräkning föra till slut.

Använda vi tabellerna, genomskåda vi också detta problems hela mekanism. Uppenbarligen utvinnes resultatet genom att multiplicera 250 successivt med de 10 första talen i räntetabellen och sedan addera de så erhållna produkterna. Detta kommer emellertid ut på samma sak som att först addera de 10 första talen i förräntningstabellen och därefter multiplicera resultatet med 250. Mekanismen ligger klar.

Ur det just utvecklade framgår, att man på ett enkelt sätt kan utnyttja våra förräntningstabeller för att beräkna tabeller för kalkyl av praenumerando räntan. Man adderar successivt förräntningstabellens tal och får då de mot det sista talets tidsuppgift svarande talet i praenumerando räntans tabell. Sedan behöver man endast multiplicera med räntans tillfälliga storlek.

Sådan är nu den saken, som således i den vanliga undervisningen hör hemma på högsta klassen. Förresten är det där icke heller fråga om sammanhängande tabeller, utan om isolerade exempel, som bygga sin lösning på en formel. Jag tror förövrigt, att därvid det enkla sammanhanget mellan förräntningstabellen och preanumerando räntans tabell aldrig tränger fram till medvetandet.

Givetvis äro åter tabellens uppgifter att betrakta såsom de olika värdena hos en praenumerando ränta, stor 1 mk.

Huru ställer det sig nu sedan med postnumerandoräntan? Också dess slutvärde kan utan alla tabeller beräknas. Antag åter, att den är 250 mk och räntefoten 8 % samt tiden 10 år. Då förräntas den första raten, 250 mk, som inbetalas i *slutet* av det första året i 9 år, den andra i 8 år, o. s. v. den nionde raten, som inbetalas i slutet av det nionde året förräntas i 1 år, medan den sista raten, som inbetalas vid det tionde årets slut, icke alls hinner förräntas, ty i samma ögonblick skall slutvärdet fixeras.

Använda vi förräntningstabellerna, så observera vi, att det hela skall gå så till, att ettvart av de 9 första talen i förräntningstabellen multipliceras med 250 varpå resultaten adderas och till summan fogas 250. Givetvis innebär detta detsamma som att man först adderar de 9 första talen, till summan fogar 1 och multiplicerar det hela med 250. Det innebär emellertid också, att vi till det 9:de talet i praenumerando räntans tabell tillfoga 1 och sedan multiplicera resultatet med 250. Saken är klar.

Vi se, att en tabell för postnumerando räntan lätt utskrives, då praenumerando räntans tabell föreligger färdig. Man fogar 1 till varje tal och skriver upp alla de så erhållna talen ett steg lägre ned i tabellen än förut. Man skall lätt finna, att så måste vara fallet. Ty en postnumerando ränta 1 med 10 års giltighetstid är sammansatt av en praenumerando ränta 1 med 9 års giltighetstid, representerad av de 9 första raterna, och en inbetalning 1, nämligen den sista raten.

Det blir åter nya sakområden. Livbolagsrörelsens *årspremier* komma in under kalkyl. Men framförallt löses nu annuitetens problem vid amorteringslånet, ett problem, som jag tidigare formulerade.

Innan vi emellertid gå till denna sak, konstatera vi åter, att man kan med de nya tabellerna lösa också andra problem än att bestämma räntans slutvärde. Man kan naturligtvis också beräkna den ränta, som efter en given procent på en viss tid skall nå ett bestämt slutvärde. Detta sker helt enkelt genom att dividera slutvärdet med tabellvärdet. Man kan emellertid också kalkylera den tid, under vilken en ränta enligt en viss procent når upp till ett visst slutvärde, samt den räntefot, som måste garanteras för att en given ränta på en viss tid skall nå ett visst slutbelopp. Dessa uppgifter lösas enligt samma tankegång, som utvecklades vid förräntningstabellerna. Man behöver helt enkelt icke längre hålla processens deduktion i tankarna, utan har i tabellernas tal faktorer, som manövreras lika som talen i förräntningstabellen.

Jag sade, att man nu kan lösa *annuitetens problem*. Detsamma lyder som följer: Ett lån, som löper med en viss ränta skall likvideras genom årliga annuiteter (ränta och amortering) på ett föreskrivet antal år. Beräkna annuiteten.

Tankegången vid lösningen är enkel. Vi tänka oss kapitalskulden upplagd till förräntning. Dess slutsumma vid slutet av amorteringsperioden beräknas då ur förräntningstabellerna. Annuiteten är en postnumerandoränta. Uppenbarligen skall dess slutbelopp vid amorteringstidens slut just vara likamed kapitalskuldens slutvärde. Problemet är sålunda återfört till det just lösta problemet att beräkna en postnumerando ränta, då dess slutvärde efter ett föreskrivet antal år efter en föreskriven procent är bekant. Så enkel är sålunda också den saken.

Nu är denna utveckling avslutad. Att föra den längre skulle vara att offra åt sådana makter, som jag strävat att bannlysa ur undervisningen. Ända till denna punkt motsvarar det framställda behovets princip.

Det kan väl icke råda olika mening om, att denna framställning av ränta på ränta är ett betydande inlägg. Rent praktiskt innebär det, att de som stanna vid mellanskoleexamen också få reda på saken. Pedagogiskt innebär det att en sak ställts till rätta och flyttats från en punkt i kursen, där begreppens enkelhet fördunklas av själva framställningens ceremoniel, till en plats, som motsvarar dess deduktiva tankeanspråk och där en rekurrering till själva begreppets primära fattning och ingen ovidkommande lärdom löser frågan. Ur aritmetikundervisningens allmänna synpunkt måste väl sägas, att detta står himmelshögt i substantiellt och metodiskt värde över det månadslånga bortpluttrandet av tid på ovidkommande frågor om betande hästar, underliga blandningar och aldrig förekommande betalningsformer. Det vilar livets verklighet och dess allvar över de sysselsättningar, som påkallas av det nyss skildrade avsnittet i framställningen.

Jag har egnat denna sak en ingående uppmärksamhet. Naturligtvis ligger häri en defensorisk tendens. Ty jag tror, att det till och med bland yrkeslärarne skall finnas en och annan, som saknat anledning att i denna gestaltning genomtänka problemen och för vilken sålunda tanken att undervisa ränta på ränta i aritmetiken måste te sig såsom ett utslag av misstänkligt nyhetsmakeri. Emellertid bör min framställning utan tvivel giva vid handen, att den vanlige lekmannen utan svårighet kan tillägna sig denna betydelsefulla del av räknekonsten. Men oberoende av denna defensoriska tendens har jag här tillämpat ett förfaringssätt, som jag tidigare i denna framställning använt och senare icke heller kommer att dra mig för, nämligen att gå ner ända till detaljerna, då det blir fråga om någon mera anmärkningsvärd sak i undervisningen. Det är nämligen som många gånger av mig i denna framställning med eftertryck framhållits uti själva detaljens taktiska utarbetande mycket av den syntetiska strategiens program skall förverkligas. Det gäller icke endast att framlägga allmänna idéer, det är en relativt lätt sak, det gäller det betydligt svårare att i undervisningens mikrokosmos intänka sådana detaljanordningar att dessa allmänna idéer förverkligas.

Funktionala beroenden.

Min aritmetiska undervisning närmar sig sitt slut. Det är emellertid en sak, som följer det hela åt, men som måhända i framställningen icke ständigt framhållits. Jag nämnde, då jag utvecklade min undervisnings allmänna ledande idéer, med alldeles särskild betoning det, som jag kallade det funktionala tänkandets skolning. Detta innebär bland annat, att vi skola lära oss att i kvantiteternas brokiga värld med deras vexlande funktionala sammanhang igenkänna vissa enkelt avgränsade sådana funktionsberoenden. Detta genomgår givetvis såsom en röd tråd hela undervisningen och forskningarna på denna linje stödes av det grafiska diagrammet. Efterhand klarna vissa funktionala beroenden, lösgörande ur kvantitetsvärlden vissa av dessa beroenden bundna storheter. Det första beroendet, som på detta sätt utkristalliserar sig, är väl den *direkta proportionaliteten*, den relation, som bland annat består mellan pris och mängd, mellan väg och tid vid den likformiga rörelsen, mellan lineära mått i original och bild m. m. Dess diagram är den *räta linjen*, som förresten anknyter denna proportionalitet till likformiga trianglar, där den förekommer par preference, just såsom den lineära skalan mellan bild och original. Särskilt i denna fattning blir den räta linjen såsom diagram ett i övrigt i praktiken använt hjälpmedel för överföring av bilden i en viss skala, erbjudande den *grafiska skalan* för lineära måttagningar.

Emellertid träda snart andra funktionala beroenden in. Ett utmärkt underlag för den allmänna lineära funktionens införande erbjuda termometerskalornas uppgifters reduktioner i varandra. Så länge det är fråga om Celsius och Reaumurs skalor är beroendet enkel proportionalitet, i det nämligen i lätt förstådda symboler

$$c = 1.25\ r$$

och $$r = 0.8\ c$$

Överhuvudtaget bör ett studium av den direkta proportionaliteten och i allmänhet de funktionala sammanhangen tidvis vädja till *formeln*, såsom sammanhangets suveräna uttryck. Formeln framträder därvid till en början på sitt naturligaste sätt som den stenografiska av sigler förmedlade uppteckningen av en eljes ordrik beskrivning. Algebran får på detta sätt sin enda naturliga förberedelse.

Jag återvänder emellertid till termometrarna och tar under diskussion t. ex. Celsius' och Fahrenheits skala. Nu visar Fahrenheits termometer $+ 32°$ grader, då Celsius visar $0°$ och $212°$ grader, då Celsius visar $100°$. Alltså äro reduktionstalen mellan gradlängderna: för Celsiusgraden 1,8, uttryckt i Fahrenheitsgraden och för Fahrenheitsgraden $^5/_9$, uttryckt i Celsiusgraden. Vi få sålunda

$$c = \frac{5}{9}(f - 32)$$

och $f = 1{,}8\,c + 32$.

eller typiska *lineära funktioner*. Ett studium av deras diagram är lärorikt.

Emellertid visa sig andra funktionala sammanhang. Det kan icke undgå att observeras, att kvadratens area icke längre är proportionell mot sidan, utan representerar ett nytt beroende. Detta som återges av formeln

$$a = S^2$$

återfinnes sedan, då det blir fråga om cirkelareans beroende av radien, om vägens vid en fallrörelse beroende av tiden. Man har här i alla dessa fall ett beroende, som kan karaktäriseras så, att en kvantitet är *proportionell mot kvadraten på en annan.*

Givetvis kommer också den observationen att uti en på detta sätt ledd undervisning göras, att icke ens detta funktionala beroende förslår för att skildra kubens volyms beroende av kanten. Detta beroende, som likaledes återfinnes i andra sammanhang, betecknas så att vi säga, att en kvantitet är *proportionell mot kuben på en annan.*

Jag vill ännu en gång ha sagt, att man icke bör hesitera inför införandet av formeln. Man torde svårligen i sina händer få ett utsöktare och osöktare tillfälle att låta eleverna stifta bekantskap med algebrans språk än det som efterhand då och då på detta sätt träder till mötes. De ha upptäckt *diagrammets* karakteristika, som återge mycket, som *tabellen* icke låter ana. Men *formeln* är det suveräna, av vilket diagrammet och tabellen endast äro matta återsken, då det gäller att inneha en funktion och följa dess förlopp samt studera dess egenart. Algebran får på förhand en reklam, som kan stärka intresset för denna nu allt närmare skönjbara nya del av räknekonsten.

Det engång mot observerande av olika funktionala sammanhang inriktade tänkandet skall upptäcka, att andra än de just framlagda lagarna härska i kvantiteternas värld och att det kanske framför mycket annat gäller att studera dessa lagar, försöka utgripa dem i deras matematiska renodling och möjligen tvinga in dem under en formels herravälde. Men då gäller det att kunna herska i formlernas värld. Åter reser sig algebran framför oss.

Vi välja ett mera komplicerat funktionssammanhang. Om vi rita diagrammet över förräntningstabellen, så skall detta redan inge oss tanken, att det här är fråga om en ny art av beroende. Diagrammet skjuter hastigt mot höjden. Skulle tabellmaterialet vara utsträckt till tillräckligt höga tidsbestämningar, skulle vi få skåda en alldeles sällsamt snabb stegring. Vi kunna också här ange en formel. Ty om vi tänka efter, huru tabellen t. ex. för 5 % uppbyggdes, så få vi för tabelltalet y, som hör till tidpunkten x uttrycket

$$y = (1{,}05)^x$$

Det framträder ändock inför en dylik för oss ännu på detta stadium dunkel formel och dess kraft att kröka diagrammet på ett särskilt sätt såsom en fascinerande tribut åt en utvidgad uppfattning av behovets princip en önskan att fullständigt genomskåda detta och annat liknande. Skola vi lemna rum för sådant på skolan, eller skall behovets princip fattas i sin mera handfasta formulering, dels såsom den kommit till uttryck uti aritmetiken, dels såsom vägledning, då det gäller att utfinna det oundgängliga för att naturvetenskaperna skola förstås. Av uppfattningen på denna punkt beror i mycket algebrans ställning i det följande.

Sådana frågor, som dem jag nu utvecklat, böra genomskimra kursen. Den funktionala träningen bör resultera i annat än ritande av bilder och tomt prat i anslutning därtill. Den bör efterlemna ett mera substantiellt vetande i form av kännedom, jag ville nästan säga god bekantskap, med de enklaste funktionerna, så att en blick på en företeelse är nog för att den unge adepten skall kunna säga, om där verkar någon av de enkla lagar, som han känner.

Sammanfattning. Min aritmetikundervisning är avslutad. Den representerar nu, då vi vid dess avslutning överskåda densamma, någonting fullkomligt annat än det hittills följda. Och detta icke endast ifråga om det stoffliga innehållet, utan även ifråga om det metodiska tillvägagångssättet. Låt oss ifråga om båda säga, att där icke ens kunna slås några broar emellan det gamla och det nya. Särskilt vill jag ha sagt, att den gamla metodiken likalitet kan användas på mitt stoff, som min metodik kan tillämpas på det gamla stoffet. Ett sådant intimt samband råder nämligen mellan stoff och metod i min undervisning, att själva lektionen i sitt detaljförlopp har en alldeles annan prägel än i den tidigare undervisningen. Skall sålunda mitt undervisningssystem beaktas, kan detta ske endast genom en sådan fullständig omläggning, som jag på alla punkter förordat, en omläggning, som gäller både stoffets sammansättning och metodens dagliga detaljer. Att bättra på det gamla, att lägga in ett eller annat diagram, att taga någon uppgift »ur verkligheten» m. m. är fullkomligt värdelöst.

Vad nu lektionens detaljförlopp vidkommer, så är väl det vanliga, att hemuppgifterna först genomgås. Därpå löses ett modellexempel på tavlan, varpå liknande mindre eller mera krävande uppgifter givas eleverna, varvid svårighetsgraden beror på, om de äro avsedda att lösas på klassen eller hemma. Ibland avbrytes denna gång för att läraren skall bli i tillfälle att på tavlan genomgå det, som behöver vetas av teori för det fortsatta räknandet.

Detta är en bild av aritmetikundervisningen, som icke innehåller något karrikerande. Det går precis så till. Jag har åhört många sådana lektioner på olika håll. Det är helt enkelt standardtypen för en undervisningslektion i aritmetik. Det deduktiva står i spetsen och sedan heter det: Nu ska vi inöva det vi lärt oss.

Det torde redan ur hela framställningens gång ha framgått, att min undervisning försiggår på ett annat sätt också i lektionens detaljer. Det fortgående räknearbetet är lektionens bottengrund. Detta bygger på egna iakttagelser, verkställda uppräkningar och mätningar samt data ur tabellverk och praktikens handböcker. Ur detta räknearbete uppväxa själva de aritmetiska räknefrågorna. Det avbrott, som då och då påkallas, avser den syntetiska sammanfattningen av gjorda teoretiska erfarenhetsrön eller av själva materialet påkallad fördjupning av räknemetoderna. Det teoretiska växer upp ur det praktiska. Sådan är hela tendensen. Sådan är varje enskild lektions program. Lägga vi därtill under själva lektionen vidtagna mätningar, i hemmen uppgjorda observationsräckor, rapporter av »utsedda», ritningar av diagram och andra grafika, så växer där fram inom lektionens ram en bild av allvarlig verksamhet med reella mål, som skola utvinnas, en art av matematisk byrå, där utevärldens råmaterial av kunniga händer sovras och renodlas till tabellen och andra för kalkyl lämpliga underlag. Sådan är lektionen, sammanfattad i ögonblicksbild. Men där rymmes ännu mycken saklig debatt av det behandlade talmaterialets betydelse i samhällslivet och diskussion över de funna resultatens betydelse som sakliga nyvinningar. Det är icke bara att titta efter i facit, om svaret fyller sin enda roll, nämligen att sammanfalla med facits uppgift. Det går en ström av samhällslära genom lektionen, då och då riktad med annat vetande av grundläggande sakligt innehåll. Lektionen är sålunda icke en naken aritmetiklektion, där substratet för den aritmetiska träningen saknar sakligt intresse, utan som så många gånger framhållits ett stycke samhällslära.

Jag hade talat för en uppdelning av aritmetikkursen på tvenne delar, av vilka den förra skulle genomgås på det tidigaste stadiet, medan den andra skulle framskjutas till den klass, där mellanskoleexamen försiggår. Givetvis förutsatte jag vid ett dylikt förslag, att jag rörde mig inom den hittillsvarande lärdomsskolan, där mellanskoleexamen är den första dimissionsexamen. Om emellertid folkskolan och lärdomsskolan såsom jag tidigare i denna framställning utvecklade så inarbetas i varandra, att de bilda ett skolkontinuum, så ställer sig den saken annorlunda. Då måste aritmetikundervisningen gå i en följd och sträcka sig ända fram till den då nedanom mellanskoleexamen troligen infogade dimissionsexamen, som i sig innesluter det vetande, som motsvarar det nuvarande folkskolevetandet. I stället måste då en allvarlig förnyelsekurs genomgås på den före mellanskoleexamen liggande klassen. Ty på vilken legal punkt av skolan eleverna än utvandra, måste de ega det mått av aritmetiskt vetande, som ovan efterhand utvecklats.

Jag går nu till sammanfattning av mitt program. Jag vill därvid icke mera upprepa, vad detta program åsyftar, och icke heller mera ingå på de ledande principerna för dess sammanställande, utan mera praktiskt sammanfatta dess resultat.

Det hela kan sägas kort. Jag vill ha bort *sorter*, jag vill ha bort *reguladetri*, enkel och sammansatt, jag vill ha bort de *borgerliga räknesätten*. Inom det som återstår vill jag ha bort det *överdrivna exempelräknandet*. Jag vill särskilt ha bort de *svåra exemplen* och de *komplicerade sifferkalkylerna* med stora tal.

Jag vill ha in i stället för sorter en enkel och grundlig framställning av *tiden* och med den sammanhängande frågor. Jag vill i stället för reguladetri och de borgerliga räknesätten ha in *samhällets aritmetik*, sådan den visar sig i lånerörelsen och bankväsendet, i bolagsväsendet, försäkringsväsendet och skatteväsendet. Jag vill ha in *ränta på ränta* i den enkla gestaltning den verkligen har i samhället. Jag vill inom allt detta ha in *enkla uppgifter*, sådana praktiken ger dem. Och så vill jag ha in en stark träning i att lösa *enkla sifferuppgifter* med enkla tal.

Det är vad jag vill ha bort och vad jag vill ha in. Då det som går bort är mycket mera än det som kommer till, så blir aritmetikkursen betydligt förenklad, något som väl är en av min undersöknings förtjänstfullaste resultat.

Men jag vill också ha metodiska förändringar. Jag vill ha bort metoden med de primära, teoretiska explikationerna och de sekundära tillämpningarna. Jag vill i stället ha in en art av heuristik, som gör räknearbetet till det primära och de teoretiska explikationerna till det sekundära. Och så vill jag, att alla själens förmögenheter skola komma till användning och att sålunda det *grafiska* skall träda in vid sidan av det siffermässiga.

Sådana äro mina anspråk. De ha i det föregående fått sin in mot detaljerna gående motivering. Min framställning av aritmetikundervisningens problem är härmed avslutad.

ALGEBRA.

Jag har tidigare varit i tillfälle att framlägga mina tvivelsmål ifråga om den nuvarande algebraundervisningen på skolan. Dessa tvivelsmål voro av synnerligen grav art och så mycket betänkligare som de icke träffade någon detalj, utan låt oss säga hela fundamentet uti en undervisning, som disponerar över ett betydande timantal under fem undervisningsår på lärdomsskolan.

Mina tvivelsmål rörde sig kring ingenting mer och ingenting mindre än frågan, om det, som under dessa många år med ett betydande uppbåd av kraft meddelas, överhuvudtaget förstås. Givetvis ligger en behållning i den inlärda tekniska färdigheten att riktigt transponera räknesymbolerna, men detta är ingen tillräcklig anledning att offra så mycken tid åt saken. Det är väl dock den djupa förståelsen av det helas innebörd som bör eftersträvas.

En sådan tanke som att generation efter generation av skolungdom lärts något, som stannat endast på ytan, är så pass grotesk, att den måste med bevisföring beläggas. Jag kunde därvid hänvisa till mina erfarenheter som examinator i studentexamen, där jag medvetet undersökte denna sak, eller till min verksamhet som lärare vid universitetet och tekniska högskolan, där jag hade rikligt tillfälle att pejla djupet av den förståelse eleverna avvisste under ett formellt oklanderligt funtionerande räkneschema. Men jag vill genom andra överläggningar göra min misstanke trovärdig.

Jag vill genast börja med själva räknesymbolikens element, *bokstaven*. Med den är saken mycket enkel. Den har samma innebörd som de så att säga stenografiska siglerna i formeln för triangelarean $t = \frac{b \cdot h}{2}$. Eller för att belägga saken med ett annat exempel. Man finner vid närmare eftertanke, att produkten av två tals summa och skillnad alltid måste vara likamed skillnaden mellan talens kvadrater. När man sammanfattar detta i formeln $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, så är detta ett slags stenografi, genom vilken man undgår en mångordig explikation av denna sanning.

Emellertid införes alls icke bokstaven som räknesymbol på detta enda naturliga sätt. Man säger i stället alltfortfarande i de flesta läroböcker och sålunda också i undervisningen mångenstädes att *bokstaven betecknar ett tal, åt vilket man kan giva vilket värde som helst.* Detta är dock renaste pladder och leder icke till den minsta förståelse.

Överhuvudtaget måste på denna punkt en sak framhävas, som redan trycker sin prägel på aritmetikundervisningen och som gör sig ännu mera störande i algebran. Det är ett slags övertro på *definitionens* betydelse. Nu äro de tankegångar, genom vilka ett nytt begrepp insänkes i medvetandet, ofta långsamt fortgående, successiva processer, vilkas sammanfattning i en definition är till ingen nytta. Därmed vill jag alls icke säga någonting om vetenskapens behov av definitioner i sitt på ett annat plan verkställda systematiska tillskapande av en lärobyggnad, men i skolan är saken en helt och hållet annan. Innehavet av ett begrepp är här icke säkerställt genom en kort, snabbt upprablad definition, utan förmedlas genom systematisk och grundlig beredning. Det evinnerliga definierandet är en av den elementära matematikundervisningens många stereotypa bildningar.

På samma sätt är det också med *regeln*, som här i algebran blir särskilt vådlig, om den också redan i aritmetiken visar sina onda verkningar. Ett förfaringssätt bör i likhet med ett begrepp så att säga bli ett med medvetandet, och ingå i blodet. Dess utformande innehåller en sådan rikedom av deduktioner, att själva det tekniska slutgreppet icke kan naket fixeras i en kort tes. Emellertid är regeln nu ett tabu i undervisningen, som förresten börjar sin teoretiska livsbana med definitionen och för till regeln, vilken sedan öppnar portarna för tillämpningar och övningar.

Både definitionen och regeln äro i skolundervisningen schematiserande faktorer; den förra förstås vanligen icke och den senare avkopplar slutgiltigt skyldigheten att förstå.

Jag återvänder emellertid till bokstaven som räknesymbol. Om den saken en gång för alla icke in i grunden förstås, så förstås heller ingenting annat i algebran. Monomet och polynomet bli uteslutande kalligrafiska bilder, och räkneoperationerna med dem blir den bokstavspatience jag redan talat om.

Jag skall återkomma i den positiva delen av min framställning till de sorgfälliga förberedelser, som måste träffas för att på ett alldeles annat sätt säkerställa förståelsen av bokstaven som räknesymbol. Där skola vi också se, huru under de algebraiska uttryckens kalligrafiska struktur dölja sig, eller huru egentligen genom dem bringas till uttryck bestämda realiteter.

Då nu icke ett försök göres att på denna punkt tränga till sakens kärna i undervisningen, har jag grundade skäl att antaga, att det hela blir ett formellt maskineri, som eleven kan sköta, men där han vet varken, varför det ibland sättes i gång eller den djupare grunden till att det går. Det blir en lustig lek, där det gäller att påpassligt sköta spakarna, ett spel utan djupare innehåll.

Det algebraiska uttryckets närmare idé stannar sålunda alldeles utom. Månne ens alla lärare riktigt egnat den saken uppmärksamhet. De ha givetvis under sin studietid sett det hela i dess transparanta klarhet, men återkomna till skolan och med dess läroböcker i handen, ha de utan vidare accepterat status quo, eller måhända bättre status quo ante. Måhända ha de tänkt, att det hela väl är bra tillrättalagt för den nivån.

Men om också de algebraiska uttryckens förståelse icke egnas någon särskild uppmärksamhet, göras de i stället till föremål för en alldeles överväldigande formell träning. Man måste åter fråga sig, vart man vill komma. Någon förståelse av dessa transformationers verkliga innebörd kan givetvis icke genom en sådan träning vinnas. Det hela företer skådespelet av någonting alldeles överformellt, vars syfte är höljt i dunkel.

Jag går icke längre, ty jag återkommer till detaljerna i den fortsatta framställningen. Vad jag hittills önskat ernå är ett belägg för mitt påstående, att det hela alls icke förstås till sitt verkliga innehåll, utan är ett fält för mångårig formell träning.

Det finnes en annan svag punkt alldeles i algebraundervisningens begynnelse och det är undervisningen om de negativa talen. Det skall icke finnas många matematiklärare, som längta efter den period i undervisningen, då dessa skola »införas», och icke heller många, som med tillfredsställelse se tillbaka på det sätt, på vilket de fullgjort det oangenäma uppdraget. Jag har påträffat lärare, som öppet medgivit att sedan man »halkat» över bokstavens införande som räknesymbol och »listat» in de negativa talen, så är algebraundervisningen en angenäm sak. Det övriga går galant. Det tror också jag, men jag tror att både bokstaven och det negativa talet fordra mycken omvårdnad, om icke det följande skall bli ett tomt maskineri såsom det nu i huvudsak är.

De negativa talen grundläggas genom ett allmänt prat under förloppet av någon timme. Och så äro helt hastigt, utan att eleven riktigt hunnit märka, huru det går till, alla räknesätts teckenregler klara och man störtar till övningarna. Situationen är räddad vore man frestad att säga. Jag skall återkomma till detta, då jag går till detaljgranskningen och jämsides därmed liksom i frågan om aritmetikundervisningen framlägger mitt undervisningssystem.

Jag framhöll redan visserligen med ett annat syfte, att algebraundervisningen lyder under en högt uppdriven formalism. Den är dock här begripligare än i aritmetiken, där man överallt är omgiven av en av aritmetik fylld verklighet. Sådan undervisningen i algebra bedrives, kan den helt enkelt icke vara annat än formell. Ty eljes skulle där icke undervisas allt. Emellertid har algebraundervisningen givetvis samma allmänna fel som karaktäriserade aritmetiken. Varför skulle den vara utan dem? Liksom i aritmetiken går man överallt i metoden fram i omvänd ordning. Och så räknar man jag ville säga tallösa exempel. Det har blivit i algebra så, att hela undervisningen egentligen är bara exempelräknande. Och så sysslar man liksom i aritmetikundervisningen med alldeles onyttiga saker. Man gör det med uppenbarligen bättre samvete än i aritmetiken, ty man döljer icke ens under några om nytta påminnande rubriker sitt »arbete», utan egnar sig med öppet visir åt den renodlade onyttan. Annorlunda torde knappast de problem kunna kallas, som nu lösas i hundradetal för att icke tala om polynomräknande, räknande med radikaler o. s. v. o. s. v.

Detta är en sorglig bild av algebran, men den är tyvärr sann. Emellertid är det, när allt kommer omkring, icke så förvånande, att det är som det är, ty vi stå kort och gott här inför matematikundervisningens svåraste problem. Jag vill nu uppta detta problem till en fördomsfri debatt, sådan jag egnat aritmetikundervisningen. Jag vill därvid se det hela ur samhällets allmänna aspekt och därur bedöma den omfattning, man bör skänka denna undervisning, men sedan vill jag ge de principer jag redan i min aritmetikundervisning arbetade med spelrum för att inblåsa en ny och levande anda i denna undervisning, som måhända måste betecknas som den mest efterblivna av alla matematikens undervisningsgebit.

Jag kan icke innan jag lemnar denna allmänna kritik underlåta att särskilt egna några ord åt en sak. Jag har ju talat mycket om variabilitet och det funktionala beroendet. Nu är det att märka, att icke ens algebran, formlernas värld, fått upp någon kontakt med dessa begrepp.

Skolalgebran är som det nu är konstanternas stela värld, där dessa konstanter likt marionetter flyttas och transponeras. Här skall fås in liv och rörelse. Det var detta jag närmast avsåg, då jag talade om de nya principernas makt att inblåsa en ny och levande anda i denna de formella transpositionernas underliga och döda värld.

Min kritik har varit hård och blir ännu hårdare, då jag kommer in mot detaljerna. Jag vill givetvis från den undantaga verkligt långt gående försök till förbättringar, som på enskilt håll genom läroböcker framförts. Jag riktar mig mot sådant, som ännu finnes och som måste fås att försvinna.

Jag går nu till min analys av algebraundervisningen. Jag vill då genast ha sagt, att man icke ur min kritik får draga den slutsatsen, att algebraundervisningen är onödig. Detta vill jag först som sist ha uttryckligen fastslaget. Jag skall pröva algebran mot behovets princip och skall på basen av denna prövning komma till en uppfattning, som motsäger en dylik slutsats.

En sådan slutsats ligger lockande till för den allmänna meningen. Denna är helt enkelt böjd för att anse matematiken tämligen eller alldeles onödig för en vanlig medborgare. Man har hört den uppfattningen, att det kunde vara nog med aritmetiken, måhända med en tillsats av namnen på de allra vanligaste geometriska konfigurationerna.

I en sådan uppfattning får man dels se en sund reaktion mot hela den onytta som präglar lärdomsskolans matematikundervisning och som dagligen möter inom hemmet i svårhanterliga, för det vanliga medborgarförståndet absolut onyttiga problem om onyttiga saker. Dels beror emellertid också denna uppfattning på okunnighet. Det är nog så, att den matematik, som läres på skolan till 60 à 70 % är onyttig, men matematiken som sådan är icke onyttig. Jag har ju redan i frågan om aritmetiken lagt den breda basen för en annan uppfattning och skall också ifråga om algebran och geometrien gå in på samma prövning, men jag vill redan här på en allmän bas mota en dylik åskådning. Alla de, som över den allmänna medborgarexamen, mellanskoleexamen, vandra ut till fackskolorna, behöva där ett mått av matematiskt vetande, som särskilt inom de tekniska läroverkena och navigationsinstituten går ut över aritmetikens gränser. Och bland dem, som över studentexamen söka sig in till högskolorna behöva vidpass 50 % rätt goda insikter i matematik för att kunna tillegna sig åtminstone den naturvetenskapliga bildning, de för sitt blivande kall behöva för att icke tala om blivande ingeniörer, som måste gå rätt långt i matematik.

Genom denna exkurs har jag i någon mån föregripit den tillämpning av behovets princip på algebran, som jag just höll på att ingå på. Ty i icke ringa utsträckning avses ovan med matematik just behärskningen av algebrans teckenspråk.

Då vi ha att tillämpa behovets princip på algebran, ha vi att se denna princip i en allmännare fattning än uti aritmetiken. Där fick den en alldeles särskilt prägnant utformning. Här är saken annorlunda. Algebran behöves faktiskt icke på samma sätt som aritmetiken, och giva vi behovets princip samma trånga fattning som i aritmetiken, så leder detta till algebrans omedelbara utmönstring ur matematikkursen. I det medborgerliga livets dagliga usus kan algebran undvaras.

Emellertid skall behovets princip, såsom också vid dess första framläggande framhölls, icke skänkas detta snäva innehåll. Det finnes andra behov än de, som förverkligas i den dagliga livsföringen.

Vi ha då för att ingå på saken redan i aritmetiken känt behov av algebrans språk. Vi studera där vissa kvantiteters inbördes relationer och upptäckte enkla sammanhang mellan deras samtidiga indexnoteringar. Vi funno också, att sådana sammanhang kunna följas i sitt förlopp, som då genom sin egenart avspeglar det funktionala beroendets egenart. Därvid kommo vi också i den högsta aritmetiska utvecklingen till formeln såsom den suveräna beskrivaren av det funktionala förloppet. Förvärvet av formeln innebär den fullständiga behärskningen av det funktionala sammanhanget och innebär det slutgiltiga innehavet av detta sammanhangs lag. Så ger oss formeln $S = \frac{gt^2}{2}$, där g är tyngdkraftens acceleration, den slutgiltiga lag, som vid en fallrörelse binder vägen S och tiden t vid varandra.

