Skrifter utgivna av Sveriges yngre läroverkslärares förening
2

C. E. SJÖSTEDT

GEOMETRI OCH GEOMETRIUNDERVISNING

C. W. K. GLEERUPS FÖRLAG, LUND

Skriftseriens redaktör:
FIL. LIC. NILS NORMAN,
Lidköpingsvägen 13, Hammarbyhöjden

LUND
BERLINGSKA BOKTRYCKERIET
1948

Förord

I det föreliggande arbetet, som i främsta rummet är avsett för mindre erfarna matematiklärare, upptar geometriundervisningen en mindre del. Huvudparten är ägnad geometriens kunskapsteori. Detta beror på en brist i matematiklärarnas utbildning. Dessa ha — åtminstone i allmänhet — endast i obetydlig omfattning bedrivit studier inom för den elementära geometrien så viktiga områden som projektiv geometri, icke-euklidisk geometri och geometriens grundvalar, men det torde vara ytterst få, som överhuvud taget sysslat med geometriens kunskapsteoretiska förutsättningar. Och dock är också detta område enligt förf:s mening av synnerligen stor vikt. Det är nämligen så, att en viss uppfattning beträffande geometriens kunskapsteori alltid är en förutsättning för en uppfattning om geometrien, såsom närmare skall utvecklas i fortsättningen. Och då är det betydelsefullt, att man är klart medveten härom. Det finns framställningar, som man kan hänvisa till i fråga om ovan nämnda matematiska områden, projektiv geometri, icke-euklidisk geometri o. s. v.[1] Däremot finns det, såvitt förf. har sig bekant, icke några arbeten, som ge en sammanfattning av geometriens kunskapsteori. Därför upptar den första hälften av detta arbete en sådan översikt från vissa synpunkter.

[1] På svenska finnas förf:s båda arbeten Projektiv geometri och Icke-euklidisk geometri i serien Natur och Kultur.

Den följande framställningen ger uttryck åt en genomförd uppfattning av geometriens kunskapsteori och geometriundervisningen.[1] Förf. är klart medveten om att många hysa härifrån avvikande uppfattningar och vill ingalunda framhålla sin egen uppfattning som den allena saliggörande. Det rör sig här enligt förf.:s mening om mycket svåra frågor, som äro värda att allvarligt övervägas och diskuteras. Därför kan arbetet uppfattas som ett diskussionsinlägg. Och kunde det föranleda, att representanter för andra riktningar lägga fram genomförda uppfattningar av hithörande frågor, skulle förf. hälsa det med glädje. Förf. hoppas, att de som hysa en uppfattning, som avviker från förf.:s, icke skola summariskt avfärda de här framställda tankarna, därför att de ofta äro andra än de gängse. Diskussioner om principfrågor bli tyvärr ofta så föga givande.

Det mesta av innehållet har förf. redan framställt i några föredrag, om geometriens kunskapsteori vid en kurs i geometri för läroverkslärare i augusti 1946 och om realskolans geometriundervisning inför Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning i januari 1938, det senare publicerat i Tidning för Sveriges läroverk våren 1938.

Till sist en kort sammanställning av litteratur:

A. Phalén, Über die Relativität der Raum- und Zeitbestimmungen, Uppsala 1922.

K. Kroman, Vor Naturerkjendelse, 1883.

—, Matematikken og Erkendelselæren, 1920.

M. C. Mott-Smith, Metageometrische Raumtheorien, Halle 1907.

[1] På denna uppfattning bygga också förf:s läroböcker för de högre skolorna, Lärobok i geometri för realskolor och därmed jämförliga läroanstalter, Geometriska övningsuppgifter och lösningsmetoder samt Geometri för realgymnasiet.

C. E. Sjöstedt, Zur Erkenntnistheorie der Geometrie, i Adolf Phalén in Memoriam, Uppsala 1937.

—, Geometriens axiomsystem, i redogörelse för högre allmänna läroverket i Östersund läsåret 1936—37.

—, Geometriens grundbegrepp och axiom, Elementa 1938.

The Teaching of Geometry in Schools (a report prepared for the Mathematical Association), London 1937.

1. *De geometriska begreppen*

Det är icke ovanligt, att en representant för en fackvetenskap, för att nu icke tala om en det praktiska livets man, framhåller, att han helt lämnar de filosofiska frågorna å sido. Filosoferna synas icke ha kommit någon vart med sina frågor trots årtusendens arbete. Därför bör man icke ta upp någon tid att syssla med dessa onyttiga frågor. Man bör hålla sig till fackvetenskaperna och deras säkra resultat och icke blanda in någonting från en så suspekt vetenskap som filosofien.

Denna ståndpunkt har en hel del fog för sig. Filosofiens problem äro så svåra, att åtskilliga av de viktigaste icke äro lösta och att någon lösning icke ens skymtar. Och fackvetenskapsmannen gör ofta klokt i att intaga den nyss nämnda positionen: att lämna de filosofiska frågorna å sido och endast syssla med sin fackvetenskap. Men det är icke säkert, att han trots denna föresats verkligen gör detta eller ens *kan* göra det. En förutsättning härför är i själva verket, att han känner till en hel del om de filosofiska problemställningarna. Det är eljest lätt för honom att komma in på filosofiska problem utan att han har en aning om det, och tro, att han fortfarande sysslar med fackvetenskapliga problem. Det är nämligen så, att ett eller flera filosofiska problem ofta ligga under ett fackvetenskapligt och komma i dagen, då man går på djupet med det senare. Och då gäller det att känna till, var fackvetenskapen slutar och filosofien börjar. Det är icke få fackvetenskapsmän, som råkat långt in på filosofiens marker utan att veta om det och där begått ganska elementära misstag på grund av sin obekantskap med filosofien. De som högljutt förklara sig ta avstånd från allt vad filosofi heter, ha nämligen ofta, för att icke säga i regeln, mycket bestämda åsikter i filosofiska frågor utan att själva vara på det klara därmed. I själva verket kan endast den som tämligen väl känner till de filosofiska frågorna, undvika att ta ställning till dem.

Varje fackvetenskap har sålunda nära beröring med filosofien. Då man kommer in på en fackvetenskaps grundläggande frågor, äro de filosofiska frågeställningarna icke långt borta. Detta gäller icke minst geometrien. Det torde vara i få fackvetenskaper, som sanningen av det ovan sagda så lätt kan uppvisas som i geometrien. Jag nämner här några sådana frågor, som bottna i filosofiska problem: de geometriska begreppens natur; det geometriska bevisets beskaffenhet och åskådningens roll; axiomens innebörd. Min uppgift är nu först att gå in något på dessa och liknande problemställningar. Det kan naturligtvis endast bli tal om en ytterst summarisk framställning.

Jag börjar då med det kanske mest grundläggande av alla dylika problem: om rummets natur. Vilken beskaffenhet ha rumsbestämningarna? Äro de verkligen bestämningar hos tingen eller äro de endast något, som *vi* på grund av vår beskaffenhet tillägga tingen som bestämningar, under det att dessa alls icke, objektivt sett, ha rumsbestämningar? Vi möta här ett av de mest betydelsefulla motsatsparen i filosofien: objektivism — subjektivism. Objektivism kallas oftare realism, subjektivism på motsvarande sätt idealism eller spiritualism, men dessa termer vålla lätt missförstånd, varför jag vill undvika dem. Objektivisten menar, att rumsbestämningarna äro objektiva, verkligen tillkomma tingen som bestämningar. Det här bordet *är* verkligen rektangulärt eller vilken form det nu har. Subjektivisten åter menar, att rumsbestämningarna endast äro subjektiva. Tingen ha själva icke rumsbestämningar. Det är endast min beskaffenhet, som gör, att jag uppfattar bordet som rektangulärt eller överhuvud taget med någon viss form. I sig självt är bordet icke alls sådant, som jag uppfattar det.

Den mest bekante företrädaren för en subjektivistisk uppfattning är Kant, som menade, att rummet endast är en subjektets åskådningsform, ett sätt varpå subjektet uppfattar tingen. Han ville bevisa detta genom att uppvisa, att rumsföreställningarna äro allmängiltiga och nödvändiga. Vi måste alltid och nödvändigtvis tänka oss tingen utrustade med rumsbestämningar. Kants slutsats torde dock icke vara bindande. Om tingen verkligen ägde rumsbestämningar, så skulle ju såväl allmängiltigheten som nödvändigheten av dessa föreställningar också kunna förstås. Även i våra dagar finnas representanter för båda åskådningarna. Men jag tror man kan säga, att i den samtida filosofien en tydlig objektivistisk tendens gör sig gällande. Inflytelserika objektivistiska riktningar finnas såväl i vårt land som på den europeiska kontinenten, i England och i Amerika. Jag skall något närmare belysa en av de grundläggande objektivistiska tankegångarna och börjar då med att närmare utföra subjektivismens grundtanke.

För att ta ett konkret exempel, så anser subjektivismen, att en triangel icke är något annat än en föreställning hos det uppfattande subjektet. Denna tanke är överhuvud taget karakteristisk för subjektivismen. Det jag uppfattar är endast mina föreställningar. »Världen är min föreställning» är ett bekant slagord, anknytande till titeln på Schopenhauers huvudarbete, Die Welt als Wille und Vorstellung. En sådan uppfattning förefaller också naturlig vid närmare eftertanke. Det är väl närmast, synes det, något alldeles självklart, att det jag omedelbart uppfattar icke är något annat än mina föreställningar. Hur skulle det kunna vara något annat? Om jag överhuvud taget uppfattar något, så måste jag väl ha en föreställning. På detta sätt framstår subjektivismen som naturlig och lättförståelig.

Hur skall man väl kunna invända något mot denna tankegång och hävda objektivismens riktighet?

Ja, först måste man göra en precisering av det anförda.

Att jag måste ha en föreställning, då jag uppfattar något, det är riktigt och något självklart. Men därmed är icke sagt, att det jag uppfattar endast är min föreställning. Att jag nu uppfattar papperet framför mig, förutsätter givetvis, att jag har en föreställning, men detta innebär icke nödvändigtvis, att det jag uppfattar *endast* är denna min föreställning. Det kan verkligen vara så, att det jag uppfattar i min föreställning, är papperet framför mig.

Det till synes självklara i subjektivismen beror sålunda på en förväxling. Man måste i själva verket noga skilja mellan en föreställning och dess innehåll, dess objekt. Detta är enligt min mening en av de allra viktigaste distinktioner, som finns. Min föreställning om papperet är något annat än denna föreställnings objekt, d. v. s. just papperet. Och min föreställning om en triangel är något annat än denna föreställnings innehåll, d. v. s. begreppet triangel. Gör man riktigt klart för sig, vad denna distinktion innebär, så kommer nog objektivismen att framträda lika naturlig och självklar som nyss subjektivismen.

I anslutning till det nu anförda kan den objektivistiska tankegången närmare utföras som en vederläggning av subjektivismen på följande sätt.

Subjektivismen anser sålunda, att en triangel endast är en föreställning. Men en föreställning är en föreställning *om* något. Om vad då i detta fall? Säger man, att det är om en triangel, som föreställningen är en föreställning, så återkommer frågan: triangeln skulle ju endast vara en föreställning. Triangeln vore sålunda en föreställning om en föreställning. Men man kan icke bli stående där. På nytt måste man fråga, vad *denna* föreställning är en föreställning om. Och resultatet blir en s. k. *oändlig regress* (återgång): triangeln vore en föreställning om en föreställning om en föreställning om en föreställning o. s. v. i oändlighet. En sådan regress är orimlig. Skall man komma ifrån den, synes enda möjligheten vara, att man identifierar föreställningen med dess innehåll. Men detta är också omöjligt. Ty föreställningen och dess objekt äro skilda åt, *måste* vara skilda åt. Subjektivismens tanke kan alltså icke vara riktig.

Om man sålunda med objektivismen betraktar även de geometriska begreppen såsom objektiva och icke subjektiva, så är naturligtvis därmed icke alla svårigheter övervunna. De geometriska begreppen skulle alltså vara något objektivt, något av mig oberoende. De måste då uppfattas som något verkligt. Och här ställs vi inför nya svårigheter. De geometriska begreppens verklighet synes ju i varje fall icke vara av samma slag som andra verkligheter.

I många objektivistiska teorier skiljer man mellan tre olika slag av verklighet. Det första slaget är medvetenhetsfakta, t. ex. föreställningar och andra psykiska företeelser. Det andra slaget utgöres av de fysiska föremålen, t. ex. detta bord och andra yttre ting. Och det tredje slaget betecknas ofta som ideala föremål, t. ex. trianglar, cirklar o. s. v.

