GEOMETRIEN I FOLKSKOLAN

FÖR NYBEGYNNARE.

METODISKA ANVISNINGAR

ALBREKT SEGERSTEDT,

SEMINARII-ADJUNKT.

TREDJE, EFTER NORMALPLANEN OMARBETADE UPPLAGAN.

STOCKHOLM

HJALMAR KINBERGS FÖRLAGSEXPEDITION.

STOCKHOLM
IVAR HÆGGSTRÖMS BOKTRYCKERI
1883.

Geometrien i Folkskolan.

Undervisningens mål och utsträckning.

Den geometriska undervisningen i folkskolan skall på ett praktiskt och förståndsodlande sätt lära folkskolans lärjungar känna de geometriska storheterna, samt upprita I äfvensom uppmäta och uträkna storleken af de vanligaste bland dem, de allmännast förekommande linierna, ytorna och kropparne. Hafva barnen erhållit god insigt häruti, så har skolan, med afseende på detta ämne, uppfylt sitt förnämsta åliggande; man bör då lära dessa mera försig- II komna barn bevisa och konstruera några af elementargeometriens lättare satser, såsom t. ex. dem, som här längre fram omnämnas.

Undervisningsmaterial.

För att uppnå ofvannämda mål, måste man först bibringa barnen kännedom om de geometriska storheternas förnämsta egenskaper, äfvensom de vigtigaste termerna. a) b) För inhemtandet häraf äro, utom »svarta taflan», passaren och linealen, äfven gradskifvan och en sats stereometriska Material figurer nödvändiga. a — e Dessa böra göras af fast och torkadt trä, men skulle sådana figurer ej kunna anskaffas, kan läraren af styft papper eller papp sjelf utskära och hopklistra dem. Sådana figurer af trä, med låda, erhållas genom kungl. Ecklesiastikdepartementet för 7 kronor. Från samma embetsverk erhålles, för åskådliggörandet af rymdberäkningen, en räknekub för 8 kronor. Väggtafla öfver svenska mått, vigter och mynt fås genom nämda embetsverk, uppklistrad på väf för 9 kronor. Tillika bör ett snöre med lod, ett vattenpass — ett sådant kan läraren lätt tillverka — och ett metermått finnas. För uppmätningar på fältet behöfver man ett längre snöre med knutar för hvarje meter och decimeter. Största delen af det behöfliga materialet är således lätt anskaffadt.

Emedan linear-ritningen, utom andra fördelar, särskildt hvad detta ämne beträffar klargör och befäster det inhemtade, bör detta slags ritning nära ansluta sig till den geometriska åskådningsundervisningen. Tillika är ritningen en ypperlig tyst öfning uti en på flere läslag delad skola.

I skolor, der ritplanscher ej ännu kunnat anskaffas, uppritar läraren — före lektionens början — figuren eller figurerna, som skola aftecknas, på svarta taflan.

Ett annat ämne, som lika nära sammanhänger med geometrien, är räkningen: lösningen af geometriska räkneuppgifter; sådana räkningar ske väl de flesta gånger vid svarta taflan, men barnen böra äfven för sig sjelfva uträkna enkla frågor. Dessa uppskrifvas antingen af läraren på förutnämda tafla och få der qvarstå, tills de af barnen hunnit uträknas, eller ock få barnen ur någon exempelsamling sjelfva afskrifva och uträkna sådana. En god samling af sådana exempel finnes i Bäckmans »Folkskolans geometri i sammandrag»; pris 35 öre.

Undervisningssättet.

Vid detta ämne gäller, kanske mer än vid något annat, den grundsatsen, att alla svar skola afgifvas tydligt och bestämdt i fulla satser. Ingen lärjunge får slippa ifrån en erhållen fråga förr, än han uppfylt denna skyldighet. Hvad ett till innehållet felaktigt svar beträffar, härleder sig ett dylikt ej alltid af okunnighet, utan stundom blott af brist på eftertanke; i det senare fallet bör man, om möjligt är, göra lärjungen uppmärksam på felet derigenom, att man, utan att genom ord rätta honom, visar, huru saken enligt hans svar skulle förhålla sig, och sålunda tvinga honom att sjelf rätta det felaktiga. Säger lärjungen t. ex. att »radie» är en linie, som går från medelpunkten till »periferien», så drager man från medelpunkten i en uppritad cirkel en krokig linie till periferien och frågar, om detta är en radie o. s. v.

De flesta geometriska termer och begrepp kunna genom frågor erhållas ur barnens egen mun, och böra dessa ej af läraren föresägas. Hvad fullständiga definitioner deremot beträffar, får man ej fordra sådana annat än af lärjungarne i den högsta afdelningen. Dessa definitioner få inläras, först sedan barnen genom frågor klart fattat den afhandlade storhetens egenskaper.

De ytor, kroppar m. m., som under lektionen komma att afhandlas, skall läraren teckna på svarta taflan, och vid undervisningen begagna sig både af den tecknade och af den stereometriska figuren. Härigenom lära sig barnen såväl att förstå en tecknad figur, som ock att lättare återgifva densamma, då de sjelfva skola afrita honom. Men det är ej nog att vid denna undervisning blott använda teckningen och den stereometriska figuren: bordet, karaffinen, glaset, taket, väggarne, golfvet med springorna derpå, timmerstocken, sädeslåren, välten, hjulet o. s. v. korteligen alla föremål och redskap, hvilkas form barnen känna, måste utgöra ett material, som man flitigt använder. Blott genom ett sådant förfaringssätt lära sig barnen tillämpa det inhemtade. När man vidare beräknar ytornas och kropparnes storlek, måste hvarje lärosats genom uträkning af sifferexempel fästas i minnet.

De af barnen såsom tyst öfning verkstälda ritningarne och uträkningarne måste sorgfälligt granskas och rättas;

om ej så sker, medföra dessa öfningar blott skada, emedan barnet derigenom vänjer sig vid lätja och slarf.

Hvad för öfrigt enskildheterna vid undervisningssättet angår, så hänvisas till de under lärosatserna lemnade antydningarne, äfvensom till de bifogade läroprofven.

Att alla här nedan gjorda uppställningar äro tillkomna blott för lärarens skull för att visa gången vid undervisningen, och ej för lärjungarnes, torde vara onödigt att anmärka.

Kursindelning.

Normalplanen föreskrifver för detta ämne i *folkskolan:* Uppritning och beskrifning af linier, vinklar och ytfigurer samt mätning af parallelogrammer och trianglar; beskrifning af de enklaste solida figurer samt mätning af parallelipipeder. När kursen i geometri är fördelad på två läsår, uppskjutes mätning till andra läsåret.

För *fortsättningsskolan* föreskrifves: beskrifning och mätning af plana och solida figurer.

På grund af dessa föreskrifter är föreliggande arbete deladt i två afdelningar, den första afseende folkskolan, den andra fortsättningsskolan. I den förra afdelningen är det, som afser folkskolans första årsklass betecknadt *utan* *, och det som tillhör andra årsklassen med * samt fortsättningsskolan kurs med **.

Det med petitstil tryckta afser en utvidgad kurs, ämnad för sådana skolor, som arbeta under mera gynsamma förhållanden, såsom de, der hvarje klass har sin lärare, eller sådana stads-, bruks- och landsskolor för öfrigt, der tillfälle gifves till vidare gående undervisning.

Då folkskolans båda kurser skola genomgås på ett år, medtages endast det, som afser dessa båda kurser. Äro två år anslagna till folkskolans kurs, bör äfven det med finare stil tryckta till hufvudsakliga delen kunna medhinnas. I samband med fortsättningsskolans kurs repeteras folkskolans.

Mycket fördelaktigt är, när de i slutet intagna, strängt matematiska bevisen kunna medhinnas. Dylika bevis skärpa nämligen, då de rätt behandlas, i hög grad tanken och förståndet. Men dessa satser få behandlas endast i det fall, att de ordinarie lärokurserna väl medhinnas.

Då i det följande några figurer omtalas, behagade läraren sjelf upprita dem, hvilket är särdeles lätt, då de alla äro mycket enkla.

I. Inledning.

1. *De geometriska storheterna och deras afbildning.*

Såsom en inledning lär man barnen känna de geometriska storheter, kroppen, ytan, linien och punkten, som i det följande behandlas. För att gifva dem en någorlunda klar föreställning härom, begagnar man ett par stereometriska figurer och teckningar på svarta taflan, i förening med läsrummet och föremålen deruti. Man får dock ej tänka sig, att barnens abstraktionsförmåga är så utvecklad, att de till en början kunna få allt klart, eller förmå gifva fullständiga definitioner. Kunna de med ledning af lärarens frågor bestämma, hvad kropp, yta o. s. v. är, så må det vara nog.

Läroprof. Utvisa längden på denna figur! (en parallelipiped, kub e. d.) Visa bredden! Höjden! Utpeka rummets längd! Dess bredd! Dess höjd! Visa dessa riktningar i lådan! I huru många riktningar hade de föremål, om hvilka vi nu talat, utsträckning? Visa längd, bredd och höjd hos denna blyertspenna! Längden och bredden hos detta papper! Har papperet någon höjd? *Den storhet, som har utsträckning i längd, bredd och höjd, kallas kropp.* I hvilka riktningar har en kropp utsträckning? Räkna upp några kroppar här inne!

Denna kropp (kuben, parallelipipeden) sträcker ej ut sig hit till min hand, utan slutar förr. Visa, hvar han slutar åt detta håll! Åt detta! o. s. v. Der någonting slutar, kallar man dess gräns. Visa således kroppens gränser! Visa rummets gränser! Kan du visa någon del af gränsen för din kropp? En kropps gräns kallar man *gränsyta.* Visa gränsytorna till denna kropp! Till bordskifvan! Till bläckhornet! o. s. v. Hvarutaf är en kropp begränsad? Visa mig bredden på denna yta! Längden! Visa mig hennes tjoclek eller höjd! (hon har ingen höjd, tjocklek.) Visa ut golfvets längd, bredd, tjocklek! Gården här ute, åkern, ängen äro ock ytor. De hafva längd och bredd, men hur är det med tjockleken eller höjden? *I hvilka riktningar hafva således ytor utsträckning?* Men i hvilken riktning sakna de utsträckning? Hvilken af de riktningar i utsträckning, som kropparne ega, saknas hos ytorna?

Denna yta räcker ej hit till min hand, utan slutar förr; visa mig, hvar hon slutar! Visa, hvar denna yta tager slut! Peka ut gränserna för bordsytan! En ytas gränser kallas linier. Visa några linier på din bänk! Visa längden af denna linie! Visa dess bredd! Dess höjd! Linien har således hvarken bredd eller höjd, endast längd. *Linien är endast afståndet mellan två punkter.* Afståndet mellan Stockholm och Södertelje är således en linie. När jag talar om detta afstånd, tänker jag icke på bredd och höjd, utan endast på längd. Hvilka utsträckningar, som linien saknar, har kroppen? Hvilken utsträckning, som linien saknar, har ytan?

