DEN SKRIFTLIGA BEHANDLINGEN

AV

MATEMATISKA SKOLUPPGIFTER

AV

FRANS DE BRUN

ADJUNKT VID SÖDERMALMS HÖGRE ALLM. LÄROVERK.

STOCKHOLM
J. BECKMANS FÖRLAG
1911.

STOCKHOLM
K. L. BECKMANS BOKTRYCKERI
1911.

Vid genomläsandet av en under året utkommen större samling studentexamensuppgifter med lösningar och svar har jag kommit att tänka på att det kanske kunde vara till gagn för undervisningen att ha tillgång till råd och anvisningar för den skriftliga behandlingen av matematiska skolproblem. Att göra en sådan metodik så fullständig, att intet vidare vore att tillägga, skulle bli allt för vidlyftigt, varför jag här nöjer mig med att endast framhålla några synpunkter, som kunna anses vara av mera påtaglig betydelse. Då de rent geometriska problemen lämpligen kunna utarbetas efter Euklides, håller jag mig huvudsakligen till de s. k. algebraiska uppgifterna.

Ehuru formen vid redigeringen av de skriftliga uppsatserna måste spela en viss roll, får man ej glömma, att innehållet — lösningsmetoden — är huvudsaken. Även om en uppgift är riktigt löst, d. v. s. utan räknefel, kan den knappast anses som »nöjaktigt behandlad», om en alltför ful metod blivit använd. Att göra ett räknefel är mänskligt och kan hända vem som helst, men en klumpig lösningsmetod får ej tolereras.

Beträffande då först formen skulle jag vilja giva följande råd:

1:o. ***Skriv ej text och formler på samma rad!*** Således inga formler eller tecken i uppgiftens lydelse eller i övrig text!

2:o. ***Skriv så redigt som möjligt!*** Var fram för allt noga med att definitionen på de obekanta göres fullt klar och glöm ej att angiva sorten!

3:o. ***Skriv kort!*** Resonemanget för ekvationernas framställande måste dock göras fullt bindande.

4:o. ***Var särskilt noga med stavningen och ordbildningen av de matematiska fackorden!*** Likasom man böjer magnet, magneter, komet, kometer, tapet, tapeter, säger man katet, kateter (ej: katetrar). Vid ekvationssystem med flera obekanta har man att eliminera (ej: illuminera), o. s. v. Uttryck sådana som »förlänga ekvationen» eller »multiplicera ekvationen», i stället för »multiplicera ekvationens båda led», få ej förekomma. Likaså torde uttrycken »gånger större än», i stället för »gånger så stor som», undvikas. Ännu olämpligare är t. ex. »tre gånger mindre än», då fråga är om tredjedelen.

5:o. ***Svaret med angivande av sort bör tydligt utskrivas!***

6:o. ***Vid geometriska problem*** kommer först »Det givna», som anges i bestämd form, och samtidigt definieras de första beteckningarna; t. ex. »Räta linjerna AB och CD samt punkten P på AB». — Därefter ha vi »Det sökta», som anges i obestämd form, t. ex. »En cirkel, som går genom punkten P och tangerar de båda räta linjerna AB och CD». Ett vanligt fel är en sådan formulering: »Cirkeln CEF, som går genom punkten P och tangerar de båda räta linjerna AB och CD». Man kan ju ej sätta namn på det, hvars existens man ännu ej bevisat. »Lösningen», »Konstruktionen för beviset», »Beviset», o. s. v. böra redigeras så, att man är oberoende av figuren; inga bokstäver få införas utan att samtidigt definieras.

Med afseende på innehållet skulle jag vilja fästa uppmärksamheten på följande:

1:o. Liksom i allmänhet språket har sin makt över tanken, förhåller det sig — och det i än högre grad — med det subtilaste av alla språk, det matematiska teckenspråket. Välj därför beteckningarna omsorgsfullt och se noga till att, innan ett problem angripes, de obekanta införas på lämpligaste sätt! Analytiskt-geometriskt betyder detta, att origo och axlar skola läggas på förmånligaste sätt. Som allmän regel gäller härvidlag, att ***man bör sträva efter symmetri.***

För att närmare klargöra denna sak ber jag få hänvisa till följande uppgifter och exempel.

