**Federationen
Sveriges allmänna folkskollärarförenings
litteraturkommitté.**

Ahlberg, Gunnar, överlärare, Nacka, redaktör.

Hedman, Aina, småskollärarinna, Stockholm.

Hillman, Bengt, folkskollärare, Stockholm.

Wahlman, Jenny, folkskollärarinna, Gävle.

PEDAGOGISKA SKRIFTER
UTGIVNA AV
SVERIGES ALLMÄNNA FOLKSKOLLÄRARFÖRENINGS LITTERATURSÄLLSKAP
HÄFTE 202—204

DEN FÖRSTA RÄKNEUNDERVISNINGEN

Av

L. GOTTFRID SJÖHOLM

GÖTEBORG 1949
ELANDERS BOKTRYCKERI AKTIEBOLAG

FÖRORD

För värdefull hjälp vid efterforskning av uppgifter och bilder för det historiska avsnittet tackar jag föreståndaren för Danmarks Lærerhøjskole *G. J. Arvin*, undervisningsrådet *Hjalmar Berg*, seminarieläraren *Augustinus Bergqvist*, intendenten vid Göteborgs skolmuseum *Nils Ekström*, intendenten vid Svenska skolmuseet *Thure Jalling*, Statens pædagogiske Studiesamlings föreståndare *Poul Muller* och bibliotekarie *J. Laurup-Fogt*, överläraren *Elof Lindälv* och folkskolläraren *Oskar Österling*.

I det historiska avsnittet har jag inte eftersträvat fullständighet — det skulle krävt mångårig specialforskning — utan sökt efter sådana uppgifter och bilder, som kan belysa den första räkneundervisningens problem i våra dagar också.

Göteborg i februari 1949

L. Gottfrid Sjöholm

INNEHÅLL

I

Den första räkneundervisningen är rolig,

ja, mycket rolig. Dock under en förutsättning: att man har fått klart för sig. hur man ska bära sig åt. Annars kan det vara förfärligt. Jag minns en episod från min seminaristtid. Jag var i andra klassen och skulle ha undervisningsövning i räkning. Uppgiften var subtraktion. Jag gjorde det ena »praktiska» exemplet efter det andra och drog slutligen till med detta: Om du har ett snöre, som är 21 meter långt, och klipper bort 14 meter, hur mycket har du kvar? Jag ropade upp Pelle. Han visste det inte och ingen annan heller. Pinsam tystnad. Det hjälpte inte med att jag sa: Ja men det kan du väl. Då avbröt läraren: Där är så mycket kvar att det räcker att hänga sig i. Sitt ner!

Vi satte oss ner, både pojken och jag, jag något mer hangfärdig än pojken.

Det förfärliga i situationen låg däri, att jag inte kunde ge pojken besked om hur han skulle bära sig åt, när man »drar» 14 från 21. Något så radikalt som att fylla ut 14 till 21, var okänt, och att »dra» 14 från 21, när man inte fick ställa upp det på papperet och låna och och och, hur skulle det gå till? Jag litade till att ungarna *visste* det ändå: min uppgift var bara att hitta på fina tillämpningsuppgifter, praktiska, hämtade ur det verkliga livet och allt vad fint och menlöst man kan sätta upp som mål för sådana övningar.

Jag hade alltid varit road av räkning och tyckt att det var lätt. Men hur jag lärde mig att lägga samman och dra ifrån tal inom området 1—20, vet jag inte. Jag måtte aldrig ha fått tag på något sätt att räkna mig till vad 8+7 var utan litade till minnet av någon tillfällig upptäckt. När det inte hjälpte, gjorde jag som mina småskolekamrater: skrev åttan och sjuan, satte prickar på ömse sidor om sjuan och räknade: åtta, nie tie, elleva tolv, trettan fjortan femtan, och såg efter att det verkligen stod fyra prickar på ena sidan av sjuan och tre på den andra. Eller också lade man till enhet efter enhet med hjälp av fingrarna. Litade man bara på minnet, kunde det gå galet. Särskilt vissa kombinationer var förrädiska.

Denna osäkerhet — kanske man ska säga bundenhet av ett yttre hjälpmedel — hängde länge med. Ja, när jag i vuxen ålder skulle summera ner de långa kolumnerna i seminariets räkenskapsbok, tyckte jag att sammanläggningen var en riktig pina. Aldrig kunde man känna sig fullt säker. Man kan skylla på brist i förmågan att koncentrera uppmärksamheten. Men det var inte bara det, utan det var något annat — än fann man summan av två termer på *ett* sätt, än på ett annat. Än kom man i håg att 9 och 6 blir 15, än såg man framför sig 9 och 36 och tänkte att 36 och 10 är 46, 36 och 9 är ett mindre, alltså 45. Men stundom blev det kortslutning, och man sa 47. Man spanade efter genvägar — sådana hade nämligen betonats, lustigt nog, i undervisningen — men förvillades och kom in på senvägar. Skulle man som vuxen karl behöva sätta sig ner och lära additionstabeller? Eller fanns det någon annan väg?

När jag så stod inför barnen i första och andra klass och skulle hjälpa dem, så att de inte kom i samma situation som deras lärare, tvangs jag att gå till grunden med problemet, och det tycktes både barnen och jag må väl av!

Frågans kärna är sannolikt den: vi ska lära barnen e t t sätt att *säkert* lösa de primära räkneoperationerna på. Vi må gärna vädja till minnet, gärna öva tabeller utantill, men därutöver måste vi ge barnen sådana arbetsmetoder, att de dels kan kontrollera sitt minne, dels kan finna en lösning även när minnet sviker.

All räkneundervisning vilar faktiskt på den grund, som vi lägger under de två första skolåren. Är barnen inte hemmastadda i de två första tiotalsstugorna, så är fortsatt räknande inom räknesätten addition och subtraktion ett lönlöst företag. Och rör de sig inte som fisken i vattnet inom tiotalssystemet till hundra, ja då är fortsatt möda fåfäng. När det diskuteras kursplaner i räkning för första skolåret, framhålles ofta, att det är lika lätt att lägga samman 26 och 2, 76 och 2, 96 och 2 som 6 och 2. Ja det är sant, men därmed är inte precis sagt, att kursplanen för första skolåret ska omfatta så stora tal, att barnen har svårt att föreställa sig deras värde. Övningen tenderar då allt för lätt att bli mekanisk, och av den sorten har vi haft mer än nog. Det anförda exemplet visar fastmera, hur utomordentligt viktig förtrogenheten med de små talen i alla deras olika kombinationer är. Tillämpningen på de stora talen kommer av sig själv och kan tas som utflykter från hemmaplanen. Klar insikt och absolut färdighet inom de små talens område är målet för den första räkneundervisningen. Med ett arbetssätt, som bygger på barnens självverksamhet och hjälper dem att se in i talens och räkneförloppens hemlighet, kan vi nå det målet på ett sätt, som gör varje arbetstimme till en rolig timme.

Vad är det för begrepp vi rör oss med,

när vi diskuterar den första räkneundervisningen? Det är **talvärdet, talvärdets namn** (t. ex. *ordet* **åtta**) och **talvärdets** beteckning med siffra eller siffror (8, 18) samt räkneoperationer av olika slag.

Talvärdet är ett allmänbegrepp med oföränderligt samma innebörd, lika i hela världen. Det är evigt och oföränderligt liksom de Platonska idéerna. Det är pa sätt och vis oåtkomligt för oss i sin rena gestalt. Vi knyter det till allehanda konkreta ting, så snart vi försöker att få tag på det, och alldeles särskilt är detta fallet med barnen.

När barn förvärvar talbegrepp, möter de dem som eller knyter dem till konkreta ting. Åtta — nej det existerar inte för barnet men väl åtta kolor, åtta bokmärken, åtta barn i första bänkraden. Nå men åtta år? Där är det inte knutet till ett konkret ting. Men dock till ett ting, visserligen ett abstrakt. Men fråga är, om barnet har någon som helst talvärdesuppfattning, när det talar om att det fyller åtta år. Termen har väl ungefär samma innebörd som t. ex. 'vad du har blivit stor'. Den födelsedagsfirande flickan har med ett slag höjt sig över sju-åringarnas lilleputtsskara.

Professor D. Katz har påvisat analogier mellan barn och primitiva folk i dessa avseenden. Han skriver därom bl. a. följande.[1])

[1]) D. Katz: *Psychologie und matematischer Unterricht.* Leipzig och Berlin 1913.

Talförhållandena tänker sig primitiva folk i allra närmaste förbindelse med de ting, i samband med vilka de gör sig märkbara. Att de vid en grupp av föremål uppträdande talförhållandena utan vidare skulle kunna överföras på en annan grupp, inser de primitiva lika litet som barnen. Intet är i detta avseende mer lärorikt än det faktum, att många folk använda olika räkneord för olika ting. Ett folk i Brittiska Columbia har 7 olika räckor räkneord för räkning av olika klasser av ting. Räkneordet bildar en fast enhet med det räknade och kan inte lösas därifrån eller överföras på annat område. Vilken betydelse den primitive lägger vid den konkreta möjligheten hos föreställningsbara talförhållanden visar följande händelse. Man bad en indian att översätta satsen: Den vite mannen har i dag skjutit 6 björnar. Indianen vägrade under förklaring: Det är inte möjligt, att vit man på en dag kan lägga ned 6 björnar. Det gick inte alls att översätta! Så långt Katz.

Som symbol för talvärdet står ett ord eller ett tecken. Tecknet kan också läsas såsom ett ord. Ordet åtta är symbol för talvärdet, och siffran 8 är strängt taget symbol för ordet åtta, ett tecken för ordet, en kortare form för ordet, liksom SJ är en kort form för ett oerhört omfattande begrepp: Statens järnvägar. När vi räknar med siffror, arbetar vi egentligen med symbolens symbol. Och det kan inte vara riktigt bra att börja undervisningen med. Vi kommer för långt bort i utkanterna. Det ligger intet innehåll i de där krummelurerna. Barnet vänder upp och ner på fyran, därför att den liknar en stol, och en stol ska inte stå med benen i vädret.

Om talbegreppet (talvärdet) är universellt, så skiftar däremot benämningarna, räkneorden, inom de olika språken, vilket de minsann får veta, som håller på att lära sig ett främmande språk. Räkneordens symboler, siffrorna, däremot är numera i stort sett lika i hela världen — de romerska siffrorna har en rätt begränsad användning. Att siffran är en symbol för räkneordet, skymtar i det förhållandet, att — enligt en hypotes — de arabiska siffrorna (dvs. dem vi använder), som i själva verket härstammar från Indien, bildats av respektive räkneords första beståndsdel, såsom om vi toge oss för att i st. f. tecknet 8 skriva tecknet å. (De båda ringarna i å komme väl snart att skrivas samman, så att vi finge det traditionella tecknet på den vägen också — så brått som vi har!)

Räkneordens och siffrornas innebörd är konventionell. Det syns bl. a. på en sammanställning av siffror från olika folk och olika tider. Bland de östarabiska siffrorna har 4 talvärdet 6, likaså i ett siffersystem från 1300-talet. I de västarabiska siffrorna har det tecken, som mest liknar vår fyra. talvärdet 5. I siffrornas för oss vuxna så enkla tecken skulle ett barn kunna lägga in precis vad som helst. Genom undervisning, övning och erfarenhet knyter barnen först så småningom talbegrepp vid det tryckta eller skrivna tecknet. Den femåriga Monika hade tagit reda på några siffrors namn och satt och lekte med ett räknespel. Hon kände namnet på bl. a. fyran och tvåan och läste dem och började lägga dem på talbild. Därvid gick hon över igenkännandet av ljudbilden av siffrans namn. ty hon räknade upp talbildens föremål under pekning och sade: »En två tre fyra, jaha det var fyran» och lade dit siffran. Men så fick hon tag på en lapp som såg ut så: 4+2. Plustecknet kände hon intet namn på men hade någon gång hört motsvarande tecken kallas kors. Hon läste nu: »Fyra kors två» och såg häpen på mig. Att tecknet innebar en uppfordran till en viss operation med de båda talen, var henne naturligtvis främmande. Men i samma situation befinner sig våra skolbarn, om vi låter dem räkna med siffror och räknetecken, innan riktiga begrepp blivit knutna till dem.

En tysk räknemetodiker vid namn Johannes Langermann har lagt fram[1]) ett drastiskt exempel på hur viktigt det är, att vi lär barnen att binda talbegrepp vid räkneorden och detta så fast, att orden, respektive tecknen, omedelbart väcker de riktiga talföreställningarna. Han föreslår oss vuxna att göra följande försök. Benämn talen inte med de vanliga räkneorden ('ett', 'två' osv.) utan med små godtyckligt valda stavelser, t. ex. solfanamnen jämte några likartade stavelser, sålunda:

Nytt räkneord	Betyder	Nytt räkneord	Betyder
do	ett	ut	åtta
re	två	ka	nio
mi	tre	bo	tio
fa	fyra	do-bo	elva
sol	fem	re-bo	tolv
la	sex	mi-bo	tretton
si	sju	fa-bo	fjorton osv.

Sen ber han oss räkna

mi + la = ? (ka)
ka — re = ? (si)
fa-bo — mi = ? (do-bo) Osv. osv.!

Man märker hur det tar emot. Vi tittar på tabellen (ska vi kalla den chiffer?) och »översätter» de nya orden till de med riktigt innehåll mättade gamla räkneorden, utför operationen med deras hjälp och »översätter» svaret med chiffrets hjälp. Men om vi inte hade det? Och om vi sattes att skriftligt utföra sådana uppgifter? Ja, då vore vi i samma predikament som de barn, som arbetar med räkneord eller siffror, vilka inte är fast förenade med innehåll.

[1]) I *Handelndes Rechnen*, ein Handbuch für Lehrer.

III

Vad vet barnen om räkning, när de kommer till skolan?

Ernst Meumann[1]) sammanfattar resultatet av undersökningar om barns talföreställningar på följande sätt:

1. Barns talföreställningar uppstår relativt sent i jämförelse med andra sinnesföreställningar.

2. Talföreställningarna uppstår genom räkning (uppräkning) av föremål.

3. Talföreställningarna bär till en början en karaktär av konkreta individualföreställningar. De utgöres alltså av föreställningar om antal föremål eller antal förlopp. Först så småningom förvandlas de till abstrakta talbegrepp, varvid räknandet blir automatiserat och mekaniserat.

Meumanns framställning är från början av 1900-talet men står sig tvivelsutan den dag i dag är. Att talföreställningarna uppstår senare än en mängd andra föreställningar. kan var och en konstatera, som har följt småbarns utveckling.[2])

Den takt, i vilken talföreställningarna (i varje fall räkneorden) växer fram, är i högre grad än andra föreställningar beroende på hur mycket föräldrar och andra i omgiv-

---

[1]) Ernst Meumann: *Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik*, band 3. Meuman var professor i Hamburg och sysslade särskilt med pedagogisk psykologi. Han dog 1915.

[2]) En översikt över talföreställningarnas framträdande finns i Sjöholm: *Handledning vid modersmålsundervisningen under första och andra skolåren*, 2:a uppl., s. 193 o. f.

ningen sysslar med barnen. Föreställningar om ting och verksamheter i omgivningen bygger barnet upp genom sina dagliga erfarenheter. Men talbegreppen tränger sig inte fram på samma sätt. Någon anledning för skolan att mana föräldrar att påskynda barnens utveckling i detta avseende finns knappast. Vad som naturligt växer fram under lek och sysslande med tingen är välkommet, naturligtvis. Det blir ofta lustbetonat eller nyttobetonat på det sätt som tilltalar barnen. Hur många dockor har du? Hur många kulor? Hur många »bilden»? Osv. Talen kan vara bra att ha, när det gäller att hålla reda på tillhörigheterna. Det är ett naturligt sätt att upptäcka talen på. Föreställningarna om tal och förmågan att räkna är en mognadsföreteelse. Den kommer så småningom och mår stundom illa av att forceras. För tidigt räknande, särskilt om någon faller för frestelsen att undervisa i abstrakt form, är i så måtto missbrukad kraft som samma resultat vid barnens större mognad vinnes på kortare tid och med mindre möda. Man bör observera, att inställningen till räkning kan snedvridas, om den grundlägges på ett sätt som väcker olust. Jag har träffat studerande, som missmodigt lämnat fram blanka provräkningspapper och förklarat: »Jag *kan* inte räkna. Jag duger inte till det.» En sådan inställning förstör utvecklingen och plågar mänskan. Men att å andra sidan tidig träning *kan* påskynda utvecklingen, är också väl bestyrkt. Sålunda har fyraåringar vid Montessoris skolor lärt sig räkneoperationer inom talområdet 1—10. Svenska lekskolor har dock inte satt upp sådana mål för barnens sysselsättning, och det är säkert välbetänkt. Den allmänna utveckling, som lekskolorna så verksamt främjar, kommer likväl räkningen också till godo.

Man bör nog akta sig för att förväxla talbegrepp och förmåga att räkna upp orden i talraden. Barnen kan dra ramsan ett två tre, fyra fem sex osv. ofta ända upp till 100.

Jag har hört nybörjare fara i väg med sådan fart, att de har kippat efter andan, och varken 100 eller 200 har stoppat dem. Är då inte det att kunna räkna? Och kan vi inte bygga vår undervisning på sådan färdighet? Man kan svara både ja och nej på dessa frågor. Talraden måste ju barnen lära sig förr eller senare. Så där är alltså ett arbete undangjort. Något värde för talföreställningarnas uppkomst har också talraden. Den ger t. ex. känslan av avstånd mellan olika tal. Barnet upplever ju att 54 kommer så långt bort från 5, att det måste vara något särskilt med det, något annat än de mera bekanta grannarna. Men något större värde för utvecklingen av talbegreppen har ett mekaniskt kunnande av talraden inte.

Noggranna undersökningar av barns taluppfattning och räknefärdighet vid skolgångens början utfördes 1942 och 1943 såsom ett led i SAF:s psykologisk-pedagogiska undersökningar. De leddes av lektor *Fritz Wigforss*, som också utarbetade redogörelsen.[1]) Den större undersökningen (1942) omfattade 784 barn.

Några av resultaten ska nämnas, men i övrigt hänvisar vi till Wigforss redogörelse. Den är nödvändig att känna till för var och en som sysslar med den första räkneundervisningen.

1. Talen inom talområdet 1—10 har till sin innebörd uppfattats av åtminstone 90 %. »Det är säkerligen utomordentligt sällsynt att barn vid skolgångens början ej alls fattat meningen med talen inom detta område», skriver Wigforss.

2. »— — nybörjarnas kännedom om talserien är överraskande god. Praktiskt taget alla kan räkna till tio.» Av gossar och flickor i genomsnitt kunde 83 % räkna upp tal-

[1]) Fritz Wigforss: *Barnens färdighet i räkning vid skolgångens början.* Nr 198 i Pedagogiska skrifter.

serien till 20, 67 % till 30, 57 % till 40, 52 % till 50, 48 % till 60, 46 % till 70, 45 % till 90 och 43 % till 100. När de också skulle ange talets grannar i talserien (t. ex. att ange vilket tal som kom före 5, 11, 30 eller efter 7, 12, 25) var resultatet svagare. Endast 20 % kunde på så sätt visa god säkerhet inom talområdet 1—100.

3. Av nybörjarna kan 56 % anses känna till alla siffrorna. Helt okunniga om siffrorna är 3 %, men om till denna grupp också räknas dem som blott kan siffran 1, blir antalet nära 10 %.

4. Omkring 30 % av nybörjarna kan skriva alla siffrorna.

5. Subtraktionsprovet »Om du har sju päron och ger bort tre, hur många har du kvar?» klarades av 39,4 %. Praktiskt taget utanför nybörjarnas förmåga ligger en sådan uppgift som 15—8, som klarats av endast 6,5 %.

6. Det svåraste additionsprovet inom talområdet 1—10 »Om du har två böcker och får sex till, hur många har du då?» löstes av 47,7 %.

7. Inte fullt hälften av nybörjarna har fattat multiplikationsidén i dess lättaste form (multiplikation med 2). Sedan sjunker procenttalen raskt, så att 6 · 3 lösts av endast 7,1 %.

8. Omkring en tredjedel av nybörjarna begrep innebörden i den lättaste delningsdivisionen (med 2 som divisor). Antalet av dem, som förstått de lättaste innehållsdivisionerna, kan skattas till något över 20 %.

9. Endast mycket få nybörjare känner till de fyra räknetecknen +, —, ×, : (20 % kände till plustecknet, 7 % till minustecknet, 0,5 % till alla fyra tecknen).

10. Av 12 problem löste barnen i genomsnitt nära 4. 17 % löste ingen uppgift och 12 endast ett av problemen.

11. 90 % av barnen kunde ge försöksledaren mynten 1 öre—1 kr, och 75 % kunde räkna upp andra mynt. 58 % kunde växla 20 öre i mindre mynt, hälften kunde ge tillbaka på 10 öre vid köp för 8 öre.

12. 57 % av nybörjarna har någon kunskap om klockan, men endast 6 % är fullt säkra.

13. Nybörjarnas kännedom om sorter är minimal.

Av undersökningen drar Wigforss bl. a. de slutsatserna, att vid skolgångens början är nybörjarna mogna att ta i tu med räknesätten addition och subtraktion, och att ett tidigt införande i undervisningen av multiplikation och division inte är lämpligt. Han framhåller även, att ett av undersökningens viktigaste resultat är konstaterandet, att nybörjarna står på oerhört olika nivå i räknefärdighet. »Under det de svagaste ej ens kan räkna till 10 är de duktigaste fullt i nivå med medelgoda barn i klass 2.»

IV

Vi fortsätter med det konkreta och syftar mot det abstrakta

Den närmaste uppgiften, när vi får nybörjarna i skolan, är att bygga vidare på den grund, som lagts under förskoleåldern, och sålunda vidga och fördjupa talbegreppen. Vi ska se till att talens värde blir fixerat, likaså deras viktigare egenskaper.

För flertalet barn är säkerligen talvärdet bundet vid konkreta föremål. Vi fortsätter på samma stråt men har som mål att frigöra talvärdet från den konkreta följeslagaren. Går det?

En tysk räknemetodiker, K. Eckhardt, undersökte de synföreställningar, som barnen hade, när de försökte föreställa sig ett tal eller en räkneoperation. De undersökta barnen hade lärt sig att räkna med tillhjälp av kulramen och kvadratiska talbilder — detta är viktigt att observera. Han fann bl. a. följande.

1. Punktbilderna, som ingått i de använda talbilderna, användes såsom inre bilder blott till ungefär slutet av första skolåret. Vid andra skolårets början fanns de kvar endast hos *en* lärjunge.

2. Ingen lärjunge använde kulramens gruppering.

3. I andra skolåret använde barnen siffror såsom inre representanter för talbegreppet antingen isolerade eller som i rader ordnade sifferbilder.

4. Därbredvid trädde sakliga föreställningar in som hjälp för de visuella sifferföreställningarna. Sålunda såg en lärjunge siffrorna på bänken, en annan på skoltavlan, andra åter såg inom sig hur läraren eller kamrater skrev siffrorna.

Endast de barn, som hörde till den visuella föreställningstypen, såg inom sig talet i sifferraden. Hos barn av blandade föreställningstyper (de vanligaste!) förekom det enstaka gånger, hos de akustiskt-motoriska inte alls. Eckhardt hade funnit, att synbilder hade visat sig vara goda hjälpare i barnens arbete att minnas talvärdet, likaså att synminnesbilderna underlättade räkneoperationerna. Men barnen hade behövt hjälp för att förvärva och utnyttja synminnesföreställningarna.

Ett tillägg. Eckhardt själv gjorde försök att hjälpa utpräglat visuella barn till större säkerhet i räkning genom att först i åskådlig bild ge dem sifferbeteckningen för talen 1—100 i en rak rad och sedan hjälpa dem att inprägla raden, se den inom sig, gå fram och tillbaka på den vid addering och subtrahering o. s. v.

Synminnesbilder har störst värde för visuellt lagda barn. Man får alltså akta sig för ensidighet i arbetssättet. Andra barn har bättre hjälp av andra åskådningshjälpmedel. Och vi får vara försiktiga med att på barnen tillämpa vårt eget sätt att föreställa oss talen.

Har vi själva lätt för att minnas vad vi sett (är visuella), så fäster vi kanske för stor vikt vid åskådliggörandet genom bilder. Har vi själva däremot lättast att föreställa oss det hörda, så frestas vi att anta samma föreställningstyp hos barnen. Och så pratar vi för mycket! Insikt i läran om de olika föreställningstyperna har faktiskt störst betydelse såsom en regulator för vårt eget handlande. Men barnens föreställningstyper? Vi får rätta oss efter det faktum, att alla typer kan vara företrädda i en klass, att utpräglat rena typer är i minoritet, att blandade typer är vanligast.

Ett lustigt exempel har vi i Pestalozzi och Diesterweg. Det förefaller som om Pestalozzi förutsatte, att alla barn hörde till den visuella typen, till vilken hans enhetstabell och geometriska figurer vädjade, medan Diesterweg förklarade räknandet vara helt en hörselns och språkrörelsernas sak och tänkte alltså ensidigt på den akustiskt-motoriska föreställningstypen. Han hörde väl själv dit!

Det blev litet för mycket Eckhardt i detta sammanhang, men jag ville referera hans undersökning för att visa, att barnen verkligen relativt raskt utskiljer åskådningsmedlen och alltså föres mot abstraktion av talbegreppet. Och det är dit vi ska sträva mitt uppe i vårt flitiga bruk av åskådningshjälpmedel av alla de slag, mitt i allt fäktande och handklappande och ritande och byggande, alltså sådant som ingår i arbetssättet, enligt vad vi vill visa i kapitel VII.

Meumann påpekade, som vi nämnt, att barns talföreställningar till en början bär en karaktär av konkreta individualföreställningar. Han säger om talbegreppets fortskridande utveckling, att det måste ske i två riktningar:

1. Talbegreppets logiska värde och därmed inblicken i talsystemet måste av barnet allt tydligare fattas.

2. Talbegreppet måste lösas från sitt åskådliga underlag. Räkneoperationerna (de fyra räknesätten) måste alltmer förvandlas i associativt-reproduktivt förlöpande förlopp (mekaniskt, helt ur minnet), för att barnen ska kunna ernå den snabbhet och säkerhet, som är nödvändig för räkneoperationernas praktiska användning. På basis av den elementära räkningen måste en början till matematiskt tänkande utbildas.

En annan författare, Ruschke, har påvisat fyra steg i den fortskridande abstraktionen vid räkningen:

1. Sinnligt (åskådligt) räknande med klotsar eller andra föremål.

2. Bildligt räknande med punkter o. d.
3. Sinnebildligt räknande med siffror.
4. Rent inre räknande.

Jag har velat påminna om några äldre räknemetodiker — långt flera borde egentligen nämnas —, därför att vi därvid finner, hur problemen har varit desamma i gångna tider som nu. Dessa äldre herrar låter lite högtidliga. Men de berör mycket väsentliga saker, som vi inte kommer förbi, även om det dagliga arbetet får friare och rörligare utformning. Detta senare är dock strängt taget blott en fråga om intensifiering av arbetet efter riktlinjer, vilkas motivering är gammal.

Gången tycks verkligen vara denna: 1) Nybörjarnas talföreställningar är bundna vid saker och ting — fem är t. ex. fem fingrar, fem öre. 2) Vid vår räkneundervisning lockar vi systematiskt fram nya talföreställningar med hjälp av konkreta, sakliga sammanhang och fördjupar barnens tidigare förvärvade föreställningar på samma sätt. 3) Till sist strävar vi med all makt att frigöra samma talföreställningar från det som vi själva hängt på dem. Det verkar motsägelsefullt. Men det är nog likadant med tänkandets utveckling på andra områden. Vi måste emellertid vara särskilt uppmärksamma på utvecklingen just när det gäller räkningen. Vi vet, att barnen måste lära sig att relativt mekaniskt utföra vissa akter i räknandet. Lätta additioner, multiplikationstabellen osv. måste kunna gå automatiskt. Men om målet är detta, så får vi inte därav dra slutsatsen, att undervisningen ska ske utan hjälp av yttre medel.

V

Vilka yttre hjälpmedel?

Om vi nu är överens om att barnen ska vinna föreställningarna om talens värde och de enkla räkneförloppen med tillhjälp av åskådliga ting, verkliga föremål, utförda handlingar, iakttagna skeenden osv., så kommer frågan: Vilka ting ska vi använda? Ja, det har folk frågat sig från räkneundervisningens begynnelse. Och många hjärnor har sysslat med problemet: Ska det inte kunna konstrueras en apparat, som hjälper barnen över det första räknandets verkligt stora svårigheter? Många räkneapparater har blivit resultatet av detta funderande. Fråga är om något annat ämne — de naturvetenskapliga undantagna — kan uppvisa en sådan mängd apparater som just räkningen. Enbart i Tyskland hade före världskrigen konstruerats omkr. 300 räkneapparater för talområdet 1—100. I Statens pædagogiske studiesamling i Köpenhamn, i vilket förutvarande Dansk Skolemuseum ingår, finns en mängd olika apparater. Och vårt eget lands skolmuseer har också betydande samlingar. Varje år konstrueras det nya, tycks det, eller påbättras gamla. Just när detta skrives, kom ett meddelande, att kulramen givits ut i ny form.

Kulramen är mycket spridd. Det vet alla. Men är det lika känt, att den har en förnämligare historia än något annat hjälpmedel? På bilden ser vi hur hinduiska barn i vara dar lar sig räkna med dess hjälp. Bilden är hämtad ur ett amerikanskt verk, och det är intressant att i bildunder-

»Lärarinnan visar sina uppmärksamma elever, hur man räknar på en abacus». Interiör från en skola i Indien (Rajputana).
Ur The National Geographic Magazine okt. 1948.

skriften se, att kulramen kallas *abacus* på engelska. I det ordet förvaras ett stycke kulturhistoria. Abacus var nämligen den latinska formen för grekernas *abax*, varmed de betecknade ett räknebord, indelat i kolumner, som representerade ental, tiotal etc., och på vilket man räknade med stenar. Räknebordet utvecklades till kulram, som sålunda tjänstgjorde som en slags räknemaskin. Motsvarande konstruktion var känd i Kina långt före Kristi födelse. Dess räkneram överfördes till Ryssland och ombildades, troligen efter påverkan av den romerska abacusen, till den »ryska räknemaskin», som en överste i Napoleons armé 1812, efter nederlaget vid Moskwa, förde till västra Europa och gjorde till den första räkneundervisningens lydiga tjänarinna! Sammanhanget utredes närmare i kapitel IX.

Kulramen låter vi vara typ för demonstrationsapparaterna, dvs. sådana apparater, som läraren ensam (i huvudsak åtminstone) hanterar. (Jag minns att det närmast ansågs som genant, när man fick gå fram till kulramen.)

Kulramens svaghet är just dess karaktär av demonstrationsapparat. Har varje barn sin egen lilla kulram, har den större värde, ehuru den även då är behäftad med vissa brister, som kommer att framgå av den följande framställningen (jfr s. 27, 140, 185!).

De avgjort viktigaste åskådningshjälpmedlen är de, som varje särskilt barn kan handskas med och ständigt ha till hands. Det kan vara föremål av olika slag och form, dock inte gärna kulor, eftersom de inte vill hålla sig på bordet. Nåja, jag minns att jag såg kulor i en klass i Prag, men de förvarades i en skål. Föremål, som bättre än kulor stannar på bordet, finns lyckligtvis. Fråga är om inte brickor av papp, räknelappar, är de bästa av alla. De är billiga, de stannar något så när hyggligt på bordet, och de låter ordna sig till talbilder. Jag använde konsekvent räknelappar. De var 2 cm i kvadrat. Jag fick dem tillverkade i två serier: i den ena var lapparna gula på ena sidan och blå på den andra, i den andra serien var de gröna på ena sidan och röda på den andra. Denna enkla anordning gav rika variationsmöjligheter. De kommer att spöka i fortsättningen av denna bok.

Ett annat åskådningshjälpmedel för varje enskilt barn är talbilder. De kan vara tryckta på lappar och sålunda rörliga, och man kan låta barnen rita dem i sina arbetsböcker. Mindre verkningsfulla är de talbilder, som hänges på väggen och användes för demonstration, de må vara hur vackra som helst. De bör förstås rätteligen jämställas med demonstrationsapparaterna. Se s. 181.

Att de viktigaste hjälpmedlen är de som barnen själva kan handskas med är ju ingenting nytt. Jfr kap. XI! En lärare Jonsén uppfann en ställbar räkneapparat och en räknelåda för barnen. I patentbeskrivningen, tryckt 1891, skrev han om pinnarna i räknelådan, att barnen genom dem »förflyttas från passivt till aktivt deltagande. Barnen få därigenom, så att säga, 'handgripligen fatta talen'.»

Som svar på kapitelrubrikens fråga kan man alltså säga, att viktigast är de åskådningshjälpmedel, som barnen använder, och att demonstrationsapparater gör mest nytta, om de vägleder barnens arbete med den egna materielen.

Några ord till om talbilderna.

Enheterna i talbilderna kan ordnas på olika sätt, såsom framgår av framställningen i kap. IX.

Det har gjorts försök att utröna, hur många enheter i ett sinnesintryck man kan fasthålla i medvetandet. Om det visas upp t. ex. ett antal punkter ett enda ögonblick, så att man inte kan hinna att räkna dem, vilket är det största antal punkter man kan uppfatta och riktigt ange? Om man anmodas att ange antalet knackningar på bordet (utan att räkna dem!), hur många kan man hålla i medvetandet? I vissa intelligenstests säger ledaren tal i godtycklig ordning och försökspersonen får visa, hur många han kan hålla kvar i medvetandet och rätt återge. Som bekant stiger spännvidden med intelligensåldern. I Stanfordrevisionen av Binet-proven anges 4 siffror såsom mått för 4 år, 5 för 7 år och 6 för 10 år. Alla försök visar, att antalet intryck är ganska ringa. Det har uppgetts 5—6 enheter i rummet (t. ex. prickar på ett papper) och något flera hörselintryck. Gruppering ökar emellertid uppfattningsomfånget.

Grupperingen kan ske genom att man ordnar prickarna i något regelbundet mönster, t. ex. som hörnpunkterna i en kvadrat, och hörselintrycken kan ordnas och grupperas genom rytm. När sinnesintrycken bjudes ordnade på något sådant sätt, stiger det antal, som kan uppfattas i en enda blick, mycket starkt. Men antalet beror också på *hur* de är ordnade. Vid ett försök exponerade man punkter dels i rad, dels ordnade till en rektangel. Exponeringstiden var 33/1000 sekund. Vid ordningen radvis kunde 5 enheter rätt uppfattas, vid den rektangulära grupperingen 10. Den lineära grupperingen är den sämsta — jämför kulramen! Den symmetriska befanns vara den bästa. Grupperingar i cirkel (jfr den Mobergska räknelådan, s. 171!) och 6-hörning visade sig inte vara ändamålsenliga. Var grupperingen i förväg bekant, t. ex. Lays kvadratiska (jfr s. 186!), ökades antalet enheter som kunde uppfattas genom ett och samma synintryck, ytterligare mycket kraftigt.

Av försöken är det lätt nog att dra den slutsatsen, att det inte är likgiltigt, hur talbilderna ser ut. Ju snabbare barnen kan uppfatta antalet på en talbild, dess bättre är den. Av denna anledning har jag konsekvent låtit barnen arbeta med talbilder, på vilka enheterna varit ordnade kvadratiskt och i grupper om fyra och fyra (Lays gruppering). En talbild, i vilken enheterna är grupperade från vänster till höger, är lättare att läsa av än en talbild, i vilken de ordnats uppifrån och nedåt, såsom t. ex. Anna Kruse hade ordnat dem. (Se s. 43!)

Beträffande talbilderna bör till sist sägas, att deras värde som åskådningshjälpmedel är något olika för normalt begåvade barn och för svagt begåvade barn. Dessa senare har större hjälp av själva talraden, där enheterna alltså följer efter varandra en och en och utan gruppering i figurer.

Talbilderna är värdefulla vid olika arbetssätt, av vilka vi nu ska dröja vid de båda huvudslagen: uppräkningsmetod och monografisk talbehandling.

VI

Uppräkningsmetod och monografisk talbehandling

Man har tvistat mycket om olika metoder i den första räkneundervisningen. Den sats, varmed vi slutade förra kapitlet, nämligen att talbilderna kan ha värde vid räkneundervisningen vid olika arbetssätt, har bestritts med mycken styrka. Nej, *talbildmetoden* duger inte alls. Till målet för *uppräkningsmetoden*, i vilken fortskridandet i räkning under första skolåret sker i anslutning till addition och subtraktion. Men detta är, säger anhängare av den *monografiska talbehandlingen*, det värsta som gärna kan tänkas. Nej, alla fyra räknesätten ska man använda och det vid genomgången av varje (eller så gott som varje) tal upp till 100. Vem har inte hört talas om att all undervisning ska vara åskådlig? Och vid räkneundervisningen skulle både talen och räkneförloppen åskådliggöras. Så fick vi ett »*åskådningsförfarande*», som vi tycker skulle vara psykologiskt och bra. Men nej. Vissa uppräkningsmetodiker kallar detta för ren minnesmetod, som illa leder till målet.

När man sysslar med den metodiska litteraturen kring den första räkneundervisningen, blir man slagen av mängden av metoder och av den hetsighet, varmed striden om dem har förts. Det går nu inte att här redogöra för metodernas historia och alla diskussionerna. Vi får nöja oss med att utreda innebörden av de två huvudslagen samt några av de termer i metoddiskussionen, som man oftast träffar på.

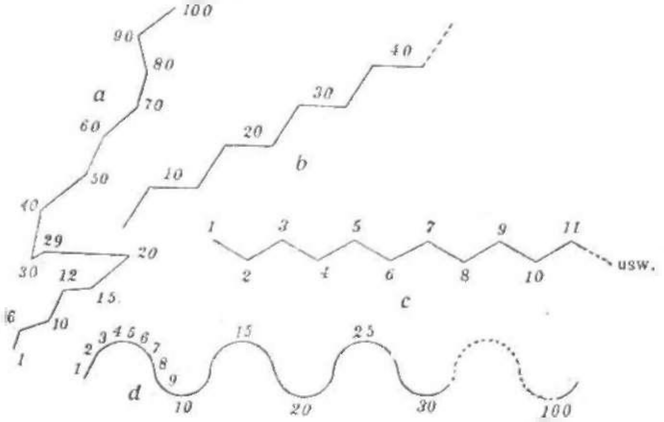
Det är nog bra, att man har detta i minnet, när man läser nästa kapitels framställning av det som är huvudsaken i denna bok: att berätta om ett mångsidigt arbetssätt, som vädjar till barnens aktiva insats och bygger på deras intresse för det som förekommer under räknetimmarna.

1. Uppräkningsmetoden

Vid uppräkning tar vi talen i tur och ordning, såsom de förekommer i talraden: ett två tre fyra osv. Uppräkningsmetoden bygger på denna uppräkning av talserien. Talföreställningarna knytes till talraden: där står prickar eller streck eller rent av siffror i rad, och den blir allt längre och försvinner till slut i fjärran.

Man frågar vuxna, hur de föreställer sig talen. Några svarar just med att hänvisa till raden. Någon såg talraden som en rak linje, som steg snett uppåt, en annan såg raden rak ända upp till ett visst tal, där vek den av »om hörnet» vinkelrätt mot den första sträckan. Då försöksledaren undrade, hur en sådan talrad hade kunnat komma till stånd, förklarade försökspersonen, att han som barn hade brukat gå och räkna husnumren. De följde den raka linjen, tills gatan svängde och numren ändrade riktning. Andra ser talraden som en trappa osv. Se bild s. 30.

Vid uppräkningsmetoden lägger man samman 4 och 3 så: man säger talen ett två tre fyra (där var det ena talet,) och fortsätter att säga fem sex sju (där var svaret). Eller också så: man fixerar att man har fyra och räknar upp ytterligare tre: fem sex sju. Man räknar till i addition och man räknar från i subtraktion, och man tar ett och ett åt gången. För att hålla rätt på det tal, som ska läggas till eller dragas ifrån, tar man eventuellt fingrarna till hjälp, innan man har kommit så långt, att man med endast ett inre föreställande kan räkna till eller räkna ifrån. Kulramen kan ersätta fingrarna — det anses liksom litet förnämare.



Taldiagram. Fyra exempel (a—d) på hur föreställningarna om talen i talraden fr. o. m. 1 knytes till en linje, tallinje. Vid ett av Katz omnämnt försök förklarade 97 av 211 försökspersoner, att de hade nytta av taldiagrammet vid addering och matematiska operationer över huvud. Eckhardt (jfr s. 19 o. f.) undersökte värdet av att använda tallinjen i den första undervisningen.

Ur D. Katz: *Psychologie und matematischer Unterricht.*

Vid uppräkningsmetoden löper man först igenom addition och sedan subtraktion. De båda andra räknesätten kommer knappast ifråga, förrän talsystemet i sin helhet är uppbyggt, i varje fall inte under den första skoltiden.

Den mest konsekventa framställningen av uppräkningsmetoden torde vara den, som strax efter sekelskiftet framlades av *Hermann Haase.* Förordet till tredje upplagan daterades Halle 1911. Boken är tillgänglig på svenska.[1]) Haase stöder sig på den Herbartska psykologin, är mycket säker på sin sak och polemiserar mot den monografiska talbehandlingen, talbilder osv. Han ger uppräkningsmetoden en fast utgestaltning. Hans tillvägagångssätt vid uträkningar i addition och subtraktion är användbart, vilken

[1]) Hermann Haase: *Den första räkneundervisningens metodik.* Pedagogiska skrifter nr 65.

huvudform man än ger vardagsarbetet i räkning. Och det får ett särskilt värde därigenom, att det ger *ett* säkert sätt att lösa sammanläggning och fråndragning på. Även det sätt, varpå Haase bygger upp barnens talföreställningar, är mycket användbart. Ett originellt och mycket fruktbart uppslag är den konsekventa användningen av ordningstalen vid analys av talvärden och vid utförandet av uträkningar inom talområdet 1—10. Enheterna får därigenom namn och kan för barnen bli påtagliga.

Ur Haases förut nämnda arbete har hämtats följande till belysning av hans metodiska åsikter.

Förfaringssättet grundar sig på tre principer:

1. Lärjungen ska ledas till att *med hjälp av ordningstalen finna lösningen på räkneuppgifterna* inom talområdet 1—10, så länge han ännu inte kan resultaten utantill. T. ex. uppgiften 5+3 ska han lösa så här: Till 5 föremål (soldater, bord osv.) lägges 3, nämligen det 6:e, 7:e och 8:e; således är 5+3 = 8. Eller 10—4: Från 10 föremål tar vi bort 4, nämligen det 10:e, 9:e, 8:e och 7:e; alltså får vi 6 kvar; 10—4 = 6.

2. Vid denna uträkning ska lärjungen åskådligt föreställa sig den i fråga varande uppgiften (eller lösningen), i det han tänker sig densamma med tillhjälp av en inpräglad, *dekadiskt uppdelad vågrät rad av lodräta streck*, genom vilken talserien åskådliggöres i rummet; t. ex. vid 5+3 på följande sätt:


o. s. v.

3. *Talens sönderdelning* utgör vid det här förordade tillvägagångssättet *inte utgångspunkten för de olika räknesätten utan i stället avslutningen.*

Detta *åskådliggörande genom den dekadiskt uppdelade vågräta streckraden* såsom den förkroppsligade talserien ska på motsvarande sätt bibehållas även i den fortsatta räkneundervisningen (över 10, till 100, event. till 1000). Lösningssättet medelst uppräkning gäller likväl endast för talområdet till 10.

Talen 1—4 bildar en grupp för sig, enär vi, enligt Haase, till följd av medvetandets trånghet inte kan samtidigt föreställa oss mer än 4 ental. Barnen vinner talföreställningarna för 1, 2, 3 och 4 först genom att syssla med leksaker och andra ting i verkligheten eller genom föreställning, sedan genom ställföreträdande träklotsar av olika form, som ställes fram på bordet. Skriftliga uppgifter: att rita föremål (äpplen o. d.) till iakttagna antal.

Därefter följer åskådligt räknande inom talområdet 1—4. T. ex. Ställ fram två röda hus intill två andra röda hus (de ställföreträdande klotsarna). Hur många har du ställt fram? Ställ tre röda intill ett grönt. Hur många hus har du ställt fram? osv. Därefter i huvudet: Hur gör du, då du räknar tillsamman två hus och två hus? Jag ställer först fram ett och så ett till, det är två; och sedan ett till och ett till; nu är det fyra osv. Därefter kort satsform: Två hus och två hus är fyra hus. Skriftliga övningar: teckning men inga siffror.

På motsvarande sätt övas fråndragning inom talområdet 1—4.

Talområdet 1—10 är nästa grupp. För räknandet en apparat: Ett bräde, som kan fästas utmed tavlan och på vilket de ställföreträdande klotsarna kan ställas. På tavlan ritas lodräta streck, som börjar 7—8 cm ovanför brädet och är 10 cm långa för talen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 20 cm för 5 och 40 cm för 10. På brädet och vid dessa streckar på tavlan sättes klotsarna under räkningen. Talen kommer sålunda att alltid bjudas i samma ordning: en rad av efter varandra ställda enheter. Därigenom skapas föreställningen om en talrad, utmed vilken uträkningen likaledes genom föreställning kan ske. I stället för bräde och för varje gång uppritade streck kan man använda en räknelåda, som förvarar klotsarna och har ställbräde och lodräta linjer.[1])

Först inläres ordningstalen den första, den andre, den tredje, den fjärde. Vilken soldat står framför den fjärde? — vilken bakom den tredje? Strec-

---

[1]) Vi lät för övningsskolan i Göteborg tillverka en sådan låda, och förf. prövade den och det Haaseska tillvägagångssättet. Mot principerna var det ingenting att anmärka. Att ställa upp och fälla ned de olika klotsarna — hus, träd, böcker, tallrikar, mänskor och vad annat allt de skulle föreställa — verkade litet omständligt. Den allvarligare bristen låg däri, att läraren frestades att själv demonstrera för klassen, som skulle titta på. Naturligtvis kunde barn gå fram och ställa upp träden och låta dem falla, men att få samtidig sysselsättning för varje enskilt barn, det gick ju inte. För svagare barn rekommenderar Haase en papptavla, på vilken tryckts (eller målats) de tio strecken. Barnen skulle lägga små stenar, klotsar, knappar, bönor osv. under strecken, såsom det skedde framme vid tavlan.

ken tjänar därvid såsom representanter för ordningstalen, och avsikten är att nå en fast association mellan strecken i raden och ordningstalen. För att ge namn åt det enskilda tinget använder man ordningstalen, för att beteckna ett antal ting använder man grundtalen. Särskilda övningar för att barnen ska kunna skilja i sär de båda slagen av räkneord, t. ex. Sätt fram två röda äpplen. Sätt två gröna intill. Vilka har du satt fram? (Det tredje och fjärde.) Hur *många* har du satt fram? Eller vid inövning av en fråndragningsuppgift: Ställ fram tre hundar. Börja med *den sista* och tag bort två hundar. *Vilka* två hundar har du tagit bort? (Den tredje och den andra.) Vilken hund finns kvar? (Den första.) Hur *många* hundar finns kvar? Barnen ledes att ta bort från slutet (från höger) och räkna baklänges.

Nästa uppgift: att inlära talserien 1—10 med både grundtal och ordningstal. T. ex. Tio klotsar ställes vid talraden. De får nu föreställa 10 barn. Nämn vart och ett i ordningsföljd! (Det första, det andra, det tredje osv.) Hur många barn? Visa sju barn. Visa det sjunde. Visa fem barn. Visa det femte. Vilket barn står före det tionde? — efter det fjärde?

Addition och subtraktion begränsas först så, att endast högst 4 lägges till eller drages från. Det kan ske så: 6 öre + 3 öre. Jag ställer fram 6 öre och sedan 3 öre därtill, nämligen det 7:e, det 8:e och det 9:e, så har jag 9 öre. 10 enkronor — 4 enkronor. Jag lägger fram 10 enkronor och tar därifrån fyra, nämligen den tionde, den nionde — paus — den åttonde och den sjunde. Jag har sex kvar. Barnen löser först sådana uppgifter med föremål vid streckraden och sedan utan. Apparaten ska tjäna till att åskådliggöra förfaringssättet men inte som räkneapparat för uppgiftens lösning.

Siffrorna och räknetecknen (+, —, ×, :) införes och därmed skriftliga övningar. Siffrorna föreslår Haase till inlärning i denna ordning: 1, 4, 7; 0, 6, 9, 10; 2, 3, 5, 8, alltså efter likhet i formen.

När talen 5, 6, 7, 8 och 9 ska läggas till ett annat tal eller dragas från ett tal, uppträder den svårighet, som betingas av medvetandets trånghet; man kan inte uppfatta och i medvetandet samtidigt fasthålla alla enheterna i så stora tal. Haase löser svårigheten genom att låta barnen ta det stora talet först. Han sammanfattar det i två additionsregler:

1. Ska jag lägga de *små* talen 1, 2, 3 och 4 till, så gör jag det efter det andra talet.

3. Ska jag lägga de *stora* talen 5, 6, 7, 8 och 9 till, ställer jag dem vid streckradens främre ände och lägger det andra till.