Hvar slutar denna linie? Det ställe, der en linie slutar, kallas punkt. Hvaraf är således en linie begränsad? Utvisa gränspunkterna för denna linie! För denna! Hur lång är denna punkt? Hur bred? Hur hög? (Detta bör utvisas på en skarpt skuren linie.) *Punkten har således hvarken längd, bredd eller höjd och utmärker allenast ett läge.* Säger jag, att en person står der och der, så tänker jag ej på, att stället, der han befinner sig, har längd, bredd eller höjd; man tänker blott på stället *hvarest* han är: detta är en punkt.

I hvilka riktningar hade kroppen utsträckning? Ytan? Linien? Punkten?

Kroppen, ytan, linien och punkten kallas de geometriska storheterna.

Sedan man ungefär på detta sätt gjort barnen bekanta med de geometriska storheterna, undervisar man dem om deras afbildande på taflan. Huru punkten, linien och ytan afbildas, förstå barnen lätt. För att de skola inse, huru kropparne framställas, afbildar man en af de stereometriska figurerna på svarta taflan och låter dem samtidigt utvisa ytorna på figuren och teckningen, hvilken senare ställes på samma sätt som figuren. På detta sätt lära sig barnen förstå en teckning.

Läroprof. Sätt en punkt på taflan! Hvarigenom afbildas således en punkt? (genom en liten prick.) Ändå bättre afbildas punkten sålunda, genom tvänne hvarandra korsande små linier! Afbilda du en punkt på båda sätten! — Kan någon af eder säga, huru vi afbilda en linie? (En linie afbildas genom ett fint streck.) Rita du upp en linie på taflan! — Om vi vilja afbilda en yta, till dömes denna, så uppdraga vi de linier, som omgifva henne, sålunda! Afbilda du denna yta! (Man låter härvid barnen, så godt de kunna, afbilda enkla ytor, fyrsidingar, trianglar o. s. v.) — Om vi skola afbilda en kropp, upprita vi dess gränsytor, sådana de för oss synas, då vi betrakta kroppen. Sålunda afbilda vi denna kropp på här visade sätt. Utvisa du den gränsyta på teckningen, som motsvarar den här ytan! Hvar är på teckningen denna yta? Denna? Hvar är denna linie på teckningen? Hvarför kan du ej, som figuren nu hålles, se denna linie? (Hon bortskymmes af figuren.) Hvar har du henne på teckningen? Huru är hon der uppdragen? (Hon är prickad.) De linier på en figur, som vi ej se, utmärkas på en teckning genom prickade linier.

Hur afbildas på en ritning punkten? Linien? Ytan? Kroppen?

II. Linier och vinklar.

2. ***Liniernas utsträckning,*** afbildning. (Repetition af det föregående.)
3. ***Liniernas olika beskaffenhet:*** räta, krokiga.

A) Räta linier.

4. ***Att mellan två punkter draga en rät linie.***

Barnen få verkställa detta med tillhjelp af linealen, som de sålunda få lära sig begagna. Man visar dem också nu, att räta linien är den kortaste vägen mellan de tvenne punkterna.

5. ***Liniernas ställning.*** A) Med hänsyn till lodlinien. Lodrät, vågrät, sned ställning.

Läroprof. Om jag låter detta snöre, med det påfästade lodet hänga fritt, hvad ställning säger jag då, att snöret har? Hvad kallas denna riktning? (uppåt) och denna? (nedåt). Huru sägas de linier stå, som hafva samma ställning, som detta snöre nu har? Huru många lodräta linier har jag i denna kub? Utpeka dem! Undersök med snöret, hvilka linier på bänken, som äro lodräta! o. s. v.

Hurudan ställning sägas armarna på en våg hafva, då vågen väger jämnt? Hurudan ställning sägas de linier hafva, som hafva samma ställning som vågarmen i nyss nämda fall? Utpeka de vågräta linierna i denna kropp! Vet du något ämne, hvars yta alltid har vågrät ställning, när ämnet ej är i rörelse? (Vattnets och vätskors i allmänhet.) I följd deraf, att det lugna vattnets yta all tid är vågrät, kallar man detta instrument, med hvilket man undersöker, om ställningen är vågrät, ett *vattpass*. (Vattpasset förevisas och förklaras.) Undersök med vattpasset, hurudan ställning denna kant på bordet har!

Hurudan ställning sägas de linier hafva, som hvarken äro våg- eller lodräta? Visa några sneda linier här inne! Huru många sneda linier har denna kropp (kuben) nu? (Kuben ställes med en kantlinie utefter en vågrät bordskifva.) Huru många lodräta? Håll denna lineal så, att dess långa kanter äro vågräta! Lodräta! Sneda!

Drag på taflan vågräta, lodräta, sneda linier!

Anm. Man gör barnen uppmärksamma på, att då man drager linier på ett papper, en tafla eller annan yta, tänker man sig denna stående lodrätt på en af kanterna.

B) Med hänsyn till hvarandra. Jämnlöpande eller parallela; icke jämnlöpande.

Läroprof. Huru långt skall jag utdraga dessa linier (två motstående i en parallelogram), för att de skola råka hvarandra? Dessa linier sägas derför vara jämnlöpande eller parallela med hvarandra. Hvad förstås derför med, att två linier äro parallela? Utvisa hvilka linier i denna kropp, som äro parallela med hvarandra! Visa några linier i rummet, hvilka äro jämnlöpande! Utvisa några på detta bord! o. s. v.

Utvisa några linier, som icke äro parallela! Drag på taflan två linier, som blifva parallela! Två, som ickäro det!

6. ***Liniers mätning.*** Vid liniers mätning framhålles, att måttet all tid måste vara af samma slag, som den

storhet, hvilken skall mätas; således skall måttet för linier vara en längd. I samband med längdmåttet redogöres ock för liniers mätning på ritningar efter skala och dennas begagnande.

Liniens delning sker på detta stadium grafiskt, det vill säga genom försök med passarèn. Större längders delning sker genom deras uppmätning och division af längdtalet med det tal, som uttrycker delarnes antal.

B) Krokiga linier.

7. ***Krokiga linier i allmänhet.*** Man drager på taflan linier, som äro krökta på olika sätt, och låter barnen i rummet och på föremålen derstädes utvisa krokliner samt visa, hvar dessa linier äro mest och minst krökta.

8. ***Cirkelomkretsen.*** Man uppritar en cirkel.

Läroprof. Hvar är denna linie som mest böjd? (Hon är lika böjd öfver alt.) En sådan linie kallas cirkelomkrets! Mät afståndet mellan denna punkt å cirkelomkretsen och denna punkt, som vi kalla medelpunkt! Mät afståndet mellan ett par andra punkter å omkretsen och medelpunkten! Hvar var afståndet störst? (lika stort öfver alt.) Man kan således också säga, att cirkelomkretsen är en sådan kroklinie, som öfver alt är på samma afstånd från en inom densamma belägen punkt, som kallas medelpunkten.

9. ***Liniers lutning mot hvarandra i vinkel.***

Läroprof. Dessa två linier, som råkas, luta mot hvarandra. Utpeka lutningen dem emellan! (då lutningen, en vinkel, skall utpekas, för man det, hvarmed man pekar, i en båge emellan de båda linierna.) Lutningen mellan två linier kallas vinkel! Rita du upp två linier, som bilda en vinkel mot hvarandra! Två andra linier, som bilda en större vinkel! Två, som bilda en mindre vinkel! Rita upp en linie! Drag mot denna en annan linie, som lutar lika mycket åt båda sidor! Huru stora blifva nu vinklarne sins emellan? Dessa vinklar kallas räta! Huru stora blifva vinklarne sins emellan, om en linie står på en annan och gör räta vinklar? Rita upp en vinkel, som är mindre än en rät! En sådan vinkel kallas spetsig. Hvad menas med en spetsig vinkel? Rita en, som är större än en rät! En sådan kallas trubbig. Hvad menas således med en trubbig vinkel? När uppkommer en rät vinkel? Hvad förstås med en trubbig vinkel? Med en spetsig?

De linier, som luta mot hvarandra, kallas vinkelns ben, och den punkt, der de råkas, vinkelns spets. Hvad menas med *vinkelns ben?* Med dess *spets?* Vinkeln afbildas derigenom, att hans ben uppdragas.

Vinklars mätning. Man framhåller, att då vinkeln är en lutning, så måste den ock mätas med en lutning af bestämd storlek. För att erhålla denna lutning, delas cirkelomkretsen i 360 lika stora delar, och två närliggande delningspunkter sammanbindas genom räta linier med medelpunkten; lutningen mellan dessa två linier, eller den vinkel, de bilda, kallas *en grad.* Grad kallas ock hvarje del af den i 360 lika stycken delade cirkelomkretsen, och gör man tydligt reda för de två olika slagen af grader. Härefter redogöres för gradskifvans inrättning och bruk.

Vinklars uppritning. Med tillhjelp af gradskifvan få barnen mot räta linier och uti på dem utsatta punkter sätta vinklar af bestämdt gradtal.

Mot hvarandra parallela och vinkelräta linier dragas med gradskifvans tillhjelp.

III. Ytor.

10. ***Ytans utsträckning, afbildning.*** (Repetition af det föregående.)
11. ***Ytornas indelning.*** Plana och bugtiga ytor. Man låter barnen med lineal undersöka ytor i rummet och bestämma, om de äro plana eller bugtiga.

Plana ytor.

12. ***Plana ytors indelning.*** Rätliniga, krokliniga.

Rätliniga ytor.

13. *Rätliniga ytors indelning.* Trianglar, fyrsidingar, mångsidingar.

Fyrsidingar.

14. *Fyrsidingarnes olika slag* med afseende på de motstående sidornas ställning till hvarandra:

a) de motstående sidorna parallela:	parallelogrammer.
b) de motstående sidorna icke parallela:	oregelbundna fyrsidingar (trapezier).

Parallelogrammer.

15. *Parallelogrammernas olika slag:*

med afseende på sidornas inbördes storlek:	liksidiga, oliksidiga.
med afseende på vinklarnes inbördes storlek:	likvinkliga, rätvinkliga (rektangeln dess bas och höjd) olikvinkliga.
Rätvinkliga och liksidiga parallelogrammer:	qvadraten (dess bas och höjd).

Qvadraten.

16. *Att på en rät linie upprita en qvadrat.*

Då detta och följande problem första gången genomgås, användes gradskifvan för vinklarnes utsättande, men sedan kap. V är genomgånget, tillämpas 83.

* 17. *Att beräkna ytan af en qvadrat.*

För att tydliggöra, huru ytor mätas med andra ytor, hvilket barnen i början hafva svårt att fatta, förfärdigar man qvadrater af papp eller styft papper med en decim., en centim. kant o. s. v. Derefter undersöker man, huru många sådana kunna läggas på en viss yta.

Läroprof. Hvarmed uppmätas linier? (med andra linier af bestämd storlek: längdmått.) Hvarmed mätas vinklar? Hvarmed skola då ytor mätas? De ytor, hvarmed man mäter, kallas ytmått. Ytmåtten hafva qvadratisk form, och sidorna i dessa qvadrater utgöras af längdmåtten. Hvad menas således med en qvadratmeter? En qvadratdecimeter? En qvadrattum? o. s. v. Då vi nu skola uppmäta en yta, efterse vi, huru många qvadrater med en viss sida kunna läggas på henne. Se efter, huru många qvdm. denna qvadrat (rektangel) innehåller!