Det är ett reellt behov att tränga djupare in i denna formelvärld, vars första och enklaste individer visat sig kunna göra oss tjänster. Vi önska dock icke endast att kunna handla på ett visst sätt, utan också att fatta detta handlande i dess sammanhang med andra handlingar. Detta faller också inom behovets princip.

Emellertid göra sig även andra synpunkter gällande. Ett fullständigare inträngande i naturvetenskaperna fordrar ett visst mått av algebraiska insikter i den mening, att algebrans formelspråk måste kunna förstås och åtminstone de enklaste transformationerna kunna genomföras. Här gör sig ett anspråk på algebran gällande, som också det faller inom området för behovets princip.

Vad som här sagts om naturvetenskaperna gäller i alldeles eminent grad matematiken själv. För ett djupare inträngande i geometrien och trigonometrien erfordras, att man känner formlernas språk och kan använda dess deducerande kraft.

Nu är om algebrans betydelse för matematiken själv och naturvetenskaperna att säga, att det måhända här handlar om konstlade behov. Genom att undervisa mindre naturvetenskap och geometri kan man måhända undvika algebran. Detta är alldeles riktigt och skall för geometriens vidkommande i det följande ingående diskuteras. Ifråga om naturvetenskaperna komma vi genom en sådan tankevändning in på frågan om hela bildningsbildens konstitution. Men utan att ens gå så långt, veta vi, att en rätt betydande kunskap i naturvetenskaperna hör till det, som i tekniska läroverk bör finnas till hands.

Vad överhuvudtaget behovets princip vidkommer, så har min framställning väl ensidigt anslutit sig till mellanskoleexamen och dess särskilda roll att förbereda för fackskolan. Emellertid bildar mellanskoleexamen också den avslutade elementarutbildning, som leder till gymnasialbildningens utbildningslinjer, och måste givetvis också beakta denna del av sin uppgift. Det djupare mått av vetande, som där skall bibringas förutsätter, huru vi än komma att ställa oss till dess innehåll på de olika gymnasiallinjerna, en viss kännedom av algebrans formelspråk.

Här är det kanske just lämpligt att påminna om vad jag på sin tid kallade den kulturhistoriska synpunkten. Vår bildning är ju en produkt av den kulturhistoriska utvecklingen och uppter i sin struktur spår av olika avlagringar. Det torde vara svårt att analysera dess beståndsdelar och framförallt uppge, varför vid vart givet ögonblick en viss rayon av vetande anses höra till bildningens grundbegrepp, medan andra områden stanna utom dess gränser. Det hela är dock statt i rörelse och förändrar efterhand sin habitus. Det djupa kännetecknet är väl emellertid, att det är det mänskliga nuet, sådant det framträder som en produkt av utvecklingen och sådant det ligger till grund för den förestående utvecklingen, som är bildningens konstitutiva innehåll. Där är i detta innehåll samlad all icke specialiserad allmänmänsklig erfarenhet och insikt.

Nu synes det mig höra till denna bildnings uppbyggande i människosjälen att ge en bild av allt mänskligt arbete, som skapat det mänskliga nuet. Det synes mig därför även ur denna allmänna synpunkt riktigt, att skolan också ger något utrymme åt formlernas språk, som ändock på sitt sätt varit ett mäktigt vapen i människans hand, då det gällt att intränga i universums stora värld och i naturens mikrokosmos. Detta ger algebran ett kulturhistoriskt berättigande på skolprogrammet. Detta är något, som inrymmes i en vidare tolkning av behovets princip.

Det torde sålunda vara ställt utom allt tvivel, att algebran bör få en plats uti skolans undervisning. Det är emellertid sedan en alldeles annan fråga, vad för slag algebra där skall undervisas. Att det i ingen händelse skall vara den, som nu där läres, torde ur mina tidigare utvecklingar ha framgått åtminstone såsom min åsikt.

Jag vill kort och gott formulera programmet om förberörda bevis så, att algebraundervisningen skall avse att undervisa algebra. Den skall sålunda icke ödsla tid på allehanda av skolpedagogiken tillfogade utväxter med till dem anslutna övningar. Det vidlyftiga polynomräknandet och det mot intet syftande räknandet med radikaler hör till dessa utväxter. Och så skall den framförallt slutgiltigt taga avstånd från alla de för algebran ovidkommande problem, som nu röva bort åratal av dyrbar tid.

Algebraundervisningen skall således syssla med att undervisa algebra. Därmed är emellertid ännu ingenting sagt om dess stoffliga omfattning. Också på denna punkt har jag alldeles bestämda åsikter. Jag anser, att inom den undervisning, som icke direkt avser förberedelse för sådana högskolestudier, vilka förutsätta grundliga matematiska insikter, alltså på icke-reallinjerna algebraundervisningen omspänner ett för omfattande lärostoff.

Nu sammanhänga också här inom algebran stoff och metod på samma intima sätt som överallt inom matematikundervisningen. Den metod jag här företräder och som redan i aritmetikundervisningen uppvisar sina där tillämpbara moment, är av den art, att den är egnad att skänka det algebraiska vetandet en sådan fasthet, att det är fråga om, om icke eleven trots de beskärningar i stoffets substantiella omfång jag har för avsikt att föreslå, utgår ur den algebraiska skolbildningen med ett säkrare grepp på algebran än det han nu vinner genom de många timmarnas tekniska övningar. Där uppehålles inom denna metod med obönhörlig styrka, att undervisningen aldrig får förlora den fulla förståelsens fasta mark under fötterna.

Innan jag nu inträder i detaljundersökningen vill jag underkasta några på senare tid tillkomna nytillökningar av algebrakursen en kritik. Med algebrakursen menar jag därvid icke liksom icke heller i det föregående algebran i sträng vetenskaplig mening, utan snarare det mått av analys, som går i skolan under detta namn.

Entusiasmen för nymatematiken eller reformmatematiken har icke varit enbart lycklig. Denna rörelse utgick från vetenskapsmännen inom matematiken och bär många spår därav. Såsom dess verkligt stora nytillförsel måste betecknas många av de idéer jag i det förestående utvecklat och vilka på sin tid med något av en frisk vinds styrka gingo fram över den gamla undervisningen muscala förhållanden. Visserligen behöver man icke så alltför mycket fördjupa sig i exempelvis tyska skolböcker och exempelsamlingar, för att förmärka en begynnande doktrinär kristallbildning kring de nya idéerna. I stället för att lösa problem ritar man nu diagram i doktrinär trosvisshet om dessas uppfostrande betydelse. Själva namnet reformmatematik bär förstelningens frö inom sig. Detta är nu en gång idéernas vanliga livsförlopp. Doktrinen tar hand om dem och slentrianen dödar dem. Jag kan i detta sammanhang icke undgå att påpeka, hurusom man på en del håll av den grafiska framställningen, diagrammet, som bör såsom ett tankevapen följa den fortskridande utvecklingen åt, gjort en jag vore frestad säga särskild lära, för vilken man öppnat ett särskilt kapitel högt uppe mot algebraläroböckernas slut, medan hela tankemekanismen både före och efter detta kapitel arbetar som om diagrammet aldrig upptäckts. Emellertid ha reformmatematikens tillskyndare just genom sin egenskap att vara universitetsmän skjutit över målet. Ett tecken därpå är förslaget att införliva grunderna av *infinitesimalkalkylen* med algebrakursen. För universitetsmatematikerna äro ju differential- och integral-kalkylen lika vanliga tekniska verktyg som qvattvor species för en vanlig medborgare. De äro också för all del härliga saker, som kasta nytt ljus över formlernas och funktionernas värld. Reformmatematikens entusiaster ha också kastat sig över denna sak, varom utländska läro- och exempelböcker giva upplysning. Också hos oss har man sett ansatser i denna riktning.

Emellertid är en sådan utveckling inne på en oriktig väg. Dels är själva grundbegreppet, derivatan, någonting, på vilket man icke får taga för lätt. Det är ett begrepp, vars sorgfälliga fattande erfordrar en ansenlig förberedelse såsom var och en vet, som undervisat på universitetsstadiet. Dess slutliga utkristallisering bygger på en speciell tankeprocess, som är långt ifrån enkel och av en alldeles annan art än de i övrigt inom algebran använda tankeprocesserna. Det vanliga tillvägagångssättet att klämma till med en kortfattad, redig och klar definition är dömt att vara en händelse ovanom elevernas fattningsförmåga. Dels är det vidare så, att deriveringen erfordrar en ansenlig träning för att man skall ledigt kunna handskas med begreppet ifråga. Och när det hela är avvecklat och användningen skall vidtaga, så kan denna icke föras utöver det magra området för derivatans användning vid tangentproblemet.

Det har också visat sig, att det hela blivit ett nytt fält för formell träning. I stället för sådant som reformmatematiken utdömt, har trätt ett outtröttligt differentierande, där också den verkligt reala grunden saknas. Under sådana förhållanden kan det sannerligen komma på ett ut, om eleverna syssla med polynomräknande eller med differentiering. Den andliga behållningen är densamma, om också vocabulären i det senare fallet låter mera respektingivande.

Man har också sett ansatser till att skänka den analytiska geometrien en sådan utvidgad ställning på skolan, att dess undervisning även skulle omfatta de koniska sektionernas egenskaper. Detta måste väl betraktas såsom en sublimering av reformmatematikens ivrande för diagrammet och koordinatsystemet. Det betecknar emellertid ett steg, som icke bör tagas. Ty koordinatsystemets användning skall dock inskränkas till att vara ett stöd för studiet av funktioners egenskap. Går man längre och man kan givetvis gå ännu mycket längre, har man förlorat kontakten med den utveckling, som inledes i aritmetiken och vars program där klart framlades, och ingått på alldeles nya tankebanor. Man har icke längre något stöd i behovets princip, men löper i stället stark fara att råka i konflikt med den objektivitetsprincip, som vill pålägga undervisningen i varje läroämne den måtta, som idén om suum cuique föreskriver.

Jag utdömer sådana av den vetenskapliga och lättledda pedagogiska entusiasmen tillförda nya utvidgningar av kursen.

Nu finnes det en självskriven och naturlig gräns för den algebraiska undersökningen i skolan. Den bör röra sig inom området för de reella talen och studera de algebraiska uttryckens värdefördelning inom dessa tals gebit. En ekvation bör skärskådas inom detta talområde. De imaginära talen höra den spekulativa matematiska vetenskapen till. Deras införande på skolan ger intet nytt bidrag, utan är snarare egnat att fördunkla begreppen. Sker detta särskilt så, att man helt enkelt lancerar talet i genom definitionen $i^2 = -1$ och sedan kastar sig in i övningen med detta gåtfulla tal, så är därmed komplett intet vunnet. Man endast förvirrar de eljes klara och intressanta relationerna mellan ett kvadratiskt polynoms nollställen och diskriminant. Skall man återigen utveckla fullständig teori för de komplexa talen med uppbådande av modul och argument och den grafiska åskådningens hela teknik, så tar detta lång tid och ger utan därpå byggda verkliga användningar och under dem förvärvad inblick uti det helas teoretiska värde och berättigande, knappast någon verkligare uppfattning än det just berörda formella införandet av *i*. Också detta, till vilket man ser ans tser här och där, hör till den matematisk-pedagogiska entusiasmens ny.kapelser, vilka måste med stor skepsis betraktas.

Man hör ofta matematikens egna företrädare vid skolan med ett visst tvivel i tonen tala om reformer i undervisningen. Dels beror detta givetvis på den naturliga konservatismen, som ser, att inga stora skador ske under ett visst föreliggande system, medan dock ett bestämt vetande vinnes, som visa sig vara bra, medan man ju ingenting vet om nya uppslags verkningar på det hela. Emellertid tror jag, att denna skepsis också föranletts av allehanda sådana entusiastiska och mindre övertänkta förslag som de, vilka jag just relaterat. Inför dem har den erfarne läraren reagerat och måhända efterhand utsträckt reaktionen, utan att varje gång så noga pröva saken, till allt nytt längs hela linjen.

I motsats till dylika noviteter vill jag ha sagt, att jag icke vill införa någonting nytt och sällsamt i algebran. Jag vill som jag redan sade få bort en massa gammalt och så vill jag ställa om det, som blir kvar, på ett nytt sätt, så att det som ändock är undervisningskonstens grundbetingelse nås, det vill säga, att det som läres förstås i sin totalitet och in i sina innersta detaljer.

Det torde ur det ovan utvecklade framgå den allmänna tendens jag kommer att tillämpa i min avgränsning av lärostoffet, så långt den saken nu kan klargöras utan ett ingående på detaljerna. Jag skrider nu till att följande samma plan som ifråga om aritmetikundervisningen i detalj följa algebraundervisningen och utveckla min uppfattning i fråga om stoff och metod. Sedan skall jag, alltjämt i anslutning till min framställning av aritmetikundervisningen, resa bestämda krav angående vad som enligt mitt förmenande bör komma bort och vad som bör komma till i algebraundervisningen.

Jag vill inledningsvis uttryckligen ha sagt, att jag har under skarp sikt den allmänna medborgarexamen och dess behov av algebraundervisning och att jag särskilt kommer att egna min uppmärksamhet åt gymnasialstadiets linjeindelning och den därav betingade olikartade algebraundervisningen på detta stadium.

Jag går alltså nu till detaljerna.

Jag har mig väl bekant, att ifråga om algebrans början olika uppfattningar göra sig gällande. Somliga anse, att man till en början icke bör blanda in de negativa talen, utan uppbygga de algebraiska uttrycken utan vetskap om dem samt först senare komma till dessa tal. Den andra uppfattningen vill börja med införandet av de negativa talen och först sedan dessas fulla behärskning erhållits skrida till att uppbygga de algebraiska uttrycken. Den förra uppfattningen går så långt att den till och med utvecklar räknesätten, innan de negativa talen göra sitt inträde, och vill till och med i sin extremaste fattning gå så långt, att den uppskjuter införandet av de negativa talen till ett följande läsår, varpå belägg finnes i tysk och även i svensk undervisning. Om detta är nu att säga, att man givetvis kan ordna saken på detta sätt. Men man bör ha klart för sig, att man därmed invecklar sig i en mängd komplicerade villkor och förutsättningar, som äro att iakttagas vid varje uttryck. Självfallet kunna de i uttrycket ingående bokstäverna icke tilldelas negativa värden, men vad som är mera komplicerat, ja på detta stadium alldeles oöverskådligt till sina konsekvenser är, att deras värdemängd måste så avgränsas, att uttryckets värde förblir positivt. Vad detta innebär skola några exempel klargöra.

Uttrycket $1 - 2x$ är positivt endast för $x < \frac{1}{2}$, medan uttrycket $4x - 6$ är positivt endast för $x > \frac{3}{2}$. Dessa uttryck existera sålunda för den, som icke innehar de negativa talen, för intet gemensamt värde på x. Det är följaktligen icke möjligt att exempelvis addera dessa uttryck.

Uttrycken x^2-4x+3 och x^2-6x+8 äro båda positiva för $o \leq x \leq 1$ samt för $x \geq 4$ medan för $1 < x < 4$ någotdera av dem eller vartdera är negativt. De kunna följaktligen förslagsvis adderas för $o \leq x \leq 1$ och för $x > 4$ och deras summa framställes av polynomet $2x^2-10x+11$. Men för $1 < x < 4$ saknar det ena uttrycket eller vartdera varje betydelse för den med de negativa talen icke förtrogne.

Man kan här också stöta på andra egendomligheter som mana till försiktighet. Mot uttrycken x^2+8x+9 och $14x+1$ finnes ju intet att anmärka. De äro positiva för alla här ifrågakommande värden d. v. s. för alla positiva värden på x. Men deras skillnad är positiv endast i intervallen $o \leq x \leq 2$ och för $x \geq 4$. Subtraktionen med de båda polynomen har således betydelse endast inom dessa delar av den positiva delen av reella axeln och endast där kan man sluta, att

$$(x^2+8x+9)-(14x+1)=x^2-6x+8$$

Jag vet nu icke, om man besinnat dessa svårigheter, vilka göra att varje uttryck måste underkastas en sorgfällig prövning, för att man alls skall veta, för vilka värden på de däri ingående bokstäverna uttrycket är förklarat, en prövning, vars tankeprocess kan vara nyttig nog, men icke kan anses höra detta stadium till. Jag tror snarare, att man alls icke bekymrat sig om den saken, utan hållit det formella uteslutande i sikte och med glatt mod adderat $1-2x$ och $4x-6$ enligt de formella räknelagarna, utan att ens avveta, att någonting är i olag eller att man sysslat med att addera negativa tal, som man först senare tänker införa i algebran.

Härmed torde väl den uppfattning, som vill uppbygga de algebraiska uttrycken endast inom de positiva talens rike, kunna anses avförd från dagordningen. Det är nog endast med den obegränsade tallinjens tal som substrat man kan tala formlernas språk obehindrat och skänka formlernas behandling deras sköna avrundning. Det är nu här en gång för alla fråga om teoretiska saker. Det skall visserligen också visa sig, att det icke är någon matematisk lek, utan att de negativa talen ha en reell uppgift uti frågor inom många olika områden av matematikens verkliga användningar.

Emellertid utesluter icke denna min ståndpunkt i den just utvecklade frågan något, som jag ville kalla *formlernas propedeutik* och som kan och bör föregå införandet av de negativa talen. Dessa skola nämligen icke heller de enligt den hävdvunna matematiska skolpedagogiken komma nedramlade från himmelen fixa och färdiga, endast för att vara nya underlag för övandet.

Vad menar jag nu med formlernas propedeutik? Därmed menar jag på sätt och vis ett tillvaratagande av den sunda grundtanken i den uppfattning vars extrema yttringar jag ovan sökt tillbakavisa. Formeln har ju framträtt redan uti aritmetiken, där dess användande på grund av den föreliggande frågans art icke sköt in över de negativa talen. Sålunda har formeln $S=\frac{gt^2}{2}$ intet med de negativa talen att skaffa. Det kan vara skäl att egna sådana funktionala sammanhang beskrivande uttryck en bestämd uppmärksamhet, så att man kalkylerar deras värde för givna värden på argumentet. På detta sätt kommer bokstaven in, såsom den skall göra det, uti det matematiska tänkandet och blir, befriad från all mystik, en naturlig räknesymbol.

Härvid behöver icke med nödvändighet det förelagda uttrycket vara hemtat från ett faktiskt problem och vara dess lösning. Man är nu inne i det teoretiska studiet av uttrycken och de genom dem till uttryck bragta lagarna och kan sålunda i diskussionen indraga allehanda enkla uttryck, oberoende av deras sammanhang med verkliga frågor. Givetvis är det bättre, om man kan gripa tillbaka till bestämda och kända problem.

För att fixera idéerna rycka vi in sådana uttryck som

$$3x, \frac{1}{2}x, 3x+2, \frac{1}{2}x+2, 2x-3, x^2+1, x^2-1, x^2+2x+3 \text{ o. a.,}$$

vilkas struktur enkelt kan förklaras, i vår betraktelse och egna deras värdefördelning en ingående beräkning. Vi finna naturligtvis då, att de icke alla kunna beräknas för varje positivt värde på x, vilket endast ger oss anledning att konstatera, att någonting i vår utrustning ännu är bristfälligt. Vi finna också, då vi lägga våra beräknade tabeller till grund för diagramuppritning, att avstympningar ske, som tydligen på något sätt sammanhänga med deras bristfälliga utrustning.

Överhuvud rycker nu *kurvdiagrammet* i förgrunden. I stället för att förena diagrampunkter såsom vid linjediagrammet medels räta linjer, söka vi nu vid uppritningen att genom en kurva förverkliga den lag, som de enskilda kurvpunkterna i sin diskreta följd bringa till synes.

Oförmågan att för varje positivt värde på x beräkna vissa uttryck och den därmed sammanhängande avstympningen av diagrammet ställer oss inför nödvändigheten att råda bot på denna sak. De negativa talen tränga sig på oss.

Vi böra icke heller försumma att följa en annan linje uti bokstavens användning. Formeln $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$, som jag tidigare hade anledning att omnämna, bringar i sigelartat stenogram till uttryck en allmän räknelag. Likaså anger formeln $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ en annan sådan lag. Dylika lagar finnas många och de ge ett osökt tillfälle till räknekontroller, vid vilka bokstaven såsom räknesymbol framträder i en annan betydelse än i det föregående. Inför sådana lagar inställer sig problemet att utbilda räknekonsten så, att man utan att först genom många experiment verificera en dylik lags riktighet, kan genom omedelbar kalkyl med bokstavsuttrycken finna den i dess allmängiltighet.

Sålunda träda här genast de båda grundlinjerna i algebraundervisningens program oss till mötes. Det gäller att studera de algebraiska uttryckens värdefördelning i hela den obundenhet, som de negativa talens besittning ensam förmår skänka och det gäller att utveckla räknekonsten så, att dessa algebraiska uttryck kunna bli föremål för kalkyl i sin allmänna fattning, utan att man i varje fall behöver rekurrera till den aritmetiska kalkylen med de tal de för vissa värden på de i dem ingående bokstäverna bringa till uttryck.

Jag vill genast göra gällande, att man i undervisningen egnat bra liten uppmärksamhet åt studiet av de algebraiska uttryckens värdefördelning och mest sysslat med den senast skisserade uppgiften. Men i och med detta har också det hela förlorat den fasta marken under sig. De algebraiska uttryckens egenskap att bringa en viss värdemängd till uttryck har sjunkit i glömska, medan deras formella struktur trätt i förgrunden. Jag undrar, om man alltid har klart för sig, att man utvecklar kalkyler mellan dessa värdemängder och icke endast etablerar formella transpositioner mellan vissa bokstavskombinationer.

Detta var vad jag menade med de algebraiska uttryckens propedeutik. Ett visst förberedande sysslande med enkla algebraiska uttryck, genom vilka deras karaktär av funktioner av de bokstäver, ur vilka de uppbyggts, bringas till uttryck och nödvändigheten av kalkyler med dem klarnar. Vi kunde också kalla detta en algebrans propedeutik, genom vilken algebrans allmänna signaturer bringas till uttryck och dess problemställning i någon mån klarnar.

Vi anteckna såsom en alldeles särskild behållning ur detta något, som vi ännu en gång understryka, nämligen att såväl det sakförhållandet, att vissa uttryck förete luckor i sin värdemängd eller snarare i området för sitt arguments fria rörlighet och den därmed sammanhängande avstympningen av diagrammen för de negativa talens problem oss in på livet.

Jag vill ytterligare tillägga, att två av våra tidigare problem föra oss i direkt kontakt med de negativa talen. Vi hade för reduktionen mellan Celsius' och Reaumur's skaluppgifter funnit formlerna

$$r = 0{,}8\ c$$
$$c = 1{,}25\ r$$

Dessa gälla även för negativa temperaturer och ge oss det första exemplet på en formel, som har betydelse längs hela reella axeln och vars diagram icke företer några sådana avstympningar som det ovan varit fråga om.

Vi funno vidare, att skaluppgifterna enligt Celsius' och Fahrenheits skalor förenades av formlerna

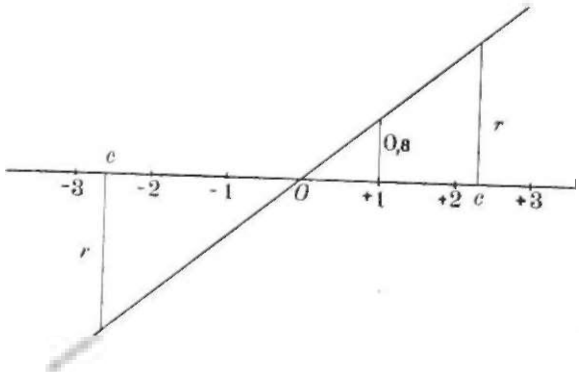
$$f = 1{.}8\ c + 32$$
$$c = \frac{5}{9}\,(f - 32)$$

På grund av sin reella motsvarighet existera också dessa formler längs hela termometerskalan, den första längs hela Celsius' skalan och den andra längs hela Fahrenheit-skalan. De gälla sålunda längs hela reella axeln och räkna sålunda med negativa argumentvärden och negativa funktionsvärden.

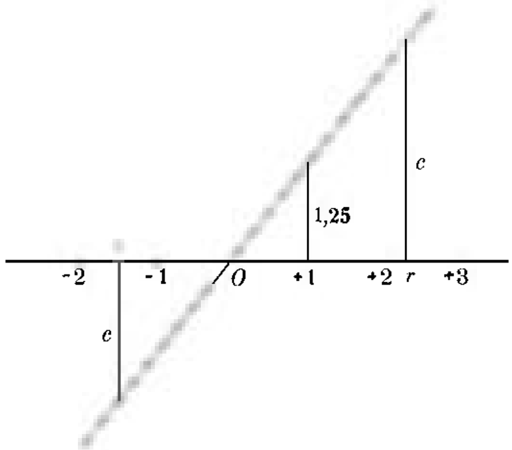
Det är lärorikt att innan man öppnar portarna till de negativa talens rike grundligt med kalkyl och diagram genomarbeta dessa exempel, i vilka de negativa talen ha den substantiella innebörd, som skänkes dem av termometerskalornas allom bekanta positiva och negativa skalor. Särskilt äro diagrammen i hög grad lärorika såsom övergångsstadium till det följande.

Vi få i anslutning till ovanstående formler följande diagram där den vågräta linjen är i det första diagrammet Celsiusskalan och i det andra Reaumurskalan.

Ur dessa diagram kunna vi avläsa för varje *c* det tillhörande *r*, oberoende av om det är fråga om positiva eller



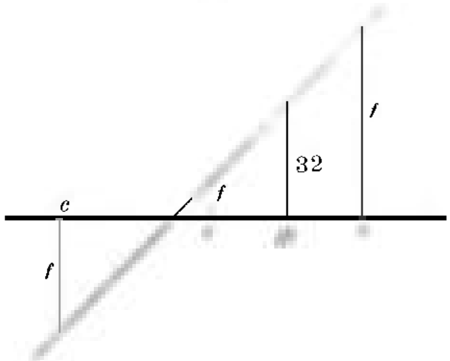
negativa temperaturer och likaså ur varje värde på *r* det tillhörande värdet på *c*. Det är intressant, huru här multiplikationsregeln för ett positivt och ett negativt tals



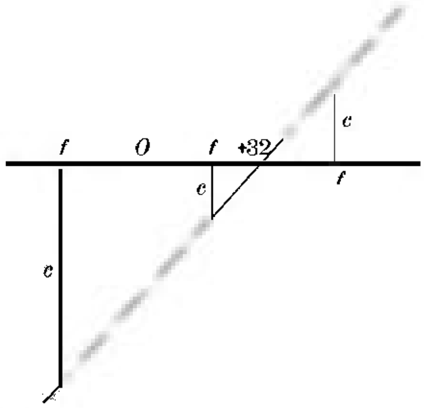
multiplikation framträder som ett naturligt med problemets art sammanhängande sakförhållande.

I anslutning till formlerna på sid. 105 få vi de båda diagrammen, där åter de vågräta linjerna äro i den första figuren Celsius' skala och i den senare Fahrenheits skala

Härur kan för varje temperaturuppgift *c* på Celsiusskalan den motsvarande uppgiften på Fahrenheitsskalan uttagas såsom i figuren flerstädes angives.



På samma sätt ger det andra diagrammet det värde på Celsius' skalan, som svarar mot en viss uppgift på Fahrenheitsskalan.



Dessa lärorika exempel visa, huru man med ett klart definierat negativt tal som bas kan föra såväl expression som diagram utöver de tidigare gränserna. Den klara definitionen av det negativa talet beror här på dess anslutning till termometerskalorna, vilka ge all erforderlig räkneanvisning och ritanvisning genom att resultalen äro till sina förtecken givna, all kalkyl förutan, i det direktionerna bestämmas av termometerskalornas direktioner.

Jag tillråder såsom jag redan sade ett sorgfälligt genomarbetande av dessa uppgifter såsom en avslutning av algebrans propedeutik och en inledning till den nu följande framställningen av de negativa talen.

Algebrans propedeutik avser naturligtvis att göra eleverna förtrogna med de första grunderna av formlernas språk. Den skall påvisa nödvändigheten av de negativa talens införande och den skall just genom de sista exemplen visa, huru framställningen av det algebraiska uttrycket kan gestaltas på en punkt, där man kan taga dessa nya tal till hjälp.

De negativa talen. De *negativa* talen böra icke införas genom någon teoretisk spekulation. De ha ju trängt in i samhällslivet såsom en på flera håll verkligen använd åskådning. Då vi granska användningen av plus- och minus-tecknet för distinktioner i praktiken, så handlar det alltid helt enkelt om ett praktiskt sätt att åtskilja två *motsatta* riktningar och att sålunda ersätta begreppet åt höger och åt venster, uppåt och nedåt, åt norr och åt söder, åt öster och åt vester m. m. dyl. Sålunda ha vi tecknen använda på detta sätt ifråga om termometerskalan, där de ersätta den långsläpigare upplysningen ovanom eller nedanom nollpunkten. Samma tanke ligger till grund för distinktionen mellan nordlig och sydlig latitud, ostlig och vestlig longitud. På samma sätt ha likaledes redan i aritmetiken de båda tecknen använts för att markera de enskilda talens deviationer från ett medeltal vid en medeltalsräkning. Däremot komma plus- och minus-tecknen icke till användning, då det gäller att uppteckna aktiva och passiva, och det är sålunda ur realitetens synpunkt icke lämpligt att såsom ofta sker rekurrera till detta den begynnande lärans om de negativa talen standardexempel.

Nu är det en i hög grad nyttig övning att anknyta en del frågor till dessa reala uppgifter, där plus- och minustecknen ega ett bestämt realt burskap. Sålunda är det möjligt att uppställa sådana enkla frågor, genom vilka additionen och subtraktionen framtvingas, ävensom multiplikationen eller divisionen av en positiv eller negativ uppgift med ett tal. Temperaturmedeltalet mellan två temperaturer kan läggas till grund för utvecklande av additionen. Temperaturdifferenser och latitudsdifferenser ge subtraktionen, där restens tecken visar sig vara nödvändigt för att kunna fixera resten. Man kan på denna linje driva de omnämnda räkningarna till sin slutliga formella fulländning, hela tiden med något reellt problem som operationsbas.

Emellertid böra vi ha klart för oss, att när vi utveckla dessa räknesätt vi icke längre äro inne i praktiken. I verkligheten inskränker sig där de positiva och negativa talens användning till deras bruk som åtskiljande tecken. *I praktiken räknar man icke med negativa tal.* De utvecklingar, som vi ovan anslutit till de positiva och negativa talens användning, kunde väl i praktiken förekomma, men göra det icke, utan äro rena skolbetraktelser. Måhända kan jag undantaga i någon mån termometern, men också där inskränker sig den medborgerliga praktiken till dess avläsande. Dock måste det anses falla inom behovets princip att veta, huru medeltalsberäkningar verkställas, och där är det i verkligheten fråga om att kunna addera positiva och negativa temperaturuppgifter. Däremot torde de enkla problemen, som ansluta sig till latitudsuppgifter, knappast påkalla någon teknik i denna riktning. Oberoende härav är det emellertid att befästa de negativa talens ställning och giva denna teoretiska skapelse en real bakgrund att genomarbeta deras användning inom de ovan nämnda praktiska frågorna. Eleverna skola därur utgå med förmågan att addera och subtrahera positiva och negativa tal samt multiplicera och dividera sådana tal med ett givet tal.

Genom denna exkurs ha vi kommit de negativa talen närmare inpå livet. Vi skola eljes observéra det kontinuerliga och försiktiga framryckandet, som i enlighet med min undervisnings hela allmänna tendens strävar till att småningom befästa begreppen och icke med en gest kalla in dem på skådebanan.

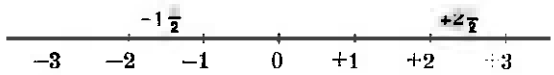
Vi ha nu också nått större behärskning av de algebraiska uttrycken. Uttrycket $2x + 3$ kan få en allmännare tillvaro, om vi tänka oss, att temperaturerna i tvenne kärl följa i varje ögonblick den lag, att temperaturen y i det ena är 3 grader högre än den dubbla temperaturen i det andra. Då är således, om temperaturen i det senare betecknas med x

$$y = 2x + 3$$

ett algebraiskt uttryck, som också kan beräknas för negativa värden på x och därvid återger någonting alldeles bestämt.

Det kan vara skäl, att på detta stadium betrakta några sådana uttryck oberoende av deras sakliga innehåll, eller eventuellt — såsom ovanstående exempel — brist på sakligt innehåll, och sålunda göra den första ansatsen att kalkylera algebraiska uttryck för negativa värden på argumentet och för sådana värden, som ge ett negativt värde på uttrycket. Naturligtvis är urvalet icke så stort och någon särskild brett anlagd övning avses här icke.

Jag går emellertid vidare. Det har varit fråga om tecknens användning i praktiken vid fixerandet av motsatta direktioner. Vi renodla nu denna tanke och skapa en måttstav, som har en bestämd *nollpunkt*, från vilken två direktioner utgå, vilka vi särskilja med plus- och minustecken. Vi lösgöra denna måttstav från alla praktiska problem och införa den såsom urbild för den tanke, som i de skilda problemen tar sig uttryck i användande av olika tecken. Vi kalla den *tallinjen*. Den ser ut som bilden visar



Den är ingen skapelse avsedd endast för skolbruk. Den är helt enkelt matematikens *reella axel*, på vilken de reella talen finnas uppradade.