Vid *aritmetiska* serier, där termerna sökas, och termantalet, n. är ett *udda* tal $(= 2k + 1)$, torde den mellersta termen lämpligen betecknas med x, differensen med y, så att termerna bli

$$x - ky,\ x - (k - 1)y,\ \ldots\ x - y,\ x,\ x + y,\ \ldots$$
$$\ldots\ x + (k - 1)y;\ x + ky.$$

Vid *geometriska* serier, under i övrigt lika förhållanden, må den mellersta termen heta x och kvoten y, så att termerna bli

$$xy^{-k},\ xy^{-(k-1)},\ \ldots\ xy^{-1},\ x,\ xy,\ \ldots\ xy^{k-1},\ xy^{k}.$$

Vid *aritmetiska* serier, där termerna sökas och deras antal, k, är ett jämt tal $(= 2k)$, bör differensen betecknas med 2y och de två mellersta termerna med $x - y$ och $x + y$. Termerna bli då

$$x-(2k-1)y,\ x-(2k-3)y,\ \ldots\ x-y,\ x+y,\ \ldots$$
$$\ldots\ x+(2k-3)y,\ x+(2k-1)y.$$

Vid *geometriska* serier under i övrigt lika förhållanden, må de mellersta termerna vara xy^{-1} och xy, så att termerna bli

$$xy^{-(2k-1)},\ xy^{-(2k-3)},\ \ldots\ xy^{-1},\ xy,\ \ldots\ xy^{2k-3},\ xy^{2k-1}.$$

Som exempel härpå nämnas följande problem.

Ex. 1. **Fyra tal bilda aritmetisk progression. Deras produkt är 384 och summan av deras kvadrater 120. Vilka äro talen?**

Kallas de i ordning

$$x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y.$$

fås de båda ekvationerna

$$\begin{cases}(x^2-y^2)(x^2-9y^2)=384\\ 4x^2+20y^2=120,\end{cases}$$

vilka äro lätta att lösa.

Ex. 2. **Fem tal bilda en geometrisk progression. Summan av de udda termerna är 165 och summan av de jämna är 44. Beräkna progressionens kvot!**

Låt talen i ordning vara:

$$au^{-2},\ au^{-1},\ a,\ au,\ au^2.$$

Ekvationerna bli då

$$\begin{cases}au^{-2}+a+au^2=165\\ au^{-1}+au=44.\end{cases}$$

Genom division fås

$$\frac{\ldots + u^{-1})^2 - 1}{u + u^{-1}} \qquad \frac{165}{44}$$

$$u - u \ldots - \frac{\ldots}{u + u}$$

varav alternativt

1)

$$u + u^{-1} = 4,$$

$$\therefore\ u = 2 \pm \sqrt{3},$$

2)

$$\ldots^{-1} = -\frac{1}{4}$$

$$\ldots = -\frac{1}{8} \pm \frac{i\sqrt{63}}{8}$$

o. s. v.

Ex. 3. **I en av 5 termer bestående geometrisk serie är 3:e termen 6½ mindre än summan av 1:a och 5:e samt 3 mindre än summan av 2:a och 4:e termen. Serien?**

Kalla mellersta termen x, kvoten y! Man får

$$x = xy^{-2} + xy^2 - 6\tfrac{1}{2} = xy^{-1} + xy^{-3},$$

$$\therefore \begin{cases} x(y^{-2} - 1 + y^2) = 6\tfrac{1}{2} \\ x(y^{-1} - 1 + y) = 3, \end{cases}$$

$$\therefore\ (y^{-1} + y)^2 - 2 = \frac{13}{6}\,[(y^{-1} + y) - 1].$$

o. s. v.