Men att mäta ytor på detta sätt skulle blifva mycket besvärligt, då ytorna äro stora, såsom golfvet, gården, åkerfältet. Derför har man lärt sig att *uträkna* ytans storlek genom uppmätning af en eller flere linier i ytorna. Vi skola nu visa, huru detta tillgår.

För att åskådliggöra qvadratens beräkning, går man till väga på följande sätt: *a*) då längdmåttet jämt innehålles i sidan.

På taflan uppritas af läraren en qvadrat, hvars sida jämt kan uppmätas t. ex. i dm.; ett af barnen får sedan uppmäta sidans längd och utsätta delningspunkterna så väl på höjden som på basen. Derefter dragas genom t. ex. höjdens delningspunkter linier, vinkelräta mot densamma. Var då sidan t. ex. 6 dm., så blifver qvadraten delad i 6 lika långa och 1 dm. breda remsor. Derefter dragas äfven genom basens delningspunkter mot densamma vinkelräta linier. Hvarje remsa blifver då delad i 6 qvadrater med en dm. sida, hvarför alla 6 remsorna, d. v. s. hela qvadraten, innehålla 6 ggr 6 = 36 qvdm.

Man skall nu visa barnen, hvarför en qvm. innehåller 100 qvdm., då 1 m. = 10 dm. o. s. v.

** *b*) Då längdmåttet ej jämt innehålles i sidan. Är qvadratens sida t. ex. $6^2/_3$ dm., så göres detta tal till oeg. bråk = $^{20}/_3$; på samma sätt som förut finner jag, att qv.-ytan innehåller 20 . 20 qvadr., hvardera med $^1/_3$ dm. sida. Men på en qv.-dm. gå 3 . 3 qvadr. med $^1/_3$ dm. sida; således utgör en sådan qvadr. $^1/_9 = ^1/_3 \cdot ^1/_3$ af en qvdm. För att således få veta, huru många qvdm., som gå på ofvannämda fig., så delas 20 . 20 med

3 . 3, då man får $^{20}/_3 \cdot {}^{20}/_3 = 6^2/_3 \cdot 6^2/_3 = (6^2/_3)^2$. Den i *a*) funna regeln för beräkningen af qvadratens yta gäller således äfven, om längdmåttet ej innehålles jämt i sidan.

Ex. Uppmät sidan och uträkna ytan af denna nya qvadrat, som jag uppritat på taflan! Huru stor är dess omkrets?

Hvarje uträkning tecknas före verkställandet, och det tecknade resultatet sättes = X, hvarvid betydelsen af X och likhetstecknet förklaras, i fall barnen förut ej äro bekanta dermed. Vore sidan i denna qvadrat 2,4 dm., så finge den tecknade räkningen detta utseende: 2,4 × 2,4 = X. Man bör äfven nu lära dem, att 2,4 × 2,4 läses »2,4 upphöjdt till qvadrat», och att uttrycket: »upphöja till qvadrat» således betyder, att talet skall multipliceras med sig sjelft, samt att detta kan korteligen tecknas genom att sätta en liten tvåa till höger om talet vid dess öfre kant; att således denna uträkning tecknas sålunda: $2{,}4^2 = X$; med qvadratroten förstår man det med sig sjelft 2 ggr multiplicerade talet, — eller det tal, som, uppskrifvet som faktor 2 ggr, gifver det ifrågavarande talet — således här 2,4.

Man låte *alltid* barnen först och främst genom *mätningar, som de egenhändigt verkställa, tillämpa dessa problemer:* bordets, taflans, golfvets o. s. v. ytor; priset för bordets, takets, dörrens o. s. v. målning efter så och så mycket för qvdm., bordslådans, rummets, de stereometriska figurernas, vagnens o. s. v. rymd. Barnen kunna få till hemarbete att uträkna: hvad golfvet i deras stuga kostar att inlägga efter så och så mycket för qvm.; hvad lådan rymmer; huru mycket säd, som går i låren; ytan af en åker o. s. v. Sådana exempel, som finnas i oändlighet, göra lektionerna angenäma och roande för barnen, på samma gång de fästa det inhemtade i minnet och göra undervisningen praktisk.

Obs!

Rektangeln.

18. ***Att af två linier*** (d. v. s. bredd och höjd) ***upprita en rektangel.***

Samma anm. som vid 16.

* 19. ***Att beräkna ytan af en gifven rektangel.***

a) Detta förfaringssätt åskådliggöres, då basen jämt kan uppmätas med längdmåttet, på samma sätt som vid qvadr:s uppmätning.

** *b*) Då längden och höjden ej jämt uppmätas med längdmåttet. Låt basen vara t. ex. $4^2/_5 = {}^{22}/_5$ dm. och höjden $3^1/_3 = {}^{10}/_3$ dm. Göras dessa bråk liknämniga, så blir ${}^{22}/_5 = {}^{66}/_{15}$ och ${}^{10}/_3 = {}^{50}/_{15}$; på samma sätt, som vid qvadr., finner jag, att rektangeln innehåller 50 . 66 qvadrater, hvardera med ${}^1/_{15}$ dm. sida; sådana qvadrater gå 15 . 15 stycken på en qvdm., hvadan rektangeln innehåller ${}^{66}/_{15} \cdot {}^{50}/_{15} = 4^2/_5 \cdot 3^1/_3$ hela qvdm. Den ofvan funna regeln gäller sålunda äfven för detta fall.

Ex. Uppmät ytan af detta bord! Hvad skulle skifvans målning kosta efter 18 öre qvm.? Beräkna golfvets yta! Huru många bräder skulle åtgå till detsamma, om hvarje bräde hade samma bredd och längd som detta? Huru många m. panel i längd skulle åtgå, om sådan sattes rundt omkring detsamma?

Uppmät och uträkna ytan af någon rektangelformig åker i din fars täppa!

Obs. Att uträkningarne tecknas innan de verkställas; skulle några barn hafva svårt att fatta betydelsen af en tecknad räkning, så utför man den först *utan* och sedan *med* teckning.

** 20. ***Att, när ytan och den ena sidan i en rektangel äro gifna, genom beräkning finna den andra.***

Läroprof. Huru benämner jag korteligen det tal, som erhålles genom hopmultiplicering af två (eller flere) andra? Hur erhöll jag rektangelns yta, då dess höjd och bredd voro kända? Hur kan jag således anse ytan i förhållande till längden och bredden? Huru pröfvar jag, om produkten i en multiplikation är riktig? Huru han jag således, då ytan och höjden äro gifna, finna längden? Genom dylika frågor kan man få åtminstone några barn att inse, att den obekanta sidan erhålles, om den bekanta divideras i ytan.

Ex. Mät bredden på denna tafla (bord, bänk o. s. v.) och beräkna längden, då du vet, att taflans yta utgör.... qvm.! (Taflans yta måste naturligtvis läraren på förhand känna; barnen få efter uträkningen sjelfva, genom mätning af längden, pröfva om de räknat rätt. Dylika exempel roa mycket). Ytan af ett salsgolf skall vara 60 qvm., huru långt måste det då läggas, om dess bredd skall vara 6,2 meter?

Parallelogrammen.

21. ***Att, när två sidor och mellanliggande vinkel äro gifna, upprita en parallelogram.***

Detta verkställes först med tillhjelp af gradskifva, men sedan kap. V är genomgånget enl. 85.

* 22. ***Att uppdraga höjden i en parallelogram.***

Detta verkställes först med gradskifva, men sedan kap. V är genomgånget enl. 83 eller 84.

* 23. ***Att beräkna ytan af en parallelogram.***

Att parallelogrammens yta är lika med ytan af en rektangel med lika stor bas och höjd, åskådliggöres derigenom, att man uppritar på parallelogrammens bas en rektangel med samma höjd som parallelogrammen; derefter visas, att dessa båda figurer bestå af ett gemensamt stycke, samt dessutom af hvar sin triangel, hvilka äro lika stora (efter inhemt. af 78 få lärjungarne bevisa, att dessa trianglar äro sammanfallande). Man bör äfven af papp utskära en rektangel och en parallelogram, som hafva samma bas och höjd; man kan då — om dessa fig. hafva passande form — genom att från en af parallelogrammens trubbiga vinklar, vinkelrätt mot basen, afskära ett stycke, visa, att båda fig. äro sammanfallande.

Ex. Uträkna ytan af denna på golfvet uppritade parallelogram! Dess omkrets!

** 24. ***Att då ytan och basen eller höjden i en parallelogram äro gifna, genom beräkning finna den andra af dessa senare storheter.***

Detta tillgår som vid 20.

Ex. En åkerteg i form af en parallelogr. hade 12,5 m. höjd och 250 qvm. yta; huru stor var dess längd?

I sammanhang med parallelogr. inläres, hvad som förstås med *alternat*-vinklar, äfvensom att dessa vinklar äro lika stora, när linierna äro parallela, och att, om dessa vinklar äro lika, så äro linierna parallela. Härefter läras barnen:

** 25. ***Att genom en gifven punkt draga en rät linie, parallel med en gifven rät linie.***

Den gifna punkten sammanbindes som vanligt med linien, och alternat-vinklarne göras lika stora, första gången med gradskifvan, men sedan kap. V är inhemtadt, enligt 85.

Triangeln.

(Angel = vinkel.)

26. ***Trianglarnes olika slag:***

med afseende på sidornas inbördes storlek:	liksidiga, likbenta, oliksidiga.
med afseende på vinklarnes storlek:	trubbvinkliga, rätvinkliga, spetsvinkliga.

Trianglarnes bas, höjd.

27. ***Att upprita en triangel, när två sidor och mellanliggande vinkel äro gifna.***

28. ***Att upprita en triangel, när två vinklar och mellanliggande sida äro gifna.***

29. ***Att upprita en triangel, när alla tre sidorna äro gifna.***

Samma anm. som vid 21.

Barnen göras uppmärksamma på, under hvad vilkor 28 och 29 kunna verkställas, d. v. s. storleken af vinklarnes summa i en triangel, äfvensom storleken af två sid. jämf. med den tredje.

** 30. ***Att på en rät linie upprita en triangel, som har samma form som en annan triangel.***

Detta sker sålunda, att de vinklar i den gifna triang., som stå vid den sidan, som svarar mot den gifna linien, flyttas till denna linie, hvarefter triangeln fullbordas. Denna nya triang. kallas *likformig* med den förra.

* 31. ***Att uppdraga höjden i en triangel.***
Samma anm. som vid 22.

* 32. ***Att beräkna ytan af en gifven triangel.***

Förfaringssättet inläres derigenom, att man visar, att triang. utgör hälften af den parallelogram, som har samma bas och höjd som triang.; detta senare kan åskådliggöras sålunda, att man af papp utskär tvänne sammanfallande triangl. och af dem sammansätter en parallelogr.

Regeln för ytans finnande kan man sedan lätteligen genom frågor få barnen att sjelfva framställa.

Ex. Uträkna ytan af denna triang.! Huru stor potatisskörd kan påräknas af en åker, som har form af en rätvinklig triang., då de sidor, som omfatta den räta vinkeln, äro 12,5 och 18,4 m. och 2,1 hl. erhålles på hvarje 1,5 qvm.? Beräkna storleken af sidoytorna på denna 5-kant. pyramid!