För oss idealiserar denna linje, som närmast renodlar termometerskalan, hela den ur vår rundblick i praktiken på olika punkter observerade distinktionen mellan riktningar, och den kan för oss förete bilden av: åt höger och åt venster, uppåt och neråt, åt norr och åt söder, åt öster och åt vester. Vid alla dylika praktiska synpunkter kunna taluppgifterna inordnas på denna ideala måttstav och sålunda träda inför oss med sina väsentliga från deras reala förekomst utlösta signaturer.

Nu är att märka, att den del av denna tallinje, som ligger till höger om nollpunkten, *origo*, är området för de aritmetiska kalkylerna. Där äro vi fullt hemmastadda och kunna utan begränsning utföra qvattvor species med hela tal och bråk. Ett hejdande moment ha vi dock kunnat iakttaga. Vi ha icke kunnat utföra subtraktionen, då subtrahenden är större än minuenden.

Nu ligger det teoretiska problemet i öppen dag. Det gäller att överflytta aritmetiken också på den venstra sidan av linjen eller snarare att utbygga aritmetiken så, att vi obehindrat kunna röra oss längs hela linjen. Vi skola se, att detta kan ske och till och med i en sådan utsträckning att den inskränkning, jag just framhävde, försvinner.

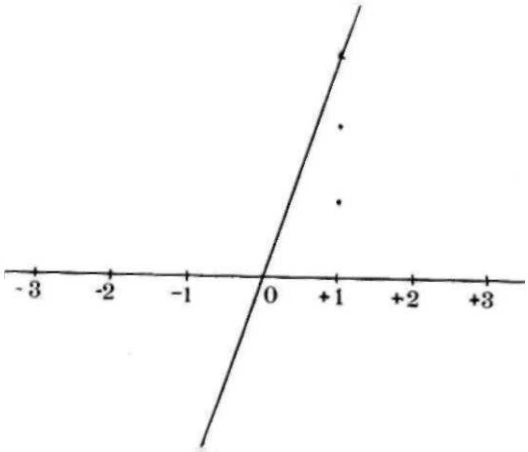
Nu är hela denna utveckling och den fortsättning därpå, som stundar, av uteslutande teoretisk art. Men vi ha efterhand byggt upp en bakgrund för denna teori, som nära nog gjort det till en bjudande plikt att vinna beherskning av dessa frågor. Vi påvisade, att vår planerade undersökning av formlernas struktur hejdades och ledde till endast *stumpvis existens* av formlerna och därav beroende oskön avstympning av diagrammen. Vi sågo genom våra termometerexempel, att detta kan övervinnas, genom att vi också indraga de negativa talen i våra betraktelser. Och så sågo vi vid vår rundblick ut över praktiken, att det här handlar om en åskådning, som hade ett fast praktiskt innehåll.

Naturligtvis har min knapphändiga framställning icke kunnat ge den fullständiga bilden av det pedagogiska maskineri, som här arbetar. Emellertid har jag själv i praktiken tillämpat detta och med en stegvis fortgående framställning, sådan, av vilken jag i starkt sammanpressad gestaltning ovan givit en deskriptiv bild, omständligt förberett de negativa talen.

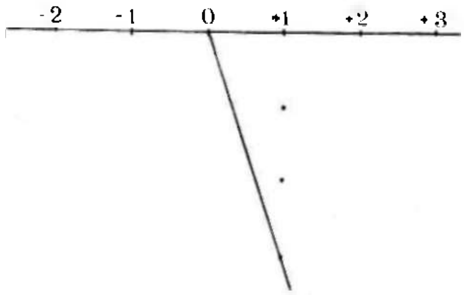
Det gäller alltså nu att utbygga aritmetiken så, att den också inbegriper de negativa talen.

Här kunna olika vägar inslås. Vi kunna betrakta additionen och subtraktionen såsom redan utvunna ävensom multiplikationen, då den ena faktorn är positiv, och divisionen, då divisorn är positiv. Detta leder nu bland annat till, att vi i fullaste utsträckning beherska och med beräkning kunna följa sådana uttryck som $2x$, $\frac{1}{2}x$, $2x+3$, $3x-2$. Därjämte kunna vi rita deras diagram, varvid vi som diagramaxel välja den obegränsade reella axeln. Vi ha därvid att ihågkomma, att eleverna genomgått den aritmetikkurs, som i det föregående utförligt utvecklats, och att tillgripande av diagrammet sålunda för dem är en alldeles naturlig sak. I alla dessa fall få vi klara räta linjer som diagram, på samma sätt som då vi i algebrans propedeutik jämförde termometerskalorna.

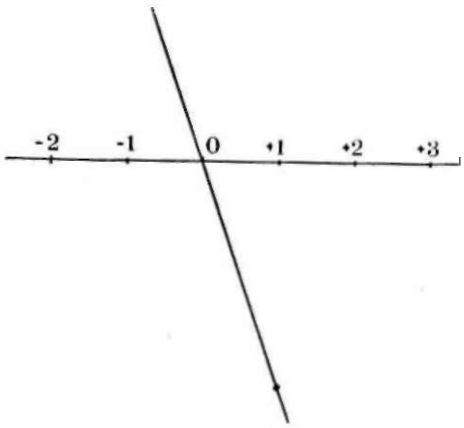
Nu stå vi emellertid inför en metod att klara den svåra uppgiften att multiplicera tvenne negativa tal. Vi betrakta föredenskull uttrycket $3\,x$ och rita dess diagram. Bilden får följande utseende



Vi inrikta sedan vår uppmärksamhet på uttrycket $-3x$, som vi uppfatta såsom den ännu icke definierade produkten av det negativa talet -3 och ett tal x. För positiva värden på x, till exempel för värdet 4, är, om den aritmetik vi uppbygga skall innesluta den som vi redan ega, $-3\cdot 4 = 4\cdot(-3)$, och således likamed -12. Med iakttagande av detta får diagrammet för $-3x$ för positiva värden på x följande utseende



Huru ser nu detta diagram ut för negativa värden på x?. Det är uppenbarligen en naturlig fordran, att diagram-linjen skall fortsätta obruten genom origo och sålunda skänka diagrammet följande slutliga form



Detta diagram böra vi förresten jämföra med diagrammet på sid. 113 och djupt begrunda deras sammanhang. Vi återvända emellertid till vårt diagram. Dess obrutna fortsättande genom origo involverar, att produkten av två negativa tal skall vara positiv i den mening att $(-3)(-4) = +12$.

Med detta är sedan också divisionen klar i sin fullaste utsträckning, frånsett det fall, då divisorn är 0.

Vi få här icke tänka oss, att vi på något sätt bevisat, att $(-3)(-4) = +12$. Vi ha endast i avseende å diagrammet uppställt ett, som det förefaller, plausibelt anspråk och funnit, att om detta skall uppfyllas, så måste $(-3)(-4) = +12$.

Om eleverna icke uti sin aritmetikundervisning vunnit den för ovanstående tillvägagångssätt erforderliga träningen i diagrammets geometriska skådande, så kan en annan näraliggande metod komma till användning. Man observerar, att de hela talen $3a$ bilda en fulländad räcka, om vi låta a genomlöpa de hela talen. Vi få först för $a = 0, 1, 2, 3, 4$ för a värdena

$$0, 3, 6, 9, 12.$$

och för $a = -4, -3, -2, -1$ för $3\,a$ värdena -12, -9 -6, -3.

vilka sammanfoga sig till den vackert fortlöpande räckan

$$-12,\ -9,\ -6,\ -3,\ 0,\ +3,\ +6,\ +9,\ +12.$$

Om vi nu betrakta $-3\,a$ och låta a genomlöpa 0, 1, 2, 3, 4, så få vi efterhand

$$0,\ -3,\ -6,\ -9,\ -12.$$

Låta vi nu a genomlöpa $-4, -3, -2, -1$, så önska vi gärna nå en lika vackert fortlöpande räcka som i det förra fallet. Men då kan denna icke bli någon annan än

$$+12,\ +9,\ +6,\ +3$$

som sammanfogar sig med den förra till räckan

$$+12,\ +9,\ +6,\ +3,\ 0,\ -3,\ -6,\ -9,\ -12.$$

Men ernåendet av denna fulländning och motsvarighet till den förra räckan förutsätter, att produkten av två negativa tal är ett positivt tal i den mening att (-3) $(-4) = +12$.

Detta resonnemang är ju i själva verket detsamma som det tidigare, churu bristen på förmåga att handskas med diagrammet förvandlat processen till en med diskreta talvärden opererande process.

Man kan också här intaga den ståndpunkt, som den matematiska vetenskapen vid introducerandet av de negativa talen tillämpar, nämligen deducera alla räknesätten ur *principen om de formella räknelagarnas permanens*, ehuru denna tankegång ligger för eleverna avlägsnare. Ha de emellertid icke i sin aritmetikundervisning blivit hemvana med diagrammet kan denna utveckling tillämpas, särskilt om man redan i aritmetiken vid bråkens införande gjort sig mödan att också undersöka, om de formella räknelagarna gälla för de nya talen eller icke, och hela tankegången sålunda icke nu med ens framträder som ny.

Jag vänder mig här genast till produkten av två negativa tal. Då (-3) $(-4) = 3 \cdot 4 \cdot (-1)^2$, så är problemet återfört till problemet att ge $(-1)^2$, en sådan betydelse, att därigenom icke de formella räknelagarna läderas. Betrakta vi då produkten

$$(-1)\left\{(+2)+(-1)\right\}$$

så kan denna utvinnas på två sätt. Om vi först verkställa additionen inom parentesen och sedan multiplicera, stöta vi på inga svårigheter, utan komma lätt och ledigt till resultatet -1. Skall emellertid den distributiva lagen fortfara att gälla, så skola vi alltså vara berättigade att multiplicera term för term och erhålla som resultat

$$-2 + (-1)^2$$

De båda resultaten skola givetvis överensstämma, vilket omedelbart leder till, att vi åt $(-1)^2$ måste skänka betydelsen $+1$.

Icke heller detta får betraktas såsom ett bevis i egentlig mening. De formella räknelagarnas permanens är en konvention av samma art som anspråket på ett obrutet diagram eller på en vackert och lagbundet fortskridande räcka av diskreta tal. $(-1)^2 = +1$ är en *definition*, som tillfredsställer anspråket att låta allting bli vid status quo ante, sålunda att samma räkneregler kunna tillämpas som i den tidigare för de positiva talen utvecklade räknekonsten och som på en annan linje icke stör diagrammets fulländning.

Jag vet icke om man i skolan verkligen egnar denna definition den uppmärksamhet den förtjänar. En i annan riktning gående definition skulle för att nämna endast ett exempel omöjliggöra slutsatsen, att monomen $+3\,a$ och $-3\,a$ äro motsatta tal, åtminstone för negativa värden på a. Vad detta skulle innebära, behöver icke närmare utvecklas. Det kan emellertid icke skada att i skolan åtminstone något dröja vid sådana och andra konsekvenser av en annorlunda orienterad definition.

Problemet att motivera definitionen av produkten mellan två negativa tal hör utan varje tvivel till de svåraste sakerna uti denna del av algebraundervisningen.

Varje avsaknad av kontakt med något som helst reellt underlag ger hela framställningen, huru den än ordnas, en stark relief av teoretisk spekulation. Emellertid synes det mig, och jag vet förresten av erfarenhet, att stöten med de teoretiska besvären kanske bäst mildras på den av mig först inslagna vägen. Att försöka på något oförmärkt, teoretiskt icke hållbart sätt införliva saken med elevernas vetande, är ovärdigt, försåvitt detsamma icke inskränker sig till förklaringen, att man multiplicerar som man gör, därför att man funnit genom överläggningar, som äro för svåra att i skolan genomgås, att man på det sättet kan uppbygga samma aritmetik för de positiva och negativa talen som den, som redan gäller för de positiva talen. Det är tecken på att här föreligger en icke ringa svårighet, att en mängd olika åskådningar utvecklats för denna saks klargörande, av vilka jag i det föregående framställt de vanligaste.

Redan under den period, som föregick de negativa talens upptagande och också medan de voro så att säga i antågande, sysslade vår framställning med algebraiska uttryck och deras tillhörande kurvdiagram. Sedan numera de negativa talens fulla behärskning ernåtts, finnes intet hinder för det fulla studiet av de algebraiska uttrycken. Negativa argumentvärden äro icke längre uteslutna och icke heller sådana argumentvärden, som leda till negativa funktionsvärden. De enda värden, som ännu icke tolereras äro de som göra nämnaren ensam likamed 0.

Nu är också ögonblicket kommet att med tabeller och diagram studera enkla formlers värdemängder och deras svängningar och variationer. På samma gång erbjuder detta den naturliga övningen uti kalkyl med de nya negativa talen.

Algebraundervisningen är nu enligt mitt förmenande inne på en riktig väg. Ty det är alls icke det väsentliga att hastigt uppbygga de algebraiska uttrycken för att sedan kring dem utveckla den formella algebraiska räknekonstens aktivitet. Det väsentliga är att grundlägga en verkligen in till märgen trängande uppfattning om dessa algebraiska uttrycks karaktär av funktioner av de i dem ingående bokstavskvantiteterna. Jag tvekar icke att här på detta stadium insätta mycket arbete på denna sak. Dess behållning är nämligen icke av formell art, utan leder till en fördjupad skolning av det funktionala tänkandet, sådan det behöves för orienteringen i de lagbundna sammanhangen inne i kvantiteternas värld. Att man icke behöver draga sig för att använda tid på detta, har sin orsak också däri, att mycket stora delar av den hittillsvarande kursen alls icke komma att ingå i den kurs, jag nu i denna framställning håller på att utveckla.

Jag vill på detta ställe säga, att jag i utlandet trätt i förbindelse med en uppfattning, som vill förankra algebraundervisningen ännu fastare i verklighetens grund än jag i det föregående gjort. Entusiasmen inför möjligheten att, såsom jag tidigare utvecklat, uppbygga hela aritmetiken ur samhällets kvantitetsförhållanden och samhällslivets transaktioner har lett till en analog strävan i algebran. Man har där jagat efter sakgebit, som skulle kunna göras till det substrat, ur vars kvantitativa studium algebran skulle utväxa. Sålunda skulle inga andra formler behandlas än de, som ega sin motsvarighet i någon verklighet. Man har i denna strävan hamnat inne i rätt ansträngda »verkligheter». Det synes mig som om doktrinen skulle göra sig märkbar uti dylika strävanden. Det handlar på en del punkter i algebran ohjälpligt om teoretiska betraktelser. Man har genom enstaka uppgifter kommit in på de algebraiska uppgifternas omrade och man vill nu studera sådana uttryck. Man har fått känning med de negativa talen och man vill fördenskull göra sig fri från den bundenhet, som obekantskapen med deras finare mekanism betingar. Detta är en dilatation av behovets princip i en alltigenom förnuftig anda. Huvudsaken är blott, att man icke glömmer sig kvar i dylika utvecklingar och glömmer vad det var, som egentligen förde en dit.

Jag vill därför ännu en gång och med allt eftertryck betona, att man icke skall göra sysslandet med de algebraiska uttrycken till en lek för lekens egen skull. Man skall icke torna upp dem till krokanartade arkitektoniska bokstavsaggregat, utan hålla sig till alldeles genomskinliga uttryck, vilka enskilda delars funktion man överskådar.

Monom och polynom.

Den formella redan och ordningen i det följande förutsätter en bestämd renodling av *monomet* och *polynomet*, den fortsatta utvecklingens elementära operationsobjekt. Båda förekomma, då det gäller att framställa lagbundna förhållanden. Sålunda framställer monomet $s = \frac{gt^2}{2}$ relationen mellan vägen och tiden vid fallrörelsen, medan polynomet $s = s_0 + ct - \frac{gt^2}{2}$ framställer beroendet mellan vägen och tiden vid det vertikala kastet.

Studera vi särskilt detta polynom närmare, så är dess tankegång nog den, att vi från $s_0 + ct$ subtrahera $\frac{gt^2}{2}$. Men vi kunna också på grund av de negativa talens särskilda mekanism fatta saken så, att vi uppbyggt polynomet genom att addera s_0, $+ ct$ och $-\frac{gt^2}{2}$, vilket då anges genom att helt enkelt skriva de tre monomen efter varandra.

Därmed ha vi återgivit, huru monomet och polynomet uppbyggas.

Vi få icke taga för lätt på dessa bildningar. Där äro en hel del resonnemang att göra. Monomet $-4x^2y$ är ingalunda på något sätt negativt. Dess värde beror av de däri ingående bokstävernas tillfälliga värden. För $x = 2$, $y = -3$ antar detta monom det positiva värdet $+48$, medan det för $x = 1$, $y = 2$ antar det negativa värdet -8.

Likformiga monoms addition beror helt och hållet på multiplikationens distributiva lag. Där de icke äro likformiga, kan additionsresultatet blott betecknas och kallas polynom.

Polynomets struktur måste noga genomtänkas. Polynomet

$$3x^2y - 4\,xy^2$$

kan uppfattas såsom summan av monomen $3x^2\,y$ och $-4\,xy^2$. Men den kan också på grund av positiva och negativa tals additions- och subtraktionsegenskaper uppfattas som skillnaden mellan monomet $3\,x^2y$ och $4\,xy^2$. Detta senare kommer närmast till användning, då det gäller att beräkna polynomet för givna värden på x och y, medan det förra spelar den avgörande rollen, då det gäller att inordna polynomet i det formella räknesystemet.

Jag kan icke undgå att ytterligare framhäva, att jag icke kan anse algebraundervisningens tyngdpunkt ligga i det formella inlärandet av räknesätten. Där finnes såsom jag redan flera gånger framhävt ett annat moment, som är minst lika viktigt och om vilket kan sägas, att detsamma i den tidigare ännu mångenstädes kvarstående undervisningen fullständigt försummats, ehuru det också i sanningens intresse måste konstateras, att detsamma på en del håll vunnit beaktande. Detta moment besticker sig uti förvärvandet av en djupare inblick uti formlernas natur.

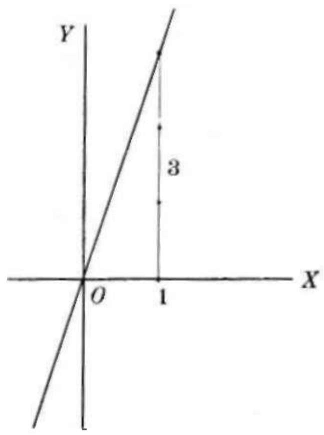
Jag anser det vara lämpligt att på denna punkt, innan räknesätten utvecklas, närmare ingå på denna sak. Det är därvid icke längre fråga om att endast upprita diagrammen på grund av en föreliggande formel, utan det gäller att lära känna dessa diagrams geometriska signa och deras sammanhang med det algebraiska uttryckets konstanter.

Koordinatsystemet. I sådant syfte är det nu på tiden att utbygga diagramfältet till ett fullständigt *koordinatsystem*, en övergång, som ger sig osökt och som icke behöver begås med några särskilda ceremonier. Till den nu redan föreliggande *abskissaxeln* anslutes helt naturligt *ordinataxeln*, som då med sin skala ger stadga åt avsättandet av funktionsvärdena. Vid problemet om övergång mellan två olika termometerskalor äro de båda axlarna helt enkelt de båda termometerskalorna. Abskissan och ordinatan äro de sammanhörande uppgifterna på de båda skalorna.

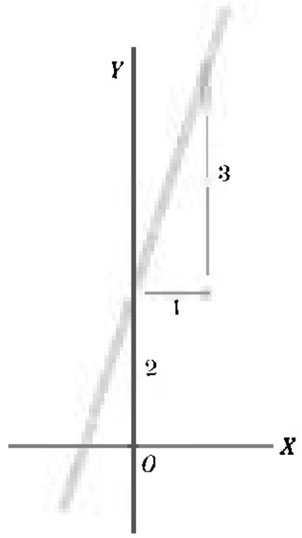
Naturligtvis kan och bör man betona dessa axlars betydelse såsom medel att fixera en punkts läge i planet och sålunda framhäva, att ett allmänt och nödvändigt geometriskt hjälpmedel härmed gör sitt intåg. Därvid bör också den saken ses i sin fulla enkelhet.

Emellertid är det ju icke i detta sammanhang koordinatsystemet på denna punkt i framställningen introduceras, utan det är såsom nämndes endast en ny utbyggnad av den primära diagramaxeln från aritmetiken. Den första utbyggnaden var ju denna diagramaxels negativa sida.

Om vi nu betrakta den *lineära* funktionens enklaste typ förslagsvis $3x$, så observera vi rätt snart, att dess koefficient har en klar geometrisk betydelse. Ty för $x = 1$ är uttrycket likamed 3. Vi få följande bild, då vi i övrigt nöja oss med den icke fullt formellt klarlagda, men för intuitionen givna saken, att diagrammet är en rät linje:



Genom en överläggning, som kan till full evidens fattas, inses, att det på uttrycket $3x+2$ uppbyggda diagrammet erhålles så, att denna linje skjutes uppåt 2 steg, emedan i övrigt allt blir vid det förra. Vi få följande bild,



ur vilken med all önskvärd tydlighet framgår betydelsen av uttrycket $(3x+2)$:s båda koefficienter för diagrambilden.

Genom detta har utan tvivel någonting alldeles nytt inkommit uti undersökningens gång. Medan man tidigare så att säga empiriskt emottagit ett diagram såsom uttryck för en tabells eller en formels lagbundenhet, har man här i ett visst fall uppvisat diagrammets bestämmande signaturer. Detsamma kommer att senare ske i avseende å andra uttryck. I nu föreliggande fall har man, liksom vi komma att göra senare i andra fall, etablerat ett samband mellan formel och diagram, som gör det möjligt för oss att se diagrammets vi uella bild genom en fantasiakt i samma ögonblick vi se formeln och omvänt.

Om detta skall man givetvis säga, att det är svårt. Jag tar ett sådant omdöme med ro, enär jag ju vet, att det endast är det synonyma uttrycket för att det är nytt. Vida svårare tankeprocesser ha hittills i den gamla undervisningen utan förbarmande redan lågt nere i aritmetiken krävts av den unge lärdomsadepten. Dessutom måste vi komma ihåg, att han nu icke står främmande inför dessa saker, utan har hela den förtrogenhet med diagram och till dem anslutna reflexioner, som han förvärvat under flera års så gott som ständigt sysslande med saken. Diagrammet är ett vapen, som han känner.

Jag anser emellertid icke, att utvecklingen skall föras på detta utvecklingsstadium längre än till de lineära funktionerna. Ett lärorikt sammanfattande exempel är, att inrita i samma koordinatsystem diagrammen för

$$y = \mu x + b$$

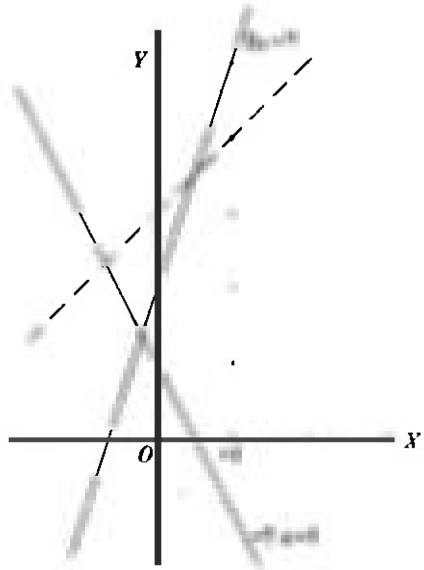
där b är konstant och μ genomlöper en serie negativa och positiva värden, inklusive 0. Man ser då, huru *vinkelkoefficienten* μ fixerar varje individ och hurusom dess variation innebär en vridning av linjen genom ett strålknippe.

De formella räknesatten.

Då vi nu gå till de formella räknesätten, få vi icke ett ögonblick lemna ur sikte, att de ha en synnerligen enkel uppgift. Det gäller att genom transformationer få uttrycken tillgängliga för numerisk kalkyl. Åtminstone böra vi fasthålla vid denna deras fundamentala uppgift såsom en fast motivering för deras berättigande. Om vi till exempel skola beräkna uttrycken $3x^2 - 4x + 2$ och $-2x^2 + 4x - 3$ för samma värden på x och sedan addera de erhållna resultaten, så är det givetvis enklare att direkt beräkna uttrycket $x^2 - 1$, emedan man då kommer ifrån med endast en tabell.

Sedda från denna synpunkt, äro algebrans räknesätt egnade att tillvinna sig intresse. De markera framsteg och synteser, låt så vara inom en teoretisk värld. Men den världen är uppvuxen ur den praktiska världen och innesluter i sig betydande maktmedel, då det gäller att vinna inblick i frågor inom denna praktiska värld.

Vad jag på denna punkt ville understryka är, att man har ett medel för grundläggande av den djupa förståelse man eftersträvar och ett medel sålunda att motverka det helas alltför starka formalisering uti det grafiska utförandet av räknesätten. Antag, att man har att addera de värdemängder, som $3x + 2$ och $-2x + 1$ representera för variabla värden på x. Om man då ritar de båda diagrammen i samma koordinatsystem får man vidfogade bild, där de utdragna linjerna avge de båda diagrammen.



Om man nu här adderar ordinatorerna, som svara till samma abskissvärde, så verkställer man ju den begärda additionen. Den prickade linjen ger resultatet. Det är icke svårt, att ur denna linjes bestämmande element se, att den framställer uttrycket: $x + 3$, varur således på detta grafiska sätt framgår, att $(3x + 2) + (-2x + 1) = x + 3$.

Naturligtvis skall detta ju icke utbyggas till någon särskild exercisplats. Men det kastar ljus över, vad det i grunden är fråga om, då tvenne uttryck adderas. Det gäller att etablera ett uttryck, som i varje sitt värde återger summan av de värden de enskilda addenderna uppvisa för samma värde på argumentet. Därigenom tränger utvecklingen genom de formella operationernas skal in mot det, som är det helas kärna. Man kan naturligtvis, när man kommer fram till multiplikationen gå fram också ett kort stycke på denna väg och helt visst därunder samla material till en djupare uppfattning av det som sker i räknehäftet.

I fråga om själva det formella utförandet av räknesätten finnes givetvis icke så mycket att säga. En viktig sak är naturligtvis, att man där skall hålla sig till enkla uttryck. Jag utdömer fullkomligt alla de inom intet matematiskt eller praktiskt problem härstammande, troligen endast för skolbruk avsedda konstiga uttrycken. Det gäller ju vetenskapligt närmast monomen och polynomen av en variabel eller två, alltså uttryck av formen $-5x^3$, $2x^2-3x+5$, $3x^2y$, $5x^3+3x^2y-2xy^2+6y^3$ o. s. v., vilkas transformationer skola studeras. Särskilt ville jag utdöma det alldeles omotiverade *parentesräknandet*, som med sina klausuler, klamrar m. m. dyl. icke kommer ifråga vid praktiska användningar av algebran och knappast ens visar sig under specialföreläsningarna i matematik. Det är en absolut onödig, formell träning, på vilken långa tider slösas bort.

Jag går icke in på dessa räknesätt i övrigt, men vill dock i fråga om enskilda punkter göra en del inlägg.

Då det sålunda gäller att lösa divisionsuppgiften, kan en del synpunkter vara av värde. Om vi exempelvis ha att utföra divisionsuppgiften

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3}$$

så inse vi, att divisionsresultatet måste bli ett kvadratiskt uttryck. När vi då besinna, huru dividenden $x^3-6x^3+11x-6$ skall uppkomma genom den distributiva multiplikationen av $x-3$ och detta ännu obekanta kvadratiska uttryck, inse vi, att det kvadratiska uttryckets *första* term måste bli x^2, d. v. s. erhållas genom division av den första termen i dividenden med den första termen i divisorn. Mera behöva vi icke veta för att kunna lösa problemet, ty vid varje följande term i kvoten stå vi inför precis samma problem, endast med den skillnad, att dividenden vid varje steg utbytes mot de successiva resterna.

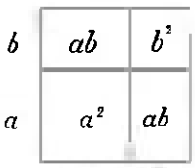
Eljes komma vi i divisionen i förbindelse med en teoretiskt värdefull sak. Vi adjungera nämligen till den primära definitionen för a^n en ny definition, som utsträcker denna beteckning till a^0 och till a^{-n}. Det är intressant att grafiskt sticka ut ett antal av punkterna 2^x, där x genomlöper heltaliga värden, incl. 0, och taga i ögnasikte den vackra punktföljd som på detta sätt erhålles. Den bringar till uttryck de nya definitionernas ändamålsenlighet och är på samma gång den primära början till *exponentialkurvan*, vars lag går igen exempelvis vid frågan om kapitalets variation med tiden under antagande av konstant räntefot.

Att jag icke dröjer närmare vid dessa räknesätt beror nu icke på, att jag skulle anse, att desamma böra utlevereras till det formella exempelövandet, som jag särskilt anser vara en av den elementära undervisningens mörka sidor. Men jag vill icke låta framställningen i alltför hög grad förlora sig i tröttsamma upprepningar. Den intresserade läraren skall på alla punkter under snart sagt varje lektion finna möjlighet att rekurrera till den sakliga grund som betingar dessa operationer. Han skall välja diagrammet varje gång han finner, att det jämnar vägen. Men han skall också finna utan att gå till förkonstling naturliga hjälpmedel för att befästa förståelsen.

Jag sade, att han skall göra det utan förkonstling. Han skall icke tro, att allting bör ske grafiskt och att man per fas et nefas bör i varje fall skapa ett grafikon, för att saken skall kunna förstås och måhända på utfinnandet av ett sådant nedlägga en krånglig tankegång. Det är till exempel ganska nyttigt att framställa formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$$

genom följande figur, som visar, huru arean av kvadraten med sidan $a+b$ sammansättes av kvadraterna med sidorna a och b och tvenne kongruenta rektanglar med arean ab. Väl att märka ger nu denna framställning emellertid icke den kända formeln i hela dess utsträckning. Den är sålunda icke så instruktiv som man kanske på något håll trott. Alldeles onödigt är det i varje fall att arbeta vidare i denna riktning och bilda figurer, som »bevisa» andra dylika formlers riktighet. Sådana efemära illustrationer äro icke, vad jag menar med grafisk åskådning. Vi behöva endast tänka tillbaka på rektangelns användning i aritmetikens bråklära för att förstå, att det där var fråga om en alldeles annan geometrisk åskådning.



Jag talade om, att hela denna utveckling av de formella räkneoperationerna skulle omställas så att detsamma blir enkelt. Jag vet icke, om man därvid fullt förstår, vad jag menar. Den enkelhet, till vilken jag vill driva det hela, är icke någon liten reduktion, utan avser en verklig revision, där exemplen nedsjunka till ett relativt fåtal. Men i stället nedlägges på dessas fulla sakliga och formella förståelse ett arbete, som hos adepten kommer att garantera ett varaktigare innehav av insikt än det han vinner enligt den tidigare slentrianen.

Ekvationsbegreppet.

Det är en sak, vars beaktande kommer att skänka framställningen av de enkla räknesätten en alldeles särskild färgning. Jag inser icke det berättigade i den gamla trallen, som först genomarbetar de hela och brutna expressionerna för att sedan komma till *ekvationerna*. Jag har förresten bra litet sinne för denna isolering av ekvationen. Jag har intrycket, att detta sammanhänger med en särskild tankegång. Man har betraktat ekvationerna såsom den formella algebrans krona och ära. För att nå fram till dem har man kämpat och lidit. Man har trott, att hela den föregående utvecklingen haft ekvationerna till mål. Ty med ekvationerna inledes lösandet av problem och då får man först riktigt se, vad algebran duger till.

Nu är saken alls icke så. Om icke själva det teoretiska sysslandet med formlerna och det till grunden gående studiet av de enkla algebraiska transpositionerna kan uppbära algebran och skänka densamma ett sådant tankeinnehåll, att den försvarar sin plats på skolans program, så är det då sannerligen icke en sak, som kan upphjälpas av problemen. En uppfattning av algebran, som med sammanbitna tänder genomlider de formella räkneoperationerna för att vinna sin lön i problemen, är i grund på avvägar.

Överskattningen av ekvationerna och problemen har gått så långt, att man sett läroböcker, där man börjar kort och gott med ekvationer. Givetvis kan man göra så, det stöter icke ens på svårare undervisningshinder. Men när man gör så, så avslöjar man därmed sin fullständiga ovetskap om algebraundervisningens mål. Dess mål, så många gånger av mig här utvecklat, är icke att hasta fram till problemen. Det är som jag också nästan till leda sagt, att fatta och förstå formlernas och transformationernas språk, så att de bli uttrycksmedel för tankar och överläggningar i det kvantitativas värld.

Jag sade, att det är något som skall gå igen i framställningen av de formella räknesätten. Det är en tanke som förresten skall komma in långt tidigare, redan i den del, där det är fråga om de enkla lineära funktionernas värdemängder och diagram. Det är den förnuftiga *ekvationstanken*, som helt enkelt är frågan om det argumentvärde, för vilket ett algebraiskt uttryck antar ett visst givet värde. Det är den omvända frågan till den, som var den dominerande i algebrans propedeutik och i hela diagramritandet, där det alltid gällde att till ett givet argumentvärde beräkna det tillhörande funktionsvärdet.