Ex. 4. **Tre tal bilda en aritmetisk serie och tre andra en geometrisk. Summan av de båda seriernas första termer är 27, summan av deras andra termer är 39 och summan av deras tredje 87. Summan av den aritmetiska seriens tre termer är 36. Vilka äro serierna?**

Den aritmetiska seriens termer må heta:

$$a - x,\ a,\ a + x;$$

och den geometriska seriens:

$$by^{-1},\ b,\ by.$$

Då fås ekvationssystemet

$$\left|\begin{aligned} a - x + by^{-1} &= 27 \\ a + b &= 39 \\ a + x + by &= 87 \\ 3a &= 36, \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} a &= 12 \\ b &= 27 \\ \frac{27}{y} - x &= 15 \\ 27y + x &= 75. \end{aligned}\right.$$

De två sista ekvationerna ge

$$y + \frac{1}{y} = 3 + \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ y_{,} = 3,\ y_{,,} = \frac{1}{3}$$

o. s. v.

Ex. 5. **Beräkna det största värde, som**

$$\mathbf{z = \sin x + \sin (x + 30^\circ) + \sin (x + 60^\circ)}$$

kan antaga!

Skriv

$$x + 30^\circ = y,$$

$$\therefore\ z = \sin (y - 30^\circ) + \sin y + \sin (y + 30^\circ),$$

$$\therefore\ z = (1 + 2\cos 30^\circ)\sin y,$$

varaf inses, att z får sitt största värde, då sin y är 1, d. v. s. för

$$y = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \quad (k = \text{helt tal}),$$

$$\therefore\ x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

Men även vid andra uppgifter är det av vikt, att symmetriska beteckningar användas.

Ex. 6. **Två vinklars summa är 60°, och förhållandet mellan deras sinus $\frac{2}{3}$. Vilka äro de?**

Betecknas vinklarna med $30^\circ - x$ och $30^\circ + x$, erhålles

$$\frac{\sin(30^\circ - x)}{\sin(30^\circ + x)} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{\sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x)}{\sin(30^\circ + x) - \sin(30^\circ - x)} = 5.$$

$$\therefore\ \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} x} = 5,$$

$$\therefore\ \cot x = 5\sqrt{3},$$

o. s. v.

Ex. 7. **En vinkel i en triangel är 45°. Höjden från denna vinkels spets delar motstående triangelsida i förhållandet 2 : 3. Vad är förhållandet mellan triangelns båda övriga sidor?**

Delarna av vinkeln 45° må heta $22^\circ 30' - v$ och $22^\circ 30' + v$. Då är

$$\frac{\operatorname{tg}(22^\circ 30' - v)}{\operatorname{tg}(22^\circ 30' + v)} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{\mathrm{tg}\,(22^\circ\,30' + \mathrm{v}) + \mathrm{tg}\,(22^\circ\,30' - \mathrm{v})}{\mathrm{tg}\,(22^\circ\,30' + \mathrm{v}) - \mathrm{tg}\,(22^\circ\,30' - \mathrm{v})} = 7,$$

$$\because\ \cot 2\mathrm{v} = 7,$$

o. s. v.

Ex. 8. **Ett tal är a enheter större än ett annat. Produkten av båda är b. Sök talen!**

De båda talen må betecknas med $y - \frac{a}{2}$ och $y + \frac{a}{2}$. Man finner ekv.

$$v^2 - \frac{a^2}{4} = b$$

o. s. v.

Ex. 9. **Lös ekv. systemet**

$$\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 = a} \\ \mathbf{x + y = b.} \end{cases}$$

Skriv

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2} + z \\ y = \frac{b}{2} - z \end{cases}$$

$$2z^2 + \frac{b^2}{2} = a,$$

o. s. v

Ex. 10. **Tre sådana tal sökas, att summan av två av dem är a, summan av det ena av dessa och det tredje är b samt summan av detta sist-**

nämnda och det, som blott en gång förut adderats, är c.