Ett subtraktionstal av detta slag räknas så: Vi ska ta bort fem soldater från åtta soldater. Vi ställer upp åtta soldater vid streckraden. Vi fäller ner de fem första. *Vilka* står kvar? Hur *många* står kvar? Efter många övningar sammanfattning i de båda subtraktionsreglerna:

1. De *små talen* 1, 2, 3 och 4 tar jag bort *från slutet* genom att räkna baklänges.

2. De *stora talen* 5, 6, 7, 8 och 9 tar jag bort *framifrån* och räknar ut resten.

Härmed är det principiella i Haases uppräkningsmetod redovisad. För fullständighetens skull må dessutom nämnas följande. När 10—20 behandlas genom addering och subtrahering i första skolåret, förekommer inte några räkningar, som kräver överstigande eller understigande av tiotalet. Exempel av typen 15—8 är för svåra och bör inte tas förrän i andra klassen. Till första klassen föres även talområdet 20—100. Det tas i tre steg: 1. Till 50 med additionsuppgifter sådana som 20+30, 40+2 och subtraktionsuppgifter sådana som 50 — 10, 27 — 7.

2. Till 100 med additions- och subtraktionsuppgifter som i föregående moment.

3. Samma talområden men med additionsuppgifter sådana som 26+3 (*icke* 26+4) och subtraktionsuppgifter sådana som 97 — 6 (*icke* 90 — 5).

Haase skriver: »Mitt förfaringssätt leder lärjungen till att medvetet och med klar uppfattning gå fram och tillbaka på den ur grundtalsserien abstraherade tallinjen, som förkroppsligas av streckraden». Han förkastar monografisk talbehandling, likaså vad han kallar talbildmetod. Intet annat tillvägagångssätt än uppräkning, säger han, går avsiktligt och direkt mot målet, nämligen att handleda lärjungarna att räkna ut uppgifterna i huvudet, ända tills resultaten erhållit karaktären av mekanisk färdighet.

Även andra vänner av uppräkningsmetoden uppger, att den för snabbast till abstrakt räknande. Det är nog svårt att bevisa något sådant. Därtill skulle erfordras omfattande parallellförsök med renodlade metoder. Däremot tycks man av erfarenheten kunna sluta sig till, att uppräkningsförfarandet lämnar de svagt begåvade barnen den bästa hjälpen. De blir visserligen länge beroende av att bokstavligt räkna till och räkna från. Men de har *något* säkert sätt, på vilket de kan finna lösningen av enkla problem. Och det är för sådana barn särskilt viktigt, enär de i regel har svårt att i minnet bevara de tabellartade 5+3, 9 — 4 etc.

2. Monografisk (allsidig) talbehandling

Den bjärtaste motsättningen till uppräkningsmetoden utgör den monografiska talbehandlingen. Vid den bygger man upp talföreställningarna genom att behandla varje enskilt tal allsidigt. Man söker efter talets egenskaper, särskilt dess förhållande till andra tal, och jämför därför med andra tal. Med tillhjälp av föremål och talbilder lägger man talet isär i termer, upplöser det i faktorer, delar det, adderar inom området upp till talet, drar ifrån alla mindre tal osv. Den allsidiga behandlingen av sjuan kommer att som resultat visa, att 7 = 6+1, 7 = 5+2, 7 = 4+3, 7 3+4, 7 = 2+5, 7 = 1+6; 7—1 = 6, 7—2 = 5, 7—3 = 4, 7—4 = 3, 7—5 = 2, 7—6 = 1; 6+1 = 7, 5+2 = 7, 4+3 = 7, 3+4 = 7, 2+5 = 7, 6+1 = 7; 7 är 3 tvåor och en etta, 7 är 2 treor och en etta; tar jag sju en gång, får jag sju, tar jag ett 7 gånger får jag sju; 2+2+2+1 = 7 osv. med mer än två addender; 7—3—3 = 1 osv. med mer än en subtrahend. Alla räknesätten rycker sålunda in redan vid undersökningen av talet egenskaper. Det var detta som väckte mest opposition. Man kunde ju inte anmärka på att barnen genom denna arbetsmetod vann insikt i talens natur. Ty denna insikt utgör förutsättning för allt räknande. Och man kan verkligen säga, att man saknar insikt i talets natur, om man inte har översikt över talets olika förbindelser med andra tal = man vinner kunskap genom jämförelser.

Den monografiska talbehandlingen är ingen nyhet. Den framlades redan 1842 i en vägledning för elementär räkning av en tysk pedagog vid namn *August Wilhelm Grube*[1]) (1816—1884). Han säger redan i bokens titel, att vägledningen följer den heuristiska metodens grundsatser. Det saknar sannerligen inte intresse att observera, att vårt eget lands mest framstående räknemetodiker, lektor *K. P. Nordlund* i Gävle, år 1867 gav ut »Räkneöfningsexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska methodens användande». I sina metodiska anvisningar[2]) har Nordlund talrika exempel på allsidig behandling av talen, just för att komma åt deras »egenskaper» såsom han uttrycker saken. Huruvida Nordlund fått impulsen till sin heuristiska[3]) metod från Grube, vågar jag inte påstå. Abel Bergsten anger[4]), att Nordlund bearbetade ett engelskt uppslag.

Efter Mads Larsen: *Den grundlæggande Regneundervisning* lämnar vi följande redogörelse för den Grubeska metoden.

Liksom Pestalozzi betraktar Grube åskådningen som fundament för räkningen, och han hävdar att också talet (tal-

[1]) Grube: *Leitfaden fur das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundzätzen einer heuristischen Methode.* En 6:e upplaga kom så sont som 1881.

[2]) Nordlund: *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar,* 1890.

[3]) »Heuristisk metod innebär ett undervisningsförfarande som går ut på att eleverna så vitt möjligt självständigt, med blott ringa hjälp från lärarens sida, skall söka och finna lösningen av problem.» (Ped.-psykol. Uppslagsbok). Av grekiska ordet heureka = jag har funnit det.

[4]) Abel Bergsten. *Folkskolans räkneundervisning.* Ped. Skr. 163.

värdet, talrelationerna) ska göras till föremål för åskådning. Varje tal i räckan 1—100 ska åskådas och betraktas för sig som individ. Framåtskridandet i räkneundervisningen inom detta talområde ska ske inte från operation till operation utan från tal till tal. Grube gör talraden till lag för stegföljden och kräver, att de olika räknesätten förenas på varje steg. Han skriver i sin Leitfaden bl. a. följande.

Att låta den elementära räkningen uppdelas efter räknesätten är detsamma som att vid åskådningsundervisningen föra fram tingen för barnen efter rubrikernas storlek, form, färg osv. eller att börja botaniken med Linnés sexualsystem. Men liksom barnet inte lär känna föremålen, när det efter ett kännetecken åskådar skilda föremål, utan när det betraktar ett föremål efter dess skilda kännetecken, och liksom det är bakvänt att för nybörjaren i botanik gå igenom växterna så, att han iakttar först blott roten, sen blott stjälken osv., oaktat han snarare ser och ska se hela växten: sålunda lär lärjungen inte heller känna talet 4, åtminstone inte med ett verkligt genomträngande av föremålet, när han i dag lär $2+2=4$, efter några veckor, när subtraktionen är i tur, $4-2=2$ osv. Snarare har han ju, när han vet att $2+2=4$ därmed tillika de övriga åskådningarna, nämligen $2 \cdot 2=4$, $4-2=2$, $4:2=2$, och metodiken har orätt, när den sönderriver detta objektiva sammanhang genom att dela upp det hela på olika räknesätt. En sådan delning styrker inte utan försvagar åskådningens kraft, ty den hindrar dennas koncentration på *en* punkt och därmed iakttagelsen i åskådandet.

Grubes jämförelser mellan tingen såsom helheter (t. ex. hela växten) och talet är intressant. Gestaltpsykologin var då inte känd, den är av långt senare datum. Men Grubes syn på talet såsom en helhet har god anknytning till gestaltpsykologin.

Genom den allsidiga behandlingen av talen skulle operationerna komma av sig själva. Med räkneoperationer menar Grube addition, subtraktion, multiplikation, division och bråkräkning. Som ett exempel anför vi Grubes allsidiga behandling av talet 4. Fingrar och streck var hans förnämsta åskådningsmedel.

Fjärde steget. Fyra.

I a 1) Mätning med 1.

|||| 4

1 | $1+1+1+1 = 4$ $(1+1 = 2,\ 2+1 = 3$ osv.)
1 | $4 \times 1 = 4$
1 | $4-1-1-1 = 1$
1 | $1 \times 4 = 4$

2) Mätning med 2.

2 | $2+2 = 4$
 | $2 \times 2 = 4$
2 | $4-2 = 2$
 | $4 : 2 = 2$

3) Mätning med 3.

||| | $3+1 = 4,\ 1+3 = 4$
 | $1 \times 3+1 = 4$
| | $4-3 = 1,\ 4-1 = 3$
 | $4 : 3 = 1$ (1 i rest)

Djur med 4 ben och 2 ben. Körredskap med 1 hjul, 2 och 4 hjul.
Jämförelser:

4 är 1 mer än 3, 2 mer än 2, 3 mer än 1.
3 är 1 mindre än 4, 1 mer än 2, 2 mer än 1.
2 är 2 mindre än 4, 1 mindre än 3, 1 mer än 1.
1 är 3 mindre än 4, 2 mindre än 3, 1 mindre än 2.
4 är fyrfaldon av 1, det dubbla av 2.
1 är fjärdedelen av 4, 2 är hälften av 4.
Av vilka lika och vilka olika tal har 4 uppstått?

I b) $2 \times 2-3+2 \times 1+1-2$ fördubblat.
$4-1+1-1+1-3$ hur mycket mindre än 4 osv.

I c) Vilket tal ska jag taga 2 ggr för att få 4?
Av vilket tal är 4 det dubbla?
Av vilket tal är 2 hälften?
Vilket tal låter sig taga 2 ggr ur 4?
Vilket tal är 3 större än 1?
Hur mycket ska läggas till hälften av 4 för att vi ska få 4?
Hur många gånger 1 har hälften av 4 mindre än 3?

II. Karolina hade i sin kruka 4 tulpaner, men hon vattnade dom dåligt. Då vissnade först den ena för henne, så en till och en till. Hur många hade hon då?
Hur många öre är 2 tvåöringar?
Hur många kakor får man för 4 öre, om varje kaka kostar 1 öre? 2 öre?
Osv. med praktiska exempel på de olika räknesätten, även med halva.

Det uppstod en väldsam kamp om Grubes metod. Hans anhängare prisade det kontinuerliga framåtskridandet, det konsekventa eftertänkandet, frånvaron av all mekanisering, den grundliga kännedomen om talen. Mads Larsen sammanfattar invändningarna på följande sätt.

1. Det är för svårt för barnen att redan i början av undervisningen använda olika räknesätt bredvid varandra vid genomgången av ett tal. Man ska hellre hålla operationerna i sär än förena dem. Ett räknesätt blir grundligare behandlat, om man någon tid håller på med det.

2. Den monografiska behandlingens framåtskridande från tal till tal förslöar så småningom intresset och verkar tröttande.

3. Bråkräkning är för svår för barn på nybörjarstadiet.

Mads Larsen tillmäter dessa invändningar avgörande betydelse. Belysningen av ett enskilt tal med räkneoperationer förutsätter, menar han, med logisk nödvändighet klar insikt i dessa operationers natur. Därför ska den första räkneundervisningen genom en noggrann inövning av de enskilda räknesätten ge barnen en klar förståelse av dem och färdighet att företaga dem, innan man kan skrida till en monografisk talbehandling.

När man ser på det återgivna utkastet till monografisk behandling av talet fyra och stannar inför siffrorna och de tecknade räknesätten, blir man benägen att instämma med Mads Larsen. Men helt annorlunda kan saken te sig i verkligheten, om vi undviker skrivningen ganska länge, om vi tar undersökningarna av talen med tillhjälp av rörlig materiel i *barnens händer*, om vi fäktar och står i och har roligt vid jakten efter talens hemligheter, om vi helt enkelt inte *talar* om olika räknesätt utan bara upplever de förlopp, av vilka räknesätten är att betrakta som schematisk kortskrift, som man alldeles inte ska tillgripa, förrän barnen kommit något så när långt i förmågan att abstrahera. Använd på det sättet visar sig den Grubeska monografiska talbehandlingen vara ett effektivt instrument i den första räkneundervisningen, ett bland många andra.

Den monografiska talbehandlingen vann många anhängare, särskilt i utlandet. Man inskränkte dock det område, inom vilket alla talen behandlades fullständigt, stundom till 10, stundom till 20. Man utelämnade bråkräkningen. Man förband de motsatta räknesätten: sammanläggning — fråndragning, gånger — delning.

En framstående representant för den monografiska talbehandlingen har vi haft i *Anna Kruse* (1861—1931), lärarinna vid och senare föreståndarinna för Brummerska skolan i Stockholm. Hennes *Åskådningsmatematik* är ett klassiskt arbete.[1])

Anna Kruse citerar med instämmande ett yttrande av en fransk auktoritet: »Alltifrån den första barndomen ända till de verkliga studiernas början, låt oss säga mellan fyra- och elvaårsåldern, är det möjligt att låta barnen på matematikens område genomtränga tjugo gånger så mycket som man nu gör, och detta i det att man roar dem i stället för att som nu plåga dem.» Hon skyndar sig emellertid att tillägga, att »tjugo gånger så mycket måste vara ett utvidgande på djupet och icke på längden. Kurserna få icke väsentligt förlängas men i alla avseenden fördjupas genom ett helt

[1]) Anna Kruse: *Åskådningsmatematik.* Ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område. 2:a uppl. Stockholm 1914.

annat arbetssätt och därigenom att de i sig innesluta det grundläggande arbetet till flera områden inom matematiken.»

Anna Kruse avvisar det ofta hörda påståendet, att den första räkneundervisningen skulle vara så enkel: »Nog måste vem som helst kunna räkna så mycket! — — — Men är icke just det lilla talområdet likt knoppen, som i sig innesluter alla utvecklingsmöjligheterna; om den fördärvas hur går det då med frukten? Ligger icke i förståendet av det lilla talområdet alla betingelserna för det matematiska sinnets utveckling.»

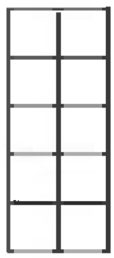
Om undervisningen skriver Kruse: »Jag fruktar, att den kunskap, som i allmänhet skänkes, är sådan, att den mest består i ord, vilka endast tränga till minnet och lämna förståndet oberört och det matematiska sinnet outvecklat. — — Barnen få här allting fullfärdigt. De få veta, att 'så skall det vara', 'så skall du göra', och man sätter därigenom från början på dem en tvångströja och tvingar dem att räkna med siffror i st. f. med storheter, man kommer dem från början att förväxla begreppet med tecknet för begreppet. — Varför detta? Jo, därför att man alltid gjort så själv.» I andra ämnen tillämpar man genetiska metoder, t. ex. laborationsmetoden. Skulle man inte också i matematiken kunna försöka att göra barnen till upptäckare? »Skulle man icke kunna utbyta det reproduktiva arbetet mot ett mera skapande sådant?» Hur man ska gå till väga lär oss barnen. De vågar tränga betydligt längre i kurser och talområden än vi tror. De vågar sig på inte allenast hela tal utan också bråk. Och de visar oss, att mångfaldiga och dela ligger dem lika nära som att lägga samman och draga ifrån.

Målet för den första räkneundervisningen betecknar Anna Kruse med ordet *matematisk kunskap*. För att nå detta mål ska vi öva det matematiska sinnet, öva det logiska tänkandet och utveckla den mekaniska färdigheten. Uttrycket matematiskt sinne, som psykologiskt sett är dunkelt, förklarar hon själv så: »Sinne för matematiska storheter och deras förhållande till varandra», således närmast vad vi betecknat med ordet talföreställningar.

Hur ska målet nås? »Låt barnen räkna med verkliga föremål och låt dem genom detta lära känna talen! . . . låt dem syssla med mått och mätningar redan från början! — — Låt dem genom demonstrationer visa, hur de tänkt sig ett sammanhang eller en räkneprocess!» Den mekaniska färdigheten vill Anna Kruse driva så långt, att utförandet av en räkneprocess »så att säga sjunker ned i det automatiska.» Hur barnen ska nå dit, ger hon intet särskilt besked om. Ty det är självklart: *övning*. Det får inte ske genom minnesplugg. »Ja, jag går så långt», säger hon, »att jag skulle vilja säga: Barnen skola aldrig få någon regel för huru de skola göra. De skola ej ha några förklaringar, allt skall vara så klart och åskådligt, att det för dem blir en erfarenhetskunskap, som därför stannar i minnet, som skapar sin egen regel och därför ej behöver förklaras. — Man brukar tala om att barnen skola *inlära* det eller det och sedan inöva det. Jag skulle vilja säga, att de skola i ordets egentliga bemärkelse *inse* matematiken och sedan inöva den.»

Anna Kruse begränsar talområdet för första skolåret till 16. Men barnen får göra »utflykter» huru långt som helst. Sådana utflykter företar barnen vid talet 3 ända till 30, vid talet 11 ända till 110 osv. Jag tror sådant går gott för sig, även om någon pekar på att det inte är fullt konsekvent. Hon ville göra talserierna (3, 6, 9 . . . 30; 4, 8, 12, 16 . . . 40) så fasta som möjligt.

Anna Kruses åskådningshjälpmedel utgöres av kvadratiska papplappar (3×3 cm. — röda och blå), som under räknandet lägges på en räkneplatta, upptagande 3 rektanglar med 10 kvadratiska rutor vardera. Rektanglarna med sina rutor ristades stundom in på bänklocken. Barnen använde dess-



utom centimeterrutade rit- och räkneböcker, papper för klippning, linjal och tabeller av olika slag. Räkneplattan och lapparna fyller det viktigaste av alla krav vid åskådliggörande av de första räkneförloppen, nämligen att sätta barnen i stånd att genom egen verksamhet åskådliggöra tal och talbehandling.

För att vi ska kunna jämföra Anna Kruses sätt att genomföra den monografiska talbehandlingen med Grubes, redogör vi också för hennes sätt att ta talet 4.

Barnen lägger upp fyra lappar.

Hur många fattas nu, för att vi ska ha tio?

Hur kan ni veta det?

Kan ni se det på något annat sätt?

Hur mycket är fyra och sex?

Ta den här pappersremsan, och mät sidorna på figuren!

Hur stora är de i förhållande till varann?

Försök att dela figuren mitt i tu!

Hur många räknelappar får ni på var del?

Vad är två gånger två räknelappar?

Ni får lägga räknelapparna hur ni vill och tala om vad ni har. (Två lappar och en lapp är tre lappar osv.)

I hur många lika delar kan man dela dem?

Hur många gånger ska man ta två lappar för att få fyra? — Tag två och två, så får ni se!

Lägg upp en lapp! Lägg upp dubbelt så många!

Hur många har ni nu framför er?

Tag ett, fördubbla det, fördubbla det!

Talserien på fyra ritas på tavlan (fyra ringar i bredd, fem rader under varandra): Fyra, åtta, tolv, sexton, tjugo.

Barnen ritar fyra apelsiner i rad. De delar dem med streck i fyra delar. Till hur många räcker de, om var och en får en apelsin?

En annan rad uppritade apelsiner delas mitt itu osv. Då räckte fyra apelsiner till två. Hur skulle de kunna räcka till 8? — till 16? — till 12? (Uppritade apelsiner delas mitt itu, i fyra delar, i tre delar.)

Olika talbilder ritas med ringar på tavlan (en ring, två, fyra, tre, en, två, en, tre), och barnen får visa, vilka talbilder de skulle kunna sätta ihop, så att det blev fyra.

Barnen klipper en pappersremsa och ritar streck, som är lika långa som remsan. De ritar en linje och försöker efter ögonmått rita en som är dubbelt så lång. De mäter för att se, om det är rätt.

Som exempel på de arbetsuppgifter, som Anna Kruse lät barnen utföra vid räknandet, kan nämnas följande. Vid talet 1: att rita av en pappruta; att rita av och klippa ut en papperslapp så stor som räknelappen; att dela den i hälfter på olika sätt; att rita *ett* bi (svårt!), *ett* ris, *en* båt.

Vid talet 5: att rita streck av olika längd upp till 5 cm och jämföra dem; att rita kvadrater; att rita framsida och baksida av ett kuvert 4×5 cm (på cm-rutat papper).

Vid talet 6: att rita fönster 4×6 cm; stol 3×6 cm, stege med 6 trappsteg osv. När talet 16 genomgåtts, ritar barnen ytnätet till hundkoja, boningshus, svinstia och ladugård, klipper ut och klistrar ihop till en trevlig sats stugor och vinner en mängd matematiska begrepp, som de handskas med såsom med gamla bekanta storheter. Här ligger något av det mest tilltalande i Anna Kruses räknemetod: arbetsundervisningen, om man så vill, detta att barnen blir förtrogna med talstorheterna under ett intresserat användande av dem. Däri ligger för räkneundervisningen antytt ett arbetssätt, inför vilket talens åskådliggörande med endast talbilder eller uppräkning synes såsom föråldrat. Meumann framhåller också, att om den första talbehandlingen förbindes med arbetsundervisning (arbetsövning), så befrias den från den döda och mekaniska karaktär, som lättare häftar vid räkningen än vid någon annan gren av den första undervisningen.

3. Talbildningsmetod och åskådningsmetod

Man är nog benägen att sätta frågetecken efter termerna talbildmetod och åskådningsmetod. De representerar nämligen inte begreppet metod på samma sätt som t. ex. uppräkningsmetoden. En metod bör väl omfatta ett helt system för arbetssättet i ett ämne. Men det gör knappast kapitelrubrikens båda »metoder». Men då termerna förekommer allmänt i litteraturen, bör kanske några ord sägas om deras innebörd.

'Åskåda' och 'talbild' ligger nära varandra. Genom att åskåda (iakttaga) en talbild får barnen hjälp att bilda sig ett begrepp om t. ex. ett talvärde eller om relationerna mellan två eller flera talvärden. Åskådandet har gjort tillägnandet åskådligt, och det synes vara detta, som föresvävar dem som talar om åskådningsmetod. Om nu allt åskådliggöres, talbegreppens innebörd och alla uträkningar, så skulle man väl kunna kalla arbetssättet åskådningsmetod. Både talbildmetod och åskådningsmetod nämnes ofta med ogillande: de binder barnen för länge vid det konkreta, menar man.

Att åskådliggöra den första räkneundervisningen är emellertid en nödvändighet, betingad av rent psykologiska skäl. Varje räknemetod måste i den meningen vara en åskådningsmetod. Ett av de hjälpmedel, varigenom räknandet kan göras åskådligt, är talbilden, ett av de många. Talbilden kan därför också ingå såsom en del i varje räknemetod. Man kan mycket väl använda talbilden som åskådningshjälpmedel också i uppräkningsmetoden. Och att den hör hemma i den monografiska talbehandlingen, ligger i öppen dag. Av dessa skäl kan man helt avstå från att tala om talbild*metod* och åskådnings*metod*. Däremot kan man rakt inte undvara talbilder och åskådning i den första räkneundervisningen.

Om talbilder lämnas en fristående framställning.

Hur kan man gå till väga vid den första räkne-undervisningen?

1. Krav på arbetssättet:

Klarhet, konsekvens, träning, gott humör.

Äntligen är vi framme vid bokens huvudkapitel. Det tror sig inte om att kunna utreda frågan, hur man *ska* undervisa i räkning, utan vill bara lämna ett bidrag till frågan, hur man *kan* undervisa. Sätten är mångahanda. Alla behöver inte mobiliseras varje räknetimme. Men det kan vara bra att ha en ledtråd att följa tämligen konsekvent. Den ledtråden ska inte utgöras av en viss »metod» utan av en klart fattad handlingsnorm, bestämd av undervisningens syfte och kännedomen om barnens utvecklingsgång.

Arbetssättet vid den första räkneundervisningen karakteriseras av barnens självverksamhet, deras aktivitet, om vi hellre vill använda ett nutidsuttryck. En annan huvudegenskap hos arbetssättet är mångsidighet, en tredje anpassning till det enskilda barnets förutsättningar.

Redan i termen självverksamhet ligger ett klart vädjande till det enskilda barnet. Den individualiserande undervisningen är därför ett självklart karakteristikum för detta arbetssätt. Det kan vara individuellt på olika vis. Såsom en nödvändighet, som alldeles inte behöver diskuteras, har vi först och främst det enskilda barnets eget arbete, både när klassen hålles samlad och när varje barn arbetar för sig.

Individuell behöver undervisningen stundom vara för att tillgodose de krav, som kommer av barnens olika ståndpunkt i förkunskaper och räknemognad. Hur en sådan individualisering ska ordnas i detalj, kan man inte ge några säkra generella råd om. Där får lärarerfarenheten säga sitt ord. Då och då skymtar tanken igenom i denna framställning, men alltför ofta döljes den av det som synes vara endast klassundervisning. Därvid är dock en sak att särskilt observera just för räkneundervisningen, där den framträder starkare än i andra ämnen: den hjälp vi kan ge vid omedelbar undervisning för hela klassen om sådana saker som talföreställning och räkneförlopp, behöver sannolikt alla barn, hur duktiga de än kan vara. Till för stor insikt i dessa ting kommer barnen ändå aldrig. Utvecklingen av räknefärdigheten beror sannolikt mindre av att enskilda barn sitter och räknar ensamma ett större antal »exempel» än andra barn. Dessmera beror utvecklingen av att barnet kommer till allt större klarhet, alltså av en fördjupning. Denna klarhet åsyftar vi just med de många arbetsformer för hela klassen, som väl i regel ingår i varje räknelektion. Att vinna denna klarhet är beroende av begåvning, mognad, energi. Därför blir den individuellt tillägnad på mycket olika sätt av barnen. Jag har inte upplevt, att något barn har fått för mycket av denna vara. Jag tror sålunda inte, att man ska tveka om att låta hela klassen vara med om de klarläggande utredningarna, som stundom tar hela lektionen, stundom bara en del av den, varefter de individuella färdighetsövningarna sätter in. Denna ståndpunkt vill på intet sätt nedvärdera den individuella undervisningen. Jag vill bara framhålla vår plikt att ge hjälp åt alla och i så stor utsträckning som möjligt och så intensivt som möjligt. Det ligger i sakens natur, att den omedelbara undervisningen av hela klassen inte fortsätter ett ögonblick längre, när man märker, att övningarna, räknelekarna, gemensamma träningar och allt detta roliga, som kan inga i den omedelbara undervisningen, inte längre fångar allas uppmärksamhet.

Hur ska ens arbetssätt ställa sig till de olika »metoderna», som i det föregående har refererats? Enligt min tanke använder man det som är värdefullt, i vilken »metod» det sen än må anses höra hemma. Jag går nu att berätta om hur barnen och jag har arbetat i den första räkneundervisningen. Därför har jag varit angelägen om att i förväg lämna redogörelser för de mest framträdande huvudslagen av »metoder». Så kan den, som är road av sådant, se hemorten. Idéerna är som bekant eviga. Det sätt, varpå de påverkar skeendet, är i hög grad beroende av den, hos vilken de söker hemvist, ett tillfälligt hemvist.

2. De åskådningshjälpmedel vi har använt

måste jag tala om, enär annars ett och annat i fortsättningen komme att verka dunkelt.

Vid utredning av talvärden och räkneförlopp måste man låta barnen handgripligt delta i åskådliggörandet. De ska därför ha något att handskas med. Det är långt viktigare att varje barn har något i sina händer, än att man framför klassen demonstrerar en kulram e. d. Vilket materiel barnet använder betyder inte så mycket, bara det fyller det elementära kravet att bjuda barnet *rörliga delar att handskas med.* Billiga och bra är *räknelappar,* fyrkantiga (ung. 2 cm × 2 cm) eller runda. De kan köpas, och de kan skäras till av papp. I senare fallet målar barnen halva antalet röda på ena sidan och gröna på andra sidan, andra hälften göres gula och blå. Det är önskvärt, att de rörliga delarna (lappar, skivor, knappar e. d.) kan ordnas till talbilder av regelbundet återkommande form. Sju skivor i en hög bidrar knappast till att göra talföreställningen klarare. Ordnas de åter i kvadratisk gruppering, blir det onekligen en annan

Hand och Öga nr 1. Locket är draget åt höger, så att talbilden för 11 synes. Talet 11 har just lagts isär i 8+3 (svart markerar röda och rutning markerar gröna lappar). Tiotalsövergången ligger tydlig. Locket hålles i önskat läge av en gummisnodd.

effekt. Talbilder med kvadratisk gruppering har sina prickar eller rutor såsom hörn på kvadrater, skilda åt genom större avstånd. De läses av från vänster till höger liksom vanlig text. Varje talbild ingår som en lätt igenkännlig del i varje efterföljande. En sådan talbild är klar, enkel och rationell. För att få de lösa delar, som barnen arbetar med, att foga sig in i en sådan bestämd och städse återkommande form, har jag konsekvent använt *Hand och Öga.*[1]) *Men man kan reda sig med lösa lappar enbart, om man bara linjerar upp en pappskiva med den önskade grupperingen ovh låter varje barn få en sådan skiva.* Den bör ha plats för två »tiotalsstugor» — se bilden av Hand och Öga!

Säkerligen är det klokt, att man har *ett* slag av åskådningshjälpmedel, som man återvänder till vid varje tal. Utflykter, omväxling och varjehanda roligheter är bra och önskvärda, men räknefärdigheten är i hög grad beroende av konsekvens. Detta är anledningen till att barnen *ritar sina talbilder* i arbetsboken så, att de alla är likformigt byggda. Utgångsbilder, som man själv ritar, och tillämp-

[1]) Sjöholm: *Hand och Öga,* åskådningshjälpmedel för den första räkneundervisningen. Nr 1 för barnen, första skolåret, nr 2 för läraren att användas för ledning av barnens arbete på nr 1 vid omedelbar undervisning. Nr 3 (Barnens räknelåda) för andra skolåret. Skriv- & Ritboks AB, Arlöv.

ningsbilder, som barnen ritar i sina arbetsböcker, kan däremot vara olika, så att omväxling kommer att bli förenad med fasthet.

Den dekadiskt ordnade *talraden*, streckraden, enligt Haase (se s. 31 o. f.), ritar man på tavlan eller på spännpapper, allt efter som den genom den fortskridande behandlingen av talen i talserien växer till i längd. Det kan vara bra att ovan streckarna för de enskilda talen skriva talens namn: Den 1:e, den 2:e, den 3:e osv., så snart barnen börjar med siffrorna.

De många *tillfälliga åskådningshjälpmedel*, som det kan vara lämpligt att tillgripa, när någon händelse gör dem aktuella, behöver knappast redovisas här. Omväxling är bra, men lirka även det tillfälliga in i regelbundna former, när det kan ske osökt, och vänd tillbaka till standardhjälpmedlet.

För skriftliga övningar har vi *övningsböcker*. Att övningsböckerna är *rutade* är nästan nödvändigt. Annars kan siffrorna inte få rättning och hållning. Rutorna gör det också lätt för barnen att rita talbilder och andra figurer med enkla enheter (prickar, ringar o. d.)

För teckning behövs *vanlig teckningsmateriel*.

Ingår i teckningsmaterielen inte *färgpennor*, bör de skaffas för räkneundervisningen, t. ex. blå och röd (finns också på en och samma penna). När barnen ritar talbilder, blir tydligheten så ofantligt mycket större, om de med olika färger kan markera talets olika delar. Och hur god effekt har inte den enkla åtgärden att rita ramen kring tiotalet med rött! Barnen brukade kalla sådant tiotal för tiotalsstugan, och den röda ramen gjorde den till den röda stugan i Smålandssången.

Sax, *klippningspapper* och *centimeterlinjal* ingår redan i utrustningen för arbetsövningar och gör naturligtvis sina tjänster här också.

Våg och vikter, litermått och *decilitermått* ingår i materielen för iakttagelseövningar i de första skolårens sakundervisning och är ovärderliga för räkningen också.

»*Tiotalsstugor*» (talbilder av 10, tryckta på lösa kartonger), *räknemynt* och *talserier*, tryckta på pappremsor för isärklippning för multiplikationstabellens inövande, har vi använt i den form de har i Hand och Öga nr 3.

* * *

En senare utkommen materiel, som jag inte fick tillfälle att pröva i klass men om vars användbarhet man lätt kan övertyga sig, utgöres av *räknespel*, läggmateriel, läggspel, räknepussel eller vilket sammanfattande namn de kan komma att få. Magda Carlson kallar sitt spel *Räknemästaren* (Svensk Läraretidnings förlag). När barnen löst räkneuppgifterna och lagt lapparna på sin plats enligt det svar de funnit, och när de med pärmens hjälp vänt det hela upp och ner, visar dem baksidans bild, om de har räknat rätt eller inte. Vid rätt räkning har pusslet gått ihop. Hemming Palin kallar sin läggmateriel för *Räkneövning med snabbkontroll* (Konsum, skolmaterielavdelningen). Hos hans spel visar ett sinnrikt uttänkt geometriskt mönster, olika för olika spel, om talen är rätt räknade. — Läggspel av olika typer har värde för individuell träning.

3. Talen 1—10 utan siffror. Talraden. Ordningstal

Den naturliga första gruppen i räkneundervisningen är talen 1—10. Den närmaste uppgiften vid dess genomgång blir att klara barnens uppfattning av talens namn och deras plats i talraden samt att börja utredningen av talens värde.

Enligt Wigforss känner nybörjarna i regel namnen på talorden upp till 10 (s. 16). Vi undersöker det genom att låta några barn »räkna» så långt de kan. Vi ber andra räkna upp talen till och med 10. Vi läser alla som talkör ett två tre fyra osv.

Vi räknar barnen i några bänkrader. Vi räknar rutorna i fönstren. Vi räknar böcker på bordet. Passar det in med läsningen, räknar vi stickorna, som barnen använt för att lägga bokstäver, eller de lösa bokstäver, som de sysslat med. Vi räknar och räknar men avbryter gärna, när vi kommer till 10.

Vi ritar en vågrät linje på tavlan, 1 m lång, vi sätter streck för varje decimeter, och barnen räknar strecken allt efter som de kommer fram. Vi pekar på strecken, och hela talkören räknar upp dem — framlänges, ja det går som en dans, baklänges också? Vi försöker. Vi tittar på strecken och säger talorden, vi blundar — tänk det gick det också. Körläsningen drar även de mest försagda med sig.

Vi tar räknelapparna — vad det blir mycket prat om färg och form och storlek! Och vad det går lätt att tappa dem på golvet! Sådana olyckor är mycket smittsamma. Nej stopp nu! Vi ska räkna, hur många vi har här i asken, åtminstone i dess ena fack. Ungarna är för ivriga med att redogöra för sina upptäckter. Nå, kan ni räkna till er 10 stycken och lägga dem i handen och visa mig? Nå, nå nå. Det är inte nödvändigt att trampa ner mig.

Nu har vi allesamman 10 lappar i handen. Jag med, men så stora mina lappar är! Nu räknar vi, hur många vi har. Vi följs åt och säger varje talord tydligt — men inte skrikigt! Vi lägger dem på bordet, undan för undan. Här var det *en* lapp, *två* lappar, *tre* lappar osv. Det var förskräckligt vad ni är duktiga.

Nu har vi lapparna i våra händer igen. Vi ska hålla reda på dem och därför räknar vi dem än en gång men lägger dem i olika högar. Vi börjar att lägga dem här till vänster på bänken. Vi följs åt. Här var det *en* lapp, *två* lappar, *tre*, *fyra*, *fem*. Stopp! Hur många var det nu vi fick i den högen? Nu lägger vi resten mitt på bordet och räknar — ja vad ska vi börja med? Vi slutade med fem. Nå då är det klart: *sex* lappar, *sju, åtta, nio, tio.* Nej, nu måste vi gå tillbaka och räkna hur många vi fick i första högen och i andra. Kan var och en, eller ska vi ha talkör? Antal högar. Antal i varje. Hur vi har delat upp 10.

Här har jag alla tio i min hand igen. Nu räknar vi dem än en gång men gör uppehåll efter varannan. Och efter varje paus börjar vi på med en ny hög. Undrar hur många högar vi nu kommer att få? Nu startar vi. Börja längst till vänster på bordet. Här börjar jag. Kan vi följs åt liksom i gymnastiken? *En* lapp, *två* lappar — paus — *tre* lappar, *fyra* lappar — paus — *fem* lappar, *sex* lappar — paus — osv. Antal högar, antal lappar i varje.

Nu har vi alla tio i handen igen. Vad vi nu ska göra? Ja säg det! Något mycket svårt. Jaså ni tror att ni inte kan. Jo vad ni kan! Lägg lapparna i asken och bed dem sova gott till i morgon.

Jo, igår hade vi den där talraden upp till tio. Kommer ni ihåg den? Räkna upp talen, när jag pekar på strecken. Framlänges. Baklänges också? Om ni blundar — jo framlänges gick det fint. Men kan ni blunda och räkna upp talraden baklänges?

Och lapparna som vi räknade i går! Och la i olika högar. Nej är det så många som minns det. Vi *låtsar* att vi har lapparna i våra händer, lägger dem på bordet i två lika stora högar och räknar alla på en gång: *en* lapp, *två* lappar, *tre, fyra, fem* — paus — *sex, sju, åtta, nio, tio.* Nu låtsar vi att vi tar en hög i vardera handen. Hur många har jag i *den* handen? I den? Nu låtsar vi, att vi lägger ut dem i flera högar, räknar och gör paus efter varannan: en två — paus — tre fyr — paus — osv.

Vem sitter först i den här raden? Då kan vi kalla Pelle *den förste.* Vem sitter som nummer två? Då kan vi kalla honom — — — (Går det måntro?). *Den förste* och *den andre* kom fram! Hur *många* barn har kommit fram? *Vilka* har kommit fram? — »Pelle och — —» Nähä du. I dag heter han den förste, och Lasse heter den andre. Gå och sätt dig, den förste! Ge dig iväg, den andre! Kan ni tänka er, att kineserna stundom ger sina barn sådana namn som den förste, den andre?

Stina plockar fram den förste och den andre och så en till. Ställ dem i en fin rad. Hur många barn står där? — — Vad heter de? Nej nej. Inte Pelle och Lasse och Nisse. Vi ska ha nummer på dem. Nummer ett, nummer två, nummer tre? Ja för all del. Men den som har nummer ett, kallade vi *den förste,* nummer två hette *den andre.* Vad ska nummer tre heta? — — Bravo Stina. Led den förste till sin plats. Vem ledde du bort? — — »Pel . . . , nej jag menar den förste.» När du har lett bort den förste, *vilka* står kvar? — — Hur *många* står kvar? Led bort den andre och ta den förste med tillbaka och ställ honom på sin gamla plats. *Vilka* står nu här framme? Hur *många?* Skicka den tredje tillbaka till sin plats. *Vilka* sitter på sina platser? Hur *många?* Vem står här framme? Skicka hem honom också!

På motsvarande sätt behandlar man alla ordningstalen t. o. m. den tionde. Hoppas barnen räcker till som åskådningsmateriel! Sen lever vi några dar i ordningstalens värld. Där står en dag alla tio »ordningstalen» uppställda på ett led framför de övriga barnen. Var står den förste? Var står den femte? — den åttonde? — den tredje?

Den förste, den andre, den tredje, den fjärde tar två steg fram. *Vilka* gick fram? — Hur *många* gick fram? Vilka ska gå tillbaka för att tiotalsraden åter ska bli hel? Räkna upp dessa tre bakifrån.

Är tiotalsraden hel igen? Nä det var bra. Ta då bort den tionde, den nionde, den åttonde. *Vilka* tog du bort? Hur *många* tog du bort? *Vilka* står kvar? (Den förste, den andre osv.)

Den förste, den tredje, den femte, den sjunde, den nionde sätter sig på golvet. *Vilka* försvann ur raden? Hur *många* försvann? *Vilka* står kvar? (Den andre, den fjärde osv). Hur *många* står kvar? Tag den sjunde i kalufsen (nej det går kanske inte an att säga så) och lyft upp honom. Lyft upp den tredje osv. — —

Nyss satte sig varannan ner på golvet och vi började med den förste. Nu sätter sig varannan igen, men vi börjar med den andre. *Vilka* satte sig? (Den andre, den fjärde osv.) Hur *många* satte sig? Räta upp den tionde osv.

Tänk om jag då hade kunnat »Tio små negerbarn»!

En annan dag. Först barn och ordningstalen. Sedan:

Här har jag mina tio lappar i handen. Hur kvickt kan ni få era i vänster hand? Vi räknar först efter att vi verkligen har tio lappar (grundtal): Jag lägger *en* lapp på bänken, en till så är där *två*, nu är där tre och fyra, fem och sex, sju och åtta, nio och tio. Stämde det? Vi räknar upp lapparna och lägger dem därvid i två lika stora högar. — i fem högar.

Nu såg vi hur *många* lappar vi har. Nu ska vi höra efter *vilka* lappar vi lägger upp. Vi följs åt. Ni säger alla på en gång namnet på lappen. Jag börjar — följ med mig! Här lägger jag *den första* lappen, här *den andra*, här *den tredje* osv.

Alla tio i handen igen. Här lägger vi den första, den andra, den tredje (avbrott): Vilken skulle komma sen? Ja ja. Där lägger vi den fjärde, och den femte och den — — ja vad ska den heta? Osv.

Sätt fram räknelappsasken. Alla lapparna ska lägga sig att sova. Nu lägger vi ner *den första*, *den andra* osv.

Vad jag hör tydligt barnens röster. Där var *den tionde*. Nu är alla i säng. Sov gott till i morgon!

Men det får nu inte ungarna göra. Man sätter själv sina stora lappar utmed streckraden. Den bör vara ritad 7—8 cm ovan den kritbräda, som brukar finnas nederst på svarta tavlan. Och därför går det bra att sätta lapparna på den, så slipper vi alla dyrbara anordningar. Kanske kritbrädan är så bred, att man kan fälla ned lapparna också (när man »tar bort»). Då kan det bli riktigt trevligt.

Man börjar så nätt själv, och barnen faller in i kören, när de förstår meningen. Här ställer jag den första lappen vid den första strecken, här ställer jag den andra lappen rakt under den andra strecken, nu kommer den — — —, här är det den den den — ja kläm i med *den fjärde*. Där står nu den femte osv. Hela talraden. Vi pekar och läser: Den första, den andra, den tredje — — —. Långsamt och eftersinnande ena gången, fort och mekaniserande den andra. Baklänges också? Den tionde, den nionde, den åttonde: det går lite trögare, men det går. Var står den andra? — den sjunde? — — den tredje?

Ett barn kommer fram och tar bort någon av lapparna; kamraterna ger besked: Nu tog Greta den åttonde — — — nu den andra — — osv.

Man fortsätter själv ett slag: Se här fäller jag det tionde och det nionde trädet. *Vilka* fällde jag? Hur *många* fällde jag. De växer kvickt upp igen. *Vilka* växte upp igen? Hur *många* växte upp igen? Hur många står där nu? Fäll de fyra sista träden osv. (Men aldrig mer än högst fyra bakifrån.)

Fäll de sju första träden. Vilka står kvar? Hur många står kvar?

Nu marscherar mina stora lappar hem till sin stuga. Här kommer de. Vi säger namnen allesamman, allt efter som jag tar dem. Här kom den första osv.

Ja, nu står bara streckraden kvar. Undrar: Vilket träd skulle stått *där?* — — och *där?* Vilket träd skulle stått efter det femte? — Före det tionde? Vilka två träd skulle stått på var sida om det femte? Hur många mellan det andra och det femte?

Och nu: Bort med streckraden också! Å nej, ropa inte för det! Ni ska få se, att den sitter inne i huvudet på er. Blunda! Ja det var ju det jag sa. Blunda och räkna upp namnen på träden, som står vid streckarna! Vem ser dem så tydligt, att han kan räkna upp dem baklänges? Ser ni den femte? Var står den? (Ungefär vid mitten.) Vad heter den som står allra längst till höger? — — till vänster? Nu låtsar vi, att jag har fällt det första trädet, det andra, det tredje, det fjärde, det femte och det sjätte. *Vilka* står kvar? Hur *många* står kvar?

Det är möjligt att det sista provet kom litet för tidigt i denna saga. Jag törs alldeles inte säga, under vilken lektion i ordningen barnen kan bli färdiga med talraden, både grundtalsnamnen och ordningstalsnamnen. Ta det med ro! Vi får komma tillbaka till talraden ofta.

Det är också möjligt att ordningstalen verkar främmande för somliga barn, andra kan kanske känna igen dem t. o. m. från abstrakta sammanhang, t. ex. som datumnamn. Man kan friska upp det och vara litet mer nyfiken på vilken dag och vilket datum det är i dag och i morgon och hela veckan ut.

Troligen kan barnen veckodagarnas namn. Varom inte så lär vi dem. Vi ritar på tavlan söndagen kanske som en stjärna och söckendagarna som ringar. Så står där på nytt en talrad, dock endast till och med sju. Passar det med läsningen, så sätter vi begynnelsebokstäverna till dagarnas namn över stjärnan och ringarna. (Passar det inte, så går bokstäverna faktiskt bra ändå!)

Söndagen är veckans första dag. Vad ska då måndagen kallas? Vilken blir veckans tredje dag? Osv. Det är onödigt att visa vilken lång tråd vi kan spinna av den ulltotten.

Ska vi sticka in en extra lek? Sju barn blir veckans sju dagar. Söndagsflickan kan väl få en stjärna. De står där på estraden i rad och förkroppsligar antalet sju och begreppet sju dagar. Så ska de också ge en bild av ordningstalen. En och en träder fram några steg och läser sin vers — tillräckligt enkel för att inte stjäla lång tid för inlärning.

Jag är söndan med min stjärna.
Kalla mig *den första* dagen gärna.

Jag är måndag, veckans *andra* dag.
Här ska *räknas* tappert. Friska tag!

Jag är tisdag, veckans *tredje* dag.
Här ska *läsas* tappert. Friska tag!

Jag är onsdag, veckans *fjärde* dag.
Här ska *räknas* tappert. Friska tag!

Jag är torsdag, veckans *femte* dag.
Här ska *läsas* tappert. Friska tag!

Jag är fredag, veckans *sjätte* dag.
Här ska *räknas* tappert. Friska tag!

Jag är lördag, veckans *sjunde* dag.
Tack för alla glada dagar i vårt lag!

Ska så äntligen skådespelarna ropas in på scenen och blomsterkransas, så gissar jag, att det kommer att låta så här: Den tredje, kom fram! Den sjunde ska ha en extra applåd. Och därefter bugar sig hela antalet, så att grundtalen skiljer sig från ordningstalen!

4. Talen 1—10 utan siffror

Andra ronden i behandlingen av talområdet 1—10 avser främst att undersöka talvärdet hos de olika talen och att på ett begynnande sätt umgås med deras inbördes relationer.

Vi vill komma åt talbegreppet. Vilket värde har »sju»? Hur mycket större är detta värde än fem? — — hur mycket mindre än tio? Osv. Att undersökningen sker utan siffror, beror på en önskan, att barnen inte ska få vanan att räkna med siffror. Föres siffran för tidigt in i räkningen, så kan den komma att liksom ersätta själva talet: man räknar med siffran och inte med talet. Men alla räkneoperationer blir obegripliga eller ytterligt försvårade, om barnen, innan de förstår tecknens innehåll, laborerar bara med de underliga figurerna. En sjua + en trea, varför ska det resultera i en etta och en nolla? Tänk om vi vuxna huxflux skulle bli ålagda att läsa med de kinesiska ordtecknen!

Det är inte bara vi lärare som kan slarvigt använda termerna tal och siffra. Folk säger, att vi ska lägga samman siffrorna, fördubbla en siffra — vad lång den måtte bli! — ja, t. o. m. räkneböcker har ett sådant uttryck som *siffersumma* (= den som användes för 3- och 9-provet). I ett förnämt arbete av så sent datum som 1948 uppmanas läsaren att multiplicera ett tal med *siffran* 7.

Om det sålunda är möjligt, väntar vi med siffrorna ännu en tid. Hur länge? Nej, det är inte gott att svara på den frågan. Man får ta hänsyn även till skolformen. Utgöres läraravdelning av mer än en årsklass, kan man behöva att tidigare tillgripa siffrorna för de tysta övningarnas skull. I så fall kan man dock lämpligen inskränka övningen till att barnen lär sig att *skriva* siffrorna, alltså inte använda dem som hjälpmedel vid räkneundervisningen.

Rådfrågar man litteraturen på området, finner man, att räknemetodikerna varit eniga i rådet att uppskjuta siffrorna. K. P. Nordlund t. ex. behandlar hela talområdet 1—20, och det med alla fyra räknesätten, stundom med ganska svåra förknippningar, innan han låter barnen använda siffrorna.[1])

[1]) Nordlund: Lärogång etc. s. 14.

Vid läsningen av det närmast följande bör man kanske observera ännu en sak. Vi ville, sa vi nyss, komma åt talbegreppet. Att bygga upp talföreställningar får betraktas som det primära och inlärandet av räkneförlopp såsom det sekundära. Vi kommer att visa, hur vi räknar, och räknar ivrigt, inom alla fyra räknesätten, naturligtvis utan att använda korttermerna för dessa räkneförlopp. Men »räknesätten» blir hjälpmedel vid uppbyggandet av talbegreppen, liksom de blir tillämpningar av vunna talbegrepp. I kursplaner och vid metodisk handledning mötte man förr den föreskriften, att »uppfattning, benämning och beteckning» av tal skulle gå före räkningen. Naturligtvis är det riktigt på ett sätt men kan lätt leda till något som är grundfalskt: att som ett litet moment i det hela betrakta »uppfattning, benämning och beteckning», något som man avverkar med några upplysningar. Saken ligger till helt annorlunda. Uppfattningen av talvärdet kommer till stånd genom att barnen arbetar med det — visserligen knutet till föremål — och inte genom att de ser antalet på en kulram eller som en talbild. Men att arbeta med talvärdet, det är just att räkna. Och det är det vi gör redan nu: barnen tar ifrån, lägger till, delar upp, gör innehållsundersökning, finner talserier, letar rätt på grannar och beståndsdelar. Benämning och beteckning är bisaker, som kommer till stånd under arbetets gång — liksom det sker, när barnen lägger sig till med namn på tingen i omgivningen eller på det nya innehåll, som de möter i vår sakundervisning.