Vi tangera här ett av de svåraste filosofiska problemen överhuvudtaget, nämligen verklighetsproblemet. Vad innebär det, att något är verkligt? Låt mig genast förklara, att jag icke känner till någon tillfredsställande teori härom. Vi få nöja oss med att uppställa problemet, ehuru vi sedan bli stående inför det. Möjligen kan man framhålla, att de tre slagen av verklighet i grund och botten icke äro principiellt skilda åt. Bordet t. ex. karakteriseras genom sina bestämningar, t. ex. rumsbestämningar, färgbestämningar o. s. v. Dessa bestämningar äro begreppsbestämningar, och bordets verklighet hänger sålunda intimt samman med verkligheten hos dessa begrepp. De geometriska begreppens verklighet utgör endast ett specialfall av begreppens verklighet överhuvudtaget.

Här få vi dock göra halt. Mycket längre har, såvitt jag kan se, icke någon verklighetsteori kommit. Vi ha dock vunnit något med utredningen. De geometriska begreppen synas icke kunna vara något subjektivt, något psykiskt, föreställningar, tanketing i denna betydelse. De synas vara något objektivt, men frågan om deras närmare beskaffenhet få vi lämna därhän. De vunna resultaten äro betydelsefulla nog, som vi skola se. De ha betydelse både i fråga om vissa problem rörande de geometriska begreppen och rörande de geometriska satserna.

Som subjektivismens grundare brukar framhållas Cartesius, även om han icke konsekvent genomförde sina subjektivistiska utgångspunkter. I fråga om de geometriska begreppen intar han emellertid i det hela en klart objektivistisk inställning. I sina Meditationer (femte meditationen) säger han:

»Jag föreställer mig en triangel, ehuru en sådan figur kanske icke existerar och aldrig har existerat någonstädes i världen annat än i min tanke. Icke desto mindre har denna figur en viss natur eller form eller bestämd väsentlig egenskap, som är evig och oföränderlig och som jag icke har uppfunnit och som på intet sätt beror av mitt medvetande. Detta är uppenbart, emedan jag kan bevisa skilda egenskaper hos triangeln, t. ex. att dess tre inre vinklar tillsammans äro lika med två räta vinklar, att den största vinkeln står emot den största sidan o. s. v. Antingen jag vill eller icke, så inser jag klart och tydligt, att dessa egenskaper finnas i triangeln, ehuru jag aldrig tänkt på dem förut och även om detta skulle vara första gången jag föreställer mig en triangel. Icke desto mindre kan ingen säga, att jag uppfinner eller endast föreställer mig dem.»

I samtidens matematik är subjektivismen starkt representerad, främst i förening med empiristiska tankegångar, vartill vi skola återkomma. Det finns emellertid också kända matematiker, som företräda utpräglat objektivistiska uppfattningar. Som exempel må nämnas G. H. Hardy:

»I believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or *observe* it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our 'creations', are simply our notes of our observations. This view has been held, in one form or another, by many philosophers of high reputation from Plato onwards . . .» [1]

Vi komma nu över till frågan om de geometriska grundbegreppen och deras definitioner.

Ett begrepp definieras ju med tillhjälp av andra begrepp, som i sin tur möjligen kunna definieras och då med tillhjälp av åter andra begrepp. På detta sätt kan man naturligtvis icke fortsätta i oändlighet. Man måste utgå från några grundbegrepp, som lämnas odefinierade.

Närmast synas ju geometriens grundbegrepp vara begreppen punkt, linje och yta. Man har dock sökt definiera de båda senare med tillhjälp av det först nämnda. Begreppet punkt skulle då vara det enda odefinierade grundbegreppet i geometrien. En linje och en yta skulle vara sammanfattningen av de punkter, som uppfylla vissa vill-

[1] Citerat efter E. T. Bell, The Magic of Numbers, 1946.

kor. På detta sätt karakteriseras som bekant linjer och ytor i matematiken. Jag erinrar om den definition av begreppet cirkel, som finns redan hos Euklides. Sådana definitioner äro dock inga definitioner i egentlig mening. En linje eller en yta *är* icke en samling punkter. Matematikens behandling av allmänna linjer och ytor visar i själva verket, att det i grund och botten icke är dessa allmänna geometriska bildningar, som göras till föremål för behandling, utan i stället endast punkter, som uppfylla vissa villkor. Jag återkommer nedan till dessa förhållanden.

Man har emellertid även sökt definiera begreppet linje med tillhjälp av begreppet yta, begreppet punkt med tillhjälp av begreppen linje och yta. En linje skulle då vara skärningen mellan två ytor, en punkt skärningen mellan två linjer. Även dessa definitionsförsök äro förfelade. Då t. ex. en punkt är tänkt, behöver man icke tänka några linjer. Jag skulle behöva gå in något närmare härpå, men utrymmet tillåter det icke. Intresserade hänvisas till den utredning jag lämnat i minnesskriften till Adolf Phalén. I själva verket torde man icke kunna definiera några av begreppen punkt, linje och yta med tillhjälp av de övriga.

Emellertid synas dessa begrepp dock icke vara geometriens grundbegrepp. I det nyss nämnda arbetet har jag sökt visa, att geometrien i själva verket aldrig sysslar med begreppen allmänna linjer och ytor utan endast med grundbegreppen punkt, rät linje och plan. På bevisen för att så förhåller sig, kan jag icke här gå in. Jag får nöja mig med att antyda grundtanken. Skulle geometrien syssla med allmänna linjer och ytor, så måste axiomens antal vara obegränsat. Går man igenom matematikens olika grenar, så finner man också, att det i själva verket alltid är punkter, räta linjer och plan, som behandlas. För ytterligare belysning av denna tanke får jag hänvisa till det nyss anförda arbetet.

Nu har man sökt definiera även grundbegreppen rät linje och plan, vilket emellertid torde vara förfelat även det. Tyvärr får jag även här nöja mig med att hänvisa till det nyss angivna arbetet. Så vitt jag vet, torde det kunna sägas vara en genomgående uppfattning i nutida matematik, att begreppen punkt, rät linje och plan icke kunna definieras, alltså icke kunna återföras på några andra begrepp. De uppfattas därför allmänt som de odefinierbara grundbegreppen inom geometrien.

Emellertid måste här uttryckligen betonas, att man icke får tro, att de geometriska grundbegreppen äro något obestämt, därför att de icke kunna definieras — en mycket vanlig tanke. Slutsatsen är för det första felaktig, då den icke följer av premisserna. Om ett begrepp icke kan definieras, så innebär icke detta, att det icke är bestämt. För det andra är själva tanken oriktig. Vore det så, att begreppen punkt, rät linje och plan vore obestämda, så skulle därav följa, att av dem sammansatta begrepp, sträcka, triangel, månghörning o. s. v. vore obestämda. Därmed skulle hela geometrien i själva verket bli något obestämt. Tanken är därför orimlig. Utifrån en objektivistisk åskådning kan man på ännu ett sätt motivera detta. Enligt de objektivistiska tankeriktningarna äro de geometriska begreppen något objektivt. Därav följer då, att de måste vara bestämda. Vore de icke det, så skulle vi ha den orimliga tanken, att verkligheten själv vore objektive obestämd.

Under alla omständigheter måste man sålunda fastslå, att de geometriska grundbegreppen liksom alla geometriska begrepp måste vara bestämda begrepp. De kunna på intet sätt sägas vara obestämda, därför att de icke kunna definieras. Till obestämdhet i en annan mening hos geometriska begrepp återkomma vi.

Innan vi lämna de geometriska begreppen, skall jag nämna något om en empiristisk uppfattning av dessa begrepp.

Empirism är en kunskapsteoretisk uppfattning, som schematiskt kan karakteriseras så, att kunskap uppstår genom att de yttre tingen påverka kunskapssubjektet. All kunskap ernås genom erfarenheten. Inom empirismen finnas en mängd olika riktningar, som avvika mer eller mindre från varandra. Ej heller inom geometrien är därför empirismen någon enhetlig riktning. Vissa tankar äro dock mycket vanliga.

Så t. ex. uppfattas ofta de geometriska begreppen såsom erhållna ur de fysiska kropparna genom en abstraktionsprocess. Därför är geometrien beroende av att det finns fasta kroppar. I en värld, där sådana kroppar saknades, skulle ingen geometri kunna finnas. Härmed menar man då icke blott, att sysslandet med de fasta kropparna i rent psykologiskt hänseende föranlett geometriens uppkomst, vilket väl torde vara riktigt. Utan man menar, att geometrien rent logiskt sett skulle abstraheras ur de fasta kropparnas värld. I så fall skulle de geometriska begreppen, punkt, rät linje, cirkel o. s. v., ingå i de fasta kropparna. Men detta förnekar man å andra sidan. Det finns i själva verket inga absolut fasta kroppar, menar man. Även de fasta kropparna äro endast abstraktioner ur den fysiska verkligheten. Men då kunna icke de geometriska begreppen erhållas genom abstraktion, när de icke finnas i de fasta kropparnas värld. Ej heller kan man i denna situation hjälpa sig genom att säga, att de geometriska begreppen visserligen icke ingå i kropparna men dock approximativt äro till finnandes hos dem. Ty om de icke finnas där, kunna de aldrig genom en abstraktionsprocess utvinnas ur dem. Empiristiska tankegångar av denna typ äro sålunda icke sammanhängande och därför ohållbara.

Jag nämnde nyss, att de fasta kropparna troligen, psykologiskt sett, givit upphov till geometrien. Detta förhållande bör utnyttjas vid den elementära geometriundervisningen. Före den systematiska undervisningen böra lärjungarna, såsom realskolans undervisningsplan också föreskriver, vid en förberedande kurs i geometri icke blott göras förtrogna med passare, linjal, gradskiva m. m. utan också givas ett visst mått av geometriskt vetande, som sedan vid den systematiska undervisningen skall ordnas till ett logiskt sammanhängande system.

Nu har man framställt den uppfattningen, att den förberedande geometriundervisningen, som måste vara empirisk, och den systematiska geometriundervisningen, som måste vara deduktiv, skulle vara fundamentalt skilda. De skulle ha olika objekt: den empiriska geometrien skulle till föremål ha icke de geometriska begreppen utan de med krita eller blyerts ritade figurerna, d. v. s. fysiska kroppar. Den empiriska geometrien skulle då i själva verket icke vara geometri utan fysik. Denna uppfattning anser jag vara felaktig. Både den empiriska och den deduktiva geometrien ha samma objekt: rummet och rumsbegreppen. Endast metoderna äro olika. Då man i den empiriska geometrien ritar en triangel med krita eller blyerts eller klipper en triangel av papper och sedan mäter med gradskiva eller viker figuren och på så sätt bestämmer triangelns vinkelsumma, så gäller detta resultat de geometriska förhållandena, ehuru bevisföringen är bristfällig från logisk synpunkt.

Till den förberedande geometriundervisningen skola vi återkomma.

2. *De geometriska satserna*

Av största betydelse för geometriens kunskapsteori är en undersökning av det geometriska beviset. Vi skola se, vilka olika element som ingå i ett sådant, och välja som exempel Euklides' bevis för vinkelsumman i en triangel.

Man har då en triangel vilken som helst. Därjämte har man en konstruktionslinje: en linje genom ett hörn parallell med den motstående sidan. Enligt satsen om alternatvinklar respektive likbelägna vinklar vid parallella linjer erhåller man då den sats, som skulle bevisas.

I det geometriska beviset har man alltså två olika beståndsdelar: *dels* vissa geometriska bildningar, om vilka man utsäger något, *dels* vissa geometriska satser. Till de förra, de geometriska begrepp som ingå och deras roll för beviset, skola vi återkomma. De senare, de geometriska satser som ingå och som äro omdömen, skola vi nu något utförligare behandla.

De i beviset ingående satserna kunna kanske i sin tur bevisas. Men lika litet som man kan fortsätta i oändlighet att definiera allt enklare begrepp, lika litet kan man fortsätta i oändlighet och bevisa allt mer grundläggande satser. Man måste stanna inför vissa satser, som icke bevisas utan som tagas till utgångspunkter för geometrien. De utgöra geometriens axiom. Om deras allmänna beskaffenhet råder en mängd olika uppfattningar. I mitt tidigare omnämnda arbete har jag undersökt de viktigaste. Här kan jag till behandling upptaga endast de mest betydelsefulla. Jag skall göra det i anslutning till två uppfattningar, en empiristisk uppfattning av axiomen och den s. k. axiomatiken. Därmed är icke sagt, att dessa båda uppfattningar skulle vara oförenliga. Tvärtom finns det åskådningar, som förena dem mer eller mindre. Det är i allmänhet så, att de mångskiftande uppfattningarna om axiomens natur kombineras på en mängd olika sätt. Här kommer det ju emellertid icke an på att undersöka vissa konkret föreliggande åskådningar. Därför kunna vi isolera de viktigaste tankarna och undersöka dem var för sig.