** 33. ***Att, då ytan och basen eller höjden i en triangel äro gifna, genom beräkning finna den andra af de båda senare storheterna.***

Härvid går man tillväga som i samma fall med rektang. och gör lärjungarne uppmärksamma på, att antingen dividenden eller den funna qvoten skola multipliceras med 2.

Ex. Uppmät höjden i denna triangelformiga pappskifva och beräkna dess bas, då du vet, att dess yta är... (Ytan bör naturligtvis läraren förut hafva beräknat.)

Oregelbundna fyrhörningar och månghörningar.

** 34. ***Att på en gifven rät linie upprita en rätlinig figur af samma form som en annan rätlinig figur.***

Detta sker, då jag har den rätliniga figuren uppritad på papperet eller taflan, sålunda, att figuren indelas i triangl., och dessa flyttas till den linie, på hvilken den nya fig. skall uppritas, enl. 30.

Vill jag återigen afbilda ett fält, såsom en åker, af oregelbunden form, så uppdelar jag det gifna stycket i triangl., nedsätter i trianglarnes spetsar störar och mäter afståndet mellan dessa, hvilka afstånd utgöra längden på trianglarnes sidor. På ett papper uppritar jag på fri hand, alt eftersom mätningen framskrider, ungefärliga formen af dessa trianglar och uppskrifver på sidorna de motsvarande längderna.

Sedan uppritar man på papperet en rät linie, som man noggrant delar i lika stora delar, så stora nämligen, som man vill, att en hektometer eller meter skall synas på ritningen; denna linie kallas, som förut är kändt, *skala*. På denna skala tager jag sedan längden af de uppmätta triangelsidorna och uppritar nu enl. 30 noggrant den förut på fri hand tecknade månghörningen, som således är en karta öfver fältet. Detta mätningssätt tillämpas först på en på golfvet med krita uppritad figur och derefter på gårdsplanen, trädgården och utsträckes derefter till det närmast rundt omkring skolhuset liggande fältet, hvarvid äfven byggnaderna m. m. utsättas på den lilla kartan.

* 35. ***Att beräkna ytan af en gifven månghörning.***

Detta tillgår sålunda, att ytan af hvarje särskild triang., hvaraf månghörningen är sammansatt, beräknas, och dessa ytor derefter hopläggas. Skall ytan af ett oregelbundet fält beräknas, så upprättas först, såsom förut är nämdt, en karta deröfver, och höjderna i trianglarne uppmätas med skalan, hvarefter ytan på förutnämda sätt uträknas.

Ex. Uppmät och beräkna ytan af denna på taflan uppritade månghörning!

Beräkna efter den uppritade skalan ytan af det fält, som denna lilla karta föreställer!

Barnen göras uppmärksamma på, att då två sidor i en oregelbunden fyrsiding äro parallela (en sådan fig. kallas paralleltrapezium), hafva de båda triangl., i hvilka figuren kan delas, samma höjd, om de parallela sidorna tagas till baser. Att man således vid beräkning af denna yta kan (i stället för att multiplicera hvardera basen med den gemensamma höjden och dividera hvarje produkt med 2 och sedan hopaddera produkterna), hopaddera de båda parallela sidorna, dividera deras summa med 2 och multiplicera med höjden.

Ex. Beräkna ytinnehållet af sitsen på denna stol! Ytan af sidorna och gaflarne i din faders vagn!

** 36 a. ***Att upprita en regelbunden*** (liksidig och likvinklig) ***månghörning i en gifven cirkel så, att dess spetsar stå på cirkelns periferi*** (detta kallas att inskrifva månghörningen i cirkeln).

Om jag tänker mig månghörningen uppritad och dess vinklar sammanbundna med cirkelns medelpunkt, så uppkomma der lika många lika stora vinklar (månghörningens medelpunktsvinklar), som månghörningen har sidor; dessa vinklar äro tillsammans = 360 grad.; jag erhåller således storleken på hvar och en, om jag dividerar månghörningens sidotal uti 360. När nu medelpunkts-vinkeln är funnen, är det lätt att medels gradskifvan upprita månghörn. (När detta utfrågas, tages naturligtvis först en viss månghörn., t. ex. sexhörningen.)

I sammanhang härmed visas, huru qvadraten inskrifves genom att afsätta radien sex gånger.

Ex. Inskrif i denna cirkel en femhörning!

** 36 b. ***Att på en gifven rät linie upprita en regelbunden månghörning.***

Tänker jag mig såsom förut månghörn. uppritad och dess vinklar sammanbundna med medelpunkten, så erhållas så många trianglar, som månghörn. har sidor; då summan af vinklarne i hvarje triangel är = 2 räta, så erhålles antalet af de i dessa triangl. befintliga räta vinklar, om sidornas antal multipliceras med 2; tager jag nu bort de vinklar, som stå vid medelpunkt., som tillsammans utgöra 4 räta, så återstår summan af månghörn:s vinklar. Denna summa multipliceras med 90, då jag erhåller den uttryckt i grader, och divideras sedan med månghörn:s vinkel-antal, då hörnvinkelns storlek erhålles uttryckt i grader, hvarefter fig. lätt uppritas medels gradskrifvan.

Ex. En snickare skall förfärdiga ett bord i form af en regelbunden sexhörning med sida af gifven storlek; upprita bordskifvan!

** 37. ***Att beräkna ytan af en gifven regelbunden månghörning.***

Månghörningens medelpunkt sökes genom att skära två vid samma sida liggande vinklar midt i tu och utdraga skärningslinierna, tills de råkas; den sålunda funna medelpunkten sammanbindes med vinkelspetsarne, då fig. blifver delad i lika stora triangl., till antalet lika med fig:s sidor. Ytan på en af dessa triangl. beräknas och multiplic. med sidornas antal, då månghörn:s yta erhålles.

Ex. Beräkna bottenytan i denna pelare!

Cirkeln.

38. ***Hvad som förstås med en cirkel.***

Man fäster barnens uppmärksamhet derå, att cirkeln är en yta, ej den gränslinie, cirkelomkretsen, som omsluter ytan, ehuru denna linie ofta i dagligt tal kallas cirkel; likaså kallas vanligen det instrument, passaren, hvarmed cirkelkretsen uppdrages, för cirkel.

Cirkel, medelpunkt, radie, diameter, korda, båge, sektor, segment, tangent, grader.

Läroprof. Hvad kallas en yta, som har en sådan gränslinie? Hvad menas således med en cirkel? (Cirkel är en plan figur, som begränsas af en öfver alt lika böjd linie.) Utvisa någon cirkelyta här i rummet! Hvad kallas cirkelns gränslinie? Hvad kallas denna punkt, som ligger midt i cirkeln? Hvad kallas denna räta linie, som drages från medelpunkten till periferien? Hvad kallas den räta linie, som börjar i periferien, går genom medelpunkten och slutar i periferien? Hvad kallas en del af cirkelomkretsen? Hvad kallas den räta linie, som sammanbinder bågens ändpunkter? (t. ex. på pilbågen; kordasträng.) Hvad kallas den del af cirkelns yta, som inneslutes af kordan och bågen? I huru många segmenter delas cirkeln af kordan? Hvad kallas hvardera segmentet, om de äro lika stora? Hvaraf begränsas halfcirkeln? Hvad kallas denna yta, som inneslutes af dessa två radier och bågen? I huru många sektorer delas cirkeln af dessa två radier? Hvad kallas denna linie, som endast vidrör cirkeln i en punkt, men icke skär honom, äfven om hon utdrages? Om en radie drages till tangeringspunkten, hvad vinkel gör den med tang.?

Om jag genom medelpunkten drager två mot hvarandra vinkelräta diametrar, i huru många räta vinklar blifver då cirkeln delad? Hvarje fjerdedels båge delas i 90 delar och hvarje del kallas en grad. Huru många grader innehåller då halfcirkeln? $^3/_4$ af cirkeln? Hela cirkeln? o. s. v.

39. ***Att upprita en cirkel, då dess diameter är gifven.***

Diameterns medelpunkt sökes först genom försök med passaren, derefter enl. 82.

Huru det vidare tillgår att upprita en cirkel, då dess radie och medelpunkt äro gifna, är inlärdt af de föreg. problemen.

** 40. ***Att finna medelpunkten till en uppritad cirkel eller ett cirkelsegment.***

Drag i cirkeln eller segmentet tvänne kordor, som ej äro parallela;

skär dessa midt i tu och utdrag de vinkelräta skärningslinierna, till dess de råkas, då medelpunkten erhålles.
Ex. Sök medelpunkten till denna båge!

** 41. *Att beräkna cirkelns omkrets, då dess diameter eller radie är gifven.*

För att åskådliggöra detta, skaffar man sig en cirkelrund trissa af trä med 7 cm. diameter och ett mätband, hvarpå cm. äro noggrant indelade i mm.; ett sådant kan man äfven göra af papper.

Läroprof. Uppmät diametern på denna trissa! Uppmät dess omkrets! Huru får jag veta, huru många gånger omkr. är större än diam.? Efterse då detta!

Huru många ggr större var således omkr. än diam.? I alla cirklar är således omkr. i det närmaste 3,14 ggr större än diam. Huru erhåller jag således omkr., då diametern är gifven?

Huru man derefter lär dem att söka omkretsen, då i st. för diam. radien är gifven, är lätt att inse.

Ex. Beräkna omkr. af denna vals! Uppmät nu den samma, så få vi se, om beräkningen slår in! Om radien i din faders vagnshjul är 3,8 dm., huru långt jernstycke åtgår till dess skoning?

** 42. *Att, då cirkelns omkrets är gifven, beräkna dess diameter eller radie.*

Läroprof. Huru många ggr större är omkr. än diam.? Huru många ggr mindre är således diam. än omkr.? Huru erhålles således diam., när omkr. är gifven?

Ang. radien samma anmärkning som vid föreg. problem.

Mät omkretsen på denna kägla och beräkna derefter hennes diam.! Bandet, som skulle användas till en tunna, var 11 dm. långt, huru stor var tunnans radie, då 0,75 dm. vid hvardera ändan af bandet åtgick för dess ihopfästning?

Ex. Till detta och föregående problem kan man ur dagliga lifvet lätteligen erhålla en stor mängd exempel; man bör bland annat låta eleverna uträkna eqvatorns längd, då de känna jordens diam.; jordbanans omkrets, då afståndet från solen är kändt o. s. v.; vid dessa räkningar, der de ingående faktorerna äro stora, använder man i st. för 3,14 det noggrannare talet 3,1416.

** 43. ***Att beräkna cirkelns yta, då dess radie eller diameter är gifven.***

Läroprof. Cirkelns omkrets delas i mycket små bågar och delningspunkterna sammanbindas med medelpunkten.

Hvad form kan jag anse dessa sektorer hafva, om bågarne äro så små, att jag kan anse dem räta? Huru erhåller jag ytan af en triangel? Hvad är höjden i dessa trianglar? Huru erhålles således ytan af dessa trianglar?