Betecknas de tre talen med x, y, z, erhålles

$$\begin{cases} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c, \end{cases}$$

varav, efter addition och division med 2,

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}.$$

Genom att subtrahera fås då

$$x = \frac{b + c - a}{2},$$

varefter de övriga fås genom cyklisk permutation.

[Talen må ej betecknas med x, y, z i sådan ordning, att ekvationerna bliva

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ y + z = c. \end{cases}$$

Ej heller må man här subtrahera, vilket likaledes verkar osymmetriskt.]

Vid lösandet av problem angående geometriska orter böra konstanterna skiljas från den eller de variabler, som skola elimineras, genom att t. ex. betecknas med bokstäver i början av alfabetet (a, b, . . . k), medan de senare betecknas med sådana i slutet därav (s, t, u, v, . . .).

2:o. ***Uppsättandet av ekvationerna får ej göras automatiskt*** med hjälp av s. k. tabeller, något som flitigt brukas även i goda skolor. Så t. ex. användas ofta dylika tabeller vid hastighetsproblem, legeringsproblem, o. d. Förf. har till och med varit närvarande vid provårskonferenser, där den handledande läraren givit mycket detaljerade anvisningar, huru sådana uppställningar skola göras! Lösandet av problem — och det gäller lika mycket om de rent elementära som de mera komplicerade inom den högre matematiken — är en skön konst, som ej får sjunka ned till målning efter schablon. — Men även på andra områden förekomma automatiska räkningar, t. ex. vid uppgifter av sådan art som nedanstående.

Ex. 11. **Sök två rationella tal, vilkas kvadratrötter äro irrationella och talen så beskaffade, att om man till det ena talet adderar det andras kvadratrot och från det andra talet subtraherar det förstas kvadratrot, skillnaden mellan de båda så erhållna storheterna blir $= 2 + \sqrt{3}$!**

Om x och y äro de sökta rationella talen, skall

$$(x + \sqrt{y}) - (y - \sqrt{x}) = 2 + \sqrt{3}, \tag{1}$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 - x + y + \sqrt{3},$$

$$\therefore x + y + 2\sqrt{xy} = (2 - x + y)^2 + 3 + 2\sqrt{3}\,(2 - x + y),$$

$$\therefore 4xy = [(2 - x + y)^2 + 3 - x - y]^2 + 12\,(2 - x + y)^2 +$$
$$+ 4\sqrt{3}\,(2 - x + y)\,[(2 - x + y)^2 + 3 - x - y].$$

Eftersom alla termerna, utom den sista, säkert äro rationella, måste också den sista vara det. Men det kan den endast bli genom att sättas lika med noll. Genom att i detalj undersöka detta villkor finner man

$$2 - x + y = 0,$$

$$x - y = 2$$

(3) $$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}.$$

(4) $$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$x = \frac{25}{12},\ y = \frac{1}{12}.$$

Ett vanligt fel är här att av (1) direkt sluta till (2), »emedan ett rationelt tal ej kan vara lika med ett irrationelt». Felslutet ligger däri, att det tages för avgjort, att differensen mellan två irrationella tal ej kan vara rationelt tal, vilket naturligtvis är felaktigt. Så är ju t. ex. $\sqrt{2}$ ett irrationelt tal, likaså $1 + \sqrt{2}$, men deras differens är 1 och alltså rationell.]