Som sagt finns en *empiristisk* tankegång även beträffande de geometriska axiomen liksom beträffande de geometriska begreppen, såsom tidigare omnämndes. Axiomen skola verifieras genom den fysikaliska erfarenheten. Ofta förbindes denna tanke med en tanke, som senare skall behandlas, nämligen att geometrien är en rent logisk tankebyggnad, som kan uppställas utan hänsyn till verkligheten och till frågan om sanning och falskhet. Sedan får man genom erfarenheten experimentellt undersöka, om tankebyggnaden är riktig eller icke, om den gäller i verkligheten eller icke. I allmänhet gäller frågan parallellaxiomet och därmed frågan, huruvida den euklidiska eller någon av de icke-euklidiska geometrierna är den i verkligheten giltiga. Och den experimentella verifikationen gäller då i allmänhet triangelns vinkelsumma. Är denna två räta, så gäller den euklidiska geometrien; är den större eller mindre än två räta, så gäller den elliptiska respektive den hyperboliska geometrien. Beträffande dessa förhållanden får jag hänvisa till mitt i förordet angivna populärvetenskapliga arbete om icke-euklidisk geometri.

Ett dylikt experiment synes mig emellertid icke kunna verifiera, vad man avser att verifiera. Avgörande synes mig nämligen vara, att man som förutsättning för experimentet måste göra vissa antaganden i geometriskt hänseende om vissa fysikaliska förhållanden. Hur erhåller man t. ex. vid experimenten en rät linje? Vanligen genom en ljusstråle. Och då måste man förutsätta, att ljusstrålens bana är en rät linje. Om man då som resultat av mätningen skulle få, att triangelns vinkelsumma är t. ex. mindre än två räta, hur har man att tolka detta? Ja, antingen i enlighet med den ovan antydda teorien på så sätt, att det är den hyperboliska geometrien, som gäller i verkligheten. Eller också helt enkelt på så sätt, att den nyss angivna förutsättningen beträffande ljusets bana är falsk: denna bana *är* icke en rät linje utan någon kurva. Logiskt sett är den senare tolkningen lika berättigad som den förra. Man kan sålunda aldrig hävda, att experimentet lämnar ett *avgörande* bevis för att ett visst axiom gäller eller icke. Men vilketdera tolkningssättet är enklast och naturligast? Jag tvekar icke att säga, att det är det sistnämnda, alltså att experimentet utsäger något om ljusets bana. Finns det dessutom något som helst stöd för antagandet, att ljuset följer en rät linje? Något experimentellt stöd finns ju icke under den angivna förutsättningen.

I själva verket torde man enligt min mening kunna gå längre och hävda, att geometrien i stället för att kunna verifieras genom experiment tvärtom är en förutsättning för fysiken och för mätinstrumenten. Detta är emellertid icke väsentligt för att man skall kunna inse det ohållbara i den empiristiska tanken på axiomens verifikation genom den fysikaliska erfarenheten.

Den s. k. *axiomatiken*, vars främste representant är Hilbert, anknyter till den moderna logiken och utgör i själva verket en viktig utveckling inom denna. Ändamålet med densamma torde kunna formuleras på följande sätt: Att inom ett visst område (t. ex. geometrien) uppställa ett system av satser (axiom), som äro nödvändiga och tillräckliga, för att systemet skall gälla endast för en viss grupp (resp. vissa grupper) av begrepp (i fråga om geometrien de geometriska grundbegreppen punkt, rät linje och plan samt deras relationer: ligga på, gå genom, ligga mellan, kongruent, parallell och kontinuerlig).

En sats om vissa begrepp och relationer kan i vissa fall gälla om andra begrepp och relationer. Detsamma kan gälla om en grupp satser. Men ju fler av varandra oberoende satser man anger om begreppen och relationerna, desto mer begränsas möjligheterna att satserna skola gälla även om andra begrepp och relationer. Skulle man vilja ställa sig uppgiften att formulera de av varandra oberoende axiom, som äro på en gång nödvändiga och tillräckliga, för att de skola gälla endast för de begrepp man utgått från, så finner man, att uppgiften är orimlig. Det finns också andra begrepp, för vilka axiomen gälla.

Hilberts berömda axiomsystem torde utan gensägelse vara det förnämsta axiomsystemet för den euklidiska geometrien från matematisk synpunkt. Som jag ser saken, är det främst två anledningar härtill: det ansluter sig närmast till Euklides' lärobyggnad, och dess karaktär av ett formalistiskt system gör, att det omedelbart kan användas på andra begreppskomplex än punkt, rät linje och plan.

Det är att märka, att axiomatiken icke är en kunskapsteoretisk teori. Detsamma gäller överhuvudtaget den moderna logiken. Man kan i vetenskapernas utveckling iakttaga en intressant företeelse beträffande filosofien och fackvetenskaperna. Under tidernas lopp har den ena fackvetenskapen efter den andra avskilts från filosofien. I äldsta tid var filosofi detsamma som vetenskap överhuvudtaget. Redan tidigt avskildes matematik, naturvetenskaper, historiska vetenskaper och språkvetenskap. Under senare delen av 1800-talet avskildes psykologien som fackvetenskap, och i vår egen tid har nu logiken avskilts. Filosofi har därigenom alltmera kommit att bli enbart kunskapsteori och allmän vetenskapslära. Axiomatiken är en abstrakt logisk teori för geometrien, men den utgör ingen kunskapsteoretisk teori för densamma.

Ehuru jag anser Hilberts axiomsystem vara det förnämsta från rent matematisk synpunkt, anser jag det icke vara i oförändrat skick det lämpligaste från kunskapsteoretisk synpunkt och framför allt icke från pedagogisk synpunkt, då det gäller den elementära geometrien. Jag skall senare komma närmare in härpå. Först skall jag fortsätta framställningen av åsikterna om axiomens natur och skall då närmast belysa ett par uppfattningar, som jag tror har sin rot — eller i varje fall en av sina rötter — i missuppfattningar av axiomatiken.

Axiomen uppfattas stundom såsom *förklädda definitioner*. Först genom ett system axiom skulle grundbegreppen bli bestämda. Denna tanke är emellertid felaktig. Om grundbegreppen icke äro på förhand bestämda, kunna de omöjligt bli bestämda genom ett system av axiom, som skall gälla om dem. För ett närmare utförande härav får jag hänvisa till mitt flera gånger citerade arbete i minnesskriften till Phalén. Jag kan med desto större skäl nöja mig med att göra det, som man kan uppvisa tankens ohållbarhet redan genom en hänvisning till att axiomen faktiskt icke bestämma grundbegreppen entydigt. Hilberts axiomsystem gäller som bekant även för andra grundbegrepp än punkt, rät linje och plan.

Om man försöker förstå, hur en dylik tanke har kunnat uppstå, synes man kunna hänvisa *dels* till det förhållandet, att de geometriska grundbegreppen icke kunna i egentlig mening definieras, *dels* till det förhållandet, att ju fler axiom man antar, desto mer begränsas möjligheten att välja grundbegreppen. På så sätt kan man förstå, hur denna i och för sig ohållbara tanke kan ha uppstått.

Ännu vanligare är tanken, att axiomsystemet endast är ett *tomt formelsystem*, ett system av omdömesschemata. Det som systemet skall gälla om, anses då vara något obestämt. De geometriska grundbegreppen äro icke bestämda. Att en sådan uppfattning sammanhänger *dels* med att de grundläggande begreppen icke kunna definieras, *dels* med att systemet gäller för olika val av grundbegrepp, torde ligga i öppen dag.

Redan i förra kapitlet framhöll jag, att man icke får förväxla ett begrepps odefinierbarhet och dess obestämdhet. Det senare måste skarpt skiljas från det förra. Ett begrepps obestämdhet följer icke av dess odefinierbarhet. Överhuvudtaget måste de geometriska grundbegreppen vara bestämda.

Man torde också kunna hävda, att ett *blott och bart* tomt formelsystem saknar varje innehåll och icke kan uppställas.

Tag t. ex. Hilberts första axiom: »Två från varandra skilda punkter bestämma alltid en rät linje.» Om här termerna »punkt» och »rät linje» samt relationen »bestämma» icke skola ha bestämd innebörd, så saknar satsen varje mening. Till dessa termer få nämligen då icke knytas några bestämda föreställningar. Man borde då helst benämna dem med neutrala namn. Låt oss i stället för »punkt» använda termen »ting av slaget x», i stället för »bestämma» termen »relation av slaget y» och i stället för »rät linje» termen »ting av slaget z», där sålunda x, y och z äro för oss fullkomligt obekanta. Axiomet skulle då lyda: »Två ting av slaget x stå alltid i en relation av slaget y till ett ting av slaget z». Här torde då klart framträda, att en dylik tom formel är så uttunnad, att den i själva verket saknar varje innehåll.

Man kanske här ville invända: med detta resonemang skulle man emellertid även ha visat, att t. ex. ett ekvationssystem, innehållande x, y och z, vore utan varje innehåll, innan man kände värdena på de obekanta. Och detta kan väl icke vara riktigt? Naturligtvis icke! Men det är en väsentlig skillnad mellan de båda fallen. I fråga om ett ekvationssystem vet man dock, att de obekanta äro tal och att de ingående tecknen (+, —, = o. s. v.) ha vissa bestämda betydelser. Full analogi skulle man få, om man inte ens visste, att x, y och z vore tal och att +, —, = hade någon bestämd mening. Då vore också ekvationssystemet utan varje mening. Emellertid föreligger även vid ett vanligt ekvationssystem, liksom f. ö. även i andra delar av matematiken, en viss filosofisk svårighet, nämligen den s. k. ofullständiga uppfattningen, som vi skola återkomma till.

Axiomatikens axiomsystem *är* emellertid icke blott och bart ett tomt formelsystem, emedan det gäller för och är uppställt för grundbegreppen punkt, rät linje och plan. För närmare belysning härav nödgas jag på nytt hänvisa till det förut angivna arbetet.

I samband med nyss behandlade uppfattning bör nämnas den vanliga och viktiga tanke, som uttryckes med att axiomen benämnas *postulat*. Man menar sig kunna helt bortse från huruvida axiomen äro sanna eller icke. Man endast postulerar dem. En känd variant av denna tanke är Poincarés uppfattning av axiomen såsom överenskommelser, konventioner. Att fråga efter axiomens (och därmed geometriens) sanning, saknar mening.

Innan vi gå in på en undersökning av denna tanke, skola vi se den i dess psykologiska sammanhang. Man kan fråga sig, hur man kan komma fram till en uppfattning, som förefaller vara så egendomlig. Bidragande kan säkerligen vara den förut nämnda uppfattningen av axiomatikens axiomsystem som ett tomt formelsystem. Om det icke är bestämt, vilka de ingående grundbegreppen och relationerna äro, så synes det likaså vara oväsentligt, om systemet äger giltighet eller icke. Det förefaller mig dock, som om den viktigaste förklaringsgrunden vore tanken på s. k. förmedlad sanning.

Det är en icke ovanlig uppfattning, att en sats, som bevisas, får sin sanning genom premisserna. Innan en sats bevisats, är det icke blott så, att man icke vet, om den är sann. Den *är* icke heller sann, utan får sin sanning genom premisserna. Denna tanke är dock ohållbar. Premisserna skulle då få sin sanning genom att bevisas. Innan premisserna fått sin sanning genom nya premisser, är sålunda den första satsen icke sann. Då *dessa* premisser i sin tur få sin sanning genom nya premisser, få vi en oändlig regress, som visar tankens ohållbarhet. Om man skall kunna undgå den oändliga regressen, måste man antaga några satser, som äro i sig sanna. Dessa ha sålunda sin sanning icke genom några andra satser utan genom sig själva. De äro *självklara satser*, som man säger. Detta är emellertid också orimligt. Såvitt jag vet, hävdas numera icke av någon tanken på axiomen såsom självklara satser.

Ur det nyssnämnda dilemmat finns det, förefaller det, ännu en utväg: att helt bortse från axiomens sanning och falskhet. Axiomen äro varken sanna eller falska. De satser man härleder av dem, äro sålunda likaså varken sanna eller falska. De äro endast konsekvenser av axiomen.