Jag tror nu alls icke, att man på många håll inom skolan skall se på saken på detta sätt. Där går det så till, att man av icke uppgiven orsak likställer två algebraiska uttryck och kallar detta nya formella aggregat en ekvation. Dessa aggregat visa sig sedan vara identiteter eller villkorsekvationer. Och så lägges det hela till grund för formella transformationer. Jag tror, att detta formalpedagogiska grepp på saken icke kan leda till någon förståelse. Det, som man icke utvecklar, kan givetvis icke förstås.

Nu är ekvationstanken enkel. Man observerar, att förslagsvis $3x$ antar en hel värdemängd vid skiftande värden på x. Man kan då ställa två lika berättigade frågor. Vilket värde antar $3x$ för $x = 2$? och: För vilket värde på x antar $3x$ värdet -12? Denna senare pretention skriver man i formen

$$3x = -12.$$

och har, vad man kallar en *ekvation*. Dess *rot* är -4, vilket säger oss, att $3x$ för $x = -4$ antar värdet -12.

Den teknik, som här för utvinnande av roten kommer till användning är helt enkelt baserad på besinnande att multiplikationens motsatta räknesätt är divisionen. Följaktligen är, om $3x = -12$, en följd att

$$x = \frac{-12}{3} = -4.$$

Man kan nu fråga vidare, för vilket värde på x uttrycket $3x + 4$ antar värdet 16. Man inser genom saklig överläggning, att det sker för $x = 4$. Man kan emellertid också upplägga ett teknisk räknemaskineri, som ter sig på följande sätt

$$3x + 4 = 16$$
$$3x = 16 - 4$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Detta bör givetvis upptagas redan i samband med det diagrammatiska studiet av de lineära expressionerna. Där får saken ett tillskott av realitet, genom att man bland ordinatvärdena kan söka upp det föreskrivna värdet för uttrycket och sedan se efter, för vilket argumentvärde detta värde realiseras.

Detta är ekvationstanken i all sin enkelhet. Den bör följa med, emedan den är en grundtanke vid studiet av formlerna och deras värdemängder. Det skall också vara möjligt för den intresserade läraren att finna otvungen möjlighet att låta denna kapitala fråga dyka upp under framställningens gång. Han kan ställa transformationens och förenklingens konst till förfogande, just då det gäller att i något fall finna svaret på denna fråga. Så skall den frågan också vara ett medel att hjälpa till att hålla det sakliga levande under en period av matematisk utveckling, då undervisningen mer än på andra punkter hotar att gripas av det formellas kvävande grepp. Det helas ytterligare förenkling, sakliga moments förande i förgrunden och formellas tillbakaträngande kan hålla faran på avstånd. De göra på samma gång, dessa åtgärder, att algebran kan försvara sin plats på programmet såsom många gånger framhållits. Den formella träningen allena motsvarar icke den behovets princip, på vilken vi nödgats tänja en hel del redan för att försvara en rätt så anspråkslös algebraundervisning.

Divisionen har fört in *bråken* i algebran. Därvid mena vi med bråket eller den *brutna* expressionen en division, som icke kan reduceras genom de formella räknesätten. Vi egna dessa genast en grundlig behandling, sökande efter det nya de kunna erbjuda. Vi rita diagram över sådana brutna expressioner, naturligtvis i deras enklaste framträdande. Och så utveckla vi den för dem erforderliga räknekonsten. Också här vill jag driva det hela till en betydande förenkling. Det är ju dock aldrig meningen, att den med mellanskoleexamen utvandrande scholaris skall vara någon virtuos i formelkalkyl.

Nu behöver den, som vid universitetets naturvetenskapliga fakultet eller vid tekniska högskolan skall fortsätta sina studier, en högre driven algebraisk teknik, dock icke så högt driven som man måhända tror. Han behöver kunna räkna obehindrat, men det är inga konstiga uttryck han har att skaffa med. Tvärtom äro de enklare än dem han trasslat med i skolan, ett nog så originellt sakförhållande, som ofta brukar väcka studenternas uppmärksamhet. Emellertid behöver denne man, som siktar till den matematiskt betonade vidare utbildningen vid högskolorna, en hårdare träning. Men detta behöver ju icke påkalla, att alla skola behöva underkasta sig densamma, och allraminst då de, som skola emigrera från skolan. En sådan hårdare träning måste förläggas till gymnasiets reallinje, där den hör hemma och där den skall drivas skarpt. I mellanskoleexamens allmänna utbildnings plan och också inom de andra gymnasiallinjerna, där förberedelsen sker för andra arter av studier, är det givetvis icke försvarligt och ur behovets princip absolut förkastligt att lägga eleverna i träning inom algebraisk formelkonst. Det är däremot väl på sin plats och har redan fått sin motivering att skänka dem en måttlig färdighet, förenad med en grundlig vetskap om det helas syfte och mening.

I ett svar på en nyligen framställd rundfråga angående den naturvetenskapliga forskningens ställning i vårt land framhöll en forskare också såsom en försvagande omständighet matematikens ställning vid skolorna. Jag fruktar, att de åsikter, jag företräder här inom algebran, och det är ju närmast fråga om dess formelspråk inom naturvetenskaperna, skall uppfattas så, att jag ytterligare vill försvaga matematikens ställning. En sådan uppfattning är ett grundligt misstag. Naturvetenskapen är icke betjänt av, att folk som aldrig få med den att skaffa, tränas upp i algebraiska kalkyler. De skola lemnas i fred och i stället odla de insikter de komma att behöva. Det enda man kan begära av dem är det, som jag redan ovan förmulerade såsom det som vid mellanskoleexamen och på icke-reallinjer inom gymnasiet bör eftersträvas. Men jag vill ha en i matematiskt avseende fordrande reallinje, fordrande därför helt enkelt att den leder till sådana banor, där man måste kunna matematik. Jag tror förresten att den form för algebraundervisningen, som jag i det föregående på varje punkt förträtt och i det följande kommer att företräda, skall göra densamma betydligt mera effektiv på alla stadier, oberoende av de stoffliga inskränkningar av betydande omfång, som göras. Jag kastar barlast över bord för att få rum för nyttiga saker.

Ehuru jag mahända går ut över mitt ämnes gränser, vill jag i detta sammanhang säga ett allvarsord. Naturvetenskaperna i vår tid fordra en ansenlig kunskap i matematik. Det kan där icke komma ifråga, att studenten skulle reda sig med det han förvärvat under en aldrig så hård press på en till och med starkt matematiskt betonad reallinje i skolan. Det är därför universitetens sak att inom sina naturvetenskapliga fakulteter anordna propedeutiska matematikkurser, där matematik grundligt studeras både såsom teoretisk vetenskap och hand i hand med de naturvetenskapliga problemen. Båda dessa riktningar behövas för att på ett riktigt sätt sammansätta den allvarliga matematiska skolning, som är ett conditio sine qua non för den nutida naturvetenskapliga forskningen. Man får på denna punkt icke begära av skolan, vad den icke kan giva.

Ehuru jag härmed går ännu längre bort från mitt ämne, vill jag i någon mån fortsätta min exkurs. Det råder inom områdena för den tillämpade matematiken, alltså även inom naturvetenskaperna den uppfattningen, att den för dem avsedda matematiska skolningen bör vara uteslutande praktiskt orienterad och ansluta sig till denna tillämpnings speciella problem. Man finner i litteraturen läroböcker, utarbetade på denna bas. Emellertid är denna uppfattning icke riktig. På den vägen ernås på sin höjd det matematiska inslaget i den för receptionen avsedda kunskapsmassan. Men förberedelsen avser också, då det gäller naturvetenskaperna och de tekniska vetenskaperna att dana verktyg för intuitionen och skapandet, och därför erfordras en skolning i matematiskt tänkande och fritt, av de speciella problemen oavhängigt handhavande av matematikens apparatur. Jag vill visserligen icke gå så långt, som man gått inom tekniska högskolor i Tyskland, där matematiken undervisats och studerats ungefär i samma utsträckning och med samma frihet som vid universiteten, men jag vill resa betänkligheter mot ett fastlåsande av det matematiska vetandet vid en viss problemart och dess därav betingade ensidighet.

Nu skall ingen tro, att detta står i strid med den allmänna tendens, som genomgår mina idéer ifråga om den elementära undervisningen. Jag har ingalunda ens i aritmetiken avsett att binda undervisningen vid någon grupp av praktiska frågor. Min genom hela undervisningen gående, ledande tanke är, att man verkligen skall skrida till att *undervisa matematik under matematiktimmarna i skolan.*

Rotuttryck.

Jag återupptager emellertid min av denna exkurs avbrutna tankegång. Det har tillsvidare varit fråga om *rationella expressioner* d. v. s. sådana, vilka uppbyggas genom användande av qvattvor species. Emellertid finnas ju också sådana uttryck, i vilkas uppbyggande *rotutdragningen* deltar. Sålunda återger exempelvis formeln $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ sambandet mellan vägen och tiden vid en fallrörelse. Formeln $t = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ ger arean av en liksidig triangel, vars sida är *s*. Det gäller följaktligen att stifta bekantskap med sådana uttryck och sålunda närmast med den nya operation, *rotutdragningen*, som ingår i dessa allmänna algebraiska uttryck som konstitutivt element.

Vi komma här till ett område, där svåra försyndelser begåtts och begås i den dag som är mot allt, som eger sammanhang med behovets princip. Man sätter här in med en omfattande och onödig formell träning. Där finnas i exempelböckerna sådana, många tiotal exempel överskuggande rubriker som *radikalers addition och subtraktion*, *radikalers multiplikation*, *rotmärkens bortskaffande från nämnaren* m. m. Något som emellertid icke ens i läroböckerna bringas till medvetande är, varför allt detta försiggår. Det är som om det allt sker på grund av någonting i själva världsordningen. Man lär sig att göra det såsom man lär sig allt möjligt annat i skolan.

Emellertid är saken den, att det hela har en kärna av förnuft. Vetskapen om den är egnad att skänka det hela ett betydande intresse. Emellertid får denna kärna icke ens i detta fall kringbyggas med ett ceremoniel av onödiga »tillämpningar». Det hela är för enkelt för att bortskymmas av dylika användningar, som förresten aldrig förekomma ens under högskoleföreläsningar i ren matematik.

Vi skola gå in på detaljer. Vi ha exempelvis kommit i besittning av uttrycket $\sqrt{8}-\sqrt{2}$ och det förestår oss att *beräkna* detta uttryck. Då observera vi, att $\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 4}=2\sqrt{2}$ och att sålunda vårt uttryck kan väsentligt *förenklas*. Vi finna att $\sqrt{8}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$ och att sålunda det hela kan reduceras till beräkning av $\sqrt{2}$.

Det är nu kring denna kärna man byggt upp radikalers addition och subtraktion. Den efter en fyllig samling av exempel famlande exempelboksutgivaren skapar sedan på fri hand tillämpningar. Han ställer förslagsvis upp exemplet

$$3\sqrt{72}+6\sqrt{\frac{1}{2}}-3\sqrt{8}+5\sqrt{2}$$

eller

$$5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{-54}-6\sqrt[3]{-128}+7\sqrt[3]{-250}+2\sqrt[3]{432},$$

vilka sakna all kontakt med varje form av reell frågeställning och helt enkelt framträda såsom exempel ur ett friståendc nytt kapitel, som heter radikalers addition. Man finner också sådant, som

$$7\sqrt{4x}+4\sqrt{9x}+3\sqrt{45x}-5\sqrt{36x}-2\sqrt{80x}.$$

Vid alla dylika exempel har varje hågkomst av själva orsaken gått förlorad och ett stelt räkneschema är nu det enda, som står kvar. Detta är en i hög grad intressant utveckling, ty den har sin motsvarighet inom många områden av undervisningen. Den är ett slags hemmagjord, intern utveckling av stoffet, som börjar med ett riktigt och förnuftigt uppslag, som sedan i träningsivern glömmes bort, under det nya övningsexempel tornas upp. Själva grundtanken faller till den grad i glömska, att det hela småningom blir en egen räkneprovins med en om grundtanken icke på något sätt påminnande benämning.

Vi ha just inom radikalernas värld ett nästan ännu bättre exempel på denna utveckling. Jag antar, att vi ha att beräkna uttrycket $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Om vi då beräkna $\sqrt{2}$, med ett antal decimaler, så förestår oss därefter en arbetsdryg divisionsuppgift. Emellertid kunna vi, innan vi skrida till de numeriska beräkningarna, förlänga bråket $\frac{3}{\sqrt{2}}$ med $\sqrt{2}$, varigenom detta antar formen $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ eller $1.5\sqrt{2}$. Då är med ens svårigheten med divisionen avlägsnad, och vi ha att efter kalkyl av $\sqrt{2}$ multiplicera resultatet med 1.5, vilket ju är en enkel uppgift.

En liknande svårighet möter oss, om vi ha att beräkna $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Ty om vi beräkna $\sqrt{3}$ och $\sqrt{2}$ och addera dem, så stå vi ännu inför den tidsödande möjligheter till felräkning erbjudande uppgiften att dividera 1 med denna summa. Saken ställer sig enklare, om vi först förlänga vårt bråk med $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, varigenom detsamma antar, på grund av att $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$ formen $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Men detta är ju synnerligen enkelt att beräkna. Vi ha avlägsnat beräkningens svåra punkt.

Dessa inför bestämda kalkylationsuppgifter utfunna konstgrepp ha också de givit anledning till en särskild räknekonst, som kallas radikalers bortskaffande från nämnaren, en rubrik, under vilken tiotals exempel utan samband med den enkla och reella grundtanken genomräknas. Detta är i ännu högre grad än radikalers addition ett modellexempel på en i skolans matematikundervisning icke sällsynt, intern utvecklingsprocess.

Man får inför detta en inblick uti, varför algebrakursen blir lång och svår i skolan. Man är förvånad över den sällsamma makt, som gör att allt detta får stå kvar, alldeles som om allt vore i ordning. Det finnes en fast och orubblig inre skoltradition, som icke undgått uppmärksamhet och vars orsak kanske kan vara nog så enkel. Den unge studenten, som skall bli lärare, lemnar under läroåren alla dessa saker ur hågen, emedan de ju icke äro matematik i den mening, att de skulle visa sig under hans studier i den högre matematiken. Så kommer han i sinom tid tillbaka till skolan och lägger då den högre matematiken på hyllan och tar vid, där han en gång slutade i skolmatematiken. Träffande har detta kallats *das System des doppelten Vergessens* och det är nog det, som är ett av den fasta skoltraditionens bästa stöd. Det består en hiatus mellan universitets-matematik och skolmatematik, som gör att den senare icke underligt nog betraktas av den i universitetsmatematik skolade med den riktiga kritiken. Han låter det ena vara ett och det andra ett annat, utan att reflektera över det helas enhet.

För att emellertid återkomma till läran om radikaler, så skola naturligtvis alla dylika förkonstlade utvecklingar av de enkla grundtankarna, som jag ovan påvisat, helt enkelt avlägsnas från kursen. Därvid få också allehanda invecklade rötter ur rötter och dylikt följa med.

Det, som återstår, är då ungefär följande. Man definierar först kvadratroten och gör då genast en ny sällsam iakttagelse. Man finner, att exempelvis $\sqrt{2}$ icke återfinnes bland hela talen och bråken. Att intet helt tals kvadrat är 2 är ju evident. Men man inser också på detta stadium redan, att icke heller något förkortat bråk kan inneha denna egenskap. Man har genom den första kontakten med rotutdragningen gjort en anmärkningsvärd upptäckt. Man har stött på *irrationaltalen*.

Detta bör emellertid icke verka avskräckande. Sådant har man sett förut, då divisionen förde oss inför uppgifter, som icke kunde lösas i de hela talens rike, medan subtraktionen kan anses ha fört oss till de negativa talen, om vi också, då vi införde dem, använde en annan taktik. Emellertid bör vår uppgift icke heller leda till något vidare teoretiserande över dessa tal, vilkas teoris fullständiga utbyggande erfordrar ett mått av tankeskärpa och vetenskaplig betraktelse, som på detta stadium långt ifrån nåtts.

Vi observera om detta nya sällsamma tal, att det ligger, populärt talat, mellan 1 och 2. Vi besluta oss för att instänga detsamma inom snävare gränser. Vi upphöja fördenskull talen

1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0

till kvadrat och få efterhand

1.00, 1,21, 1.44, 1.69, 1.96, 2.25, 2.56. 2.89, 3.24, 3.61, 4,00.

Vi observera, att 2 ligger emellan 1.4^2 och 1.5^2, vilket ger oss anledning att sluta, att det tal, vi kallat $\sqrt{2}$ ligger mellan 1.4 och 1.5.

Vi betrakta nu åter för skarpare fixering talen

1.40, 1.41, 1,42, 1.43, 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49, 1.50.

Då av den förra räkningen att döma $\sqrt{2}$ ligger närmare 1.4 än 1.5, så är det skäl att sätta in kalkylen på början av denna rad. Vi finna också snart, att

$$1.41^2 = 1.9881$$
$$1.42^2 = 2.0164$$

vilket resultat tillåter att sluta att $\sqrt{2}$ ligger emelllan 1.42 och 1.41.

Nu kommer helt visst någon att skaka på huvudet och säga, att detta är universitetsmatematik. Jag vill i motsats därtill göra gällande, att detta är renaste skolmatematik. Man prövar sig nära nog experimentvis fram och får på detta sätt en klar genom erfarenheten befäst uppfattning om, vad det är fråga om. Det är ett typiskt tillvägagångssätt i den undervisning jag företräder.

Man kan naturligtvis gå längre och utlocka nya undre och övre närmevärden för $\sqrt{2}$. Att det här handlar om en instängning inom allt trängre gränser är ju klart, ty de första gränsernas skillnad var 0.1, i andra omgången var gränsernas skillnad 0.01 o. s. v.

Det är dessutom väl att märka, att vårt förfaringssätt utgör den naturligaste och lättfattligaste *metoden* för kvadratrotsutdrag. Det inses genast, att samma metod kan användas för vilken rot som helst och att vi sålunda ha ett verktyg i vår hand att utdraga vilken rot ur vilket tal som helst med huru många decimaler som helst. Månne eleverna i den tidigare undervisningen fått någon föreställning om, att sådant är tänkbart utan logaritmer. Jag talar härvid alls icke om, att metoden är arbetsdryg. Vid fällande av ett sådant omdöme spela andra faktorer in, som intet ha att skaffa med metodens teoretiska bärkraft.

Vi ha sålunda stött på ett tal, som är varken ett helt tal eller ett bråk. Men vi kunna inbädda detta tal mellan närmevärden, som rycka detsamma allt närmare och som sålunda i den praktiska usus kunna företräda detta hemlighetsfulla, med siffror icke återgivbara tal. Detta är för oss på detta stadium nog.

Denna fråga ger oss anledning att syssla med kvadrattalen, d. v. s. de hela tal, vilka äro jämna kvadrater av de hela talen. Ur dem kan man utdraga kvadraten, medan man ifråga om de mellan dem liggande hela talen icke kan nå annat än närmevärden.

Då nu den metod vi utvecklat ändock blir för arbetsdryg för att lösa kvadratrotsutdragningens problem, måste en snabbare arbetande metod utvecklas.

Kvadratrotsutdragningen är eljes ingen konstlad fråga. Ty problemet att bestämma sidan i en kvadrat, då arean är bekant, leder till detta problem. Detta kan förresten just vara den utgångspunkt, från vilken det hela startas.

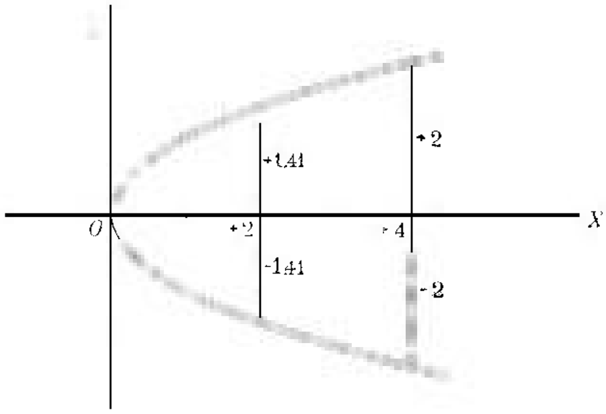
Jag har den föreställningen att åtminstone ibland undervisningen sträcker vapen inför rotutdragningsuppgiften och helt enkelt inlär det tekniska förfaringssättet. Detta är naturligtvis också en användbar metod, blott man ärligt deklarerar, att man ärnar göra så. I varje fall är denna metod att föredraga framför en framställning, som ingen förstår.

Att utveckla den fullständiga metoden för kvadratrotsutdragning är en svår sak. Men den måste läras, ty denna färdighet faller dock inom behovets princip, om man också givetvis ur rottabeller får ur, vad man i den vägen behöver.

Sedan möjligheten att beräkna kvadratroten utvecklats och en god metod för dess utförande klarlagts, har man ett fastare grepp på hela det nya området. Man gör då också den iakttagelsen, att $\sqrt{4}$ har två värden, av vilka man icke kan giva företrädet åt någotdera, nämligen värdena $+2$ och -2. Åter har en ny egendomlighet trätt in i räknekonsten.

Sedan man hunnit så långt är det skäl att indraga uttryck som innehålla rötter, närmast kvadratrötter, i betraktelsen och kalkylera dylika algebraiska uttrycks funktionsvärden.

Den närmast till hands liggande funktionen är den, som skildrar t. ex. huru sidan i en kvadrat förändras med arean. Om vi utrita dess diagram, få vi närstående figur, en *parabel*, som bl. a. bringar till uttryck, att funktionen för varje ifrågakommande värde på argumentet, utom för argumentvärdet 0, har två motsatta värden. Vi observera



därjämte en ny och sällsam egenskap. Vår funktion $\sqrt{x}$ existerar alls icke för negativa värden på x. Vårt talområde har nämligen ingen lösning för problemet att finna ett tal, vars kvadrat är negativ.

Det är just då det gäller att beräkna uttryck för irrationella värden på argumentet eller med andra ord att beräkna uttryck, som innehålla rötter, som de utvecklingar träda in, vilka jag tidigare framhöll såsom kärnan uti det formella ceremoniel, som nu utvecklas kring radikalerna. Här röstar jag för ett fullständigt slopande av alla dessa »räknesätt» och deras ersättande med några enkla exempel, där det är fråga om förenklingar av några enkla uttryck och deras faktiska kalkylation. Detta allt med kvadratroten såsom enda radikal. På detta sätt håller man sig inom de rätt snäva gränser, som behovets princip på denna punkt i algebran utstakar, till och med då denna princip ses från den matematiska vetenskapens ståndpunkt.

Jag har hittills hållit mig till kvadratroten. Det är nu en fråga, om man alls skall gå längre. Emellertid ligger här generaliseringen alldeles vid dörren. $\sqrt{a}$ är numera lätt fattat. Kurvan för $\sqrt[3]{x}$ kan befästa uppfattningen. Detta gör, att steget kan tas, men det behöver icke tas så långt, att man igen utvecklar ett betydande räknearbete med sådana rötter som underlag, såsom nu till rakt ingen nytta sker i exempelböckerna.

Ett viktigt begrepp måste emellertid i detta sammanhang bringas till klarhet. Man har tidigare genom trenne särskilda definitioner fastslagit betydelsen av a^3, a^0 och a^{-3} och gjort detta på ett sådant sätt, att talräckan a^n då n genomlöper de negativa och positiva hela talen, inclusive talet 0, företer en enhetlig och lagbunden svit. Vi äro numera mogna att fastslå, vad vi erna förstå med exempelvis $a^{\frac{3}{4}}$ och $a^{-\frac{3}{4}}$. Vi observera, att om vi postulera, att dessa symboler skola defineras så, att icke för de tidigare formationerna gällande lagar skola lederas,

$$(a^{\frac{3}{4}})^4 = a^3$$

och draga sålunda slutsatsen, att ett vilkor för att ett sådant lederande skall undvikas är, att vi tilldela $a^{\frac{3}{4}}$ betydelsen $\sqrt[4]{a^3}$. Givetvis fastslå vi sedan, att $a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ för att stå i samklang med tidigare definitioner.

Det är nu intressant att se, huru talen 2^x, där x är ett bråk, ansluta sig till den redan uppritade räckan av dessa tal för heltaliga värden på exponenten. Räkningen ställer sig alls icke arbetsdryg, om vi inskränka x till multipler av $\frac{1}{2}$. Vi få förslagsvis för

$$x = \tfrac{3}{2},\ 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} = 2.82 \text{ och för}$$

$$x = -\frac{3}{2},\ 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.35 \text{ o. s. v.}$$

Man skall finna i diagrammet en genomgående vacker anslutning, som visar, att vi vid vårt uppbyggande av 2^x äro inne på en riktig väg.

Geometriskt ställer sig saken synnerligen elegant. Ty

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^1 \cdot 2^2}$$

och ordinatan för $x = \frac{3}{2}$ är sålunda medelproportionalen till ordinatorna i punkterna $x = 1$ och $x = 2$, i vars mittpunkt $x = \frac{3}{2}$ ligger. Detta är i övrigt en allmän egenskap hos exponentialfunktionen ty

$$a^{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_2}}$$

Sålunda kan exponentialkurvan uppbyggas geometriskt genom successiv konstruktion av medelproportionalen till redan förefintliga ordinator, vilken medelproportional sedan utplanteras såsom ordinata i mittpunkten till de två abskissvärden, i vilka de båda nämnda ordinatvärdena föreligga. Det är under sådana förhållanden icke att undra över att det hela blir en vacker och fulländad kurva.

Det skulle ju ännu återstå att förklara $a^{\sqrt{2}}$ eller för att fixera ideerna $2^{\sqrt{2}}$. Man konstaterar då, att 2^{1}, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$ o. s. v., vilka äro ordinator i punkterna 1, 1.4, 1.41 o. s. v. alla äro genom de föregående definitionerna klarlagda. Dessutom stiga de. Däremot sjunka 2^{2}, $2^{1.5}$, $2^{1.42}$ o. s. v. och vi bevittna här en liknande instängningsprocess, som då vi gingo lös på $\sqrt{2}$. Det som här instänges är en kurvordinata, som vi belägga med tecknet $2^{\sqrt{2}}$.

Naturligtvis är nu detta icke logiskt alldeles i ordning, men ger intuitiv tillfredsställelse. Jag vill också uttryckligen ha sagt, att jag icke vill, att man här skall gå längre och i ovist nit försöka utbygga dessa saker till någon vidlyftig teori. Man har ju också i läroböcker sett en och annan ansats till omplantering på skolmatematikens experimentalfält av illa fattade teorier om irrationaltalen, men de ha varit dömda att förtvina. Man kan här och där stanna i undervisningen och visa ut mot vidderna, men därifrån är det långt till ett grundligt genomströvande av allt, som öppnar sig för intuitionens öga. Irrationaltalen få nog i sin fulländade utgestaltning stanna utom skolkursen. Det är sedan en annan sak, om deras begrepp på åskådningens och varför icke aningens väg komma till ett visst djup i den unges själ.

Detta är ungefär allt vad jag i kapitlet om radikaler vill lemna kvar. Jag anser detta kapitel ha varit en alldeles särskild skådeplats för allehanda rent tekniska manipulationer, vilka dessutom haft emot sig, att de icke äro av någon betydelse för matematikens användningar och icke ens för matematikens egen tekniks fulländning. Jag vill ha det hela ersatt med en enkel redogörelse för rotbegreppet, särskilt kvadratroten, men en redogörelse, som gör begreppet levande och icke låter detsamma bli blott en räknesymbol bland många andra. Jag går så långt, att jag på detta ställe utesluter kvadratroten ur polynom. Jag kan icke uppge någon användning därför. Naturligtvis kan man konstruera ihop ekvationer av andra graden, för vilkas lösning färdigheten att utdraga kvadratroten ur ett polynom är erforderlig. Men dylika ekvationer äro gjorda endast för den sakens skull och det betyder sålunda ingenting att hänvisa till dem. I min undervisning på högskolorna torde jag knappast någonsin haft anledning att verkställa denna operation. Den blir förresten för eleverna ett nytt formellt schema att komma ihåg, ett schema, som icke kan genom en logisk tankeakt återställas, om det fallit i glömska. Det är förresten en synnerligen svår sak att fullt förstå och dess genomarbetande innebär en onödig förbrukning av kraft.

Härmed är nu hela den utveckling avslutad, som har avseende på de transformationer, de algebraiska uttrycken giva anledning till. Man skall måhända säga att min framställning härutinnan icke uppburits av allmänna, klart formulerade principer i olikhet med vad som på sin tid var fallet med utvecklingen av aritmetikens arbetsprogram. Den allmänna strävan till förenkling kommer måhända icke att fattas såsom en dylik objektiv princip.

I verkligheten ligger saken annorlunda och till den grad annorlunda, att den algebra, som enligt ovanstående grundsatser undervisas, leder till en annan art av vetande än den tidigare lärda algebran. Det formella, som tidigare varit det enda, sjunker nu tillbaka till ett redskap, med vars tillhjälp reala förhållanden, reala inom denna värld, undersökas och dryftas. Vi ha ju en gång för alla fastslagit, att algebran handlar om teoretiska undersökningar av de algebraiska uttrycken såsom det funktionala beroendets adekvata uttryck. Det reala är mot denna bakgrund en verklig undersökning av dessa algebraiska uttryck och icke utbildandet av en formell räknemekanism.

Att jag särskilt starkt drivit på förenkling har två orsaker. Dels är en sådan förenkling påkallad av den allmänna princip om undervisningens jämvikt, principen om suum cuique, som bjuder att till och med där en starkare specialisering kunde vara nödvändig, iakttaga den moderation, som påkallas av att eleverna också ha annat att inhemta i skolan. Men det ligger bakom anspråken på förenkling en annan, i matematiken själv liggande grund. Matematiken är icke alls så svår, man har blott gjort den svår. En mängd, ja den största delen av de komplicerade kalkylerna äro till sitt väsen helt artificiella. Jag kan vitsorda, att de icke förekomma uti matematikens användningar i olika riktningar. Men jag kan också vitsorda, att de icke förekomma inom högskolematematiken, som därför ofta ter sig överraskande lätt för dem, som påbegynna dess studium, åtminstone vad anspråken på behärskning av överväldigande analytiska uttryck vidkommer. De svårigheter, högskolematematiken bereder, ha sin grund i andra saker, nämligen just i avsaknaden av kännedom om och förmåga att följa med de aritmetiska händelser, som avteckna sig i formlernas språk. Man kan väl dock icke i det sunda förnuftets namn av skolbarnen begära sådan algebra, som icke kommer till användning vare sig inom praktiken eller inom matematiken själv. Det är att överskrida gränserna för den behovets princip, som redan måste ha ett försvar, då det över huvud gäller algebrans ställning på skolprogrammet. Min ständigt återkommande maning till förenkling är sålunda att fatta såsom ett anspråk på den avgränsning av undervisningen, som här i algebran är det sannaste uttrycket för behovets princip. Denna *förenkling* är sålunda icke någon tillfällig nyck utan *en på djupet gående princip*.

Jag anser, att utvecklingen nu nått en bestämd, avrundad avslutning, ett slags första etapp. Jag torde vara temligen ensam om en dylik uppfattning. Ty det hävdvunna är ju såsom jag redan tidigare framhöll, att allt det som hittills genomgåtts är en förskola till det, som nu skall komma, nämligen ekvationslära och problem. Jag frågar mig ännu en gång inför en dylik uppfattning, om man verkligen genomtänkt algebraundervisningens problem på allvar och gjort klart för sig, vad man med denna undervisning egentligen eftersträvar. Jag har grundade skäl att antaga, att så icke är fallet. Såsom jag tidigare framhållit är det här fråga om ett arv, vars mening man icke underkastat någon kritik, utan som släktled efter släktled för med sig. Jag vill icke verka tröttande genom att åter upprepa algebrans enkla uppdrag att göra oss förtrogna med de algebraiska uttryckens konstitutiva byggnad och en del därmed sammanhängande transformationer. Nu är detta avslutat och en linje i utvecklingen är sålunda förd till slut. Har man därunder därjämte oavbrutet beaktat ekvationstanken, sådan jag på sid. 128 formulerade den, så ha alla mål nåtts, som tillsvidare kunna nås och det kapitala problem för algebran, som vi uppställde, har bragts till en första avslutning. Mera algebra behöver till exempel icke ges den över mellanskoleexamen utvandrande skoleleven, men icke heller just mindre. Han kan, vad han behöver kunna för att fortsätta i de tekniska läroverken, de till mellanskolan anslutna läroverk, där anspråken på matematiskt vetande givetvis äro högst, och han kan så mycket, att han på andra banor kan förskaffa sig de specialinsikter han där kan behöva. Han har lärt sig tala, läsa och skriva formlernas språk och kan sålunda, när detta språk i hans fackböcker eventuellt träder emot honom med en formel och ett diagram, förstå saken. Han eger också den inblick i tekniken, att han kan följa de olika stegen i formelns härledning eller diagrammets, kurvans, uppbyggande. Han kan också besvara förnuftiga till ekvationstanken hänförbara frågor och sålunda säga, när en enkel funktion antar ett givet värde eller när två enkla funktioners värden koincidera. Men detta innehav av insikter och förmåga betecknar ett bestämt avsnitt i utbildningen. Det är icke fråga om någon uppåt oavslutad förberedelseperiod. Det är ett slags propedeutisk algebrakurs, som fått sin fulla avslutning.