Ex. 12. **Två tvåsiffriga tals produkt är 1127. Sätter man det ena framför det andra och dividerar det sålunda bildade fyrsiffriga talet med det andra, blir kvoten 47 och resten 46. Vilka äro talen?**

Antag det förstnämnda x och det andra y. Då skall

$$100\,x + y = 47\,y + 46,$$

$$y + 1 = \frac{50\,x}{23},$$

$$\therefore \begin{cases} x = 23\,k \\ y = 50\,k - 1, \end{cases}$$

där k = helt positivt tal < 2, eftersom x och y skulle vara 2-siffriga tal. För $k = 1$ erhållas talen 23 och 49, för $k = 2$ 46 och 99. De förras produkt är tydligen 1127; de senares ett större tal. Således uppfylla 23 och 49 de föreskrivna villkoren. Använder man omvändt endast det första villkoret, att produkten av de tvåsiffriga talen skall vara 1127, d. v. s. $7^2 \cdot 23$, så finner man genast, att den enda lösningen just är 23 och 49, och att det senare villkoret då utan vidare måste vara uppfyllt, försåvitt ej problemet är orimligt.

Ex. 13. **Vilket eller vilka tresiffriga tal äro så beskaffade, att siffrornas summa är 13 samt att det tal, som bildas av tiotals- och enhetssiffran, multiplicerat med tiotalssiffran är lika med det tal, som bildas av hundra- och tiotalssiffran?**

Om talet betecknas med $100x + 10y + z$, ger det sista villkoret ekvationen

$$y(10y + z) = 10x + y,$$

$$x = y^2 + \frac{y(z-1)}{10}.$$

Således måste antingen y eller $z - 1$ vara delbar med 5. Men då x är < 10, är tydligt, att y icke kan vara delbar med 5 utan att vara lika med noll. Om y är noll, blir även x noll och talet således ej tresiffrigt. Alltså måste

$$z = 1 + 5k,$$

där k kan vara 0 eller 1, d. v. s. $z = 1$ eller $z = 6$.

Antagandet $z = 1$ ger

d. v. s.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 2 \\ z_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 9 \\ y_3 = 3 \\ z_3 = 1. \end{cases}$$

Antagandet $z = 6$ ger

$$x = y^2 + \frac{[illegible]}{[illegible]} \quad \therefore \; y = 2 \quad \therefore \; x = 5.$$

Talen skulle alltså bli

111, 421, 931 eller 526.

Det första villkoret, att siffersumman är 13, uppfylles blott av de båda sista talen.

3:o. ***Påbörja icke en sifferräkning, förrän resultatet i övrigt föreligger formelt uträknat.***

Ex. 14. **En rät pyramid har till basyta en regelbunden 5-hörning med 3 decimeters sida. Pyramidens höjd är 8 centimeter. Huru stor är dess hela yta?**

Kalla vinkeln mellan en sidoyta och basytan v. Om då den sökta ytan är y cm^2, fås

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2} \cdot 30 \cdot 15 \cdot \cot 36^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos v}\right), \\ \operatorname{tg} v = \frac{8}{15 \cot 36^\circ}, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y = 5 \cdot 225 \cdot \cot 36^\circ \frac{2 \cos^2 \frac{v}{2}}{\cos v}, \\ \operatorname{tg} v = \frac{8}{15 \cot 36^\circ}. \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} y = 600 \cot \frac{v}{2} \\[1em] \cot v = \frac{15}{8} \cot 36^\circ, \end{array}\right.$$

o. s. v.

Ex. 15. **Ett lån, på vilket 4,5 % årlig ränta på ränta beräknas, skall amorteras på 15 år genom lika stora inbetalningar vid varje års slut. Hur stor del av den 7:de inbetalningen åtgår till betäckande av räntan under 7:de året?**

Om det lånade beloppet var k kronor och annuiteten a kronor, erhålles, att den vid 15:de årets slut resterande skulden utgjorde i kronor

$$k_{15} = k \cdot 1{,}045^{15} - a \cdot 1{,}045^{14} - a \cdot 1{,}045^{13} - \ldots$$
$$\ldots - a \cdot 1{,}045 - a,$$

och vid 6:te årets slut

$$k_6 = k \cdot 1{,}045^6 - a \cdot 1{,}045^5 - a \cdot 1{,}045^4 - \ldots$$
$$\ldots - a \cdot 1{,}045 - a.$$

Då nu — om x kronor är den sökta summan —

$$\left\{\begin{array}{l} k_{15} = 0 \\ x = 0{,}045\, k_6. \end{array}\right.$$

fås

$$x = a\,(1 - 1{,}045^{-9}),$$

eller approximativt

$$x = 0{,}3271 \cdot a.$$

[Man bör således *icke* först utföra sifferräkningen för k i decimaler och sedan införa detta i k_6 och x!]