Emellertid är det så, att ett omdöme icke kan falla utanför frågan om sanning och falskhet. Om varje omdöme gäller, att det antingen är sant eller falskt. Det är rent av det för omdömet karakteristiska. Man kan visserligen i vissa fall tillfälligtvis bortse från om ett omdöme är sant eller falskt. Men även ett sådant omdöme *är* dock antingen sant eller falskt.

Man kan belysa detta genom att välja ett omdöme vilket som helst. Om man fäller omdömet: »Det regnade i Stockholm den 7 juli 1946», så är det antingen sant eller falskt. Antingen föll det regn eller också föll det icke regn på denna plats. Antingen det ena eller det andra gäller. Visserligen kan jag bortse från sanningen eller falskheten, t. ex. om omdömet står att läsa i en novell. Det kan då vara utan intresse, om det är sant eller icke. Men även i detta fall måste det dock antingen vara sant eller falskt.

Därför är det en felaktig uppfattning att antaga axiomen falla utanför frågan om sanning och falskhet. *Axiomen måste uppfattas som sanna satser, gällande om bestämda grundbegrepp.*

Den kursiverade satsen är, som jag ser saken, en av de allra viktigaste om axiomen från kunskapsteoretisk synpunkt. Den är t. ex. av fundamental vikt, då det gäller tolkningen av de s. k. icke-euklidiska geometrierna. Jag vill nämna ett par ord härom.[1]

Man kan genom att ersätta parallellaxiomet med andra liknande satser uppbygga två med den euklidiska geometrien analoga geometrier, den hyperboliska och den elliptiska geometrien. I den förra ersättes parallellaxiomet med satsen »genom en punkt utanför en rät linje går mer än en rät linje, som icke skär den förra». I den elliptiska geometrien ersättes parallellaxiomet med satsen: »genom en punkt utanför en rät linje går icke någon rät linje, som icke skär den förra». I den hyperboliska geometrien är då vinkelsumman i en triangel mindre än två räta; i den elliptiska geometrien åter är nämnda summa större än två räta.

När det nu gäller den logiska innebörden av dessa geometrier, är det av yttersta vikt att fasthålla vid att de geo-

[1] För utförligare redogörelse för dessa geometrier får jag hänvisa till mitt tidigare anförda arbete om den icke-euklidiska geometrien.

metriska grundbegreppen äro bestämda begrepp och att de geometriska axiomen äro sanna satser. Om begreppen punkt, rät linje och plan (i vanlig mening) kan då endast gälla en av de ovan nämnda tre möjligheterna. Antingen är t. ex. en triangels vinkelsumma två räta eller också är den större eller mindre. Man kanske kan sägas i viss mån ha fritt val, men man måste bestämma sig för ettdera. En triangels vinkelsumma kan icke på en gång vara såväl två räta som icke två räta. Det är precis lika omöjligt som att en triangel skulle på en gång såväl ha som icke ha en rät vinkel. Och i valet mellan de tre möjligheterna torde ingen tvekan kunna göra sig gällande. Om de geometriska grundbegreppen punkt, rät linje och plan (i vanlig mening) gäller därför utan tvivel den euklidiska geometrien. Och de icke-euklidiska geometrierna måste gälla om andra grundbegrepp än punkt, rät linje och plan (i vanlig mening).

Det är att märka, att såväl de fysikaliska tillämpningarna av de icke-euklidiska geometrierna som de matematiska systemen bli oförändrade och opåverkade av den anförda uppfattningen utom i avseende på den logiska tolkningen. Om fysiken skulle finna, att det är en hyperbolisk geometri, som gäller för makrokosmos, så innebär detta endast en utsaga om ljusets bana. Det är ljusets bana, som är krökt, icke den räta linjen. Vill man använda termen »rät linje» för den räta linjens motsvarighet, så må man göra det, men man bör ha klart för sig, att det icke är den räta linjen i vanlig mening man talar om. Mycken oklarhet har vållats av att man icke klart skilt mellan den matematiska terminologien och dess reala innehåll.

Jag vill här nämna något om en invändning, som kan göras mot den nämnda tolkningen av de icke-euklidiska geometrierna. Man säger: Låt vara att de icke-euklidiska geometrierna kunna representeras som geometrier med andra grundbegrepp än den euklidiska. Men detta hindrar icke, att de kunna förverkligas i andra rum än »vårt» s. k. euklidiska rum. Visserligen kunna vi icke ha någon åskådlig uppfattning av dessa rum, men de kunna dock finnas. Och de icke-euklidiska geometrierna visa, att vi också kunna tänka oss sådana rum.

Man måste dock ha klart för sig, att geometrien sysslar med bildningar i »vårt» rum. Endast sådana bildningar äro ju geometriska. Andra rum än »vårt» borde då kunna lämnas därhän.

Vidare bör man observera, att vi ingenting veta om dessa andra rum. Det är sålunda absolut utan mening att kalla en geometrisk bildning i ett sådant rum för »rät linje».

Fantasier om andra rum än »vårt» kunna vara mycket fängslande liksom en fantastisk roman kan vara det, men man måste ha klart för sig, att de icke höra hemma inom vetenskapen.

Inom såväl axiomatiken som andra riktningar förefinnes uppfattningen, att axiomen äro *åskådningsfakta.* Axiomen hämtas ur åskådningen, därmed är åskådningens roll utspelad. Geometrien uppbygges sedan »rent logiskt» på axiomen utan åskådningens medverkan.

Termen åskådning är flertydig. I allmänhet torde termen i förevarande sammanhang betyda rumsuppfattning. Enligt den angivna meningen skulle alltså konkreta rumsuppfattningar behöva realiseras endast av det i axiomen utsagda men icke i övrigt.

Tidigare har betonats, att i ett geometriskt bevis ingå *dels* en uppfattning av en geometrisk bildning, *dels* omdömen härom. Dessa omdömen, de geometriska satserna, kunna i sista hand återföras på axiomen. Men det förra, rumsuppfattningarna, är också ett nödvändigt moment i det geometriska beviset. Enligt min mening kan sålunda geometrien icke frigöras från åskådningen. Geometrien har rummet till föremål för sin forskning. Utan att man realiserar rumsföreställningar kan ett geometriskt bevis överhuvudtaget icke föras. Om man ville ur ett geometriskt bevis ta bort rumsföreställningarna, så bleve det icke längre geometri.

Däremot är det klart, att de slutledningar ett geometriskt bevis innehåller, måste vara även formellt riktiga, d. v. s. varje omdöme, som icke är ett axiom, skall erhållas som slutsats med andra omdömen som premisser. I sista hand skola alltså omdömena återföras på axiomen såsom geometriens yttersta förutsättningar av omdömeskaraktär. Man får alltså icke »stödja sig på figuren», om man därmed på ett oberättigat sätt inför något nytt omdöme. Däremot icke blott får utan måste man i den meningen stödja sig på figuren, att man realiserar uppfattningar av den geometriska bildning, som beviset handlar om. Men alla ingående omdömen om figuren måste noga redovisas, så att man icke smusslar in något.

Om det är riktigt, som jag här försökt påvisa, att geometrien sysslar med rummet och rumsbildningar, kan det förefalla ytterst egendomligt, att man sökt frigöra geometrien från rumsåskådningen. Det torde (såsom G. Oxenstierna framhållit) bero på en förväxling av rummet såsom föremål för geometrien å ena sidan och rumsföreställningarna, rumsåskådningen såsom bevisgrund å den andra. Att man vid geometrisk bevisföring icke får bygga på åskådningen, är klart. Därav drages då på grund av den nämnda förväxlingen den felaktiga slutsatsen, att geometrien måste helt frigöras från åskådningen.

Beträffande de grundläggande kunskapsteoretiska satserna om axiomen har jag nu blott att nämna något om de s. k. allmänna storhetsaxiomen. Dessa behandlas ofta på samma sätt som de geometriska axiomen, men äro av helt annan natur. Jag uppfattar dem som tautologiska satser om storheter i allmänhet. De användas icke som premisser vid de geometriska bevisen utan innebära i själva verket endast, att man vid beviset tänker konsekvent. De användas sålunda på samma sätt som logikens regler. Det vore givetvis av intresse att undersöka även dessa axiom, något som dock torde ha större värde för andra områden av matematiken än geometrien.

Frågan är nu, huruvida dessa allmänna storhetsaxiom skola explicit formuleras eller endast implicit användas. Det är i själva verket en rent pedagogisk fråga. Från logisk synpunkt är det icke nödvändigt att ha dem med. Men framställningen av ett bevis synes mig bli mera lättförståelig, om storhetsaxiomen uttryckligen åberopas. Jag anser sålunda tillräckliga pedagogiska skäl föreligga för att medtaga storhetsaxiomen i en elementär framställning av geometrien. Härtill skola vi återkomma.

Utifrån den principiella ståndpunkt, som ovan skisserats, har jag sökt få fram det system av geometriska axiom, som är nödvändigt och tillräckligt. Jag har alltså förutsatt de geometriska grundbegreppen punkt, rät linje och plan samt de behövliga relationerna mellan dessa och har sedan utifrån Hilberts axiomsystem sökt uppställa de behövliga rent geometriska axiomen. För detaljer får jag hänvisa till ifrågavarande undersökning (se förordet). Av kunskapsteoretiskt intresse torde ytterligare ett par förhållanden vara, som jag skall nämna något om.

Det ena gäller kongruensläran. Euklides bygger som bekant kongruensläran på figurers täckande av varandra. Därmed antages implicit den allmänna satsen, att en geometrisk bildning kan vara bestämd till form och storlek utan att dess läge är fixerat. Denna sats går ofta under namnet flyttningsaxiomet. Man har emellertid invänt, att denna sats skulle medföra svårigheter. Sådana allmänna begrepp som storlek, form och läge kunna icke användas i matematiken. Man måste kunna matematiskt fixera dem, så som exempelvis sker i Hilberts kongruensaxiom.

Nu kan man först framhålla, att även om dessa allmänna begrepp (form, storlek, läge) icke kunna definieras, så innebär det icke, att de skulle vara på något sätt obestämda. Vi måste här akta oss för samma förväxling mellan odefinierbarhet och obestämdhet som vid de geometriska grundbegreppen punkt, rät linje och plan. Lika väl som man vet, vad en punkt eller en rät linje är, även om man icke kan lämna en tillfredsställande definition, lika väl vet man, vad en figurs form, storlek och läge är, utan att man kan ge en acceptabel definition.

Därjämte är det uppenbart, att man utan vidare kan tänka sig en geometrisk bildning av viss form och storlek utan fixerat läge. Något som helst tvivel om satsens giltighet kan alltså icke finnas. Och den ligger utan tvekan innesluten i den euklidiska geometriens axiomsystem.

Emellertid anser jag likväl, att denna sats icke hör till geometriens axiom i den betydelse detta begrepp här tidigare tagits. Satsen användes nämligen icke som premiss vid bevisen. Man tycks nämligen vid användningen realisera en uppfattning av två figurer med samma form och storlek men olika läge. Det synes emellertid icke vara nödvändigt att sedan fälla omdömet, att man kan realisera en sådan uppfattning.

Man har också invänt, att flyttning av figurer icke hör till geometrien. Även om man anger, att förflyttning av en figur endast innebär, att denna tänkes i olika lägen, så skulle dock användning av detta begrepp vara för geometrien främmande. Beviset för första kongruensfallet t. ex., såsom redan Euklides utförde det, innebär en förflyttning (låt vara tänkt), ett begrepp som lånats från fysiken och icke hör hemma inom geometrien.

Emellertid behöver man icke alls utföra beviset genom en dylik tänkt förflyttning, om man icke vill. Det är pedagogiskt sett lämpligt, men från logisk synpunkt oväsentligt. Beviset är i själva verket ett slags entydighetsbevis och kan genomföras på följande sätt utan någon förflyttning av figuren:

Vi förutsätta alltså, att i $\triangle$ ABC och $\triangle$ A′B′C′ AB = = A′B′, AC = A′C′, $\wedge$A = $\wedge$A′, och påstå, att $\triangle$ABC $\cong$ $\cong$ $\triangle$ A′B′C′, d. v. s. att trianglarna överensstämma i allt utom i fråga om läget. Betrakta $\triangle$ A′B′C′. Där är $\wedge$ A′ bestämd (= $\wedge$ A). Då A′B′ är bestämd till sin längd (= AB), blir punkten B′ bestämd till sitt läge. Då A′C′ vidare är bestämd till sin längd (= AC), blir punkten C′ bestämd till sitt läge. Genom B′ och C′ kan endast en rät linje dragas. Då blir B′C′ bestämd till läge och storlek, alltså också $\wedge$ B′ och $\wedge$ C′. Genom de givna elementen är alltså triangeln A′B′C′ entydigt bestämd. De båda trianglarna ABC och A′B′C′ skilja sig alltså blott genom olika läge.