* * *

Räkneorden till och med tio skulle vara klara, när vi slutade första ronden inom detta område. Sannolikt är också värdet av talen ett, två, tre och fyra så klart, att vi knappast behöver göra något mer vid dem. Det skulle i så fall vara för att ordna enheterna i talet fyra.

Talserien på ett, dvs. talen ett, två, tre, fyra, repeteras, likaså ordningstalen den första, den andra, den tredje, den fjärde. Vi ställer fyra barn i rad, fyra föremål utmed streckarna i talraden på tavlan och företar övningar som förut men inom detta avgränsade område. Sedan:

Vi plockar upp fyra räknelappar. Här ser vi, att jag tar mina fyra stora lappar. Tänk om ni skulle ha lika stora i era händer! Då räckte de väl knappast till, händerna förstås. Så, ni har nu fyra. Är det säkert? Vi räknar dem och lägger dem på bänken: En lapp, två lappar osv.

Nu har vi dem i våra händer igen. Nu lägger vi dem på bänken än en gång och ger varje räknelapp sitt namn: Här lägger vi den första, den andra, den tredje, den fjärde. Vi tar dem tillbaka i handen, den fjärde först, sen den tredje osv. och säger deras namn.

Nu har jag delat mina fyra så, att jag har lika många i varje hand. Gör ni det också. Hur många? Jag tar tre i högra handen (ni också) och *resten* i vänstra handen. Jag börjar att berätta, hur vi har dem: Jag hade fyra räknelappar, och jag tog tre i den ena handen och en i den andra. Det var knepigt! Vem kan berätta precis detsamma? Var det så många som kunde det! Dela dem i händerna på annat sätt. Berätta.

De fyra räknelapparna ska grupperas, så att de blir en del av de talbilder, som vi i fortsättningen ofta använder. För att få denna gruppering regelbunden antar vi, att vi använder Hand och Öga. Själv arbetar man med den större apparaten och leder barnens övningar, så länge sådan hjälp är behövlig. Barnen tar sina apparater, drar ut locket, så att de ser klungan av fyra svarta kvadrater. Lockets läge fixeras med ett gummiband, och nu har barnen fyra (och *bara fyra!*) för sina ögon. De ordnar lapparna på de svarta rutorna. Till en början följs vi åt. Alla lägger den röda sidan av räknelapparna uppåt.

Jaha: Här ligger våra fyra lappar. Räkna upp dem med ordningstalen. Var ligger den första? — den fjärde?

Vi vänder den fjärde, så att den gröna sidan kommer uppåt. Är det klart? Jag börjar att berätta: Min fyra består av tre röda och en grön. (Det gör min fyra med! Och min med!) Vi vänder den tredje också. Vem berättar? (Min fyra består av två röda och två gröna) Osv.

Fyra röda ligger på sina platser. Jag tar bort den fjärde. Hur många har jag tagit bort? Hur många ligger kvar? Nu ligger där tre röda. Lägg dit en till. Berätta vad vi gjorde. (Vi hade tre röda och la dit en röd till. Och då fick vi fyra.) Och så vidare med borttagning och ditläggning så långt det går, ja t. o. m. i den formen: jag hade fyra röda lappar. Jag tog bort alla fyra. Då är där inga kvar, eller: Då är där noll kvar.

Fyra räknelappar på sina platser som förut. Vi följs åt. Fall in i talkören, när ni förstår, vad jag menar. Jag tar en lapp *en* gång, jag tar en lapp *två* gånger. — — *tre* gånger, — — *fyra* gånger.

Lägg dit dem igen. Ta en åt gången. Hur många gånger fick ni lägga dit en lapp?

Följ med mig igen. Jag tar *två* lappar *en* gång, jag tar två lappar *två* gånger. Och så var de slut!

Lägg dem tillbaka och ta två åt gången. Hur många gånger fick ni ta dem? Och när ni tog två lappar två gånger, hur många fick ni då?

På tavlan ritar vi impulsbilder för barnens teckning: fyra blommor, fyra träd, fyra barn (gärna som stickfigurer), fyra hästar (likaledes som stickfigurer). Barnen får till uppgift att rita någon av fyragrupperna, vilken de vill. Och är lyckan god, hör man barnen småprata: Nu har jag ritat två blommor, nu ska jag rita den tredje. När gruppen är färdig, redovisar småttingarna för sitt arbete och berättar räkneförlopp. Greta kommer med sina blommor. Jag har ritat fyra blommor. Gömmer jag en, så kan jag se tre. Och så vidare.

En annan dag är det femmans tur. Den får motsvarande duvning — ha inte för bråtti! Gör som vi lär och inte som vi lever, eftersom vi här hoppar över femman.

Sexans dag är inne. Den svarta talbilden ligger där färdig och fylles med röda räknelappar av små kvicka händer.

Vi följs åt till en början, vänder på den sjätte och berättar: Min sexa består av fem röda och en grön. Vänd på den femte också: Min sexa består av fyra röda och två gröna. Osv.

Ni kan säkert själva lägga er sexa i två färger. Lägg den hur ni vill och berätta. Jag börjar! Min sexa består av tre röda och tre gröna. Pelle berättar och Lasse och hela raden.

Vi ska se, om jag kan ha tre färger i min sexa. Vi följs åt först. Två röda, två gröna, två gula. Och vi berättar alla: Min sexa består av två röda, två gröna och två gula. Hur många tvåor blev det egentligen?

Var och en lägger sin sexa med tre färger och berättar sen. Jag går omkring och tittar. Ni är väl snälla och berättar, hur ni har lagt dem, när jag hinner fram till er?

Sex röda lappar i handen. Vi lägger dem på bordet och räknar upp dem med deras ordningsnamn. Här lägger jag den första, här kom den — — osv.

Sätt asken till vänster och lägg locket till höger. Asken är Hans, och locket är Greta. Nu ska Hans och Greta dela sex äpplen. Vi låtsar att våra lappar är äpplen, förstås. Kom med i kören, när ni förstår vad jag menar. Jag ger Hans *ett* äpple (lägger en lapp vid asken) och Greta *ett* äpple (lägger en lapp vid locket). Hur många har vi nu delat ut? Nu ger jag Hans ett äpple till och Greta ett äpple till. Hur många har de vardera? Hur många har vi delat ut? Räcker de, som vi har kvar, till ännu ett äpple till vardera? Nå då ger vi Hans och Greta var sitt. Sammanfattning av resultatet.

Hans och Greta makar sig ihop, så att det blir plats för en penna till höger om Greta. Pennan det är Stina. Samma handlande likadelning i tre delar med namn och allting.

Sex räknelappar på bordet. Vi tar två varje gång och räknar hur många gånger vi kan ta två ur sex: Jag tar två *en* gång, *två* gånger osv.

Samma innehållsundersökning med tre varje gång.

Räknelapparna försvinner. Tallinjen med sina streckar på tavlan. Sex stora räknelappar (eller andra föremål) sättes under de lodräta streckarna. *Vilka* blommor (eller vad vill kalla ställföreträdarna för i dag) står där? (Den första, den andra osv., alltså ordningstal.) Hur *många* står där? (Uppräkning med grundtal, om det behövs, annars direkt: sex.)

Den sjätte och den femte går bort (man fäller ner dem). *Vilka* står kvar? Hur *många* står kvar? De fyra första går bort. Vilka? Hur många? Ännu fler kombinationer.

Här står tre. Hur många fattas i sex? Här står tre. Lägg till två. Ännu fler additioner.

Ser ni streckraden inom er? Vi blundar och klappar händerna ett slag för varje tal upp till sex.

Vi klappar händerna och klämmer hårdare till på varannan. *Ett* två, *tre* fyr, *fem* sex. Samt: *Ett* två tre, *fyr* fem sex.

Sjuans dag kommer, och åttans och nians. De kommer och försvinner. Och varje tal är lika roligt. Vad det fanns många tvåor i åttan och treor i nian! Och precis två fyror visar talbilden av åtta. Nian hade också två fyror men dessutom en etta. Kanske den fjärde färgen får vara med och bygga upp så stora tal. Vad det då blir mycket att berätta om!

Tians stund är inne.

Tio räknelappar i händerna. Vi får väl kontrollera, att vi har rätt *antal* alla. Så vi räknar dem med våra grundtal: ett, två, tre osv., och lägger ner en lapp på bänken för varje tal. Det stämde. Det är ganska mycket, de här tio lapparna. Jag kunde nätt och jämnt hålla dem i en hand.

Nu plockar vi tillbaka lapparna och säger namnen på varje lapp: Här tar jag den första, nu tar jag den andra — ja ja, kom med i talkören! — nu tar jag den tredje, och nu tar jag den — — —

Här har vi tio i handen — nej, tappa inga! Och nu ska vi dela dem till Hans och Greta, så att de får lika många. (Ska asken vara Hans och locket Greta nu igen?) Vi ger Hans den första (kom med!) och Greta den andra, Hans den tredje och Greta den fjärde. — Hur många har de nu fått? — Och Hans får den femte och och — — —. Hur många fick Hans, och hur många fick Greta? Var det rättvist? I hur många delar har vi delat tio? Hur många blev det i varje del?

Lägg Stina till höger om Greta. (Ska pennan vara Stina nu igen?) Och så delar vi ut våra äpplen. (Men det är ju bara lappar vi har!) Ja, så delar vi ut våra lappar då, delar ut dem till tre stycken. Kom med i talkören! Jag ger Hans den första, Greta den andra, Stina den tredje. Och Hans — — — och Stina den nionde. Och så fick vi en kvar! Vem ska ha den? Greta ska ha den, tycker ni flickor, Hans, tycker ni pojkar. Men alla tre skulle ju ha lika många? Ska då Hans — nej det är orättvist. (Ja' vet, ja' vet. Vi kan dela den tionde i tre delar.) Ja, det hade vi kunnat, om det hade varit äpplen, som vi hade delat ut. Men inte ska vi bryta sönder räknelappen! Nu får vi säga så här: När jag delar 10 i tre delar, blir det tre i varje del, och så blir det en över.

Det är för besvärligt att hålla tio lappar i handen. Vi måste lägga dem på talbilden för tio i Hand och Öga. Lägg ni dem på er apparat, så lägger jag mina stora på min apparat. Undrar vem blir först? Jag har så stora lappar, så jag blir nog Jumbo. Nå, där ligger de tio i en vacker talbild. Vi behöver bara titta på den, så ser vi, vad tio består av. (Min tia består av två fyror och en tvåa, min tia består av fem tvåor.) Just det. Det var det allra lättaste. Nu lägger vi tio i två färger, och berättar vad tian då kommer att bestå av. Berätta berätta, berätta!

Och nu kanske vi vågar oss på att lägga tian i fyra färger. Jaha. Jag kunde: Min tia består av fyra röda, fyra gröna, en gul och en blå. (Det var för lätt!) Lägg ni svårare. Jag kommer och tittar. Passa på att berätta.

Nu ordnar vi våra lappar, jag här och ni där, precis som var och en vill. Sen kommer ni i tur och ordning hit och berättar, hur lapparna ligger. Då gäller det! Inte glömma talen på vägen hit. Jag börjar. Jag får väl gå ner till skåpet och ställa näsan mot väggen, så att jag inte kan se, hur jag har lagt dem, inte se, bara minnas. Men ni ser efter, om jag säger rätt — — — Jaha. Nu försöker jag: Min tia består av 5 röda, 3 gröna och 2 blåa. (Fel, fel, fel!) Då får jag se en gång till. Jaha. Nu försöker jag igen. Min tia består av 5 röda, 3 gröna och 2 gula. (Rätt.) Nu fortsätter Pelle. Sen rad upp, rad ner. — Hur levande står inte allt detta för mig! Barnens iver ger skärpa åt vad de gjorde och vad de såg.

Nu ligger där tio lappar igen, och vi låtsar, att de är äpplen. Vi ska se, hur många barn de räcker till, när vi delar ut dem på olika sätt. Först vill vi vara schangtila och ger tio äpplen på en gång. Hur många räcker de då till? Sen blir vi snåla och låter var och en få bara ett äpple. Hur många räcker de då till? Nu ger vi bort fem äpplen varje gång — det är bäst vi tar dem i hand, fem åt gången. Var så god, Hans, här får du fem äpplen. Var så god, Greta, här får du fem äpplen. Hur många räckte nu tio äpplen till? Kan ni lura ut. hur många barn tio äpplen räcker till, om de får *två* vardera? Går det inte, så tar vi två åt gången och delar ut.

Tio »äpplen» ställda vid streckarna på talraden. Hur många står där? Vi räknar upp dem med deras namn: den första, den andra, den tredje — — — Vilka står efter den sjunde? Vilka står på var sin sida om den nionde? Vilka står mellan den femte och den åttonde?

Ta bort, och berätta vad som är kvar: Jag tar bort den tionde, den nionde, den åttonde och den sjunde, hur många är kvar? Är det fler än fyra, tar vi bort framifrån: Jag tar bort den första, den andra — — den sjunde, hur många kvar?

Lätta sammanläggningar, utförda i handling: Ställa upp sju (de sju första) lägga till två, varvid vi redovisar förloppet så: Vi hade sju äpplen, och vi la till två, nämligen det åttonde och det nionde, alltså har vi nio. De stora talen sättes alltid först. Hade vi utfört samma uppgift på talbilden (7+2), hade barnen sannolikt sett svaret utan att behöva räkna sig till det. Men det är bara bra, att barnen också vänjes att räkna sig fram till ett svar, dels därför att barn är av olika föreställningstyp: somliga minns bäst vad de har sett, andra vad de har hört, alla minns bäst, om de får både se och höra och — göra!

Vi har inte påmint om teckningsuppgift efter impulsbilder, sen vi var vid fyran. Men det är klart, att sådan arbetsövning stickes in på lämpligt ställe vid varje tal. Om det ska ske vid slutet av behandlingen, eller om vi ska sticka in det mitt i det dramatiska förloppet, ja, det får bero på hur barnen reagerar vid den mera muntliga (dock med handling förbundna!) genomgången. Min egen erfarenhet har visat mig, att det inte är den ringaste svårighet att hålla barnens intresse på högspänn under en hel lektion med denna handlande räkning. Men det är ändå klokt att låta intrycken mogna och stabilisera sig genom individuella teckningsuppgifter. Det är säkert bäst att låta barnen rita sådant som föreställer något, gärna ordnat så att grupperingen påminner om talbilderna, dock utan att man håller för strängt på noggrannheten i grupperingen. Den mera exakta grupperingen kommer, när barnen i tredje ronden börjar använda räkneböcker och skriva siffror. Rutorna i räkneböckerna gör det lättare att få ordning på elementen.

5. Talen 1—10 med siffror

I tredje ronden tänker vi fortfarande på att talbegreppen aldrig kan bli för klara och att det därför kan behövas ännu fler övningar, för att barnen ska inse och kunna föreställa sig de tio talens värde och talens lek med varandra i det som vi kallar räknesätt. Men därtill kommer siffrorna och räknetecknen och de korta räkneuttrycken. Det finns alldeles tillräcklig anledning till en tredje rond.

Förut har vi sagt namnet på varje tal. Och nu är ni, barn, så långt i läsning och skrivning, att ni nog också kan skriva och läsa somliga tal, om jag skriver dem med bokstäver. Ska vi försöka? N i o. Kunde väl tro, att det var alldeles för lätt för er. Ordet nio är inte långt, men det består i alla fall av tre tecken (bokstäver). Hur många tecken får vi använda, när vi skriver så här: F y r a ? Säger vi fyra äpplen, så menar vi precis lika många äpplen som det är bokstäver i det ordet. Knepigt, säger ni, ja det var det. Om vi skulle kunna hitta fler *talord*, som har lika många bokstäver som det *antal* äpplen, som det betecknar? Säg talens namn tyst för er själva, och känn efter hur många ljud varje talord har. Den som hittar något, kommer hit och viskar det i mitt öra. Jaha. Det var verkligen några barn som hittade rätt på ett till. Kan det finnas fler tal, som har sådana namn? Vi följs åt och känner efter. Ni säger nej, om det inte passar, och ja, om det passar: Ett (nej!), två (nej), tre (ja!), fyra (ja!), fem — Det passade sålunda bara på två namn av alla nio.

Skulle vi alltid skriva talens namn med bokstäver, så blev det jobbigt, redan med talen ett till tio. Och tänk, när vi skulle skriva stora tal: Nittonhundrafyrtionio! Det var då för väl, att någon mänska hittade på särskilda tecken för talen.

Tecknen för ljuden i orden kallar vi bokstäver, och tecknen för talen kallar vi *siffror*. (Jag kan många siffror! Jag kan en som ser ut som en stol som stå med benen i vädret. — — och ja' kan en som — —.)

Ettan och tvåan

Talet *ett* låter vi bli representerat av en rund, fylld, röd ring, så stor, att den fyller rutan på bredden. Vi gör lite affär av teckningen i början, så att barnen får tekniken för talbildsteckning in från början. Det går så mycket fortare sen. Bredvid talbilden av ett skriver barnen siffran 1 ett par tre rader. Under det barnen lär sig siffrorna, skriver de dem så höga, att de går från tak till golv i rutorna. Likaså ger vi bestämda besked om avstånd — högst så tätt som i varannan ruta. Barn har stor benägenhet att packa siffrorna, när de blir äldre och ska räkna med uppställning. Vad vi kan göra för att från början vänja dem vid tydlig sifferskrivning, det ska vi också göra.

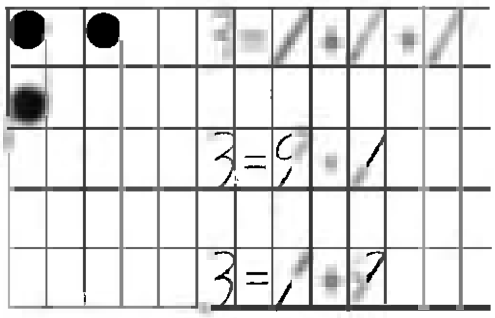
Vid tvåan möter den första verkliga svårigheten att rita talbilder. Barnen och jag kom till sist fram till denna form: Vi hänger den första pricken i taket på första rutan och lägger den andra pricken på golvet i den andra rutan. Så:

Tvåan är så pass svår att skriva, att det kanske är lika så gott att inte införa något plustecken, minustecken eller likhetstecken för de små räknetal, som annars nu skulle kunnat skrivas. I stället får barnen träna skrivningen av tvåan så mycket flitigare. Tvåan blir lättast att skriva, om vi påvisar, att mellanstycket är en etta, och att vi bara hänger en ring upptill och vimpel nertill.

Treans talbild och treans siffra

Talbilden får vi snygg, om vi först ritar tvåans talbild som förut och håller styvt på att vi hoppar över en ruta och hänger tredje ringen i taket på nästa ruta.

Jag vet, att det inte är farligt att nu införa räknetecknen också. I första omgången blir det +, — och =. För egen del använde vi dessa tecken vid isärläggning i termer av talet. T. ex.: vi ritar ny talbild av tre med en röd, en grön och en svart (eller blå) ring. Barnen ser de tre enheterna och *inser*, att tre är detsamma som ett och ett och ett. Att då förklara betydelsen av = och + möter inte den bittersta svårighet. Det första tecknade räkneförloppet skulle sålunda komma att se ut som bilden visar.



Barnen är genom föregående handgripliga övningar vana att också lägga tre i sär i termerna 2+1 och 1+2, varför man kan fortsätta omedelbart med dem. Att låta de båda grupperna byta plats står ju i bästa överensstämmelse med likhetstecknets mening. Därför kan man i en spalt bredvid låta barnen skriva $1+1+1 = 3$

$$2+1 = 3$$
$$1+2 = 3$$

Och därmed är vi inne på ett av de traditionella räknesättens skrivning.

Det går säkert bra att nu också införa minustecknet. Vi kan, om vi vill roa oss och barnen, rita tre äpplen, ordnade som talbilden, och vid sidan om dem skriva en trea, korsa det sista (vi åt upp det!) och skriva —1 efter trean, så har vi den första tecknade subtraktionen $3-1 = 2$.

Fyrans talbild och fyrans siffra

a. Säkert bra med en kort repetition av fyrans talvärde.

b. Att rita talbilden och därbredvid skriva siffran 4. Den tar en del rader, innan den blir bra.

c. Att lägga fyra isär i termer. Fyrans talbild är så lätt att rita, att man gärna kan åskådliggöra de tre fallen med ny talbild för varje, varvid de båda termerna i talbilden utmärkes med *olika färger*, t. ex. grönt och rött. Så:

○○ ○● $4 = 3+1$
○● ○● $4 = 2+2$
○● ●● $4 = 1+3$
$4 = 1+1+1+1$
$4 = 2+1+1$
$4 = 1+2+1$

Här och i fortsättningen betecknar ofylld ring en färg, fylld ring en annan. Barnen bör inte rita bara ringar utan ständigt fylla dem.

d. Att låta barnen skriva additions- och subtraktionsuppgifter och räkna ut dem utan att nya talbilder ritas. Man skriver före på tavlan, till en början så att klassen följs åt, för att vi ska kunna övertyga oss om att barnen placerar siffrorna rätt i rutorna, vi skriver bara på varannan rad, — allt sådant småtrivialt ber jag om ursäkt för att jag påminner om; men jag har en levande erfarenhet av hur betydelsefulla de första grunderna är. De fall, som kan komma i fråga, är väl närmast följande.

2+2 =	4—1 =	4 = 3 + ?
3+1 =	4—2 =	4 = 2 + ?
2+1 =	3—1 =	4 = ? + 3
1+3 =	4—3 =	
2+1+1 =	4—1—1 =	
1+2+1 =	4—2—1 =	
1+1+2 =	4—1—2 =	

Barnen skriver i spalter. Visar vi dem så här grundligt några gånger, kan vi snart släppa dem lösa. Då kan man skriva upp uppgifter, som alla ska räkna, t. ex. att lägga i sär i två termer, och sen låta de snabbare få andra uppgifter, t. ex. att lägga i sär i tre eller flera termer. Eller: de obligatoriska uppgifterna omfattar additioner och subtraktioner med två termer och fyllnadsuppgifterna motsvarande räkningar med flera termer. Det är påfallande, vad barnen snabbt blir skickliga i att hitta på »tal» själva. Efter fyran eller femman brukade barnen i huvudsak klara de obligatoriska isärläggningsuppgifterna själva, och efter de obligatoriska sammanläggnings- och frändragningsuppgifterna skrev de massor med tal »som jag själv hittat på», såsom talesättet ofta blev. Här skymtar en princip, som jag tror är betydelsefull: De skriftliga uppgifter, som barnen ska lösa var för sig och på egen hand, ska alltid vara lätta, lättare än de som förut behandlats muntligt. Barnen ska från första början känna, att de skriftliga övningarna — träningsuppgifterna —

är roliga, och den känslans viktigaste förutsättning är att uppgifterna är så lätta, att de går raskt undan. Annars får barnen »komplex», en företeelse som jag sett för mycket av för att negligera faran — namnet betyder alldeles ingenting, saken är en realitet.

Femman och femmans siffra

a. Uppräkning och ordningstal i anslutning till föremål vid streckraden på tavlan.

b. Övningar med lapparna ordnade till talbilder. Min femma består av fyra röda och en grön, min femma består av — — —. I min femma finns det fem ettor, — — — två tvåor och en etta, — — — en trea och en tvåa, — — — en fyra och en etta. Om jag har fem och tar bort — — —,

Om jag delar fem päron mellan Hans och Greta — — (var inte rädd för svaret $2\frac{1}{2}$!).

c. Här ritar jag en talbild för femman på svarta tavlan. Här ritar jag den första ringen (kom med i talkören!), den andra, den tredje och den fjärde. Här gör vi paus. För här ska vi hoppa över dubbelt så stort avstånd som annars. Det blir två rutor i era böcker. Här kommer så den femte. Vi säger deras namn, när jag pekar på dem: Den första, den andra osv. Baklänges också!

Nu tar jag pekpinnen och lägger den mellan fyran och ettan: °° | ° Vi läser: Fem består av fyra och ett. Nu på sned så här: Fem består av tre och två. Nu mellan tvåan och trean, och vi läser så: Fem består av två och tre. Vi kan lägga den på sned en gång till och läsa: Fem består av ett och fyra.

Denna enkla övning med talbilden och pekpinnen har jag tyckt vara alldeles förträfflig, när man klassvis går igenom ett tal. Isärläggningen kommer snabbt fram. Uppgiften är lätt, så att det blir fart över barnasvaren. Det blir en smula exercis, det medges gärna. Men sånt kan också behövas. Vi ska inte vara rädda för att träna barnen i att snabbt uppfatta ett värde och finna en lösning. Vi behöver bara tänka på vad det innebär av förlorad tid och säkerhet, när barnen sitter och nickar för varje ental, som de ska lägga till eller dra ifrån, eller räknar på fingrarna. Säkerheten beror bl. a. på intim förtrogenhet med de små talens värde och deras relationer till andra tal.

Pekpinnen bort, i bokstavlig mening. En pappskiva fram, ungefär en meter lång och lite bredare än den talbild som vi brukar rita på tavlan. Och så:

Ja, här har vi vår femma. Nu täcker jag över en del av den. Ni säger hur många ni ser och hur många jag har gömt. Vi ser fyra, vi har gömt en. Vi ser två, vi har gömt tre osv. En otroligt bekväm väg att snabbt få träningsuppgifter för fråndragning.

Bort med pappskivan. En kritbit. Sedan:

Jag ritar streck mellan ringarna i talbilden på alla möjliga sätt, och ni talar om vad femman då består av. Här var första strecket mellan fyran och ettan. Femman består av fyra och ett. Och så vidare!

Någon gång kommer den stunden, då man ritar strecket mitt över den femte ringen. Då har man förstås tidigare genom handling visat, hur av ett äpple kan bli två halva äpplen, hur en pappersremsa delas mitt itu och vad varje del då kallas. Barnen är så förtrogna med halva kakor och halva smörgåsar, att vi knappast bjuder dem något nytt. Det nya skulle vara, att vi i den första räkneundervisningen drar in s. k. bråklära. Men det kommer så naturligt och självfallet som helst. När vi hade fem äpplen (lappar) och delade ut dem till Hans och Greta, fick vardera två hela äpplen och hälften av det femte. Så klart. Tänk om vi nu oförmedlat ritar strecken över den femte ringen! Vad då?

Ann-Mari svarar utan betänkande: Femman består av fyra hela och två halva. Men det var också samma Ann-Mari, som en annan gång förbluffade mig med ett nytt namn på sjättedelar. Vi hade vårt äpple uppritat på tavlan, stort och frodigt och delbart. Jag hade ritat mittstreck, och barnen hade talat om halvor. Jag ritade två streck, och vi fick tredjedelar. Och vi fortsatte samspråket: Skulle vi råka att få fyra delar, så skulle de heta fjärdedelar, och de fem delarna skulle kallas femtedelar. Jag hade just följt raden, så att barnen i tur och ordning hade berättat om vad de såg. Anna-Mari var närmast i tur att få »frågan». Vi hade strax förut haft tre tredjedelar. Jag ritade en streck på tvären över tredjedelarna och tittade på Ann-Marie. Hon hajar till, samlar sig, svarar: Vår femma består av fyra hela och sex halva tredjedelar! Ordet sjättedelar hade vi inte haft användning för — hon skapade själv ett namn. Så långt gick vi annars inte i det dagliga arbetet. Men uppdelningen i halva förekom ganska regelbundet vid analysen av talvärdena.

d. Bort med den uppritade talbilden också. Blank tavla. Inga lappar i händerna. Ingen talbild att se på. Ingen talrad. Men:

Om jag blundar, kan jag se precis talraden framför mig. Där har vi skrivit en nolla, där står en etta vid den första strecken, där — — (Ja, ja, där står en tvåa vid den andra —).

Och vet ni, jag kan också se talbilden inom mig. Jag ska försöka att rita den i luften. Se efter om jag gör rätt. Här sätter jag den första ringen, under den sätter jag den andra. Jag hänger den tredje i taket och lägger den fjärde på golvet nedanför. Och så hoppar jag över två rutor och ritar den femte. Var det rätt? Och vem ritar femman i luften och blundar med *båda* ögonen? Det var många det!

Nu prickar vi hål i luften allesamman: Den första, den andra, den tredje, den fjärde, den femte. Slå bort den femte. Hur många kvar? Sätt dit den femte igen. Slå bort den femte, den fjärde, den tredje. Hur många sitter kvar? Osv.

e. Ännu en enkel men effektiv övning må omnämnas. Vi brukade ta den tämligen regelbundet vid varje tal. Den vädjar till barnens förmåga att föreställa sig värdet av de olika talen, en förmåga som den förut skildrade allsidiga behandlingen av talen ständigt eftersträvat.

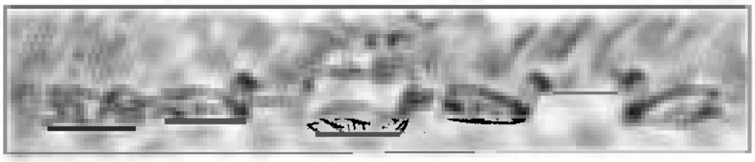
Här har jag fem räknelappar[1]) i min hand. Jag tar förstås de små, så att jag kan gömma dem inne i handen. Jag låter dem falla på bordet en efter en, och ni räknar dem, så att ni ser att det verkligen är fem. Vi följs åt: En, två — — fem. Det stämde. Nu tar jag några i *den* handen och några i den. Och nu blir det er uppgift att säga, hur jag har delat dem. Den som säger rätt, får komma fram och fortsätta räkneleken.

Vilken iver! Barnen tar man gärna i tur och ordning, rad efter rad, så att vartenda ett måste ta ställning till den viktiga uppgiften: I vilka två termer kan man lägga fem isär? De hänger till en början så fast vid de två termer, som de själva har tänkt ut, att de inte märker, om en kamrat nämner just dem och får dem förkastade. Så småningom vänjer de sig vid att lyssna på kamraterna, att lägga märke till vilka termer de nämner, och att själva ha alternativ till hands. Den lycklige vinnaren kommer fram, får lapparna och — kryper under bordet, för att ingen ska se hur han fördelar femman, sträcker fram armarna: Jag har några i *den* handen och några i den. Vem var det som skulle börja?

f. Om så mycket omedelbar undervisning kan tas i sträck eller om man ska avbryta den med någon arbetsövning, går inte att generellt säga. Så länge barnen är

[1]) Knappar, nötter, småkulor etc. kan vara ännu bättre.

ivrigt med vid den omedelbara undervisningen, så ger den nog barnen den bästa träningen. Brister uppmärksamheten, är det meningslöst att fortsätta med hela klassen. Då ritar man kanske något och hittar på en vers och låter barnen göra räkneberättelser, t. ex.



SE HÄR SIMMAR ÄNDER FEM.
DET ÄR LÄTT ATT RÄKNA DEM.
OCH DE SIMMAR PAR OM PAR.
EN DOCK INGEN MAKA HAR.

Teckning: *A. Hjelm.*

Den obligatoriska arbetsövningen blir som förut att rita talbild och skriva de räknetal, som talbilden skänker gratis.

○○ ○
○○

5 = 4+1	4+1 =	5—1 =
5 = 3+2	3+2 =	5—2 =
5 = 2+3	2+3 =	5—3 =
5 = 1+4	1+4 =	5—4 =

Fyllnadsuppgifter:

5 = 1+1+1+1+1	1+1+1+1+1 =	5—1—1 =
5 = 2+2+1+1+1	2+1+1+1	5—2—1 =
osv.	osv.	osv.

Sexans värde, talbild, siffra
Sjuans värde, talbild, siffra
Åttans värde, talbild, siffra

Det blir nödvändigt att hoppa över några tal igen. Men vi går ut från att de överhoppade talen får en lika grundlig behandling som femman, ja de tar t. o. m. längre tid, ju större de blir, eftersom antalet övningsuppgifter växer med talens storlek. Glöm inte heller att låta barnen rita en eller annan gruppbild och göra räkneberättelser i anslutning till den: Sex fåglar som simmar, sex ljus som glimmar, sju bilar som kilar, åtta båtar som seglar[1]). De regelbundna övningarna vid talraden och med räknelapparna är dock huvudsaken.

Vid sexan har vi särskilt observerat, att den har tre tvåor och två treor och att alla delningar till Hans och Greta samt till Hans, Greta och Stina har gått jämnt upp. Sjuan har i det fallet bjudit på svårigheter, och vi måste tillgripa halvor och tredjedelar för att kunna skipa rättvisa. Vid åttan har vi särskilt lagt märke till de många tvåorna, och talserien 2, 4, 6, 8 blev den första utantilläsningen (frånsett talraden, som kan betraktas som talserie på ett). Vid åttan hade talkören ofta anledning att säga: Jag tar två lappar *en* gång, två lappar *två* gånger, två lappar *tre* gånger — ja, hur mycket blev tre gånger två? — två lappar *fyra* gånger — och hur mycket blev fyra gånger två? Därmed lade vi första grunden för multiplikationstabellen på två — den var ju intet annat än en upprepad tilläggning av två — och uttrycket »gånger» kom naturligt in bland de korta räkneuttrycken. Huruvida man också ska införa gånger- och delningstecken redan nu, är mycket omtvistat. Förf. har för egen del gjort det, och barnen fann det naturligt, eftersom de hade bokstavligt upplevt själva saken, upplevt den i handel och vandel.

Ett enkelt hjälpmedel införde vi för frândragningsövningar och för annat utnyttjande av talbilderna. Barnen

[1]) Förebilder för lärarens teckning av impulsbilder finns t. ex. i Sjöholm: *Arbetsövningar i räkning I, II.*

klippte till en liten täckskiva, som i storlek passade till de talbilder, som de ritade i arbetsböckerna. Sen kunde var och en utföra undersökningen så: Jag hade sex, jag gömde

en. Då är där fem kvar. (Bilden.) Helst brukade barnen säga: Jag har sex, jag tar bort en. Då har jag fem kvar. Termen »ta bort» vädjar starkare till det konkreta förloppet än »minskat med». När barnen sedan hittade på tal själva, tog de ofta täckskivan, la den över en del på någon av de ritade talbilderna och skrev in vad de såg.

Nians talvärde, talbild och siffra

För att få översikt och på ett ställe ha tillgängligt alla de olika bearbetningsformer, som kan komma ifråga vid behandlingen av de enskilda talen, sammanför vi dem här och försöker få en logisk ordning på dem enligt den självklara regeln: från det konkretare mot det abstraktare. Det ser mycket ut. Men allt ska inte tas på samma lektion, och inte heller behöver man ta allt vid varje tal.

A. Muntligt-handgripligt: omedelbar undervisning; hela klassen.

I. Att se och handla. Vi räknar med stöd av åskådningshjälpmedel, som varje barn handskas med. Läraren leder arbetet med hjälp av motsvarande åskådningshjälpmedel i stort format.

a. Undersökning och räkning endast enligt platsen i talserien.

Nio räknelappar i handen. Vi lägger ut dem på bänklocket i *en* rad, liksom jag har ritat streckraden på tavlan. Vi ger lapparna namn efter hand som vi lägger ut dem. Vi lägger den första, den andra, den tredje — — — den nionde.

Vi tar upp dem i vår hand igen, en åt gången, bakifrån: Jag tar upp den nionde, den åttonde — — den första.

Jag lägger ut dem i rad igen men tar tre varje gång och lägger dem i grupper, alltså med ett litet avstånd efter varje trea. Vi ger dem namn: vi lägger ut den första, den andra, den tredje — paus — det var *en* trea. Nu fortsätter vi med den fjärde, den femte, den sjätte -- paus — det var *två* treor. Och så till sist: den sjunde, den åttonde, den nionde det var *tre* treor. När vi vill uttrycka det riktigt fint, så säger vi: Nio innehåller tre treor. Det låter fint, men det var väl inte så svårt?

Nu ligger våra treor där — i hur många grupper? Då kan vi också säga, att vi har delat dem i tre delar. Hur många i varje del?

Vi lägger nio lappar som en talrad. Vi ska ta bort tre. Är det ett litet tal eller stort? (»Litet» är 1, 2, 3, 4, »stort» de övriga.) Eftersom det är litet, tar vi bort det bakifrån: Vi tar den nionde, den åttonde, den sjunde. *Vilka* tog vi bort? Hur *många* tog vi bort? Kvar?

Nu ligger där sex. Vi lägger två till. Vilka? Den sjunde och den åttonde. Hur mycket blir alltså sex och två? Hur mycket fattas det då i nio? Lägg ut den nionde lappen också.

Från de nio, som ligger där, tar vi bort fem. Stort tal eller litet? Så stort tal tar vi bort framifrån, alltså de fem första i handen. *Vilka* kvar? Hur *många* kvar?

Det var typfallen. Fler kombinationer, så länge det behövs.

b. Undersökning och räkning med enheterna ordnade till talbild.

Nio räknelappar i handen. Vi vill ordna dem till en talbild och ska arbeta med talbilden.

1. Vad nio består av.

Talbilden med bara röda lappar. Här lägger jag den första, här nedanför lägger jag den andra, här uppe den tredje, här nedanför den fjärde, — — — den nionde. Hur många ettor finns i nio?

Vi börjar på den nionde och tar lapparna tillbaka i handen. Säg namnen.

Vi lägger ut lapparna två och två. Först två röda, så två gröna, två gula, två blå och till sist en röd. Hur många tvåor och ettor består nio av?

Tre röda, tre gröna, tre blå: Hur många treor?

Fyra röda, fyra gröna, en gul: Vad består nio nu av?

Fem röda, fyra gröna. Berätta: Min nia består av en femma och en fyra.

Sexa och trea, sjua och tvåa, åtta och etta. Berättelse om varje kombination.

2. Upplösa i termer (lägga isär i termer).

Talbildens alla nio lappar röda. Vi vänder den nionde och berättar så: Min nia består av åtta och ett. Vänder den åttonde också: Min nia består av sju och två. Vi fortsätter till ett och åtta.

Nyss följdes vi åt. Nu lägger ni nian isär, precis som var och en vill, och kommer fram och berättar. I tur och ordning! Märker ni, att ni har lagt nian på samma sätt som någon berättar om, så skynda att lägga den på annat sätt. Skulle någon ha lust att lägga nian i tre färger, så gärna det, men glöm inte de tre talen på vägen hit fram.

Mycket rolig övning och mycket nyttig: Att handskas med tingen håller på att övergå i att föreställa sig talen.

3. Ta bort.

Vi lägger våra lappar på talbilden. Hur många har vi? Vi tar bort två. *Vilka?* (Den nionde och den åttonde, alltså såsom vid streckraden) Hur *många* kvar? Vi har nio och ska ta bort sex. Då är det bäst att ta bort det *stora talet framifrån,* alltså bort med de sex första. *Vilka* kvar? Hur *många?*

Nyss följdes vi åt. Nu lägger vi ut nio lappar, tar bort så många vi vill och kommer hit och gör reda för *vad vi hade, vad vi gjorde* och *vad som blev kvar.* Kom fram i tur och ordning. Jag börjar: Jag hade nio lappar, jag tog bort sex och har tre kvar. Nästa man!

4. Fylla ut.

Här ligger sju. Hur många behöver vi för att komma upp till nio? Här fem. Osv.

5. Sammanläggningar

om man så önskar — det har omärkligt övats hela tiden!

6. Innehållsundersökning

har ingått i punkt 1 men kan övas separat. Där ligger nio. Vi tar två åt gången: *en* gång, *två* gånger osv. Kan vi säga det med det fina uttrycket? (Nio innehåller fyra tvåor, så blir det en över.)

På samma sätt tar vi tre åt gången, likaså fyra, fem, sex, sju åtta och nio åt gången.

7. Gångertagning.

De nio lapparna ligger i en hög. Vi tar två åt gången och lägger på talbilden och säger: *En* gång två är två. Vi lägger de två tillbaka i högen och tar två två gånger: *Två* gånger två är fyra osv.

8. Likadelning

sker bäst genom att på bordet markera 1) Hans och Greta, 2) Hans, Greta och Stina, 3) Hans, Greta, Stina och Alexander. Bokstavligt dela ut en åt gången.

c. Undersökning och räkning genom teckning och *mätning*.

1. Vi diskuterar och ger uppslag inför hela klassen och ritar impulsbilder (blommor), stjärnor, streckfigurer och visar grupperingar. Barnen ritar, berättar och hittar på räknesagor (se s. 115).

2. Vi mäter i cm penna, askar osv. Vi ritar fönster 6 cm brett och 9 cm högt, delar in det i 2 rutor på bredden och 3 på höjden, räknar och mäter rutorna. Använd rutat papper, så blir det inget besvär med de räta vinklarna.

II. Att bara se: Vi räknar med stöd av först streckrad och sen talbild, som vi har ritat på svarta tavlan.

På streckraden exempelvis: Vi står där (vid 6), hur långt till 9? — hur långt från 3? Om vi tar bort de fem första? — de två sista?

På talbilden exempelvis: Snabba och inpräglande isärläggningar i termer. Vi tog det mycket ofta i kör. Med pekpinnen angav vi gränsen, och barnen läste: Nio består av åtta och ett, nio består av sex och tre, nio består av fem och fyra osv. Stundom blev det inte bara fart utan också rytm i de enkla meningarna.

Jag täcker över en del av talbilden. Berätta vad ni ser och vad vi har gömt. Vi ser fem, vi har gömt fyra. Osv.

III. Att bara föreställa sig (+ hjälp av lite rytm och rörelse): Vi räknar med stöd av minnesbilder av streckrad och talbild, som läraren vädjar till.

Vi ritar streckar i luften till talraden. Vi springer fram och tillbaka på den och säger därvid talens namn.

Ser ni inom er den sjunde? Vilka står till höger om den? Vilka står till vänster om den femte? Om vi tar sex bort, hur många står kvar? Om ni kan se de fem första, hur många lägger ni till för att komma till nio?

Rita i luften prickar till talbilden nio. Namn och gruppering: Den första, den andra, den tredje, den fjärde — paus — osv.

Ser ni hur många *fyror* det finns i talbilden? — hur många tvåor?

Jag ser precis alla nio. Jag slår bort den nionde, nej vi slår bort den allesamman. (Gester!) Kvar? Sätt dit den igen. Vi slår bort två — vilka? Hur många kvar? Slå bort åtta. — fyra. — sju. Mycket roligt!

Vi klappar i händerna i tvåtakt: *en* två, *tre* fyr — nio. Hur många tvåor *hörde* vi? — i fyrtakt: hur många fyror och hur många över? — i tretakt: hur många treor? Jag klappar fyra i varje grupp — säg var jag stannar. — två i varje grupp — hör var jag stannar.

Jag har delat nio nötter i två delar. Jag har några i *den* handen och resten i den andra. Säg de två talen, som tillsamman blir nio. Rad upp, rad ner — den som säger rätta tal får byta plats med mig.

Jag har delat nio på samma sätt som nyss, men nu säger jag, hur mycket jag har i den ena handen, och ni säger, hur mycket som finns i den andra. Det kan vi svara i kör på, och fort ska det gå. Jag har sex i den, hur mycket i den?

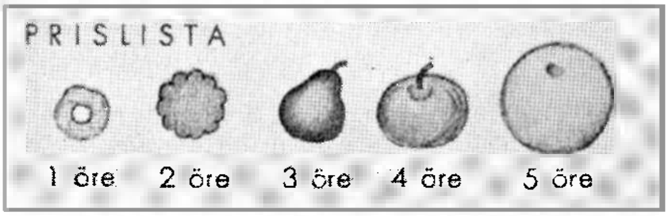
IV. Att räkna utan att läraren direkt vädjar till viss minnesbild.

Minns ni, att vi en gång lekte »att fråga ner» någon? Pelle kommer fram. Vi andra funderar ut tal att ge honom. Han får stå framme, så länge han svarar rätt. Den som frågar ner honom får då komma fram.

Jag börjar: Du har nio öre och köper för fem, hur många har du kvar, Pelle? — Rätt! Näste man frågar. Undan för undan — inte ska jag behöva ropa upp er.

Övningen tyckte både barnen och jag mycket om. Nån gång inträffade det, att det var omöjligt att fråga ner en duktig räknare. Då sa nån annan räknemästare: Får vi ta halvor och fjärdedelar och sånt? — Ja det får ni. — Om Du har nio äpplen och ger bort fyra och ett halvt, hur många har du kvar?

Prislistan på tavlan (bilder av föremål med utsatta priser). Barnen säger i tur och ordning, vad de köper, och räknar i hop, vad de ska betala.



Andra tillämpningsexempel? För egen del var jag mycket sparsam med att hitta på problem, som skulle ges till hela klassen och, som man trodde, räknas ut av var och en. Sådant hänfördes förr till huvudräkning. Men allt vad vi hittills har berättat om, har varit »huvudräkning» med syfte jämväl att visa hur en uträkning sker. Bättre att ge denna hjälp och att leda barnens träning än att ta upp tiden med pepparkakstalen.

B. Skriftliga övningar. Omedelbar undervisning i de fall, där alla behöver samma hjälp, t. ex. med siffran och talbildens regelbundna former. För övrigt var och en i sin takt.

I. *Att skriva siffran 9.*
II. *Att rita talbilden.*
III. *Att lägga talet nio isär och under talbilden skriva termerna.*

Alla bör skriva typen $9 = 8+1$, $9 = 7+2$. De snabbaste dessutom fyllnadsexempel av typen $9 = 7+1+1$. Det går förträffligt för de flesta barnen bara genom att se på talbilden. Skulle någon behöva ytterligare hjälp, så ge honom en sticka att lägga i mellanrummen och lär honom skriva, vad som finns på båda sidor om den. Jag märkte en gång, att några barn delade talbilden genom att rita blyertsstreck i mellanrummen. Det var nog effektivt, men talbilden blev oöverskådlig mot slutet. Den flyttbara stickan är bättre.

IV. *Skriftliga additions- och subtraktionsuppgifter*

Fråndragning är ju omvändningen av sammanläggning. Därför bör de båda räknesätten följas åt. Till att börja med skriver man uppgifter, som barnen ska lösa och själva kan skriva fortsättning på, gärna med stöd av en på nytt uppritad talbild, t. ex.

○○ ○○ ○
○○ ○○

8+1	9—1	9—1—1
7+2	9—2	9—2—1
6+3	9—3	9—3—1

Fortsätt att skriva tal själva!

Därefter blir det förstås tal utan all ordning. Och av dem får vi besked, hur säkert barnen behärskar det behandlade talområdet.

Tians värde, talbild och beteckning med siffror

Nu får vi säga med lagtexternas formulering: Om tian gäller i tillämpliga delar vad om nian sagts. Därutöver endast två saker.

När talbilden ritas, får de tio prickarna en ram omkring sig. En gång kallade vi de tio för barn. Småttingarna gjorde själva tal: Där är tio barn, tre springer ut och leker osv. Till sist blev det litet oroligt, och jag sa: Nej, nu stänger vi barnen inne i stugan. Och så ritade jag en röd ram omkring tiotalet och stängde dörren. Så fick vi uttrycket tiotalsstugan. Därmed markerade vi dess karaktär av ett avslutat stadium i vårt räknande. Det syntes också på att siffrorna tog slut, så att vi fick börja från början: med siffrorna noll och ett.

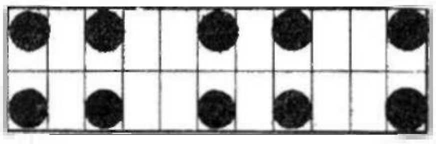
Det andra var detta: Utfyllnadsövningarna får större utrymme här än vid föregående tal. Jag har sju, hur många behöver jag för att komma till tio? Vi fyller ut en sexa, så att vi får en tia, hur många behövs? Osv. Jag ska samla till tio öre. Jag har åtta, hur många fattas? Osv.

Att räkna frándragning genom att fylla ut är den naturligaste subtraktionen i en mängd fall. Köper man för 8 kr. och lämnar fram en tia, får man tillbaka med orden: Åtta kronor, nio, tio, två kr., var så god. 10 kr. — 6,75 räknas så i affärerna: 6,75, 7 kr., 8, 9, 10, 3,25, var så god. Varför skulle vi inte tillämpa samma metod i skolan? Den förutsätter, att vi konsekvent övar barnen i att fylla ut. Det är också en god övning i och för sig, t. ex. när vi söker efter ett tals värde och dess plats i förhållande till grannarna. Ytterligare ett skäl. Övergångarna av rena tiotal har betraktats som den största svårigheten vid sammanläggning och frándragning, alltså tal av typen 8+7, 38+7, 38+17, 12—5, 42—5, 42—15. Ska barn kunna räkna ut dem, innan de ännu fått en oklickbar säkerhet i alla additionskombinationer inom talområdet 1—20, så måste de kunna fylla ut till 10, resp. ta bort till 10. Den fortsatta tillämpningen inom större talområden är en ren bagatell.

Att lösa 8+7 genom att först fylla ut till tio förutsätter ytterligare en färdighet: att snabbt kunna lägga ett tal isär i två termer, i detta fallet 7 = 5+2, så att man kan säga 8+7 = 8+2+5. Detta är anledningen till att jag i det föregående konsekvent övat barnen att lägga varje tal isär. Övningen har naturligtvis haft sitt egenvärde: den skänker insikt i talets egenskaper, men dessutom har dess värde för den fortsatta räkningen hela tiden legat som motiv.