Ekvationer av första graden med en obekant.

Nu brukar utvecklingen, sedan alla kanonerna laddats, gå till ekvationsläran. Här mötas eleverna förresten av en angenäm överraskning. Algebran blir med ens lättare. Det visar sig nämligen, att de tidigare krångliga algebraiska uttrycken, vilka voro substraten för övningarna i qvattvor species, icke längre uppträda. De återkomma förresten icke vidare alls uti algebraundervisningen. Det är förvånande, att man icke redan inför detta sakförhållande ställt sig skeptisk till deras behövlighet. Denna företeelse är i övrigt icke sällsynt i matematikundervisningen och sammanhänger givetvis djupt med den hemmagjorda, interna utveckling, som jag hade skäl att dröja vid i min framställning av rotexpressioner. Man möter densamma flerstädes inom aritmetiken. Den bristande enhetliga överblicken isolerar de skilda övningsfälten från varandra. Varje särskilt övningsfält blir i sin isolering efterhand föremål för en autonom utveckling. Det får sina särskilda, för den matematiska världen i övrigt och för världen i övrigt främmande »viktiga» frågor, vilkas viktighet är av den art, att den fördunstar såsnart blicken går ut över det autonoma gebitets gränser. I alla fall tornas upp kring dylika »viktiga» frågor ett betydande uppbåd av övningar. Exempel konstrueras för att belysa dem och det hela växer ut. När detta skede sedan omsider lemnats, återkomma dessa räknefrågor aldrig mera. Man behöver bara studera exempelböckernas exempel i sammansatt reguladetri och de borgerliga räknesätten för att finna talrika belägg för denna av mig ovan skildrade utveckling. Man skall också finna densamma inom de olika »typerna» av algebraiska problem.

Eleverna finna sålunda vid inträdet i ekvationsläran, att algebran blir lättare. Denna lättnad har emellertid väl att märka avseende på kalkylernas förenkling.

Nu bör enligt mitt förmenande, såsom jag redan utförligt utvecklat, begreppet ekvation grundläggas genast från början och icke förläggas till en särskild »ekvationslära». Alla dessas »läror» äro förresten ett offer åt en systematisering, som icke är något uttryck för någon förfinad undervisningskonst. Frågan om när, för att ansluta till min tidigare framställning, uttrycket $3x + 4$ antar värdet 16, är en enkel fråga för den med variabilitet, funktion och diagram förtrogne. Han tar ut ur diagrammet för $3x + 4$ det abskissvärde, för vilket ordinatan är 16. Därigenom får han en levande insikt, om vad lösandet av ekvationen $3x + 4 = 16$ innebär. Denna tungrodda, men alltid användbara metod ersättes sedan med det snabbt arbetande räkneförfarande, som på sid. 129 närmare utvecklades.

Likaså är uppgiften att söka det värde på x, för vilket $3x + 4$ överensstämmer med $x + 8$ en geometriskt lätt formulerbar uppgift. Det gäller att finna snittpunkten mellan diagrammen för $3x + 4$ och $x + 8$. Uppgiften kan sålunda lösas och därmed också alla sådana uppgifter. Också här ersättes ett sådant tidsödande förfarande med en särskild teknik. Vi få efterhand $3x + 4 = x + 8$, $3x - x = 8 - 4$, $2x - 4$, $x = 2$.

Man kan något komplicera uppgiften. Man frågar, när

$$\frac{3x+1}{6} = \frac{2x+3}{8}$$

Här har man givetvis det osvikliga diagramförfarandet att tillgå. Tekniskt ställer sig saken så, att vi genom förlängning göra bråken liknämniga och sluta att täljarna måste vara lika. Vi få

$$
\begin{aligned}
4(3x+1) &= 3(2x+3)\\
12x+4 &= 6x+9\\
12x-6x &= 9-4\\
6x &= 5\\
x &= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Hela ekvationstekniken är härmed klar, varjämte dess sakliga innebörd kommit i främsta rummet.

På denna och egentligen endast på denna väg kan förresten det gåtfulla förhållandet med *identiska* och *omöjliga* ekvationer föras till full uppfattning. Uttrycken $3x+6$ och $3(x+2)$ ha samma diagram och överensstämma sålunda för alla värden på argumentet, medan $3x+6$ och $3x+7$ ha parallella diagram, varför frågan om diagrammens snittpunkt icke är möjlig.

Jag vill eljes här inskjuta en sak, som synes mig vara av hög pedagogisk betydelse och som jag icke tidigare bragt till ett pregnant uttryck. Det har svårligen kunnat under utvecklingens gång bli obeaktat, att jag vid framläggandet av arbetsmetoder också här i algebran följer samma taktik som i aritmetiken. Jag ansluter till operationens primära grundfixering och ger på basen av den en av dess elementer uppbyggd första primitiv metod för denna operations utförande. Jag framdrar $\sqrt{2}$, där jag icke genast framlägger den fulländade metoden, i vars tankelabyrint själva begreppets enkla innehåll måste gå förlorat. Jag utvecklar i stället den metod, som framlades på sid. 137 och som icke på en enda punkt lemnar själva problemets grundtanke ur sikte. Därmed är då ådagalagt att problemet kan lösas och en metod, en alltid användbar metod, är angiven. Metoden kan vara tekniskt dålig och är det i regel, varför det blir det fortsatta framåtskridandets sak att utbilda tekniken. Det ligger i detta något av själva den historiska utvecklingens tanke. Idén framträder först renodlad med en arm teknik till sitt förfogande. Det följer sedan på dess framträdande en epok av teknisk fulländning av den den första idén återspeglande metoden.

Samma tankegång möta vi nu också här vid ekvationernas lösning. Vi lösa med diagrammet alla ekvationer. Men den metoden är tung och arbetsdryg och bättre vapen måste fördenskull smidas. Här måste dock sägas, att den historiska utvecklingen på denna punkt nog gått i omvänd ordning, vilket icke hindrar oss, att här dock använda samma allmänna tankegång. Vi göra det nämligen icke i varje fall av trohet mot den historiska verkligheten, utan omskapa dess gång till en pedagogisk metod, som vi givetvis använda också i sådana specialfall, då dess gång varit en annan.

Jag har eljes tidigare dröjt vid sambandet mellan den historiska verkligheten och skolan. Man kan ur det historiska skeendets gång hemta många lärdomar för skolan. Den kulturella utvecklingen har på sitt sätt varit en skola, en skola utan lärare, där eleverna efter hand lösgjort sig från föreställningar och begrepp och utformat och bearbetat nyupptäckta idéer. Där finnes i denna på sitt sätt ideala, gigantiska skola mången utvecklingsprocess, som har värde för den lilla skolan, där varje ny generation, som ett nytt människosläkte, genomvandrar hela mänsklighetens vandring ånyo, visserligen i raskt tempo för att nå upp den nu föreliggande standarden hos utvecklingen. Jag har utvecklat detta tidigare i denna framställning, men jag tror mig icke ha gjort det med samma pregnans. Det borde dock vara en all undervisning dominerande tanke. I varje fall är det en fascinerande tanke.

Nu kan till detta måhända sägas, att det låter plausibelt, men icke dess mindre är på tok. Man lär ju icke heller soldaterna först att skjuta med armborst, utan sätter genast hypermoderna gevär i deras hand. Detta eger sin riktighet och är i sin ordning då det gäller att uppdriva teknisk färdighet. Men det är väl dock andra mål, skolan har. Kultur är annat än teknik. Begreppens, också de matematiska begreppens, fulla fattande, deras historia och vandring i tiden höra kulturen till. De tekniska färdigheterna, också de matematiska ligga på ett annat plan.

Jag återvänder till ekvationerna. Deras behandling har i stort gått efter följande schema. Man likställer två algebraiska uttryck. Varför detta sker, göres icke till föremål för någon förklaring och det blir liksom ekvationens hela idé givetvis inhöljt i dunkel. När man emellertid så gör, så pålägger man som det heter någon eller vissa bokstäver ett visst villkor. Uppfylles detta av ett eller flera värden på dessa s. k. obekanta, har man fått genom de algebraiska uttryckens likställande en *villkorlig* ekvation. Emellertid kan det utfalla så illa, att intet värde på de obekanta satisfierar ekvationen, i vilket fall en *omöjlig* ekvation föreligger eller också kan experimentet utfalla så över alla gränser väl, att ekvationen satisfieras av alla värden på den eller de obekanta. Den är då en *identitet*.

Vad förstår ett skolbarn av allt detta? Enligt mitt förmenande ingenting. Själva grunden till all uppfattning saknas. Varför sätter man likhetstecken mellan två vilt-främmande uttryck? Eleverna ha ju genom åratal lärt sig att ha helgd för detta likhetstecken, som ju uttrycker att resultatet av en kalkyl är fixerat. Och nu med ens detta. Här firar den på det formella inriktade undervisningen en triumf.

Emellertid är plågan kort. Ingen fordrar egentligen, att eleverna skola förstå saken, blott de kunna eftersäga definitionen och känna de nya benämningar, som dyka upp med ens såsom den nya »lärans» skiffer. Sedan går det hastigt som det brukar gå överallt. Man börjar med övningar. Man börjar lösa ekvationer. I regel kommer man till $x = a$ och då är detta roten, ibland kommer man till $a = b$ och då skriver man, att ekvationen är omöjlig, eller också kommer man till $a = a$, vilket man avfärdar med att skriva, att den givna ekvationen är en identitet. Ett helt nytt exempelräkningsschema ligger klart. Och där räknar man sedan några månader igen. Eleverna ha emellertid ingenting ont att säga om saken, ty som jag redan sade äro kalkylerna icke så konstiga här, som då de gällde exempelvis bråkläran och radikaler.

Naturligtvis måste detta ändras. Ekvationerna få icke inträda genom ett formellt påbud, utan måste efterhand införas på det naturliga sätt jag tidigare utvecklat. Deras naturliga uppdelning i villkorliga ekvationer, identiteter och omöjliga ekvationer måste berövas sin mystik och bli annat än ett formellt konstaterande av, att ett dunkelt faktum uppträtt i de regelrätta kalkylerna. Och så bör man igen icke lösa så ofantligt mycket ekvationer, utan snarare genomdiskutera i grund ett fåtal, men då göra det så, att varje skrymsle genomforskas. Låt oss säga, att man ordnar saken så, att sedan man under den tidigare utvecklingen efter hand grundlagt detta ekvationsbegrepp och stiftat bekantskap med dess språk, man i sammanfattning löser några uppgifter, därmed koncentrerande den på spridda punkter inlärda tekniken.

Jag har anledning att på denna punkt i utvecklingen ingå på en sak, som icke är utan sin betydelse, då det gäller omställningar inom matematikkursen. Man hör ofta vid samtal med lärare den uppfattningen framhävas, att eleverna äro »intresserade» av det ena eller det andra, som man vill avlägsna. Sålunda äro eleverna intresserade av reguladetri. De äro också intresserade av ekvationslösning och så äro de intresserade av algebraiska problem; detta sista gäller särskilt de goda eleverna i matematik.

Jag tror på allt detta, men tillmäter det ingen betydelse. En fascinerande lärare skall säkert kunna intressera eleverna för snart sagt vad som helst, men därav följer alls icke, att detsamma bör läras på skolan. I övrigt är detta intresse komponerat av en hel del alldeles oväsentliga detaljer. Det kan vara »roligt» att arbeta med reguladetriens från all tankeansträngning befriande schema, där uppgifterna dessutom ofta äro så valda, att förkortningarna gå flott undan och ett enkelt facitsvar utfaller. Likaså kan det vara roligt att klappa på med ekvationslösandets schema. Särskilt skall man i dessa fall kunna märka en växande rörlighet hos de svaga elementen. Ifråga om de algebraiska problemen ligger dock saken annorlunda. De inbjuda till en ofta skarpsinne krävande lek, men man bör alls icke förvåna sig över, att goda elever med något av tävlans spänning tävla i att finna deras lösning. Man skall observera detsamma ifråga om geometriska övningsteorem och konstruktionsuppgifter. Emellertid rör sig också i dessa sista fall hela detta intresse på ytan och har ingenting att skaffa med det mot djupet gående intresse för det matematiska tänkandets både syntetiska och analyserande kraft, som det bör vara undervisningens mål att bibringa eleverna. Ett hänvisande till elevernas flyktiga intresse för en eller annan detalj i den formella undervisningens placeringsteknik saknar varje betydelse, då det gäller att bedöma denna detaljs berättigande. Det är förresten betecknande, att man icke hör talas om detta intresse, då det gäller att bygga upp begreppen och räknesätten. Där bör en riktigt ledd undervisning vara skickad att koncentrera ett starkare och varaktigare intresse.

Problem. Jag vill ännu om ekvationslösandet framhålla, att detsamma också har ett kapitel, där man löser ekvationer, som innehålla radikaler. Detta har naturligtvis tillkommit för att också göra heder åt dessa i det föregående inlärda begrepp. Givetvis bör hela denna avdelning avlägsnas, såsom ett uteslutande formellt och i skolan onyttigt, av någotslags fullständighetsskäl tillkommet annex till ekvationslösandet. Där tillkommer dessutom ett trassel med roten, vars djupare orsaker eleverna icke förstå.

Sedan ekvationslösandet haft sin tid, övergår undervisningen till *problemlösandet*. Detta anses förresten så betydelsefullt, att varje gång en ny klass av ekvationer förts fram, man genast efter deras exempelkomplex stöter på rubriken *problem*.

Jag har vid olika tillfällen uttalat mig om dessa algebraiska problem. Jag har aldrig förstått meningen med deras förekomst i algebraundervisningen. Jag känner givetvis mycket väl deras tillkomsthistoria. Men jag förstår icke varför man allt fortfarande låter dem stå kvar. Algebra lär man sig icke genom att lösa dem. Någonting annat lär man sig icke heller. Det »skarpsinne» de uppöva är endast förmåga att lösa sådana problem, alltså ett onödigt skarpsinne, om det nu alls skall beläggas med detta namn. Att man småningom börjat ana oråd och dra öronen åt sig framgår av, att jag i en exempelbok, som givetvis innehöll problem, dock återfann en del av dem under den försonande rubriken *talgåtor*. Frågan är nu sedan, om eleverna skola använda dyrbar tid på »talgåtor» och om icke denna öppenhjärtiga rubrik borde ha manat till att taga steget ut och låta åtminstone dessa särskilt märkta problem utgå.

Här bedrives nu emellertid ännu i den stund som är en betydande pedagogisk verksamhet. Problemen uppdelas på kategorier: rörelseproblem, klockproblem, spelproblem o. s. v. och med dem sysslar man under de för matematik anslagna timmarna i åratal. Undra sedan på, att matematiken behöver mycket timmar och mycken villkorsläsning.

Jag tror, att det är mest dessa algebraiska problem, som gjort skolmatematiken så i grund impopulär som den är. Den samhällets och kulturens funktioner överblickande familjefadern finner sin växande son i färd med att förbereda sig för livet genom att taga reda på, när tim- och minutvisaren på en klocka bilda 30°:s vinkel med varandra. Årligen sker sedan en allmän uppvisning av det hela, då studentexamensuppgifternas algebraiska problem, lyckligtvis allt sparsammare med åren, utgöra ett sällsamt inslag i tidningarnas redogörelser för livets gång. Tidigare i vår studentexamens historia funnos de i ymnighet, och mången i alla stycken kunnig och mogen ungdom har fallit på, att han icke kunnat ur allehanda uppgifter om en familj rekonstruera familjemedlemmarnas antal, eller förmått utreda, huru många gånger en hare skuttar, medan en vinthund hoppar fem steg.

Jag sade redan om dessa problem, att de icke äro matematik. De äro icke heller något annat. Utom skolans väggar löser ingen människa något problem. På högskolorna faller det oss icke in att lösa ett enda sådant problem. Det är endast matematiklärarne och deras elever, som lösa algebraiska problem.

Att här behovets princip läderas på ett sätt som på ingen annan punkt av matematikundervisningen är sålunda uppenbart. *Dessa problem måste avlägsnas ur kursen.*

Då jag uttalar detta, sker detsamma dock med en viss reservation. Den större rörlighet, som betingas av förmågan att lösa ekvationer, gör det möjligt att återupptaga vissa frågor ur aritmetiken och visa, huru desamma nu kunna få en förenklad behandling. Sålunda kunna ur formeln $r = \frac{kpt}{100}$ omedelbart utläsas formler för k, p och t för att nämna ett exempel och hela den mödosamma tankegång överbyggas, som i aritmetiken måste komma till användning, då det gällde de visserligen sällan i praktiken förekommande beräkningarna av kapitalet, procenten och tiden. Vidare höra hit frågor från fysiken och framförallt frågor från matematiken själv. Därtill komma en del gamla problem, som kunna medtagas så att säga av kulturhistoriska skäl. Vad som däremot obetingat måste utmönstras äro skolproblemen i egentlig mening, alla dessa uppgifter om resor och klockor, arvskiften och overkliga penningtransaktioner. Det som återstår kan nu bli sammanlagt ett par tiotal uppgifter av den typ, jag ovan skisserat, fördelade dessutom över de olika arterna av ekvationer.

Vidtages denna reduktion, avlyftas en betydande belastning från skolans matematikkurs. Det är att märka, att denna reduktion icke innebär någon reduktion i matematiskt vetande. Ty problemlösandet är icke matematik. De tankar, som för problemens lösande uppmobiliseras, äro inga specifikt matematiska tankar. De äro ungefär av den art, som framhämtas, då det gäller att lösa gåtor och rebusar. Deras lösande leder ej häller till några sakliga insikter, emedan de helt och hållet sakna sakligt innehåll. Man lär sig sålunda genom dem ingenting annat än att lösa likadana problem.

Problemen kunna sålunda utan någon rubbning av bildningsinnehållet utmönstras. Därigenom sker ingen som helst förändring i bildningens struktur, vare sig det är fråga om dess materiella omfattning eller dess innehåll av tankeskolning.

Ekvationer av första graden med flera obekanta

Det, som nu plägar följa i den fortsatta undervisningen är *ekvationer med flera obekanta.*

Jag tvivlar på att här den fulla förståelsen kan nås utan att rekurrera till den grafiska framställningen. Denna är visserligen möjlig blott vid ekvationer med två obekanta, men den vid deras behandling med den grafiska åskådningens hjälp vunna fastheten i uppfattningen är egnad att sedan möjliggöra den mera formella behandlingen av ekvationer med flera obekanta, där man ex analogia kan draga sina slutsatser. En annan fråga är om man nu alls skall låta sådana ekvationer med flera obekanta kvarstå i kursen, en sak, till vilken jag återkommer senare.

Problemet med två obekanta ligger enkelt till. Vi fråga exempelvis efter 2 tal, vilka ha den egenskapen att 2 ggr. det ena och 3 ggr. det andra sammanlagt utgör 6. Vi få, om de båda talen betecknas med x och y ekvationen

$$2x + 3y = 6$$

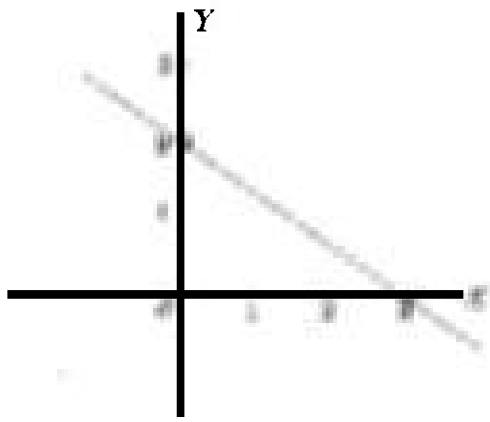
Vi observera genast, att ekvationen satisfieras av *flera* talpar. Ty om y är förslagsvis 1, så är $x = \frac{3}{2}$. Och då vi kunna variera y, så inses, att ekvationen har oändligt många *rotpar*, som utvinnas genom att vi låta den ena obekanta genomglida hela tallinjen och för varje värde på den kalkylera den andra obekantas av ekvationen vid detta bundna värde. Att vi på detta sätt utfå alla rotpar, oberoende av vilkendera av de obekanta vi låta variera, är lätt att inse.

Nu ställer sig denna sak med rotparen synnerligen överskådlig, om vivädja till dess grafiska innehåll. Vi sätta ut i ett koordinatsystem x såsom abskissa och y som ordinata och få sålunda såsom motsvarighet till rotparet en punkt i koordinatsystemet. Den glidande följden av rotpar ger anledning till en glidande följd av punkter. Dessa punkter bilda, som vi på grund av tidigare erfarenhet inse, en *rät linje.* Ty $2x + 3y = 6$ kan ju också skrivas i formen $y = -\frac{2}{3}x + 2$, som återför frågan till den tidigare behandlade frågan om lineära uttrycks diagram.

Uppritandet av denna räta linje förutsätter kännedomen av 2 av dess punkter, d. v. s. 2 av ekvationens rotpar. De närmast till hands liggande rotparen äro de, som erhållas om man först sätter $x = 0$ och beräknar det motsvarande värdet på y, samt sedan sätter $y = 0$ och beräknar x. Man får den lilla tabellen

x	y
0	2
3	0

med vars tillhjälp bilden uppritas. Den får det utseende närslutna bild visar:



Denna bild har därvid den betydelsen, att om man fixerar en punkt, vilken som helst, på linjen och mäter upp denna punkts abskissa och ordinata, så har man i den ett rotpar, d. v. s. ett sådant värde på x och ett sådant värde på y, att de samtidigt insatta i ekvationen, satisfiera denna. Omvänt är situationen den, att om jag på något sätt utvunnit ett sådant rotpar, så ha dess individer den egenskapen, att om värdet på x utsättes som abskissa och y som ordinata, så få vi en punkt på vår linje.

Som jag sade tror jag icke, att man på denna punkt skall komma till verklig förståelse utan att gå denna väg. Det är också att observera, att de mot modernare metodik strävande läroböckerna inför frågan, var diagrammet skall komma in i utvecklingen, just valt denna punkt för dess införande eller åtminstone just före dess behandlande infört diagrammet. Visserligen kan om detta sägas, att det är bättre att det sker sent än aldrig. Men elever, som just i några sammanträngda lektioner stiftat bekantskap med detta matematikens kapitala redskap, ega givetvis icke samma obundenhet i dess användning som elever, vilka på ett tidigt stadium lärt sig att tänka både analytiskt och geometriskt. Sålunda kan det hända, att det välmenta opererandet med den grafiska åskådningen på denna punkt med elever, som just lärt sig saken, är till ringa nytta och blott till ansträngningen fogar en ny, nämligen den, som ligger i det riktiga och påpassliga handhavandet av den nyss inlärda och måhända ännu icke fullt koncipierade metoden.

Den gamla skolan har på denna punkt ringa skrupler. För den är problemet alls icke att vinna orientering över mångfalden av rotpar till en ekvation med två obekanta. Där gäller det helt enkelt att inlära det formella schemat för lösandet av två ekvationer med två obekanta, varvid det vida viktigare problemet att intränga i egenskaperna hos en ekvation med två obekanta helt enkelt skjutes åt sidan. Sedan tekniken med de båda ekvationerna inlärts, går det helt ledigt att utsträcka det inlärda till flera ekvationer med flera obekanta och därmed inledes åter ett månadslångt räknande, som sedan utmynnar i problem, som leda till dylika ekvationer. Här ha vi åter ett av dessa kring en liten kärna kringbyggda räkneskeden, som naturligtvis ta en betydande tid i anspråk och ha ingen i proportion till denna tids förbrukning stående betydelse ens för dem, som senare träda i direkt förbindelse med ren eller tillämpad matematik.

Den naturliga utvecklingen är nu givetvis följande. Vi ha vunnit en fullständig inblick uti frågan om en ekvation med två obekanta, en inblick, som ytterligare kan genom särskilda prov förstärkas. Sålunda kunna vi kalkylera rotpar enligt den först angivna beräkningsmetoden och sedan genom att sätta ut punkter med dessa rotpars individer som koordinater kontrollera vårt resultat. Eller också kunna vi genom att uppmäta godtyckliga diagrampunkters koordinater och undersöka, om de bilda ett rotpar verificera vårt resultat. Alltnog, den saken är för oss klar. Nu införa vi en andra ekvation med två obekanta förslagsvis $x + y = 1$. Vi finna då, att givetvis samma resonnemang kunna utvecklas angående dess rotpar. Vi få igen en rät linje och finna omedelbart, att de två linjerna skära varandra i punkten $x = -3$, $y = 4$. Följaktligen ha de båda ekvationerna *ett* och *endast ett* rotpar gemensamt, ett sakförhållande, som troligen icke fattas i sin fulla utsträckning utan användning av koordinater.

Det problem, som nu reser sig, är att finna detta gemensamma rotpar. En metod är naturligtvis den, som ger sig ur användningen av diagrammen och som sålunda tillåter en grafisk lösning av detta analytiska problem. Emellertid eftersträvar man att på kalkylens väg utfinna det gemensamma rotparet.

Det är väl att märka, att man vid behandlingen av detta räkneproblem i skolan förbiser en sak. De eliminationsförfaringssätt, som användas, äro användbara endast under förutsättning, att ekvationerna ha ett gemensamt rotpar. Sakna de ett sådant, kunna vi icke eliminera, ty försvinnandet av den kvantitet, som elimineras, förutsätter, att den har samma värde i båda ekvationerna.

Detta förbises helt och hållet och man handlar i alla fall lika, utan att egna den saken någon uppmärksamhet. Därigenom blir det hela i hög grad dunkelt.

Nu är om allt detta att säga, vad jag hela tiden sagt om algebraundervisningen. Det handlar om teoretiska spörsmål. Detta hindrar icke, att exempelvis i detta fall en betydande allmän erfarenhet av nära nog filosofisk art utvinnes och detta är den numera med erfarenheten införlivade i det allmänna tänkandets plan liggande sanningen, att för fixerande av två av varandra oberoende obekanta kvantiteter erfordras kännedomen av tvenne i ekvationer infogbara villkor, som de båda obekanta uppfylla. Vidare kan man såsom ofta i denna framställning skett, hänvisa till dessa begrepps och åskådningars värde både för matematiken själv och dess användningar. Slutligen har också rent uttalats, att dessa åskådningar äro avsedda kort och gott att avge insikt uti formlernas språk och dess egenartade lagar. Vad som emellertid under allt detta på intet sätt får glömmas är, att man bör ge det hela en sådan behandling, att den reala innebörden av det som sker är uppenbar. Här ha vi en liksom enkom konstruerad modelltyp, på vilken den saken kan till evidens demonstreras.

En dunkel punkt i skolans ekvationslära blir också egentligen först genom en sådan framställning, jag ovan skizzerat, uppklarad. Det vanliga eliminationsförfarandet utmynnar i sin schematiska behandling av de båda ekvationerna i en ekvation av någon av typerna $ax = b$, $0 = b$, $0 = 0$ varvid eleverna ha att till exemplet såsom svar anteckna antingen, att allt är i ordning, eller att ekvationssystemet är omöjligt eller ock slutligen att ekvationssystemet är identiskt. Bakom dessa, av ingen förstådda floskler döljer sig den realitet, att det i det första fallet verkligen är fråga om två varandra skärande räta linjer, medan det i det andra fallet handlar om två parallella linjer, som sålunda sakna skärningspunkt, och i det tredje fallet om två sammanfallande räta linjer, vilka sålunda ha alla sina punkter gemensamma.

I detta nu är väl allt detta redan glädjande nog infört på en hel del håll, tack vare det sakförhållande, att läroböckerna egna saken en behandling av den typ ovan utvecklats. Emellertid kan jag icke helt värja mig för misstanken, att man här mera offrar åt reformmatematikens krav än verkligen i förfarandet ser en djup och sakenlig metod. Jag stärkes i denna uppfattning av, att man i stort sett i övrigt låter hela det gamla räkneschemat arbeta.

Nu är jag synnerligen skeptisk gentemot ändamålsenligheten av att alls gå vidare i denna riktning och sålunda i skolan inlåta sig på ekvationer med flere än två obekanta. Dessa erbjödo dock en hel del nya synpunkter och det matematiska tänkandet riktande ansatser, medan den fortsatta utvecklingen blir av rent formell natur, särskilt som de geometriska metoderna svika. Det är här som överallt klokare att nöja sig med ett till omfånget mindre, men fullständigt fattat vetande än en hel del tekniska färdigheter, rörande sig kring mindre överskådbara begrepp. I verkligheten äro utvecklingarna över lineära ekvationssystem med tre obekanta förknippade med en hel del svårigheter. Visserligen visa de sig icke i den vanliga skolbehandlingen, emedan man helt enkelt icke låtsar om deras existens. Men där finnas sådana avgöranden att träffa som om ekvationssystemets urartning till två ekvationer med tre obekanta eller till en ekvation med tre obekanta. Att lemna sådana saker därhän och inöva ett tomt räkneschema hör alls icke till uppfattningen inom den undervisning, jag i denna framställning förträtt. Och man kan i verkligheten knappast på dessa punkter gå till grunden utan att egna det hela en tid, som detsamma ur andra synpunkter icke förtjänar. Jag är sålunda böjd för att från skolkursen bortlemna alla ekvationssystem med flere än två obekanta.

Inom matematiken själv förekomma ju ekvationssystem med flera obekanta. Men det kommer där icke så mycket an på deras lösning som mera på den allmänna diskussionen av rotsystemens karaktär. Matematiken har också i *determinantkalkylen* format sig ett suveränt redskap för dylika allmänna överläggningar. Det, som läres i skolan, kommer sålunda också där till ringa användning och kan sålunda icke ens ur denna synpunkt försvara sin plats.

En sak, som måhända i stället kunde beaktas på skolstadiet är följande. Såsom två ekvationer med två obekanta nu lösas, framgår icke det sätt, på vilket rötterna uppbyggas ur koefficienterna. Detta beror närmast på att man vid eliminationsmetoden i sin strävan att skänka den obekanta, som skall elimineras, samma koefficient i båda ekvationerna, samtidigt strävar efter så små koeffifienter som möjligt och sålunda förskaffar den obekanta till gemensam koefficient de ursprungliga koefficienternas minsta gemensamma dividend. Underlåter man detta får man genast en lag för rötternas bildande. Vi betrakta två sådana ekvationer

$$a_1 x + b_1 y = \lambda_1$$
$$a_2 x + b_2 y = \lambda_2$$

och förutsätta, att de ha ett gemensamt rotpar. Om vi eliminera y, genom att multiplicera den förra ekvationen med b_2 och den senare med $-b_1$, och addera ekvationerna, så blir koefficienten för x: $a_1 b_2 - a_2 b_1$, medan vi på högra sidan om likhetstecknet få det därmed analoga uttrycket $\lambda_1 b_2 - \lambda_2 b_1$, som skiljer sig från det förra endast genom att a_1 och a_2 utbytts mot λ_1 och λ_2. Alltså blir

$$x = \frac{\lambda_1 b_2 - \lambda_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Vid elimination av x ur de båda ekvationerna ovan multiplicera vi dem i ordning med $-a_2$ och a_1 och få då på samma sätt

$$y = \frac{a_1\lambda_2 - a_2\lambda_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Ur dessa formler för rötterna framgår klart deras byggnad. Vi se, att de ha samma nämnare som erhålles genom korsvis företagen multiplikation av de fyra koefficienterna för de obekanta. Täljarna äro olika, men erhållas ur nämnaren, så att i det förra fallet a_1 och a_2 ersatts med λ_1 och λ_2, medan samma sak i det senare fallet utförts med b_1 och b_2.

Nu har man en enkel beteckning i matematiken. Man betecknar $AD - BC$ med $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$. Använda vi denna beteckning, kunna vi skriva rotparet till ekvationssystemet på sid. 161 i formen

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ \lambda_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \lambda_1 \\ a_2 & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Nu är ju detta den första grunden till *determinantkalkylen*. Detta är emellertid icke något skäl att utdöma saken. Den ger nämligen ett verkligt bidrag till uppfattningen. Det är icke heller på något sätt svårare än de metoder som användas. Snarare är det tvärtom. Förresten kan man lemna bort den s. k. substitutionsmetoden och den s. k. komparationsmetoden, som icke äro av någon särskild betydelse och låta denna metod, av vilken additions- och subtraktionsmetoden är ett återsken, träda in. På det sättet kommer man till en verkligt allsidig behandling av det förelagda problemet.

Denna allsidighet kräver emellertid ännu en tankeakt. Vi hade uttryckligen på sid. 161 utgått från ett ekvationssystem, om vilket vi på förhand visste, att det har ett rotpar. Vi frigöra oss nu från denna vetskap och inrycka därmed i betraktelsen frågan om, *när* ett sådant ekvationssystem har ett rotpar. De båda polynomen

$$P_1 = a_1 x + b_1 y - \lambda_1$$

och

$$P_2 = a_2 x + b_2 y - \lambda_2$$

där x och y antages hava samma värden i båda, multipliceras med b_2 och $-b_1$ och adderas. Vi få

$$b_2 P_1 - b_1 P_2 = \begin{vmatrix} \text{[illegible]} & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ \lambda_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Därpå multiplicera vi dem med $-a_2$ och a_1 och få

$$-a_2 P_1 + a_1 P_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ a_2 & \text{[illegible]} \end{vmatrix}$$

Vi betrakta nu tre fall

$$1. \quad \begin{vmatrix} \text{[illegible]} & b_1 \\ \text{[illegible]} & b_2 \end{vmatrix} \text{[illegible]}$$

Då kunna de högra membra i våra ekvationer icke försvinna med mindre, än att också $\begin{vmatrix} \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} \lambda_1 & b_1 \\ \lambda_2 & b_2 \end{vmatrix}$ försvinna. Äro sålunda dessa determinanter icke heller noll, så kunna P_1 och P_2 icke samtidigt vara 0, vadan de båda ekvationerna stå i konflikt med varandra. De framställa då två parallella linjer. Äro emellertid de båda determinanterna noll, så är högra membrum identiskt noll för alla värden på x och y, varav då följer att för alla värden på x och y

$$b_2 P_1 - b_1 P_2 = 0$$

$$-a_2 P_1 + a_1 P_2 \text{[illegible]}$$

vilka uttryck visa, att $P_1 = \frac{\text{[illegible]}}{b_2} \cdot P_2$ eller att sålunda P_1 och P_2 försvinna samtidigt för alla värden på x och y. Detta innebär, att de båda ekvationernas diagram äro två sammanfallande räta linjer.