Emellertid har jag föga att invända mot användning av begreppet förflyttning från principiell synpunkt, lika litet som mot det viknings- eller omläggningsförfarande, som i vissa fall användes. Att jag dock föredrar den lärogång, som finns i Euklides' Elementa, där de två första kongruensfallen komma bland de allra första satserna, sammanhänger med pedagogiska överväganden, såsom senare skall beröras.

Det andra momentet av kunskapsteoretiskt intresse, som förut antyddes, sammanhänger med det nyss nämnda. Det finns åtskilliga satser av samma karaktär som kongruensaxiomet: satser av geometriskt innehåll, som dock icke användas som premisser vid bevisen, då de endast uttrycka omdömen om vissa geometriska bildningars realiserbarhet. Som ytterligare exempel kunna nämnas satserna: det finns punkter på en rät linje; det finns räta linjer i ett plan; genom två punkter kan man draga en rät linje; genom tre punkter, som icke ligga i rät linje, kan man lägga ett plan; på en rät linje finns mellan två punkter åtminstone ytterligare en punkt. Samtliga synas vara existentialomdömen, i vilka uttalas, att föreställningen om en viss geometrisk bildning kan realiseras. Med den uppfattning om geometriens axiom, som förut utförts, äro de inga axiom. Då kan man emellertid fråga, om icke detsamma gäller en del andra axiom också, t. ex. axiomet »om två punkter på en rät linje ligga i ett plan, så ligger denna räta linje i planet». Om man realiserar en uppfattning av ett plan och en rät linje, av vars punkter tvenne ligga i planet, så uppfattas väl, att linjen ligger i planet. Dock är det här så, att axiomet utsäger något utöver det omedelbart uppfattade. Det föreligger en s. k. ofullständig uppfattning. Om man uppfattar ett plan och en rät linje, av vars punkter tvenne ligga i planet, så uppfattar man faktiskt icke, att linjen ligger i planet. Å andra sidan *ligger* linjen uppenbarligen i planet. Hur kan man då säga, att man uppfattar ifrågavarande geometriska bildning, då man tydligen icke uppfattar allt i densamma? Här föreligger i själva verket en betydande filosofisk svårighet. Man har densamma i många andra fall. Man talar t. ex. om en 1000-hörning. Men uppenbarligen uppfattar man icke denna komplicerade figur fullständigt. Man har samma svårighet icke blott i matematiken utan nästan överallt. Jag tänker t. ex. på Stockholm eller på Gustav II Adolf. Uppenbarligen uppfattar jag i vartdera fallet endast en del av ifrågavarande begrepps bestämningar. Med vad rätt säger jag då, att jag uppfattar Stockholm respektive Gustav II Adolf? Något väsentligt bidrag till lösningen av detta problem, problemet om ofullständig uppfattning, känner jag icke till.

Man kan nu fråga sig: Kunna dessa kunskapsteoretiska utredningar ha någon betydelse för den praktiska pedagogiken? Detta skall beröras i nästa kapitel.

3. *Geometriundervisningen*

Det finns enligt min mening föga tvivel om att geometriundervisningen i realskolan hör till de allra svåraste områdena inom skolmatematiken. Svårigheterna äro dels av logisk-matematisk, dels av pedagogisk natur.

Man torde icke kunna bestrida, att många äldre läroböcker i geometri för realskolan och då i främsta rummet de olika Euklides-editionerna främst tagit hänsyn till de *systematiska* svårigheterna, varvid emellertid de pedagogiska kommit i efterhand. Men lika otvivelaktigt torde mången lärobok från senare tid främst varit inriktad på de *pedagogiska* svårigheterna, och då inträffar det lätt, att de systematiska kraven bli tillbakasatta. Naturligtvis menar jag icke, att man skulle kunna isolera de båda nämnda momenten från varandra och först lösa den ena svårigheten och sedan den andra. En vetenskaplig utredning av geometriens byggnad måste naturligtvis ligga till grund, men sedan måste man på denna grundval bygga upp en geometrisk lärogång, som är pedagogiskt lämplig i realskolan.

Det har många gånger framhållits, att läroboken spelar en underordnad roll i undervisningen i jämförelse med lärarens insats. Och det torde vara genomgående riktigt. En skicklig lärare vinner goda resultat, vilken lärobok han än använder. Och en dålig lärare kan aldrig nå tillfredsställande resultat, hur utmärkt den lärobok än är, som han använder. Läraren är och förblir det centrala i undervisningen. Men läroboken kan spela en mer eller mindre undanskymd roll. I vissa ämnen torde det vara så, att läroboken är av mindre betydelse. Men så är det icke i geometrien i realskolan. På grund av ämnets svårighetsgrad kan läroboken här icke vara endast ett stöd och en sammanfattning av lärarens muntliga undervisning. Snarare kan man säga, att lärarens undervisning skall vara en *kommentar* till lärobokens framställning. Var och en, som haft erfarenhet av några mera betydande avvikelser från lärobokens framställning, då man låter lärjungarna anteckna ett annat bevis än lärobokens el. dyl., vet hur fruktansvärt tidsödande det är och hur otillfredsställande resultatet likväl kan bli. Därför är det av stor vikt att ha en lärogång tillgänglig, som man endast undantagsvis behöver avvika från.

Man kan säga, att härigenom på visst sätt de förut nämnda synpunkterna på vart sitt sätt tillgodoses: lärobokens huvudsynpunkt är den logisk-matematiska, lärarens den psykologisk-pedagogiska.

Det första kravet på lärogången är, att den skall vara logiskt tillfredsställande. Naturligtvis är det omöjligt att i en lärobok för realskolan ge en framställning, som är vetenskapligt fullt tillfredsställande. Men lärobokens framställning bör vara sådan, att den i görligaste mån endast behöver på olika sätt *kompletteras* och icke fullständigt *omarbetas* för att bli i vetenskapligt avseende korrekt.

Av vikt är t. ex. att klart skilja mellan definitioner, axiom och lärosatser. Behandlingen av en och samma sak varierar här ofta i avsevärd grad. Ett par exempel: Omdömet »genom två punkter går endast en rät linje» betraktas i en lärobok närmast som en definition och i en annan som ett axiom. Och omdömet »den räta linjen är kortaste avståndet mellan två punkter» betraktas i olika läroböcker som en definition, ett axiom eller en lärosats. När så olika ställning kan ges åt ett och samma enkla faktum, så har man anledning ifrågasätta, om det icke beror på bristande klarhet i uppfattningen om de geometriska omdömenas och då särskilt axiomens logiska natur.

Axiomen böra enligt min mening icke förklaras vara »självklara satser», såsom ofta sker. Att detta från logisk synpunkt är felaktigt, har jag tidigare i detta arbete framhållit. Men även från pedagogisk synpunkt är det förfelat. För lärjungarna äro många satser »självklara», vilka alls icke äro av axiomatisk karaktär. Läraren torde ha mycket svårt att för en frågvis lärjunge förklara, varför vissa satser få betraktas som självklara men andra icke. Detta är då ägnat att minska förtroendet och därmed intresset för det systematiska uppbyggandet av geometrien. Ett axiom bör även från pedagogisk synpunkt definieras som en sats, som man tar till utgångspunkt och icke bevisar. Det är av allra största vikt att redan från början i den systematiska geometriundervisningen framhäva den geometriska lärobyggnadens karaktär att bygga på vissa utgångspunkter, såväl i fråga om begrepp som satser.

Med axiom avser jag i detta sammanhang främst de *geometriska* axiomen. Övriga axiom, de tautologiska satserna om storheter, äro ju av helt annan karaktär, såsom tidigare omnämnts. Naturligtvis bör man tala även om dem, lärjungarna äro ju förtrogna med dem redan från ekvationsläran, men man bör icke göra så stort väsen av dem. Såsom tidigare framhållits, är det icke från logisk synpunkt nödvändigt att ha dem explicit formulerade, men jag anser det från pedagogisk synpunkt ändamålsenligt. Däremot är det naturligtvis förkastligt att låta lärjungarna lära sig räkna upp dem. Ej heller är det nödvändigt att ideligen hänvisa till dessa axiom vid reproduktionen av ett bevis. Det är lika bra eller bättre, att lärjungarna få vänja sig vid att säga, att man lägger till eller drar ifrån vissa storheter o. dyl., och att de endast vid lärarens fråga nämna axiomets innehåll.

Men de rent *geometriska* axiomen bör man lägga stor vikt vid. Tyvärr skiljas dessa ofta icke från övriga axiom eller framhävas icke såsom axiom även i mycket förtjänstfulla läroböcker. Axiomens ställning i många nyare framställningar av geometriens element är ofta mycket otillfredsställande. Huvudvikten synes faktiskt läggas vid de tautologiska axiomen. Å andra sidan tycks man ha en känsla av att man likväl icke bör lägga så stor vikt vid dem. Därför samlas de ofta i en grupp före den egentliga texten, i stil med förkortningar och beteckningar, och spela ingen verklig roll i fortsättningen. De geometriska axiomen åter bruka förekomma i den egentliga framställningen, ofta dock utan att deras karaktär av axiom framhäves eller deras karaktär av utgångspunkter och grundvalar för hela lärobyggnaden klart betonas.

I det föregående har jag sökt belysa axiomens karaktär enligt min uppfattning, deras logiska struktur och kunskapsteoretiska beskaffenhet. I mina läroböcker i geometri för realskolan och för realgymnasiet har jag sökt tillämpa denna uppfattning för en genomförd lärogång i elementär geometri.

Det vore nu en grov missuppfattning att tro, att jag skulle vilja införa några subtiliteter i samband med axiomen. Endast två rent geometriska axiom anser jag, att man bör ta med i realskolans kurs, nämligen parallellaxiomet och axiomet »genom två punkter går endast en rät linje». Dessa axiom användas i *alla* framställningar av elementargeometrien, vare sig de nu uttryckligen formuleras eller ej. Jag menar, att dessa axiom klart böra framhävas såsom axiom, såsom utgångspunkter för hela systemet. En dylik behandling är icke alls svår eller på något sätt märkvärdig, och minst av allt medför den några subtiliteter. Däremot menar jag, att den medför större reda och klarhet än om dessa axiom *smusslas* in vid bevisen. Och utan dessa axiom kan man icke reda sig.

Beträffande det systematiska uppbyggandet av geometrien vill jag betona, att jag anser Euklides' lärogång vara i det hela överlägsen alla andra jag känner till. Det är också enligt min mening alldeles påtagligt, att de nyare arbeten, som icke ansluta sig till denna lärogång, i det hela äro alltmer förtjänstfulla, ju mer de närma sig Euklides'. Jag kan icke tolka detta på annat sätt än att den gamle greken verkligen funnit en huvudled i geometriens logiska sammanhang.

Man får här se till, att man icke förväxlar Euklides' *lärobyggnad* såsom ett historiskt föreliggande system och Euklides' *lärogång*. Det väsentliga av den senare kan man fasthålla vid och bör enligt min mening göra det, men den förra är i våra dagar i flera avseenden föråldrad.

Jag är dock å andra sidan icke någon fanatisk anhängare av Euklides' lärogång i alla dess detaljer. Att, såsom en bekant Euklides-anhängare gjort, förklara det vara »nästan omöjligt att rubba det allra minsta på ordningsföljden mellan satserna» hos Euklides, anser jag vara en påtaglig överdrift. I både rent vetenskapligt och i pedagogiskt avseende anser jag det nödvändigt med en hel del modifikationer i Euklides' system. Mången i och för sig beundransvärd detalj måste slopas, när det gäller en lärobok för realskolestadiet. Månget bevis tages också lämpligen på annat sätt än hos Euklides. Härav betingas också vissa ändringar i satsernas ordningsföljd.

Det sagda kunde belysas med en mängd exempel, men jag får nöja mig med ett enda, Euklides' I: 16, satsen att yttervinkeln till en triangel är större än var och en av de motstående inre vinklarna. Vid ett första påseende kan denna sats synas vara en svaghet i Euklides' lärogång, då man ju senare bevisar den mera omfattande satsen, att yttervinkeln är lika med summan av de motstående inre vinklarna. Men det är endast skenbart som detta är en brist.