Snabba övningar att fylla ut till tio får vi med täckskivan och den på tavlan uppritade talbilden. Jag ser sex, då fattas fyra i tio. Jag ser nio, jag ser fem, jag ser två osv. Likaledes ger uppgifterna att samla till tio öre många och lätta övningar. Behövs det räknepengar? Det beror på hur grundligt vi har tagit analysen av talvärdet. Har vi emellertid räknepengar, så kan det vara naturligt att låta dem ersätta några av övningarna med räknelapparna. Även räkneettöringarna kan ordnas till tians talbild.

Att vi gör en andhämtningspaus vid talet tio är naturligt. Återblickar, talserier upp till tio, »blandade exempel» såsom det har hetat och väl stundom ännu heter i räkneböckerna, tar upp pausen.



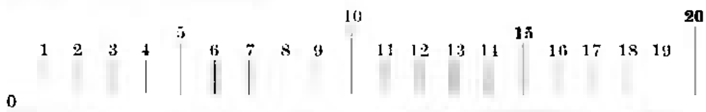
Så ritar barnen *tiotalsstugan.*

FULL DEN RÖDA STUGAN ÄR.
DÖRRN ÄR STÄNGD. VI STANNAR HÄR.

6. Talområdet 11—20

Talens namn och plats i talraden

Vi fortsätter den på tavlan uppritade streckraden, så att den får detta utseende:



Det är säkerligen ingen risk att samtidigt skriva talens beteckning med siffror och att öva läsningen av dem. Beteckningen är ju så genialt enkel i vårt dekadiskt ordnade talsystem, att orden och beteckningen inte ger oss mycket arbete i räkneundervisningen. Det är kanske denna självklarhet, som har gett anledning till ett allvarligt misstag i undervisningen, nämligen att talvärdena och räkneoperationerna skulle vara lika självklara.

Utmed streckraden läser vi nu talseriens namn: ett, två, tre — — — elva, tolv, tretton till 20. Vi försöker väl också med deras ordningstal för att få jämförelse med det första tiotalet. Men vi behöver inte göra lika stor affär av ordningstalen elvte till tjugonde. De behövs inte för uträkningar, om nämligen övningarna inom talområdet 1—10 gett åsyftat resultat. Ska vi t. ex. minska 16 med två, behöver vi nu inte säga, att vi tar bort den sextonde och den femtonde och kommer till den fjortonde. 16—2 löses som 6—2, 16+2 löses såsom 6+2, 18—4 såsom 8—4. För all del: Det kan kanske behövas att låta barnen säga: Jag ska ta fyra från aderton, då går jag tillbaka fyra steg utmed streckraden: 18, 17, 16, 15 och kommer till 14. Enligt Haase skulle vi på grund av medvetandets trånghet inte kunde fasthålla och behärska mer än fyra enheter. Vi skulle alltså inte kunna springa tillbaka sex steg i talserien utan att råka ut för osäkerhet om hur långt man har kommit. Det är nog riktigt. Och dessutom är det ett oekonomiskt sätt att plocka bort så många genom att ta ett åt gången. Man får därför falla tillbaka på 8—6 eller vädja till förmågan att lägga sexan isär i fyra och två eller i tre tvåor och så efter varandra ta bort de överblickbara termerna. Men som sagt: är additioner och subtraktioner inom första tiotalet så grundligt behandlade, som det föregående har velat antyda, så träder de i funktion även inom andra tiotalet och inom hur många tiotal som helst!

Talvärden och enkla räkneförlopp inom talområdet 11—20

Här möter först den allvarliga frågan: Ska vi fortsätta att allsidigt behandla alla talen i talserien? Som förut har påvisats, håller uppräkningsmetodikerna styvt på att man utöver presentation av talen endast ska syssla med addition och subtraktion. I våra dar har på nytt upptagits tanken att inte begränsa första skolårets kurs till talområdet 1—20, resp. 1—30, utan i stället låta den omfatta de enklaste uträkningarna inom ett större talområde, t. ex. 1—100.

Frågan om kursplanens omfattning är inte lätt att besvara. Jag finner den inte heller så förfärligt viktig. Den kan i varje fall inte väsentligt påverka utformningen av räknearbetet under den första skoltiden, enär detta bestämmes av barnens utvecklingsståndpunkt. Denna bjuder oss att hålla oss inom överblickbara talområden. Det är sant, att det är lika lätt att lägga samman 96 och 3 som 6 och 3. Men är det därmed också sagt, att övningen är lika värdefull inom ett större som inom ett mindre talområde, vars värde barnet någotsånär kan fatta? De större talens egenskaper är för både sju- och åttaåringen alldeles ofattbara. Värdet av att laborera med siffersammanställningar sådana som åtta sju (87), nio sex (96) kan sättas i fråga. Det är inte minsta tvekan om att barnen kan lära sig att utföra sådana skrivningar och uträkningar som 96+3 under första skolåret. Men vad vinner man med det? *Ska de ha värde, måste barnen ha god uppfattning om tiotalssystemet.* Och det är väl svårt i klass 1. Utan denna uppfattning är sammanläggnings- och fråndragningsuppgifter med stora tal väsentligen mekaniska övningar. Sådana har aldrig stått högt i värde och kan inte heller komma att göra det. Att läsa och inte förstå är att plöja och inte så, heter ett gammalt ord ur läslärorna. Det har — inom vissa gränser — sin tillämpning också på räkningen.

I den antydda nutida diskussionen framhålles såsom skäl för en utökning av talområdet, att vissa kombinationer inom det lilla området är svårare än andra kombinationer inom vilket talområde som helst. Såsom de särskilt svåra betecknas tiotalsövergångarna. Det är riktigt, särskilt om man begär att barnen ska behärska dessa övergångar som fast minneskunskap. Jag hjälpte Birgitta, en flicka i tredje klass. Hon räknade stora tal, lånade hundratal och tiotal och sa: »Sjutton minus nio är åtta». »Det var bra», sa jag. »Men hur vet du det?» Jag trodde att jag skulle få veta, genom vilken tankekedja hon kom fram till resultatet. Hon såg på mig och log: »Det *vet* jag». »Det förstår jag, men jag ville veta, hur du bar dig åt för att dra nio från sjutton och få åtta». — Hon svarade: »Det *är* ju så». Ja, det är ett bra svar i och för sig. Felet var bara, att jag inte fick något besked om ett visst teoretiskt spörsmål. Däremot fick jag besked om något annat: Hon hade kommit till den ståndpunkten, att hon inte behövde »räkna ut» små tal, inte ens när de stod samman med tiotalsövergångar. Nu frågas: Vinner vi dessa väsentliga färdigheter genom att inom stora talområden mekaniskt räkna med de lättaste kombinationerna inom talområdet 1—10 men överförda till dessa stora tal? Det hela förefaller vara mera övning av mekanisk art än *den hjälp för barnatanken, som den första räkneundervisningen bör vara.* Denna hjälp kan vi ge säkrast, om vi håller oss inom områden, som helt och hållet kan åskådliggöras, så att vi kan leda barnen via det konkreta till det abstrakta.

De antydda speciella svårigheterna med tiotalsövergångarna upphör att vara svårigheter, så länge de behandlas åskådligt och påtagligt, med rörlig materiel och talbilder. Säkerligen är det klokt att inte ställa upp fordringar på minnessäkerhet och att ta hänsyn därtill vid de skriftliga övningar, som barnen ska utföra utan yttre hjälp. Men det synes mig inte innebära, att vi skulle undvika att låta barnen syssla med sådana saker, när de kan göras påtagliga.

Ytterligare ett argument må beröras. Det blir för enformigt för barnen att hela första skolåret hålla sig inom ett litet talområde. Därtill kan svaras: I så fall är arbetssättet felaktigt. Ett mångsidigt, rörligt arbetssätt med arbetsövningar av olika slag gör räkningen rolig.

Resonemanget leder till den slutsatsen, att vi kan fortsätta att behandla talen allsidigt ännu ett stycke framåt. Dock synes två modifikationer vara ändamålsenliga. 1) Varje tal blir ej föremål för allsidig behandling på samma grundliga sätt som talseriens tio första tal. Somliga tal är bättre än andra ägnade att ge stadga åt talserien, t. ex. 12, 15, 16. De får grundlig behandling, de andra blir bara presenterade i familjen. 2) Träningsövningarna inriktas på i huvudsak endast sammanläggning och fråndragning. Talserier och andra undersökningar, som leder till att förstå gångertagningens, innehållsundersökningens och delningens mysterier, ska dock inte försummas, men de ska inte syfta till att inlära räknesätten multiplikation och division med deras krav på att räknaren absolut säkert behärskar tabellerna. Däremot är det bara bra, om man redan i den första räkneundervisningen lockar fram — på ett påtagligt, konkret sätt — föreställningar om mångfald och delar, gångertagning och delning (resp. innehållsundersökning), fastän fullkomningen hör ett senare stadium till.

Talet 11

Streckraden visar oss, att 11 har sin plats närmast till höger om 10. Den står emellan två långa streck, som begränsar det nya tiotalet. Vilka tal kommer efter 11 i andra tiotalet?

Vi har 11 räknelappar i handen och ska ordna dem till en talbild. Först fyller vi första tiotalsstugan (på Hand och Öga eller upprutad kartong med två tiotal i rad). Hur många gick åt för det? Hur många kommer i den andra stugan?

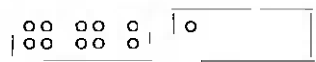
Den blir den förste i andra stugan, men vad blir den i hela talet elva? (Visar det sig svårt, får vi räkna upp alla ordningstalen från början). Ja, nu har vi den förste i den andra tiotalsstugan; tänk så många vi behöver, innan den blir full! Hur många egentligen? (**Hur naturliga är inte utfyllnadsövningarna!**)

Vid övningarna att lägga isär i termer är det dominerande fallet 11 = 10+1. Men även andra termer övas: Vi har 11 röda i handen, i första stugan lägger vi 9 röda och en grön, i andra stugan en grön **och berättar: 11 består av 9 röda och 2 gröna.** Vi fortsätter med 8+3[1]) Osv. Så länge vi utför det i handling, möter inte den ringaste svårighet att kliva över tiotalsgränsen. Och det är just denna handlande räkning, som kan bringa hjälp i barnets matematiska tänkande.

Efter undersökningen av talets termer låter vi barnen också lägga ner tvåor, treor, fyror och femmor. Resultatet berättas väl ungefär så: 11 består av 5 tvåor och en etta, 11 består av 3 treor och en tvåa.

Några av räknelekarna: Jag har 11 lappar, 10 i den handen, hur många i den? (Nej, magistern, kom inte med så lätta tal!) Sju i den, hur många i den? Osv.

Före skrivningen ritar barnen talbilden för 11 i sina övningsböcker och skriver i spalter först påbörjade grupper av sådan typ, att de själva kan fortsätta, sen additions- och subtraktionsgrupper av blandat utseende.



11 = 10+1	10+1 =
11 = 9+2	9+2 =

Fortsätt att hitta på!

1) Jämför bilden på s. 49.

Av de blandade additionsuppgifterna kan vi som obligatoriska tal ta med tre addender av typen

9+1+1, 8+2+1, 7+3+1, 6+4+1, 5+5+1
och de motsvarande 11—1—1. 11—1—2, 11—1—3 osv.

När jag nu skriver detta, kan jag inte låta bli att le åt fruktan för tiotalsövergången. Sådana uppgifter var alldeles självklara för barnen. De såg ju de båda stugorna. En enda stackare satt inne i den ena stugan. Den var det inte svårt att rå på! Men vi aktade oss för att *förhöra* barnen på 6+5, 4+7, 11—6, 11—8, då de inte hade åskådligt stöd. Det kommer senare.

Talet 12

Plats i serien och på talbilden som förut. Särskild uppmärksamhet åt tvåor, treor, fyror och sexor. Maken har barnen aldrig varit med om!

Med lapparna letar vi rätt på talserierna 2, 4, 6, 8, 10, 12; 3, 6, 9, 12; 4, 8, 12; 6, 12, läser dem, försöker dra dem utantill.

När vi lägger ut tvåorna på talbilden, betonar vi lite extra: Nu har vi lagt ut två *fyra gånger* — ja, vad blir *fyra gånger* två? — — *sex gånger* — och vad blir *sex gånger två?* Gångertagningen blir naturlig, och mycket väl kan man skriva det med gångertecknet också.

Talet 13

går vi förbi, dock inte på grund av vidskepelse.

Talet 14

ökar ut talserien på två. Annars inget nytt från undersökningsfronten.

rekommenderas till det bästa. Jämför med behandlingen av talet 9 och översikten där.

Därutöver räknar vi femmor, fyller ut till 20, drar från till 10, och med bilderna av de båda tiotalsstugorna klarar vi uppgifter av detta slag: Jag har 15 lappar och ska ta bort 6. Då tar jag först bort de fem, som sitter i den andra stugan. Men jag skulle ta bort 6, alltså tar jag bort en till, och då går jag in i första stugan och tar en där. Så har jag tagit bort 6 och har 9 kvar.

När talbilden av 15 är ritad, tittar vi på den och hittar på tal, som vi skriftligen redovisar. Men när vi ger barnen skriftliga uppgifter att räkna utan tillgång till talbild eller annat hjälpmedel, då nöjer vi oss med typerna 10+5, 12+2, 12+3, 13+2, 15—5, 15—2, 15—4 samt 9+1+5, 15—5—1 osv.

Talet 16

är så roligt, att det lockar till rimmeri:

BLOMMOR TRIVS UTI EN DAL.
SEXTON TRIVS MED JÄMNA TAL:
ÅTTA TVÅOR, FYRA FYROR –
KAN DU TA SÅ MÅNGA LYROR? –
OCH TVÅ ÅTTOR FINNS DÄRI.
DETTA TAL SKA ROLIGT BLI.

Teckning: *A. Hjelm.*

Talet 16 är liksom talet 15 stöttepelare i talserien. Därför ger vi också 16 en allsidig behandling.

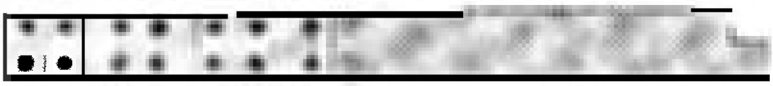
Hur långt från 10 till 16? — från 16 till 20? Med räknelapparna reder vi ut, vad 16 består av a) i termer, b) i faktorer, alltså tvåor, fyror och åttor.

Fördubblingar: två gånger ett är två, två gånger två är fyra, två gånger fyra är åtta, två gånger åtta är sexton. Barnen brukar gärna dra sådana ramsor, och har de upplevt det, så är det inte bara minnessaker.

Låt barnen också upptäcka, att i 16 är det 8 tvåor, att 16 innehåller 4 fyror, att jag kan ta 8 två gånger ur 16. Det är innehållsundersökningens handlag, som vi är på jakt efter.

Delningsdivisionen blir fortfarande bäst genom att vi markerar Hans och Greta för tudelningen, Hans, Greta, Stina och Alexander för fyrdelningen. Lustigt är, att när vi så där bokstavligt utförde delningen, så hördes stundom: Det vet jag i förväg vad det blir. Det är väl roligt, när det bär åt det hållet.

Glöm inte heller vid fråndragnings- och utfyllnadsövningarna att låta barnen öva sig med täckskivan på de av dem själva uppritade talbilderna. Stundom kan två och två arbeta samman och växelvis ge varandra »tal» av typen:



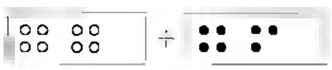
Jag har 16, jag gömmer 2, hur många kan jag se? Eller: Jag ser 13, hur många har jag gömt?

Stundom kör man själv med sådana uppgifter med hjälp av täckskiva på tavlans talbild. Gärna klassvis och i kör. Och med fart!

Stundom återigen skriver barnen i spalter de uppgifter, som de på sådant sätt sitter och läser av med hjälp av egen täckskiva och egen talbild.

Skriftliga övningar under uppritad talbild som förut. Därutöver kanske ett litet försök.

Jo småttingar, vi ska skriva och räkna ett tal, som några tycker är hemskt, nämligen 9+7. (Det var la inget!) För dig nej, som minns svaret. Men den som måste räkna ut svaret! Då kan vi göra som vi gjorde på talbilden: hade vi 9, så fyllde vi först ut tiotalsstugan med 1. Det kan vi skriva så: 9+1. Men vi skulle ju lägga till 7 och har bara lagt till 1. Hur många är då kvar i handen att lägga i den andra tiotalsstugan? Dessa sex skriver vi efter 9+1, så att vi får talet 9+7 skrivet på detta sätt: 9+1+6. Det kallade barnen för att skriva på »det långa sättet». Tror vi oss om att ta denna tillämpning av det som vi gjort i handling många gånger, så är det likväl klokt, att vi följs åt med många exempel. Gärna kan vi ha till hands uppritade stugor att sätta in de båda termerna i. Ska vi för 8+7 demonstrera det långa sättet, så ritar vi först och med olika färg:

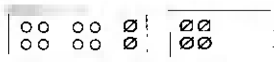


Därefter

Sen följs vi åt med skrivningen och den därunder förnyade förklaringen: 8+7 = 8+2+5 = 15.

Hjälps vi åt med det långa sättet en tid, så kan det hända, att vi kan ge de snabbaste räknarna sådana uppgifter som fyllnad till det obligatoriska. Differentieringen barnen emellan ska i räkningen ske på djupet och inte i mängden och längden av räkneböckernas siffergrupper. Håller vi bara fast vid att det inte får anses vara en obligatorisk uppgift för alla att *utan hjälpmedel* klara sådana tiotalsövergångar, så är övningarna bra i första klassen också.

Motsvarande »långa sätt» i subtraktion ritar vi och skriver på detta sätt:

 14—6 = 14—4—2 = 8.

Alltså: När vi har gett uppgiften 14—6, ritar vi talbilden för 14, stryker över de fyra i andra stugan (naturligtvis är det förut gjort i handling med lapparna), skriver 14—4, stryker över de två, som återstår att ta bort och skriver färdigt.

Talen 17 och 19

går vi här högaktningsfullt förbi.

Talet 18

bjuder oss att låta serierna på 2, 3 och 6 gå ett steg framåt och inbjuder oss att upptäcka de två första leden i talserien på 9.

Hur långt bort har vi kommit från 10, och hur långt har vi kvar till 20? Sådana och andra undersökningar utför vi i handling.

Efter den muntliga behandlingen kan barnen under sin uppritade talbild av 18 på egen hand skriva många tal i de tre regelbundet återkommande spalterna

18 = 17+1	18—1 = 17	17+1 = 18
18 = 16+2	18—2 = 16	16+2 = 18

Man ritar själv talbilden och påbörjar spalterna och textar *Fortsätt själva.* Jag nämner detta enkla ännu en gång, därför att det var påfallande, hur ivriga barnen blev, när de efter de gemensamma, handlande undersökningarna och de likaledes gemensamma, vägledande träningsövningarna släpptes lösa. Uppgiften är ju så långt fram i enklaste laget och har naturligtvis sin komplettering i andra uppgifter. Men det är så viktigt, att barnen får känslan av att räkningen inte är något som somliga »har svårt för», såsom föräldrarna stundom säger om sig själva, när de ska urskulda sina teckningar.

Talet 20

är ju ett kardinaltal, som vi låter barnen stanna hos och flitigt umgås med.

Räknelapparna bör väl få vara med ännu en gång. Barnen behöver uppleva 20 som två fyllda tiotalsstugor, likaså än en gång handgripligt åskådliggöra de viktigaste räkneförloppen. Men jag vet av erfarenhet, att barnen blir mer och mer oberoende av yttre hjälpmedel, en fullt naturlig utveckling. Vi nöjer oss därför med att i handling visa hur vi lägger i sär i termer och letar rätt på faktorer, i vilka 20 kan upplösas: 10 tvåor, 5 fyror, 4 femmor och 2 tior.

Därefter hälsar vi på den på tavlan uppritade talbilden. Pekpinnen lägges i mellanrummen — snabba svar: 20 består av — — — Stundom varierade vi denna övning på så sätt, att jag sa: Se nu efter vilka tal jag låter pekpinnen gå runt omkring, och säg sen vad 20 består av. Långsamt gick pekpinnen kring första tiotalsstugans första femma, kring dess andra femma, sedan kring den andra stugans sjua och till sist kring dess trea. Det var alltså fyra termer att hålla i minnet och berätta om: 20 består av fem och fem och sju och tre. Andra gånger flög pekpinnen kring alla fyrorna eller kring mera oregelbundna termer. Det inträffade också, att jag med en streck tvärs över enskilda ringar markerade, att de delades mitt i tu, och svaret kunde bli: 20 består av 18 hela och fyra halva. Ja, enstaka gånger kunde prövningen gå så långt, att de duktigare redovisade, att 20 består av 10 hela och 20 halva. Men endast som en lekartad klimax tog vi tredjedelar och fjärdedelar med, men då kunde å andra sidan ivern stiga till toppunkten.

Övningar att fylla ut till 20 bör få stort utrymme. Täckskivan på tavlan inleder dansen: Jag ser 16, då är 4 gömda. Jag ser 13, då behöver jag 7 för att komma till 20. Osv. Sen bara föreställer vi oss de två tiotalsstugorna: Den första är full, i den andra finns 7. Hur många tillsamman? Hur många fattas i 20? Den första är full, i den andra finns 4 tvåor. Hur många i båda stugorna? Hur många fattas i 20?

Jag skrev, att vi »bara föreställer» oss de båda stugorna. Det behöver inte nödvändigt betyda, att vi stryker ut dem från tavlan. De barn, som frigjort sig från bilden som hjälpmedel, bryr sig inte alls om vad som står på tavlan, och de barn, som ännu behöver yttre stöd, ska naturligtvis få titta på bilden så mycket de behagar.

En annan form av utfyllnadsövningar: Jag låtsar, att jag har 20 kulor i mina händer. Jag delar dem, så att jag har 17 i vänster hand, hur mycket i höger? Och sen vi glatt och snabbt på det sättet fått gemensam träning några minuter, ändrar övningen form: Jo, jag har fortfarande 20 kulor, men jag har f e m i *den* fickan och f e m i *den* och å t t a i *den* handen och resten i *den*, hur många i den? Man bör säga talen långsamt och besinnande, så att alla får tag på de olika termerna och hinner att lägga samman dem för att slutligen med en blink se avståndet till 20. På det angivna sättet blev övningen en kombination av addition och utfyllnad. Vi hade rysligt roligt med de många fickorna.

Vid frånd ragningsövningarna får leken denna form: Jag har 20 äpplen, jag ger Pelle t v å (paus) — är det klart vad vi har kvar? — Lisa f y r a (paus) — nå? —, Alexander f y r a — —, Stina f e m och Hans f e m, hur många kvar? Det hände förstås, att man skänkte bort fler än man hade. Då bröts den tystnad, som vi kommit överens om, och jag fick hastigt slå till reträtt.

Vi lekte handelsbod. Vi kom överens om att var och en hade 20 öre (naturligtvis i form av två tioöringar) med sig, köpte efter prislistan, la ihop, fyllde ut och fick tillbaka. Det kunde vi hållit på med varenda dag — barnen tycktes aldrig tröttna på det.

Stundom tog vi det så, att varje barn själv talade om, vad det köpta kostade, samt la ihop och sa svaret, stundom så, att en pojke eller flicka var handelsman, kamraterna köpte, handelsmannen räknade ut vad det blev, köparen sa: **Var så god, här är 20 öre. Jag ska be att få tillbaka.** Ska vi ha saker också, att markera köpenskapen med? Kanske, men det är då inte nödvändigt. Barnen s p e l a r det hela ändå. Men det ser å andra sidan så otroligt näpet ut, när barnen har en riktig våg, disk och hyllor.

De första gångerna, som våra räkneövningar fick dessa affärsmässiga former, tog jag för givet, att barnen måste ha pengar för att markera betalning och tillbakagivning. Vi tryckte papperspengar med blyertspennan mot papper, som låg över pengar av olika valör, klippte ut dem och samlade mycket växelpengar i en ask, som stod till handelsmannens förfogande. Det var roligt det också, men övningen vann knappast i intensitet därigenom. Huruvida omväxlingsbehovet gör dylika yttre arrangemang nödvändiga, får man bedöma efter hur man har det i klassen med arbetsiver och arbetsglädje. De båda faktorerna *måste* finnas. När vi dem utan yttre tillställningar, så sparar vi tid.

En gång gjorde barnen egna vågar av pinnar, snören och pappskivor. Vikterna skar vi ut av en kvadratisk pappskiva, som vi delade i 10 remsor på vardera leden, så att vi fick 100 småkvadrater. Då pappskivan hade avpassats så, att den vägde 1 hg, kom varje liten kvadrat att väga 1 g och en odelad remsa 10 g. Så vägde barnen några småsaker: en höll vågen, den andre lassade på, och båda räknade samman vikten och antecknade svaret i sina böcker genom att fylla ut vad vi hade skrivit på tavlan: MIN BLYERTSPENNA VÄGER .... GRAM. TVÅ FÄRGKRITOR VÄGER .... GRAM.

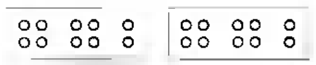
På motsvarande sätt kan mätningar med centimeter stoppas in i räkningen. Mätningar förekommer ju vid arbetsövningarna i sakundervisningen i mycket stor utsträckning. Och cm-måtten har där praktisk användning. Särskilt anordnade övningar för att inlära mätningens teknik är därför inte nödvändiga, när vi kombinerar mätning och räkning. Mät blyertspennan. Hur lång? Hur mycket fattas i 10 (resp. 20) cm? Mät färgkritsasken på längden och bredden. Berätta. Hur mycket större på längden än på bredden? Med mera sådant, bara det ger sig naturligt. Mera som formella övningar verkar det att låta barnen rita olika långa linjer efter cm-linjalen, jämföra och räkna ut skillnad. Bättre då att på rutat papper (rutat för de räta vinklarnas skull) efter uppgivna mått rita t. ex. en stuga, rita, räkna och berätta. Vi börjar 5 cm från nedre kanten och ritar en linje tvärs över papperet. Hur lång blir den? Det ska bli marken. En cm ovanför den ritar vi en linje 9 cm lång. Där ska grunden sluta. Mät av 4 cm från vardera ändan. Hur mycket blev det tillsamman? Hur mycket blev där kvar i mitten? Där ska dörren vara och trappan. Och så fortsätter vi med väggar och tak, fönster och skorsten.

När vi vid något tillfälle sammanfattar 10 cm till en dm, ligger det nära till hands att jämföra med tiotalsstugorna. Samma sak går igen. Och räkneuppgifter med decimeter och centimeter ger sig själva.

Räkneuppgifter, i vilka sakanknytningen utgöres av deciliter, är ju också lätta att ordna och kräver ingen utredning här. Naturligtvis demonstrerar vi mätning med deciliter och de tio deciliternas förmåga att jämnt fylla ett litermått.

Nu har vi talat så mycket om åskådliggörande räkning och muntlig räkning, att vi alldeles har tappat bort de skriftliga övningarna. Det var ju inte meningen. De bör förekomma varje lektion. Men då denna framställning inte uppdelas i lektion efter lektion, låter vi för översiktlighetens skull de skriftliga övningarna komma i ett sammanhang.

Den första skriftliga övningen kommer i samband med den talbild av 20, som barnen själva ritar, kanske redan samma lektion som den, då vi sysslade med att undersöka värdet av talet 20.



HÄR HAR VI STUGOR TVÅ,
SOM BÅDA FULLA STÅ.
UTAV TVÅ TIOR 20 NU VI FÅ.

Kanske roar vi oss med att låta barnen rita och texta något sådant, innan de börjar att skriva talets beteckning med siffror. Sen fortsätter vi, såsom under 18 angavs.

Additions och subtraktionsuppgifter först i direkt anknytning till 20, sen inom hela talområdet 1—20, ja, det behöver vi inte mer än påminna om. Men några ord om hur man inför de korta räknetecknen för multiplikation och division. Vi bör sannolikt vid detta laget vara i slutet av första skolåret, och då kan vi ta upp gånger- och delningstecken, om det inte har skett förut, vilket förf. för egen del har brukat göra.

Multiplikation är en upprepad addition. Talserierna, sådana som vi har mött dem i det föregående, är just upprepade additioner. Talserierna kommer därför att stödja inlärandet av multiplikationstabellen. Det dröjer länge, enl. amerikanska undersökningar till 9—11-års åldern, innan barnen är mogna att operera med multiplikation och division. Och var och en av oss har märkt, att det också dröjer länge, innan barnen behärskar tabellen, längre ju ensidigare vi tillämpar ren minnesinlärning. Det är därför bra, att barnen har ett sätt att räkna sig till en mångfald i tabellen, som inte minnesmässigt vill inställa sig. Man har märkt. att tredje- och fjärdeklassarna, av vilka vi bör begära säkerhet, förväxlar vissa mångfalder i sexan, sjuan och åttan $7 \cdot 8$ är 56, $9 \cdot 6$ är 54, där är ett sådant par. Är den olycklige då förtrogen med sammanhanget mellan talserien och tabell, så känner han sig kanske för och säger $10 \cdot 6$ är 60, då är $9 \cdot 6$ en sexa mindre, kan alltså inte vara 56. Jag minns en tredjeklassare, som tog fel på $7 \cdot 8$. Hon gick då ner till $5 \cdot 8$, som var lätt att minnas, och fortsatte 40, 48, 56; $7 \cdot 8$ är 56.

Nu är det inte den första räkneundervisningens uppgift att bringa barnen till säkerhet i tabellen. Men om vi kan lägga vårt undersökande och laborerande så, att barnen kommer in i vanan att se — hellre uppleva — dessa sammanhang från första början, så är det ju bara bra. Det kräver inte mer abstrakt räknande än vårt övriga laborerande med talvärdena.

Division är en omvändning av multiplikation, såsom tidigare påpekats. Och därför följs de båda sakerna åt.

Hur talserierna byggts upp, har påvisats vid flera av de föregående talen. Nu gäller det mer en sammanfattning samt en inövning av de korta räkneuttrycken: Gånger, delat med, innehåller. Och sammanfattning och inövning är begränsat till talområdet 1—20

Troligen behöver vi inte rita upp talserien på två, sannolikt inte heller på fem. Treans och sexans talserie däremot ritar vi, treans så:

○○○ Hur många gånger har jag ritat tre?
Vi kan därför säga, att en gång tre är tre.

○○○ Hur många gånger har jag nu ritat tre?
○○○ Hur mycket blev det? Vi kan därför säga, att två gånger tre är sex.

○○○ Hur många gånger har jag nu ritat tre?
○○○
○○○ Hur mycket blev det? Hur skulle vi kunna säga det med ett kort uttryck?

○○○ På samma sätt med 4 treor och 5 treor. Till sist
○○○ denna bild:
○○○
○○○
○○○
○○○

Då konstaterar vi, att vi har ritat tre sex gånger och att det har gett oss 18. Lägg märke till, att vi ritar ny bild för var ny faktor. Det blir klarare, än om alla sex treorna med en gång bjudes barnen.

När alla treorna står där, tar vi täckskivan, lägger den över de fem nedersta faktorerna: Läs vad ni ser. Vi flyttar skivan ett steg ned, och barnen ser två treor och läser sex. Ytterligare ett steg, och barnen läser nio. På samma sätt med de följande. De ser alltså, hur summan ökas för varje ny faktor, och räknar ut den nya summan för varje nedflyttning, så länge det behövs. Är de vana vid att söka efter treor, såsom förut skildrats, dröjer det inte länge, förrän serien 3, 6, 9, 12, 15, 18 har fått fast förknippning. Då kan man, om man vill, skriva ut talen vid sidan om talbilden. Det ger dock inte en riktig bild av varje mångfald: 9 står t. ex. mitt för den tredje raden, men 9 är ju summan av både den och de två ovanförstående. Därför kan det vara onödigt att skriva siffrorna. Vill vi ha de sex fallen korrekt illustrerade och skrivna, får vi rita och skriva på följande sätt:

○○○ $1 \cdot 3 = 3$

○○○ $3+3 = 6$ $\quad$ $2 \cdot 3 = 6$
○○○

○○○ $3+3+3 = 9$ $\quad$ $3 \cdot 3 = 9$
○○○
○○○

○○○ $3+3+3+3 = 12$ $\quad$ $4 \cdot 3 = 12$
○○○
○○○ Och så vidare. Det tar större plats, men det är att
○○○ rekommendera för de första övningarna.

Karaktären av omvändning framträder tydligast hos innehållsdivisionen. Det syns, om vi ritar och skriver den på motsvarande sätt.

○○○ $4 \cdot 3 = 12$
○○○
○○○
○○○

$12-3-3-3-3 = 0$

Vi tar bort en trea åt gången och säger: Vi har tagit *en* trea ur tolv, *två* treor ur tolv osv. Vi finner, att 12 innehåller 4 treor, och det kan skrivas kortast $12 : 3 = 4$, och det läser vi: Tolv innehåller tre fyra gånger.

Jämför slutligen $4 \cdot 3 = 12$ och $12 : 3 = 4$, så framträder omvändningen tydligt. Men därmed är inte sagt, att barnen inser omvändningen, så att de ur satsen sex gånger tre är aderton härleder satsen aderton innehåller tre sex gånger. Vi får nöja oss med att de anar sammanhanget, genom ***den konsekventa undersökningen av talbilden*** eller på annat sätt upplever sambandet och så småningom inser det.

Vi kan ta det på annat sätt också. Vi ritar

○○○○
○○○○ alltså talserien på 4 till 20. Vi har läst den många
○○○○
○○○○ gånger, framlänges och baklänges. Vi visar två fyror
○○○○ och ber barnen att »på det allra kortaste sättet» tala om vad de ser och får svaret $2 \cdot 4 = 8$. Men hur många fyror innehöll 8? Och efter mera berättande redogörelser får

vi till slut även här det kortaste uttrycket: åtta innehaller fyra två gånger, och vi skriver det strax $8 : 4 = 2$. **Ritar** vi upp de två fyrorna ensamma,

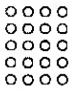
oooo	sa kan vi dela in dem genom lodräta streck i 4
$4 + 4 = 8$	tvåor och få fram det korta uttrycket åtta inne-
$2 \cdot 4 = 8$	håller fyra tvåor och skriver det omedelbart
$8 : 4 = 2$	$8 : 2 = 4$. **Till sist sammanför** vi alla skriv-
$8 : 2 = 4$	ningarna under talbilden.

Naturligtvis kan vi gå över delningsdivisionen också, dock utan att här gå in på det Hellstenska sättet att genom olika beteckningssätt skilja på de båda slagen av teckning (15 innehåller 3 5 gånger skriver rektor Hellsten $15 : 3 = 5$ men 15 delat i 3 lika delar så $\frac{15}{3}$ eller $\frac{1}{3} \cdot 15$). När vi har visat första fyran och barnen har sagt $1 \cdot 4 = 4$, så kan de **med streck dela denna fyra i fyra delar och få 1 i varje,** vilket skrives $4 : 4 = 1$ och läses »fyra delat i fyra lika delar». När vi har visat två fyror och sagt $2 \cdot 4 = 8$, kommer strax »åtta delat i två lika delar» och dess skrivning $8 : 2 = 4$. På samma sätt ger iakttagelserna på talbildens tre fyror de korta muntliga uttrycken och deras skriftliga form $3 \cdot 4 = 12$ och $12 : 3 = 4$. Och så vidare upp till 20. Vilket som är bäst: att gå över resonemanget i delnings- eller innehållsdivision, lämnar jag därhän. Men tänker vi på framtiden, så möter vi nästan undantagslöst — vid den skriftliga divisionen — uttrycket 7 innehålles i 63 9 gånger, förkortat till 7 i 63. Det är innehållsdivisionens tankegångar, som har skapat uttrycksättet.

När vi med barnen övar dessa förlopp, måste vi naturligtvis använda båda slagen av divisioner: Har vi 20 äpplen, så måste vi ta reda på både hur många varje får, om vi delar ut dem till fem barn, och till hur många de räcker, om varje ska få 4 äpplen. Gör vi det med våra lappar, med

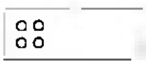
Hans och Greta och hela uppbådet och skriver det omedelbart efter utförandet. så finner barnen den korta skrivningen inte så märkvärdig.

Sammanfattar vi detta, skulle vi kunna tänka oss, att den slutliga teckningen och skrivningen omfattar följande, när vi är färdiga med talserien på 4

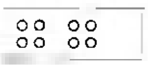


4	1 4 = 4	4 4 = 1	4 1 = 4
4+4 = 8	2 4 = 8	8 4 = 2	8 2 = 4
4÷4+4 = 12	3 4 = 12	12 4 = 3	12 3 = 4
4+4÷4+4 = 16	4 4 = 16	16 4 = 4	16 4 = 4
4+4+4+4+4 = 20	5 4 = 20	20 4 = 5	20 5 = 4

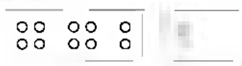
Vill man, att barnen ska skriva varje sak mittför sin talbild, kan man inte rita på detta sätt. Då måste vi göra som med trean på s. 106 eller låta varje tal i serien få den talbild, som barnen allra först ritade:



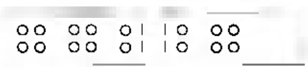
1 . 4 = 4 4 : 4 = 1 4 : 1 = 4



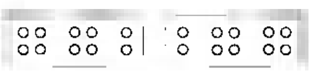
4+4 = 8
2 . 4 = 8 8 : 4 = 2 : 2 = 4



4+4+4 = 12
3 · 4 = 12 12 : 4 = 3 12 : 3 = 4



4+4+4+4 = 16
4 · 4 = 16 16 : 4 = 4 16 : 4 = 4



4+4÷4+4÷4 = 20
5 · 4 = 20 20 : 4 = 5 20 : 5 = 4

Denna form blir nog tydligare, men tar litet längre tid.

De talserier inom talområdet till 20 som vi ritar, skriver och nöter in, är följande:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20
3, 6, 9, 12, 15, 18
4, 8, 12, 16, 20
5, 10, 15, 20
6, 12, 18
7, 14
8, 16
9, 18
10, 20

De fyra sista utgör också fördubblingar. Att fördubbla och ta hälften av tal roar barnen, även om de arbetar med obenämnda tal. Fördubblingarna bildar goda stödjepunkter för minnet. Det gör också de övriga talserierna. Därför har de värde inte bara för gångertagning och delning utan också för sammanläggning och frândragning. De ger alltid några förknippningar, som minnet kan lita på. Vanan att med bestämda avstånd löpa fram och tillbaka på streckraden (talserien på 1) använder vi också för de goda träningsövningarna att öka eller minska samma tal på överenskommen början, t. ex. börja på 1 och lägg 3 till; börja på 20 och dra 3 från.

När vi på konkreta räkneuppgifter försöker tillämpa, vad undersökningen av talseriens 20 första tal har uppenbarat, tar man fasta på särskilt sådana områden, som ytterligare befäster uppfattningen av talens värde och talradens byggnad. Sådana områden är mätningar med centimeter och decimeter, deciliter och liter, vägningar med hektogram och kilogram och räkning med ettöringar och tioöringar. I samtliga dessa fall kommer entalen och de båda tiotalen tillbaka. Hur uppgifterna ska utformas och räkneproblemen formuleras, ligger så väl till, att det inte finns någon anledning att kommentera dem här. Låt dem bara få tillräckligt stor plats. Då det i det föregående har ägnats så stor uppmärksamhet åt den laborerande undersökningen i det som måste vara det principiellt viktigaste i den första räkneundervisningen, kan det förefalla, som om vi ansåg andra uppgifter vara mindre betydelsefulla. Därför denna anmärkning.

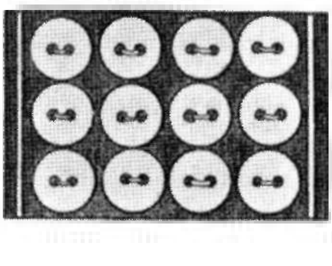
Likaså kan det vara bra att stanna inför sådana intresseområden som veckans sju dagar, dussinet och tjoget. Hur många dagar i en vecka? — två veckor? — en vecka och två dagar? — två veckor och fyra dagar? Osv. Märker man svårighet hos något eller några barn att föreställa sig dagarnas antal, så ritar man upp i rad begynnelsebokstäverna till dagarnas namn.

Vid tjogets behandling kan det vara roligt att rita upp ett äggställ, t. ex. så:

ooooo
ooooo
ooooo
ooooo

Då blir det lätt att reda ut antalet av halva tjog och fjärdedels tjog, t. o. m. sådant som ett halvt tjog och fyra ägg m. m.

Dussinet inbjuder också till en talbild av annat utseende än den arbetstalbild, som vi hittills använt för att snabbt förmedla föreställningen om antal och som därför alltid varit likformigt byggd. Det går fint att rita talbilden som en karta knappar. Anordningen ger oss gratis tredjedelar och fjärdedelar. Om man bara ser på den, så sönderfaller den i tre delar, liksom den berömda skalbaggen. Hur mycket mer, om vi delar den genom att rita lodräta och vågräta streck! Ber att få köpa ett halvt dussin knappar.



Är vi nu färdiga

med den första räkneundervisningen? Man kan svara både ja och nej. Begreppet är inte skarpt avgränsat i den pedagogiska diskussionen varken beträffande barnens ålder eller omfånget av tal och räkneförlopp. Låter vi den första räkneundervisningen beteckna den undervisning, som äger rum under första skolåret, vilket kan ha visst fog för sig, enär det här är fråga om ett rent grundläggande arbete, så skulle vi efter *en* uppfattning vara färdiga och efter en annan ha kvar den inte obetydliga uppgiften att hjälpa barnen till insikt i talsystemet åtminstone upp till 100 och att utföra additioner och subtraktioner inom detta område med tal, som inte kräver tiotalsövergångar. Den som söker efter en avslutad framställning just av första skolårets kurs, bereder vi tyvärr besvikelse.

Vi vet vad som i 1919 års undervisningsplan är första skolårets kurs. Dess omfattning anges så: »Behandling av talområdet 1—20 eller, där så finnes lämpligt, 1—30, därvid övningar för vinnande av färdighet särskilt böra avse tilläggning och frångragning.» Därutöver nämnes övningar att använda centimeter, deciliter, hektogram, ören, stycketalssorter och tidmått. Den närmast föregående kursplanen, 1900 års Normalplan, angav de övningar, som företrädesvis skulle genomgås i första klassen, sålunda:

»I. Öfningar för uppfattning, beteckning och uppnämning af talen 1—10, 10—20. II. Räkneöfningar i de fyra räknesätten med så väl sak- som sifferexempel inom talområdet 1—20.» Vad däremot den undervisningsplan, som kan väntas bli följden av förslagen från 1946 års skolkommission, kommer att stadga, vet vi inte. Diskussionen har pekat mot den förut antydda utsträckningen av talområdet till 100 med additioner och subtraktioner inom vilket tiotal som helst, dock utan tiotalsövergångar. Som förut påpekats, kan man ställa sig skeptisk inför tanken att låta nybörjarna laborera med de stora tal, vilkas värde vi knappast kan göra klart för dem, varför övningarna blir av ensidigt mekanisk art. Skulle emellertid bestämmelsen likväl införas, så får vi göra det bästa möjliga av situationen. Vi måste då minska på det laborativa umgänget med de små talen (som likväl innehåller nyckeln för allt räknande!) och ägna en inte alltför ringa del av tiden åt arbetet med talsystemet 20—100: en ytlig presentation är värdelös. För införandet i talsystemet finge vi använda streckrad och talbilder. Men det kan aldrig komma att ske med den grundlighet, som kan bli möjlig i andra klass, där uppgiften enligt förf:s tanke hör hemma. Den ytliga behandlingen och ett eventuellt mekaniskt laborerande med siffror med oklara bakomliggande värden, synes mig beteckna en utveckling som går stick i stäv mot den andliga mognadsprocessens förlopp, ett förlopp som psykologin spritt ljus över och som alla de, som har arbetat i den första undervisningen, har erfarenhet av.

För införandet i talsystemet 1—100, eventuellt i klass 1, hänvisar vi till nästa kapitel.

7. Räknelekar

I det föregående har här och var skymtat fram någon räknelek, utan att vi därmed just har redovisat för allt i den vägen. Även av andra skäl kan en översikt vara motiverad.

1. *Ramsor.* Vid åtskilliga lekar ute brukar barnen räkna för att bestämma, vem som ska stå e. d. Det kallas stundom »pala» efter början av ramsan Apala misala misinka miso. Då man lär barnen talraden, kan måhända en sådan räkneramsa som denna stoppas in vid något tillfälle.

En två — vem ska stå?
Tre fyra — fånga lyra,
fem sex — äta kex.
sju åtta — ät med måtta,
nio tio — gå på bio,
elva tolv — sopa golv.
sex i tolv är två — du ska stå.

2. *Veckans dagar.* Se s. 58.

3. *Lägga isär ett antal föremål* (lappar, nötter, ärter, tändstickor osv.). Man börjar själv: Jag har sju nötter. Jag delar dem så, att jag har några i vänster hand och de övriga i höger hand. Hur många är det i vardera handen? Den som säger de två rätta talen får komma fram och fortsätta.

4. *Att fylla ut.* Samma slag av föremål. Man börjar själv. Jag har tio räknelappar. Jag tar fem i den handen och resten i *den*. Hur många i *den* handen? Uppgifter i rask följd. Körsvar. Därefter leder barnen själva övningen i tur och ordning.

5. *Att spara till 10, 20, 50 öre* etc. Sedan man själv satt i gång, kan barn i tur och ordning komma fram: Jag har 15 öre och ska spara till 20. Hur mycket fattas? Den som svarar rätt får komma fram och fortsätta.

6. *Att dra ifrån.* Jag hade 10 duvor. Jag gav Stig t v å, Kärstin t v å, Anders t v å och Kalle t v å, och t v å flög bort. Hur många har jag kvar? Nötter, äpplen osv. ätes upp, delas ut — barnen brukade noga hålla reda på vem de gav till. Och den som hade fått något, glömde inte sin välgörare. En gång fick jag själv del av välfägnaden. Jag steg upp och tackade. Sen blev det ett tackande i klassen utan all ände! Träna borttagandet med små tal. Barnen ska vänjas att uttala räkneorden extra tydligt, lite dröjande, så att uträkningen kan verkställas undan för undan.

7. *Att fråga ner någon.* Den som står framme, får mottaga frågorna, räkna ut talen och med rätta svar försvara

sin plats. När han svarar fel, får den som hade hittat på talet komma fram, förutsatt att han själv vet svaret — en förutsättning som visade sig vara mycket viktig, så ivriga som barnen blir att komma sina kamrater till livs.

8. *Leka handelsbod.* Olika förutsättningar under olika lektioner. T. ex.:

a) Greta börjar att stå i affär. Ni går i tur och ordning fram och köper. Hon räknar ihop vad det blir. Gör hon fel, får den som upptäckte det komma fram.

b) I dag köper ni billigt. Får inte kosta över 18 öre. Ni lämnar fram två tioöringar, handelsmannen tar betalt och räknar ut hur mycket ni ska ha tillbaka. Den som kommer på handelsmannen med räknefel får byta med honom.

c) En prislista med bilder är uppritad på tavla eller spännpapper. Ledaren pekar på föremål efter föremål och lägger tyst samman och säger vad han ska betala. Kamraterna har också lagt samman. Finner de, att han har räknat fel, blir det ny ledare.

9. *Att tävla med sig själv.*[1])

a) Barnen lägger på sina plattor multiplikationstabellens produktal. Läraren tar tiden, antecknar den. Barnet gör om övningen (samma dag eller en annan dag) och jämför tiderna. Se s. 132!

[1]) Förf. är tveksam om lämpligheten av att låta barn tävla med varandra. Det skapar missmod hos många, övermod hos andra, som kanske endast har ett snabbare arbetstempo att tacka för sin framgång. Och då abstraheringen är en mognadsföreteelse, ska inget barn utsättas för smälek, därför att det är senare utvecklat än andra. Jag försökte en gång med anteckning undan för undan av barns prestationer och ritade grafisk framställning för varje barn. Men när jag hörde deras reflexioner och såg deras minor, när de pekade på de olika långa linjerna på det uppsatta papperet — det var alltid någon, som gick därifrån med nedböjt huvud — tog jag bort tabellen. Och jag gjorde aldrig om tävlingen.

b) Barnen arbetar med läggspel för individuell träning av räknefärdigheten (t. ex. Magda Carlsons, Palins). Tid och ev. fel antecknas från övning till övning.

10. *Gissa nötter.* En gammal jullek. Kan lekas på två sätt.

a) Två och två barn med tillräckligt stort rörelsekapital av nötter, ärter e. d. Det bestämmes i förväg, inom vilket talområde barnen ska röra sig: de bör inte gärna få ta mer än 10 varje gång. Greta tar ett antal i sin hand, räcker fram den: Hur många har jag? Hans gissar. Säger han för mycket eller för litet, lägger han till skillnaden mellan sitt svar och det riktiga antalet. Gissar han rätt, får han hela rovet.

b) Grupper om 4 eller 5 barn. Vi antar 5. Varje barn får 3 nötter (eller 4 eller 5). I mitten en ask att lägga tillbaka nötter i. Nu har vi alltså 5·3 nötter = 15 nötter. Var och en gömmer i ena handen 1, 2 eller 3 nötter (även 0!), alla räcker fram handen. Så gissar man gruppen runt, hur många nötter sammanlagt det finns i de framräckta fem händerna. När var och en sagt sitt votum, öppnar alla händerna och någon räknar samman nötterna. Den som gissat rätt får lägga en av sina tre nötter i asken. Nu är en nöt borta, och barnen måste besinna, att nästa gång kan summan bli högst 14. En ny omgång och så undan för undan, tills någon har lagt undan sina tre nötter. Han har vunnit.