Om jag sammanlägger alla dessa trianglar, hvilken fig. får jag då? Kan jag erhålla summan af alla trianglar på något annat sätt än genom att beräkna ytan af hvar triang. särskildt och sedan sammanlägga dessa ytor? (Jag kan sammanlägga alla baserna och multiplicera dem med den gemensamma höjden och sedan dividera produkten med 2.) Om jag således lägger tillsammans alla baserna, hvilken linie i cirkeln finner jag då? Denna cirkels radie 4 cm., huru stor är då dess omkrets, eller summan af triang:s baser? (Detta tecknas 2 . 4 . 3,14.) Detta är således triang:s bas; huru stor är deras höjd? Huru fås då ytan? Detta tecknas sålunda: $X = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4}{2}$. Här skola vi således både multiplicera och dividera med 2; huru kunna vi då göra med tvåan? (Vi utstryka henne på båda ställen.) Det tecknade får då detta utseende, om vi ställa fyrorna bredvid hvarandra: $X = 4 \cdot 4 \cdot 3{,}14$. Hvad är det för en linie i cirkeln, som är 4 cm. lång? Hvarmed skall radien således multipliceras? Hvad kallas den produkt, som erhålles, då ett tal multipliceras med sig sjelft? Hvarmed skall radiens qvadrat multipliceras? Huru erhåller jag således i allmänhet ytan af en cirkel?

Om diam. är känd i st. f. radien, se anm. vid föreg. problem.

Ex. Huru stor yta har denna trissa? Ett blomsterland har 38 cm. genomskärning; huru stor yta således? Huru stor yta har storcirkeln på detta klot?

** 44. ***Att beräkna cirkelns yta, då dess omkrets är gifven.***

Radien beräknas först enl. 42, och sedan den är funnen, ytan enl. föreg. probl. Genom att först teckna räkningen, kan förkortning ske; men räkningen blifver då, åtminstone vid första genomgåendet, för vidlyftig.

Ex. Mät omkretsen af detta ämbar och beräkna dess bottenyta!

** 45. ***Att beräkna ytan af en cirkelring*** (d. v. s. den ring, som inneslutes af tvänne cirkelperiferier, af hvilka den ena ligger inom den andra).

Man kan lätt åskådliggöra, att man måste beräkna den större cirkelns yta och derifrån draga den mindres.

Ex. Den yttre diam. af en cirkelrund ridbana var 20 m. och den inre 12 m.; huru stor yta upptog banan?

** 46. ***Att beräkna ytan af en cirkelsektor, då bågen och radien äro gifna.***

Cirkelsektorn betraktas som en triang. med bågen till bas och radien till höjd, hvadan dess yta beräknas på samma sätt som triangelns.

Ex. Beräkna ytan af denna cirkelsektor!

Då i st. för bågens längd dess gradtal är gifvet, uträkna hela cirkelns yta; denna divideras med 360, då ytan af en sektor med en grads vinkel erhålles; detta tal multipliceras sedan med det gifna gradtalet, då sektorns yta erhålles.

Ex. Om jag ur denna cirkel utskär en sektor, hvars båge är 16 grader, huru stor yta har han?

** 47. ***Att beräkna ytan af ett cirkelsegment.***

Det kan lätteligen visas, att segmentets yta erhålles, om från den motsvarande sektorns yta subtraheras den motsvarande triangelns.

Ex. Beräkna ytan af en hvalfbåge af denna storlek! Dylika uträkningar förekomma, då man skall beräkna rymden af rum, hvilkas tak hafva formen af tunnhvalf, såsom kyrkor, källare o. s. v.

Ovalen (ellipsen).

** 48. ***Att upprita en sådan oval, som kallas ellips, då dess längd AB och bredd CD äro gifna.***

Skär längden AB midt i tu och utdrag från skärningspunkten den vinkelräta skärningslinien åt båda sidor och afsätt på henne å ömse sidor om O stycken OG och OH, som hvardera äro = halfva längden af CD, så att hela GH blifver = CD. Tag sedan halfva längden d. v. s. AO eller OB till radie och upprita med G eller H till medelpunkt en cirkelbåge, som skär AB på två ställen E och F; dessa skärningspunkter kallas ellipsens *brännpunkter*. I dessa punkter fästes ett snöre lika långt med fig:s längd AB; detta snöre spännes med ett kritstycke, penna e. d., som jag förer omkring, på samma gång jag dermed spänner snöret; spåret, som erhålles, är ovalens eller ellipsens omkrets. (I förbigående anmärkes, att planeterna röra sig i elliptiska banor, i hvars ena brännpunkt solen befinner sig.)

Ex. En snickare skall göra ett förmaksbord 1,2 m. långt och 0,8 m. bredt; upprita bordskifvan på golfvet (eller taflan)!

** 49. ***Att beräkna ytan af en ellips.***

Ellipsen kan anses såsom en hoptryckt cirkel med två diametrar: längden och bredden, och således två radier, nämligen halfva längden och halfva bredden. För att erhålla ytan, multiplicerar man dessa radier med hvarandra, d. v. s. halfva längden med halfva bredden och derefter produkten med 3,14.

Ex. Beräkna ytan af den ellips, som har så stor bredd och så stor längd! Beräkna bottnens yta i denna balja! (Man kan utan märkbart fel anse ovala bord, kärlbottnar och dylika ytor för ellipser.)

IV. Kropparne.

50. ***Kroppens utsträckning, afbildning.*** (Repetition af det föregående.)

51. ***Kropparnes indelning.*** Kroppar med plana ytor, med bugtiga ytor.

Kuben.

52. För att gifva lärjungarne en tydlig föreställning om kropparnes allmänna egenskaper, samt såsom repetition af det föregående, kan man utförligare behandla en eller annan af dem, t. ex. kuben, enligt följande anvisning.

Ytorna.

(Kroppens gränser.)

A.	Deras	beskaffenhet (med afseende på de linier, som i dem kunna dragas):	plana.
B.	»	olika benämning med afseende på deras ställning i kroppen:	a) grundytor, b) sidoytor.
C.	»	antal.	
D.	»	ställning 1:o med afseende på det lugna vattnets yta:	a) vågräta, lodräta (uppåt, nedåt), c) sneda.
		2:o med afseende på hvarandra:	a) jämlöpande (parallela), b) icke jämlöpande.
E.	»	storlek i förhållande till hvarandra.	

Kantlinierna.

(Ytans gränser.)

A.	Deras	beskaffenhet (med afseende på delarnes inbördes riktning):	räta.
B.	»	antal:	a) kring hvarje yta, b) i hela kroppen.
C.	»	ställning 1:o:	a) vågräta, b) lodräta, c) sneda.
		2:o:	a) jämlöpande, b) icke jämlöpande.

D. Deras gränser: .... punkter.
E. » storlek i förhållande till hvarandra.

Linievinklarne.

(Lutningen mellan tvänne linier, som skära hvarandra.)

A. Deras gränser: .... a) ben, b) spets.
B. » beskaffenhet (med afseende på vinkelbenens beskaffenhet): .... rätliniga.
C. » storlek: .... a) räta, b) trubbiga, c) spetsiga. (Obs. att en vinkels storlek ej beror på vinkelbenens längd!)
D. » antal: .... a) i hvarje yta, b) i hela kroppen.

Ytornas namn.

(Sammanfattning af det föregående för ytornas benämning.)

A. Deras beskaffenhet:............. plana.
B. » gränsliniers: .... a) antal, b) beskaffenhet, c) storlek (i förhållande till hvarandra), d) ställning (i förhållande till hvarandra).
C. » vinklar: .... a) räta, b) trubbiga, c) spetsiga.
D. » namn.

Kantvinklarne.

(Äfven kallade ytvinklar eller kanter.)

(Lutningen eller öppningen mellan två ytor, som skära hvarandra.)

A. Deras gränser: .... a) ytorna, b) kantlinien.
B. » beskaffenhet (med afseende på kantlinien): rätliniga.
C. » storlek:....................... a) rät, b) trubbig, c) spetsig.

D. Deras riktning: .... a) utgående, b) ingående.
E. » antal: .... a) kring hvarje yta, b) i hela kroppen.

(Obs. skilnaden mellan kantvinkel och kantlinie!)

Hörnen.

(Skärningspunkten mellan tre eller flera ytor.)

A. Deras olika slag i anseende till kanternas antal:... a) tre-, b) fyr-.
B. » olika riktning: .... a) utgående, b) ingående.
C. » antal: .... a) vid hvarje yta, b) i hela kroppen.

(Obs. skilnaden mellan kant och hörn!)

Axlarne.

Yt- Kant- Hörn- Kantyt- Hörn- (spets-) yt- Hörnkant-	axlar.........	a) antal, b) ställning (med afseende på hvarandra och med afseende på det lugna vattnets yta), c) storlek (med afseende på hvarandra).

Kroppens namn.

(Kort sammanfattning af det föregående för kropparnes benämning.)

A. Gränsytornas .... a) antal, b) beskaffenhet (plana eller bugtiga), c) namn.
B. Kroppens namn.

Läroprof.

(Kuben tecknas på svarta taflan — före lektionens början — i perspektiv.)

Ytorna.

A. Utpeka gränsytorna på denna kropp! (När en yta på någon af de stereometriska figurerna skall utpekas, får barnet öfverfara hela ytan med flata handen.) Nämn detta rums gränsytor! Om jag lägger denna räta lineal med kanten på denna yta och sedan på karafinens yta; faller då linealen lika på båda ytorna? Hvarför ligger den alldeles intill kubens yta? Hurudana äro således i detta fall kubens ytor? Hurudan är deremot karafinens yta? Huru undersöker man med lin., om en yta är plan eller bugtig? Undersök på detta sätt bordets, glasets o. s. v. ytor! Man göre barnen uppmärksamma på, att lin. måste falla jämt efter ytan i *alla* riktningar, om ytan är plan, och visar, att hon hos valsen och käglan faller jämt i *en* riktning, fastän dessa kroppars sidoytor äro bugtiga.

B. Hvad kallas den yta, på hvilken en kropp står? Den midt emot grundytan stående, med densamma parallela ytan, kallas ock grundyta! Hvad kallas de ytor, som omgifva en kropps sidor? Utpeka dessa grund- och sido-ytor! Hvilka äro rummets grund-, och hvilka dess sido-ytor?

C. Af huru många sidor begränsas denna kropp? Huru många af dessa äro grund-, och huru många sido-ytor? Visa på denna teckning grundytorna! sidoytorna! (Då en yta på en ritning utvisas, utpekar man dess gränser.)

D. 1:o Hurudan ställning sägas armarne på denna våg hafva, då den väger jämt? Huru sägas de ytor ligga, som hafva samma ställning, som vågarmen i nyss nämda fall? Utpeka de vågräta ytorna i denna kropp! Vet du något ämne, hvars yta alltid har vågrät ställning, när ämnet ej är i rörelse? (Vattnets och vätskors i allmänhet.) I följd deraf att det lugna vattnets yta alltid är vågrät, kallar man detta instrument, med hvilket ytors ställning undersökes, vattpass. (Vattpasset förevisas och förklaras.) Undersök med vattpasset hurudan ställning bordet, golfvet o. s. v. hafva!

Om jag låter detta snöre med det påfästade lodet hänga fritt, hvad ställning säger jag då att snöret har? Hvad kallas denna riktning (uppåt)? och denna (nedåt)? Huru sägas de ytor stå, som hafva samma ställning, som detta snöre nu har? Huru många lodräta ytor har denna kub? Utpeka dem! Undersök med snöret, om väggen o. s. v. är lodrät!