I stället är som bekant satsen en av de mest beundransvärda logiska finesserna hos Euklides: en hel rad satser bli på detta sätt bevisade oberoende av parallellaxiomet, bl. a. kongruensfallen. Dessa komma därför att gälla även i vissa andra geometrier än den euklidiska.[1]

Men jag anser det likväl vara oriktigt att på denna punkt behålla Euklides' lärogång i realskolan. Lärjungarna kunna givetvis icke ha någon som helst uppfattning av den nämnda logiska finessen. Däremot torde de duktigaste av dem så småningom kunna av sig själva komma underfund med att satsen innehålles i den senare bevisade satsen om yttervinkeln. Och framför allt: man ernår en betydande förenkling genom att här avvika från Euklides.

Om jag sålunda icke vill, att man skall slaviskt följa Euklides på alla punkter, så menar jag å andra sidan, att man skall ha bärande motiv för en avvikelse. Jag vill även här nämna ett belysande exempel: satsen om den räta linjen som kortaste avståndet mellan två punkter. Euklides' system uppvisar här en fintänkt lärogång i och med att denna sats kan sägas utgöra slutmål för en längre bevisföring. Jag anser det både onödigt och olämpligt att förfuska Euklides' förnämliga insats på denna punkt genom att upptaga satsen om den räta linjen såsom kortaste avståndet mellan två punkter som ett axiom. Ännu mindre lämpligt är det att smussla in denna sats utan att klart fixera, att den användes som axiom eller att behandla den som en sats, som inses »genom åskådning», varom mera nedan.

Framför allt vill jag hålla fast vid det enligt min mening mest karakteristiska i Euklides' lärogång, nämligen kongruensläran s dominerande ställning. Första och andra

[1] Jfr mitt arbete Icke-euklidisk geometri.

kongruensfallen böra komma bland de allra första satserna. I framställningar, som avvika från Euklides', brukar man i stället låta vissa satser om mittpunktsnormalen intaga kongruensfallens plats. Vid bevisen låter man då vikningar och omläggningar ersätta bevisförandet med kongruens. I vissa framställningar användas vikningar och omläggningar genomgående vid de grundläggande konstruktionsuppgifterna.

Motiveringen för att kongruensfallen undvikas torde vara den, att kongruensfallens tillämpning icke anses vara lika enkel som vikningsförfarandet. Att Euklides' förfaringssätt är överlägset i logiskt avseende, bestrides väl icke av någon. Men jag tvekar icke att sätta detta förfaringssätt före även i pedagogiskt avseende.

Skall lärogången medelst mittpunktsnormalen vara tillfredsställande i logiskt avseende, så måste i själva verket mittpunktsnormalen såsom geometrisk ort fullständigt utredas. Och begreppet geometrisk ort, vare sig *termen* användes eller ej, hör enligt min mening icke till realskolans kurs. På ett högre stadium är detta begrepp ett av de allra viktigaste. Men på realskolestadiet är det för det första ett väl svårt begrepp, och då är det olämpligt att införa det nästan från allra första början. För det andra har begreppet faktiskt inga naturliga tillämpningar på detta stadium. Naturligtvis kan man tala om mittpunktsnormalen, bissektrisen och cirkeln som geometriska orter, men det sakliga innehållet, i den mån det hör till realskolans kurs, kan man behandla lika väl ändå.

Därför är denna lärogång ingalunda lätt utan tvärtom onödigt svår. Vidare är den ordning, reda och klarhet, som blir följden av Euklides' förfaringssätt, av verkligt stor betydelse även i pedagogiskt avseende. Genom kongruensförfarandet når man också en enhetlighet i bevisföringen, som i både logiskt och pedagogiskt avseende är betydelse-full. Börjar man med ett vikningsförfarande och sedan övergår till bevisföring medelst kongruens, så ha lärjungarna svårt att förstå, varför man icke kan fortsätta som förut. Jag skulle tro, att de flesta lärare, som använt sig av vikningsförfarandet, ha kunnat konstatera den naturliga tendensen hos lärjungarna att använda denna metod även sedan kongruensfallen genomgåtts. Detta belyser också på sitt sätt överlägsenheten i att använda kongruensförfarandet från början.

Slutligen vill jag också framhålla följande. Hur man än gör, måste kongruensfallen räknas till de viktigaste satserna, som ovillkorligen måste inläras och kunna tillämpas. Går man då igenom de båda första kongruensfallen före de grundläggande konstruktionsuppgifterna, såsom jag menar, att man bör göra efter Euklides' mönster, så får man här en mängd enkla tillämpningar på kongruensläran. Detta är en betydande vinst, som jag menar, att man bör skatta mycket högt. Några olägenheter av detta förfarande har jag svårt att förstå skulle kunna bli följden. Ej heller har jag någonsin hört någon förfäkta en sådan mening. Vad finns det då för skäl att avvika från Euklides?

Man har nu sagt: varför undvika vikningsförfarandet, då ju kongruensfallen likväl bevisas genom förflyttning av figurer och alltså rörelsebegreppet i alla fall måste användas? Invändningen bygger på en missuppfattning. Vikningsförfarandet bör — såsom av ovanstående och tidigare utreding framgår — undvikas, icke främst av principiella, utan av metodologiska och pedagogiska skäl.

Såsom redan framhållits, måste den logiska följdriktigheten enligt min uppfattning sättas mycket högt. Att framställa ett bevis, som är logiskt bristfälligt, anser jag vara förkastligt, även om lärjungarna måhända icke skulle inse felet. Som bekant är det i regel icke svårt för läraren att *överbevisa* och *övertyga* lärjungarna. Men man får absolut icke begagna sig härav, om beviset verkligen är behäftat med svårigheter. I så fall är det bättre att öppet erkänna bristen och säga t. ex. att »man kan bevisa» el. dyl. Jag vill närmare belysa detta. Man har t. ex. bevisat satsen om linjer från en punkt till en rät linje, bl. a. att linjerna äro parvis lika stora, om de avskära lika stora stycken från normalen räknat, och att de äro längre ju större stycken de avskära. Dessa satser kunna nu icke ensamma användas för uppvisande av existensen av skärningspunkter mellan en cirkel och en rät linje. De nämnda satserna äro nämligen inga existentialsatser. Av dem följer icke, att man från punkten ifråga kan draga två sträckor till linjen, vilka äro lika med en given längd. Men satserna användas dock stundom på detta uppenbarligen felaktiga sätt även i för övrigt förtjänstfulla framställningar.

För tydlighetens skull vill jag tillägga, att jag naturligtvis med logiskt tillfredsställande bevis endast avser sådant, som icke ligger över lärjungarnas horisont. Det är ju uppenbart, att man icke på realskolestadiet — och knappast på gymnasialstadiet heller för den delen — kan kräva bevis, som från axiomatisk ståndpunkt äro tillfredsställande. Överhuvudtaget äro axiomatiska tankegångar främmande för skolans stadier och böra enligt min mening undvikas. De höra till ett högre stadium och böra därför helt bannlysas från skolan. Jag anser det ej ens vara lämpligt med en framställning, som är upplagd efter axiomatiska linjer, även om dessa ej uttryckligen framhållas. Jag återkommer härtill längre fram.

Däremot anser jag det vara ett stort fel att i onödan avtrubba den logiska skärpan i ett bevis, som ligger inom lärjungarnas fattningsförmåga. Jag vill nämna ett par exempel härpå. Lärjungarna ha som bekant alltid lätt att förväxla en sats med dess omvändning. Om AB är en sträcka och P en punkt, så belägen att PA > PB, så kan man bevisa, att P ligger på samma sida om AB:s mittpunktsnormal som B. Men detta följer icke av satsen, att en punkt utanför en sträckas mittpunktsnormal ligger närmare den av sträckans ändpunkter, som ligger på samma sida om normalen som punkten, utan av omvändningen till denna sats. Sådana fel kunna även andra än realskolans och gymnasiets lärjungar göra sig skyldiga till, men jag anser det vara av stor vikt att vara noggrann på sådana punkter.

Bristande skärpa av annan natur är att använda överbestämda geometriska begrepp. Olyckligt är t. ex. att i tredje kongruens- och likformighetsfallen i satsernas formuleringar tala om likvinkliga trianglar eller att vinklarna äro lika stora i stället för det riktiga, att två vinklar äro lika stora. Om man tolererar sådant, är man inne på farliga vägar. Det nämnda fallet är ju i och för sig rätt oskyldigt. Men det är dock av principiellt samma natur som när en lärjunge säger »drag en normal från cirkelns medelpunkt till kordans mittpunkt». Jag anser det vara av vikt att från allra första början av geometriundervisningen beivra *alla* sådana oegentligheter. Det goda resultatet beror mest på lärarens noggrannhet, mindre på lärjungarnas förmåga. Med den rätta uppläggningen från början är det föga betungande för lärjungarna — men väl måhända för läraren.

Ett annat exempel på ungefär samma sak är definitionen av rektangeln och romben såsom en rätvinklig respektive liksidig *parallellogram*. Lärogången bör i stället väljas så, att det visas, att rektangeln och romben äro parallellogrammer.

Man kunde säga, att begreppen kongruens och likformighet, sådana de användas i modernare framställningar, också innebära en överbestämdhet. När man i kongruens-och likformighetsfallens formulering säger, att trianglarna äro kongruenta respektive likformiga, så upprepar man ju delvis, vad man enligt premisserna redan vet. Detta förhållande är dock icke analogt med de tidigare anförda. *Där* var det fråga om en överbestämdhet i premisserna, *här* är det så att säga en överbestämdhet i slutsatsen. Det förra är en logisk oriktighet, det senare kan aldrig vara logiskt oriktigt men möjligen en trivialitet. En tautologi är ju aldrig felaktig utan på sin höjd trivial. I detta fall är den icke ens trivial, ty den tautologi, som innehålles i satsen, tänker man icke på i vanliga fall.

I geometrien har man ofta anledning att syssla med specialfall och gränsfall av en sats, och det är viktigt — särskilt på gymnasiet — att klart särskilja dessa båda typer från varandra. Man kan göra det på följande sätt. Ett gränsfall av en sats är ett fall, för vilket satsens premisser icke äro uppfyllda men för vilket slutsatsen dock gäller. Ett specialfall av en sats åter är ett fall, för vilket satsens premisser äro uppfyllda och därmed också slutsatsen, även om i vissa fall satsens formulering kan behöva något modifieras. Däremot har bevisförfarandet ingenting med denna distinktion att göra. Satsen om periferivinkeln i en halvcirkel är ett specialfall av den allmänna satsen om periferivinklar, under det att satsen om vinkeln mellan en tangent och en korda från tangeringspunkten kan betraktas som ett gränsfall av samma sats.

I detta sammanhang vill jag nämna något om konstruktionsuppgifterna. Dessa skola naturligtvis inordnas i systemet. Skulle man emellertid göra det med full stränghet, så fordras en hel del satser rörande cirkeln, innan man kan strängt behandla t. ex. satserna om att dela en vinkel eller en sträcka mitt itu. Man skulle behöva gå igenom bevisen för satserna om skärningspunkter mellan två cirklar och mellan en cirkel och en rät linje. Emellertid böra de grundläggande konstruktionsuppgifterna komma på ett relativt tidigt stadium, både på grund av sin vikt och sin enkelhet och på grund av att de äro särskilt lämpade för lärjungarna genom att de äro konkreta och visa tillämpningar av geometristudiet. Här måste därför den pedagogiska synpunkten få dominera över den logiska. Ordningsföljden bör därför bli densamma som hos Euklides.

Sedan länge har jag hyst den uppfattningen, att antalet satser i realskolan bör vara mindre än vanligen var fallet före 1933 års stadga. Minskningen i timantal för matematiken genom denna stadga nödvändiggjorde en minskning av kursen, vilket senare jag alltså anser i och för sig vara av godo. Jag har ej heller något att invända mot den ytterligare inskränkning av kursen, som 1940 års skolutredning nyligen föreslagit. En väl inhämtad kortare kurs bör vara målet för realskolans geometriundervisning. Med uttrycket »väl inhämtad» menar jag då icke blott att satserna ifråga skola vara noggrant genomgångna och kunna till sitt innehåll reproduceras av lärjungarna, utan även att de kunna tillämpas av lärjungarna och också ha tillämpats på enkla övningsuppgifter. Det har gentemot en sådan synpunkt invänts, att man lika väl kan läsa en utförligare kurs, att man kunde använda en del av systemets satser som övningsuppgifter. Jag menar dock, att invändningen förbisett en viktig sak. Det är en avsevärd skillnad i psykologiskt avseende mellan *å ena sidan* att markera en mindre grupp kärnsatser, som alla äro skyldiga svara för, vid sidan av andra satser, som man prövat sina krafter på och kanske också minns innehållet av (kanske också bevisets gång) men som man icke är skyldig att svara för, och *å andra sidan* att ha ett system av satser utan skarpt markerad skillnad, även om vissa äro framhävda som särskilt viktiga. I senare fallet blir det nog så, att alla satserna komma att inta samma ställning och läras lika bra — eller lika dåligt.