11. *Räknesagor.* »Vi skulle baka kakor hemma. Först tog vi ut en plåt med 8 och sen en med 4. Då hade vi 12. Och sen — — —.» — »Men om du åt upp två?» — »Jaha, då hade jag 10 kvar.» — »Skulle du inte ge mormor några?» — »Jo, mormor skulle få 4.» — »Då hade du 6 kvar.» — »Jaha. Men så tog jag ut en plåt, som det var 9 på — — —» Osv.

Ge barnen uppslag att bygga sagan upp med ting, som naturligt kan ökas och minskas. Några exempel:

Barn i grupp, några kommer till, andra skickas ärende, hälften av dessa kommer tillbaka, några springer in och tar på sig, osv.

Resa tåg, åka buss: Så många var med vid resans början, så många kom till där och där. Vid nästa gick fyra av, två kom till osv.

Vad spargrisen Grymte får vara med om under en vecka före jul: Lägga i och ta ut!

Tända ljus och släcka ljus.

Fåglar på gren: slår sig ned, flyger bort, kommer tillbaka, skrämmes osv.

Samla bilder (märken, frimärken e. d.): har 15 med mig, lämnar två till Greta för att få ett fint tillbaka osv.

Tanken är alltså att få in naturliga räknesituationer. Barnen brukar hjälpa utmärkt bra till. Stundom tar man själv hand om räknesagan. Jag minns en gång vilken lustig effekt sagan åstadkom genom att jag lät det vara hål på den ena av de fickor, som jag la ner de plockade nötterna i.

8. Teckningar och andra arbetsövningar

Detta kapitel borde beledsagas av några sidor med uppslag till lärarteckningar, särskilt impulsbilder för barnteckningar. Men det tillåter inte utrymmet. Och strängt taget gäller även här de uppslag, som getts i handledningarna för hembygdsundervisning och modersmålsundervisning under de två första skolåren. Särskilt serieteckning, som omnämnes i del I av hembygdsundervisningen, skulle kunna tillämpas, när man snabbt vill teckna ett antal bilder för räknesagor o.d. Därjämte finns i de talrika läroböckerna för de två första skolårens räkning många illustrationer, som lämnar uppslag.

Vi måste likaledes nöja oss med att endast hänvisa till de mätningar, modelleringar och klippningar, som ingår i arbetsövningarna i andra ämnen. De tjänar räkningen lika bra som de tjänar ämnena, därför att de låter barnen på ett naturligt sätt och i ett ändamålsbetonat syfte handskas med mått och tal. Stundom gör man en extra anpassning genom att låta barnen klippa ett aktuellt antal av något, t. ex. 8 fyrkanter, av vilka hälften ska delas i trianglar, för mönstersammansättning (bokmärken o. d.). Genom upprepad vikning kan man stundom få en grundform, som med få klipp ger stjärnor, dansande tomtar o. d. till de talvärden, som man håller på med. Det går särskilt lätt med tunt papper.

Bilden av den första räkneundervisningen skulle bli oriktig, om inte även det i yttre mening produktiva får en plats bredvid de skildrade muntliga och skriftliga arbetsformerna. Detta utvändiga är ett av medlen att nå konkretion i en undervisning, i vars natur ligger en frestelse till abstrakt framställning. Iakttagelser på barnens sätt att helt och fullt gå upp i undervisningen brukar ge alldeles tillräcklig ledning, när det gäller att avväga omfattningen av det utvändiga arbetet.

VIII

Vissa sidor av den fortsatta räkneundervisningen

Om inte förr så i andra skolåret använder barnen läroböcker i räkning. Lärogången i räkneböckerna kommer väl då i huvudsak att leda barnens systematiska framskridande i räkningens konst. Därför tar inte denna utredning upp hela kapitlet om räkningen i andra skolåret utan endast vissa sidor, nämligen sådana, som utgör en mera omedelbar konsekvens av framställningen i det föregående.

1. Talen 20—100

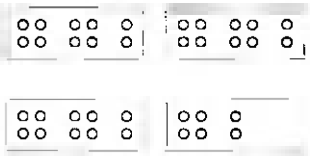
Sannolikt klokt att dela upp genomgången i två avsnitt 20—50 och 50—100. De bästa hjälpmedlen synes vara streckraden och talbilderna, streckraden för att påvisa talsystemets regelbundna uppbyggnad i tiotal efter tiotal och för att stödja inlärandet av talens namn och plats i systemet, talbilderna för att förmedla en uppfattning av talens storlek.

Genom streckraden kommer talen att bilda en linje, *tallinjen*, som nog normalt ingår i vår föreställning om talen. Blir den klar och bra, så är den till ovärderlig hjälp vid räknandet. Barnen ramlar mycket lätt in i galet tiotal, när de stiger över gränsen. Tallinjen leder dem rätt. Observera, att meterstocken bjuder en perfekt tallinje upp till 100, frånsett att den syns dåligt, när man då och då vill påkalla hela klassens uppmärksamhet. Därför bra att rita strecklinje på tavlan eller spännpapper, helst detta senare, så att den är kvickt tillgänglig. Skilj gärna de olika tiotalen genom att omväxla med färgerna på linjen.

Vid första lektionen ser barnen sin gamla tallinje till 20, en ny sträcka för det tredje tiotalet ritas till, streckarna ritas och namnen ovanför dem skrives och läses under livlig medverkan från barnens sida. Vilket tiotal har vi ritat? Hur många tal hör till det? Vad heter talen? Baklänges också? Vilka tal står mellan 20 och 25? När vi nu har travat omkring i tredje tiotalet och springer från 30 mot noll och tar ett skutt över den höga streck, där det står 20, vilket tiotal kommer vi då in i? Vi springer som en tomte på spetsarna, skuttar över 10 — var hamnar vi? Stryk starkt under, att i nya tiotal återkommer första stugans tal, nämligen 1—9. Så blir det ju lika enkelt som när barnen går från leken i ett rum och fortsätter att leka i ett annat.

På motsvarande sätt växer fjärde och femte tiotalet upp. Leken att hoppa omkring i de olika stugorna kan nu bli än mer omväxlande. Och naturligtvis löser vi räkneuppgifter än i den ena, än i den andra. Till en början är uppgifterna av denna typ: Där är 40, vart kommer du, när du lägger 5 till? Där är 49, vart kommer du, om du tar bort 6? Där är 10. Peka på linjen och lägg till 10 varje gång. Börja på 50 och ta bort 10 varje gång. Börja på 5, ta 5 steg åt gången — vilka tal kommer du till? Hoppa trestegshopp med början på 3. Barnen ska bli hemtama i stugorna.

Talbilderna använder vi för att klargöra storleken av de tal, som hör hemma i de olika stugorna. Intrycket av mängd förmedlar talbilden bättre än tallinjen. Och därför bör talbilden också få vara med. Jag lät barnen dels arbeta med kartongbitar med en tiotalsstuga på varje bit samt några små lappar med en prick på,[1]) dels rita talbilder efter samma system som i första klass. 36 ritar barnen så:



eller alla fyra i rad.

För att ge barnen föreställning om talens värde (så klara nu föreställningar om så stora tal kan bli hos åttaåringar) bör man behandla allsidigt något tal inom varje tiotal. Det är alltså inte nödvändigt att, såsom vi gjorde med 1—10, ge varje tal en allsidig behandling. Man väljer helst tal av typen 24, 25, 32, 36, 45, 48. Det finns så mycket att leta rätt på i sådana tal. Om barnen har varit med om att ge ett eller ett par tal inom varje tiotalsgrupp en monografisk behandling, så får de någon uppfattning om hur pass stora talen inom gruppen är.

Här har vi 3 tiotalsstugor i handen. Vi lägger ut det första tiotalet och till höger därom det andra, så fick vi 20. Under det första lägger vi det tredje. Så fick vi 30. Var står 30 på tallinjen? Ja ha, och så många är 30 som alla prickarna på de tre stugorna är. I dag lägger vi till så många, att vi kommer till 36. Hur många ental behövs? Där ligger 36. Hur många för att få denna påbörjade tiotalsstuga full? Vart kom vi då, om vi la dessa fyra också till?

Nu undersöker vi vad 36 består av. Jag börjar: Min trettiosexa består av 30 och 6. Vad har ni att bjuda på? 35 och 1, 32 och 4, 20 och 16. Osv.

Nu ser vi efter, om det finns några tal som går jämnt upp i 36. Jag försöker med 5. I första stugan har vi 2 femmor, i andra också 2 femmor, det blev 4 femmor, och i tredje stugan sitter också 2 femmor, det blev 6 femmor. Den fjärde

[1]) Finns i Hand och Öga nr 3.

stugan är inte full, men där sitter i alla fall en femma och en ensam etta. Det blev sju femmor och en etta. Femman gick alltså inte jämnt upp i 36. Nu försöker Pelle med tvåorna, Stina med treorna. Nåå? Pelle: Det finns alldeles fullt med tvåor — — 12, 14, 16, 18, 18 tvåor! Och de gick jämnt upp. Stina: Jag har funnit 12 treor. Och det blev inget över. Bravo. Nu söker vi allesamman efter fyror, sexor och nior. — — — Och om vi delar 36 mitt i tu?

Nu jämför vi 36 med andra tal. Jag tar ett exempel, och ni fortsätter. 36 är 7 mer än 29. Nåå? — — 36 är 2 mer än 34, — — 16 mer än 20. — — dubbelt så mycket som 18. — — 4 mindre än 40.

Där ligger 36 fortfarande. Att ta bort 6 är nästan för lätt. Men om vi försöker ta bort 7? Just det! Vi för undan de sex, som ligger utanför stugan och går in och tar en från tredje stugan — det syns tillräckligt tydligt om vi med fingret täcker den tionde pricken. Kvar? Vi skriver det så 36—7 = 36—6—1 = 29. Nu är där 29. Lägg till 7. Då behöver vi en för att fylla den tredje stugan och får 6 att lägga utanför. — Vi fortsätter, och utför i handling och berättar om 36—9, 36—7, 28+8, dvs. 28+8 = 28+2+6 osv.

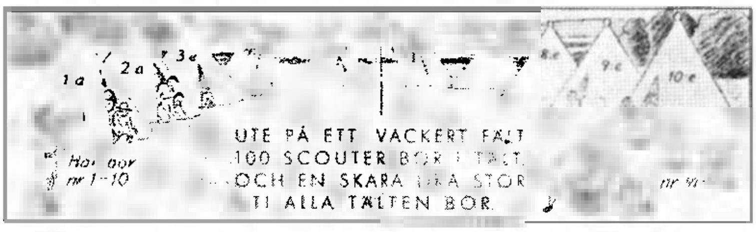
Lapparna bort. Talbilden ritad på tavlan. Med pekpinnen lägger vi 36 i sär i termer. Snabba svar, stundom i kör: 36 består av 35 och ett, 36 består av 34 och 2 — — 36 består av 3 tior och en sexa — — av 18 tvåor — av 18 och 2 och 16, — — av 26 och 4 och 6. Och vad mycket mer man snabbt kan få fram.

Nu har vi 36 bara inom oss. Vi ritar stugorna i luften. Här var en tia, här var den andra tian, här var den tredje och här sticker vi hål i luften på 6 ställen, ett två tre fyr fem sex. Och barnen fäktar med! Nu slår vi bort de sex. Kvar? Dit med dem igen! Ett två tre fyr fem sex. Fort ska de gå. Nu slår vi bort en hel tia. Kvar? Sätt dit den igen. Två tior bort. Bygg upp 36 igen. Slå bort 8: först 6 utanför, sen två innanför. Kvar? Nu sitter där 28. Hur många för att fylla ut till 30, — — till 32 — — till 36? Det är otroligt vad en sådan träning gör gott. Har vi någon, som olyckligtvis hänger fast vid att räkna på fingrarna, så märker han, att det går inte alls, om han vill vara med i leken. Han märker, att han måste lära sig att handskas med stugorna, att springa på talraden, att ta små grupper åt gången o. d., om han inte strax inser svaret.

Den skriftliga uppgiften börjar med att barnen ritar talbilden, såsom förut har visats, under den skriver 36 i termer, enkla additioner och subtraktioner, mycket ofta såsom barnen själva hittar på.

På motsvarande sätt behandlar vi 50—100. Tallinje och talbilder. Ett och annat tal inom varje tiotal får fullständig behandling.

Därefter följer väl närmast en grundlig träning med de tio tiotalen — lustigt var att barnen rätt länge behöll namnet stugor. Och gärna det. Det blir konkretare så, och värdet av 100 blir tydligare. Ja, man kan t. o. m. understödja detta konkreta sätt att föreställa sig 100. Här har våra något enkla ramar kring tiotalen gjorts till tält med 10 scouter i varje. Hur vi kan göra räkneberättelser därom, behöver inte utredas. Men roligt är det!

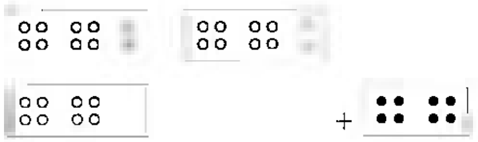


Teckning: *A. Hjelm.*

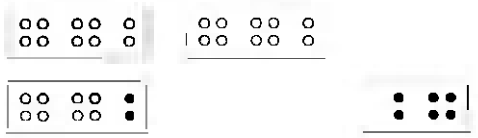
2. Tiotalsövergångarna

är troligen förberedda i barnens räkneböcker. Likväl skulle jag vilja föreslå, att tillvägagångssättet påtagligt utredes gång på gång och att man sedan konsekvent tränar barnen att använda ett och samma sätt, nämligen det som man funnit vara bäst. Hur vi har gått tillväga, har visats i olika sammanhang. Därför här endast sammanfattning. I andra klass behöver vi sannolikt intet annat åskådningshjälpmedel än talbilder, som vi ritar själva på tavlan. Men tar det emot, griper vi till tioöringar och ettöringar samt räknelappar, ordnade som talbilder.

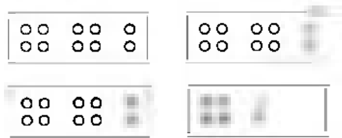
28+8 = ?



Första steget



Andra steget



Det hela skrives på det långa sättet:

28+7 = 28+2+5 = 35

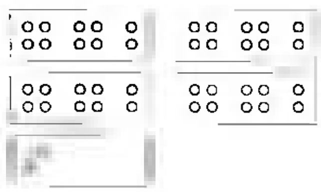
Tiotal finns i båda addenderna, t. ex. 18+28 = ? Barnen vet, att termernas ordning är likgiltig. Det är bekvämast att ta det stora talet först, alltså flyttar vi om termerna:

$18+28 = 28+18$. Vi gjorde t. o. m. ett rim. Och när vi muntligt gick igenom de spalter i räkneboken, som barnen var för sig skulle räkna, och om vi därvid träffade på den antydda situationen, så sa barnen: *28 är störst, det tar vi först.* Alltså: $28+10 = 38$, $38+2 = 40$, $40+6 = 46$ eller skrivet i ett sammanhang: $28+18 = 28+10+2+6$.

Vi ska bara inte begära, att barnen *kan* det efter en utredning, hur påtaglig den än har varit. Därför träning på mängder av likadana tal. Man kan skriva upp på tavlan, så att man får tal av likartad byggnad, och sen tillsamman med barnen räkna igenom dem, gärna i kör och gärna omigen och omigen. Färdigheten ska bli omistlig. Det dröjde åtskilliga år, innan jag förstod, att handlande utredning, demonstration och förklaring inte i och för sig hjälpte. »Jag har ju sagt det! Jag har ju visat, hur du ska göra! Varför gör du inte så?» — Den klagovisan är meningslös, orättfärdig också. I stället för att jämra oss får vi sätta oss bland barnen, ta om det svåra och träna, träna, träna. Det måste bildas fasta vanor. Barnen är inte alls hjälpta med en påminnelse om, att de ska »tänka»: Man kan inte genom en abstrakt tankeakt finna svaret på $27+68$, om man inte känner de tankebanor, utefter vilka lösningen kan tänkas fram. Jag har intrycket, att vi i vår undervisning har benägenhet att skörda, där vi inte har sått, eller att skörda för tidigt.

Tiotalsövergången vid subtraktion reder vi likaledes ut genom att först utföra den i handling, sen med tecknad talbild, tecknad gärna i barnens böcker också.

$43—15 = ?$



Vi tar bort en full stuga och säger: 43, ta bort 10 är 33 och skriver: 43—10 = 33.

Vi tar bort i bokstavlig mening, när vi arbetar med rörligt materiel, och vi stryker över, när vi arbetar med tecknad talbild. Vi konstaterar, att vi *skulle* ta bort 15 men har tagit endast 10, alltså ska vi ta bort ytterligare 5. 3 sitter utanför, dem tar vi först eller stryker över dem och skriver 33—3 = 30. Nu har vi 2 till att ta bort. Vi går in i närmsta stuga, stryker 2 och skriver 30—2 = 28. Därefter sammanfattande skrivning på det långa sättet: 43—15 = = 43—10—3—2 = 28.

3. Att räkna substraktion genom tilläggning

Det senaste exemplet gick nog bra på det sättet. Men antag att uppgiften hade sett ut så: 43—35 = ? Naturligtvis kunde vi ta bort 3 tiotal — med talbilderna går det t. o. m. snabbt och klart. Men vid enbart muntlig räkning är det mindre vigt. Då är det bättre att fylla ut, alltså att undersöka hur många vi ska lägga till 35 för att komma till 43. Att åskådligt räkna ut det går lättare vid tallinjen än med talbild. Vi fixerar var vi har 35. Till 40 är det 5, från 40 till 43 är det 3, tillsamman från 35 till 43 är det sålunda 8. 43—35 = 8.

Även detta måste övas med all flit och stor konsekvens. Vi brukade ta särskilda träningsövningar, och mot slutet av andra skolåret gick det rätt bra. Vi såg alltid först efter, om de båda termerna i subtraktionen låg nära varandra. Var det fallet, slog vi fast, att talet lättast räknades ut genom utfyllnad. Vid dylika träningsövningar läste vi tal efter tal i barnens räkneböcker och räknade igenom dem, gemensamt, mycket ofta i kör eller med ett halvhögt resonerande, för att alla skulle komma med. Då det som nu gällde att nöta in en teknik, en tankebana, drog vi också med de snabba räknare, som måhända var långt före flertalet. Ett fast och säkert tillvägagångssätt är bra att ha, hur duktig räknemästaren än är. Efter de gemensamma träningarna släpptes skaran lös igen för arbete på egen hand.

Utfyllnadsövningarna kom alltid automatiskt fram, så snart vi sysslade med rena tiotal, t. ex. 50, 100. Och att de övades vid köp och tillbakagivning, har förut påpekats.

4. Räknetabeller

är kända sedan mycket länge. De syftar i huvudsak till träning av räknerutinen och kan förkorta vägen mot automatisering av räkneförlopp, som vi byggt upp på handling, åskådning och ett analyserande genomtänkande. Drives övningarna bara en stund åt gången, men då intensivt, så behöver man inte ängslas för de obenämnda talen. När barnen märker, att det går lättare dag för dag, så finner de dem t. o. m. roliga.

William Lay rekommenderade två övningstabeller. Den första är byggd så, att alla rader, både vågräta och lodräta, ger 45. Barnen blir förbluffade och tycker, att det kan vara onödigt att räkna ut alla raderna. Men de kan gott också förstå, att en stunds systematisk träning är värdefull och att det därvid är bra att kunna kontrollera sig själv. Det är lätt att skriva in talen på stort, upprutat spännpapper.

Hur den andra tabellen är byggd, kommer läsaren nog underfund med. Den har ju endast vissa kombinationer, som passar för andra skolåret. Men jag tar den ändå med: man kan peka på de tal, som barnen ska träna på, t. ex. ett tal från fjärde raden + ett tal i första raden. Det är viktigt, att barnen inte bara hör utan också ser de tal, som de ska lägga samman.

Vi tar första tabellens vågräta rad: 3, 5, 4, 6, 7, 1, 0, 2, 9, 8. Vi läser tillsamman med barnen 3+5 är 8, 8 och 4, ja då tar vi först 8 och 2, det blev 10, 2 därtill 12, 12 och 6

3	5	4	6	7	1	0	2	9	8
5	7	6	8	9	3	1	4	2	0
7	9	8	0	2	5	3	6	4	1
9	2	0	1	4	7	5	8	6	3
2	4	1	3	6	9	7	0	8	5
1	3	2	4	5	6	8	9	7	6
0	1	9	2	3	8	6	7	5	4
8	0	7	9	1	6	4	5	3	2
6	8	5	7	0	4	2	3	1	9
4	6	3	5	8	2	9	1	0	7

3	5	4	6	7	1	0	2	9	8
15	17	16	18	19	13	11	14	12	10
27	29	28	20	22	25	23	26	24	21
39	32	30	31	34	37	35	38	36	33
42	44	41	43	46	49	47	40	48	45
51	53	52	54	55	50	58	59	57	56
60	61	69	62	63	68	66	67	65	64
78	70	77	79	71	76	74	75	73	72
86	88	85	87	80	84	82	83	81	89
94	96	93	95	98	92	99	91	90	97

är 18. 18 och 7, ja där tar vi först 18 och 2 är 20, 20 och 5 är 25, 25 och 1 är 26, 26 och 0 är 26, 26 och 2 är 28, 28 och 9, jo 28 och 2 är 30, 30 och 7 är 37, 37 och 8, jo 37 och 3 är 40, 40 och 5 är 45. Det *var* rätt! Omsider behöver man inte säga mer än varje delsumma jämte det tiotal, där man vilar ett slag, alltså 3, 8, 10, 12, 18, 20, 25 osv.

Fråndragningsträning sker genom att vi börjar på 45 och drar tal efter tal ifrån. Blir resultatet 0 vid sista uträkningen, är räckan rätt räknad.

5. Trollkvadrater

kan vara roliga att sätta i handen på lite finurliga räknare i korsordsgåtans tidevarv. Men de har inte samma värde som räknetabellerna, när det gäller att stärka rutinen. Två typer med variationer återges.

Trollkvadraterna skriver man upp på tavlan och ger skriftlig eller muntlig instruktion. Man kan lätt konstruera nya trollkvadrater själv. Det kan behövas, ty när barnen har löst gåtan, så är dess stimulans borta. Naturligtvis kan de ändå använda den för additioner. Men spänningen blir större, om barnen står inför en ny uppgift.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

1. Lägg samman
a) varje vågrät rad,
b) varje lodrät rad,
c) varje sned rad (från hörn till hörn)!

2. Alla rader ska bli 18. Fundera ut de tal som fattas.

12		16
4		8

3. Alla rader ska bli 30. Vilka tal ska stå i de tomma rutorna?

30	5	
	25	
		20

4. Alla rader ska bli lika mycket som den sneda raden. Vilka tal ska stå i de tomma rutorna?

Hur ska vi bära oss åt för att konstruera en ny trollkvadrat? Se på den första med sina 9 rutor! I dem står alla våra ental, dvs. 1—9, men grupperade på ett alldeles särskilt sätt, så att vågräta, lodräta och diagonala rader ger samma summa, här 15. Tredjedelen av denna summa, i detta fall 5, står alltid i mitten. Talen 1—9 är en aritmetisk serie, i vilken varje efterföljande tal är en enhet större än det föregående. Nu kan varje aritmetisk serie med 9 termer placeras in i rutorna efter samma ordning som i vårt exempel. Har vi serien 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, så får vi vår påbörjade kvadrat nr 2, i vilken varje efterföljande term likaledes är e t t större än den föregående. Låter vi åter skillnaden mellan termerna bli 2 (t. ex. 2, 4, 6, 8 osv.), så får vi nr 3. Det går lika fint med serien 1, 3, 5, 7 osv. eller 5, 10, 15, 20 osv. Man kan börja på vilket tal man vill och låta skillnaden mellan termerna vara vilken som helst (men naturligtvis densamma i hela serien).

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

5. Lägg samman
a) varje vågrät rad,
b) varje lodrät rad,
c) varje sned rad,
d) de fyra rutorna i hörnen.
Med tjockare streck har vi delat de 16 små kvadraterna i 4 större kvadrater. Vad blir summan av de fyra talen i dessa?

26	16	24	2
6	20	12	
4	22	14	
32			

6. Vad blir summan av den första vågräta raden? — av den första lodräta? Alla andra rader ska ha samma summa. Vilka tal ska stå i de tomma rutorna?

I den 16-rutiga trollkvadraten (nr 5) är talserien 1—16, placerad. En ny kvadrat får vi, om vi ökar varje tal med samma tal (1 eller 2 eller 3 osv.). Om man delar den 16-rutiga i 4 kvadrater, såsom vi antytt med grövre linjer, kommer en ny rolighet fram: summan av talen i var och en av dessa fyra rutor blir densamma som summan av vågräta eller lodräta rader samt summan av hörnkvadraterna.

Hur adderingsuppgifter erhålles, visar nr 1 och 5. Vill man ha subtraktionsuppgifter, utelämnar man vissa termer, såsom nr 2, 3, 4 och 6 ger exempel på.

6. Multiplikations- och divisionstabellen

Vid undersökningen av talens värde kom åtskilliga mångfalder fram. Även om undervisningsplanen anger, att säkerhet i multiplikationstabellen inte ska fordras av andraklassarna, så utesluter det inte, att vi låter barnen arbeta med de funna mångfalderna och att vi också kompletterar dem, så att vi till slut har alla tabellerna t. o. m. 10 · 10. Förutsättningen härför är, att barnen laborerar fram de olika produkterna med tillhjälp av rörligt materiel och talserier. Dessa senare är ju intet annat än upprepade additioner, och om additionernas lämplighet är alla rörande eniga! Arbetssättet karakteriseras av det påtagliga handlandet. Någon svårighet att inlära tabellen i andra skolåret föreligger inte för flertalet barn.

Vi har på s. 104 o. f. visat, hur talserier intill 20 ordnas och bygges upp med talbilder och hur man skriver de vunna erfarenheterna med gångertecken och divisionstecken. Allteftersom talbehandlingen fortskrider ovanför 20, sammanfattar man och för talserierna vidare. Vid 30 förde vi talserien på 3 till sin slutpunkt, vid 40 fyran, vid 50 femman osv. Vi ritade dem och läste dem och fann dem inte svåra. Dock väntade vi med det egentliga innötningsarbetet till längre fram. Innan jag berättar därom, må det rörliga hjälpmedlet presenteras.

Det finns sådant som är färdigt, t. ex. Palins förut omnämnda räknespel. Träning på tabellen med dess hjälp går utmärkt. Men man kan också själv tillverka ganska användbara saker.

1) Man ger barnen pappremsor 2 · 20 cm. De delar in dem genom att sätta av 2 cm utefter sin cm-linjal. De får då 10 småkvadrater. I dem skriver de in produktserierna, t. ex. 2, 4, 6, 8 osv., 3, 6, 9 osv.[1]

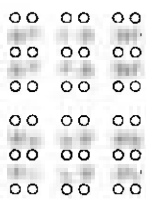
2) I stället för de nämnda remsorna kan man till omväxling (roligt att försöka på olika sätt i olika klasser) göra på det sättet, att barnen på småkvadrater (ung. 2 · 2 cm) skriver faktorerna på den ena, t. ex. 7 · 6, och produkten 42 på den andra. Två och två barn kan arbeta samman. En tar en lapp ur blandningen (endast en serie i varje kuvert eller ask), lägger upp den och ber kamraten lägga lappen med produkten därbredvid, så att vi får exempel $\boxed{6 \cdot 7}$ $\boxed{42}$. För att kunna lägga ut alla lapparna i rätt ordning får barnen öva talserie och tabell ganska intensivt. När alla lappar ligger på rätt plats, kan de båda grupperna skakas om och ge anledning till ny träning.

3) Trevligast blir både 1 och 2, om lapparna kompletteras med en pappskiva, upprutad som den pytagoreiska tabellen (10 · 10 kvadrater). På rutorna i första vågräta och första lodräta raden skriver barnen talen 1, 2, 3 osv. till 10. De övriga rutorna är tomma.[2]

[1] Då jag märkte, vilken nytta dessa remsor fick, lät jag trycka dem. De ingår i Hand och Öga nr 3. Skälet var närmast, att »hemlagning» tog för lång tid och att barnens skrivna siffror blev otydliga genom det flitiga användandet.

[2] På insidan av locket till Hand och Öga 3 finns detta färdigt.

Såsom exempel på hur träningen kan ske tar vi sexan. Vi ritar stående talbild för produktserien så:



Med stöd av täckskiva blottar vi rad efter rad, ser, adderar och läser 6, 12, 18, 24, 30 — paus! — 36 osv. Det upprepas ofta, även baklänges.

Sen läser vi det som tabell. Vi visar t. ex. två sexor, barnen säger 12 men också 2 · 6 är 12 samt 12 innehåller (eller består av) två sexor. Man gör halt vid 30 och finner, att det inte är så förskräckligt många saker att hålla rätt på.

Talbilden döljes, och vi försöker att säga talserien utantill. Därvid prövar vi också på uppgifter av denna typ: Hur många sexor är 12? —— 30? —— 60? —— 24? —— 42?

När barnen slutligen håller på att lära tabellen utantill, ska vi hjälpa dem med inpräglingstekniken. Vi visar dem, hur de prövar sig fram, känner efter var det tar emot, tittar efter på tabellen, prövar omigen från början — gick det nu med 7 · 6 och 8 · 6?

Gick det verkligen i dag, så är det inte säkert, att det sitter kvar i morgon. Då varierar vi träningen. Ta remsan med talserien på 6. Läs vad där står på den, framlänges och baklänges. Klipp i sär de små kvadraterna. Lägg dem i samma ordning som talserien på 6. Det var fint! Ta dem i händerna och blanda dem, låt dem falla på bänken, ordna dem igen. Det var förbluffande, vad barnen fann den enkla övningen rolig.

Intresset stegrades ytterligare, när var och en tävlade med sig själv. Jag satt med klockan i hand och barnen med lapparna i sina händer. När någon blir färdig, ger han tecken, och då säger jag hur många sekunder som har gått. Klara —— f ä r d i g a ——— GÅ! Barnen fick sina tider. Får vi göra det en gång till? Och så såg var och en efter, om han kunde förbättra sitt resultat

När sexan går riktigt bra, blandar vi dess lappar med tvåans, treans, fyrans och femmans, som förut klippts i sär. Då har vi 50 lappar att lägga ut på pappskivan. Ja, dess roligare fann barnen det. Det dröjde naturligtvis längre, innan man kunde ge besked om tiderna. Ändå större blir kravet, när sjuan, åttan, nian och tian också är färdiga. Då har vi 90 lappar att hålla reda på! Men jag såg aldrig någon vara ledsen för det.

7. Multiplikation och division

Vi lämnar därhän, hur mycket av tabellerna barnen kan bli säkra på under andra klassen. Inom vissa områden bör de dock bli så säkra, att de kan lösa enklare multiplikations- och divisionsuppgifter. Lämpligaste formen för benämnda tal är prislista för »handlande» räkning (jfr s. 85). Barnen kan med dessa listors hjälp få övning både klassvis och individuellt. De bör vid sina egna räkningar ha tillåtelse att använda de tabeller, som vuxit upp i deras räkneböcker vid sidan om talserierna. Tabellerna inpräglas genom att barnen vid aktuella tillfällen får minnet uppfriskat genom att rådfråga dem.

Kan vi ta tal av typen $3 \cdot 12$ och $36 : 3$? Det går nog. Här liksom vid så många andra tillfällen i denna bok ber jag få påminna om att vi städse ska hjälpa barnen att förvärva *en* teknik säkert. Att den ska grunda sig på insikt och inte på ett mekaniskt tillämpande av tabeller är lika viktigt här som i alla tidigare sammanhang. Även här kommer vanan att lägga talen isär till användning. $3 \cdot 12$ räknar vi så: $3 \cdot 10 = 30$, $3 \cdot 2 = 6$, $30+6 = 36$.

Divisionen är omvändningen, alltså delar vi först det tal, som ger oss 10 (resp. 20, 30, 40) till svar, därefter den återstående delen. Uppgiften $36 : 3$ räknas så: $30 : 3 = 10$, $6 : 3 = 2$, $10+2 = 12$.

Men om det inte går jämnt upp? T. ex. 42 : 5. Vi visar barnen, att svaret ska sökas på 5-serien (5-tabellen). Vi letar rätt på serien, och på den söker vi efter en produkt som ligger nära 42. Vi finner 40. Hur många femmor finns det i 40? Då finns det 8 femmor i 42 också, och det blir 2 ental över. Vi säger det så: 42 : 5 är 8 och så blir det 2 i rest.

Men sådant är ju självklart! Det behövs inte sägas här. Det är sant. Och det har inte skett i annat syfte än att ytterligare inskärpa den ledande principen i den första räkneundervisningen: att hjälpa barnen in på tankebanor, utmed vilka de kan finna lösningen av de till omfånget begränsade men för allt räknande grundläggande operationerna. Somliga av dessa förlopp kan synas vara litet omständiga. Men de leder barn med normal utveckling fram till den automatisering, som är nödvändig och som vi vill se som målet för vandringen från det konkreta, det rörliga, det påtagliga och mot det abstrakta. Att den eftersträvade automatiseringen inträder vid olika ålder för olika barn är ju bara naturligt, eftersom begåvning och utvecklingstempo är olika.

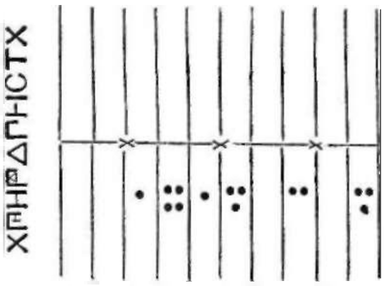
IX

Bilder ur åskådningshjälpmedlens och räkneundervisningens historia

1. Från räknemaskin till kulram

Forntida folk räknade på räknebord (räknebräde) eller räkneram. Grekerna kallade räknebordet *abax*, och därav kom det latinska namnet *abacus*. Se bild på s. 24.

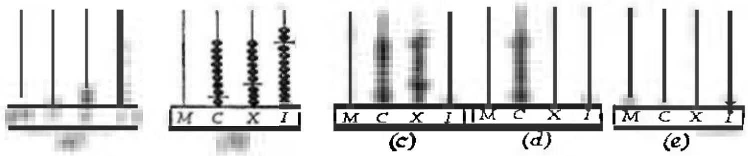
Räknebordet var indelat i kolumner. På ett räknebord, som man funnit på Salamis, fanns 10 kolumner på det nära 1½ m långa räknebordet. Man räknade med stenar. Lades en sten i första kolumnen (från höger), hade den värdet 1, i andra hade den värdet 5, i tredje 10, i fjärde 50, i femte 100, i sjätte 500, i sjunde 1 000, i åttonde 5 000, i nionde 10 000 och i tionde 50 000. Bilden visar tydligen talet 9 823 (5 000+4 000+500+300+20+3).



Huvudpartiet av en *abax* (räknebräde) från Salamis. Storlek: 149 × 75 cm. I kolumnerna lades »räknestenar» (på latin calculi, av vilket ord vårt kalkylera kommer). Stenens värde berodde på den kolumn, i vilken den lades (positionsvärde).

Ur Thorleif Johansen: *Forntidens matematik.*

Räknebordet blev till räkneram i två etapper. Först satte man pinnar lodrätt, och på dem träddes genomborrade kulor, skal eller stenar. Sedan uppfann man den stabilare konstruktionen med en ram, i vilken pinnarna med sina 10 kulor på varje var fastade. Liksom kolumnerna på abaxen hade här varje rad sitt särskilda talsystemvärde. Varje kula på nedersta raden hade sålunda värdet 1, på andra raden värdet 10, på tredje 100, på fjärde 1 000 osv. Bilderna visar, hur det gick till att räkna ut ett additionstal.



139 139+862

Hur man räknade addition på en romersk abacus. Positionsvärdet på de fyra stängerna är (från höger) 1, 10, 100, 1000.

a) Talet 139 är givet.

b) Man har lagt till 862.

c) 10 av de 11 entalen har förvandlats till ett tiotal och lagts till 10-talsstången, som förut hade 9 tiotal och sålunda nu har 10 tiotal.

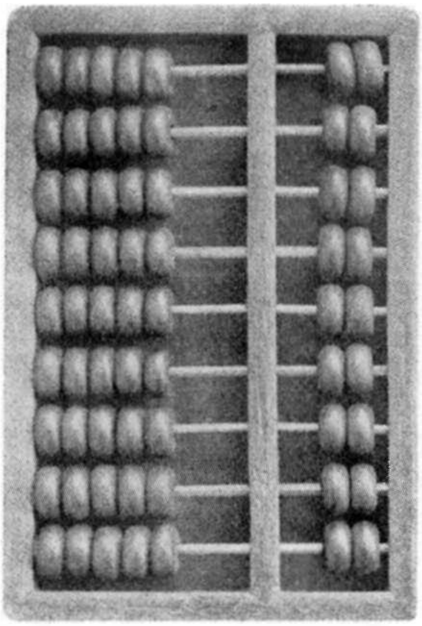
d. De tio tiotalen har förvandlats till ett hundratal och förts över till 100-talsstången, som därigenom fick 10 hundratal.

e) Dessa 10 hundratal har förvandlats till ett tusental. Summan 1001 kan avläsas.

Ur Lancelot Hogben: *Matematik för millioner.*

De gamla grekerna och romarna kände inte till nollan för att beteckna »ingenting». Deras siffror hade därför inget positionsvärde. De skrevs i ordning efter storleken av sitt värde, och hela talets värde fick man genom sammanläggning (och viss fråndragning). Indierna upptäckte nollan som tecken för »ingenting», en upptäckt som har betecknats som en av de märkligaste i räknandets historia. Med nollan kunde man utmärka, att en viss talsort saknades i en sifferframställning. Tack vare den kunde man beteckna vilket tal som helst med endast 9 andra symboler (siffrorna 1—9). Den medförde den utomordentliga förmånen, att varje tecken dels hade sitt eget värde, dels fick ett värde på grund av sin plats i talsystemet. Det senare kallar vi siffrans positionsvärde. Vill vi beteckna nio ental, skriver vi 9, vill vi beteckna nio tiotal, skriver vi samma tecken men låter en nolla ange, att av ental finns det ingenting: 90 osv. Jämför vidare 9, 90, 909, 9 000, 9 090 osv.! Hos de folk, som inte kände nollan (t. ex. greker och romare), gav kulramen en slags ersättning för de fördelar positionssystemet skänkte. Kulramen användes som räknemaskin hos nyssnämnda folk långt efter det de — troligen via araberna — hade lärt känna nollan och indiernas taltecken.

Kulramens historia kan följas också utefter en annan linje. I Kina användes en räkneram, som kallades swan-pan. Den är omtalad av Lao-tse från omkring år 550 f. Kr. men anses vara mycket äldre. Dess utseende framgår av bilden.



Kinesisk räknemaskin, swan-pan.

Ur Fr. Thomassen: *Strejflys over nogle Regneapparaters Udviklingshistorie.*

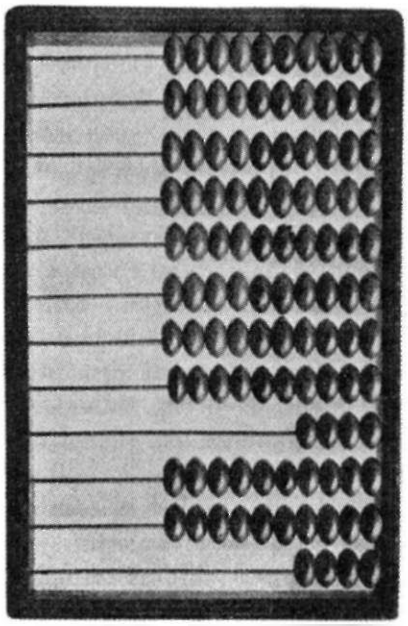
Swan-pan låg vågrätt, när man räknade på den. Första raden betecknar ental, den andra tiotal, den tredje hundratal osv. Dessa talsortsrader uppdelas av en ribba i ett större rum och ett mindre. I det större rummet betecknar varje kula på första raden 1 ental, på andra raden 1 tiotal, på tredje raden 1 hundratal osv. I det mindre rummet finns det 2 kulor för varje talsort, och varje kula betecknar 5 av respektive talsorter, alltså 5 ental, 5 tiotal osv. Det är ganska genialt. Därigenom behöver varje tråd innehålla endast 7 kulor, och ändå kan med dem anges 15 ental på första raden, 150 på andra, 1 500 på tredje osv. Och det är lätt att förstå, hur man kan förvandla två fem-kulor på första raden till ett tiotal på andra raden, 2 fem-tiotal på andra raden till ett hundratal på tredje, vilka förvandlingar krävs vid addition, liksom motsvarande upplösningar (»låna») vid subtraktion. Försök att räkna ut en addition! Det är faktiskt riktigt roligt. Vi lägger samman 57 och 36. Först observerar vi då, att det behövliga antalet kulor ska *föras in till ribban* från »förrådet» vid sidorna. Talet 57 består av 5 tiotal, en femma och 2 ental, alltså för vi in till ribban en kula på andra raden och en på första raden i mindre rummet, det blev 55, och två kulor på första raden i det större rummet = 57. Sen för vi in till ribban tre 3 tiotal i det större rummet, en femma på första raden i det mindre och en etta på samma rad i det större rummet, alltså 30+5+1. Vi har då 2 femmor på entalsraden och ersätter dem med en tia på rad nr två och avläser 50+40+3 = 93. Rätt! *Fr. Thomassen*[1]) anger, att kineserna handskades med kulorna lika skickligt som pianisten behandlar tangenterna, ja, han citerar en författare från 1735, enligt vilken kineserna räknar »med så stor lätthet och färdighet, att de utan möda kan följa med en annan, hur hastigt han än läser upp exempel

[1]) Fr. Thomassen: *Strejflys over nogle Regneapparaters Udviklingshistorie.* Festskrift til Overlærer J. Nicolaisen. Kristiania 1917.

ur en räknebok. Vi européer med våra siffror kan inte begripa den hastighet, med vilken kineserna uträknar 'de alleransenligste Summer'.»

Thomassen anser det sannolikt, att det var den kinesiska räkneramen, som fördes till Ryssland och blev till den ryska räknemaskinen, varvid måhända inflytande av den romerska abacusen spelat in, eftersom den ryska räkneramen har 10 kulor på varje sträng liksom den romerska.

Den ryska räknemaskinen såg något annorlunda ut än vår kulram, såsom framgår av bilden. Första och fjärde raden har endast 4 kulor. De tre nedersta raderna användes för kopek, de övriga nio för rubler. Varje kula betydde på nedersta raden 1/4 kopek, på andra raden 1 kopek, på tredje 10 kopek, på fjärde 1/4 rubel, på femte 1 rubel, på sjätte



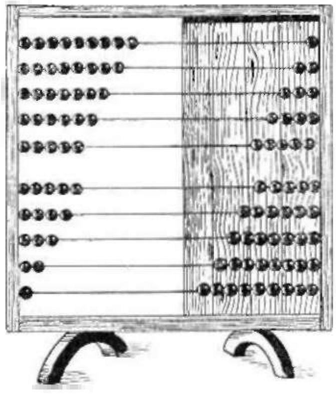
Rysk räknemaskin (stjoty). Ur Fr. Thomassen: *Strejflys* etc.

10 rubler, på sjunde 100, osv. upp till 10 millioner rubler. Det är mycket lätt att föreställa sig, hur man lade samman penningsummor och drog från. Försök bara!

En svensk lärare, som för inte många år sen företog en resa i Ryssland, berättade hur han på banker och i speceriaffärer såg personalen utföra räkningar på den ryska räknemaskinen och hur otroligt fort de handskades med kulorna.

Om den ryska räkneramen (på ryska stjoty) skriver Thomassen i anförda arbete, att den »kom till Västeuropa 1812 efter Napoleons nederlag vid Moskva. En fransk officer, överste Poncelet, som tillika var matematiker, upptäckte den och såg strax, att den skulle vara ett härligt medel för att åskådliggöra de elementära räkneoperationerna. När man tog bort de två strängar, som endast hade fyra kulor, blev det kvar 10 strängar med 10 kulor på varje, och en sådan apparat skulle bli av stort pedagogiskt värde. Under namn av den ryska räknemaskinen, den ryska kulramen eller blott kulramen blev den känd och utbredd.»

Det gick lättare för den ryska räkneramen att erövra Västeuropas skolor — och inte så få av dess barnkamrar — än för Napoleons soldater att ta den ryska huvudstaden. Behovet att åskådliggöra talstorheter och talsorter hade var och en känt, som sysslade med den första räkneundervisningen. Här kom nu en apparat, som var enkel att använda och enkel att tillverka. Kulramens vänner ansåg den som fullkomlig och brukade peka på, att av nyuppfunna apparaters företräden var det inte ett enda som saknades hos kulramen. T. o. m. talbilder kunde den framställa. Man hade kanske inte lika skarpt öga för dess svagheter. Dit hör främst, att den inbjuder till att göra lärardemonstrationen förhärskande, medan klassen endast ser på. Och att klassvis se ett antal kulor, som syntes mycket små längst borta i klassrummet, skjutas fram på en ståltråd, kanske i en tät rad, vars antal inte kunde uppfattas annat än genom upp-



Dansk Kugleramme. Med en skiva på den sida, som vändes mot barnen, doldes de kulor, som inte behövdes vid demonstrationen av ett visst tal.

Ur Fr. Thomassen: *Streif-lys* etc.

räkning, pekning och nickning, och därefter se en annan räcka kulor skjutas intill den förra, det var strängt taget en karikatyr av åskådliggörelse. Närvaron av de oanvända kulorna drog också blicken till sig och verkade förvillande. Detta senare bättrade man på genom att sätta en täckskiva framför ungefär hälften av ramen, såsom syns på en dansk kulram. För att undvika den förra och större olägenheten framställde man på olika håll mindre kulramar att sättas i barnens händer, stundom en-, två- eller femradiga.

Även andra förbättringar har försökts: större kulor, kulor med olika färg, kuber i stället för kulor, olika avstånd mellan trådarna m. fl.

En av de intressantaste modifikationerna av kulramen är »*decimalkuglerammen*», konstruerad av *N. P. S. Farstad.* Farstad var folkskolinspektör i den norska staden Larvik, och han fick patent på sin uppfinning. Han utställde den vid fjärde nordiska skolmötet i Stockholm 1880. »Den vakte under hr Farstads haand beundring ved de mangehaande operationer, den kunde udföre — — —», skrev en norsk tidning.

»Decimal-kuglerammen» av N. P. S. Farstad. Till vänster framsidan (sådan syntes apparaten för barnen), till höger baksidan, bakom vilken läraren stod. Det syns bra, hur kulsträngarna korresponderade och hur för tillfället obehövliga kulor kunde döljas för barnen.

Ur Farstads bruksanvisning, tillhörig Svenska skolmuseet, Stockholm.

I en skrift på 72 sidor[1]) beskriver konstruktören sin apparat och ger en inblick i sin räknemetod. Han behandlar talen allsidigt och åskådliggör med sin apparat de fyra räknesätten i hela tal och decimalbråk. De båda bilderna ur denna bok ger gott besked om apparatens utseende och konstruktion.

På framsidan (bilden till vänster) är anbragt en skärm, som dock täcker endast mittpartiet. Bak skärmen kan de kulor döljas, som inte behövs för tillfället. Till vänster om skärmen syns två fält med vardera tre lodräta stänger med olikstora kulor. Från vänster räknat betecknar kulorna hundratal, tiotal, ental, tiondelar, hundradelar, tusendelar. Observera det lilla märket på den smala pelaren mellan entalen och tiondelarna: det betecknar decimalkommat! Nu blir det inte svårt att avläsa talet, som markerats med kulorna, såsom 347,743. Skärmen tjänstgör också såsom svart tavla.

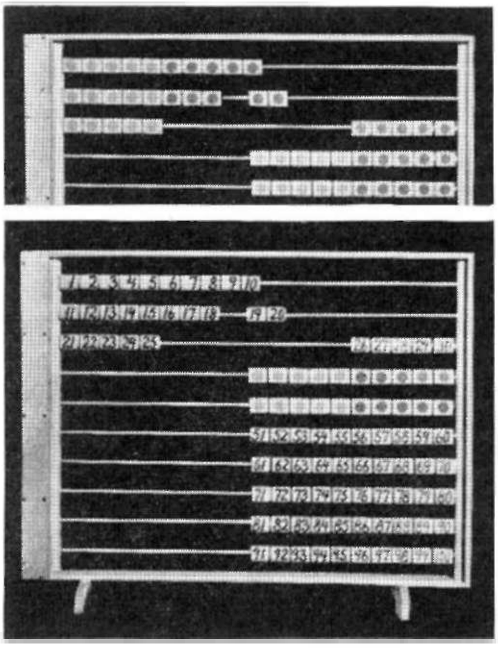
[1]) N. P. S. Farstad: *Om den første undervisning i regning.* Kristiania 1881.

På det högra fältet med sina vågräta stänger betecknar den översta stångens kulor hundratal, nästa tiotal och de övriga ental. Kommunikationen mellan de båda fälten framgår ju förträffligt av bilden till höger. Där ser man alltså den sida av apparaten, som vänder mot läraren. Man observerar, hur de åtta nedersta entalsraderna kommunicerar två och två. Därigenom kan kulor föras över från den ena stången till den andra intill ett antal av 15. Det är mycket lätt att föreställa sig, vilka variationsmöjligheter detta erbjuder, likaså vilken fördel det är att ha de kulor dolda, som barnen inte arbetar med. Vi ska inte av det citerade decimaltalet förledas att tro, att apparaten inte kan användas för de elementära räkneoperationerna. Vid dem är det främst det stora fältet med de vågräta stängerna som användes. Exempel torde vara överflödiga.