Hurudan ställning sägas de ytor hafva, som hvarken äro våg- eller lodräta? Visa några sneda ytor här inne! Huru många sneda ytor har kuben nu? (Kuben ställes med en kantlinie utefter en vågrät bodskifva.) Huru många lodräta? Håll din tafla så, att dess yta är vågrät! Lodrät! Sned!

2:o Huru långt skall jag utdraga dessa ytor (två motstående), för att de skola råka hvarandra? Hurudan ställning sägas dessa ytor derför hafva till hvarandra? Hvad förstås derför dermed, att två ytor äro parallela? Utvisa hvilka ytor i denna kropp som äro parallela! Uppräkna några ytor i rummet, hvilka äro jämlöpande! Utvisa några på detta bord! o. s. v.

Utvisa några ytor, som icke äro parallela! Håll dessa två taflor så, att deras ytor äro parallela! Att de icke äro det!

E. Hvilken af dessa ytor (i kuben) är störst?

Kantlinierna.

A. Utpeka denna ytas gränser! Gränserna för bordskifvans yta För denna på taflan tecknade yta (på taflan uppritas en qvadrat)! Hvad kalla vi ytans gränser? Hvaraf begränsas, således en yta? Hvad ser du för olikhet mellan de linier, som begränsa denna (kubens) yta och den här linien (en krokig linie)? Huru många slag af linier hafva vi således? Utaf hvilken beskaffenhet äro således de linier, som begränsa kubens ytor? Hvad kan jag gifva ytan för namn, som utmärker, att gränslinierna äro räta? (rätlinig.) Utvisa här i rummet några krokiga, några räta linier! Huru kan jag undersöka om en linie är rät? (medels linealen, som lägges utefter linien.)

B. Af huru många linier begränsas hvarje yta i denna kropp? Gif ytan ett namn, som utmärker, att den har fyra sidor! (fyrsiding.) Huru många voro ytorna? Då hvarje yta begränsas af fyra kantlinier och kroppen har sex ytor, huru många kantlinier skulle det då blifva i hela kroppen? (24.) Räkna, om kantlinierna äro tjugufyra! Hvarför blifva de blott tolf? (ty hvarje kantlinie hör till två ytor.)

Utvisa på ritningen kantlinierna! Hvarför äro dessa kantlinier prickade.

C. 1:o Hurudan ställning har denna kantlinie i förhållande till det lugna vattnets yta? (samma ställning eller vågrät.) Hurudan ställning har denna? Huru många kantlinier i denna kropp äro vågräta och huru många äro lodräta? (Kuben står på en vågrät bordskifva.) Utpeka på taflan vågräta, lodräta, sneda linier! Utpeka några vågräta o. s. v. linier här i rummet! Drag på taflan en vågrät linie o. s. v.

2:o Huru långt skall jag utdraga dessa linier, för att de skola råkas? (de två motstående sidorna i en af kubens ytor.) Hvad ställning hafva de således till hvarandra? (Här är blott frågan om linier, som ligga i samma plan.) Med huru många andra kantlin. i kuben är denna jämlöpande? Utvisa några kantlin. i rummet, som äro parallela! Drag (på taflan) en lin. parallel med denna!

Äro också dessa lin. parallela? (två icke parallela lin. visas.) Hvarför icke? Upprita en lin., som icke är parallel med denna!

D. Hvad kallas slutet af en linie? (punkt, gränspunkt.) Utvisa denna (en kantlinie i kuben) liniens gränspunkter! Utvisa gränspunkterna för denna (någon kantlinie i rummet)!

E. Om jag mäter längderna af dessa lin. (kantlin. i kuben) och jämför längderna med hvarandra, hvilken är störst? Hvad kallas ytan derför, att dess gränslinier äro lika stora? (liksidig.)

Linievinklarne.

A. Hvad kallas öppningen, som ligger mellan dessa två linier, som råka hvarandra? Hvad kallas linierna, som omsluta vinkeln? Hvad kallas den punkt, deri vinkelbenen råkas? Visa sjelfva vinkeln (vinkelöppningen)! Utvisa några vinklar på detta bord!

B. Af hurudan beskaffenhet (i anseende till delarnes inbördes riktning) äro de linier, som bilda dessa vinklar (i kuben)? Hvad kallas en vinkel, som bildas af räta linier? (rätlinig.) Hvad kallas då denna vinkel? (kroklinig.)

C. Huru stor är denna vinkel, som bildas af en lodrät och en vågrät linie? (Man bör låta de mera försigkomne redogöra för, att en rät vinkel äfven uppstår, då en rät linie står på en annan rät linie och gör vinklarne å ömse sidor, sidovinklarne, lika stora, och att den ena linien då säges hafva vinkelrät ställning mot den andra.) Huru stora vinklar hafva således dessa ytor? Utvisa några flere räta vinklar i rummet! Rita på taflan en rät vinkel!

Huru kallas den vinkel, som är större än en rät? Utvisa några trubbiga vinklar! Hvad kallas den vinkel, som är mindre en rät? Utvisa några spetsiga vinklar! Upprita en trubbig, en spetsig vinkel! Hvilkendera af dessa vinklar (en trubbig med korta ben och en spetsig med långa ben) är störst? För att göra klart för barnen, att vinkelns storlek ej beror på vinkelbenens längd, lägger man de jämförda vinklarne med det ena benet och spetsarne på hvarandra och säger, att den vinkel, hvars andra ben ligger längst bort från det gemensamma, är störst.

D. Huru många vinklar finnas i hvarje yta? I hela kroppen?

Ytorna (repet. af det föreg.).

A. Utaf hurudan beskaffenhet voro dessa ytor? (plana.)

B. Af huru många linier är hvarje yta begränsad? Af hurudan beskaffenhet äro dessa linier? (räta) Huru stora äro de jämförda med hvarandra? Hvad ställning hafva de motstående linierna sins emellan?

C. Hurudana vinklar bildade linierna i denna yta med hvarandra?

D. Hvad kallar jag en sådan yta?

Man kan nu låta någon af de mera försigkomna definiera qvadraten, hvilken definition då skall framställas i samma ordning, som här ofvan.

Upprita här på taflan en qvadrat!

Kantvinklarne.

A. Hvad kallas öppningen, som ligger mellan dessa två ytor, som råka hvarandra? Hvad kallas kantvinkeln med för annat namn derför, att den bildas af ytor? (ytvinkel.) Vet du något tredje namn derpå? (kant.) Hvad kallas den linie, utefter hvilken ytorna skära hvarandra? (kantlinie.) Utpeka denna kropps kantvinklar! (Då barnet skall utpeka en kantvinkel, får det hålla tummen och pekfingret tillsammans och med de båda fingerspetsarne beröra hvardera ytan, som bildar vinkeln; då åter en kantlinie utvisas, begagnas blott ett finger; göres ej denna skilnad, så förblanda barnen ofta kantvinkel och kantlinie.) Utvisa några kantvinklar på detta bord!

B. Af hurudan beskaffenhet äro kantlinerna i denna kantvinkel? Hurudan är samma linie i denna (cylinderns eller käglans) kantvinkel?

C. Af huru många slag voro linievinklarne med afseende på storleken? Af huru många slag voro då kantvinklarne?

Huru stora äro då kantvinklarne i denna kropp? Utvisa här inne räta, trubbiga, spetsiga kantvinklar! Håll permen på denna bok så, att den och titelbladet bilda en rät, trubbig, spetsig vinkel!

D. Ser jag dessa (kubens) kantvinklar utifrån eller inifrån? Huru kallas de kantvinklar, som ses utifrån? (utgående.) Huru kallas deremot de kanter, som jag ser inifrån? (ingående.) Utpeka några utgående kantvinklar på dörrposten! Visa några ingående! (Af dessa slag äro kantvinklarne mellan väggarne, mellan väggarne och taket och golfvet o. s. v.)

E. Huru många kantvinklar finnas kring hvarje yta? I hela figuren? Hvarför ej 24?

Hörnen.

A. Hvad kallas denna punkt, der dessa tre ytor sammanträffa? Huru uppkommer således ett hörn? Huru många kanter har detta hörn? Huru kallas det derför? (trekantigt.) Visa bland dessa (stereometriska) kroppar något fyrkantigt o. s. v. hörn! Utvisa hörnen på detta bord!

B. Ser jag dessa (kubens) hörn utifrån eller inifrån? Huru kallas de derför? (utgående.) Hvad kallas åter ett hörn (något af rummets hörn), som är riktadt som detta? Utvisa några utgående, några ingående här i rummet!

C. Huru många hörn ligga vid hvarje yta? Huru många således i hela kroppen? Hvarför ej 24? (hvarje hörn hör till tre ytor.) Utvisa hörnen på denna ritning!

Axlarne.

Ytaxlarne. Hvad kallas den räta linie, som jag tänker mig dragen från midten af en yta till midten af en motstående? Genom hvilken punkt i figuren skall en axel gå? (genom medelpunkten.) Huru många ytor har denna figur? Huru många ytaxlar således? Utvisa mellan hvilka punkter dessa gå! Utvisa hvar de gå i detta rum! Hvilken ställning hafva dessa axlar till hvarandra? Hvilken riktning hafva de, jämförda med vattenytans ställning? Ställ kroppen så, att en af dessa axlar är vågrät och de andra sneda! Huru stora äro dessa axlar sins emellan?

Kant- och hörnaxlarne genomgås på samma sätt.

Kroppens namn.

Af huru många gränsytor är denna kropp omgifven? Af hurudan beskaffenhet äro dessa ytor? (plana.) Hvad kallas de? Hvad kallas en kropp, som begränsas af sex qvadrater?

* 53. ***Att beräkna rymden af en kub.***

Anm. För att gifva barnen ett klart begrepp om kroppens mätning, bör man hafva några kuber af en cm. sida och dermed låta dem uppmäta rymden af några små lådor e. d.; äfven skola de brukliga målkärlen förevisas och deras användande förklaras och tillämpas.

a) Då längdmåttet jämt innehålles i kubens kant.

För att åskådliggöra, huru detta tillgår, begagnar man en kub, hvars sida (kantlinie) jämt kan uppmätas i cm. Vi antaga att vi hafva en sådan kub, hvars sida är 10 cm. Man låter ett af barnen uppmäta kubens höjd och utsätta delningspunkterna; genom dessa dragas linier, parallela med basen; tänker man sig nu kuben efter dessa delningslinier sågad i skifvor, så erhåller man 10 sådana, hvardera 1 cm. tjock; skifvornas antal upptecknas på taflan. Derefter uppmätes skifvans ena kant och delningspunkterna utsättas derpå och genom dem dragas linier, vinkelräta mot kanten; tänker man sig nu skifvan efter dessa delningslinier sågad i prismer, blifver den delad i 10 sådana, hvardera 1 cm. hög och 1 cm. bred. Då kuben innehöll 10 skifvor och hvarje skifva 10 prismer, blifver i hela fig. 10 . 10 prismer. Uppmäter man nu prismans kant och tänker sig den afsågad i delningspunkterna vinkelrätt mot kantlinien, så får man af hvardera prisman 10 kuber, hvardera med en sida af 1 cm.; då prismernas antal var 10 . 10 och i hvarje prisma 10 kuber, så blifver de senares antal 10 . 10 . 10.