Renast och klarast blir det, om varje sats utföres för sig. Vissa nära sammanhörande satser kunna naturligtvis sammanföras till en enda, särskilt om de utgöra olika moment av en och samma sats. Men i regel bör det undvikas. Att ha icke blott a och b utan också c och d i en sats, är icke till fördel för överskådligheten. Särskilt anser jag det vara olämpligt att låta en sats och dess omvändning ingå som moment i en enda sats. Även om antalet satser, av numreringen att döma, härigenom nedbringas, och en del utrymme i läroboken inbesparas, så blir kursens verkliga omfattning ju icke mindre. Och för lärjungarna blir det en påtaglig försämring.

Bevisen för satserna böra i läroboken vara utförda i minsta detalj, även med risk att det förefaller onödigt omständligt. För stor knapphändighet kan lätt medföra, att tankegången icke klart uppfattas av läsaren.

Redan tidigare har jag berört den förberedande geometriundervisningen såsom förstadium till den systematiska. Dess mål är att göra lärjungarna förtrogna dels med de hjälpmedel, som användas i geometrien (passare, linjal, vinkelhake, gradskiva, smygvinkel o. s. v.), dels också med de viktigaste av de geometriska begreppen, rät linje, sträcka, vinkel, trianglar och fyrhörningar av olika slag, cirkeln o. s. v. Jag har redan förut betonat den förberedande geometriundervisningens empiriska karaktär i motsats till den systematiska geometriundervisningens deduktiva, men också att det endast är i fråga om bevisföringen som det är någon skillnad. Vid den föreberedande geometriundervisningen kan man därför i det hela använda samma lärogång som vid den systematiska, dock givetvis med undvikande av de mera komplicerade satserna och med empirisk bevisföring (mätning av sträckor och vinklar) i stället för deduktiv och utan särskiljande av axiom och andra satser. Man bör icke dra sig för att lära lärjungarna konstruktionsförfarandena vid de enkla konstruktionsuppgifterna, även om man icke kan motivera dem. Det räcker med det empiriska konstaterandet, att konstruktionerna leda till riktiga resultat. Överhuvud taget bör den förberedande geometriundervisningen givas så föga teoretisk prägel som möjligt. Lärjungarna skola givetvis icke ha några läroböcker, och några satser skola icke på förhand uppställas utan dessa skola erhållas som eventuella resultat av mätningarna. Det bör ligga mindre vikt vid att erhålla satserna, huvudsaken är sysslandet med figurerna. En hel del geometriska bildningar stöter man på vid den förberedande geometriundervisningen. Lärjungarna skola lära sig särskilja dem, men några stränga definitioner bör man icke lägga vikt vid. De höra till den senare systematiska undervisningen. Om en lärjunge kommer på ett deduktivt bevis — eller kanske oftare av föräldrar eller äldre syskon får det påpekat för sig — så bör det icke tas upp i klassen utan man hänvisar till att man nästa år skall syssla med sådant. Däremot kan lärjungen privat för läraren få demonstrera sin kunskap, för att hans intresse icke skall dämpas.

En lärogång för den förberedande geometriundervisningen, anknytande till min lärobok för realskolan, kan t. ex. schematiskt anges på följande sätt:

Linjalen och dess användning. Uppritning av räta linjer. Uppritning av den räta linjen genom två punkter. Genom två punkter kan dragas endast en rät linje (axiom 1). Sträckor och mätning av sträckors storlek.

Passaren och dess användning. Uppritning av cirklar. Cirkelns medelpunkt och omkrets. Uppritning av en cirkel med given medelpunkt och med (numeriskt eller icke) given radie. Uppritning av lika stora sträckor.

Vinkeln, dess spets och ben. Uppritning av vinklar. Gradskivan och mätning av vinklars storlek. Olika slag av vinklar (räta, spetsiga, trubbiga). Smygvinkeln och uppritning av lika stora vinklar.

Sido- och vertikalvinklar. Summan av två sidovinklar (sats 1). Två vertikalvinklars inbördes storlek (sats 2).

Triangeln, dess sidor och vinklar. Uppritning av trianglar. Olika slag av trianglar (oliksidiga, likbenta, liksidiga; spetsvinkliga, rätvinkliga, trubbvinkliga). Uppritning av dessa olika slag av trianglar.

Uppritning av en triangel, då man känner [1]
två sidor och mellanliggande vinkel (sats 4),
de tre sidorna (sats 8),
två vinklar och mellanliggande sida (övningsuppgift 27),
två vinklar och en motstående sida (övningsuppgift 27).

Kongruenta trianglar. De tre första kongruensfallen (satserna 3, 7 och 24).

En triangel med två lika stora sidor respektive två lika stora vinklar (satserna 5 och 6). En triangel med två olika stora sidor respektive två olika stora vinklar (satserna 25 och 26).

Summan av två sidor i en triangel (sats 27). Den räta linjen som kortaste avståndet mellan två punkter (sats 27, följdsats).

Summan av en triangels vinklar (sats 23). Vinklarna i en liksidig triangel (övningsuppgift 23). Vinklarna i en likbent rätvinklig triangel (övningsuppgift 24). Vinkel-

---

[1] De givna elementen böra vara givna på så sätt, att de ingå i en triangel, icke var för sig såsom i den deduktiva geometrien.

summan i en fyrhörning (sats 23, följdsats 3). En triangels yttervinklar (sats 22). Yttervinklarna till en fyrhörning.

Att dela en vinkel mitt itu (sats 9). Att dela en vinkel i fyra lika stora delar (övningsuppgift 8).

Att dela en sträcka mitt itu (sats 10). Att dela en sträcka i fyra lika stora delar (övningsuppgift 11).

Att upprita en normal till en linje från en punkt på linjen (sats 11) respektive från en punkt utanför linjen (sats 12).

Parallella räta linjer.[1] Parallella linjer äro jämlöpande (sats 33, följdsats). Att upprita linjer parallellt med en given (genom att upprita lika stora normaler). Alternatvinklar och likbelägna vinklar (ej blott vid parallella linjer). Alternatvinklar vid parallella linjer äro lika stora (sats 19). Likbelägna vinklar vid parallella linjer äro lika stora (sats 20). Att upprita parallella linjer genom att göra alternatvinklar lika stora (satserna 15 och 16) eller genom att göra likbelägna vinklar lika stora (sats 17).[2] Genom en punkt kan dragas endast en rät linje parallellt med en given (axiom 2).

Månghörningar, speciellt fyrhörningar. Deras diagonaler. Parallellogrammer, rektangeln, romben, kvadraten. Uppritning av dessa figurer.

Motstående sidor och vinklar i en parallellogram äro lika stora (sats 33). Diagonalerna i en parallellogram skära varandra mitt itu (övningsuppgift 37). Diagonalerna i en rektangel äro lika stora (övningsuppgift 40). Diagonalerna i en romb äro vinkelräta mot varandra (övningsuppgift 42). Diagonalerna i en kvadrat äro lika stora och vinkelräta mot varandra.

Cirkeln, kordor, diametrar. Medelpunkts- och periferivinklar.

---

[1] Erhållas först lämpligen medelst linjalens båda kanter.

[2] På detta stadium torde det vara mindre lämpligt att uttryckligen framhålla skillnaden mellan satserna och deras omvändningar.

En medelpunktsvinkel är dubbelt så stor som en periferivinkel på samma båge (sats 39).

Periferivinkeln i en halvcirkel är rät (sats 39, följdsats).

Periferivinklar på samma båge äro lika stora (sats 40).

Lika stora kordor ligga lika långt från medelpunkten (sats 51).

En större korda ligger närmare medelpunkten än en mindre (sats 54).

Beroende på klassens ståndpunkt genomgås ett större eller mindre antal av dessa satser. Man bör icke eftersträva att genomgå ett visst pensum och allra minst forcera för att medhinna det. Mycket viktigt är nämligen, att den förberedande geometriundervisningen bedrives i lugn och ro. Då har man större möjligheter att redan från början väcka intresset och få alla lärjungarna med.

Man bör givetvis anknyta till lärjungarnas förut förvärvade kunskaper i olika avseenden. Man bör t. ex. flitigt använda den graderade linjalen och gradskivan och mäta sträckor och vinklar. Skall man avsätta en sträcka eller en vinkel lika stor som en annan, så är det för lärjungarna på detta stadium naturligt att mäta sträckan respektive vinkeln. Att man kan avsätta sträckan eller vinkeln utan att mäta den, är i själva verket resultatet av en abstraktionsprocess. Därför betecknar det i själva verket ett mera framskridet stadium. Och man bör i undervisningen gå från det konkreta till det abstrakta. Från axiomatisk ståndpunkt är emellertid processen den omvända. Begreppen lika sträckor och lika vinklar ligga logiskt till grund för mätning av sträckor och vinklar. Men jag anser det pedagogiskt felaktigt att här lägga upp lärogången från axiomatiska synpunkter.

När sedan den systematiska geometriundervisningen påbörjas, bör man fördenskull icke övergiva den empiriska geometrien. Den bör tvärtom ganska länge utgöra ett viktigt hjälpmedel vid preparationen. En mycket givande metod vid genomgången av en sats under första året av den systematiska geometriundervisningen är att börja med att låta lärjungarna upprita den figur det är fråga om och genom mätningar i denna ledas till att uppställa satsen. Därefter söker man ett deduktivt bevis för densamma. Det bör således komma till stånd ett intimt samspel mellan empirisk och deduktiv geometri, särskilt i början av den systematiska geometriundervisningen.

En fråga, som här bör beröras, är *när* övergången från empirisk till deduktiv geometri skall äga rum. På vissa håll har den åsikten framställts, att den deduktiva geometrien kommer för tidigt i våra skolor. Man borde bedriva rent empirisk geometri mycket längre än vad som nu i regel sker. Det är klart, att man icke får övergå till deduktiv geometri, innan lärjungarna ha möjlighet att tillägna sig den. Men jag tror, att man i det nämnda resonemanget har förväxlat två ting. Vad man — och det med full rätt — vill hävda, är väl just detta, att abstrakta bevis icke få komma på ett för tidigt stadium. Och så förutsätter man utan vidare, att abstrakta bevis komma, så fort man övergår till deduktiv geometri. Utan tvivel *kan* det vara så även i våra dagars geometriundervisning. Men det *behöver* icke vara så, och är det säkerligen icke heller i allmänhet. Även deduktiv geometri kan nämligen enligt min mening mycket väl bedrivas på enkelt och lättfattligt sätt. Det beror helt och hållet på hur man lägger undervisningen. Inför man den deduktiva geometrien på ett försiktigt sätt i anslutning till preparation medelst empirisk geometri, såsom ovan omnämndes, så kan det mycket väl ske på det stadium, där det nu enligt kursplanen skall införas, nämligen i 3^5 och 2^4.

I de metodiska anvisningarna förekomma ett par uttryck, som jag anser olyckligt valda, emedan de kunna vilseleda. Det ena rör definitionerna. Sedan den förberedande geometriundervisningen behandlats, står det: »Då man sedan i följande klass övergår till den egentliga geometrien, äro de flesta definitioner överflödiga». Jag kan icke tro annat än att det blott är en olycklig formulering och att meningen icke är den som formellt ligger i det citerade. Det är ju klart, att den förberedande geometriundervisningen icke kan göra definitioner *överflödiga*. Definitioner kan man aldrig komma ifrån, utan att allt blir flytande. Klara och tydliga definitioner äro tvärtom av utomordentlig vikt och betydelse och underlätta i hög grad systemets fasthet. Man torde väl heller icke mena, att de flesta definitioner skulle kunna *utelämnas* såsom varande överflödiga, utan meningen torde väl vara den, att definitionerna *underlättas* genom den förberedande geometriundervisningen, då genom denna det sakliga innehållet icke är obekant för lärjungarna, när de stränga definitionerna införas. Och *detta* är något mycket betydelsefullt. Ett uppradande av definitioner före det egentliga systemet kan försvaras från systematisk synpunkt men icke från pedagogisk. Att bibehålla Euklides' förfaringssätt i detta hänseende, såsom de egentliga Euklides-editionerna göra, måste betecknas som ett stort pedagogiskt missgrepp. Definitionerna skola införas i den mån de behövas. Och de skola alltid förberedas. Ofta placeras de med fördel *efter* den sats, som anger något karakteristiskt hos begreppet ifråga. På denna punkt torde väl numera alla pedagoger vara ense.