Limyrs regneramme är tills dato (januari 1949) den senaste räkneapparaten. Den har konstruerats av *Gunnar Limyr*, lärare på Sörlandet i Norge. Han fick norskt patent på apparaten 1948. Den bygger på både kulramens och talbildens princip. Utseendet framgår av bilderna.

I stället för kulor använder Limyr fyrkantiga klotsar (pelare), 4,5 cm långa. De kan dock inte snurra runt på stängerna hur som helst, endast vridas ett kvarts varv, och rörelsen sker med ett grepp på stången. Klotsarnas sidor 1 och 2 samverkar om *en* funktion, sidorna 3 och 4 om en annan.

På sidan 1 har varje klots en tydlig, fylld talbildsring (5 klotsar har röd ring, 5 har blå). När denna sida vändes mot barnen, kan den dels användas som vanlig kulram, dels grupperas till talbilder. På angränsande sida 2 har på första klotsen målats siffran 1, på andra klotsen siffran 2 osv. upp till 10 på första (översta) raden, på andra stången har klotsarna talen 11 till 20, på nästa 21 till 30 osv., så att den

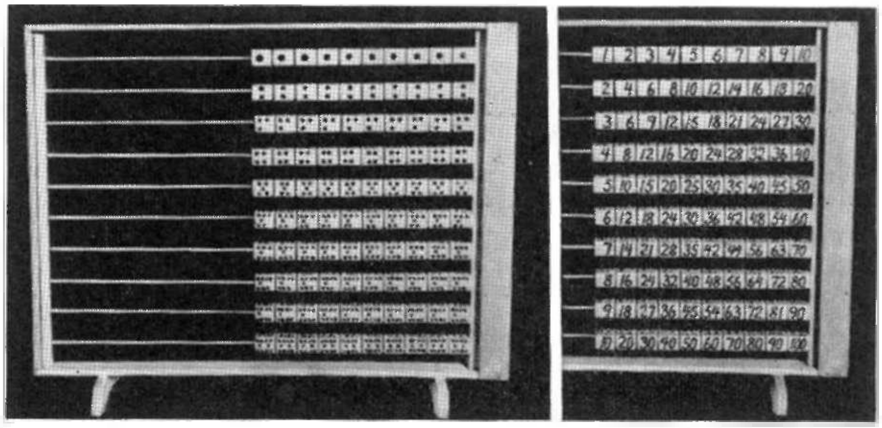


Limyrs regneramme, framifrån. Man ser överst, hur man har åskådliggjort 18÷7, och nederst, hur man efter att med ett handgrepp ha vridit samma stänger ett kvarts varv kan avläsa svaret också med siffror.

Foto Karl-Östen Sjöholm.

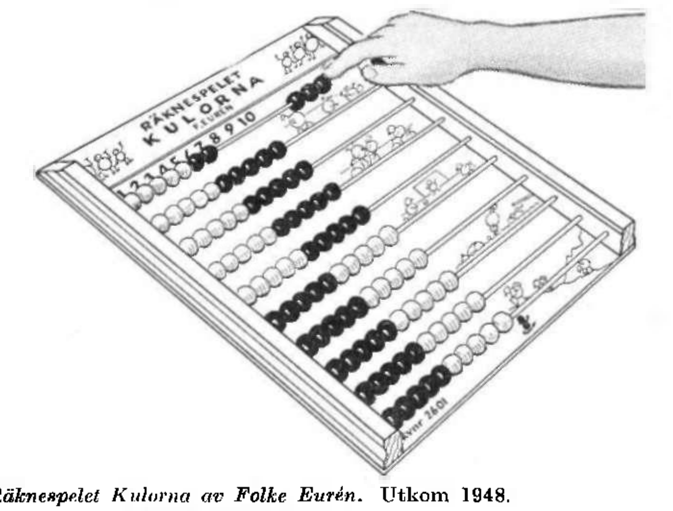
tionde stångens sista klots har talet 100. Om man nu ska lägga samman t. ex. 18 och 7, för man fram 18 klotsar med sidan 1 mot barnen, därefter 2 på andra stången och 5 på tredje. Barnen ser summa tjugofem. Men inte nog med det: Genom ett handgrepp vrides stängerna ett kvarts varv, varvid siffrorna blir synliga och visar talet 25 utskrivet!

På sidan 3 av klotsarna är ritade talbilder: på första stången •, på andra :, på tredje ∵ osv. På den angränsande sidan 4 är målade talen 1—10 på första stångens klotsar, 2—20 på andra stångens, 3—30 på tredje stångens osv. På tredje stången kan man sålunda bygga upp talserien 3, 6, 9, 12 osv. till 30, och genom att vrida stången ett kvarts varv kan man läsa samma talserie i siffror! Vändes endast fjärde sidan (den med talen) mot barnen, har de framför sig



Limyrs regneramme, **bakifrån. Till vänster: varje klots har en talbild,** som svarar mot det talvärde, som visas med siffror på bilden till höger, vilken erhållits genom att ett kvarts varv vrida hela systemet till vänster. Räknar man med talbilderna (t. v.), för man t. ex. på andra raden en klots till sidan och säger 2, en klots till och säger 4 och så talsorien framåt. Sen kan samma sak utföras med samma klotsar men med siffersidan vänd mot barnen (t. h.). Hela systemet till höger visar den pytagoreiska tabellen.

Foto Karl-Östen Sjöholm.



Räknespelet Kulorna av Folke Eurén. Utkom 1948.

Andra bilder av kulramar på s. 168.

den pytagoreiska multiplikationstabellen! Vad mer kan man begära av en demonstrationsapparat?

Senaste svenska kulram torde vara *Räknespelet kulorna*. Den konstruerades av Folke Eurén, släpptes i marknaden 1948 och är avsedd att sättas i barnens händer.

2. Johann Heinrich Pestalozzi

har ett stadgat namn i räkneundervisningens historia. Alla talar därom. Men hur många vet, vad det egentligen är fråga om?

Pestalozzis metod, tillämpad på räkning, framlades i tre elementarböcker så detaljerat, att de skulle kunna vägleda andra undervisare. När man gör några utdrag därur — Pestalozzis åskådningstabeller, som måste vara med i detta sammanhang, blir annars oförståeliga — så känner man lite oro: gör man inte Pestalozzis anseende en otjänst med att referera hans övningar? De är nämligen av en så formell art, att läsaren kanske skakar på huvudet och frågar: Kan man lära barn att räkna med sådana övningar? Övningarna är också ofta så svåra, att om man oförmedlat kommer in på dem, t. ex. i mitten, utan att vara förtrogen med terminologin och det stegvis uppbyggda systemet ända från e t t, får man tänka en god stund, innan man finner lösningen. Men säge oss Pestalozzi just i den situationen, skulle han le och med sin mest ödmjuka stämma säga: Där ser du, min vän. Metoden är inte så tokig. Du tvingades till att tänka!

Han skulle kanske också säga något mera: Mina åsikter om barns uppfostran till goda människor redovisas inte alls av elementarböckerna. De bär visserligen mitt namn, men min medhjälpare Herman Krüsi skrev Buch der Mutter — det var kanske litet galet, att han gjorde barnets egen kropp till föremål för de första åskådningsövningarna och de första språkövningarna — och när vi var där på Burgdorf och hade vår småbarnsskola och vår uppfostringsanstalt och vårt seminarium, så försökte lärarna där att se, hur långt vi kunde komma, om vi byggde elementarundervisningen i räkning på mina idéer om f o r m, t a l och s p r å k.

De tre elementarböckerna var *Buch der Mutter*, *Anschauungslehre der Massverhältnisse* och *Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse*. De två första översattes till svenska och utgavs 1812.[1]) En av översättarna var den Agardh, som sedermera blev biskop i Karlstad och gjorde en stark insats till förmån för en reformerad undervisning och en enhetlig skolorganisation: »ett enda sammanhängande men allmänt skolverk.» C. A. Agardh uppdrog »med snillets skarpblick skolans framtidslinjer i ett så djupt och omfattande perspektiv, att därinom rymmes allt väsentligt av det vi ännu sträva till.»[2])

Utgivandet höll på att omöjliggöras av den svenska fattigdomen och — Napoleonkrigen. Prenumerationssumman »besteg sig till» endast 100 riksdaler banco, och de plåtar, som graverats i Stockholm, sändes 1808 sjöledes till Malmö men »uppsnappades under vägen af Danska kapare»!

Det är av intresse att se hur Agardh i sitt inledande kapitel karakteriserar Pestalozzis metod och dess grundval: åskådning och självverksamhet. Agardh skriver:

De intellectuella förmögenheternas fullkomlighet beror dels på föremålens uppfattande i föreställningen d. ä. på å s k å d n i n g e n, dels på jämförandet af det uppfattade för att deraf constituera begrepp och omdömen. Fullkomligheten i åskådningen beror dels på dess f u l l s t ä n d i g h e t — att icke något af föremålets wäsentligheter förbigås — dels på dess k l a r h e t.

[1]) Pestalozzi's Elementar-Böcker. Ofwersättning af C. A. A g a r d h och M. B r u z e l i u s. Lund 1812.

[2]) K. A. W e s t l i n g: Enhetsskolan och undervisningens frihet. Skola och Samhälle 1920.

Till enhet sträfwar den menskliga föreställningen beständigt, och detta sträfwande måste den intellectuella uppfostran befordra så mycket möjligt är. För att ernå den, är icke nog att uppfatta en mängd åskådningar, äfwen i den fullkomligaste rikedom och klarhet; de skulle ligga enkla och sanningslösa i sinnet, och snart förswinna derur, om ej en annan förmögenhet i själen genom deras jämförande förenade dem till begrepp och omdömen. Fullkomligheten i begreppens och omdömenas constitution beror på lättheten att under alla möjliga combinationer jämföra de enkla åskådningarne.

Pestalozziska metoden går derföre uti den intellectuella uppfostran ut på att med fullständighet uppfatta enkla åskådningar, att upphöja dessa till högsta grad af klarhet, att under alla möjliga combinationer jämföra dem och dymedelst samla dem i classer eller begrepp.

Men på det att icke dessa operationer må wara en blind underwisning, eller en liflös mekanism, måste den passifwa åskådningsförmågan, som tillhör hwarje menniska, upphöjas ifrån passifwitet till högsta grad af actifwitet och förwandlas ifrån en blott föremålens werkan på barnets yttre sinnen till ett barnets uppsökande af det wäsentliga, mångfaldiga uti föremålet.

Det väsentliga och mångfaldiga i de yttre föremålen kan enligt Pestalozzi uppfattas såsom *antal*, *form* och *språk*. I förordet till Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse[1]) ges antydningar om hur barnet vid mors knä — alltså före skolåldern — får göra bekantskap med antal, form och språk vid samtal om barnets egen kropp. För detaljer hänvisas där till Buch der Mutter, Boken för mödrar. Där kan man läsa följande:

Huvudet är en del av kroppen;
ansiktet är en del av huvudet;
hakan är en del av ansiktet. — — —

Vad som är enkelt på människans kropp:
Kroppen har e t t huvud, e n hals och e n bål — — —.
Vad som är dubbelt på en människas kropp:
Mitt ansikte har två ögon, två ögonbryn och två kinder — — —.

[1]) Utgiven 1803 under den gemensamma titeln *Pestalozzis Elementar-Bücher*. Zurich, Bern och Tubingen. Man lägger märke till att Pestalozzi inte anges såsom författare.

Vad som är fyrfaldigt på människans kropp:

Mina två ögon har f y r a ögonlock, t v å övre och t v å undre, samt f y r a ögonvrår, t v å inre och t v å yttre — — —.

Vad som är sexfaldigt på människans kropp:

Mina två armar har s e x leder, t v å övre, t v å mellersta och t v å nedre.

Vad som är åttafaldigt: framtänderna — —. Vad som är tiofaldigt: Mina t v å händer har t i o fingrar, t v å tummar — — —

Tjugofaldigt är kindtänderna, tjugofyrafaldigt revbenen.

Håren är cylindriska, släta, böjliga och elastiska — — —. Armarna är cylindriska, långa och genom lederna rörliga och böjliga. Armbågarna och handknölarna är rundaktiga och hårda — —

Man kan ö p p n a och t i l l s l u t a munnen, man kan ä t a, d r i c k a t a l a, a n d a s, h o s t a, s j u n g a, s k r i k a, g ä s p a, v i s s l a och b l å s a med munnen.

Man ö p p n a r och t i l l s l u t e r munnen, då man äter, dricker eller talar.

Man ä t e r när man är hungrig.

Man d r i c k e r — — —

Man tycker sig se hur det pekas, räknas och kännes, och höra hur mor säger före och barnen försöker forma lika fullständiga satser som mor.

Sålunda har barnet, säges det i förordet till Å s k å d n i n g s l ä r a o m t a l f ö r h å l l a n d e n a, på det ursprungliga och naturliga sättet fått en uppfattning om antal genom att räkna upp dem: E i n s u n d E i n s u n d n o c h E i n s. Det yttre hjälpmedlet (Kunstmittel) har utgjorts av handen och fingrarna. Men detta hjälpmedel stannar vid 10, medan räknandet fortsätter i det oändliga. Därför behöver fortskridandet i att räkna upp och i att räkna ett nytt konstmedel, som dock går ut från det ursprungliga och ansluter sig till det i alla delar. »Åskådningsläran om talförhållandena är intet annat än ett försök att finna detta medel och använda det i hela dess enkelhet.»

Medlet utgöres av tre åskådningstabeller till talförhållandena. Den första är den tiofaldiga framställningen av

Tab. 1.

I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
II	II	II	II	II	II	II	II	II	II
III	III	III	III	III	III	III	III	III	III
IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII	IIII
IIIII	IIIII	IIIII	IIIII	IIIII	IIIII	IIIII	IIIII	IIIII	IIIII
IIIIII	IIIIII	IIIIII	IIIIII	IIIIII	IIIIII	IIIIII	IIIIII	IIIIII	IIIIII
IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII	IIIIIII
IIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIII
IIIIIIIII	IIIIIIIII	IIIIIIIII	IIIIIIIII	IIIIIIIII	IIIIIIIII	IIIIIIIII	IIIIIIIII	IIIIIIIII	IIIIIIIII
IIIIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIII	IIIIIIIIII

Pestalozzis första åskådningstabell: Enheternas tabell.
Ur Pestalozzis Elementar-Bücher.

talen 1—10 med streckar, den andra består av kvadrater i rader med tiofaldigt olika uppdelning, så att halva tredjedelar, fjärdedelar osv. av ett och samma ytinnehåll kan åskådligt tillägnas. I den tredje tabellen blir motsvarande kvadraters halvor, tredjedelar, fjärdedelar osv. ytterligare uppdelat i 10 delar. Tabellernas uppgift var att ge åskådlighet åt de tankeövningar, ur vilka uppfattning av förhållandet mellan talen skulle uppstå. Andra och tredje tabellen har sammanförts på bilden på s. 158.

Enheternas tabell

Till enheternas tabell knytes så många uppgifter, att de i den citerade tyska upplagan upptar 175 sidor, fördelade på 8 övningar. Det är vanskligt att ge en tydlig bild av övningarna. Dock ett försök.

I första övningen

ska man räkna upp streckarna. Man pekar i första raden på den första strecken och säger ett (barnen upprepar!), för fingret till den andra och säger två gånger ett, för fingret till tredje (troligen är det meningen, att man varje gång på nytt börjar vid den första strecken) och säger tre gånger ett osv. till 10.

I andra raden pekar läraren på de första två strecken och säger: Här är två gånger ett; två gånger ett är en gång två. Man rycker fingret fram till den andra gruppen av två streck osv. På så sätt genomgår man alla tio raderna, städse konstaterande iakttagelsen på två sätt: Här är fem gånger ett; fem gånger ett är en gång fem. Slutligen pekar man på olika antal i olika rader och frågar: Hur många gånger sex är det hit? Hur många gånger åtta är det hit?

Andra övningen.

Tabellen visar oss att andra raden har 10 grupper av två streck i varje, sålunda 20 enheter, tredje gruppen har 30 enheter osv. Man börjar med den andra raden och betraktar var och en av de tjugo enheterna som hälften av två. Man pekar på den första strecken och säger: Ett är hälften av två. Därefter visar man över till den andra strecken (alltså i första tvåan) och säger: 2 gånger 1 är 1 gång 2. Därefter pekar man på den tredje strecken (alltså den första i andra tvåan) och säger: 3 gånger 1 är 1 gång 2 plus hälften av 2. Man fortsätter tills man kommer till den tionde tvåan och säger: 20 gånger 1 är 10 gånger 2. Därmed har man visat barnen, hur man av enheter har bildat två. Därefter vänder man på steken: I stället för att säga ett är hälften av två, säger man: Hälften av två är ett och fortsätter att vända på satserna, tills man kommer till den sista i raden, som nu får formen 10 gånger 2 är 20 gånger 1.

I tredje raden betraktas varje streck som tredjedelen av tre. Allteftersom man pekar och går framåt i raden får man följande satser. (Vi skriver dem framdeles med gångertecken och plus för korthetens skull, originalet skriver ut alltsamman som förut — se avbildningen av ett uppslag, s. 00, varigenom det inte ser så torrt ut som vår skrivning. Men var snäll och hör, vad den pekande läraren säger och hur barnen upprepar svaren — man föreställer sig, att det sker i kör och med kläm!)

1 är tredjedelen av 3;
2 · 1 är 2 gånger tredjedelen av 3;
3 · 1 är 3;
4 · 1 är 1 · 3 + tredjedelen av 3;
5 · 1 är 1 · 3 + 2 gånger tredjedelen av 3;
6 · 1 är 2 · 3;
7 · 1 är 2 · 3 + tredjedelen av 3;
8 · 1 är 2 · 3 + 2 gånger tredjedelen av 3;
9 · 1 är 3 · 3;

Fortsätt tills man kommer till

27 · 1 är 9 · 3;
28 · 1 är 9 · 3 + tredjedelen av 3;
29 · 1 är 9 · 3 + 2 gånger tredjedelen av 3;
30 · 1 är 10 · 3.

Nu har barnen sammansatt de tio treorna. Därefter följer omvändningen: treorna upplöses i sina förra beståndsdelar, dvs. enheterna.

På motsvarande sätt behandlas raderna 4 t. o. m. 10. När en rad är färdig, ska man kunna »hoppa». T. ex. 13 gånger 1 hur många gånger 2 är det? Och barnet svarar: 13 gånger 1 är 6 gånger 2 + hälften av 2. Eller: 19 · 1 hur många gånger 5 är det? Och barnet svarar: 19 · 1 är 3 · 5 + 4 gånger femtedelen av 5.

Det inses lätt, att med varje tal ökas antalet satser med 10, så att vid talet 10 (alltså tabellens sista rad) blir satserna i första omgången jämnt 100. Av dem rör sig de nio första med endast tiondelar enligt schemat

1 är tiondelen av 10;
2 · 1 är 2 gånger tiondelen av 10;
3 · 1 är 3 gånger tiondelen av 10;

Tittar vi in i t. ex. tians åttonde grupp, får vi följande uppgifter:

70 · 1 är 7 · 10;
71 · 1 är 7 · 10 + tiondelen av 10;
72 · 1 är 7 · 10 + 2 gånger tiondelen av 10;
73 · 1 är 7 · 10 + 3 gånger tiondelen av 10. Osv.

I tredje övningen

håller man samman andra och tredje raden och förvandlar de i andra raden stående tvåorna till de i tredje raden stående treorna. I andra raden visar man barnet, att 1 gång 2 är 2 gånger 1, och i den tredje raden att 2 gånger 1 är 2 gånger tredjedelen av 3. Man visar i andra raden att 1 gång 2 + hälften av 2 är 3 gånger 1, och i den tredje raden, att 3 gånger 1 är 1 gång 3. Man får därvid sådana satser som

7 · 2 + hälften av 2 är 15 · 1; 15 · 1 är 5 · 3;
8 · 2 är 16 · 1; 16 · 1 är 5 · 3 + tredjedelen av 3.

Genom att jämföra tredje och fjärde raderna kan man förvandla treor och fyror i varandra, och i fortsättningen behandlas på samma sätt fyror och femmor, femmor och sexor, sexor och sjuor, osv. Försök bara!

Genom denna övning, skriver elementarboken, kommer barnen så långt, att de med säkerhet och lätthet kan förvandla varje tal till andra tal: treor i fyror, femmor, sexor osv.

I fjärde övningen

tar man hälften av sådana tal, som är jämnt delbara med 2, och mångfaldigar denna hälft med 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 och 10 och bestämmer den av mångfaldigandet erhållna produkten. På samma sätt förfar man med tredjedelar, fjärdedelar osv. av tal, som är jämnt delbara med 3, 4 osv. Tabellens andra rad leder till 9 grupper övningar, av vilka den sista ser ut så:

Tiondelen av 20 är				2				
2 gånger tiondelen av 20 är				2 · 2;	2 · 2	är	4..	
3	»	»	» 20 »	3 · 2;	3 · 2	»	6.	
4	»	»	» 20 »	4 · 2;	4 · 2	»	8.	Osv. till 10.

I femte övningen

jämföres ett mindre antal enheter med ett större och ett större antal enheter med ett mindre och förhållandet dem emellan bestämmes såsom 1 till 2, 1 till 3 osv. När alla raderna behandlats och man börjar »hoppa», skulle barnen kunna svara på sådana frågor som *Av vilket antal enheter är 3 hälften, tredjedelen, fjärdedelen* osv.?

Sjätte övningen

utgör en fördubbling och ett mångfaldigande av den femte. I den första raden visar man med ena handen på de två första enheterna och med den andra på den tredje och säger: *2 gånger 1 är 2 gånger tredjedelen av 3 gånger 1.* Därmed bestämmer man det enkla förhållandet mellan talen 2 och 3. När barnen har gått igenom alla uppgifterna till alla tio raderna (de omfattar 48 sidor!), ska de kunna få frågan: *Vilken del av 14, tagen 2 gånger, är 4?* Barnet svarar: *Sjundedelen av 14, tagen 2 gånger, är 4.*

Vi tar första och sista uppgiften till enhetstabellens femte rad:

10 är 2 · 5, 15 är 3 · 5
2 · 5 är 2 gånger tredjedelen av 3 · 5

15 är 3 · 5 10 är 2 gånger 5
3 · 5 är 3 gånger hälften av 2 gånger 5

Därefter följer 34 lika byggda fyrradiga uppgifter, innan den sista kommer:

45 är 9 · 5 50 är 10 ggr 5
9 · 5 är 9 gånger tiondedelen av 10 ggr 5

50 är 10 · 5 45 är 9 · 5
10 · 5 är 10 gånger niondedelen av 9 · 5.

I sjunde övningen

arbetar man med enhetstabellen uppifrån och nedåt och inte från vänster till höger. Man fixerar de två första enheterna i första raden och säger: 1 är hälften av 2 gånger 1 eller av 2. Därefter fixerar man de fyra första enheterna i andra raden och säger: 1 gång 2 är hälften av 2 gånger 2 eller av 4. Man fortsätter genom raderna, tills man kommer till den sista. Där fixerar man de två första tiorna och säger 1 gång 10 är hälften av 2 gånger 10 eller av 20. Sen går man upp till första raden igen, fixerar de tre första enheterna och säger 1 gång 1 är tredjedelen av 3 gånger 1 eller av 3. Och så ned genom alla raderna.

Genom saken själv, utan att orden nämnes, lär barnen innebörden av orden förhållande och lika förhållande, säger boken. När åskådningen har fixerat ordens innebörd, får barnen använda dessa termer och säga t. ex.: 3 förhåller sig till tredjedelen av 3 som 6 till tredjedelen av 6. Sjunde övningen hör till de lättare och har »bara» 100 uppgifter.

Attonde övningen

är »intet annat än en fördubbling och mångfaldigande av den förra». Barnen ska läras och övas att inse likheter av denna typ: 2 förhåller sig till 3 liksom 4 förhåller sig till 6. I tabellens första rad visar man på förhållandet mellan 2 och 3 samt i andra på förhållandet mellan 4 och 6, och på tredje raden pekar lärare eller barn på förhållandet mellan 6 och 9. Man fortsätter med att peka på förhållandet mellan 3 och 4 i första raden samt mellan 9 och 12 i tredje raden.

»Och när detta sker, frågar man barnet: Av vilket antal enheter är 2 enheter två gånger tredjedelen? Av vilket tal är talet 4 två gånger tredjedelen? Av vilket tal är talet 6 två gånger tredjedelen? Och omvänt: Av vilket tal är talet 6 tre gånger hälften? Av vilket tal är talet 8 fyra gånger tredjedelen? Osv. Därefter frågar man vidare: Av vilket tal är 6 tre gånger fjärdedelen? Och om barnet t. ex. på denna senare frågan svarade: 6 är 3 gånger fjärdedelen av 8, så frågar läraren: Hur har du funnit, att talet 6 är 3 gånger fjärdedelen av 8? Barnet pekar med fingret på tabellens 6 första enheter i andra raden, vilka står där såsom 3 gånger 2 enheter, och säger: 6 enheter är 3 gånger 2 enheter, 3 gånger 2 enheter är 3 gånger fjärdedelen av 4 gånger 2 enheter, 4 gånger 2 enheter är 8 enheter.»

De uppgifter, som ska utpekas, iakttagas och utsägas, för att barnen ska komma fram till denna insikt, upptar 44 sidor. Varje sådan uppgift består av fyra satser ordnade två och två mitt emot varandra på ett uppslag. Det bör observeras, att man ska läsa tvärs över uppslaget på faksimilet från sidorna 170, 171, på vilka man uppsöker de tal som förhåller sig till varandra liksom 7 till 10. Det återgivna partiet utgör slutet av 67:e och hela 68:e uppgiftsgruppen på övning 8. Varje uppgiftsgrupp innehåller 10 uppgifter.

Anvisningarna för enhetstabellens användning slutar med följande ord:

»För att man ska kunna föra barnet till den bestämda grad av tankekraft, som förutsätts för ett riktigt besvarande av de här förekommande frågorna, måste man från den första övningen till den sista iakttaga, att man aldrig får gå över

— 170 —

35 ist 7 mal 5 45 ist 9 mal 5
7 — 5 ist 7 mal der 9te Theil von 9 — 5
42 ist 7 mal 6 54 ist 9 mal 6
7 — 6 ist 7 mal der 9te Theil von 9 — 6
49 ist 7 mal 7 63 ist 9 mal 7
7 — 7 ist 7 mal der 9te Theil von 9 — 7
56 ist 7 mal 8 72 ist 9 mal 8
7 — 8 ist 7 mal der 9te Theil von 9 — 8
63 ist 7 mal 9 81 ist 9 mal 9
7 — 9 ist 7 mal der 9te Theil von 9 — 9
70 ist 7 mal 10 90 ist 9 mal 10
— 10 ist 7 mal der 9te Theil von 9 — 10

7 ist 7 mal 1 10 ist 10 mal 1.
— 1 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 1.
14 ist 7 mal 2 20 ist 10 mal 2.
7 — 2 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 2.
21 ist 7 mal 3 30 ist 10 mal 3.
7 — 3 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 3.
28 ist 7 mal 4 40 ist 10 mal 4.
— 4 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 4.
35 ist 7 mal 5 50 ist 10 mal 5.
7 — 5 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 5.
42 ist 7 mal 6 60 ist 10 mal 6.
7 — 6 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 6.
49 ist 7 mal 7 70 ist 10 mal 7.
7 — 7 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 7.
56 ist 7 mal 8 80 ist 10 mal 8.
7 — 8 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 8.
63 ist 7 mal 9 90 ist 10 mal 9.
7 — 9 ist 7 mal der 10te Theil von — 9.
70 ist 7 mal 10 100 ist 10 mal 10.
7 — 10 ist 7 mal der 10te Theil von 10 — 10.

171

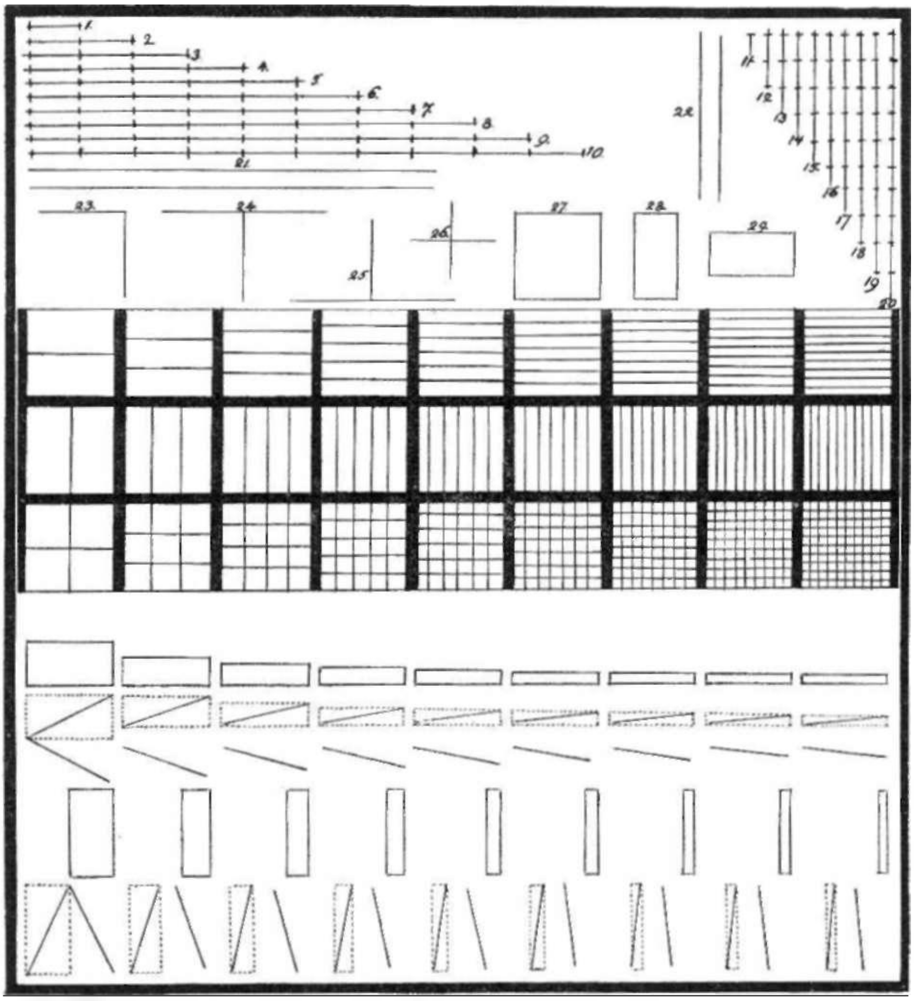
45 ist 9 mal 5 35 ist 7 mal 5.
9 — 5 ist 9 mal der 7te Theil von 7 — 5.
54 ist 9 mal 6 42 ist 7 mal 6.
9 — 6 ist 9 mal der 7te Theil von 7 — 6.
63 ist 9 mal 7 49 ist 7 mal 7.
9 — 7 ist 9 mal der 7te Theil von 7 — 7.
72 ist 9 mal 8 56 ist 7 mal 8.
9 — 8 ist 9 mal der 7te Theil von 7 — 8.
81 ist 9 mal 9 63 ist 7 mal 9.
9 — 9 ist 9 mal der 7te Theil von 7 — 9.
90 ist 9 mal 10 70 ist 7 mal 10.
9 — 10 ist 9 mal der 7te Theil von 7 — 10.

10 ist 10 mal 1 7 ist 7 mal 1.
10 — 1 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 1.
20 ist 10 mal 2 14 ist 7 mal 2.
10 — 2 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 2.
30 ist 10 mal 3 21 ist 7 mal 3.
10 — 3 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 3.
40 ist 10 mal 4 28 ist 7 mal 4.
10 — 4 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 4.
50 ist 10 mal 5 35 ist 7 mal 5.
10 — 5 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 5.
60 ist 10 mal 6 42 ist 7 mal 6.
10 — 6 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 6.
70 ist 10 mal 7 49 ist 7 mal 7.
10 — 7 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 7.
80 ist 10 mal 8 56 ist 7 mal 8.
10 — 8 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 8.
90 ist 10 mal 9 63 ist 7 mal 9.
10 — 9 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 9.
100 ist 10 mal 10 70 ist 7 mal 10.
10 — 10 ist 10 mal der 7te Theil von 7 — 10.

En del av ett uppslag i Pestalozzis Elementar-Bucher, del Zahlenverhältnisse. Boken innehåller 175 sidor sådana övningar på grundval av enheternas tabell, återgiven på s. 150.

till ny övning, förrän barnet har vunnit obetingad färdighet i den närmast föregående eller förrän den åskådning, varpå svaren på varje fråga vilar, hos barnet har blivit bragt till oupplöslig medvetenhet.»

Andra och tredje åskådningstabellen utgör åskådningsunderlaget för tankeövningarna i Anschauungslehre der Massverhältnisse (åskådningslära för måttförhållanden). Vi ser på tavlan, att



Pestalozzis åskådningstabeller 2 och 3, sammanförda till en tabell.
Ur Pestalozzis Elementarböcker, svensk översättning av Agardh och Bruzelius.

materialet för iakttagelse rörande form och antal utgöres av linjer, vinklar, kvadrater och rektanglar. Till dem knytes ett stort antal övningar, av vilka vi kan ge endast några exempel.

De vågräta och lodräta linjerna ger anledning till iakttagelser och formuleringar av t. ex. följande typer.

Uppräkning: Den första vågräta linjen, den första lodräta linjen, den andra vågräta linjen, den andra lodräta linjen osv. till 10:e linjen.

Jämförelser: Den första vågräta linjen är kortare än den andra, den andra vågräta linjen är längre än den första men kortare än den tredje, den tredje vågräta linjen är längre än den andra men kortare än den fjärde osv. till den 10:e. Därefter samma serie med de lodräta linjerna.

Uppdelning: Den första vågräta linjen är odelad, den andra vågräta linjen är genom en punkt delad i två lika delar, den tredje vågräta linjen är genom 2 punkter delad i 3 lika delar osv. till den 10:e. Därefter samma övning med de lodräta linjerna.

Delarnas namn, t. ex. på linje nr 8: Vardera av de 8 lika delarna av den 8:e vågräta linjen är en åttondedel av denna linje. Från början av linjen till första punkten är den första åttondedelen, från andra punkten till den tredje punkten är den andra åttondedelen osv.

Jämförelser mellan de olika delarna: Fjärdedelen av den fjärde vågräta linjen är så lång som femtedelen av den femte linjen. 2 ggr fjärdedelen av den fjärde vågräta linjen är så lång som 2 ggr femtedelen av den femte vågräta linjen osv.

Tredjedelen av den tredje vågräta linjen är så lång som halva delen av den andra, 2 ggr tredjedelen av den tredje vågräta linjen är så lång som den andra vågräta linjen osv.

Till *kvadraterna* en mängd övningar! Som exempel väljer vi vad som säges om tredje kvadraten i tredje raden.

I § 1: Denna kvadrat är genom 3 vågräta linjer delad i 4 lika rektanglar, och dessa 4 rektanglar är genom 3 lodräta linjer delade i 16 mindre kvadrater.

I § 2: 4 av dessa 16 mindre kvadrater, som ligger vågrätt bredvid varandra, är fjärdedelen av denna kvadrat och bildar en rektangel, vars höjd är lika med fjärdedelen av dess längd.

I § 3: 4 av dessa 16 mindre kvadrater, som ligger lodrätt över varandra, är en fjärdedel av denna kvadrat och bildar en rektangel, vars bredd är lika med fjärdedelen av dess höjd. 2 ggr 4 lodrätt över varandra liggande mindre kvadrater, vågrätt bredvid varandra, är 2 fjärdedelar av denna kvadrat och bildar en rektangel, vars bredd är lika med 2 fjärdedelar av dess höjd. På samma sätt med 3 rader och 4 rader.

Alla kvadraterna på tabellen ska man löpa igenom på samma sätt, varvid varje ny kvadrat åt höger bjuder på allt flera »combinationer», såsom Agardh skrev. Ändå har vi inte omtalat de två första radernas kvadrater, där det kan heta:

En av den sjunde kvadratens 8 lika delar eller en rektangel, som är en åttondedel av denna kvadrat, är mindre än en av den sjätte kvadratens 7 lika delar eller en rektangel, som är en sjundedel av denna kvadrat. 2 av den sjunde kvadratens 8 lika delar eller en rektangel, som är 2 åttondedelar av denna kvadrat, är mindre än 2 av den sjätte kvadratens 7 lika delar eller än en rektangel, som är 2 sjundedelar av denna kvadrat. 3 av den sjunde kvadratens 8 lika delar — — — !

Om raden *rektanglar* heter det:

Höjden av den första rektangeln är lika med hälften av dess längd.
Höjden av den andra rekt. är lika med tredjedelen av dess längd osv. till
Höjden av den nionde rektangeln är lika med tiondedelen av dess längd.

Om de *sneda linjerna:*

Varje sned linje ligger i en punkterad rektangel.
Den första av dessa sneda linjer ligger i en rektangel, vars höjd är lika med hälften av dess längd.
Den andra av dessa sneda linjer — ja så kommer alla rektanglar omigen!

Sen konstateras, att denna sneda linje är en till höger stigande linje, varefter den sättes in i var och en av de nio rektanglarna. Därefter kommer den till vänster stigande linjen med motsvarande övningar.

Till de omtalade iakttagelseövningarna rörande form och antal sluter sig *teckningsövningar*. Vi lyssnar till några av dem.

Läraren drar en linje och säger: Jag drar en vågrät linje. Barnen gör detsamma och säger alla tillika: Jag drar en vågrät linje.
Läraren: Har ni gjort det?
Barnen: Ja.

Läraren: Vad har ni gjort?

Barnen: Vi har dragit en vågrät linje.

Läraren: Jag drar under denna linje den andra vågräta linjen, som är längre än den första. Barnen upprepar detsamma. Läraren frågar som förut. Så fortsätter han med alla de vågräta och sen med de lodräta linjerna, frågande barnen: Har ni gjort det? Vad har ni gjort?

Övningarna upprepas med längre och kortare linjer och slutar med linjer, som i längd står i samma förhållande till varandra som linjerna på åskådningstabellen.

Jag drar en vågrät linje. (Barnen upprepar.) Jag drar under denna en linje, som är så lång som den första. Jag förlänger den andra linjen så mycket, att den blir ännu en gång så lång som den nu är.

Så fortsätter tecknandet och upprepandet först med de återstående vågräta linjerna på planschen och sen med de lodräta.

Efter många andra övningar kommer uppgifter att teckna linjer, som bildar räta vinklar. Läraren drar linjer, säger vad han gör. Barnen drar sina linjer, säger vad de gör.

Jag drar en vågrät linje.

Jag delar den vågräta linjen genom en punkt i två lika delar.

Lodrätt över punkten mitt på den vågräta linjen sätter jag en annan punkt, som är så långt från punkten mitt på den vågräta linjen som hälften av den vågräta linjen är lång.

Nu kan barnen rita linjer och sätta dem samman till räta vinklar. Nästa uppgift följer logiskt: att teckna kvadrater.

Jag drar en vågrät linje.

Från början av denna vågräta linje drar jag en lodrät linje nedåt, som är så lång som den vågräta linjen.

Från slutpunkten av den räta linjen drar jag en annan lodrät linje nedåt, som är så lång som den vågräta linjen. Osv.!

Sen tecknas många kvadrater, som indelas enligt åskådningstabellen, varvid tidigare satser om förhållanden m. m. upprepas.

Så följer uppgifter att teckna rektanglar och slutligen sneda linjer.

Teckningsövningarna blir sålunda en upprepning av iakttagelserna rörande form och antal, och övningarna avser att ge språklig utformning av vad som sker, vad barnen ser, och vad de gör.

På konsekvensen i uppbyggandet av uppgifterna i elementarböckerna finns intet att anmärka. Barnpsykologin — och erfarenheten, ej minst Pestalozzis egen! — har emellertid kommit fram till en annan uppfattning om den utvecklingshjälp, som skolan kan ge barnen. Men det är en annan sak. Vi ska bedöma den Pestalozziska metoden mot bakgrunden av sin tid. Vissa grundtankar fick en stark accentuering genom att de drevs till sin spets. Dem lade man märke till. De kunde leda till både det som var ont och det som var gott. Sålunda fick de formella övningarna i teckning en än hårdare utformning i Stuhlmannska metoden. Men åskådlighetstanken, självverksamheten hos barnen och strävan efter klarhet och sammanhang, som blommade i Pestalozzis metod, sprider ännu sin doft i skolsalarna och bidrar till att förverkliga Pestalozzis mål för uppfostran: *en harmonisk utveckling av huvudets, hjärtats och handens krafter.*

3. K. P. Nordlunds räknemateriel

kännetecknas av rikhaltighet och ett genomtänkt system. Nordlund (f. 1830, d. 1909, lektor i Gävle) ivrade för att barnens taluppfattning skulle grundas på åskådning, likaså räkneoperationerna. Han var föregångsman inte endast beträffande metodiskt förfarande, svenska termer m. m. utan också beträffande åskådningshjälpmedlen. Hans samling materiel innehöll apparater både för demonstration vid lärarbordet och för barnens eget laborerande med tingen.

Detta senare får betraktas som ett mycket stort framsteg — allt för länge hade kulramen, som inbjöd i huvudsak endast till demonstration, varit ensamrådande.

Om materiels nödvändighet skrev Nordlund, att han ansåg »en dylik materiel lika nödvändig för bibringandet af säker kunskap i räkneläran, som t. ex. kartor och glober äro för bibringandet af en säker kunskap i geografi».[1])

Då så mycket av vad Nordlund föreslog har gått igen och går igen, torde en redogörelse för hans materiel försvara sin plats, liksom den från undervisningshistorisk synpunkt avgjort har intresse.

Nordlunds materielsamling omfattar 22 nummer, av vilka dock inte alla ingår i den första undervisningen. Man får gå till den av rektor C. G. Hellsten ordnade räknematerielen för att finna liknande rikedom.

Nr 1 var *kubiska tärningar av trä* med en kantlinje av 2 cm. Varje barn skulle ha 20 stycken. Tärningarna användes för att inlära talorden ett t. o. m. tjugo, för att inlära betydelsen av uttrycken lägga tillsamman, öka, summa, taga ifrån, minska, skillnad, överskott, mer än, mindre än, mångfaldiga, mångfald, gånger, dela, del, jämn del, hälften, tredjedelen osv., för mätning av rektanglar och för att inlära de första grunderna till tals sammanläggning och frändragning. I sistnämnda fall förtjänar det att påpekas, att Nordlund förordar övningar med talserier redan från början, en rationalisering som man påträffar redan i växelundervisningslitteraturen.

Nr 2 var *kulramen*. Utom för de vanliga uppgifterna låter Nordlund kulramen tjänstgöra också vid inlärandet av multiplikationstabellen: Man byggde talserier med kulorna.

Nr 3 var *tavla indelad i kvadratiska rutor*. Den användes vid inlärande av multiplikationstabellen och multiplikation

[1]) K. P. Nordlund: *Förslag till materiel för undervisningen i räkning*, 2:a uppl. 1890.

och division, varvid inskärptes de Nordlundska termerna *det hela, varje del* och *delarnas antal.* När t. ex. mångfalder på 6 inlärdes, betraktades rutan a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3							g		
4					a			d	
5									
6			b		c				
7									
8		h					f		
9			e						
10									

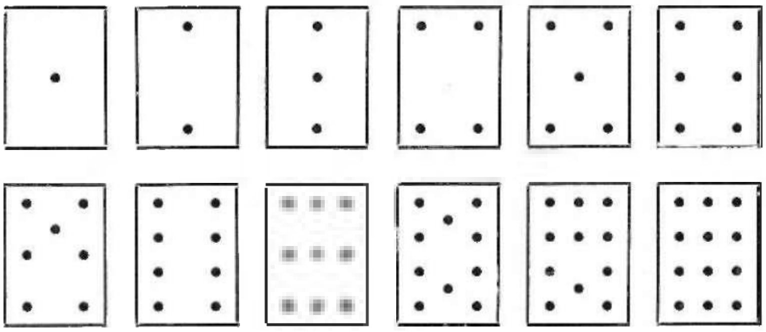
»såsom hafvande sin plats ytterst till höger i nedersta raden af en rektangel (i fig. begränsad med fetare streck), som innehåller 4 stycken rutrader med 6 rutor i hvarje rad. I denna ruta (t. ex. a) sättes talet 24, som angifver rutornas antal i rektangeln. Sedan L.[1]) meddelat barnen denna upplysning, pekar L. på en ruta t. ex. c och frågar: hvilket tal skall stå i denna ruta? (36). När barnen hastigt och säkert kunna angifva de rätta svaren, öfvergår L. till en motsatt öfning. Alla barnen upprita på ett pappersblad en qvadrat dylik med den i N:o 3. Därefter tillsäger L. alla barnen att insätta t. ex. talet 36 i rätta rutor (c, d och e), 24 i (a, b, g och h) o. s. v. och förfar på samma sätt med de öfvriga talen, som förekommer i mångfaldstabellen. En dylik uppställd mångfaldstabell kallas: *den pytagoreiska.*»

Frånsett att vi i andra skolåret nog inte kan gå så fort och direkt på uppgiften, som det anförda citatet tycks ange, kan vi med stor behållning låta barnen rita den pytagoreiska

[1]) Läraren.

tabellen allt efter som talserierna växer upp (jfr s. 131). Man bör observera det redan av Nordlund påvisade och av t. ex. Kruse flitigt använda förhållandet, att mångfalderna (produkttalen) står i hörnen av rektanglar och kvadrater. Produkternas storlek blir då förbundna med en viss rumsuppfattning. Jämför också Arvins »arealtal», s. 175. Nordlunds kvadrattavla är avbildad på s. 167.

Nr 4 utgöres av *talbilder*. Nordlund hade följande gruppering:



Talbilderna använde Nordlund på bl. a. följande sätt:

A. För att förmedla övergången till talens beteckning. L. visar en av talbilderna och frågar: Vilket *tal* och *antal* avbildar denna?

B. För att åskådliggöra vissa egenskaper hos talen. L. visar bilden av talet *åtta* och vänder den så, att den längre sidan blir vågrät, och barnen får redogöra för vad de finner: att *åtta* är sammansatt av *fyra* bilder av talet *två;* att bilden av *åtta* är sammansatt av *två* bilder av talet *fyra;* att bilden av *åtta* är sammansatt av bilderna av talen *sex* och *två.*

C. För inövning av åtskilliga räkneuttryck:

1) »Att *åtta* är *fyra*-falden af *två* eller
att *åtta* är *fyra* gånger *två,*
att *två* är *fjärdedelen* af *åtta.*

2) Att *åtta* är *tva*-falden af *fyra* eller
att *åtta* är *två* gånger *fyra,*
att *fyra* är hälften af *åtta.*

3) Att *åtta* är lika mycket som *sex* och *två* tillsamman;
Att *åtta* är *två* mer än *sex*.
Att *sex* är *två* mindre än *åtta*.»

Med tillhjälp av talbilderna kan lärjungen själv finna, att $4=2 \cdot 2$, $6=2 \cdot 3=3 \cdot 2=2+4$, $7=2+5$, $9=3 \cdot 3=6+3$ osv., dock utan att barnen använder siffror och räknetecken.

D. För inlärandet av rektanglars mätning. L. ritar på tavlan en rektangel $54 \cdot 75$ cm och låter barnen undersöka, hur många talbildskort det går åt för att täcka denna yta (korten är $9 \cdot 15$ cm).

E. För inlärande av tals sammanläggning och fråndragning.

»En träribba anskaffas, försedd med en inskärning utefter längden. Inskärningens bredd bör anpassas efter tjockleken af korten, hvarpå bilderna äro tecknade. Uti inskärningen fastsätter L. flere talbilder under hvarandra och tillsäger barnen att sammanlägga de tal, som motsvara bilderna. Denna sammanläggning bör verkställas dels uppifrån och ner, dels nerifrån och upp. Genom att flytta den öfversta talbilden nederst eller tvärtom erhålles en ny öfningsuppgift. Därefter uppger L. ett tal, som är lika stort med eller större än den erhållna summan, och tillsäger barnen att från det uppgifna talet borttaga i ordning de tal, som motsvara talbilderna.

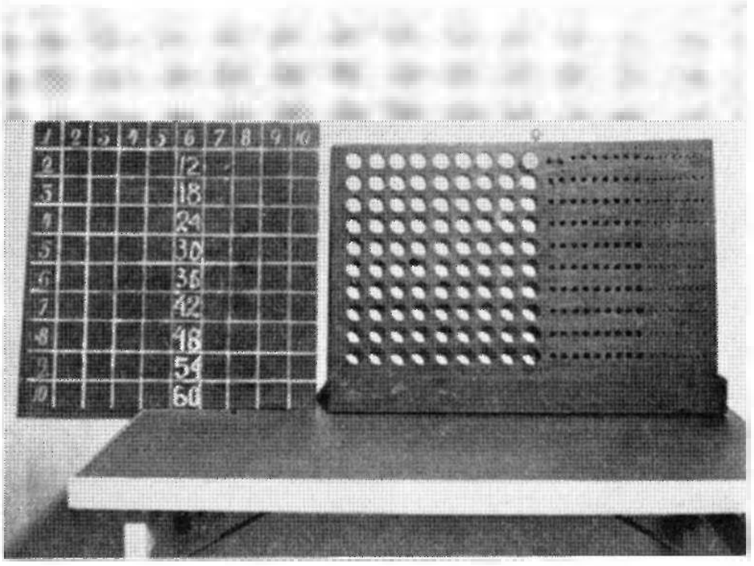
Efter dessa bägge öfningar böra följa öfningar af samma slag, hvarvid talen böra betecknas med de vanliga ljudtecknen, såsom: tre, fem, sju. Slutligen användas siffror för att beteckna talen.