4:o. ***Granska noggrannheten av de erhållna siffrorna, innan de uppskrivas i re-***

sultatet. Det ser löjligt ut att t. ex. komma med 5 à 6 decimaler, då redan den första är felaktig och på grund av den använda metoden alltid måste vara osäker.

Ex. 16. **Huru långt utåt Atlantiska oceanen kan man se från det 3711 meter höga Pic du Teyde på Teneriffa? Jorden antages vara en sfär med 6367 km:s radie. Ingen hänsyn tages till strålbrytningen i luften.**

Om vinkeln vid medelpunkten mellan de båda radierna genom ögat och tangeringspunkten betecknas med v, erhålles

$$\cos v = \frac{6367000}{6370711}. \tag{1}$$

$$\therefore \log \cos v = \log 6367000 - \log 6370711.$$

Fem-ställig tabell skulle då giva

$$\log \cos v = 9{,}99974 - 10$$

$$\therefore 1^\circ 57' < v < 2^\circ 1'.$$

Man får icke utan angivande av noggrannheten sätta v t. ex. lika med 2°. — Ett noggrannare värde på v kommer man åt genom att av (1) deducera

$$1 - \cos v = \frac{3711}{6370711}$$

$$\therefore \sin^2 \frac{v}{2} = \frac{3711}{12741422},$$

$$\log \sin \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{3711}{12741422}$$

Efter utförande af logaritmeringen till höger:

$$\log \sin \frac{v}{2} = 8.23213 - 10,$$

$$\therefore\ 0^\circ\, 58'\, 40'' < \frac{v}{2} < 0^\circ\, 58'\, 41'',$$

eller, på 1″ när åt vartdera hållet.

$$v = 1^\circ\, 57'\, 21''.$$

Den sökta längden blir således, räknad i meter,

$$\frac{7041 \cdot 2\pi \cdot 6 \cdot 367000}{3600 \cdot 360} = 217342$$

med ett fel mindre än $\frac{1}{7041}$ härav, d. v. s. 31. Man kan då som svar uppge: »Mellan 217311 och 217373 meter!» eller »217342 meter med ett fel mindre än 31 meter åt vartdera hållet».

5:o. ***Resultatet bör givas under fullt avslutad form!*** Således bör man ifråga om sifferräkningar ej stanna vid sådana svar som t. ex. $\sqrt{3}$ mil, eller, då ett geometriskt ort-problem föreligger, underlåta att om möjligt genomföra eliminationen.*)

6:o. ***Om det är fråga om att bevisa ett teorem, kan detta ej göras genom att man visar upp att, om teoremet gäller, man kommer fram till en identitet.*** Däremot är det fullt logiskt att antaga, att teoremet icke gäller och därav härleda en orimlighet.

Ex. 17. **Bevisa identiteten**

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

*) Understundom kan det dock vara bättre att uttrycka x och y såsom funktioner av en tredje variabel.