Om

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

så försvinna de högra membra i våra formler endast och allenast för de värden på x och y, som redan angåvos såsom ekvationernas rotpar, i händelse de ha ett sådant. Därav följer att P_1 och P_2 äro noll endast och alltid för dessa värden på x och y.

Läran om ekvationen av andra graden hör väl till de saker som profiterat mest av reformmatematikens anspråk på funktionalt och geometriskt tänkande. Man kan här tala om en verklig renässans. Måhända kan man också säga, att det hela här slagit något över. Polynomet av andra graden har dock icke den centrala betydelse, som man kunde tro, då man ser en del läroböckers detaljrikedom på denna punkt. Snarare har man ett intryck av, att samma tendens, som på många andra håll i undervisningen utbildat särskilda »läror», också är i färd med att här starta en ny lära. Jag tror också, att en del av utvecklingen på denna punkt får tillskrivas glädjen över, att man funnit ett som man tycker så lämpligt fält för de nya idéernas användning.

Emellertid är tendensen i det hela glädjande. Förr var saken och är helt visst på många ställen ännu i dag som är, högst bedrövlig. Ekvationsläran föregicks på denna punkt vanligen av en räkning med *imaginära tal*, som man måste hoppas nu hör historien till.

De imaginära talen höra icke skolkursen till. De infördes genom en med anspråk på förståelse alls icke opererande formell akt och gjordes sedan till föremål för en mängd räknearbete, i vilket bland annat också ingick imaginära tals bortskaffande från nämnaren, ett kapitel, som trohjärtat genomarbetades utan att man gav uttryck åt någon vetskap om, att det därvid är fråga om komplexa tals division. Vad detta skall medföra för

nytta är svårt att kunna förstå. Emellertid fanns det och finnes nog ännu.

De imaginära talen ha sin uppgift i matematiken. De bilda den taltotalitet, inom vilken de formella räknelagarna från aritmetiken gälla. Man kan icke gå ut över denna taltotalitets gränser, utan att nödgas avstå från någon av dessa räknelagar. De imaginära talen äro också i matematiken föremål för en genial formell behandling. De kasta också ett oväntat ljus över många dunkla punkter i det reellas värld. Men allt detta kan icke förvärva dem någon plats i skolkursen. Skolalgebrans hela värde, jag ville säga dess charm, ligger just i, att den här pålägger sig den begränsning, att den inskränker sig att studera de algebraiska uttrycken på reella axeln. Skall här ett steg tagas framåt, blir det ett mycket stort steg. Att tro, att man kommer från saken med några allmänna formella floskler, visar obekantskap med den matematiska vetenskapen. Jag tror, att varje vetenskapsman utan vidare skall ge mig rätt. Visserligen frånkände jag i början av denna framställning vetenskapsmännen domsrätt i undervisningsfrågor. Men på denna punkt ega de just den utslagsrätt, som bygger på insikt om det ridikyla i det som kan erbjudas, sett mot bakgrunden av det det handlar om uti den matematiska vetenskapen.

Ekvationer av andra graden sa[illegible] ma och minima.

Sedan de imaginära talen genomgåtts eller snarare genomräknats, gick man då lös på ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ och utvecklade rent formellt dess rotformel. Denna gav då ibland reella, ibland imaginära rötter. Sedan löste man sådana ekvationer i massor och så var den saken klar.

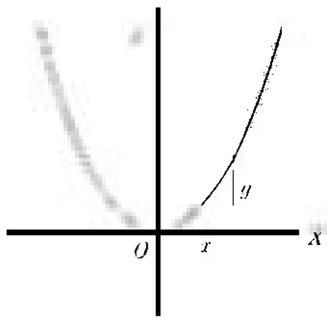
Emellertid hade man en svårighet att klara. Om vi med x_1 och x_2 beteckna rötterna till ekvationen, kan som känt polynomet $ax^2 + bx + c$ upplösas i faktorer, så att

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Huru detta alls skulle kunna fattas av en elev, som hela tiden sett polynomet bundet vid dess förekomst i ekvationen och som överhuvudtaget alls icke lärt sig att betrakta polynomet såsom en funktion av x, utan endast såsom det venstra membrum uti ekvationen, är obegripligt. Det fattades också helt enkelt icke och var nog ett av algebraundervisningens dunklaste ställen, där ekvationen och polynomet rördes ihop till ett enda tankekaos. Jag har under min verksamhet som examinator kunnat observera detta och särskilt kunnat observera elevernas skygghet att lemna polynomet fristående, varför de för säkerhets skull tillagt $= 0$, ofta såsom en avvärjande trollformel vid utvecklingens slut, sedan polynomets uppdelning i faktorer redan verkställts.

Här gäller det att skilja mellan polynomet och ekvationen, d. v. s. det gäller att höja det hela över det formellas plan och föra eleverna till full förståelse.

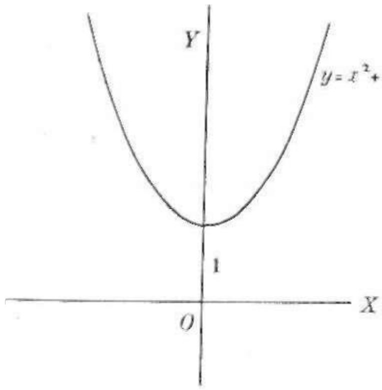
Det hela bör därvid tagas så enkelt som det i verkligheten är. Vi inleda framställningen med ett grundligt studium av det enklaste kvadratiska polynomet $y = x^2$. Dess diagram, som redan i aritmetiken framskymtat, egnas nu stor omsorg. Det uppritas för täta värden på x på millimeterpapper. Man kan utskära en kurvmall, som gör, att vi när som helst kunna uppritа den erhållna parabeln.

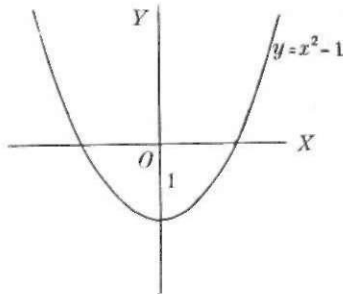


I övrigt är att observera, att denna kurva kan användas för det grafiska utdragandet av kvadratroten. Ty ur formeln $y = x^2$ följer $x = \sqrt{y}$ och vi kunna sålunda genom att införa ett givet tal y som ordinata till kurvan genom uppmätning av den tillhörande abskissan x få ett värde för $\sqrt{y}$. Vi göra genast den iakttagelsen, att diagrammen för de kvadratiska polynomen

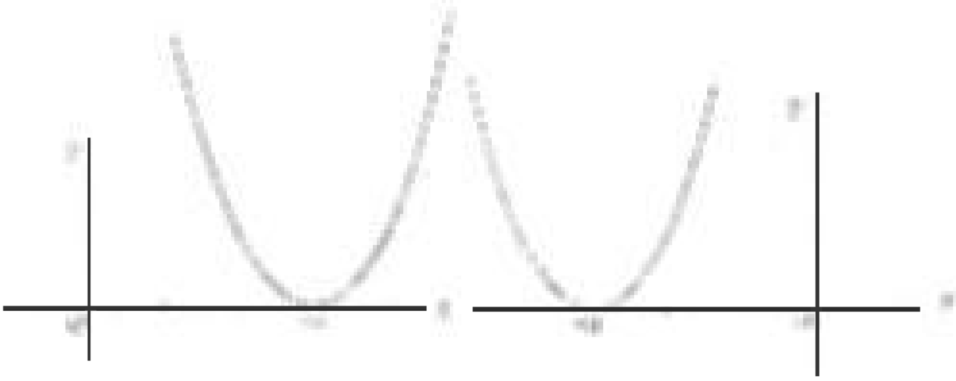
$$y = x^2 + 1 \text{ och } y = x^2 - 1$$

erhållas helt enkelt genom att skjuta kurvmallen 1 steg uppåt eller neråt i Y-axelns riktning.





Likaså inse vi, att förslagsvis diagrammet för $y = (x - 3)^2$ erhålles så, att diagrammet ansättes i punkten $x = 3$ på X-axeln och diagrammet för $y = (x + 3)^3$ så att diagrammet placeras i punkten $x = -3$.



Därmed äro viktiga resultat utvunna. Då kurvmallen flyttas rakt uppåt eller neråt, åskådliggör den efterhand alla kvadratiska polynom av typen $y = x^2 + a$. Då den glider horisontalt längs X-axeln, åskådliggör den efterhand alla kvadratiska polynom av typen $y = (x + a)^2$.

Vi gå nu vidare.

Vi betrakta polynomen

$$y_1 = x^2 - 6x + 10$$
$$y_2 = x^2 - 6x + 9$$
$$y_3 = x^2 - 6x + 8$$

Då vi observera, att det mellersta är $(x - 3)^2$, kunna vi i ordning skriva dem i formen

$$y_1 = (x - 3)^2 + 1$$
$$y_2 = (x - 3)^2$$
$$y_3 = (x - 3)^2 - 1$$

Detta visar oss, att de tre diagrammen erhållas så, att vi först upprita diagrammet för det mellersta polynomet, varpå vi genom att parallellförskjuta detsamma 1 steg uppåt eller nedåt erhålla det första och det sista diagrammet. Det hela kommer uppenbarligen därpå ut, att vi först skjuta kurvmallen längs X-axeln till punkten 3, varpå vi skjuta den i Y-axelns riktning 1 steg uppåt eller nedåt.

Detta kan nu utan alla ceremonier överföras till det allmänna polynomet

$$y = x^2 + px + q$$

Vi skriva detta i formen

$$y = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + q$$

Om då q är kvadraten på $\frac{p}{2}$, så är polynomet en jämn kvadrat och sålunda av typen y_2. Om så icke är fallet, så utskilja vi ur q kvadraten på $\frac{p}{2}$ och få

$$y = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

eller $$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Vi se, att samma sakförhållande visar sig i detta allmänna fall. Diagrammet erhålles så, att kurvmallen först glider längs X-axeln till punkten $-\frac{p}{2}$ varpå den höjes eller sänkes beroende på om $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ är positivt eller negativt, varvid förskjutningens storlek anges av detta uttrycks absoluta belopp.

Vi få följaktligen tre arter av kvadratiska polynom, beroende på karaktären av uttrycket $q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ eller vilket kommer på ett ut detta uttrycks motsatta tal $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ som för övrigt kallas det kvadratiska polynomets *diskriminant*. Beteckna vi diskriminanten med $\triangle$, så var i vårt exempels första polynom $\triangle = -1$, i det andra $\triangle = 0$ och i det tredje $\triangle = +1$. Vi få i det allmänna fallet

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \triangle$$

och ha att särskilja tre arter av polynom:

$\triangle < 0$ parabeln ligger som vid polynomet y_1.
$\triangle = 0$ parabeln ligger som vid polynomet y_2.
$\triangle > 0$ parabeln ligger som vid polynomet y_3.

Särskilt är att observera, att diskriminanten $\triangle$ utvisar, huru parabelns vertex ligger. $-\triangle$ är nämligen ordinatan för parabelns vertex. Dess abskissa är $-\frac{p}{2}$.

Här inställer sig nu ett viktigt problem och det är frågan efter de värden, för vilka polynomet antar ett visst givet värde. Man frågar då först efter polynomets *nollställen* d. v. s. de punkter, där polynomet antar värdet 0. De äro de ställen, där parabeln skär X-axeln och existera sålunda alls icke vid polynomen av första arten. Vid polynomen av andra arten finnes ett sådant ställe nämligen $x = -\frac{p}{2}$, medan vid polynomet av tredje arten två sådana ställen uppträda på var sin sida och på lika avstånd från $-\frac{p}{2}$. Uttrycket för dessa ställen, den kända *rotformeln* för ekvationen av andra graden, blir

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\Delta}$$

eller fullt utskrivet i koefficienterna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

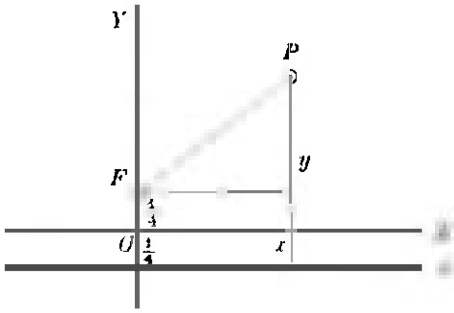
Fråga vi sedan efter de punkter, i vilka polynomet av andra graden antar ett visst givet värde C, ekvationslärans huvudfråga, så inses, att detta värde C alls icke antas, om det icke ingår bland parabelns ordinator. Då vertex ordinata är $-\Delta$, så måste C överskrida $-\Delta$. Man kan således genom att bilda diskriminanten få veta, vilka värden ett polynom av andra graden kan antaga. Eljes utföres räkningen så, att vi med rotformelns tillhjälp utskriva nollställena till polynomet $x^2 + px + q - C$ och erhålla

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\Delta + C}$$

såsom uttryck för de värden på x, för vilka polynomet $x^2 + px + q$ antar det ovanom $-\Delta$ liggande värdet C.

Detta är den tankegång som enligt mitt förmenande bör komma till användning vid behandlingen av polynomet $x^2 + px + q$ och den därtill anslutna kvadratiska likheten. Givetvis bör utvecklingen gå fram över numeriska uppgifter, egnade att underlätta den teoretiska tankegången. Ovanstående får sålunda icke fattas såsom ett brottstycke ur en för skolan apterad framställning.

Man kan säga, att här ännu kvarstår en dunkel punkt. Man frågar sig nämligen, med vad rätt vi kallat kurvan en *parabel*. I verkligheten har parabeln en alldeles bestämd definition: den är orten för en punkt, vars avstånd från en fast punkt, F, *brännpunkten*, är lika med dess avstånd från en fast linje S, *styrlinjen*. Man kan emellertid övertyga sig om, att kurvan $y=x^2$ uppfyller denna definitions bestämmelser.



Vi få ur ovanstående figur, om P skall ligga på parabeln med brännpunkten F och styrlinjen S

$$(y+\tfrac{1}{4})^2 = x^2 + (y-\tfrac{1}{4})^2$$

eller utvecklat

$$y = x^2$$

varmed påståendet är bevisat. Visserligen kan detta svåra bevis alldeles bortlemnas, om man med namnet parabel belägger en kurva, vars ordinata är kvadraten på abskissen.

Några ytterligare utvecklingar om polynomet $x^2 + px + q$, utom givetvis frågan om dess upplösning i faktorer, skola enligt mitt förmenande icke upptagas till behandling. Det framställda är nog. Vidare utväxter börja, såsom jag redan sade, smaka av lärobildning och intern utveckling.

Det fullständiga polynomet

$$ax^2 + bx + c$$

skrives i formen

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

och är därmed i huvudsak återfört till det föregående. Givetvis kan man icke längre reda sig med kurvmallen, då diagrammet ju uppstår ur kurvmallen genom affin dilatation från eller pressning mot X axeln. Att ingå på detta synes mig icke bära frukter som motsvara mödan. Skall man möjligen här tränga till grunden såsom vi gjort i det förra fallet, måste synnerlig möda offras på saken.

Redan polynomet av andra graden leder oss in på frågan om, vilka värden ett uttryck kan antaga. Det visade sig, att polynomet av andra graden $x^2 + px + q$ icke antar värden som underskrida $-\triangle$, medan det antar alla värden, som överskrida detta tal. Den saken beror helt enkelt på, att $-\triangle$ är den lägsta punktens på parabeln ordinata. Man kallar $-\triangle$ polynomets *minimivärde* och den punkt $-\frac{p}{2}$ på X axeln, där detta värde kommer till synes, polynomets *minimiställe.*

Det är att märka, att en sådan fråga alls icke uppträdde vid polynomet av första graden $ax + b$. Ty dess diagram är en rät linje, vars ordinatvärden genomvandra alla värden, utan att uppvisa något extremumvärde.

Emellertid är frågan om en funktions maximi- och minimivärden en ur praktisk och teoretisk synpunkt anmärkningsvärd sak. Det är helt enkelt frågan om, *mellan* vilka gränser eller eventuellt *ytterom* vilka gränser funktionens värdemängd står att söka. En del av dessa frågor kunna med det nuvarande innehavet av insikter och matematisk prövningsförmåga besvaras.

Betrakta vi exempelvis funktionen

$$\frac{x+1}{x^2+3}$$

och fråga, huru beskaffade de värden y skola vara, som detta bråk kan antaga, så har vi således att studera den kvadratiska likheten

$$\frac{x+1}{x^2+3} = y$$

eller
$$x^2 - \frac{\text{[illegible]}}{y}x + 3 - \frac{\text{[illegible]}}{y} = 0$$

Denna likhet har rötter endast, om dess diskriminant är positiv. Nu är i detta fall

[illegible]

eller
$$\Delta = \frac{-12y^2 + 4y + 1}{4y^2} = \frac{-12\left(y^2 - \frac{1}{3}y - \text{[illegible]}\right)}{4y^2}$$

Det gäller alltså att studera polynomet

[illegible]

Detta polynoms nollställen äro

[illegible]

eller
$$y = \frac{1}{6} \pm \frac{2}{6} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Mellan dessa nollställen är polynomet $y^2 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{12}$ negativt och täljaren i uttrycket för Δ alltså positiv samt följaktligen Δ självt positivt. Alltså äro de enda möjliga värden y, som uttrycket $\frac{x+1}{x^2+3}$ kan antaga, belägna *mellan* gränserna $-\frac{1}{6}$ och $\frac{1}{2}$.

Då detta utsäger, att den tillhörande kurvans ordinator ligga mellan dessa gränser, kan man efterkontrollera saken genom att upprita kurvan.

Vårt resonnemang innebär också, att $\frac{1}{2}$ är maximivärdet för funktionen $\frac{x+1}{x^2+3}$ medan $-\frac{1}{6}$ är dess minimivärde. Var dessa värden komma till synes är lätt att beräkna.

Betrakta vi sedan uttrycket
$$\frac{x^2+3}{x+1}$$
och fråga efter de värden y, detta uttryck kan antaga, ha vi att lösa ekvationen av andra graden

$$\frac{x^2+3}{[illegible]} [illegible]$$

eller

$$x^2 - yx + 3 - y = 0,$$

vars diskriminant är

[illegible]

eller

$$\triangle = \frac{y^2 + 4y - 12}{[illegible]}$$

Denna skall alltså vara positiv. Då täljarens nollställen erhållas ur ekvationen

$$y^2 + 4y - 12 = 0$$

är

$$y = -2 + \sqrt{4 + 12}$$

eller

[illegible]

så är polynomet $y^2 + 4y - 12$ och följaktligen hela uttrycket för $\triangle$ positivt för de värden på y, som ligga *ytterom* gränserna -6 och 2.

Funktionen $\frac{[illegible]}{x+1}$ kan alltså antaga endast sådana värden, som ligga *ytterom* gränserna -6 och 2, d. v. s. äro mindre än -6 eller större än 2.

Man kan genom efterkontroll på kurvan för $\frac{x^2+3}{x+1}$ förvissa sig, om att ordinatorna verkligen förete denna egenskap.

Samtidigt konstatera vi åter, att -6 är funktionens *maximivärde* och 2 dess *minimivärde*. De tillhörande ställena på X axeln äro lätt beräknade.

Nu är detta alls icke lätt. Men det betecknar också i min algebraundervisning dess sista kapitel. Att jag överhuvudtaget tar upp det till behandling, beror på att det är praktiskt remarkabelt. Det löser ett märkeligt problem. Och så är det en utomordentligt vacker tillämpning av det nyss om polynom av andra graden utvecklade.

Vi nämna några av de problem, som kunna lösas. Jag förbigår därvid en del intressanta problem om omkretsar och ytor och nämner blott det vanliga kastproblemet.

Vid det vertikala kastet består mellan vägen och tiden formeln

$$y = a + ct - \frac{gt^2}{2}$$

där a är den punkts höjd över marken, från vilken kastet sker, och c kastets initialhastighet. Vi ha här ett polynom av andra graden, som kan skrivas i formen

$$y = -\frac{g}{2}\left\{t^2 - \frac{2c}{g}t - \frac{2a}{g}\right\}$$

Uttrycken innanför parentesen har alla sina värden *ovanom*

$$-\triangle$$

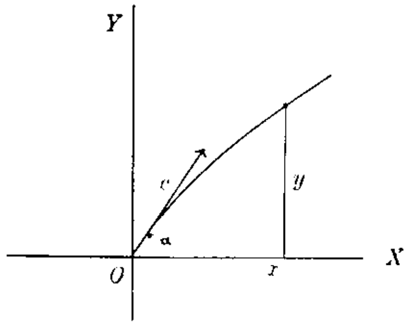
där $$\triangle = \left(\frac{c}{g}\right)^2 + \frac{2a}{g}$$

Följaktligen ligga y:s alla värden under $\frac{g}{2}\triangle$ eller således

under $$a + \frac{c^2}{2g},$$

som således markerar den ***högsta*** **höjd,** ***stighöjden,*** **kastet kan nå.**

Betrakta vi det sneda kastet,



som med initialhastigheten c med komponenterna a och b, sker under *elevationsvinkeln* α, så är efter t sekunder

$$x = at$$

$$y = bt - \frac{gt^2}{2}$$

eller genom elimination av t

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{g}{2a^2}x^2.$$

Detta är åter ett polynom av andra graden. Vi skriva detsamma i formen

$$y = \frac{g}{2a^2}x\left(\frac{2ab}{g} - x\right)$$

och se då genast, att y har sina nollställen i punkterna $x = 0$ och $x = \frac{2ab}{g}$, som sålunda markera stället för kastets uppstigande och nerslående. $\frac{2ab}{g}$ kallas *kastvidden.*

Diskriminanten för polynomet inom parentesen är $\left(\frac{ab}{g}\right)^2$. Därav följer att y icke kan överskrida

$$\frac{g}{2a^2}\left(\frac{ab}{g}\right)^2 = \frac{b^2}{2g}$$

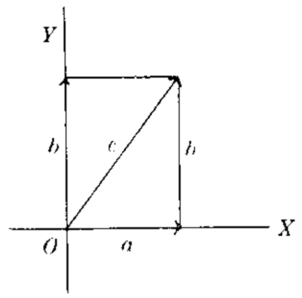
som sålunda anger *stighöjden.*

Man kan ännu fråga efter *kastviddens* maximala storlek. Dess uttryck är

$$\frac{2ab}{g}$$

där a och b äro komponenterna av den fasta initialhastigheten c, vilka komponenter givetvis till sin storlek bero av elevationsvinkeln.

Denna fråga är uppenbarligen identisk med frågan efter den största rektangel ab av alla rektanglar med samma diagonal c och således identisk med frågan efter den största i en halvcirkel med diametern c inskrivna triangeln. Denna är uppenbarligen den likbenta. Det längsta kastet



göres således ifall a och b äro lika d. v. s. om elevationsvinkeln är 45°.

Man kan gå längre och fråga, vilka punkter överhuvudtaget kunna nås av ett kast, som sker med initialhastigheten c och huru man skall sikta för att nå en sådan punkt.

Vi beteckna $\frac{b}{a}$, som bestämmer kastriktningen, med m. Då är $c^2 = a^2 (1 + m^2)$ och således

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{c^2}(1 + m^2)$$

Införa vi detta i ekvationen för kastkurvan på sid. 176, få vi

$$y = mx - \frac{g}{2c^2}(1 + m^2)\, x^2.$$

Vi skola nu rikta kastet d. v. s. bestämma m, så att kastkurvan går genom en given punkt (ξ, η) . Vi få då för m ekvationen av andra graden

$$\eta = m\xi - \frac{g}{2c^2}(1 + m^2)\, \xi^2$$

Vi veta genast, att denna ekvation icke alltid med nödvändighet behöver ha lösningar för alla givna värden på ξ och η.

Vi få, om vi hyfsa ekvationen, efterhand

$$\frac{g \cdot \xi^2}{2c^2} \cdot m^2 - \xi \cdot m + \eta + \frac{g\xi^2}{2c^2} = 0$$

eller

$$m^2 - \frac{2c^2}{g\xi}m + \frac{2c^2\eta}{g\xi^2} + 1 = 0.$$

Denna ekvation kan lösas endast om diskriminanten överskrider eller är likamed noll. Denna diskriminant $\triangle$ blir

$$\triangle = \left(\frac{c^2}{g\xi}\right)^2 - \frac{2c^2\eta}{g\xi^2} - 1.$$

Sätta vi den likamed noll, så få vi

$$\eta = -\frac{g}{2c^2}\xi^2 + \frac{c^2}{2g}$$

som således anger de punkter (ξ η) som ännu kunna nås av kastet. Detta är en parabel, som delar planet i två delar; innanför parabeln är $\triangle > 0$ och varje punkt, som ligger där, nås således för två olika värden på m d. v. s. med två olika kast; utanför är $\triangle < 0$, varför de där belägna punkterna icke kunna nås av kast med initialhastigheten c, huru än kastet riktas.

Det är att märka, att för $\xi = 0$ är $\eta = \frac{c^2}{2g}$ d. v. s. likamed stighöjden vid det vertikala kastet med begynnelsehastigheten c.

Detta är redan mycket svåra saker, som icke skola höra varje linje till. Jag har här framfört dem såsom en provbit på, vad det handlar om för en formulering av *behovets princip* uti algebran. Den fulla behärskningen av formlernas språk är nödvändig, för att sådana saker som dessa skola kunna diskuteras på en verklig bas av vetande och kunnande. Det är just förekomsten av dylika behov uti naturvetenskaperna, som äro den starkaste motiveringen för att algebran, denna så teoretiska och eljes svårförsvarbara del av skolans matematikkurs, bibehålles åtminstone i den utsträckning jag i det föregående skänkt den.

Emellertid får ingen tro, att jag vill, att alla elever skola lära sig detta och att det sålunda skall ingå som ingrediens i ett allmänt mogenhetsprov. Jag återkommer, då jag kommer till linjedelningsfrågan, till denna betydelsefulla fråga. I varje fall måste vi redan här säga, att om detta också vore avsett för alla, så skulle i en sådan anordning ligga bra mycket mera sunt förnuft än i det absolut oförnuftiga polynomräknandet och problemlösandet. Det handlar dock här bland annat om vetenskapligt och sakligt värdefulla slutledningar, som ge behållning både för kunskap och tänkande.

Jag sade, att frågan om funktioners maximi- och minimivärden eller med andra ord frågan om de värden, en funktion kan antaga, är en svår sak i skolan. Varje lärare skall ha intrycket att han här rör sig på ett pedagogiskt ganska högt plan. Emellertid kan den fulla och fullständiga förståelsen av tankegångens alla detaljer nås, om den åskådning tillämpas, som jag ovan gjorde mig till tolk för.

Om på någon punkt den grafiska åskådningen är absolut oumbärlig, så är det just i denna fråga. Inom den tidigare undervisningen var ju diagrammet okänt och är det väl åtminstone i den omfattning, jag anser det vara nödigt, ännu på många ställen. Emellertid är denna sak utan anlitande av den grafiska åskådningen för eleverna ofattbar. Man strävade heller knappast efter någon verklig uppfattning, utan nöjde sig med ett nytt räkneschema, som åter ledde till en mängd problem. Särskilt var det för eleverna gåtfullt, att maximivärdet kunde utfalla mindre än minimivärdet, men man resignerade naturligtvis inom denna undervisning, där slutligen alltsammans, hela algebran, var mer eller mindre gåtfullt. Det fanns ju en regel i boken. — Man iakttog dess stipulationer, skrev max. vid det ena värdet och min. vid det andra enligt en förarglig minnesregel och så var den saken igen klar. Själva deduktionen var sådan, att man närde en stilla undran om läroboksförfattarna och lärarna riktigt visste, vad saken handlade om. För eleverna var saken som sades fullständigt obegriplig.

Mycket skulle redan ha vunnits, om framställningen avsett att utröna, vilka värden funktionen kan antaga; därigenom skulle extremum-värdena ha framträtt, såsom de gränser, *mellan* vilka eller *ytterom* vilka funktionsvärdena ligga. På detta sätt skulle det gåtfulla ha något skingrats. Men till och med detta offer åt funktionsbegreppet blev icke hemburet, utan hela kalkylen inriktades på utverkandet av de tvenne mystiska värden, som kunde efter regelns paragrafer beläggas med namnen maximi- och minimi-värdet för funktionen. Ett sådant tillvägagångssätt kan knappast gå under namn av undervisning.

Det som nu, frånsett mängden av algebraiska problem, brukar följa i utvecklingen är lösningen av ekvationssystem med flera obekanta, ingående i högre än första graden i ekvationerna. I verkligheten handlar det här om att söka snittpunkterna mellan kurvor av högre ordning, närmast då koniska sektioner. Detta, anser jag, bör utgå ur skolkursen. Då man här i alla fall icke kan gå till grunden, så ligger redan i detta ett skäl för en sådan åtgärd. Det hela blir tomma formella manipulationer. Jag vet ju nog, att man här också utvecklat allehanda metoder och konstruerat exempel, som passa för dessa metoder. Men dels äro dessa metoder rätt okända i matematiken i övrigt, dels glömmas de hastigt och det hela blir tämligen onödigt. De senare i matematiken uppträdande uppgifterna av denna art visa i övrigt stor obenägenhet att riktigt lämpa sig för dessa mera för skolbruk apterade metoder och erfordra uttänkande av nya förfaringssätt.

En sak kunde måhända tas upp. Lösandet av ekvationen av andra graden,

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

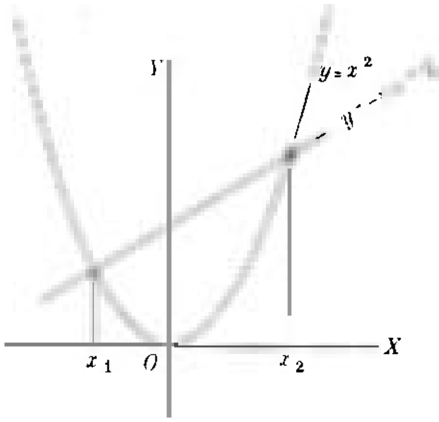
är identiskt med utfinnandet av abskissorna för snittpunkterna mellan den välinövade parabeln

$$y = x^2$$

och räta linjen

$$y = -px - q$$

Denna iakttagelse ger en enkel möjlighet att grafiskt lösa den kvadratiska ekvationen. Man ritar en gång för alla åt sig den fasta parabeln $y = x^2$. Sedan lägger man däröver linjalen, så att den täcker den räta linjen $y = -px - q$. Snittpunkternas abskissor äro den kvadratiska likhetens rötter

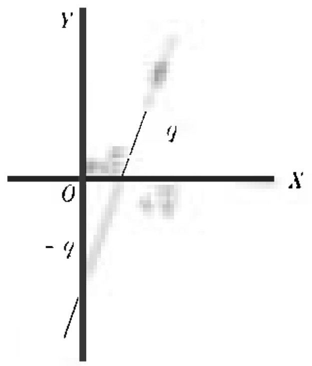


Det är här särskilt av intresse att närmare studera de fall då den räta linjen råkar parabeln i två, en eller ingen punkt, ty därav beror om den kvadratiska likheten har två, en eller ingen rot.

För fullständighetens skull vill jag, utgående från denna åskådning, utveckla frågan om rötterna, utan att alls ställa upp anspråk att införliva detta med skolkursen, åtminstone icke annorstädes än möjligen på reallinjen.

Då räta linjen $y = -px - q$ skär Y-axeln i punkten $-q$ inses, att räta linjen för *negativa* värden på q skär parabeln i två punkter.
Vi betrakta fördenskull endast *positiva* värden på q och utsätta punkten $-q$ på Y-axeln. Vidare utsätta vi punkten $(\sqrt{q}, q)$, som ligger på parabeln. Därefter förena vi dessa punkter. Skärningslinjen råkar X-axeln i punkten

$(\frac{1}{2}\sqrt{q}, 0)$. Vi påstå, att denna linje icke har någon annan punkt gemensam med parabeln än $(\sqrt{q}, q)$.



Om så vore fallet och (x, y) den punkten skulle vi ha $y = x^2$. Å andra sidan vore

$$\frac{y}{q} = \frac{x - \frac{1}{2}\sqrt{q}}{\frac{1}{2}\sqrt{q}}$$

och följaktligen

$$x^2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{q} = qx - \tfrac{1}{2}q\sqrt{q}$$
$$x^2 - 2\sqrt{q} \cdot x + q = 0$$
$$(x - \sqrt{q})^2 = 0$$
$$x = \sqrt{q}$$

varav följer, att en antagen andra skärningspunkt måste sammanfalla med punkten $(\sqrt{q}, q)$. Den räta linjen är således en *tangent* till parabeln.