Anm. Barnen böra ej få använda siffror vid räkning, förrän talbegreppet är fullt klart, så att de ej frestas att förväxla siffra och tal, hvilket är ett mycket vanligt fel. Ett ytterligare skäl att uppskjuta med siffrornas användning är, att barnen böra öfvas att skrifva dem väl och radrätt både i vågrät och lodrät riktning samt med lika stort mellanrum, innan de tillåtas att använda dem vid räkning».

Nr 5 utgöres av *brons- och silvermynt*, t. ex. 50 ettöringar, 20 tvåöringar, 10 fem-, 5 tio-, 5 tjugofem- och 5 femtioöringar.

Nr 6 var *stickor*, förslagsvis 3 000, fördelade på 20 buntar med 100 i varje, 80 med 10 i varje och 200 lösa stickor. (Jfr Overberg s. 190!)

Nr 7 var *decimaltavlan*, vars utseende framgår av bilden. I hålen passade buntarna av stickor. Tavlan och stickorna



Till vänster *nr 3* och till höger *nr 7* i K. P. Nordlunds räknemateriel. På tavlan med 10 × 10 kvadrater var talen 1—10 upptill och till vänster permanenta. Talserien på 6 har skrivits upp under inövningen. När alla talserierna var uppbyggda och ditskrivna, hade vi den pytagoreiska tabellen fullständig. Decimaltavlan (bilden t. h.) har nedtill en låda för de 3 000 pinnarna.

Tillhör Göteborgs skolmuseum. Foto Karl-Osten Sjöholm.

användes för att inlära talorden från tio till tusen och för inövande av talens beteckning med siffror m. m.

Nr 8 var *sedlar*, som skulle göras av stadigt papper.

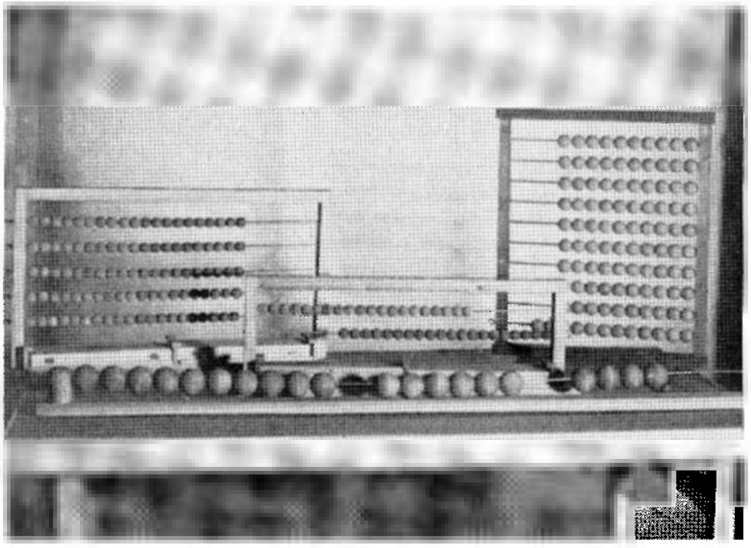
Nr 9—20 utgjordes av *pappark* för mätning av rektanglar, *träribbor* för längders mätning och för de första grunderna i bråk, *linjal* med metrisk indelning, *kvadratiska och rektangulära blad* för mätning av ytor, *tärningar av trä* för mätning av rymder och ytor, *passare, gradskiva, meterstång, rymdmått, våg, vikter* och *besman.* Allt detta för skolans övre klasser.

Som nr 21 kommer *urtavla med visare* och som nr 22 *almanacka*, och därmed är vi åter hemma vid den första undervisningen.

4. Carl Gustaf Hellstens samling av räknemateriel

sammanställdes av rektor Hellsten (f. 1875) för undervisningen under de fyra första skolåren. Samlingen var rikhaltig (27 olika nummer) och mångsidig. Den omfattade för de två första klasserna följande:

I. Demonstrationsmateriel för läraren. Tvåradigt kulställ, femradigt kulställ, stickställ, myntställ, meterlinjal, måttband, liter-deciliterställ, handelsvåg, viktställ.



Kulramar **av olika typ.** Till höger den vanliga, 10-strängade Norstedts **kulram.** I mitten ***Hellstens 2-radiga*** **och till vänster** ***Hellstens 5-radiga*** **kulställ.** Framtill *Göranssons kultråd.* **På Hellstens kulställ (båda demonstrationsmateriel)** fanns nedtill särskilda **lådor** för förvaring av kulor, som inte användes. För barnen hade Hellsten ett litet, tvåradigt kulställ.

Tillhör Göteborgs skolmuseum. Foto Karl-Östen Sjöholm.

II. För eleverna. (Klassen tankes uppdelad i arbetslag med två barn i varje lag. Varje arbetslag får en apparat.) Kulställ och kulhylla, myntställ och mynthyllor, måttlåda med måttremsor, måttlinjaler.

Myntstället hade slantar i koppar och zink, och mynthyllan hade plats för 5 sådana myntställ.

Tvåradigt och femradigt kulställ tillverkas inte numera, och räknemynten göres av papp.

5. Anna Mobergs räknemateriel

kallades »*Småskolans Räknelåda* (svenskt patent) *För skola och hem*».

Anna Moberg, som var född 1868, tog folkskollärarinneexamen i Skara 1889 och anställdes vid Jönköpings folkskolor 1893. Där verkade hon till sin död 1921. Enligt uppgift av hennes kamrater var Moberg en strålande intelligens, en omtyckt lärarinna och en tapper människa. Hennes händer och fötter var missbildade, och hon förstod förvisso vad det betyder, att de små friska barnahänderna hade full sysselsättning vid undervisningen. I en redogörelse för en studieresa skrev hon,[1]) att resan »också lärt mig vad själva hörandet måtte vara en börda för barnen, varför jag även av denna anledning anser, att undervisningen bör, mer än vad nu sker, inriktas på framkallande av barnens självverksamhet.» Hon gjorde ett försök med stickslöjd: av ämnen till tändstickor lät hon barnen limma ihop figurer, dockmöbler osv. och skrev: »Genom utarbetandet av min räknelåda såväl som genom dessa formningsarbeten har jag också i min ringa mån velat reagera mot det gängse undervisnings-

[1]) Enligt seminarieläraren Augustinus Bergqvist, som inhämtat och överlämnat personliga data om Moberg.

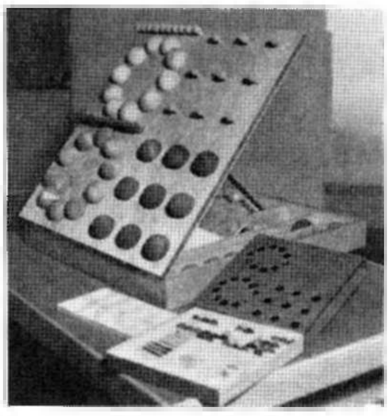
maneret och göra barnet självt till den verkande. Endast på den vägen blir lärandet till en glädje.»

Sambandet med tändsticksstaden framträdde vid tillverkningen av räknelådorna: fabrikerna lämnade stickorna gratis. Det blir förklarligt därigenom, att Moberg överlät äganderätten till räknelådan till Jönköpings feriebarnskommitté; vinsten gick till ett sommarhem för fattiga skolbarn. En annan starkt ideellt intresserad lärarinna, Adele Wetterlind, som sedermera skötte distribueringen av lådorna, brukade biträda Moberg, när hon kokade träkulorna i färgsatserna.

Enligt vad Augustinus Bergqvist inhämtat, tillverkades den första lådan (demonstrationslådan) 1907. Den första vägledningen för lådornas användning trycktes 1908.

Jag minns mycket väl, vilken uppmärksamhet Småskolans räknelåda väckte på sin tid. Vi provade den i seminariets övningsskola, och tack vare de rörliga delarna och särskilt på grund av att demonstrationsapparat och barnens egen apparat följdes åt fann vi, att den till sin princip var överlägsen dittills saluförd materiel. Den hade en olägenhet: kulor har det minst stabila läget av alla fasta kroppar! Rätt vad det var hörde man barnens kulor studsa mot golvet och rulla under bänkarna, varvid en skara ungar försvann ur synfältet! Eller också tog huvudapparatens tennisbollstora träkulor mark med en försvarlig skräll. Att spridningen, som i början var mycket god, avtog så småningom, berodde nog på detta triviala slag av rörlighet och inte på den rörlighet, som i vägledningens första upplaga med all rätt betecknades som »ett huvudvillkor för ett fruktbringande arbete med den första räkneundervisningen».

Apparaternas utseende framgår rätt bra av fotot, taget på Göteborgs skolmuseum. Lärarapparaten består av en trälåda 1/2 m i fyrkant, försedd med ett uppfällbart lock. I lådan förvaras 50 kulor i 5 olika färger samt 50 med huvud



Småskolans räknelåda av *Anna Moberg.* Till vänster lärarapparaten, till höger barnens apparat av läderkartong.

Tillhör Göteborgs skolmuseum.
Foto Karl-Östen Sjöholm.

försedda pinnar i samma färger. I locket finns stora fördjupningar för kulor (på bilden är alla fyllda med kulor) och mindre för pinnar. Kulorna är $4\frac{1}{2}$ cm i genomskärning. Barnens apparat är förfärdigad efter samma modell men av papp. Utom kulor och pinnar finns i deras ask räknemynt, räknetecken och siffror samt en liten tavla. »Meningen med de lösa siffrorna är att låta den klara åskådningen av 3 också följas av tecknet 3.»

De båda kvadraterna på höger sida ska användas, då talen 1—9 inläres, de båda ringarna ska åskådliggöra tiotalen. Hur apparaterna skulle användas, må beskrivas genom ett utdrag ur en vägledning tryckt 1914.

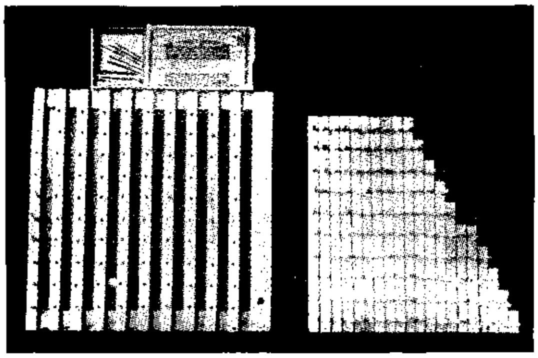
Lärarinnan lägger 2 gröna kulor i motsvarande fördjupningar, och barnen räkna dem. Så lägger hon dit ännu 1 och upplyser, att där nu äro 3 st. Sedan bytas dessa ut mot lika många röda, och barnen få räkna dem. Härmed fortsättes under omväxlande användning av kulor och pinnar, tills lärarinnan tror, att antalet blivit klart uppfattat. Det blir då deras tur att visa detta genom att på lärarinnans tillsägelse plocka fram 3 kulor eller pinnar eller olika mynt. Lätt upptäckes nu, om något barn ännu ej fått en klar uppfattning av antalet 3. Härefter få de ock se tecknet 3. Lärarinnan skriver 3:an, barnen söka reda på den bland typerna.

Så övergå vi till inlärandet av 2+1. 2 röda och 1 vit kula visas. Hur många röda? Hur många kulor? Om jag har 2 röda kulor, hur många vita behövs ytterligare, för att jag skall ha 3? Två och ett är alltså? Lärarinnan tecknar $2+1=?$ Med användning av kulor, stickor och mynt få nu barnen visa detsamma. Sedan klargöres $1+2=3$, 1 grön kula och 2 röda visas. Hur många kulor? Hur många gröna? Om jag har 1 grön kula, hur många röda behöver jag till för att få 3? $1+2=?$ Barnen åskådliggöra detsamma. 1 kula i varje färg visar $1+1+1=?$ Barnen få nu lägga upp 3 kulor av 1, 2 eller 3 färger, betala 3 kulor med 3 ettören och växla sig till 1 tvåöre samt slutligen utan åskådningsmedel lösa små räkneuppgifter $1+1+1$, $2+1$, $1+2$. Vid inlärandet av 5 kunna kulorna ordnas antingen i korsform · : · eller 3 i första raden och 2 i andra. Vid minskning av 5 är då lämpligt att lägga t. ex. 3 röda kulor och 2 gröna. Nu skola vi ta de gröna kulorna bort. Hur många? De flyttas till endera ringen. Hur många återstå? Samma operation utföres i andra färger, och delarna, av vilka det hela består, liksom det hela självt påvisas. Femöringen växlas för att därmed betala 3 kulor à 1 öre. Så genomgås talen 1—5. Småningom uppövas barnens självverksamhet. När lärarinnan klargjort begreppet 6, få barnen själva genom att lägga 6 kulor av 2 eller 3 färger leta ut termerna $2+2+2$, $3+3$, $4+2$, $2+4$, $1+5$, $5+1$, under det lärarinnan samtidigt visar beteckningen. Sex öre växlas i 2-ören och i 1 fem- och 1 ettöre. 6 stickor ordnas i trianglar o. s. v. Så fortsättes upp till 9. Ännu en kula får ej plats i kvadraten. De 9 kulorna flyttas då över till den nedre ringen. Med den tionde kulans hjälp blir ringen (tiotalet) hel. $9+1=10$. Så åskådliggöres tiotalets sammansättning 2×5, 5×2, $4+4+2$, $3\times 3+1$.

Även tiotalets beteckning framträder åskådligt. Ringen är = ettan i tiotalet, 0 kulor i kvadraten. På samma sätt vid t. ex. 12. Ringen hel och 2 kulor i kvadraten = 12. När vi på detta sätt hunnit fram till 19, flyttas entalsfältets 9 kulor till övre ringen. Med ännu en kulas hjälp fyllas 2 ringar (2 tiotal). Den övre ringens vänstra halva fylles med röda, den högra med gröna, den nedre ringens övre halva med blåa, den undre med gula, så ha vi talbilden 4×5. Lägges nu även en vit femma i entalsfältet, så se vi 5×5. Stickorna kunna buntas, så att 10 samlas i en bunt, och mynten flitigt användas för handel och växel. Så kunna alla talförhållanden upp till 30 åskådas. Ja, vill man, kan man använda både pinnarnas och kulornas tiotal upp till 50. Mynten uppgå till högre talvärden.

Stickorna erbjuda ock ett det bästa material för tillämpningsövningar, isynnerhet vid delning och mångdubbling.

Från psykologisk synpunkt kan påpekas, att en gruppering av enheter i cirkel inte visat sig vara så lämplig som vissa andra grupperingar (jfr s. 127).



Arvins Regnebrœt och linjeringsapparat.
Foto förf.

6. G. J. Arvins räknemateriel

väckte på sin tid mycken uppmärksamhet. Jag såg det för första gången 1917. Dess användbarhet var strålande. Konstruktören var dåvarande skolinspektören, sedermera föreståndaren för Danmarks Lærerhøjskole, Köpenhamn, *G. J. Arvin.* Materielen utgjorde grundlaget för ett organiskt uppbyggt system för räkneundervisningen, för vars detaljer vi hänvisar till särskilda handböcker för lärare (även föräldrar).[1]

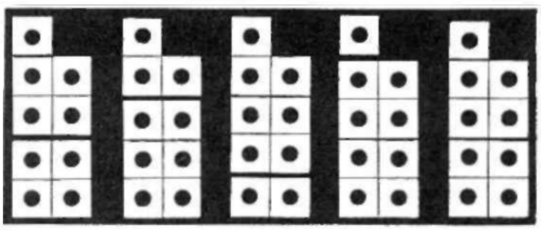
»Arvins Regnesystem» fäster huvudvikten vid de hjälpmedel, som sättes i barnets händer.

Arvins Regnebrœt består av 1) en ram med 10 ribbor, vardera försedd med 10 hål att fästa stickor i; 2) en ask med lösa stickor i skilda färger; 3) 10 lösa ribbor med vardera 10 fast instuckna stickor (= tiotal) samt 9 ribbor med resp. 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 och 1 pinnar likaledes fast instuckna (se bild ovan). Ribborna utbyttes sedermera mot halvkulestänger: 5 stänger med 10 fasta kulor och 5 stänger med 10 halvkulor på varje men uppdelade i två lösa partier enligt systemet 10=9+1, 8+2, 7+3 osv.

[1]) Arvin, Haastorp, Thorborg, Kaalund-Jörgenson: *Vejledning til Regnebog for Folkeskolen,* I—IV. Köpenhamn 1930.

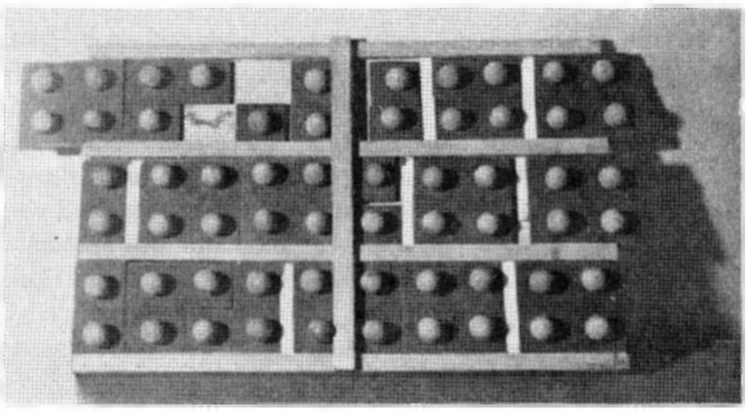
Ramen tjänstgör som linjeringsapparat. Vid Arvins undervisning använde barnen billigt, olinjerat konceptpapper i sina räkneböcker. De lade ramen så, att ribborna först löpte längs bokens överkant, och linjerade utmed ribborna, och sedan så att linjerna kom vinkelrätt mot de först uppdragna. Boken fick då kvadratiska rutor, i vilka talen skrevs och talbilder ritades.

Barnen arbetade också med lösa talbilder, så att t. ex. vid behandlingen av talet 9 följande bilder byggdes upp:



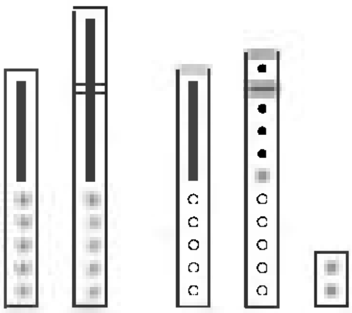
Ur G. J. Arvin m. fl.: *Vejledning til Regnebog for Folkeskolen I.*

När barnen sysslade med talbilder, ledde läraren arbetet med *Arvins kugleramme.*



Arvins kugleramme.
Tillhör Göteborgs skolmuseum. Foto Karl-Östen Sjöholm.

Ribborna med sina stickor (resp. halvkulestängerna) användes dels för att åskådliggöra talvärdena, dels för att förklara vissa operationer. Sålunda åskådliggjordes 15+3 och 15—3 så, att en stång med 10 och en med 5 lades vid varandra och till dessa lades en stång med 3 vid additionen, medan vid fråndragningen 5-stången drogs ned, så att 3 försvann.



10-övergången kan åskådliggöras på två sätt:

En 10-stång och en 9-stång ställes upp = 19. Därtill ska läggas 3. Barnen kan då sätta en 3-stång ovanpå 9-stången och direkt avläsa 22 eller också lägga trean isär i 1+2.

Tioövergången ska enligt Arvin inte börja vid 10 utan vid 20 eller 30 (dock i första klassen) och övas sedan inom vilket tiotal som helst.

Vid undersökning av talvärden i första klassen förekommer också mångfaldigande och delning, men tabellen och räkning i multiplikation och division förekommer först i andra klassen. När barnen ska lära tabellen, ritar de talserier, skriver dem och tränar dem. För träning använder varje barn ett tabellspel, och läraren har sitt kvadratmeterstora tabellkort.

Tabellspelet är en låda med lösa lappar, på vilka produkttalen är tryckta. På lockets utsida är den pytagoreiska multiplikationstabellen tryckt, på dess insida endast samma tabells kant-tal, medan övriga rutor är tomma. Produkterna lägger barnen i de tomma rutorna — med eller utan tävlan — Produkttalen inläres såsom *arealtal*. Till 48 svarar sålunda en fyrkant, som är 8 måttsenheter lång och 6 måttsenheter bred.

Lärarens tabellkort (1 m i kvadrat) har följande utseende eller — när man själv bygger upp det under arbetets gång — *får* följande utseende. Jämför Nordlund, s. 167.

1	2	3	4	5	6	7	8	[illegible]	10
2	*4*	6	8	10	12	14	16	18	20
3		*9*	12	15	18	21	24	27	30
4			*16*	20	24	28	32	36	40
5				*25*	30	35	40	45	50
6					*36*	**42**	**48**	**54**	60
7						*49*	**56**	**63**	70
8							*64*	**72**	80
9								*81*	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	*100*

Lärarens tabellkort.

De »svåra» talen 42, 48, 54, 56, 63, 72 markeras med kraftigare siffror.

Enligt Arvin ska man under första skolåret hålla sig inom talområdet 1—100 och i huvudsak till sammanläggning och fråndragning av ensiffriga tal, medan multiplikation och division förberedes genom t. ex. inlärandet av talserier. Han lägger särskild vikt vid att åskådliggöra de talförbindelser, som barnen ska lära sig utantill. Detta minnesstoff ska göras så levande, att barnen får lust att lära tabellerna med *absolut mekanisk säkerhet.*

Tabellstoffet för addition och subtraktion ordnar Arvin i 3 »tabelltrappor».

Tabelltrappa 1

Läses både lodrätt och vågrätt.

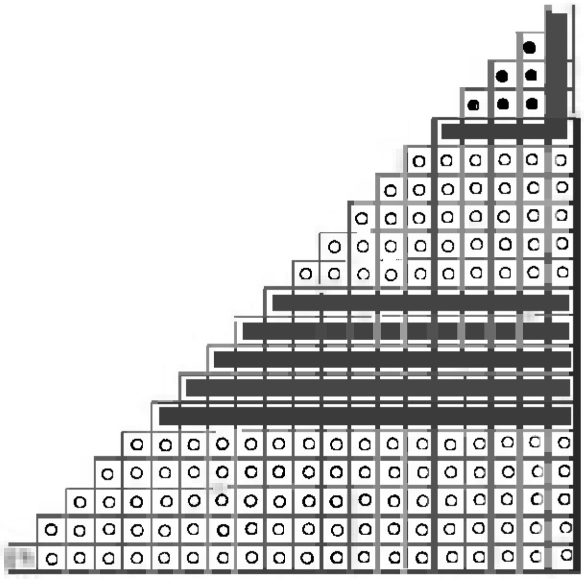
1+1= 2 2+1= 3				
3+1= 4 4+1= 5	2+2= 4 3+2= 5			
5+1= 6 6+1= 7	4+2= 6 5+2= 7	3+3= 6 4+3= 7		
7+1= 8 8+1= 9	6+2= 8 7+2= 9	5+3= 8 6+3= 9	4+4= 8 5+4= 9	
9+1=10	8+2=10	7+3=10	6+4=10	5+5=10

Tabelltrappa 2

10+10= 20 20+10= 30				
30+10= 40 40+10= 50	20+20= 40 30+20= 50			
50+10= 60 60+10= 70	40+20= 60 50+20= 70	30+30= 60 40+30= 70		
70+10= 80 80+10= 90	60+20= 80 70+20= 90	50+30= 80 60+30= 90	40+40= 80 50+40= 90	
90+10=100	80+20=100	70+30=100	60+40=100	50+50=100

9+1=10	8+2=10	7+3=10	6+4=10	5+5=10
9+2=11 9+3=12	8+3=11 8+4=12	7+4=11 7+5=12	6+5=11 6+6=12	
9+4=13 9+5=14	8+5=13 8+6=14	7+6=13 7+7=14		
9+6=15 9+7=16	8+7=15 8+8=16			
9+8=17 9+9=18				

Tabelltrappa 3



Kubikcentimeterstængerne. Ur G. J. Arvin m. fl.: *Vejledning* etc.

Arvins Kubikcentimeterstænger är 1 cm² i genomskärning och har längden 1—20 cm. När de ligger i sin ask, visar de, att 20=19+1, 18+2, 17+3 osv. till 10+10. Vid räkning med dem kan barnen exempelvis lösa sådana uppgifter som dessa: Visa mig en stång, som är 3 cm lång, en som är dubbelt så lång, 3 gånger så lång osv. Man fixerar 1 cm², och barnen räknar hur många cm² en framtagen stångs yta har, hur många det blir på två stänger osv. De får till uppgift att rita rektanglar, som innehåller t. ex. 24 cm², och ange längd, bredd och omkrets. Även enkla rymdundersökningar kan barnen göra med sina stänger, som dessutom användes för bråkräkning i följande klasser.

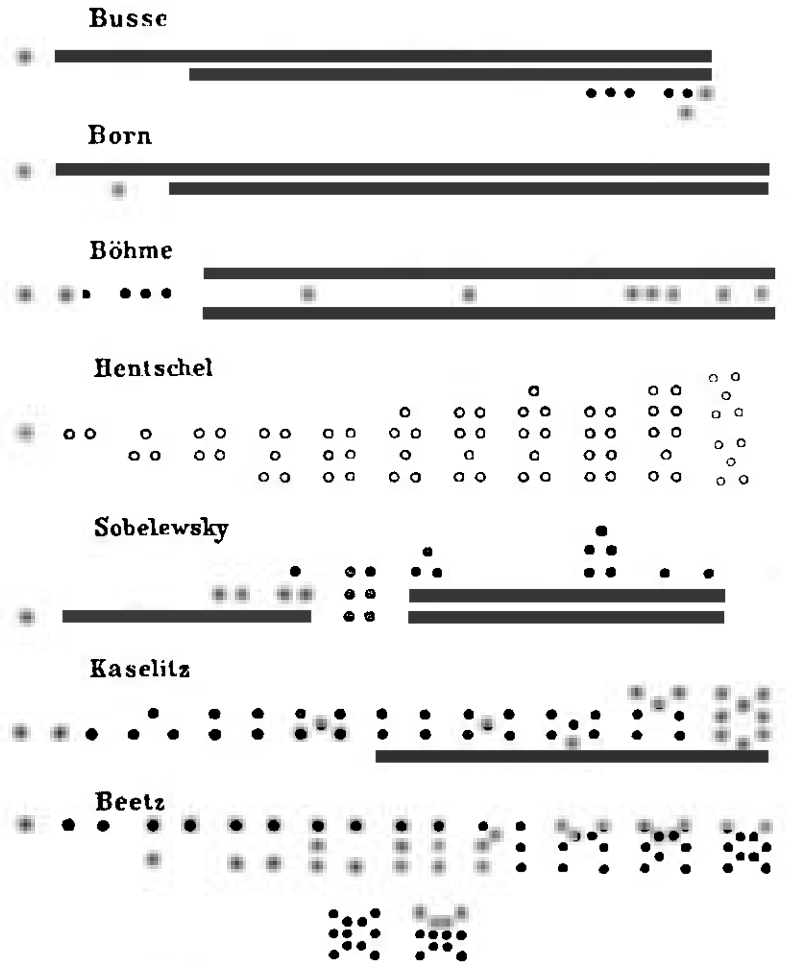
Additionstavlan användes redan i första klassen för träningsuppgifter, varvid läraren pekar på siffra efter siffra. För fortsatt träning kan de användas i följande klasser. Tavlan har 15 rader femsiffriga tal på vågrätt liggande stavar, av vilka varannan kan förskjutas i sidled, så att nya kombinationer uppkommer. Genom lodräta linjaler kan de femsiffriga talen uppdelas och operationstecken insättas. Arvins Additionstavle är avbildad på sid. 207.

7. Talbilder

som åskådningshjälpmedel är en gammal historia. I de förut omtalade böckerna för den första undervisningen, som utgavs 1803 under Pestalozzis namn och vilkas detaljerade metoder Pestalozzi själv senare tog avstånd ifrån, förekom, såsom vi har påvisat, enhetstabellens streckrad såsom åskådningsunderlag och inte talbilder. En tysk författare[1]) antar, att det berodde på att Pestalozzi stundom lät prata bort sig av sina medlärare. I andra skrifter har nämligen Pestalozzi förordat, att barnen, sedan de med ärter, småstenar eller träbitar förvärvat föreställningar om talen, skulle använda »representativa punkter», och hans åhörare har vittnat om att barnen vid hans undervisning hade små tabeller med fyrkantiga fält, i vilka punkter var intecknade.

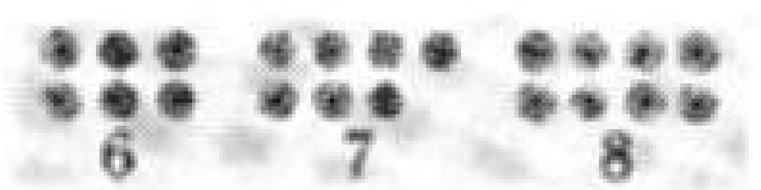
Det är emellertid sannolikt, att Pestalozzi ändå inte var den förste som använde talbilder i undervisningen. Antydningar om sådana finns redan från 1780-talet, och 1797 hade en professor *Busse* vid filantropin i Dessau visat, hur man med punkter, ordnade i två rader, kan åskådliggöra talen. Busses talbilder står som nr 1 på Lays av oss återgivna sammanställning av talbilder från olika tider. Busse hade en enhetlig form av talbilderna för 1—8. Nian och tian bröt denna form. År 1867 gav en skolman vid namn *Born* talbilderna en sådan form, att även de två avvikande talen byggdes upp efter samma grund som de föregående. Borns

[1]) W. A. Lay: *Der Rechenunterricht auf experimentell — pädagogischer Grundlage* I, Leipzig 1914.



Olika utformningar av talbilder. Jfr texten. De Bornska talbilderna har stått sig bäst. Hur Lay ändrade dem framgår av bilden på s. 186.

Ur W. A. Lay: *Der Rechenunterricht auf experimentell-pädagogischer Grundlage 1.*



»Talbilder för den första räkneundervisningen, utarbetad af *Evelina Ihre*». Uppklistrad på kartong 26,5 × 106 cm. Avsedd att hängas upp framför klassen. Blå prästkragar, gula ringblommor. Grupperingen är den Bornska. Datering osäker. Att döma av gammalstavningen skulle talbilderna ha kommit till före 1907.

Tillhör Göteborgs skolmuseum, som erhöll sitt exemplar 1911.

gruppering användes i mycket stor utsträckning allt fortfarande. Av de övriga talbilderna är *Böhmes* från 1877, *Hentschels* från 1842, *Sobelewskys* från 1852, *Kaselitz'* från 1868 och *Beetz'* från 1889.

De som förordade talbilder eller, såsom i något fall skedde, byggde hela den första räkneundervisningen på dem, uttalade sig mycket olika om deras användning och värde. Somliga betecknade dem som endast förelöpare till siffrorna eller som ett framställningsmedel mellan åskådningsmedlet och siffran. Andra framhöll, att punkternas gruppering var så karakteristisk, att man av talbilden kunde igenkänna talet utan att räkna punkterna. Den vore sålunda inte bara en bild av talvärdet utan en beteckning av talet (liksom siffran är en beteckning). Born använde talbilderna till att räkna med.

I diskussionerna kring talbilderna framfördes från andra håll, att talbilderna vore värdelösa, saknade större betydelse eller vore skadliga. Ur diskussionen återger vi ett urval av invändningar mot talbilderna och det bemötande av invändningarna, som gjordes av O. Beetz.[1])

Talbilden är något konstlat, som man inte möter annars i livet än vid domino och kortspel samt (i fem- och tiogrupper) vid uppräkning av sedlar.

---

[1]) Efter Lay a. a.

— Om invändningen vore riktig, skulle också geografiska och matematiska åskådningsmedel samt schematiska teckningar vara konstlade medel.

Talbilden är konstlad, därför att den förstör talbegreppet; anordningen av enheterna är för talbegreppet likgiltig. — Detta är en motsägelse, ty är enheternas ordning likgiltig, så kan den inte förstöras. Och i själva verket användes talbilder inte vid färdiga talbegrepp utan för att främja uppkomsten av talbegrepp.

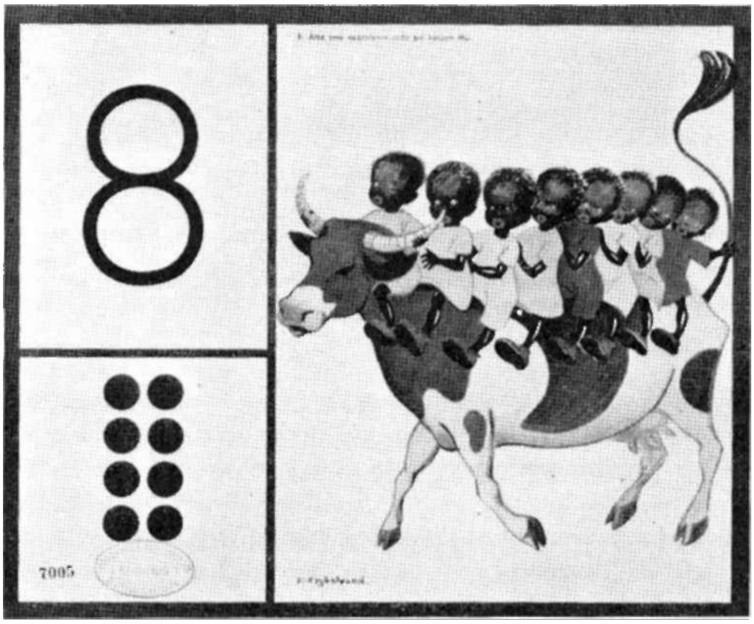
Talbilden behärskar endast ett litet område och förmår därför endast obetydligt understödja föreställningen av talen. — Det lilla området är förebildande och grundläggande för all räkneundervisning!

Talbilderna som åskådningsmedel utesluter barnens eget deltagande — Beetz svarar: Denna anmärkning träffar inte talbilden utan — läraren. Talbilden och barnens självverksamhet låter i hög grad förena sig.

Talbilden gör barnen opraktiska och verkar därför skadligt. Har de vant sig vid punkter och brickor, så står de rådlösa, när de inte har dem till hands. — Talbilden ska inte vara till hands utan i huvudet.

Man menade också, att talbilden inte kan föra till talföreställning utan endast till formföreställning. Lay betecknar påståendet som felaktigt och åberopar erfarenheterna från experimentella undersökningar.

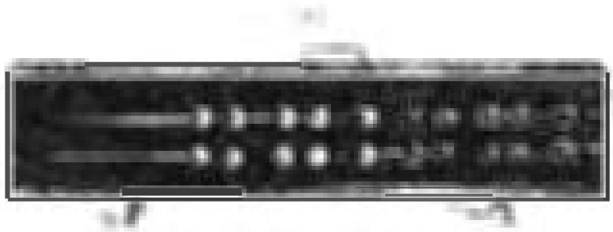
Talbilderna för de olika talen måste vara uppbyggda efter ett enhetligt system. Det kravet kommer redan av talens och talsystemets natur. När talen 1—10 växer fram genom att en enhet lägges till närmast föregående, så föreställer man sig alldeles inte, att någon enhet hoppar upp eller på annat sätt skiljer sig från strukturen hos de övriga i raden. Man tycker att så sker, när man ser på Hentschels eller Sobelewskys talbilder. Beetz bilder av 7—12 är oöverskådliga och verkar oroliga. Liksom talens värde ökas med en enhet, bör också talbilden ökas endast för varje tal med en enhet men inte undergå någon förändring till sin struktur. Därför är de Bornska talbilderna de mest rationella av dem som återgivits på s. 180. En annan sak är, att man genom ytterligare gruppering hos dem kan underlätta uppfattningen av större antal än 4.



Kombination av siffra, talbild och uppslag för räknesagor. Ur en serie tecknad av *K. Frykstrand.* Från omkring 1945. Bra som uppslag för räknesagor, se s. 115. Om stående och liggande talbild se nedan.

När man jämför de återgivna talbilderna, märker man, hur mycket lättare det är att uppfatta en liggande talbild än en stående. Vid den liggande får ögat glida från vänster till höger, såsom det är vant att göra vid läsningen. Vid den stående nödgas ögat att gå nedifrån och uppåt (eller tvärt om). Och det går inte lika lätt. Jag såg en gång en sprakande ljusskylt med namnet på en känd jultidning, men man hade satt bokstäverna i rad uppifrån och nedåt. Jag fick stå och stava!

För att göra de Bornska talbilderna mera överskådliga grupperade W. Lay om dem en smula, så att han fick kvadratiska talbilder, såsom han kallar dem. Varje enhet bildar



W. A. Lays räkneapparat (»Rechenmaschine») *för första skolåret.* Genom något mellanlägg behåller kulorna sin kvadratiska gruppering, när de skjutes fram på stängorna. Till denna lärarapparat hörde »handapparator» för varje särskilt barn: Innersidan av en pennlåda med hål och knappar eller en linjal med kulor på stänger. För andra skolåret hade Lay konstruerat en större lärarapparat med 100 kulor.

Ur Thomassen: *Strejflys* etc.

hörnet i en kvadrat. Det kan de göra också i de bornska talbilderna. Men Lay ökade avståndet efter vartannat par, så att en gruppering av fyra och fyra tydligt framträdde. Han resonerade så: Om kulor ordnas i en rad, så kan de flesta barn i en blick uppfatta endast tre. Är fler kulor framförda, så måste barnen räkna upp dem: ett, två, tre, fyra, fem osv. för att kunna ange antalet. Men kan barnet uppfatta tre i en enkelrad, så kan de också uppfatta tre par, alltså 6. Talbilderna för 7, 8, 9 och 10 kan barnet inte tydligt uppfatta (i en blick nämligen), föreställa sig och framställa. En delning av talbilden i 3 par vore av tvivelaktigt värde. En uppdelning i grupper om två och två vore enklare och tillförlitligare. Två grupper kunde uppfattas lika lätt som två enheter, ja, de barn, som kunde i en blick uppfatta 3, skulle också kunna uppfatta 3 grupper, alltså 12 enheter. Han företog flera experimentella undersökningar för att utröna olika talbilders värde dels inbördes, dels i jämförelse med enkelraden. Vid jämförelsen mellan de Bornska talbilderna och de kvadratiska konstaterade han, att försökspersonerna gjorde fler fel vid försök att uppfatta de Bornska bilderna än vid motsvarande försök att uppfatta de kvadratiska. Han drar av sina försök den slutsatsen, att kvadratiska talbilder är överlägsna alla andra.

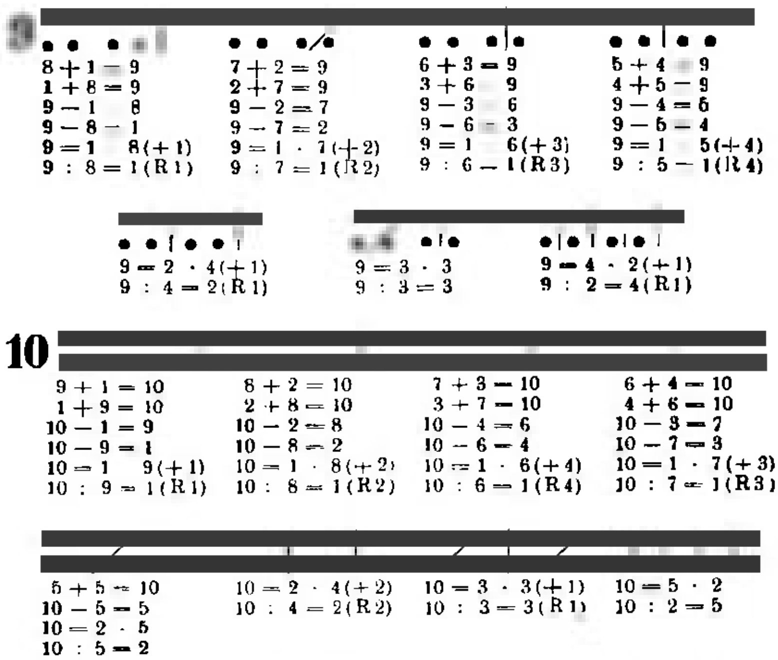
Kulramen har varit den utan jämförelse vanligaste hjälparen i den första räkneundervisningen. Vi ser nu bort från den svaghet, som ligger i sådan användning av den, att man endast *demonstrerar* talvärden och räkneoperationer för klassen. Vi går nämligen ut från att alla undervisare nu har erfarit skillnaden mellan att å ena sidan bara visa en sak för hela klassen och å andra sidan låta varje enskilt barn genom egen verksamhet på ett eller annat sätt åskådliggöra samma sak. Utan nu tänker vi bara på det sätt, varpå kulorna, ordnade på en rad, kan tjäna åskådliggörandet.

När ett antal kulor, som överstiger 3, möjligen 4, framföres på tråden, kan barnen inte uppfatta dem utan att räkna dem. Hur ofta ser man inte de små lyfta fingret, peka och räkna ett, två, tre, fyra, fem, sex, sju, sju var det ja, eller också nickar de för varje kula. Genom långsamheten i uppräkningen går tid förlorad för viktigare saker.

Lay försökte därför genom experiment utröna skillnaden mellan enheter i rad och enheter ordnade i grupper beträffande försökspersonernas förmåga att uppfatta, föreställa sig och minnas exponerade antal. Försökspersonerna fick under ett ögonblick se ett antal punkter i rad och skriva ned sin uppfattning av antalet. Och så fick de se lika många tal — naturligtvis också av lika svårighetsgrad — grupperade som Bornska talbilder. Antalet *fel* var för enheterna i rad 408 och för enheterna i gruppering 176.

När jag första gången läste om dessa ting — det var 1915! — blev jag ganska överraskad av de Layska resultaten och fick lust att pröva dem. Jag ritade upp talbilder på lösa pappskivor, stora och tydliga punkter, så att alla skulle kunna se dem. På 10 skivor ritade jag punkterna i rad såsom kulorna på en kulram, så: ooo, oooo, ooooo osv. till oooooooooooo. På andra tio pappskivor ritade jag kvadratiska talbilder: $\begin{smallmatrix}\circ&\circ\\\circ&\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}\circ&\circ\\\circ&\circ\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}$ osv. upp till $\begin{smallmatrix}\circ&\circ\\\circ&\circ\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}\circ&\circ\\\circ&\circ\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}\circ&\circ\\\circ&\circ\end{smallmatrix}$. Jag höll fram en bild under 1 sekund. Jag

Tafel II.a.



Hur W. *Lay utnyttjade talbilderna* för 9 och 10: lägga isär, addera, subtrahera, innehållsundersökning.

Ur W. A. Lay: *Der Rechenunterricht* etc.

hade inget takistoskop. Så försöken var så litet vetenskapliga som gärna tänkas kan. Men ändå! Barnen skrev så upp, vad de ansåg sig ha sett. Naturligtvis kom talen inte i nummerordning eller så att först kulramens ordning och sedan talbildens bjöds i obruten följd.

Raden uppfattades bra, när det gällde 3 och 4, vid 5 var resultatet skapligt (18 rätt av 23 möjliga), vid 6 var 14 med men vid 7 endast 1, vid 8 fem, vid 9 och 10 en, vid 11 och 12 noll. Vid talbilderna åter var resultatet helt annorlunda.

4, 6 och 8 angavs rätt av samtliga 23 barn, 3 och 9 av 22, 5 av 21, 10 av 20 barn. Lägst kom talbilden för 11, som angavs rätt av 12 barn, medan talbilden för 12 samlade 17 rätta svar. Beräknas resultatet i procent riktiga och felaktiga svar, får vi följande uppställning

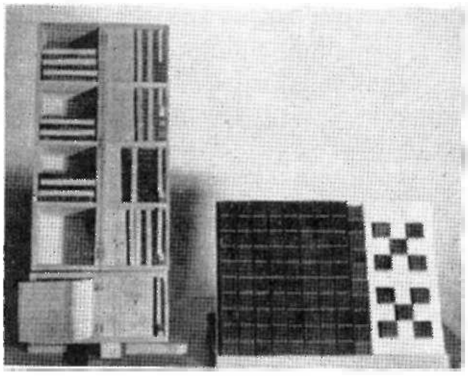
	Rätta svar	Felaktiga svar
När punkterna var ordnade i rad	36,5 %	63,5 %
» » » » till kvadratiska talbilder	87,8 %	12,2 %

Som sagt: Försöket var amatörmässigt anordnat, men tendensen i svaren kan ändå antagas peka i rätt riktning.

Nu bör man emellertid observera, att överlägsenheten hos talbilderna gäller den snabbhet, med vilken barnen kan uppfatta det antal enheter de presenterar. Resultatet av räkneundervisningen beror naturligtvis av andra faktorer också, främst säkerligen av den klarhet vi kan förmedla, när det gäller talvärden, talens placering i talsystemet och själva räkneoperationerna. Då nu både erfarenhet och försök visar, att talbilderna kan lämna hjälp också när det gäller att förmedla denna klarhet, så kommer man till den slutsatsen, att vi inte ska försmå deras tjänster. Men vi ska inte heller överdriva deras förtjänster!

8. Pelare och kuber

När jag för snart 40 år sen för första gången stod inför uppgiften att försöka göra den första räkneundervisningen åskådlig, fanns två slags hjälpmedel till hands: kulramen (i ett exemplar!) och räknepelare i en låda. En kub med ung. 2 cm kantlinje representerade 1, en pelare, som var lika stor som två entalskuber, åskådliggjorde talvärdet 2. Nästa pelare var ytterligare en kub högre, och på det sättet fortsatte pelarna att växa, så att talvärdet 1—10 kunde åskådliggöras. Pelarna blev sålunda inte så särskilt stora

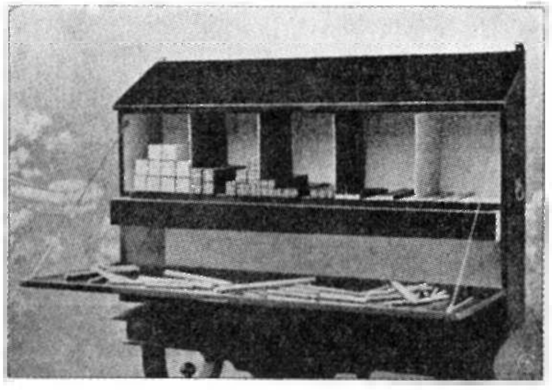


Ehlins räknemateriel. Till vänster kub (1000-tal), skivor (100-tal), pelare (10-tal). Till höger 10-talspelare, talbilder. Dateringen är osäker. Men år 1905 utgav Ehlin Metodiska anvisningar till åskådningsmateriell för undervisningen i räkning.

Tillhör Göteborgs skolmuseum. Foto Karl-Östen Sjöholm.

och syntes dåligt för andra än de närmaste. Pelarna var bra för jämförelser men annars föga lämpade för den första undervisningen. Jag visste inte då, varifrån denna materiel stammade. Nu har det visat sig, att litteraturen har registrerat denna materiel också. Den hänför sig till den Tillischska räknelådan. Den uppfanns av den tyske pedagogen, dr *Ernst Tillisch* och beskrevs av honom 1806. Den bestod av 100 pelare, en tum i fyrkant, 10 st. för vart och ett av talen 1—10. De tio tio-pelarna bildade då en yta, som åskådliggjorde hundratalet. De förvarades i en låda, som innehöll 10 rum. På dess lock kunde pelarna ställas upp och alla talen t. o. m. 100 erhålla åskådlig gestalt. Den Tillisch'ska räknelådan har varierats och återkommer även i svenska räkneapparater.

Bland räkneapparater med pelare må omnämnas en norsk, »*Fröken Holtskogs patenterede regnekasse*». Den visar, hur långt man understundom tror, att tal och räkneförlopp måste åskådligt framställas. I de sex rummen ligger pelare, som — från höger till vänster — representerar ental, tiotal, hundratal, tusental och hundratusental. Som synes får pelarna allt större basyta. Hundratalspelaren exempelvis har basytan målad i samma färg som tiotalspelaren men är



Fröken Holtskogs patenterede regnekasse.
Ur konstruktörens bruksanvisning.

indelad i 10 rutor, så att man kan se, att ett hundratal är 10 tiotal. Vid räkning tar man ut pelarna och lägger dem på det nedfällda locket, så att rummen står tomma. När t. ex. talen 1—10 är grundligt behandlade, visar man barnen, som till dess haft lösa pelare att arbeta med, att en tiotalspelare är lika med 10 ental, och lägger den i sitt rum.

»Derved ser barnet og forstaar at 10 enere er det samme som 1 ti og skrives med 1 i tiernes rum og ser samtidig at 0 skal skrives i enernes rum for det er tomt. Kommer saa en, to, tre, fire o. s. v. enerklodser i enernes rum, skriver og læser klassen med en gang 11—12—13—14 o. s. v. — Like enkelt og letvindt er det ogsaa for de höjere tals indövelse. — Paa samme maate gaaes der frem ved subtraktsjon. Vi tar f. eks. 6000—2498, barnet kan selv demonstrere. 6 tusenklodser lægges i sit rum. 1 tusenklods tages væk (igjen er 5 tusenklodser) og erstattes med 10 hundreklodser i sit rum, saa tages 1 hundreklods væk (igjen er 9) og erstattes med 10 ti-klodser i sit rum, saa tages 1 ti-klods (igjen er 9) og erstattes med 10 ener-klodser. Herved ser barnet hvordan tallet opløses og hele klassen regner saa den opstilte opgave.»