Man skall visa barnen hvarför på en kbm. gå 1000 kbdm., då en m. = 10 dm. o. s. v.

** *b*) Då längdmåttet ej jämt innehålles i kubens kant.

Låt kubens kant vara $3^2/_3 = {}^{11}/_3$ dm.; man finner då, enl. *a*), att på kubens bottenyta kunna stå 11 . 11 kuber med $^1/_3$ dm. sida; då kuben är $^{11}/_3$ dm. hög, kunna ur densamma tagas 11 skifvor, hvardera innehållande 11 . 11 kuber; hela kuben innehåller således 11 . 11 . 11 sådana kuber. På en kbm. gå 3 . 3 . 3 kuber med $^1/_3$ dm. sida (se *a*), hvadan således kuben inneh. $^{11}/_3 \cdot {}^{11}/_3 \cdot {}^{11}/_3 = 3^2/_3 \cdot 3^2/_3 \cdot 3^2/_3 = 3^2/_3{}^3$ hela kbdm. Den förut funna regeln gäller således äfven i detta fall.

Ex. En lår i form af en kub har en så lång kant (kantens längd utsättes på taflan eller golfvet); beräkna dess rymd! Vore kanten t. ex. 5,4 dm. tecknades detta sålunda 5,4 . 5,4 . 5,4 = X. Nu inläres att 5,4 . 5,4 . 5,4 läses »5,4 upphöjdt till kub», och att detta uttryck således betyder, att ett tal skall multipliceras 3 ggr med sig sjelft, samt att detta äfven kan tecknas $5{,}4^3$; med kubikroten återigen förstår man det med sig sjelft 3 ggr multiplicerade talet, således här 5,4.

Parallelipipeden.

54. ***Hvad som förstås med en parallelipiped.*** En rät parallelipided, en sned.

* 55. ***Att beräkna ytan af en parallelipiped.***

* 56. ***Att beräkna rymden af en rät parallelipiped*** (rät parallelipiped är den, som begränsas af rektanglar, hit hör räta fyrkantiga pelaren).

a) Då längdmåttet jämt innehålles i kanterna.

Huru detta tillgår åskådliggöres som i 53 probl. b.

** *b*) Då höjden, längden och bredden ej jämt innehålla längdmåttet. Låt höjden vara t. ex. $= 2^1/_2$ dm.; bredden $= 1^2/_3$ dm. och längden $= 3^3/_5$ dm.; göras dessa tal till oegentliga bråk och vidare liknämniga, så får man $^{75}/_{30}$, $^{50}/_{30}$, $^{108}/_{30}$, hvarefter man på samma sätt som vid kuben finner, att den i *a*) funna regeln gäller äfven för detta fall.

Ex. Beräkna rymden af denna låda, detta rum! Uträkna hemma rymden af en af din fars sädeslårar; af någon timmerstock; huru många tegelstenar af vanlig storlek gå i en så och så stor mur! o. s. v. Här kan man med lätthet finna otaliga exempel.

** 57. ***Att, då rymden af två af de tre storheternas längd, bredd och höjd äro gifna, genom beräkning finna den tredje.***

Då rymden enl. det föreg. kan anses som produkten af basen (basytan) och höjden, eller af en af sidoytorna och bredden, eller af den andra sidoytan och längden, så härledes förfaringssättet i detta fall på samma sätt som vid .

Ex. Denna låda rymmer så och så många kbdm.; uppmät längden och bredden och beräkna höjden! En låda göres så stor, att den med en höjd af 4,5 dm. och en längd af 8 dm. rymmer 216 kbdm., huru bred skall hon vara? o. s. v.

Rymden af en sned parallelipiped är = rymden af en rät, som har samma bas och höjd (jämf. 23).

Pelarne (prismerna).

58. ***Hvad som förstås med en pelare.*** En rät pelare; en sned pelare.

* 59. ***Att beräkna ytan af en pelare.***

** 60. ***Att beräkna rymden af de räta pelarne*** (räta pelare äro de, hvilkas grundytaxel är vinkelrät med basen).

Den fyrkantiga pelarens rymd är redan funnen. Hafva de tre-, fem- o. s. v. kantiga pelarnes bas lika stor yta som den fyrkantiga pel., så måste 1 dm:s tjock skifva af den ena hafva samma rymd som 1 dm:s tjock skifva af den andra och således, om höjderna äro lika (d. v. s. skifvornas antal lika stort i båda figurerna), så måste äfven deras rymder vara lika. En tre-, fem- o. s. v. kantig pelare är således lika i rymd med en fyrkantig, som har samma bas och höjd. Rymden af en tre-, fem- o. s. v. kantig pelare finnes således på samma sätt som rymden af den fyrkantiga, d. v. s. genom att uträkna dess yta samt multiplicera den med höjden.

Ex. Beräkna rymden af denna sexkantiga pelare! För att lära barnen beräkna rymden af ett hus, t. ex. en lada, lägger man den trekantiga pelaren på den fyrkantiga, så att dessa fig. tillsammans erhålla form af en dylik bygnad.

Spetspelarne (pyramiderna).

61. ***Hvad som förstås med en pyramid.*** Rät, sned pyramid.

** 62. ***Att beräkna rymden af räta spetspelarne.***

Man får säga barnen, att ur en pelare, som har samma bas som spetspelaren, kan man erhålla genom pelarens sönderdelning, tre lika stora spetspelare, hvarefter barnen lätt fatta, huru spetspelarnes rymd beräknas. För att åskådliggöra huru ett visst slag af fyrkantiga pelare kunna på ofvannämda sätt delas, låter man förfärdiga tre fullkomligt lika, räta spetspelare med qvadratisk bas och hälften så stor höjd som basytans gränslinier; två af dessa itusågas från spetsen så, att deras bas blifver delad i två rektanglar. Af dessa fyra halfvor och den hela spetspelaren kan nu en fyrkantig pelare bildas.

Ex. Beräkna rymden af denna spetspelare! En sädeshög upplägges på en qvadratformig bottenyta med 2,7 m. sida, ungefär i form af en pyramid, med 1,2 m. höjd, huru många hl. innehåller högen?

** 63. ***Att då rymden jämte basen eller höjden är gifven i en spetspelare genom beräkning finna den andra af dessa senare storheter.***

Detta tillgår som vid 57 och man gör barnen uppmärksamma på, att dividenden, eller den funna qvoten, skall multipliceras med 3.

Ex. En sten i pyramidform innehöll 35 kdm. och basen var en qvadrat med 5 dm. sida; huru hög var pyramiden? Rymden af en sned pyramid är = rymden af en rät, som har lika stor bas och höjd.

Valsen eller cylindern.

64. ***Hvad som förstås med en vals.*** Grundytan, sidoytan, axeln; rät vals, sned vals.

Huru en rät vals med cirkelformiga baser kan anses uppkomma (Genom en rektangels rörelse kring en sida).

För att visa ytans utbredning på en plan, klipper man af papper en rektangel lika hög som valsen och med en bas, så stor som valsens omkrets; denna lindas om valsen, då han jämt täcker hela sidoytan.

Läroprof. Om jag tänker mig sidoytan uppskuren sålunda och utbredd på ett plan (papperet aftages och utbredes på svarta taflan), hvad bildar hon då för figur? Utvisa här på valsen, hvar denna rektangels bas är! Hvar dess höjd finnes!

För att visa de ytors utseende o. s. v., som uppkomma, då valsen, käglan o. s. v. skäras af en plan yta, låter man itusåga de stereometriska fig. i den riktning, som man tänker sig, att ytan skär dem, och hopfäster dem genom pinnar, så att de lätt kunna söndertagas; i brist af så skurna fig. kan man af något löst ämne t. ex. en kålrot, en rofva, utskära valsen och käglan och under lektionen skära dem i de riktningar, man önskar o. s. v.

** 65. ***Beräkning af valsens ytor.***

Grundytorna äro ellipser eller cirklar. För att beräkna sidoytans storlek tänkes den, på sätt förut är nämdt, utbredd på ett plan, hvarefter hennes storlek beräknas som en rektangel.

** 66. ***Att beräkna rymden af en rät vals.***

Valsen kan anses som en pelare med ett mycket stort antal sidoytor, hvarför hans rymd beräknas som pelarens. Man göre barnen uppmärksamma på, att valsens bas ej alltid har form utaf en cirkel, utan stundom af en oval, såsom i åtskilliga kar.

Ex. Beräkna rymden af detta ämbar! Huru högt borde det vara för att rymma 5 liter mera, än det nu gör? Beräkna rymden af en af de kopparkittlar, I hafven der hemma! Af en balja med oval bas! Af en vält! Af trädstammen (denna måste naturligtvis vara jämtjock) derute, från marken till så och så många **dm.** höjd ofvan densamma!

På samma sätt som pelarnes och valsens rymder, beräknas äfven rymden af alla kroppar, der grundytorna äro sammanfallande och jämlöpande och sidoytan eller sidoytorna räta i en riktning.

Ex. Gafveln i en källare har denna form (en rektangel med ett cirkelsegment ofvan) och källaren är så lång; uppmät och beräkna källarens rymd efter denna skala!

** 67. ***Att då rymden jämte basen eller höjden i en valsformig kropp är gifven genom beräkning finna den andra af dessa senare storheter.***

Detta tillgår som vid 57.

Ex. Ett cylinderformigt målkärl skall göras och hafva en sålunda formad och så stor bas (en ellips uppritas); huru högt skall kärlet vara för att rymma en liter? Rymden af en sned cylinder är = rymden af en rät, som har lika stor bas och höjd.

Käglan (konen).

68. ***Hvad som förstås med en kägla.*** Grundyta, sidoyta, axel; rät och sned kägla.

Huru en rät kägla med cirkelformig bas kan anses uppkomma.

** 69. ***Beräkning af käglans ytor.*** Grundytan är en cirkel eller ellips.

Då grundytan är en cirkel och käglan är rät, bildar sidoytan, utbredd på ett plan, en cirkelsektor, hvars radie är höjden i käglans sida, och hvars båge utgöres af grundytans omkrets, och kan ytan således på denna grund beräknas. För att lära barnen fatta detta, utskäres af papper en cirkelsektor, som jämt täcker käglans sidoyta. Med denna sektor täckes först käglans yta, och derefter utbredes den på taflan, och gör man då barnen uppmärksamma på, hvilka linier i sektorn motsvara höjden i käglans sidoyta, samt att bågen motsvarar basytans omkrets.

** 70. ***Att beräkna rymden af en rät kägla.***

Då käglan kan anses som en spetspelare med ett mycket stort antal sidor, så beräknas käglans rymd på samma sätt som spetspelarens. Käglans bas har stundom form af en oval eller ellips; detta är nästan alltid fallet med den sneda käglan; rymden beräknas i detta fall liksom nu.

Ex. Beräkna rymden af denna tratt!

** 71. ***Att då rymden jämte basen eller höjden är gifven i en kägla, genom beräkning finna den andra af dessa senare storheter.***

Detta tillgår som vid 57.

Ex. En bleckslagare vill göra ett litermått i form af en kägla; huru stor höjd skall denna hafva, då basen skall vara en cirkel med cm. dm:s radie?

Rymden af en sned kägla är = rymden af en rät med lika bas och höjd.

Stympade spetspelarne, käglan och viggen

(vigg = kil).