Skall nu räta linjen $y = -px - q$ råka parabeln, måste den gå till venster om denna tangent. Men fördenskull måste dess snittpunkt med X-axeln ha en abskissa, som är mindre än $\frac{1}{2}\sqrt{q}$. Emellertid är denna snittpunkt lösningen till ekvationen $-px - q = 0$ och således $x = -\frac{q}{p}$. Alltså är

$$-\frac{q}{p} < \tfrac{1}{2}\sqrt{q}$$

varvid uttrycket till venster är positivt, beroende på att p är negativt. Härur få vi såsom villkor för skärningen

[illegible]

eller vårt gamla villkor. Väl att märka uppfylles detta alltid, då q är negativt. Det är sålunda ett allmänt villkor för att ekvationen skall ha rötter.

Den egentliga algebran är härmed avslutad. Det som ännu brukar tillfogas är läran om *logaritmer* och *serier*. Jag skall också dröja vid dessa saker. *Logaritmer.*

Jag har redan varit i tillfälle att uttala mig om logaritmerna. Jag anser, att man betydligt överdriver deras praktiska betydelse. I verkligt praktiskt räknande i samhället förekomma de helt enkelt icke. De ha ersatts med *räknestickan* och framförallt med *räknemaskinen*.

Logaritmerna ha haft sin period. Deras stora uppgift var närmast att ersätta sådana räknesätt som multiplikationen, divisionen och rotutdragningen med addition, subtraktion och division, och de inneburo sålunda en förenkling av sådan betydelse, att man med fog kan säga, att de på ett verksamt sätt bidragit till att göra den materiella kulturens väg framkomlig. Det synes mig därför, som om någon kännedom av deras väsen kunde inryckas i skolkursen med anspråk på att få ingå uti bildningsbildens uppbyggande. Därvid vädjar man givetvis icke så mycket till behovets princip, som fastmer till den kulturhistoriska princip, som jag också erkänt såsom i viss mån berättigad, då det gäller att uppbygga lärostoffet. Vad jag emellertid utdömer här som överallt och här isynnerhet, är den onödiga träning, som vanligen igångsättes med logaritmerna som underlag, och som synes ha till uppgift att göra den blivande medborgaren till någotslags räknebiträde.

Vi definiera logaritmen för 2 inledningsvis såsom lösningen till ekvationen

$$10^x = 2$$

Likasom då det var fråga om rotutdragningen, måste vår närmaste omsorg bli att utveckla ett förfaringssätt för att finna denna lösning. Vädja vi genast till tabellerna och deras på okända vägar vunna resultat, så stannar hela utvecklingen i dunkel. Ett teoretiskt alltid användbart förfaringssätt kan i verkligheten utvecklas, vars utbyggande knappast kan anses påkalla svårare tankekombinationer än de, som i den gamla algebraundervisningen slösas på allehanda onyttiga spörsmål.

Vi kunna givetvis lösa uppgiften enligt vår gamla beprövade grafiska metod, i det vi upprita kurvan för funktionen 10^x och sedan uppsöka den punkt på abskissaxeln, i vilken ordinatan är 2. På så sätt komma vi emellertid blott till ett grovt närmevärde på x. Vi utbilda därför en mera förfinad analytisk metod.

Vi veta, att x ligger mellan 0 och 1. Vi sätta fördenskull

$$x = \frac{1}{y}$$

där y således är större än 1 och få då

$$10^{\frac{1}{y}} = 2$$

eller

$$2^y = 10$$

Därur sluta vi, att y ligger mellan 3 och 4 och kunna sålunda skriva y i formen

[illegible]

där z är större än 1. Vi få då

$$2^{3+\frac{1}{z}} = 10$$

eller genom successiv utveckling

$$2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z}} = 10$$

[illegible]

[illegible]

[illegible] $\left(\frac{5}{4}\right)^1 = \frac{5}{4}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}$,
ligger z mellan 3 och 4.

Vi skriva åter

[illegible]

där u är större än 1 och få

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{u}} = 2$$

$$\frac{125}{64}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}} = 2$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{128}{125}$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{u} = \frac{5}{4}$$

eller om vi använda decimalbråk

$$1.024^{u} = 1.25$$

Nu ligger i detta fall u mellan 9 och 10.

Blicka vi tillbaka, så ha vi funnit

$$x = \frac{1}{y}$$

[illegible]

[illegible]

där u ligger mellan 9 och 10. Därav följer, att z ligger mellan $3\frac{1}{9} = \frac{28}{9}$ och $3\frac{1}{10} = \frac{31}{10}$. Följaktligen ligger y mellan $3\frac{9}{28} = \frac{93}{28}$ och $3\frac{10}{31} = \frac{103}{31}$ och således x mellan $\frac{28}{93}$ och $\frac{31}{103}$ eller således mellan

$$0.30108 \text{ och } 0.30097$$

Med avkortning till fyra decimaler kunna vi alltså fastslå att log $2 = 0.3010$.

Denna metod kan givetvis alltid användas. Den är besvärlig, men vi kunna på den vägen räkna ut en logaritmtabell, innehållande alla hela tals logaritmer.

Vi äro icke heller bundna på något sätt vid 10 som grundtal och kunna sålunda beräkna på detta sätt också andra än Brigg'ska logaritmer.

Detta, som härmed framställts, anser jag betydligt viktigare än det formella räknandet, som uppriktigt sagt kan inskränkas till några få exempel. Det ovan framställda ger en metod att infånga dessa hemlighetsfulla, i tabellverken ingående logaritmer och därigenom befria dem från deras mystik. De äro icke sällsammare, än att man genom en relativt enkel process kan beräkna dem. Man kan således beräkna hela den hemlighetsfulla logaritmtabellen, låt så vara, att den i verkligheten kalkyleras med alldeles andra och skarpare metoder. Häri ligger en betydande vinning för själva ställningstagandet till logaritmerna, från elevernas sida.

Jag förbigår frågorna om karaktäristikan och mantissan uti det Briggska systemet och dröjer i stället vid det nya funktionala sammanhang, som genom logaritmerna introduceras.

Vi betrakta log x där x genomlöper de positiva talen och där basen är 10. Vi finna i detta ett egenartat nytt beroende, som förtjänar uppmärksamhet. Om vi tänka oss diagrammet uppritat på millimeterpapper, göra vi märkliga iakttagelser. För $x = 1$ är $\log x = 0$, för $x = 10$ är $\log x = 1$, för $x = 100$ är $\log x = 2$, för $x = 1000$ är $\log x = 3$ o. s. v. Kurvan stiger sålunda med en synnerlig långsamhet. Är t. ex. $x = 1{,}000{,}000^{mm}$ d. v. s. 1^{km} är $\log x = 6$ d. v. s. kurvans höjd över X-axeln 6^{mm}. Saken blir ännu beaktansvärdare, då vi besinna, att om abskissan är 100^{mil}, så höjer sig kurvan 9^{mm} över X-axeln. Men då är abskissan redan så lång som Finlands genomskärning i nord-sydlig riktning.

Denna enormt långsamma stigning är en motsvarighet till den oerhört snabba stigningen hos 10^x, ty för $x = 1$ är $10^x = 10$, för $x = 2$ är $10^x = 100$, för $x = 3$ är $10^x = 1000$ o. .s. v. För $x = 9$ är redan denna kurvas ordinata 100 mil d. v. s. likamed ovannämnda genomskärning av Finland.

I övrigt äro 10^x och $\log x$ varandras *inversa* funktioner. Deras ordinator och abskissor ha bytt plats, varav förresten omedelbart följer, att den ena intar samma ställning till X-axeln som den andra till Y-axeln.

Detta jämte några typiska numeriska exempel kan vara allt, som behöves för att med fredat samvete kunna lemna logaritmerna.

Vad sådana numeriska beräkningar vidkommer, så är jag avgjort emot alla tabeller, som konstruerats enkom för skolbruk. Skola tabeller komma till användning inom matematikundervisningen, så skall man helt enkelt hålla sig till de i praxis använda. Dylika skolarrangemang höra just den gamla undervisningen till, där man för att nämna ett exempel i stället för ett vanligt måttband i skolmaterialiehandeln inköper en måttstav, som aldrig användes i praktiken. Lika är det med logaritmtabellerna, där jag bestämt utdömer alla för skoländamål arrangerade verk. Skoländamål ha logaritmerna alls icke, utan det hela blir en overklig konstruktion.

En sak, som också skall bort från kursen, äro de s. k. exponentialekvationerna, vilka äro konstgjorda, för skolanvändning av logaritmerna utfunderade uppgifter utan något värde.

Serier.

Vi komma sedan till skolalgebrans sista kapitel, som handlar om serier.

Dessa fördelas i *aritmetiska* och *geometriska* serier. Låt oss då genast fastslå, att av dessa åtminstone de aritmetiska serierna sakna all verklig användning och sålunda saklöst kunna bortlemnas. Det planlösa beräknandet av en sådan serie olika element ger ingen som helst behållning i kunskap och omdöme.

Annat kan sakläget vara med de geometriska serierna, som ha sin användning vid det tidigare i aritmetiken lösta problemet om penningars tillväxt med ränta på ränta. Emellertid bör frågan också här nära anslutas till detta problem.

Sedan man utvecklat formlerna

$$u = aq^{n-1}$$

och

$$s = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

vilka båda förresten äro alldeles självfallna och av vilka den senare innehåller ett känt divisionsresultat, skrider man till en förnyad behandling av förräntningsproblemet, varvid man hänvisar till den suveräna behandling man nu kan skänka detsamma.

Vi beteckna på övligt sätt $\frac{1\,[illegible]}{[illegible]}$ med i och få då såsom formel för det i geometrisk projektion växande kapitalets slutvärde vid det t^{te} årets slut

$$K_t = K_0(1 + i)^t$$

Denna formel visar oss, huru kapitalet beror av tiden och av räntefoten. Man kan beräkna en av kvantiteterna K_t, i eller t, om de två övriga äro bekanta, utan att såsom vi i aritmetiken gjorde, arbeta med förräntningstabellen som underlag.

Vi kunna vidare lösa problemen om *praenumerando* och *postnumerando* räntan. Om praenumerando räntan betecknas med a så äro alla inbetalningars slutvärde vid det t^{te} årets slut

$$A = a(1 + i)^t + a(1 + i)^{t-1} + \cdots + a(1 + i)$$

och bilda följaktligen summan av en geometrisk serie. Vi få således

$$A = a(1 + i)\frac{(1 + i)^t - 1}{i}$$

För postnumerando räntan få vi

$$B = a\,(1+i)^{t-1} + a\,(1+i)^{t-2} + \cdots + a$$

eller således

$$B = a\,\frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Annuitetens problem löses lika enkelt. Vi få för annuiteten a formeln

[illegible]

som är *amorteringsformeln*. Alla de i aritmetiken behandlade problemen ha härmed fått sin slutgiltiga lösning i formler vilka låta oss genomskåda, huru lösningen beror av de lösningen bestämmande faktorerna. Detta är just formelspråkets triumf, att det i sina enkla sigler sammanfattar långa och komplicerade tankeakter.

De oändliga geometriska serierna kunna gott bortlemnas. De äro blott egnade att visa på något, som ändock icke kan föras till någon större fördjupning och ge slutligen rätt liten behållning. Om tid och förhållanden medgiva, är jag dock på intet sätt avgjort emot att de framställas.

Sammanfattning.

Härmed är min exposé över algebraundervisningen avslutad. Rikedomen på detaljspörsmål har här måhända i någon mån undanskymt de ledande principerna för dess uppbyggande. Men dels finna de sin framställning i början av utvecklingen, dels ha de ställvis bragts till uttryck. När allt kommer omkring, har väl en uppmärksam läsare dock icke kunnat undgå att tvärs genom detaljerna se de ledande motiven avteckna sig.

Jag skulle nu vid slutet vilja göra gällande, att den starkaste strävan varit att bringa det hela ned till större förenkling. Denna strävan har varit så mycket naturligare som det, som åstadkommit svårigheterna och nedtyngt algebrakursen, icke varit sådant, som betingats av algebrans eget kunskapsmaterial, utan betecknat allehanda applikationer, som den pedagogiska »utvecklingen» tillfört denna gren av skolkursen. Denna strävan till förenkling skall också just på denna grund vara lättare att genomföra, ty svårligen skall väl någon röst höjas för att dylika saker få stå kvar i kursen.

Mina strävanden till förenkling ha emellertid också träffat andra delar av algebrakursen. Jag anser, att undervisningens mål där icke får vara att utbilda något slags teknisk virtuositet uti formlernas handhavande, då något sådant icke betingas ens av den mest vida tolkning av behovets princip. Och då har jag under sådana förhållanden höjt min röst till förmån för förenkling av kalkylerna längs hela linjen, till och med där det rört sig om sådant, som hör det centrala i undervisningen till. Jag har vid bedömandet av dessa frågor, där utan tvivel andra uppfattningar skola göra sig gällande, haft att stöda mig på en omfattande erfarenhet, som visat, att icke ens inom de matematiska specialstudierna de konstfärdiga grepp och transformationer, som med ett ansenligt uppbåd av tid och krafter inövas på skolan, komma till användning. Som jag tidigare sagt, är algebran lättare, där den kommer till användning, än vad den är i skolan.

Emellertid är vidare att märka, att jag helt och hållet omlagt det, som jag lemnat kvar. Jag har en alldeles annan mening med algebraundervisningen. Jag vill lära eleverna att fatta och förstå den algebraiska formeln såsom ett uttryck för ett särskilt beroende och icke såsom ett substrat för en formell kalkyl. Denna princip trycker sin prägel på hela planläggningen av min undervisning. Jag behöver icke upprepa, huru den verkar i detaljerna, ty det har jag redan på varje enskild punkt gjort. Jag vill blott framhäva, att denna princips oskiljaktliga tvillingsprincip är, att varje deduktion skall fattas in i grunden. En sådan flack och intetsägande definition som, att en ekvation är varje betecknad likhet mellan två algebraiska expressioner, så genomtypisk för den formella undervisningen, har för att nämna ett exempel ingen plats i min undervisning. Likaledes kan jag, för att nämna en deduktion, icke gilla det sedvanliga schematiska utvecklandet av eliminationsförfarandet vid två ekvationer med två obekanta, detta visserligen icke endast på grund av dess flackhet och grundhet, utan därför att resonnemanget i vissa fall är oriktigt.

De betydande reduktioner i algebrakursen, jag tänkt mig, lemna rum för ett fördjupat studium av det, som återstår, och torde därutöver bereda den möjlighet till reduktion av timantalet i algebra, som man inom andra lärodiscipliner, som arbeta med ett orättvist lågt timantal, längtar efter.

En följd av min plan blir den icke oväsentliga, att matematiken kommer att bli en dans, som alla elever kunna tråda, och icke längre en, som är avsedd endast för tåspetsdansörer. Det är väl dit man bör komma. Matematiken bär inom sig, såsom just sades, icke några särskilda svårigheter. De, som finnas äro människofunder.

En fråga, som nu träder i förgrunden är, huru allt detta skall fördelas på skolans särskilda utbildningsplaner. Vad då först den allmänna medborgarexamen, den allmänna bottenskoleexamen vidkommer, så är väl där kännedomen om första grads likheter den naturliga avslutningen. Därjämte kan den grafiska lösningen av den kvadratiska ekvationen d. v. s. det grafiska fixerandet av snittpunkterna mellan diagrammet för $x^2 + px + q$ och X-axeln för speciella exempel införas såsom en särskild avrundning. Detta kan väl medhinnas till och med med ett reducerat timantal, då de förenklingar vidtagas, vilka jag i det föregående förordat. Särskilt kommer polynomräknandets och problemlösandets bortfallande att bereda mycket rum för verkligt algebraiskt vetande.

Om vi sedan i fortsättningen särskilja mellan reallinjen och den humanistiska linjen, så har den senare sin naturliga avgränsning uti algebran i den propedeutiska framställning av polynomet av andra graden jag gav i det föregående jämte möjligen en kort mera av kulturhistoriska skäl införd framställning av logaritmerna. För reallinjen ställer sig saken annorlunda. Där behandlas polynomet av andra graden med större bredd, varvid lämpligen också dess allmännaste typ $ax^2 + bx + c$ debatteras. Därjämte diskuteras den grafiska lösningen av ekvationer mera systematiskt. Vidare studeras frågan om funktioners maximi- och minimivärden. Logaritmerna egnas större uppmärksamhet och ränteproblem av olika art diskuteras med de geometriska serierna som bas. Överhuvudtaget framträder på denna linje en starkare inträning i olika riktning av grundstoffet, avseende förmåga att med större teknik och rikare övning möta olika frågeställningar. Sålunda bör där en repetition av algebrans elementer inledas, som opererar med stegrade anspråk på en förnuftig teknik, sådan man sedan behöver den vid universitetens naturvetenskapliga fakulteter och tekniska högskolan.

Sammanfattar jag nu slutligen mina förslag i algebran, så gå de ut på bortlemnandet av onödigt invecklade kalkyler, bortlemnandet av ekvationer med flera än två obekanta, åtminstone från den allmänna mellan-skoleexamen och från den humanistiska gymnasiallinjen, bortlemnandet av det mesta om kalkyler med rotexpressioner, bortlemnandet av ekvationer av högre än första graden med flera obekanta, bortlemnandet av aritmetiska serier och oändliga geometriska serier, dessa senare åtminstone från den klassiska gymnasiallinjen, bortlemnandet av algebraiska problem. I stället införes diagrammet som didaktiskt hjälpmedel och hela undervisningen drives genomgående i ett tänkandes tecken, som är komponerat av en analytisk och en geometrisk komponent.

GEOMETRIEN.

Jag övergår nu till geometrien och dess undervisning i skolan. Jag förutskickar, att jag här kommer att framlägga sådana omläggningsförslag, att de helt och hållet komma att omgestalta den hävdvunna undervisningsbilden.

Denna undervisningsbild hör till de mest egenartade formationerna i skolan. Den saknar varje motsvarighet inom skolan i övrigt och uppvisar sin alldeles säregna pedagogik, som intet har med skolans övriga undervisningsformer att skaffa.

Det, som i geometrien läres, är ett logiskt tankesystem, genom vilket en särskild art av geometri, den *euklidiska*, uppbygges. I detta logiska systems deduktioner infångas eleverna vid ungefär 13 års ålder eller tidigare, och de lemna detsamma vid 18 à 19 års ålder efter att under denna tid ha varit med om dess logiska uppbyggande från grundpålningen till taklagsölet.

Egentligen är det här fråga om ett vetenskapligt system, som uppbyggts av Euklides. Det är väl det högsta prov på den pedagogiska inertien, att på denna punkt ingen metodisk ändring skett. Visserligen ha nya läroböcker utgivits, men de ha icke gått upp nya vägar. Och då de så icke gjort, har systemets obevekliga struktur hindrat dem från alla radikala ändringar. De ha företagit någon liten ändring, som vanligen dessutom haft den effekt, att det blivit sämre ställt med logiken.

Varpå beror detta? Närmast beror det väl på, att ingen ens vågat tänka sig, att geometri kunde läras annorlunda. Och om någon också varit så djärv har han icke vågat avlägsna systemet, det geniala av en av mänsklighetens stora andar uppbyggda systemet, emedan han icke vetat, vad som skulle sättas i stället.

Nu måste man i verkligheten kunna bra mycket geometri för att med full omdömesfrihet stå inför detta undervisningsproblem. Som känt ingick emellertid denna art av geometri icke i våra skollärares utbildning till för något årtionde sedan. Därav kom det sig, att de, som närmast skötte om undervisningen och läroboksskrivandet, icke egde sådana insikter, att de kunde överskåda effekten av ett ingripande. Följden har också blivit, att såsom jag framhöll, de rätt oväsentliga förändringar som gjorts endast varit egnade att rubba systemets logik.

Vetenskapligt ligger geometriens problem på följande sätt. Man abstraherar från den »reala verkligheten» och skapar hela geometrien genom en tankeprocess. Man upplägger ett system *axiom*, genom vilka geometriens grundelement och deras kapitala ur varandra logiskt icke deduktivbara egenskaper fixeras. Ur dessa egenskaper härledas sedan på logisk väg nya egenskaper, som fixeras i nya teser, vilka till åtskillnad från axiomen kallas *teorem*. Nu är det hela beroende på urvalet av axiom och man kan sålunda genom olika konstellationer på denna punkt skapa olika geometrier med olikartade teorem. Det klassiska exemplet är just den Euklidiska geometrien. Den innehåller i sin axiomkomplex postulationen, att genom en punkt utom en given rät linje endast en linje kan dragas, som icke råkar den givna linjen. Denna tes kan icke logiskt deduceras ur komplexen av den Euklidiska geometriens övriga axiom och är sålunda ett axiom. Förneka vi detta axiom och ge sålunda rum för tanken, att genom en punkt utom en given rät linje kunna dragas flera linjer, vilka icke råka den givna linjen, så bilda de övriga axiomen och detta nya axiom en komplex av axiom, ur vilken vi genom logisk deduktion kunna uppbygga en tvillingsgeometri till den Euklidiska geometrien. Dess teorem skilja sig därvid fullständigt från teoremen uti den Euklidiska geometrien. På samma sätt kan man genom andra förändringar i den Euklidiska geometriens axiomgrupp eller genom dess fullständiga omläggning skapa nya, logiskt lika oantastbara geometrier som den Euklidiska.

Känna vi en gång detta, så förstå vi också, att det här är fråga om vetenskapliga tankeexperiment, som höra universiteten och forskningen till. Att framlägga ett sådant tankesystem till logisk genomarbetning på skolan är alldeles galet. Vi förstå också, varför inga förändringar skett. Ty den enda förändring, som här kan ske, är att låta hela systemet försvinna och från början klargöra för sig, vart man vill komma med att undervisa geometri i skolan. Sedan den saken är klar, ordnar man undervisningen så, att man kommer fram till det man vill nå. Men för genomförande av ett dylikt djärvt program måste man ega en fullständig överblick över, hur allt det som ovan utvecklades hänger ihop, och så måste man därutöver ännu vara hemmastadd inom en del frågor i geometrien. Detta är en punkt, där vetenskapen har ett ord med i laget, ehuru den givetvis icke har att bestämma, huru geometrikursen skall slutligt se ut.

Jag sade, att det nuvarande systemet är alldeles befängt. Man behöver för den sakens skull endast hänvisa till det ridikyla i, att med 12 à 13 åringar inleda logiska och vetenskapliga deduktioner. För deras sunda förstånd är det ofattbart, att man uppbådar en mängd svåra tankar för att bevisa någonting så solklart, som att två raka vinklar äro lika stora eller någon annan av begynnelsens stora sanningar. Det hela reser sig inför dem såsom någonting otroligt och komiskt.

Vidare följer med detta vetenskapliga system, att en hel del begrepp, som verkligen ligga påfallande nära, på grund av systemets avsatsbyggnad komma in i elevernas begreppsvärld på ett sent stadium. Jag tänker på cirkeln, rektangeln och kvadraten. Och när de sent omsider en gång komma in på scenen, äro de mest det overkliga substratet för allehanda självklara sanningar, som med möda och besvär genom konstfulla deduktioner tillföras dem.

Det finnes ännu en annan betydligt svårare nackdel hos systemet. Euklides system utvecklas nämligen i planet. På detta sätt blir skolgeometrien nära nog enbart plangeometri. Rymdgeometrien är uppskjuten såsom ett annex till det högsta stadiet.

Detta strider emot geometriens hela väsen. *Ty geometrien är rymdgeometri.* Det blir sålunda ingen verklig geometri eleverna lära sig, utan en till de plana figurernas relationer inskränkt del av geometrien.

Man talar i den till reformer inom matematikundervisningen strävande rörelsen om *rymdåskådningsförmågan* såsom ett av geometriundervisningens främsta mål. Därmed menas den ingalunda lätta förmågan av orientering över konfigurationer och konstellationer i den tredimensionala rymden. Man har särskilt förebrått den nuvarande geometriundervisningen, att den genom att under åratal kvarhålla eleverna vid planets figurer försummar hela det betydelsefulla moment i undervisningen, som består i rymdåskådningsförmågans uppövande. Man kan till och med säga, att det ensidiga sysslandet med planet är egnat att göra den geometriska åskådningen på något sätt tvådimensional och sålunda direkt hindrar rymdåskådningsförmågans uppövande.

Man har gått mycket långt i uppskattningen av rymdåskådningsförmågan och upphöjt, såsom jag redan sade, dess utbildande till geometriundervisningens huvudsyfte. Man har uppställt den såsom en matematikundervisningen ledande princip vid sidan av en sådan av mig i det föregående utvecklad princip som det funktionala tänkandets skolning.

Här är jag icke längre riktigt med, varmed jag icke vill ha sagt, att jag skulle underskatta betydelsen av den tendens, som framträder i denna allmänna strävan. Jag är fullt med om, att rymdåskådning är en synnerligen kapital sak för dem, som skola fortsätta sin utbildning i matematikens tecken vid universitet eller tekniska högskolor. Jag har själv som lärare vid dylika anstalter varit i tillfälle att konstatera, huru illa den geometriska elementarundervisningen förbereder eleverna för de mycket stora anspråk på rymdåskådningsförmåga, som där nära nog på alla punkter ställas. Men jag tror, att man överdriver hela hopen, då man tillmäter denna förmåga en dominerande plats uti det allmänna tänkandets värld. Det är ju en bra sak att ega, men ingalunda inom samhälls- eller vetenskaplig verksamhet på något sätt oundgänglig. Talet om dess stora värde är nog uttryck för en icke sällan observerad generalisering, som ur en saks betydelse inom ett visst område föranleder fackmännen att i denna sak se ett betydelsefullt moment i hela den mänskliga uppfostran.

Särskilt oläglig ställer sig den nuvarande ordningen för dem, vilka över mellanskoleexamen gå ut ur skolan. Deras geometriska utbildning försiggår uteslutande i planet för att nu icke tala om, att deras kurs är ett första avsnitt av Euklides' system, där snittlinjens läge bestämmes av den till buds stående tiden.

Själva den geometriska undervisningsmetoden är till tröttsamhet enformig. Sats efter sats upptas och bevisas. Det har till och med på många håll utbildat sig en alldeles särskild bevisteknik, som med alla sina slutledningar är ganska främmande för det matematiska bevisandet och har över sig en prägel av skolträning. Ofta stannar under allt detta, under det formella inövandet av bevisen, själva den sakliga kärnan alldeles i skymundan. Det blir en bisak, vad beviset gäller; det centrala är, att icke klicka i det formella bevisets detaljer. För de små nybegynnarna är denna undervisningsmetod redan därför förnuftslös, att de icke förstå, vad läraren fordrar av dem. De äro alls icke på det utvecklingsstadium, att dem skulle kunna bibringas någon uppfattning av, vad det är fråga om. De klara sig genom att läsa bevisen utantill från boken. Då minnet sedan klickar, kunna de mest groteska karikatyrer av de pretenderade bevisen serveras, med huller om buller omkastade slutledningar. Då förståndet efterhand växer och övningen avsätter sina spår, fås det hela att gå flottare. Men tråkigt är det för eleverna.

Man har på senaste tid gjort en del ansatser till ändringar i den hittills bestående ordningen. Sålunda har man infört en *geometrisk propedeutik*, som avser att göra de små eleverna förtrogna med de geometriska begreppen på s. a. s. empirisk väg, innan de inträda i bevisandets årslånga tvångsarbete. Detta är en synnerligen förnuftig tendens. Men den har naturligtvis icke fullföljts, såsom det hade bort ske. Den omfattar väl, där den förekommer, en termin. Och under den terminen är det nog inte heller den rena iakttagelsen, som dominerar. Det gäller också att belasta minnet med en hel del saker sådana som antalet kanter i en ikosaeder m. m. dyl. som är komplett onödigt. Det är icke utan att man måste konstatera, att det vilar ett förunderligt öde över alla ansatser att göra matematikundervisningen på skolan förnuftigare, varpå detta sedan kan bero.

Efter denna allmänna ingress går jag nu lös på geometriundervisningens problem. Därvid skall jag icke tveka att också i denna fråga gå ner till detaljerna, då det gäller att belysa någon viktig sak. Jag skall bli i tillfälle att i detaljerna komplettera den allmänna kritik av status quo, som jag ovan utvecklat.

Vi ställa oss inför själva huvudfrågan och fråga oss alltså, vad man avser med geometriundervisningen. Vi vilja här komma till ungefär samma fasta definitioner, som ifråga om aritmetiken och algebran.

Jag vill då först vända mig mot den uppfattning, som söker geometriens betydelse utom geometrien själv och som sålunda ser dess betydelse uti den logiska träningen. Denna åskådning hör helt och hållet den formella epoken till, och kan icke mera tillmätas någon betydelse. Genom att bevisa geometriska satser lära sig eleverna att bevisa geometriska satser. Att deras allmänna skarpsinne skulle stegras har jag tidigare i denna framställning, då det var fråga om matematikens förmenta förmåga att »städa huvudet», analyserat och tillbakavisat. Givetvis ger den logiska träningen ett visst bidrag till det allmänna tänkandets mekanism. Men man får icke överdriva saken. Själv har jag i det allmänna planet haft rätt ringa stöd av de slutledningar, genom vilka Pythagoras' sats bevisas.

Vi lemna hela denna sak därhän. Vi bedöma geometrien såsom sådan och fråga, om den skall undervisas i skolan och vad som i så fall skall meddelas samt på vilket sätt det skall ske.

Nu utvecklade jag på en punkt i denna framställning, visserligen såsom en antites, att den medborgare, som icke skall fortsätta på de matematiskt betonade banorna, knappast torde behöva i brutal fattning av ordet mer än någon kunskap i aritmetik och namnen på de allra vanligaste geometriska figurerna. Detta är en ståndpunkt, som jag icke förfäktat i denna framställning, ehuru det sunda innehållet i denna formulering icke är mig alldeles främmande, vilket torde bevisas av hela denna framställnings strävan till förnuftiga förenklingar. Jag har ju också genom en dilatation av behovets princip berett rum för den utan tvivel mest omtvistbara delen av matematikkursen, nämligen algebran, ehuru jag i den frågan icke har alldeles gott samvete. Varje förnyat genomtänkande leder mig dock till, att en viss kännedom av de för mänsklighetens utveckling och också för den dagliga usus betydelsefulla formlerna måste ingå i en bildad människas proviantkista.

Emellertid är det ett gott tecken, att den åskådningen, som går längst ifråga om de matematiska insikternas decimering, i alla fall lemnar ett visst rum för geometrien. Detta beror givetvis icke på respekt för den deduktiva logik, som där kommer till användning, utan på någonting alldeles annat, som jag här vill dröja vid. Den är den valhänta formuleringen av det faktum, att geometrien behöves och att den sålunda är begrundad i behovets princip.

Det finnes en geometri, som ingenting har att skaffa med skolans bevisande geometri i den mening att den skulle vara en tankeprodukt, formad enligt logikens lagar. Det är verklighetens formsammansättning, den *empiriska* geometrien. Där finnes det fullt av geometriska konfigurationer, pyramider och koner, trianglar och kvadrater, där finnes kongruens och likformighet; allt detta i reell verklighet och icke som alster av spekulationer och deduktivt tänkande. Det är denna empiriska geometri eleverna skola lära sig, liksom de inom alla andra lärofack lära sig känna det förefintliga, det existerande. Det finnes ett geometriskt kunskapsmaterial, ett geometriskt stoff, som eger i viss mening reell existens, och det är det, som skall tillföras eleverna.

Metoden är väl också i och med detta klar. Det är i stort sett samma metod, som alltid användes, då man tillför empiriskt vetande.

Var blir nu bevisandet? Jag vill icke helt och hållet avlägsna detsamma. Men det hör ett alldeles annat själsligt stadium till än det som 12-åringarna uppvisa. Den spekulativa anda, som utan tvivel finnes uppe på gymnasialstadiet, skall med intresse se den *ideala geometrien* växa upp som en spekulativ tankeprodukt, som idealiserar de empiriska bilderna och skådar deras inre sammanhang.

Detta är förresten den historiska utvecklingsgången. Geometrien har icke vuxit upp i människornas mitt såsom en spekulativ tankeprodukt. Dess begrepp och åskådningar ha mödosamt uppsamlats under det verkliga arbetet för att slutligen under en hög utvecklingsperiod för den mänskliga spekulationen sammanföras och sublimeras till ett vetenskapligt system, hopfogat med omutlig logik. Jag har i denna framställning flerstädes påmint om liknande processer inom andra delar av matematiken och därvid upphöjt till en nära nog undervisningen dominerande princip, att den skall vara en miniatyrbild av den stora undervisning, som kallas mänsklig utveckling.

Det, som således skall ske, är att hela det nuvarande systemet avlägsnas med sina bevis och deduktioner och ersättes med, vad jag ovan kallat den empiriska geometrien.

Jag vill göra gällande, att detta är synnerligen viktigt ur en speciell synpunkt, liksom överhuvudtaget mycket av det jag i det föregående utvecklat. Samhället kan givetvis icke i längden tolerera den form av matematikundervisning, som nu bedrives i skolan. Särskilt stark är reaktionen mot det ridikyla bevisandet, som fyller alla hem med undran och förbittring. Fås här icke en ändring till stånd och föres icke det hela in på vägar, som äro för den upplysta opinionen fattbarare, kan det hända, att över matematiken måhända går fram en betydande ödeläggelse, varvid mycket av det sunda denna undervisning innehåller får följa med i den allmänna tvångsrensningen. Röster för en dylik tvångsrensning ha höjts.