Det andra av de uttryck i de metodiska anvisningarna, som jag nyss anspelade på, anser jag vara av större betydelse. Det lyder: »Den genom de förberedande övningarna vunna erfarenhetskunskapen bör också användas så, att bevisen uteslutas för enkla satser, som kunna anses genom åskådningen omedelbart givna. Bevisföringen kan inskränkas till sådana satser, ifråga om vilka lärjungen kan känna behov av bevis.»

Jag står här alldeles oförstående. Det torde icke råda något tvivel om, att det skulle betyda en fullständig uppluckring av det geometriska lärosystemet, om man skulle använda lärjungarnas känsla för behov av bevis som kriterium på om bevis skall medtagas eller ej.

Men jag anser också, att det vore nästan lika ödesdigert att uppdela satserna i två grupper, av vilka den ena skall bevisas på vanligt sätt och den andra inses »genom åskådning». Sistnämnda term är i själva verket mångtydig och borde helst undvikas. I föreliggande fall avses med densamma tydligen, att man på annat sätt än genom logisk bevisföring skall inse riktigheten av en sats, t. ex. genom en noggrant ritad figur, genom fysikaliska experiment el. dyl. Det som enligt min mening gör, att detta skulle bli ödesdigert för det logiska systemet, är att man icke kan upprätthålla skillnaden mellan de satser, om vilkas sanning man nästan omedelbart är övertygad, och dem, om vilka man endast genom en längre eller kortare kedja av slutledningar kan vinna visshet. Om man t. ex. »genom åskådning» övertygar sig om riktigheten av satsen, att normalen från en punkt till en linje är kortare än varje annan linje från punkten till den förra linjen, så kan jag för min del icke inse, hur man skall kunna lämna ett tillfredsställande svar, om en lärjunge frågar, varför man icke på samma sätt kan inse satsen, att en sida som står emot en större vinkel i en triangel, är större än en som står emot en mindre vinkel. På mig verkar det särskilt egendomligt och godtyckligt, om nära besläktade satser, som utredas i ett sammanhang, behandlas efter olika principer. Jag kan icke förstå, hur det skall vara möjligt att övertyga lärjungarna om att det icke är lärarens eller lärobokens godtycke, som här dominerar. Och det anser jag vara något som är ytterst viktigt att undvika. Kan man icke det, så måste man i själva verket göra avkall på det logiska systemet med dess i hög grad uppfostrande betydelse, och då är det bäst att radikalt övergå till att läsa geometri efter samma metoder, som man använder i de empiriska vetenskaperna. Här finns nämligen, såvitt jag kan se, endast två konsekventa ståndpunkter. Varje försök att försona motsatserna måste bli en halvmesyr med enbart nackdelar. Vill man nu icke uppge den logiska behandlingsmetoden på grund av dess fostran till tankereda och intellektuell ärlighet, så får man ej heller på sätt som nyss nämndes tillämpa åskådningsförfarandet.

Numera hör man stundom framhållas, att den moderna experimentella psykologien klarlagt, att man betydligt har överdrivit geometriens betydelse som tanketränande faktor. Det har visat sig, att den som tränas i geometriskt tänkande, därigenom icke blir skickligare i tänkande på andra områden. Den s. k. medövningen är i själva verket obetydlig. Övning i geometriskt tänkande har betydelse blott för geometrien. De som utifrån dessa resultat yrkar på slopande av den deduktiva geometrien, ha dock enligt min mening förbisett, att dennas betydelse icke är inskränkt till det intellektuella planet. Den som vant sig vid kravet på tankereda vid ett geometriskt bevis, tillämpar gärna liknande krav i andra fall. Den som påverkats av det obönhörliga kravet på intellektuell ärlighet vid ett geometriskt bevis, kan i viss mån överföra detta på andra områden.

Det är emellertid så, att man numera icke har tid att utförligt sysselsätta sig med bevisen för alla de satser, som man behöver, eller att man anser det mindre givande att göra så. Efter 1933 års stadga med dess kraftiga reduktion av matematikens timantal torde det vara ogörligt att behandla alla behövliga satser med fullständig logisk bevisföring. Men jag är av den uppfattningen, att det är av stor vikt att läroboken lämnar fullständiga bevis, som man kan hänvisa till. Den enda andra logiskt berättigade möjligheten vore, att läroboken anförde satsen utan bevis men med angivande av att man *kan* bevisa den. Jag anser dock denna utväg vara mindre tilltalande, då det är fråga om elementära satser. Det kan råda olika uppfattningar om, huruvida en sats skall behandlas fullständigt eller ej. Finns beviset med i läroboken, så kan man gå igenom det som vanligt och ge det i läxa eller också gå igenom det kursivt eller helt gå förbi det och endast övertyga sig om satsens giltighet. Man kan och bör då också i förekommande fall motivera, varför man förfar på sistnämnda sätt.

I detta sammanhang kan beröras förhållandet mellan realskolans och gymnasiets geometrikurs. För min del är jag av den uppfattningen, att realskolans geometrikurs bör behandlas på sådant sätt, att den kan användas vid repetitionen i realgymnasiet. Därvid måste ju väsentligt större krav ställas på lärobokens bevis. Att på många punkter behöva komplettera bevisen, om läroboken icke har dem med, är en tidsödande och även i övrigt mindre lämplig väg. Det vore enligt min mening olyckligt, om realskolans geometrikurs icke skulle beakta realgymnasiets utan uteslutande realskolans synpunkter. Gymnasiet måste kunna direkt bygga på realskolan. I gymnasiet skall man i första realringen *komplettera* och *befästa* realskolans kurs, men man skall enligt min mening icke behöva börja från början och bygga upp det logiska systemet. Beträffande läroboken finns det då endast två effektiva sätt att tillgodose gymnasiets krav: antingen att man har en särskild, utförligare upplaga av läroboken, avsedd för dem som skola fortsätta i gymnasiet, eller också att läroboken ger bevis för alla satser, även för dem, vilkas bevis man kan gå förbi i realskolan. Jag har i mina läroböcker använt den senare metoden. En annan sak är, att repetitionen i realgymnasiet enligt min mening bör ske efter en särskild lärobok, huvudsakligen en exempelsamling. Det är från psykologisk synpunkt av betydelse att icke behöva använda den »färdiglästa» boken från realskolan utom för hänvisningar.

Till slut skall jag nämna något om lärarens insats vid geometriundervisningen i realskolan och lämna ytterligare några anvisningar för geometrilektionen.

Såsom jag förut framhållit, anser jag lärobokens uppgift vara större och viktigare vid den grundläggande geometriundervisningen än på de flesta andra områden i realskolan. Men jag är också av den meningen, att lärarens personliga insats på detta område betyder mera än på de flesta andra. Det är här som alltid så, att en god lärare och en dålig lärobok är en bättre kombination än en god lärobok och en dålig lärare.

Preparationen av satserna måste ske med stor omsorg. Jag anser, att endast i rena undantagsfall en sats bör ges i läxa utan fullständig genomgång i skolan. Preparationen bör helst icke bestå endast i en genomgång av lärobokens behandling. Från olika synpunkter är det att föredraga, att en annan uppläggning genomföres. Det ökar intresset och förhindrar effektivt lärjungar att lysa med lånta fjädrar. Såsom redan förut antytts, utgår man lämpligen från den figur, som det gäller, och låter upprita den omsorgsfullt både på svarta tavlan och i lärjungarnas arbetsböcker. Figuren bör givetvis helst avvika från lärobokens. Sedan vidtager en diskussion av figuren. I början av den systematiska geometriundervisningen kan man göra mätningar, senare bli sådana mer eller mindre överflödiga. Viktigt är att låta lärjungarna medverka genom att komma med förslag och på så sätt själva upptäcka satsen. Förslagen prövas empiriskt och sedan man enats om det troliga innehållet i satsen, vidtager sökandet efter bevis. Det blir då en analys av figuren. Även här böra lärjungarna medverka. Olika uppslag prövas, förkastas eller godtagas. Givetvis måste läraren ibland leda in diskussionen på rätta banor. Men ju mindre han behöver göra det, desto bättre för intresset. Så småningom leder analysen fram till målet. Sedan gäller det att sätta form på beviset, och till sist har man den fullständiga behandlingen färdig. Som en sammanfattning kan man slutligen gå igenom lärobokens koncentrerade behandling. Då torde man kunna få med samtliga lärjungar.

Man kanske ville invända, att en sådan omständlig preparation är för tidsödande. Men det är i själva verket endast skenbart, som så är förhållandet. I längden skall den i stället visa sig tidsbesparande.

Viktigt är nämligen att gå långsamt fram särskilt i början. Går man för hastigt, inträffar det lätt, att en del lärjungar komma på efterkälken. Och har så skett, är det icke så lätt att reparera skadan. Modlöshet inför uppgiften och därmed sammanhängande intresselöshet äro geometriundervisningens största faror. Och sådant börjar alltid med att någon kommer efter med en sats. Man bör därför ha sin uppmärksamhet på lärjungar, som varit frånvarande en eller flera lektioner, och övertyga sig om, att det icke blir någon lucka för dem. Om några lärjungar ha svårt att följa med, så lönar det sig att offra en eller annan lektion på att gå igenom satserna på nytt eller belysa innehållet på annat sätt. I längden torde detta innebära en tidsbesparing. Geometriläraren bör alltid ha klart för sig, att lärjungar, som »äro omöjliga i geometri», i flertalet fall äro sådana, som av en eller annan anledning kommit på efterkälken. Enligt min bestämda övertygelse gäller detta särskilt sådana, som äro duktiga i andra ämnen. Ehuru skillnaden i begåvning för geometri kan vara betydande och tydligt framträder redan på ett tidigt stadium, är varken »specialbegåvningen» eller »specialobegåvningen» för geometeri så vanlig som man ofta tror.

Schablonmässighet är en stor fara och bör därför medvetet motarbetas. Vid läxförhöret kan man naturligtvis låta lärjungarna reproducera lärobokens framställning. Men man bör också variera, ändra figuren och beteckningarna, så att de avvika mer eller mindre från lärobokens. Detta torde också vara ett effektivt sätt att övertyga sig om att lärjungarna verkligen förstått och tillägnat sig satsen. Vid förhöret av en sats bör man se till, att det sakliga innehållet kommer fram tydligt. Lärjungarna böra uppmanas att helst redogöra med egna ord. Hänvisningar böra icke göras till sats den och den eller axiom det och det, utan i stället bör innehållet i satsen eller axiomet angivas. Undantag bör göras för satser och axiom med särskilda namn, t. ex. första kongruensfallet, parallellaxiomet, men man bör även i fråga om dessa allt som oftast övertyga sig om att det sakliga innehållet är fullt klart.

Enkla tillämpningsuppgifter böra ofta behandlas. Liksom ovan angavs beträffande preparationen, är det här av stor betydelse att få hela klassen att gemensamt under lärarens ledning diskutera en uppgift och gemensamt lösa den. Upptäckarglädje och självverksamhet äro utomordentligt viktiga ting, och samarbete verkar också stimulerande. Jag tror även, att man med denna metod har större möjligheter att få med sig alla lärjungarna än om övningsuppgifterna givas som hemläxor eller om lärjungarna få arbeta individuellt i skolan. Kan man få alla lärjungarna och icke blott en del att hysa intresse för ämnet, så har man vunnit den utan tvivel viktigaste förutsättningen för ett verkligt gott resultat.

Såsom redan nämnts, anser jag lärarens insats i främsta rummet vara en kommentar till lärobokens framställning. Det är främst på läraren det ankommer att göra lärostoffet konkret och åskådligt.

Nu kunde man säga — och det har också sagts — att läroboken bör ge en sådan fyllig framställning. Detta anser jag vara fullkomligt förfelat. Antingen måste då läroboken svälla ut oproportionerligt eller också blir det logiska systemet lidande. Det senare torde väl då sannolikt bli fallet. I varje fall bleve lärjungarna lidande på en sådan anordning, då det väsentliga komme att för dem undanskymmas. Dessutom bleve läraren bunden av läroboken ej endast beträffande det logiska systemet utan också beträffande preparationen, och här bör läraren ha sin frihet. Jag tror, att det är bäst att icke binda läraren på denna punkt, om än nya och oerfarna lärare kunde ha nytta av den utförligare framställningen. Läroboken bör vara skriven för lärjungarna, icke för läraren. Läraren bör sedan ha fria händer att kommentera framställningen.

Innehåll