Ytterligare en konstruktion av principiell betydelse utom Tillisch's må omnämnas. Det är *Heers räknekub*. Svenska tillämpningar av den finns i många materielskåp. Den är av år 1836. En kub av t. ex. 10 tums kantlinje skäres i 10 lika skivor, en av skivorna delas i 10 pelare, och en av pelarna delas i 10 småkuber. Då varje skiva innehåller 10 · 10 småkuber och vi har 10 skivor, får vi en bild av ental (småkuberna), tiotal (pelarna), hundratal (skivorna) och tusental (hela kuben). Även av de räkneapparater, som vi här har kunnat illustrera, ser vi Heers räknekub gå igen. Kanske vi hellre ska säga, att det är samma princip som går igen.

9. Stickor, brickor, håltavla, räknepengar

Vi minns Nordlunds 3 000 stickor. Han var inte den förste. En professor *Pierre Villaume* förordar pinnar 1780, och en seminarierektor *Bernhard Overberg* skriver 1793, att pinnarna bör vara kvarterlånga och buntade till 10-buntar, 100-buntar och 1 000-buntar, dvs. samma lösning av problemet som Nordlund förordar. *G. J. Arvin* hade pinnar i sitt räkneverk. Och *Mads Larsen* rekommenderar i sitt förut omnämnda arbete Den grundlæggende Regneundervisning att låta barnen arbeta med tändstickor. De har enligt honom 15 förtjänster.

1. Det är ett kroppsligt åskådningsmedel.

2. Det består av naturliga element (ental).

3. Dess elementer besitter all önskvärd rörlighet i förhållande till varandra.

4. Dess elementer är så lika, att deras inbördes skillnad inte leder bort barnens uppmärksamhet från undervisningen eller hindrar dem från att uppfatta objekten som likartade.

5. Dess elementer är inte större än att det är möjligt att bilda sig en helhetsuppfattning av den mångfald, som ett tillräckligt stort antal av dem utgör.

6. Dess elementer kan anbringas i oordnade högar eller i knippen och ordnas i rader eller i symmetriska grupper.

7. Det lämpar sig bra för att åskådliggöra tiotalssystemets byggnad, enär 10 »ental» kan bindas samman till ett knippe eller ett tiotal, 10 sådana tiotal bindas samman till ett hundratal och 10 sådana hundratal till ett ännu större knippe eller ett tusental osv.

8. Det är i hög grad hanterligt för både vuxna och barn på grund av elementens storlek och form. I det hänseendet har tändstickorna i många år bestått provet i det praktiska livet.

9. Elementens prismatiska form gör, att de blir liggande på den plats och i den ställning man ger dem.

10. Om man väljer vita tändstickor, vilket man bör göra, står färgen i tillräcklig kontrast till skolbordet och enheterna kan ses tydligt av alla normalt seende elever i klassen, när läraren på lämpligt sätt håller åskådningsmedlet i handen för att åskådliggöra ett tal eller en operation.

11. De mörka huvudena på tändstickorna gör det möjligt att åskådliggöra ett tal på en gång efter räckeordningens och gruppordningens princip, eller — med andra ord — de medger en mera lättåskådlig talbildsbildning vid ordning i rad än det skulle kunna vara tal om, om huvudena saknades, i det att några tändstickor kan läggas med huvudet i en riktning, andra med huvudet i en annan riktning.

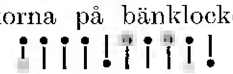
12. Elementen och därmed också de talbilder, som möjligen bildas med hjälp av dem, är lätta att efterlikna grafiskt.

13. Barnen känner väl till det.

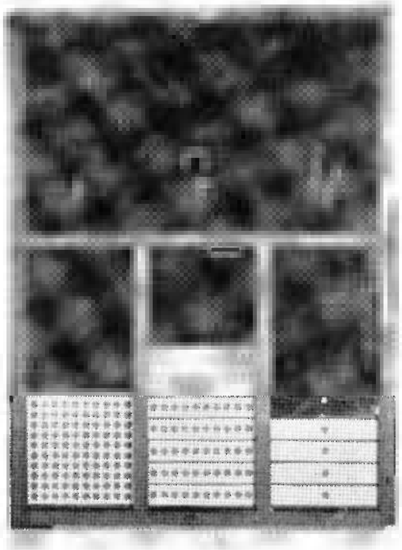
14. På grund av det låga priset är det lätt att bringa samman så stort antal, att det vid undervisningen räcker till både lärare och barn.

15. När räkningen har skridit så långt fram, att tändstickorna kan undvaras som åskådningsmedel, kan man använda dem efter deras ursprungliga bestämmelse att alstra eld, och man har då haft »Anskuelsesmidlet ganske gratis.»

»Intet andet Anskuelsesmiddel til Brug ved den grundlæggende Regneundervisning kan opvise saa mange og saa vægtige Fortrin», tillägger författaren, som tydligen anser, att tändstickan kan sprida ljus på mer än ett sätt.

Larsen lät barnen räkna med stickorna på bänklocket. Talbilderna ordnade han på detta sätt: 

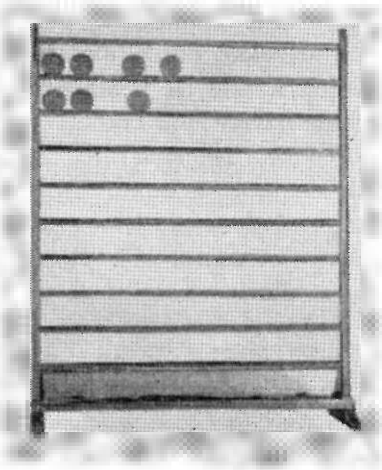
Nordlund stack vid demonstration in pinnarna i en tavla med hål (se s. 167). När just hans form av håltavla först kom till, kan jag inte uppge. Men en räknetavla med 10 · 10 hål var känd före 1830.



Talbilder, som ska åskådliggöra talet 174, uppställda på talbildstavla. Ålder okänd. Tillhör Svenska skolmuseet.
Foto: Bertil Fastén.

Man använde håltavlan, stundom kallad decimaltavla, för att åskådliggöra det dekadiskt uppbyggda talsystemet. Kanske man då fann pinnarna litet oregerliga och sökte efter lätthanterligare enheter, t. ex. pappskivor med prickar, en slags talbilder men med kulramen som förebild, såsom bilden visar.

I bokens huvudkapitel har jag berättat om att barnen använde räknelappar såsom det regelbundet återkommande åskådningshjälpmedlet. Lapparna stannar kvar, där man lägger dem, de är lätta att ordna till talbilder, och de är billiga. Med tillhjälp av de fyra färgerna kunde de också ge talrika variationer. Papp och papper blir dock smutsiga med tiden, och det går inte att tvätta dem. Ett hjälpmedel, som har räknelapparnas förtjänster och är befriat från deras nackdelar, använde den kände skolmannen *Anders Berg*



Ester Backes räkneram med 100 lösa skivor. Skivorna var i olika färger och stacks ned i en skåra i ribborna. Datering är osäker annat än i så mån, att ramen fanns till före 1915. Ester Backe var lärarinna i Jönköping.

Tillhör Göteborgs skolmuseum. Foto Karl-Östen Sjöholm.

(1821—1912) i Finspång. Hans son, undervisningsrådet *Hjalmar Berg*, har berättat, att när han började skolan — det var år 1865 — fick han och de andra nybörjarna använda »*kvadratiska glasskivor*, 1 tum i fyrkant. Med dem plockade vi och lade ut något motsvarande senare tiders talbilder och åskådliggjorde våra första räkneoperationer. En fördel med dem var, att vi allt emellanåt kunde tvätta dem rena.»[1]) Anders Berg hade låtit brukets målare-glasmästare tillverka glasskivorna av spillbitar. Billigt, lämpligt, ändamålsenligt! Det är så mycket mera anmärkningsvärt som demonstrationsmaterielen förhärskade och räkneundervisningen vilade på minnestabeller och »reglor».

Räknemynt ingår ofta i olika sammanställningar av åskådningshjälpmedel, och de tillhandahålles också ensamt för sig. Numera är de väl i regel tryckta på papp. Hellstens (s. 169) var dock i metall. År 1809 fick Pestalozzi i Yverdon besök av en skolman vid namn *Karl von Raumer*. »Han blev»,

[1]) I brev 1948.

skriver Fr. Thomassen, »övertygad om att Pestalozzis livlösa streckar borde ersättas med glänsande föremål, som barnen kunde ha i händerna, när de räknade. Han framställde därför sina räknepengar av vit och gul metall i olika storlekar. De små vita betecknar ental, de större tiotal och de största hundratal. Härtill sluter sig gula metallpengar i fyra storlekar, de minsta betecknar tusental, de större tiotusental osv. Romerska siffror, präglade i mynten, anger deras värde (I X C M osv.).»

10. Räknetabeller

a. *Växelundervisningssällskapets räknetabeller*

För mekaniska träningsövningar har man i våra dar stundom häften med utskrivna räkneuppgifter och med plats för barnens svar. Förr hade man inte så gott om papper. Då hängde man upp räknestavar eller tryckta tabeller och drev övningarna efter dem. Om man inte skrev upp talen, kallades övningen huvudräkning — ett ganska olämpligt uttryck, enär all slags räkning i högsta grad har med huvudet att göra.

Vid växelundervisningen använde man tabeller bl. a. i läsning och räkning. Tabellen hängdes upp framför »cirkeln» (den grupp barn, som undervisades av en monitör) eller sattes i barnens händer. Dessa senare tabeller var ofta uppklistrade på en träskiva och fernissade.

Hur de första räknetabeller, som användes i växelundervisningsskolor, såg ut, kan jag tyvärr inte ge något säkert besked om — de tycks vara borta. De omnämnes emellertid av *P. R. Svensson*[1]) i den lilla klassiska boken P r a k-

[1]) Peter Reinhold Svensson (1789—1877) fil. mag., lärare vid skolor i Stockholm, kyrkoherde; studerade på uppdrag av regeringen Pestalozzis metod samt Bell-Lancasterska metoden i England, bidrog verksamt till införandet av växelundervisningen i vårt land och försökte hålla tillbaka metodens värsta mekaniseringar av undervisningen.

tisk Handledning för Vexelundervisningen i Folkscholor, Stockholm 1823. Han skriver där:

Att försinnliga talen samt på dem grunda förståndets utveckling och tankeförmågans uppöfning, har sällan eller aldrig kommit i fråga. Om ock en och annan schollärare, äfven i Sverige, användt Pestalozziska räknomethoden, så har detta ej skett och kan ej ske i folkscholor, emedan denna method egentligen förutsätter eller går i bredd med mathematiken — en vetenskap, som ofta är fremmande för lärare och alltid för lärjungar i sistnämnda scholor.

Den räkneundervisning, som bedrevs i engelska och franska växelundervisningsskolor, ville Svensson ej heller förorda, därför att den var blott mekanisk. Därför redogjorde han för sin egen metod, och det är på den han syftar när han tillägger:

I stället för de till denna method förberedande medel, som förf. begagnat: Knappformar, streck på en tafla, skrifna tabeller m. m. har Collega Scholæ Herr Magister Fryxell utarbetat 2:ne tabeller, hvilka på Vexelundv.-Sällskapets bekostnad blifvit tryckta.

Att den blivande historikern Anders Fryxell sysslade med att konstruera räknetabeller, är en upplysning som inte saknar intresse.

Det är dessa tabeller som är borta. De synes ha utgjorts av rader av nollor (ringar) ordnade en och en i rad, två och två i rad, tre och tre i rad, alltså som något slags talbilder, måhända såsom på Pestalozzis enhetstabell. Svensson låter undervisaren (monitören) peka på två nollor och frågar A, hur många nollor där står. A svarar: 2. Underv. pekar på två andra nollor och frågar och 2? B svarar: 4. Undervisaren pekar och frågar och 2? C svarar: 6 osv. Eller också pekar underv. på 2 nollor och frågar: Vad är 2? Svar: 1+1=2. Han flyttar sin käpp till andra raden, pekar på 3 nollor och frågar: Vad är 3, osv. När han pekar på 9, vill han ha svaren 8+1=9, 7+2=9, 6+3=9, 5+4=9, 4+5=9, 3+6=9, 2+7=9, 1+8=9. Man styrkes i sin uppfattning, att Växelundervisningssällskapets första räknetabeller var besläktade med Pestalozzis enhetstabell av det förhållande, att Svensson såsom inledning till den senaste övningen skriver som en anmärkning: »Man kan ock begagna denna tabell såsom den Pestalozziska räknetabellen.»

Om räknetabellernas användning skriver Svensson:[1])

Afsigten med dessa tabeller är: 1:o, att bibringa barnen ett klart och åskådligt begrepp af storheter (enheter och tiotal), derigenom, att barnet aldrig hör nämnas ett tal, utan att tillika se dess tecken (ziffran) och den storhet, som svarar däremot, framför sig, så att talets ljud för örat, ziffertecken för ögat och storhet för åskådningen sammansmälta till ett concret helt. 2:o. Att barnet har på dessa tabeller endast factorerna gifna, men sjelf måste leda sig till facit, i stöd af egen åskådning och erfarenhet, men icke på andras autoritet.

Dessa två tabeller, de första som Växelundervisningssällskapet utgav, har inte kunnat spåras. Några år senare har emellertid sällskapet utgett fyra räknetabeller. På Svenska Skolmuseet förvaras »*Facit-Bok, hörande till de Tabeller för Räkning på Tafla, hwilka Sällskapet för Wäxelunderwisningens befrämjande utgifwit.*» Den är tryckt i Stockholm 1827. Av facitboken framgår, att tabellerna var fyra, en för vardera addition, subtraktion, multiplikation och division. Antalet exempel växlade mellan 38 och 70.

Facitboken ger på sitt sätt en bild av den svårighet, som uppkom därav, att monitörerna (»undervisarna») inte kunde stort mer än de barn, som de sattes att undervisa. Sålunda innehåller facitboken inte endast svaren utan också (med mindre siffror) »de vid radernas hopsummering uppkommande minnen», delprodukterna vid multiplikation och hela

[1]) A. a. s. 33. I Svenska folkskolans historia, del II av Klas Aquilonius, återges samma citat men såsom utgörande en sammanfattning av »kärnan i Fryxells räknemetodik.»

uträkningen vid division. Nog gick man från det lättare till det svårare. Sålunda var första divisionsexemplet 46 : 2 och det sista 1 564 132 : 684 597 = $2\frac{194938}{684597}$.

14 år senare utgav Växelundervisningssällskapet *Räkne-Tabeller* 1—6. De trycktes jämte tillhörande facit hos P. A. Norstedt & Söner 1841. Dessa tabeller finns bevarade till våra dar, t. ex. på Svenska Skolmuseet, Stockholm, vars exemplar förf. har fått ta del av.

Tabellerna, som har storleken 47 . 38,5 cm, innehåller dels teoretiska utredningar, dels övningsexempel, av vilka den första raden är uträknad. De teoretiska utredningarna utgjordes av definitioner, begreppsutredningar och regler. När monitören skulle förhöra sin »klass», kunde han med ledning av facitboken framställa sådana frågor som dessa: Hwad är a d d e r a? Hwad kallas de tal, som skola adderas? Huru benämnes det sökta talet, som genom additionen erhålles? — Hwad will kolumn säga? Med hwilken kolumn plägar man börja uträkningen?

På samma sätt krävs definition av subtrahera, multiplicera och dividera samt kännedom om namnen subtrahend, minuend, faktor, multiplikand, multiplikator, produkt, dividend, divisor och kvot, ja barnen får t. o. m. frågan: Hwarföre heter det qvot?

Man börjar visserligen med små tal. Men på varje tabell kommer man snabbt upp till svindlande stora tal. Man får i facitboken se en summa på 720 987 646 fot, en rest på 299 980 900 291 och en produkt på 32 318 532 135 241 000. På räknetabellen 6, som upptar blandade exempel, kan man räkna sig till att det finns 872 000 000 mänskor på jorden. Och på första tabellen får barnen dels se att 9 betyder så många enheter: 111111111, dels avläsa talet 31''' 987 654'' 321 927' 654 321. Additionstabellens första och sista tal må återges.

Ex. 1)

Summa 15

Första och sista
additionstalet
på Växelundervisningssällskapets
tabeller av år 1841

Ex. 21)

98765432
8
89
546
7637
94297
659869
8675266
57102398
82468086
43360978
6586955
927899
99787
6786
479
44
8
57
635
7096
36878
544289
4567
9

På tabell 1 fanns två minnestabeller, som vi återger. Vi lägger märke till att addition och subtraktion som varandras omvändning, likaså multiplikation och division. Det är utmärkt. Lägg också märke till anordningen, som avviker från våra dagars och förefaller vara lättare att lära barn använda.

b. Junkers räknetabeller

När barnen var färdiga med tabellerna och skulle träna in det lärda på andra exempel, fanns inga räkneböcker att sätta i deras händer. Svensson råder monitörerna att låta barnen själva hitta på exempel. Barnen säger i tur och

1) för Addition och Subtraktion.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+ 1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	−
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	3
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+ 4
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	−
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	−
0	1	2	3	[illegible]	5	6	7	8	9	6
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[illegible]
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	+ 8
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	−
0	1	2	3	4	[illegible]	[illegible]	7	8	9	9
[illegible]	10	11	12	13	14	15	16	17	18	

Anm. 1. Additions-tecknet (+) betyder ökadt med, Subtraktions-tecknet (−) betyder minskadt med. Dessa tecken, näst före den stora slutsiffran i hwarje dubbelrad, utwisar att denna siffra, lagd till öfre radens siffror, hwarje gång ger den unde under stående siffran; men att hon, dragen ifrån nedre radens siffror, hwarje gång ger den midt ofwer stående siffran. T. ex. 0 (i öfre raden) + 1 (wid högra kanten) ger 1 (i nedra raden), och twärtom: 1 (i nedre raden) — 1 (wid högra kanten) ger 0 (i öfra raden), och så widare genom alla raderna.

Anm. 2. Sedan hela denna minnestabell rad för rad blifwit på sådant sätt genomgången, som bör ske så ofta den anwändes: så kunna med ledning deraf åtskilliga frågoöfningar werkställas: t. ex. a) Huru många enheter innehåller 8 mer än 3, mer än 1, mer än 5? o. s. w. b) Hwad skall läggas till till 3, för att få 6? till 9, att få 15? o. s. w. — c) Hwad skall dragas från 16 lod, så att der återstår 10, 7 eller 9 lod? o. s. w. d) Hwad är skillnaden emellan 9 tum och 17 tum, 6 ark och 13 ark? o. s. w. e) Huru mycket är 7 alnar mer än 2 alnar, 19 stop mer än 8 stop? o. s. w. f) Lägg 5 och 4 och 7 tillsammans, och drag sedan 9 derifrån? o. s. w.

Anm. 3. För widare öfning kan, antingen muntligen eller skriftligen, ett gifwet begynnelsetal oupphörligen ökas eller minskas med ett annat gifwet tal: t. ex. 1 ökadt oupphörligen med 7 = 8, 15, 22, 29, 36, 43 o. s. w. till inemot, icke öfwer 100. — 99 minskadt oupphörligen med 5 = 94, 89, 84, 79, 74 o. s. w. så länge ske kan, d. w. s. tills 4 återstå.

2) för Multiplikation och Division.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	1	2	3	4	5	6	[illegible]	8	9	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	× 3
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	:
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	4
0	4	[illegible]	12	16	20	24	28	32	36	
0	1	[illegible]	3	4	5	6	7	8	9	5
0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6
0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7
0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	× 8
0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	:
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Växelundervisningssällskapets Räkne-Tabeller av år 1841. Överdelen av högra hälften av tabell 1, Inledning. Ungefär 1:2 skala. Vänstra hälften upptages av begreppsutredningar och definitioner. De båda tabellernas uppställning är intressant.

ordning ett tal, monitören skriver upp det på »trädtaflan», och så räknar man dem gemensamt. Han tillägger:

Ehuru man på detta sätt kan få otaliga exempel, hänvisar man dock lärare till Junkers arithmetiska tabeller, hvilka, ehuru ej utarbetade för vexelundervisnings-scholor, likväl kunna, tilldess de väntade bättre hinna utkomma, begagnas.

P. R. Svenssons Handledning trycktes 1823. Hans uttalande ger alltså en hjälp att datera ett undervisningshjälpmedel i räkning, av vilket våra dagars lösa arbetsblad och i viss mån tryckta, lösa provräkningsblad till sin form kan anses vara en nutida avläggare.

Den äldsta upplagan av Junkers räknetabeller saknar datering. Av stavning och tryck skulle man våga en förmodan, att de stammar från slutet av 1700- eller början av 1800-talet. Vi kan nu tack vare Svensson fastslå, att de fanns före 1823.

En andra upplaga trycktes 1833, en tredje 1844. Dessa var ombesörjda av A. Lorentzon, »Regiments-Pastor och Schol-Lärare». En senare upplaga, omarbetad efter den då nya sorträkningen, utgavs 1859 av J. Beckman, seminarieadjunkt i Härnösand och folkskolinspektör.

Lorentzon har tagit hänsyn till växelundervisningens behov och ger detaljerade anvisningar om hur tabellerna ska klistras upp och hur undervisningen ska ske. Vi citerar honom:[1])

Att minnesräkningen bör föregå räkningen på taflan, såsom grunden och medlet för den sednare, torde icke behöfva nämnas. Båda dessa kunna likväl bibringas genom modifierad vexelundervisning. Barnen indelas då uti vissa kretsar, eller cirklar, efter deras gjorda framsteg och ålder. Några

---

[1]) Junkers Arithmetiska Exempel-Tabeller med facitbok i tvänne Curser af A. Lorentzon. Tredje upplagan Stockholm 1844.

Den unika facitboken, sliten, kompletterad med inskrivna svar, tillhör Skolhistoriska samlingar, förvarade på Karl Johansskolan, Göteborg.

bland de mest försigkomna och skickliga utväljas till undervisare. Dessa, som, för att väcka och upplifva täflan, böra ombytas, så ofta ske kan, följa antingen de här gifvna Minnesräkningstabellerna, eller några andra till hands varande och tjenliga tabeller för minnesräkningen. Till förvarande mot nötning, böra så väl tabellerna för minnesräkningen, som de för räkning på tafla, klistras eller fodras med papp eller tjockt karduspapper, innan de begagnas.

Då öfningen att räkna ur minnet skall ske, uppläser undervisaren högt och med klar röst ett af exemplen på tabellerna, hvilket sedan högt och tydligt eftersäges af alla inom kretsen, i ordning efter hvarandra. Derpå uppläses följande exempel på samma sätt, tilldess hela tabellen är genomgången. Hvarje gång den är genomläst, försöker undervisaren, om någon af eleverna kan uppläsa alla exemplen i den ordning, de blifvit uppropade. Om det icke lyckas, förnyas öfningen. Så snart åter någon kan läsa upp hela tabellen ur minnet, anmäler undervisaren honom för läraren, som pröfvar den anmälda, och, om denne säkert kan det erforderliga, uppflyttar honom till en högre krets. Sedan alla eleverna genomgått dessa kretsar för minnesräkningen, samlas de på vissa af de till räkning bestämda timmarna, uti en allmän krets, då läraren för dem fattligt förklarar och utvecklar det sålunda i minnet inhemtade. Detta, en och annan gång förnyadt, gör eleverna säkra och färdiga uti minnesräkningen och lägger en säker grund till räkning på tafla.

Vid räkningen åter på tafla tager undervisaren de räknetabeller, som höra till den kretsen, han skall undervisa, och sätter sig, försedd med sin griffeltafla, på ena sidan af en bänk eller ett bord, eller en pulpet, hvilketdera i scholrummet finnes att tillgå, och vid dess andra sida sätta sig de till kretsen hörande eleverna, hvardera med sin griffeltafla. Derpå uppsäger undervisaren högt och långsamt ett af exemplen, hvilket så väl han som alla de till kretsen hörande eleverna uppskrifva, hvardera på sin tafla. Sedan börja de, tysta, hvar för sig uträkna detsamma. Undervisaren skall i början lära hvart och ett barn, huru talen skola uppskrifvas, och uträkningen börjas. Härvid har hvarje undervisare en facitbok hos sig, för att undersöka, om hans eget exempel, med hvilket han skall jemföra de andras, är rigtigt och säkert uträknadt. Så snart någon i kretsen har uträknat sitt exempel, framvisar han sin tafla för undervisaren, hvilken, om exemplet är rätt uträknadt, stryker ut det, utan att visa det för de öfriga. Men, om det icke är rätt uträknadt, så går den framvisande tillbaka med sin tafla, för att andra gången uträkna exemplet. På detta sätt fortfares, tilldess de flesta framvisat sina taflor, då undervisaren med hög och långsam röst genomgår och uträknar samma exempel, till undervisning för dem, som ännu icke kunnat uträkna sitt.

Som vi vet, skiljer man skarpt mellan **l ä r a r e n** i en växelundervisningsskola och u n d e r v i s a r e n. Undervisaren — det är monitören, dvs. en av de skickligare eleverna i kretsen (cirkeln). Lorentzon manar läraren att tillse, att alla eleverna är i full verksamhet, samt att med biträde av undervisaren »följa hvars och ens förhållande, hog, fallenhet och flit samt att sjelf pröfva och uppflytta hvar och en élève, hvilken, genom säker färdighet uti allt, som hörer till den krets, hvaruti han är, gjort sig förtjent att komma till en högre.»

Tabellerna, som bär titeln *Junkers Arithmetiska Exempel-Tabeller* i tvänne[1]) kurser, hade storleken 17 . 10,5 cm. De behandlade hela aritmetiken från nybörjaruppgifter till sammansatt intresseräkning. I Lorentzons »tvänne curser» finns 94 olika tabeller. Vi återger på nästa sida en begynnelsetabell, den första subtraktionstabellen och nr 8 på additionstabellerna.

Såsom exempel på tabellerna för minnesräkning återger vi multiplikationstabellen.

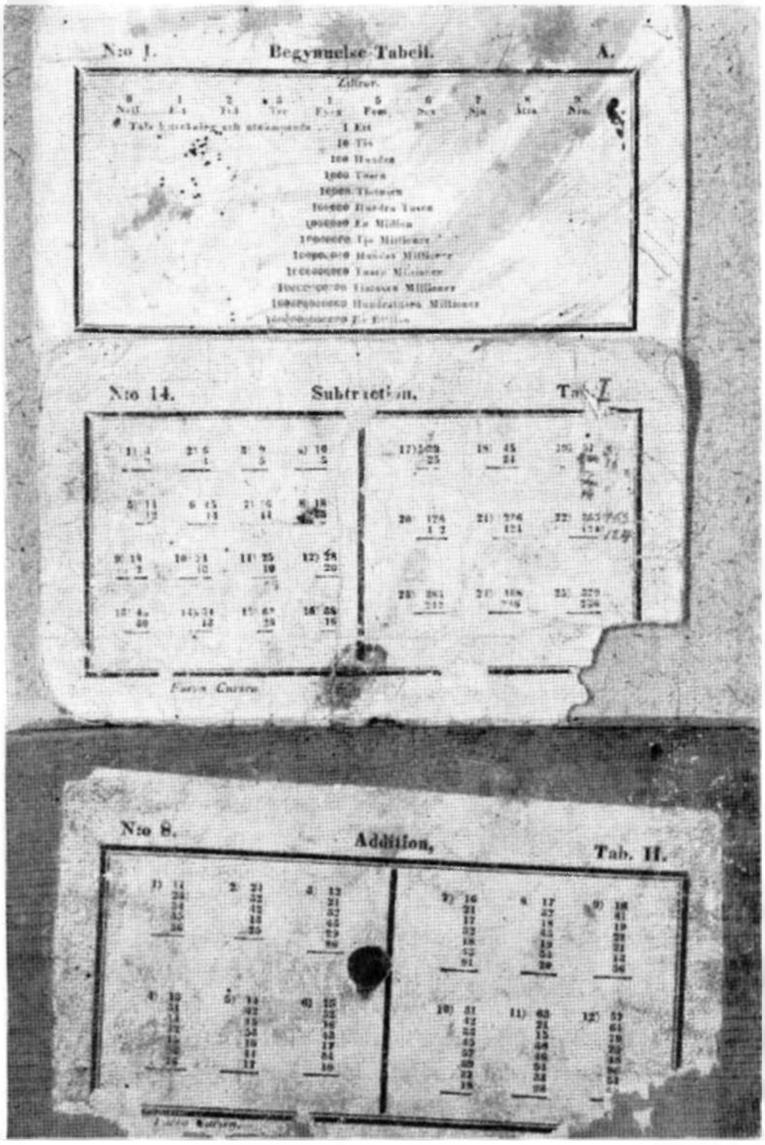
2× 2= 4	3× 3= 9	4× 4=16	5× 5=25	6× 6=36
2× 3= 6	3× 4=12	4× 5=20	5× 6=30	6× 7=42
2× 4= 8	3× 5=15	4× 6=24	5× 7=35	6× 8=48
2× 5=10	3× 6=18	4× 7=28	5× 8=40	6× 9=54
2× 6=12	3× 7=21	4× 8=32	5× 9=45	6×10×60
2× 7=14	3× 8=24	4× 9=36	5×10=50	
2× 8=16	3× 9=27	4×10=40		
2× 9=18	3×10=30			
2×10=20				

7× 7=49	8× 8=64	9× 9=81	10× 10= 100
7× 8=56	8× 9=72	9×10=90	10×100=1000
7× 9=63	9×10=90		
7×10=70			

Tusen gånger tusen är en Million.
Tusen gånger tusen Millioner är en Billion.
Tusen gånger tusen Billioner är en Trillion osv.

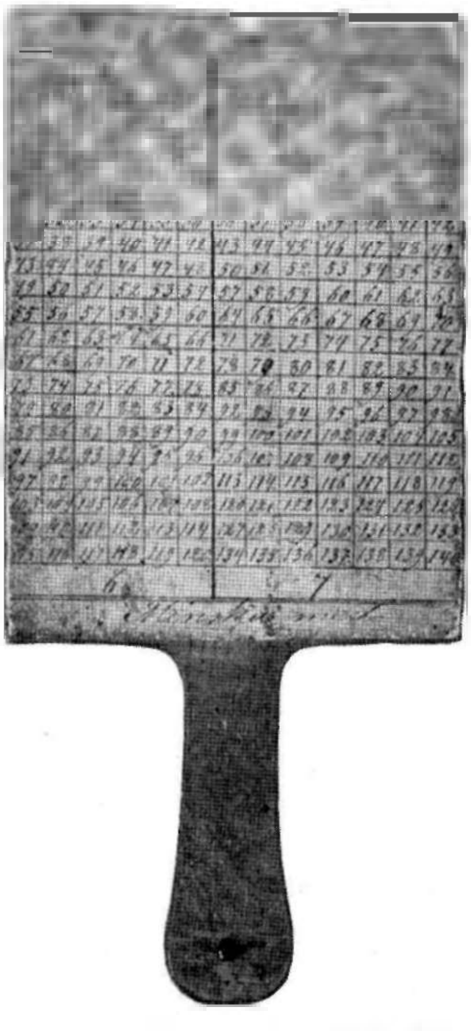
---

[1]) Så hos Lorentzon; hos Bäckman trenne,



Tre av *Junkers räknetabeller*, de översta uppklistrade på papp, den nedersta på trä.

Tillhör Skolhist. samlingar, förvarade på Karl Johansskolan, Göteborg.



Handskriven *handtabell* för ökning och minskning med 6 (t. v.) och 7 (t. h.) Uppifrån lägger man till, nedifrån minskar man. T. ex. uppifrån: barnet läser 6+3 och finner svaret 9 på nästa rad under trean. Det fortsätter 6+9 och finner svaret på nästa rad, osv. På motsvarande sätt med minskningen nedifrån.

Tillhör Svenska skolmuseet, Stockholm. Ålder okänd, men mycket talar för att den tillhör växelundervisningstiden: den var bekväm för en monitör att förhöra efter.

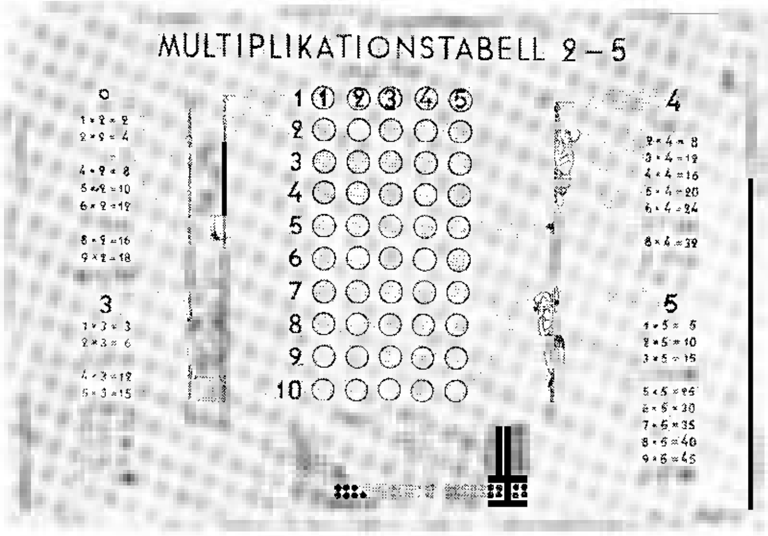
Ett par detaljer må meddelas från den äldre räknelitteraturen. Terminologien var i regel den latinska, även i sådana fall, där vi nu använder svenska termer. Stundom förordades dock termer, som var enklare än våra nutida. P. R.

Svensson använder t. ex. tia, tior osv. i st. f. vårt tiotal, sjuor, nior osv. Även hundror kan man träffa på. Vid införandet i talsystemet ville Svensson, att barnen inte skulle läsa tio, elva, tolv, tretton, utan en tia, en tia ett, en tia två, en tia tre osv. Annars höll sig lusten att definiera och ge »reglor» långt fram i tiden, fastän man då och då kan märka en annan tendens. Ett enda exempel. P. A. v. Zweigbergk börjar sin räknebok (tjugonde upplagan 1867) med det kärva: »Räknekonsten (*Arithmetiken*) lärer att af vissa kända tal härleda andra obekanta, som af de förra bero.» Tio år senare skriver Bäckman i Folkskolans Räknebok: »*Räknekunskapen* kallas med ett främmande namn *Arithmetik* och lärer, huru man skall finna *ett obekant tal*, som står i beroende af *två* eller *flera gifna* eller *bekanta tal*.» Sålunda är de båda herrarnas definitioner lika till sin innebörd. Men Bäckman åskådliggör tesen genom exempel:

Om tvenne tal, t. ex. 6 och 18, äro gifna, så kunna flera frågor uppstå, såsom följande. Hvad utgöra 6 och 18 tillhopa? — svar 24. Hvad återstår, om 6 drages från 18? — svar 12. Hvilket tal erhålles, om 18 tages 6 gånger? — svar 108. Huru stor blifver hvarje del, om 18 delas i 6 lika stora delar? — svar 3. Genom eftertanke har man nu funnit de olika svaren: 24, 12, 108 och 3. Dessa tal äro ursprungligen obekanta, men kunna finnas, emedan de bero af de kända talen (6 och 18). Att sålunda genom eftertanke finna ett förut obekant tal, då två eller flera tal äro bekanta eller kända, är att *räkna*.

c. *Moderna räknetabeller*

Tabeller för den första räkneundervisningen finns i våra dar också. Sådana har utarbetats av folkskolläraren Folke Eurén och folkskolinspektören Helge Haage. De kallas *Skrivrits räknetabeller*, har storleken 100 · 70 cm och är tryckta i färg. Närmast kan de betecknas som en modern motsvarighet till de förut beskrivna minnestabellerna. De vill underlätta minnesarbetet och lämna stöd för träning.

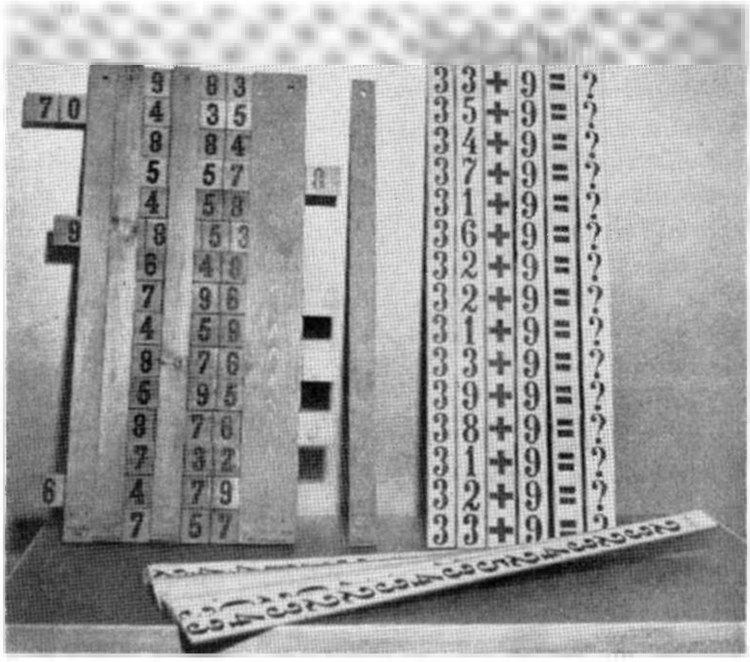


Räknetabell av år 1949. Av Eurén och Haage.

11. Räknestavar

var ett undervisningshjälpmedel av ganska märklig art. Hur, när och av vem idén först förverkligades, är inte gott att säga. Undervisningsrådet Hjalmar Berg har meddelat, att han från sin barndom minns räknestavar, som lades i vågrätt ställning ovan varandra, så att de på stavarna målade talen gav räkneuppgifter. Genom att förskjuta stavarna i förhållande till varandra kunde man erhålla nya talkombinationer. Jämför Arvins Additionstavle på nästa sida.

På 1880-talet konstruerade en folkskollärare *P. Hagström* räknestavar av en annan typ. Han målade siffrorna lodrätt på långa stavar, som hängdes upp på svarta tavlan eller väggen. Utseendet framgår av det återgivna fotot, taget på Göteborgs skolmuseum. Det är denna form, som i litteraturen går under namn av räknestavar. Idén är emellertid



Till vänster *G. J. Arvins Additionstavle.* Varannan vågrät stav kan förskjutas i sidled, varigenom nya talkombinationer uppkommer. Lodräta linjaler kan dela upp sifferraderna.

Till höger *Hagströms räknestavar.*

Tillhör Göteborgs skolmuseum. Foto Karl-Östen Sjöholm.

inte Hagströms egen. Räknestavar hade funnits tidigare. Men, skriver Hagström i sin »Nyckel», »de äro utarbetade förrän normalplanen, det är därför ej alltid möjligt att med dem bilda uppgifter i överensstämmelse med denna.» Normalplaner utgavs 1878 och 1889. Då Hagströms räknestavar var upptagna på den av ecklesiastikdepartementet 1889 utgivna Förteckning på undervisningsmateriel för folkskolorna, kan det inte gärna vara normalplanen av 1889, som han åsyftar. De äldre räknestavarna skulle följaktligen vara utarbetade före 1878, vilket förhållande i någon mån kan bidra till att datera detta undervisningshjälpmedel.

Tillkomsten av Hagströms räknestavar kan med tämligen stor visshet dateras till slutet av 1880-talet. På ecklesiastikdepartementets ovannämnda förteckning för 1888 fanns räknestavar med men utan personnamn. På följande års förteckning förekommer däremot »Hagström, Räknestafvar jemte beskrifning.»[1]) Och Hagströms äldste son, bosatt i Chicago, skriver, att hans far började med räknestavarna i slutet av 1880-talet. De stannade kvar på nyssnämnda förteckning t. o. m. år 1929.

Petrus Hagström (f. 1850, d. 1932) var lärare i Kyrkoköpinge socken, nära Trelleborg. Han fick det eftermälet, att han var en duglig lärare, som gick helt upp i sin gärning. Och att han var idérik och kunde konsekvent fullfölja en linje, visar hans räknestavar med Nyckel samt räkneböcker för huvudräkning och tavelräkning. Hans son har lämnat ett par intressanta upplysningar.[2]) Hagström utarbetade ursprungligen stavarna med 10 siffror, men då han fann, att de tio räkneuppgifter, som kunde sammanställas av stavarna, inte fyllde behovet för en lektion, ökade han dem till 15. Antalet stavar var 24. »Stafvarna voro så konstrikt uppställda», skriver sonen. Det var möjligt att hänga upp exempel, som höll sig inom talområdet 1—5, 1—9, 1—19, 1—99 och 1—999.

N y c k e l t i l l H a g s t r ö m s R ä k n e s t a v a r ger anvisningar till stavarnas uppställning och svar på alla exempel. Varje stav var numrerad. Sätter man upp sta-

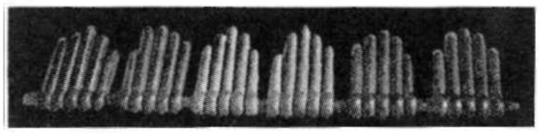
[1]) Enligt meddelande av intendenten vid Svenska skolmuseet Thure Jalling.

[2]) Förmedlade, liksom övriga personliga data rörande Hagström, av folkskolläraren Oskar Österling, Trelleborg.

varna nr 32 och nr 30 och mellan dem en stav med plustecken, blir största summan 6, stavarna 31+12 ger 9 som största summa, 24+12+29 ger 19 som största summa. Hur man sen kan ställa samman flera stavar, sätta in olika operationstecken osv., går lätt att föreställa sig utan ytterligare exempel. Nyckeln anger stavarnas uppställning för inte mindre än 3 000 räkneexempel »för tyst övning i småskolan och folkskolans första klass». I själva verket finns där ytterligare ett par hundra exempel! Det låter fantastiskt. Men det är lätt att inse möjligheterna till variation. Sätter vi två stavar med + emellan, har vi 15 additioner med ensiffriga termer. Sätter vi en stav med trean framför staven med första termen, såsom vi har gjort på bilden, har vi strax 15 nya uppgifter. Byter vi ut en stav med åttor, har vi åter 15 nya uppgifter osv.

Det är ju lätt att peka på att räknestavarna bjöd på endast mekanisk räkning, och det är lika lätt att förstå, att denna arbetsform kunde drivas för långt. Hagström har tydligen insett detta, och för att förbygga ensidighet utarbetade han dels en »Hufvudräknings-kurs för Småskolan», till vilken stavarna skulle utgöra tysta övningar, dels »Tafvelräkningsexempel för Småskolan» med uteslutande benämnda uppgifter, även denna korresponderande med räknestavarnas tysta övningar.

Varför har ett så användbart hjälpmedel nu blivit endast museiföremål? Ja, säg det, den som kan! Man kan ana sig till någon orsak: de långa raderna av svarta siffror tog aldrig slut! Hade en liten unge räknat ner 15 »tal», så vips hängde där nya 15 uppgifter — det var bara att hänga en ny stav på endera sidan om operationstecknet. En annan orsak låg nog däri, att stavarna frestade till att driva mekanisk räkning in absurdum, till på köpet med alltid obenämnda tal. Att en och annan gång hänga upp ett par stavar och med fart och gott humör träna klassvis på en eller annan besvärlig kombination, skulle jag alldeles inte ha dragit mig för, om jag hade känt till stavarna före den stund, då jag skulle skriva något om deras historia!



Räknehänder med rörliga fingrar. Tillhör Statens pædagogiske Studiesamling, Köpenhamn, förut Dansk Skolemuseum, där förf. fotograferade denna unika räkneapparat 1917. Räknehänder konstruerades 1896 och 1899 i Tyskland.

12. Sista akten

har som kulissdekoration det ovisa nitet. Händer har barnen själva och på närmare håll än demonstrationsapparaten på lärarbordet. Men vid sekelskiftet hittade likväl någon på de konstgjorda händerna att användas som räkneapparat. Detta ovisa nit spårar man även på andra håll, när man sysslar med räknematerielens historia. Det ovisa nitet och den allvarliga och nödvändiga strävan att åskådliggöra räkneundervisningen går stundom hand i hand. Därvid kan man få bevittna, att åskådliggörandet drives för långt, t. ex. in på områden, där analogibildning ger tillräckligt underlag.

Stundom skymtar också en markerad övertro på de mekaniska hjälpmedlen. De är dock intet annat än hjälpmedel, och en av deras uppgifter är att göra sig själva överflödiga. Inte ens de elegantaste apparater kan lära ett barn att räkna. En apparat eller annan räknemateriel kan förmedla riktiga föreställningar om talvärden och räkneoperationer — det är i sanning ingen ringa uppgift! — men det är inte liktydigt med att räkna. Jag lovade en gång att ge Karin, en skolmogen 6-åring, en räkneapparat att leka med, och jag sade också, att man kunde lära sig att räkna på den. Jaha, sa Karin, det var bra. Så *kan* jag det, när jag kommer till skolan. — En ljuvlig optimism! Men det behövs litet till. Vad? Huvudsaken förblir tvåfaldig: 1) lärarens besjälade, konsekventa och mångsidiga vägledning, följsam med hänsyn till barnens behov och fortskridande utveckling, 2) barnens eget andliga arbete, karakteriserat av lustbetonad självverksamhet med dess många möjligheter att förvärva åskådligt underlag för tänkandet och att finna uppgifter för övning av riktiga tankevanor.

Pedagogiska skrifter

(Utgivna sedan 1930.)

127. *Norinder, Yngve,* Den amerikanska fortsättningsskolan 2: —
128. *Dawson, Edgar,* Undervisning i samhällslära I 3: —
129. *Dawson, Edgar,* Undervisning i samhällslära II 1: 80
130. *Dawson, Edgar,* Undervisning i samhällslära III 2: 50
131. »Den nutida tyska folkskolan» I 0: 60
132. »Den nutida tyska folkskolan» II 2: 20
133. *Zeidler, Kurt,* Återupptäckandet av gränsen 2: 40
134. *Hamaide, Amélie,* Decrolys metod 3: 60
135. *Augzell, Oscar,* Helhetsundervisning (Gesamtunterricht) 1: 40
137. *Petersen, Peter,* Skolliv och undervisning i en fri, allmän folkskola. I 2: —
138. *Petersen, Peter,* Skolliv och undervisning i en fri, allmän folkskola. II 2: 40
139. *Andersson, Fritz,* Wiens reformerade folkskola 2: 60
140. *Siegvald, Herman,* Lärarpsykologi och lärarutbildning 1: 80
141. *Siegvald, Herman,* Om kroppsaga (En historisk-psykologisk studie) ... 1: —
142. *Munch, Paul Georg,* Från min skolsal 3: —
143. *Petersen, Peter,* Jena-planen för en fri, allmän folkskola 1: 50
145. *Murchison, Carl,* Barnpsykologi I 2: —
146. *Murchison, Carl,* Barnpsykologi II 3: 25
147. *Murchison, Carl,* Barnpsykologi III 1: 50
148. *Salomonsson, G.,* Arbetsbetonad undervisning 2: 25
150. *Nilsson, Oskar,* Den nya skolan II 2: 50
151. *Hedfors, Axel,* Begåvningarnas tillvaratagande 3: 50
152. *Jansson, Ivar,* Uppfostran hos naturfolken I 2: 50

153—154. *Jansson, Ivar,* Uppfostran hos naturfolken II 3: 50

155. *Stehr, Artur,* Aktivitet — arbetsglädje 1: —

156—157. *Rothe, Richard,* Den fria barnteckningen 5: 50

158. *Lendle, O. C.,* De germanska språkens stavning 3: —

159—160. *Salqvist, B.,* Torsten Rudenschöld 6: 75

162. *Olsson, Nils Ludvig,* Skolmästaren 1: 25
163. *Bergsten, A.,* Folkskolans räkneundervisning 1: 25
164. *Björklund, S.,* Fransk skola och fransk kultur 2: 80
165. *Wigforss, F.,* Kunskapsprövningar 2: 80
166. Nya nordiska undervisningsplaner 2: 80

167—169. *Hermansson, Ester,* I amerikanska skolor 6: 75

170. *Salomon, O.,* Tankar om slöjd I 3: —

171—172. *Skäringer-Larson, E.,* Demokratisk fostran i U. S. A. 5: 50

173—174. *Herlitz, C. W.,* Skolungdomens arbetsbörda 4: —

175. *Leander, F.,* John Deweys pedagogik 2: 50

176—177. *Sörensen, A.,* Pedagoger och pedagogiska problem 4: 50

178. *Salomon, O.,* Tankar om slöjd II 3: —

181—182. *Sjöstrand, W.,* Pedagogik och temperamentslära 4: 50

183—184. *Sjöholm, L. G.* Från arbetslivet i skolan 6: 75

185. Nordiska uppfostringsideal 2: —
186. *Hammarstrand, A.,* Barn dramatiserar lärostoffet 1: 80

187—188. *O. Dahlgren,* Grupptestet 4: 50

189. *A. S. Makarenko,* Föreläsningar för föräldrar 2: 80
190. *Wigforss, F.,* Barnens färdighet i läsning och skrivning 4: —
191. *Wigforss, F.,* Barnens färdighet i räkning 3: 50
192. *Husén, T.,* Fridtjuv Berg, folkskollärarkåren och stavningsreformen 2: —
193. *Wigforss, F.,* Ett försök med skolmognadsprov I 3: 50
194. Tyska skolförhållanden före 1933 2: 50

195—198. *Larson, L.,* Ungdom läser 10: —

199. *Husén, T.,* Fridtjuv Berg och enhetsskolan 3: —

200—201. *Casserberg, T.,* Social fostran i amerikanska skolor 6: 50

Pedagogiska skrifter tillställas litteratursällskapets medlemmar i korsband eller paket. Till alla dem av sällskapets medlemmar, vilka till *F. S. A. F:s litteraturkommitté, Saltsjö-Duvnäs,* på förhand erlagt årsavgiften 8:— kr., utsändas skrifterna häftesvis, i mån som de utkomma från trycket. Av övriga medlemmar uttages medlemsavgiften genom postförskott samtidigt med utsändandet av årets första häfte.