Uttrycket empirisk geometri låter ju ganska främmande. Mången skulle utan tvivel anse geometrisk propedeutik mera lämplig. Emellertid innebär propedeutik en värdesättning som jag icke underskriver. Den empiriska geometrien är ingen förberedelse. Den är skolans geometri.

Jag har redan hänvisat till, att behovets princip icke ställer sig främmande för den empiriska geometriens kvarstående på skolprogrammet. De begrepp, åskådningar och teser, den utvecklar bilda ett bestämt realvetande, som icke saknar betydelse, då man skall orientera sig i tillvaron. För dem, som utvandra med mellanskoleexamen, är ett mått av geometri nödvändigt, särskilt för dem, som skola söka sin fortsatta utbildning inom de tekniska läroverken. För alla dem, som gå över den reala gymnasiallinjen, ligger saken klar. De behöva grundliga insikter i den empiriska geometrien och måste dessutom särskilt om de gå till specialstudier i matematik ega en god inblick uti den ideala geometriens system.

Men också för dem, som över gymnasiet söka sig till annan universitetsbildning, bör den empiriska geometriens allmänna begrepp och resultat icke vara främmande, liksom man kanske kan säga, att den ideala geometriens hela överskådbara system såsom vetenskaplig tankeskapelse måhända kan påräkna deras intresse, ehuru jag medger, att vi därmed träda utöver gränserna för behovets princip.

Jag behöver väl knappast säga, att vid lärostoffets meddelande, alltså i geometriundervisningen, alla de metodiska principer jag vid flera tillfällen i denna framställning utvecklat, komma till sin rätt. Det funktionala tänkandet har här sin motsvarighet uti den fantasiens verksamhet, som påkallas av figurernas *rörlighet.* Talmaterialets realitet har sin pendant uti *figurmaterialets realitet.* För självverksamheten erbjuder geometrien de rikaste mjöjligheter. Överhuvudtaget bör den empiriska geometrien till sitt stoffliga innehåll och sin metodiska framfart inom figurernas och formernas värld realisera samma allmänna program, samma strategiska och taktiska uppgifter, som aritmetiken hade att fullgöra inom talens rike. Denna i någon mån vaga formel eger mera av vägledning än vad som vid flyktig granskning kan tänkas.

Aritmetiken har *räknandet* såsom sin specifika sysselsättning. Räknandet skapar problemen och räknandet för från primära taluppgifter till sekundära slutledningar. På samma sätt är *ritandet* geometriens sysselsättning par preference. Den empiriska geometrien avsvor sig bevisandet, men den upptar ritandet såsom sin arbetsmetod. *Den empiriska geometrien är en ritande geometri.*

Vi hade ett syfte med räknandet i aritmetiken, som uttryckligen bragtes till uttryck. Vi ville genom detsamma göra aritmetiken till en erfarenhetskunskap av samma art, som den lärlingen inhemtar i verkstaden. Under själva räknandet, givetvis endast då det är ordnat såsom jag utvecklade saken, samlas efterhand erfarenhetsrön, som konstituera den fasta form av vetande, som det genom eget arbete inhemtade eger. Sällsamt nog har denna arbetets kungsväg till vetande rätt litet beaktats inom skolans olika lärodiscipliner. Ännu alltjämt är det det medeltida åhörandet, som går igen såsom den enda förmedlaren av vetande. Liksom vid aritmetiken vill jag, att i geometrien ur sysslandet med figurer, ritandet och flyttandet skall ihopfogas ett fast erfarenhetsvetande. Matematiken skall på detta sätt inläras både inom analysen och geometrien ungefär på samma sätt som man praktiskt lär sig ett nytt språk. Icke genom regler och dekret skall matematiken bibringas, utan genom att *användas* såsom ett förnuftigt uttrycksmedel för tankar och handlingar, som eljes icke kunna bringas till uttryck. På så sätt återspeglar geometriundervisningen samma allmänna grundtankar, som besjäla hela min syn på undervisningsproblemet och detta icke endast, där det har matematiken som uppgift.

Ritandet begynte redan uti aritmetiken. Där stiftade eleverna bekantskap med *linjalen* och *passaren* ävensom *vinkellinjalen*. De hade också en icke ringa träning uti ritandet, särskilt genom de ständigt återkommande diagrammen. Men också rent geometriskt betonade uppgifter löstes. Sålunda lärde de sig känna rektangeln och kvadraten samt upprita dem; de stiftade vidare bekantskap med cirkeln. De lärde sig ännu att mäta vinklar och stiftade i sådant syfte bekantskap med *gradskivan* samt genom dess användning med vinklars mätning; de mest remarkabla vinklarna ingå redan i deras kunskapsförråd.

Av alldeles särskilt intresse voro triangeln och polygonen, vilkas areor klarlades. Icke ens rymden lemnades obehandlad, i det nämligen prismat och cylindern voro substrat för praktiska volym- och tyngdberäkningar.

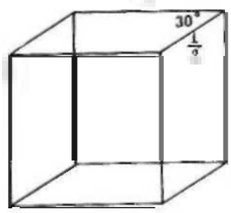
Det var sålunda redan en hel del geometrisk verksamhet, som kom till synes i aritmetiken, bland annat ha alla det plana ritandets hjälpmedel kommit till användning.

Det är ett rätt egendomligt sakförhållande, att skolgeometrien, som dock också haft att syssla rätt mycket med rymdfigurer, icke egt någon metod för uppritning av rymdfigurer. Jag tror förresten, att innan den *deskriptiva* *geometrien* infördes som studieämne vid universitetet och en kort kurs i denna viktiga del av geometrien blev obligatorisk i kandidatexamen, våra skollärare icke kände till någon sådan metod. Åtminstone framgår det av läroböckerna, att läroboksförfattarna icke kände till, huru man ritar rymdfigurer.

Emellertid bör enligt mitt förmenande en metod givas eleverna. På vilket stadium detta skall ske, skall jag senare utveckla. Det finnes också lyckligtvis en enkel metod som är lättare att inhemta än mycket av det, som redan på ett tidigt stadium erbjudes eleverna.

Denna metod består däri, att vi på tavlan, i häftet eller på ritbrädet rita slagskuggan av rymdfiguren, då den belyses med parallellt infallande ljus, exempelvis solljus. Varje sträcka, som är parallell med tavlan, har då en skugga, som är kongruent med den givna sträckan och parallell med denna. En från tavlan vinkelrätt utstående stav har en slagskugga, som begynner i stavens fotpunkt och vars riktning och längd beror av ljusets riktning. En vanlig konvention, som garanterar goda bilder, är att denna slagskugga faller längs den linje, som lutar neråt från den genom stavens fotpunkt gående i tavlans plan liggande horisontala linjen, medan dess längd är hälften av den originala stavens längd.

Vi tillämpa detta på en kub, som har ett sidoplan i tavlans plan och är orienterad, så att konturerna äro horisontala eller vertikala.



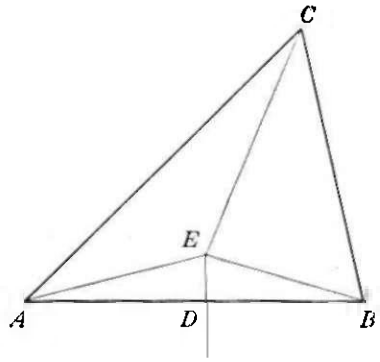
Vi få närslutna bild, som är en synnerligen åskådlig bild av kuben.

I denna metod ha vi ett förfaringssätt, som alltid kan användas. Vi kunna avrita en byggnad enligt denna metod. Visserligen kommer ett djupare inåt i riktningen gående föremål att te sig i någon mån onaturligt, då det avritas enligt denna metod. Det blir nämligen lika högt längre bort, vilket strider emot vår erfarenhet vid det vanliga seendet. Det skall emellertid också höra min geometriundervisning till att utveckla *centralperspektivet*, som i motsats till ovan framställda *parallellperspektiv* återger bilderna av rymdfigurer, sådana de te sig vid seendet och sålunda såsom de framträda på tavlor och fotografier.

Jag sade, att geometrien skall uppbyggas kring ritandet såsom den det hela genomgående verksamheten. Huru är det nu beställt med ritandet uti den tidigare undervisningen?

Det måste medges, att där, om den går i sina vanliga gängor, icke finnes så mycket ritande. Det är egentligen endast problemen, som ge anledning till ritning. Men icke ens detta tillfälle har alltid utnyttjats. Nu är det intressanta vid ett geometriskt problem att icke blott kunna ange, huru det löses, utan även att med linjal och passare in i detalj lösa problemet. Jag tror att man icke så noga hållit på den saken, icke ens vid de i skolboken ingående standardproblemen, utan att man också där nöjt sig med »frihandsteckningar». Åtminstone går min erfarenhet så om examinator i studentexamensutskottet i denna riktning. För att nu alls icke tala om de rymdgeometriska teoremen och problemen, där ett mer eller mindre artistiskt återgivande på fri hand av figurerna fått ersätta den här verkligt föreliggande bristen på metod.

Det kan för övrigt här mera i förbigående nämnas, att den riktigt ritade figuren vid bevisandet av en sats kan ge ett bestämt stöd vid utfinnandet av beviset, medan den slarvigt och på måfå såsom illustration nedkastade skissen kan leda tankegången på avvägar. Om vi t. ex. i närslutna figur låta E vara snittpunkten mellan vinkeln C^s-bissektris och sidan AB^s-medelnormal, och



sammanbinda E med A och B, så följer, att $AE = EB$. Men då äro enligt en kongruenssats trianglarna AEC och BEC kongruenta, varav åter följer, att $AC = BC$. Man kan således genom fullt logiska slutsatser bevisa, att *varje triangel är liksidig*. Felet ligger i den oriktigt ritade figuren. Punkten E ligger nämligen i verkligheten *nedanom* punkten D.

För att emellertid återgå till ritandet, så har således den bevisande, ideala geometrien rätt ringa användning för denna betydelsefulla verksamhet. Det är som skulle man utveckla i ett kallt schema de hela talens räknelagar, bevisa och deducera utan att räkna. Jag tror, att det sällsamma i den bevisande geometrien genom denna jämförelse kommer till ett grellt uttryck.

Utom att ritandet i geometrien liksom en gång räknandet i aritmetiken är själva upptäckarverksamheten, som för till begrepp och teser, har detta ritande sin stora betydelse i den allmänna daningen av individen, avgjort större än den makt man tillagt bevisandet. Det finnes bra mycket av formens skönhet i geometriens figurer. Deras regelmässighet beteckna en stråt i det, som vi kalla vackert. Ritandet, sysslandet med dessa figurer och mönster har sålunda utan tvivel sin betydelse, då det gäller att väcka sinnet för det estetiska. På en punkt är detta ritande kallat att komma i direkt kontakt med konsten. Det är då man i rymden stiftar bekantskap med perspektivet. Vi ha att minnas, att centralperspektivet haft sin utveckling inom målarkonsten, där man nådde dess fulla behärskning under renässansen, medan den tidiga målarkonsten ännu arbetade med parallellperspektivet ungefär sådant vi ovan utvecklat det. Det leder en lång väg i konstens historia från det ena perspektivet till det andra.

Jag vill på denna punkt inskjuta, att det här icke handlar om oprövade idéer och genom lös spekulation tillkomna uppslag. Under min verksamhet såsom lärare vid lärdomsskolan införde jag ett särskildt läroämne, som jag kallade *geometrisk ritning* och som var valbart med den vanliga teckningen såsom alternativ. Detta läroämnes undervisning var utformat enligt de allmänna ideerna för en ritande geometri. Densamma inleddes med ritandet av plana figurer och av dem sammansatta *mönster*. Därvid var det icke fråga om att återföra figurens uppbyggande till postulaten. Jämte passaren och linjalen togos också vinkellinjalen, gradskivan och kurvmallen i anspråk. Från planet gick utvecklingen rätt snabbt över till rymden. Där utvecklades såsom första ritmetod den parallellprojektion som ovan utvecklades. Med denna såsom underlag ritades av kuber sammansatta rymdfigurer såsom fundament, kors m. m. Arbetet gick sedan vidare till ritandet av *horisontal-* och *vertikal-projektioner*. Med denna metod inträder *arbetsritningen* i elevernas medvetande. Ur horisontal och vertikalprojektionen kunna när som helst den verkliga figurens mått uttagas och figuren rekonstrueras d. v. s. tillverkas. Detta måste dock sägas hava ett ofantligt bildningsvärde framom det i stort sett meningslösa bevispladdrandet, som nu fyller skolornas geometritimmar. Därtill kommer, att eleverna med sund känning av, att det härvid handlar om reala och nyttiga färdigheter, med starkt intresse gå till sina arbetsuppgifter, medan ingen kan av dem begära något intresse för den nuvarande geometriundervisningens årskurser, där de uppriktigt sagt egentligen icke lära sig någonting alls av verkligt vetande. Emellertid stannade i den geometriska ritningen utvecklingen icke vid detta. Jag införde såsom den närmaste metoden för fortsatt ritning den *axonometriska metoden*, varvid jag inskränkte mig till *ortogonal axonometri*. Denna metod bygger på, att vi tänka oss rymdfiguren, som skall avbildas, inorienterad i ett treaxligt koordinatsystem i rymden, varpå vi projiciera genom ortogonalprojektion koordinatsystemet och rymdfiguren på ritbrädet. Man kommer lätt underfund med, att de tre koordinataxlarnas bilder, bildaxlarna, falla längs de tre höjdlinjerna i *spårtriangeln*, som åter är den triangel vars hörn ligga i de tre punkter, i vilka de tre koordinataxlarna genomborra ritbrädet. Koordinatsystemets origo får till projektion spårtriangelns höjdlinjers skärningspunkt. Rymdfigurens avbild fås med dessa element som underlag enligt lagar, som lätt kunna bibringas eleverna. Bilderna bli vid lämpligt val av spårtriangeln synnerligen vackra. Det lönar sig att på detta sätt rita förslagsvis den reguljära dodekaedern.

Kursen i geometrisk ritning omspände också *centralperspektivet*. Jag tvekade icke att ingå på denna till synes svåra metod. Det handlar där om *målarperspektivet* d. v. s. den bild, som avtecknar sig på en transparant skärm som inskjutes mellan ögat och rymdgestalten. Man kan också säga, att det är fråga om den slagskugga, som rymdgestalten kastar på en skärm, då den underkastas centralbelysning.

Också här framträda genom rätt enkla och i varje fall synnerligen lärorika överläggningar vissa för ritningens tekniska utförande värdefulla element. Sålunda kommer den punkt, där perpendikeln från ögat råkar skärmen, den s. k. *huvudpunkten* att spela en dominerande roll.

Alla linjer, som i verkligheten stå vinkelrätt mot bildskärmen, komma nämligen att avteckna sig på skärmen såsom linjer, vilka sikta mot huvudpunkten. Är bildplanet vertikalt såsom vid målning och fotografering är fallet, ha vi vidare att observera på duken eller plåten den genom huvudpunkten gående horisontala linjen, *horisonten*, som avgränsar bilderna av den ovanom seplanet och den nedanom detta plan liggande verkligheten. Bilderna av i verkligheten parallella linjer konvergera mot en punkt på denna horisont.

Med detta har avbildandet nått sin suveräna fulländning. Det har som jag sade varit en lång väg, som menniskan på denna linje haft att genomvandra. Man kan följa den ända från antiken, där man exempelvis i de pompejanska väggmålningarna träffar på särskilda anordningar, det osäkra horisontala mittelskiktet, den vertikala mittellinjen, de uppifrån och nerifrån mot mittelskiktet inriktade linjerna, vilka anordningar ersätta den bristande kännedomen om perspektivets lagar. Man möter samma osäkerhet i förrenässansens målarkonst. Antingen är där parallellperspektivet förhärskande eller också uppträda prodromala ansatser till ett centralperspektiv, där idéerna dock äro ännu så dunkla, att flera flyktpunkter infogas i bilden eller helt och hållet saknas och ersättas med ett allmänt konvergerande av djuplinjerna mot konvergensområden i stället för mot konvergenspunkter.

Det synes mig som om detta borde beaktas av undervisningen bland annat på grund av den kulturhistoriska princip, till vilken jag i min framställning ofta haft anledning att rekurrera. Det är här fråga om någonting, där matematiken ger ett betydande bidrag till det allmänna vetande om kulturens mödosamma vandring, som är en förutsättning för det i nuet försiggående verkandet.

Emellertid har jag i undervisningen i geometrisk ritning fört utvecklingen avsevärt längre. Man kan nämligen ur en centralperspektivisk bild under vissa förutsättningar rekonstruera den originala rymdfiguren, en konst, vars värde genast inses, då man besinnar, att man således ur en fotografisk bild av exempelvis en byggnad kan rekonstruera dess byggnadsritning, d. v. s. fasad och grundplan. Jag gick också in på denna s. k. *fotogrammetri*, som spelar en synnerligen stor roll inom rekonstruerandets och restaurerandets konst.

Den art av undervisning, som härmed framlagts, hörde icke till matematikundervisningen, utan var en särskild från densamma fristående ritningsundervisning. Men den hade givetvis en betydande återverkan på förståelsen av och intresset för geometrien. Mitt förslag går nu ut på att inarbeta dessa åskådningar uti den empiriska geometri, jag ovan framförde och som enligt mitt förmenande skall sysselsätta eleverna under de tre första åren av deras geometristudium. Därigenom tillföres denna empiriska geometri ett betydande lärostoff och en omfattande teknik. Någon fara för att den empiriska geometrien icke skulle förslå för de tre åren föreligger nog icke.

Efter denna exkurs återvänder jag till den fortgående utvecklingen. Denna exkurs har avsett att uppvisa en alldeles ny art av geometrisk undervisningskonst, där det centrala är det geometriska stoffet och den geometriska tekniken. Vi kunna mot bakgrunden av denna exposé på ett alldeles nytt sätt taga ställning till geometriundervisningens problem.

Jag har genom att här i sammanträngd gestaltning framföra några brottstycken ur den geometriska ritningen velat visa på den rikedom av stoff, som står den empiriska geometrien till buds. På samma gång har denna exposé utan tvivel varit egnad att ställa den på skolan bedrivna geometriundervisningen uti en betänklig dager. Inför detta nya lärostoff kan man icke undertrycka ett småleende vid tanken på den några månader omfattande propedeutiska kursen i geometri, då läraren kommer in i klassen med den för skolbruk inrättade *klotslådan* under armen och sedan under lektionen fiskar upp den ena modellen efter den andra och vid var och en av dem påtvingar eleverna ett meningslöst minnesvetande. Och när detta är klart, går undervisningen in i bevisandets tecken. Detta bevisande fortskrider sedan med en ohygglig monotoni genom en saklig öken, där under åratal intet som helst remarkabelt geometriskt faktum livar upp tomheten. Och om ett sådant faktum uppträder såsom t. ex. satsen om periferivinkeln i en cirkel, så är fantasien redan på något sätt så avtrubbad, att själva det märkliga sakförhållandet knappast observeras uti det monotona bevisandets formella retorik.

Såsom jag sade ter sig denna geometriundervisning tom och innehållslös, då den ställes upp vid sidan av en undervisning, som med användande av sådana hjälpmedel som exempelvis det geometriska ritandets hela teknik går fram över de geometriska bilderna.

Jag vill alltså ha bort bevisandet från de lägre klasserna. Varje ärlig lärare skall medgiva, att detsamma icke förstås av flertalet elever på det lägsta stadiet. Ett skarpare ingående på bevisets logiska sammanhang skall snart komma till och med skickliga elever att sträcka vapen. Men också om det skulle fullt fattas, så är det ett otroligt arbetsdrygt sätt att inhemta geometriskt vetande, vartill kommer att satsernas sakliga banalitet på ett tidigt stadium avkopplar allt levande intresse. Bevisandet skall uppskjutas till gymnasialstadiet där såsom jag framhållit det vid denna ålder begynnande spekulativa sinnelaget skall möta geometriens logiska uppbyggande med intresse. Och där kan utvecklingen på den spekulativa linjen föras längre än vad nu sker, särskilt på reallinjen. Man kan där gå in på klyvningen i olika geometrier och gå bland annat ett stycke in på den *icke-euklidiska* geometrien, en exkurs, som är, också om den göres helt kort, egnad att inställa geometriens logiska problem i ny belysning. Låta vi postulatet, att genom en punkt utom en rät linje endast en linje kan dragas, som icke råkar den givna linjen, falla, så förändras med ens hela den geometriska verkligheten. Triangelns vinkelsumma blir mindre än två räta och dess area proportionell mot vinkelsummans underskott under 180°, triangelns *defekt*, på samma sätt som den sfäriska triangelns area är proportionell mot triangelns *excess*. Gränsen för en cirkel, vars radie växer, är icke längre en rät linje, utan en kurva, den s. k. *gränscirkeln*. De punkter, vilka äro på samma avstånd från en rät linje, bilda icke längre en rät linje, utan en kurva den s. k. *eqvidistanta kurvan*. De båda härmed definierade kurvorna jämte cirkeln och räta linjen bilda de olika arter av *cykler*, vilkas geometri träder i stället för cirkelgeometrien. Sålunda kunna vi icke längre draga slutsatser, att genom tre punkter kan läggas en rät linje eller en cirkel, men väl att genom dem alltid går en cykel. En exkurs över dessa omedelbart efter parallellaxiomets fall uppträdande deviationer från den Euklidiska geometrien skall helt visst på gymnasialstadiet kunna påräkna intresse och är uppriktigt sagt nödvändig för att den vanliga geometrin skall förstås.

Då jag utmönstrar bevisandet från elementarstadiet, så har jag därmed icke utmönstrat det logiska deducerandet. Liksom man i aritmetiken och algebran ur ett resultat genom en tankeakt utlöser ett annat, därav logiskt beroende resultat, skall man ur en funnen tes i geometrien deducera av denna logiskt avhängiga teser. Sålunda framträder icke satsen om periferivinkeln i en cirkel såsom ett isolerat resultat, utan beror av den ställning vi intaga till satsen om den yttre vinkeln i en triangel. Det förnuftiga deducerandet, som förmedlas av vanliga logiska slutledningar, skall givetvis icke övergivas.

I den empiriska geometrien insamlas efterhand ett system av geometriska sanningar, utvunna genom mätning, ritning och deduktion, vilka framträda såsom erfarenhetsrön och över dem uppbyggda lätt tillgängliga deduktioner. Dessa sanningar formas liksom de aritmetiska och algebraiska sanningarna till teser. Därvid är man icke bunden vid nödvändigheten att liksom i den bevisande geometrien med tesens helgd omgärda varjehanda banala resultat.

Min kritik har hittills närmast riktat sig mot bevisandet. Där finnes emellertid uti den nuvarande geometriundervisningen också annat, som påkallar uppmärksamhet. Likasom algebraundervisningen har sitt problemlösande, så har också geometriundervisningen en motsvarande art av övningar uti bevisandet av övningsteorem och lösandet av övningsproblem.

Jag vill särskilt dröja vid de geometriska problemen, emedan jag har grundade skäl att antaga, att frågan om deras ställning icke är alldeles klar. I den elementära geometrien, skolgeometrien, ligger frågan så till, att det gäller att lösa problemet uteslutande genom upprepning av tvenne primära konstruktioner: att genom två punkter lägga en rät linje och att med given medelpunkt rita en cirkel, som går genom en given punkt. Den förra uppgiften löses med *linjalen* och den senare med *passaren*, vilka således äro det elementära problemlösandets enda legala instrument. Det är givetvis en begränsad art av problem, som med dessa hjälpmedel kunna lösas. Till dem höra icke exempelvis de klassiska problemen om vinkelns *tredelning* och *kubens fördubbling*. För deras lösning måste andra hjälpmedel framdragas.

Nu består här ett sakförhållande, på vilket jag i denna framställning icke kan djupare ingå. Det visar sig nämligen, att alla de problem, som kunna lösas med passare och linjal, kunna lösas med linjal allena, ifall man känner en fast cirkel och dess medelpunkt. Man kan således reda sig utan passaren, sedan man *en gång* använt den för att upprita denna cirkel. Man säger att denna cirkel är det konstruktiva arbetets *metriska bas*.

Genom att i stället för cirkeln utvälja någon annan metrisk bas kan man sammandraga eller utvidga området för de lösbara problemen. Särskilt kan man, om man i stället för cirkeln som metrisk bas har en *parabel*, lösa de ovannämnda klassiska problemen. Nu kommer härtill en annan sak. Man har för problems lösande med linjal och passare utformat särskilda metoder, vilkas innehav med osviklig säkerhet leder till målet.

Om man nu mot bakgrunden av allt detta, som erbjuder mer än nog stoff för en akademisk föreläsningsserie, ställer upp skolans av inga metoder uppburna och sålunda varje plan saknande problemlösning, inser man, att det hela är på avvägar. En sådan på måfå och utan kännedom om det helas syftning arbetande problemlösning är utan värde. Det har karaktären av lyckträff, om eleverna skola finna någon lösning. I lekmannens ögon te sig dessa uppgifter såsom rebusar och detta med rätta. Jag vill, att övningsproblemen skola inskränkas till det minsta möjliga och helst endast till sådana, som kunna lösas med den enda metod som brukar framföras i skolan, nämligen *metoden med den geometriska orten*. Detta om övningsproblemen. Icke heller övningsteoremen synas mig böra bedrivas med den stora iver, som måhända har sin förklaring i osäkerhet inför studentexamens kaleidoskopiskt vexlande anspråk.

Också geometriundervisningen har sina övningsfält för räkning. Det är de *planimetriska* och *stereometriska* övningsuppgifterna. Särskildt om de senare ville jag säga några ord. Det ser ut som om undervisningen i rymdgeometri på många håll skulle tillgå så, att den allmänna delen med sina satser om rymdfigurers konfigurationer skulle såsom abiturienterna ofta uttryckte saken, genomgås »kursoriskt», medan tyngdpunkten förlägges till de stereometriska övningsexemplen. Dessa äro därvid ofta av den art, att deras lösande egentligen har bra litet med geometri att skaffa. Snarare äro de algebraiska problem med pyramider, koner och sfärer och en till dem ansluten vokabulär såsom substrat för ekvationens uppställande. Detta allt är ganska onödigt och kan till största delen saklöst bortlemnas. I stort sett gäller detsamma de planimetriska räkneproblemen. I vartdera fallet bjuda exempelböckerna på hundradetals ur alla synpunkter, men särskilt ur geometrisk synpunkt ointressanta, på intet sätt lärorika uppgifter, som i stort sett falla under samma dom, som den jag tidigare låtit gå ut över de algebraiska problemen.

De olika exkurserna i det föregående ha avsett att ge en bakgrund för bedömande av skolans geometri och dess särskilda uppgifter. Måhända kan här ytterligare en synpunkt framhävas, som är egnad att inordna hela skolgeometrien i ett allmännare system. Som bekant består skolgeometrien av tvenne delar, vilka påkalla alldeles olikartad behandling, nämligen *kongruensgeometrien* och *likformighetsgeometrien* eller den *aeqviforma* geometrien. Dessa äro i sin tur att ses ur en allmännare synpunkt. Om vi överhuvudtaget i geometrien på denna linje se ett studium av rymdens en-entydiga transformationer och rymdfigurernas reaktion inför dem, så möter oss såsom översta typ av geometri den *projektiviska* geometrien som handlar om den allmännaste en-entydiga punkttransformation av rymden i sig. Såsom specialisering av denna geometri inträder den *affina* geometrien, som handlar om de affina transformationerna av rymden och den *aeqviforma* geometrien med likformighetstransformationerna som bas. Den sistnämnda geometrien specialiseras ytterligare till *kongruensgeometrien* där den lineära skalan är 1. Också denna korta exposé är egnad att på sitt sätt kasta ljus över skolans geometri och dess ställning och har fördenskull här egnats några ord. Skolans geometri har härigenom inordnats i en allmännare verklighet. Den blir till den anspråkslösa läran om de allra enklaste och lättast fattbara transformationerna av rymdens konfigurationer. Skolgeometriens uppgift i det teoretiska planet blir att studera dessa transformationer, att studera kongruensen och likformigheten, betingelserna för deras förekomst hos de geometriska figurerna och de konklusioner, som över dem kunna uppbyggas.

Då jag efter alla dessa förberedelser och utvikningar går att taga ställning till frågan om geometriundervisningen i skolan, resa sig alldeles säregna svårigheter i min väg. Det är ett problem av betydligt svårare art än ifråga om aritmetiken och algebran. Det gäller nämligen en sådan omläggning, som det där icke var fråga om. Det enda verkligt sakliga vore att i en lärobok sammanfatta de nya idéerna om geometriundervisningen och sålunda för alla klentrogna visa, huru denna undervisning kan ordnas enligt de allmänna principer jag redan i början av min framställning av geometrien uppställde.

Vi hade där fastslagit, att den nuvarande undervisningen omspänner ett bestämdt kvantum av lärostoff. När man granskar detta lärostoffs substantiella omfattning, skall man nödgas medgiva, att detsamma icke är överväldigande stort. Den långa tid, som förnötes på dess bibringande, har sin orsak i metodens långsläpighet. Det kan sålunda knappast bliva fråga om några avsevärda reduktioner av lärostoffets materiella innehåll. Men det kan icke heller bliva fråga om dess ytterligare dilatation, förslagsvis genom inryckande av nya bilder i undersökningen. Här har jag tillfälle att återigen tillbakavisa sådana reformmatematikens välmenta projekt som att komplettera bildförrådet med de koniska sektionerna eller satsförrådet exempelvis med svårare teser ur triangelgeometrien.

Det gäller således metoden och där har jag redan intagit en klar ståndpunkt. Jag röstar för vad jag kallat den empiriska geometrien såsom ersättning för den bevisande geometrien, som jag utdömer. Denna empiriska geometri har sin grund i det geometriska kunskapsinhemtande, som redan inleddes uti aritmetiken och som där satte eleverna i besittning av en hel del geometriska begrepp och förmåga att transponera geometriska bilder. Denna enkla empiriska väg bör byggas vidare och vandringen på densamma mot ett fördjupat innehav av geometriska bilder och geometrisk teknik stödas av det redan i aritmetiken inledda mätandet och ritandet, vartill givetvis kommer det förnuftiga logiska deducerandet. Därvid är att märka, att ritandet efterhand tar i anspråk de ritmetoder, vilka jag ovan i min exkurs över det geometriska ritandet framförde.

Jag vet, att man här skall ställa sig skeptisk. Men jag tillskriver detta mera den tröghetens eller konservatismens lag, som icke vill tro, att någonting skall kunna omläggas, särskilt då det är fråga om en så grundlig omläggning som i detta fall, än en verkligt objektiv, på fördjupat vetande baserad tveksamhet. Det är här icke fråga om något hugskottsartat infall, utan min övertygelse grundar sig på en över decennier utsträckt verksamhet inom geometrisk undervisning på alla stadier, vid skolor och universitet.

Detta skall vara mellanskolans geometri. Sedan kommer någonting annat. Särskilt på reallinjen skulle jag gärna se en sådan exposé över geometriens axiom och system, som numera föreläses vanligen på en termin vid universitetet och som ställer den empiriska geometriens på mera substantiella vägar efterhand införskaffade läromaterial i den ideala geometriens logiska belysning. Därvid har jag ingenting emot, att särskildt parallellaxiomet egnas en ingående uppmärksamhet och de mest remarkabla konsekvenserna av dess användande underkastas undersökning. På den humanistiska linjen kan denna exposé göras betydligt kortare, liksom överhuvud all matematisk undervisning där bör få träda i bakgrunden till förmån för med denna linjes karaktär bättre sammangående arter av undervisning.

TRIGONOMETRIEN.

Jag har strängt taget icke mycket att säga om trigonometriundervisningen. En sak vill jag dock genast ha sagt, att denna undervisning på den humanistiska gymnasiallinjen icke har något annat berättigande än det, som kan deduceras ur, vad jag tidigare kallade, den kulturhistoriska principen. Där bör sålunda hela framställningen inskränkas till de på den rätvinkliga triangeln uppbyggda definitionerna och deras beräknande för hela grader ur en treställig tabell. Därtill ett eller annat exempel på de nya funktionernas användning för beräkningar inom den rätvinkliga triangeln, inclusive deras användning vid studiet av det lutande planet i mekaniken.

För reallinjen ställer sig saken annorlunda. Här vill jag blott hänvisa till att triangellösandet icke är de trigonometriska funktionernas förnämsta användning, såsom man av läroböckerna att döma nu på många håll synes tro. Vad själva definitionen av funktionerna vidkommer, måste den också här först anslutas till den rätvinkliga triangeln för att sedan vid övergång till större vinklar helt enkelt anknytas till cirkeln med origo som medelpunkt och längdenheten till radie. Där äro cosinus och sinus för en periferipunkts polära vinkel helt enkelt abskissan och ordinatan för punkten. Varje annan definition blir konstlad och otymplig. Därjämte framträder genom denna definition det klara sambandet mellan en punkts polära och Cartesiska koordinater, visserligen till en början blott för punkter på den till grund lagda cirkeln.

Med inskränkningen av triangellösandet minskas också intresset för de logaritmiska tabellerna för de trigonometriska funktionerna. Det, som emellertid med styrka kan föras fram, äro alla de transformationer av de trigonometriska funktionerna, som bygga på fundamentalrelationerna och additionsteoremen och vilka spela en stor roll vid de från reallinjen utgångnas fortsatta utbildning.