Ett vanligt fel är att här antaga giltigheten av just ovanstående likhet, som skall bevisas, och förenkla vänstra membrum genom förlängningar, varigenom fås

(2) [illegible]

(3) [illegible]

Genom att på båda sidor multiplicera med $\sqrt{3}$ och flytta över $2\sqrt{6}$ erhålles sedan

(4) $$\sqrt{(2+\sqrt{3})^3}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}=3\sqrt{6}.$$

Om man så höjer till kvadrat å ömse sidor om likhetstecknet, kommer man till

(5) $$(2+\sqrt{3})^3+2\sqrt{(2+\sqrt{3})^3(2-\sqrt{3})^3}+(2-\sqrt{3})^3=54.$$

Om kuberna utföras och mellersta termen uträknas, blir således

(6) $$54=54.$$

Dock är ovanstående bevis realiter fullt logiskt, om man kan sluta i motsatt ordning från (6) till (1). — Att man ej på detta sätt alltid kan ändra om ordningen, är visserligen nästan självklart, men jag vill dock erinra om det gamla — naturligtvis felaktiga — beviset för att talen 1 och 2 äro lika:

Ex. 18. **Utgå från likheten**

(1) $$a = b$$

och multiplicera på båda sidor med a, varav

(2) $$a^2 = ab;$$

subtraheras så b^2, då man får

(3) $$a^2 - b^2 = ab - b^2,$$

som ger

(4) $$(a + b)(a - b) = b(a - b),$$

och efter division med $a - b$:

(5) $$a + b = b.$$

Eftersom nu a och b äro lika, på grund av (1), blir

(6) $$b = 2b,$$

och efter division med b

(7) $$1 = 2.$$

Felet ligger givetvis däri, att man från (4) ej har rätt att sluta till (5) utan endast till att alternativt (5) skall gälla *eller* också $a - b$ vara noll (d. v. s. att (1) skall vara uppfylld). Däremot är tydligt, att (4) gäller, om likheten (5) äger rum.

Om vi återgå till ex. 17, är tydligt, att beviset kan göras korrekt även genom att man förnekar ursprungliga likheten och alltså tänker sig likhetstecknet ersatt av ett olikhetstecken. Man skulle nämligen då komma till den orimligheten, att 54 ej vore lika med 54. En dylik bevisningsmetod, som är fullt berättigad, kallas »reductio ad absurdum». Ett exempel härpå är

Ex. 19. **Bevisa, att de tre talen 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ icke kunna bilda en aritmetisk progression.**

Antag för tillfället, att det ginge för sig, och att d vore differensen samt m och n de båda termantalen i vartdera fallet med 1 som första term. Då har man

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 1 + (m - 1)\,d \\ \sqrt{3} = 1 + (n - 1)\,d, \end{cases}$$

varav

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{m - 1}{n - 1},$$

$$\therefore \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{m - 1}{n - 1},$$

d. v. s. ett irrationelt tal vore lika med ett rationelt, vilket är orimligt. Alltså måste det enda antagande som gjorts, nämligen att satsen ej gällde, vara oriktigt.

Även inom geometrien får man ofta se en bevisningsmetod, som i allt väsentligt överensstämmer med den vid ex. 17 framställda, nämligen att man på förhand antager vad som skall bevisas, eller åtminstone en del därav (= »cirkelbevis»). Ett sedan gammalt kändt exempel härpå är beviset för att alla trianglar äro liksidiga. Till cirkelbevisen torde man även kunna räkna det, som Euklides använder, då han vill visa upp, att yttervinkeln i en triangel är större än var och en av de motstående innervinklarna.

Här kan man dock lätt komplettera beviset med hjälp av axiomet: »Två räta linjer kunna ej innesluta något rum». — I sammanhang härmed torde även beaktas

Ex. 20. **Bevisa, att de tre bissektriserna till vinklarna i en godtycklig triangel skära varandra i samma punkt!**

Ett förfaringssätt, som här ofta användes, är att lärjungen drager bissektriserna till tvänne vinklar, sammanbinder skärningspunkten med den tredje vinkelspetsen och sedan bevisar, att denna linje blir bissektris till den tredje vinkeln. Härmed är dock ej satsen bevisad, men kan bliva det, om man först bevisar, att ej mera än *en* bissektris finnes till varje vinkel. — Det naturligaste torde dock vara att redigera beviset såsom indirekt bevis och genast draga upp de tre bissektriserna!