** 72. ***Att beräkna rymden af den stympade spetspelaren, käglan och viggen.***

De kroppar, hvilkas grundytor äro parallela och af samma form, men olika storlek, äro antingen spetspelare, käglor eller viggar, hvilkas öfre del blifvit bortskuren. För att med noggrannhet erhålla dessa kroppars rymder, skulle man beräkna rymden af hela kroppen och sedan af den bortskurna delen och draga denna senare rymd från hela kroppens rymd. Men då beräkningen af höjden på denna ståndpunkt blefve barnen för svårfattlig, så får man närmevis beräkna rymden genom att tänka sig en pelare eller vals, hvars bas till storleken ligger midt emellan kroppens grundytor; en sådan storhet kallas det aritmetiska mediet mellan de båda andra. Denna yta multiplicerar jag med kroppens höjd. Ju mindre grundytorna skilja sig till storleken, ju mindre felaktigt blifver resultatet. Man hoplägger således de båda grundytornas storlek, dividerar summan med 2 och multiplicerar qvoten med höjden.

Ex. Hvad är rymden af trumman öfver ett par qvarnstenar, der grundytorna äro qvadrater med så stora sidor, och höjden så stor? (höjdens och sidornas storlek tecknas på taflan med linier, som sedan uppmätas). Huru mycket trä innehåller en rund timmerstock, som i storändan är 3 dm. och i lilländan 2,5 dm. i omkrets och har 7,5 dm:s längd? Mät rymden af kärran på gården! Rymden af en kolryss! o. s. v.

De regelbundna mångplaningarne.

** 73. ***Att beräkna rymden af en regelbunden mångplaning.***

Fyrplaningen: se trekantiga spetspelaren; sexplaningen: se kuben. För att beräkna rymden af de öfriga tänker man sig dem delade i så många lika stora spetspelare, som de hafva ytor; spetsarne för dessa kroppar ligga i mångplaningens medelpunkt. Man beräknar således rymden af en af dessa spetspelare och multiplicerar denna rymd med ytornas antal. För öfrigt torde beräkningen af dessa mera sällan förekomma i praktiken. Ex. Beräkna rymden af denna mångplaning!

Klotet.

74. ***Hvad som förstås med ett klot.*** Medelpunkt, radie, diameter, poler.

Klotets skärning med en plan yta: cirkel, storcirkel; halfklot, kalott, sferiskt segment (zon), sferisk sektor.

Klotets uppkomst: genom en halfcirkels (ex. gradskifvans) rörelse kring diametern.

** 75. ***Att beräkna ytan af ett klot.***

Här får man omtala, att klotets yta är 4 ggr större än storcirkelns; storcirkelns yta beräknas enl. 43, och multipliceras derefter med 4, då klotets yta erhålles.

Ex. Beräkna ytan af dettta klot! (För att finna klotets diameter lägger man det mellan tvänne plana ytor,

t. ex. bordets och ytan af en bok, hvarefter man mäter afståndet mellan dessa båda ytor.)

Huru stor är jordens yta, om dess diam. är 1200 mil?

Till ett kyrktorn skall af kopparplåt förfärdigas en kula med 7,5 dm. radie; huru stor plåtyta åtgår dertill?

** 76. ***Att beräkna rymden af ett klot.***

Klotet kan anses sammansatt af en stor mängd pyramider, hvilkas spetsar stå vid klotets medelpunkt, och hvilkas baser stå i klotets yta; om jag nu uträknade rymden på hvar och en af dessa pyramider och sedan sammanlade dessa rymder, så skulle jag erhålla klotets rymd. Men efter alla dessa pyramider hafva samma höjd, så kan jag sammanlägga alla dessa baser och sedan multiplicera med deras gemensamma höjd. Pyramidernas gemensamma baser äro, om klotets radie antages vara t. ex. 5 cm. $= 4 . 5 . 5 . 3{,}14$; pyramidernas gemensamma höjd är klotets radie, d. v. s. 5; deras sammanlagda rymd, eller klotets rymd, blifver således (enl. 62) $X = \frac{4 . 5 . 5 . 3{,}14 . 5}{3}$, eller $\frac{4 . 5 . 5 . 5 . 3{,}14}{3}$, hvilket äfven kan tecknas $\frac{4 . 5^3 . 3{,}14}{3}$, hvaraf regeln för beräkningen finnes.

Ex. Huru mycket jern åtgår till en kanonkula, hvars radie är så lång?

De oregelbundna kropparne.

** 77. ***Att beräkna rymden af de oregelbundna kropparne.***

För att beräkna en oregelbunden kropps rymd, indelar jag kroppen om möjligt är i flera kroppar med regelbundnare form, uträknar och sammanlägger dessa kroppars rymder. Detta förfaringssätt kan dock ej ofta användas. — Om kroppen är mindre, och kan utan att skadas nedsänkas i vatten, så erhåller jag dess rymd, om jag nedsätter den i ett kärl af regelbunden form och ser efter, huru högt vattnet genom nedsänkandet stiger. Äfven kan dess rymd bestämmas genom vägning, och huru detta tillgår visas, då i naturläran egentliga vigten genomgås. — Genom att omkring kroppen uppföra en brädställning i form af en pelare eller dylikt, och först beräkna denna pelares rymd, samt sedan fylla rummet mellan bräderna och kroppen med sand samt beräkna sandens rymd och afdraga den från pelarens, erhålles äfven rymden af den oregelbundna kroppen. — Vid jordschaktningar har vanligen den urschaktade gropen en regelbunden form, men skulle ej så vara, t. ex. då bottnen består af berg, så kan jag beräkna det urschaktade genom att uppmäta helst före arbetets början ytan af den plats, hvarifrån jorden skall bortföras, samt sedan arbetet är gjordt på flera ställen, på lika afstånd från hvarandra, djupet. Af dessa olika djup tages ett medeltal, som sedan multipliceras med ytan.

Ex. Beräkna rymden af denna sten genom att sänka den i vattnet! Lägg detta trästycke i denna låda och bestäm styckets rymd genom att sedan fylla lådan med sand! Ett jordstycke af denna form är uppschaktadt och de särskilda djupen äro så stora; beräkna den bortförda jordens rymd!

** V. Geometriska bevis.

78. ***Om två sidor AB och BC i en triangel ABC äro lika stora med hvar sin af två sidor DE och EF i en annan triangel DEF, och mellanliggande vinkeln ABC i den ena är lika stor med mellanliggande vinkeln DEF i den andra, så äro de båda trianglarne sammanfallande.***

Här äro två trianglar ABC och DEF gifna;

man vet att två sidor AB och BC i den ena = hvar sin af två sidor DE och EF i den andra och att mellanliggande vinkeln ABC i den ena = mellanliggande vinkeln DEF i den andra;

då skall på grund deraf bevisas, att de båda trianglarne ABC och DEF äro sammanfallande.

Ty om jag tänker mig triangeln ABC lagd på DEF, så att vinkelspetsen B faller på E och linien AB utefter DE, så måste punkten A falla på D, emedan AB = DE; BC måste falla på EF, emedan vinkeln ABC är = DEF, och punkten C på F, emedan BC är = EF; när nu A föll på D och C på F, så måste linien AC sammanfalla med DF, emedan båda äro räta, således sammanfalla trianglarne alldeles.

Läroprof. Hvad är gifvet i denna sats? Hvad veta vi om dessa trianglar? Hvad skall bevisas om dem? Om jag tänker mig triangeln ABC lagd på DEF, så att vinkeln B faller på C och linien BA utefter ED, hvar faller då punkten A? Hvarför faller ej punkten A på något annat ställe på ED såsom der? Hvar faller nu BC? Hvarför faller BC ej mellan ED och EF eller på andra sidan om EF? Hvar faller punkten C? Hvarför? När nu punkten A föll på punkten D och punkten C på F, hvar faller då AC? Hvarför ej sålunda? (i en båge under eller öfver.) Hvad hafva vi sålunda bevisat om dessa tringlar?

79. ***I en likbent triangel ABC äro vinklarne vid basen, BAC och BCA lika stora.***

Här är en triangel ABC gifven;
man vet, att den är likbent, d. v. s. att AB är = BC;
då skall på grund deraf bevisas, att vinklarne vid basen BAC och BCA äro lika stora.

Af alla linier, som kunna dragas från triangelns spets B, måste det finnas en, som skär vinkeln B midt i tu; låt det vara linien BD; jag har då två trianglar ABD och CBD, i hvilka två sidor AB och BD i den ena = med hvar sin af två sidor BC och BD i den andra; mellanliggande vinkeln ABD i den ena är ock = mellanliggande vinkeln CBD i den andra; då äro trianglarne (enl. 78) sammanfallande och således BAC = BCA.

80. ***Om alla tre sidorna AB, BC och CA i en triangel ABC äro lika med hvar sin af sidorna DE, EF och FD i en annan triangel DEF, så äro de båda trianglarne sammanfallande.***

Här äro två trianglar ABC och DEF gifna;
jag vet, att alla sidorna AB, BC och CA i den ena = hvar sin af sidorna DE, EF och FD i den andra; då skall på grund deraf bevisas, att trianglarne äro sammanfallande.

Ty om jag tänker mig triangeln DEF lagd på ABC, så att begynnelsepunkten D af den största sidan DF faller på begynnelsepunkten A af den med henne = sidan AB och vidare riktningen af dessa båda linier sammanfaller, så måste slutpunkterna F och C sammanfalla, emedan linierna äro lika långa. Vidare låter jag triangeln DEF falla under ABC, så att punkten E blifver densamma som G, och sammanbinder G med B. Då blifver triangeln DEF densamma som ACG.

Emedan då AB = AG, så är vinkeln ABG = AGB (enl. 79), och efter CB = CG, så är vinkeln CBG = CGB; sammanläggas då vinklarne ABG och GBC, så blifver deras summa ABC = summan af AGC af vinklarne AGB och CGB. Här har jag således två trianglar, der två sidor AB och BC och mellanliggande vinkel ABC i den ena = två sidor AG och GC och mellanliggande vinkel AGC i den andra; de båda trianglarne äro således sammanfallande (enl. 78). Men AGC är den samma som DEF, således är DEF sammanfallande med ABC.

81. ***Att skära en gifven rätlinig vinkel BAC midt i tu.***

Här är en rätlinig vinkel BAC gifven;
jag skall skära densamma midt i tu.

Jag tager A till medelpunkt och uppritar en cirkelbåge, som skär AB och AC; skärningspunkterna kallar jag D och E; dessa punkter tager jag till medelpunkter och uppritar med samma radie tvänne cirkelbågar, som skära hvarandra i en punkt, som jag kallar F; denna punkt sammanbindes med A och för bevisets skull med D och E.

I de båda trianglarne ADF och AEF är AD = AE, emedan de äro radier i samma cirkel. DF = EF, emedan de äro radier i lika stora cirklar, och AF är gemensam sida i trianglarne, hvarför dessa äro sammanfallande (enl. 80) och således vinkeln DAF = EAF, hvadan vinkeln DAE är skuren midt i tu.

82. ***Att skära en gifven, begränsad rät linie AB midt i tu.***

Här är en begränsad rät linie AB gifven;
jag skall skära densamma midt i tu.

Jag tager A och B till medelpunkter och uppritar två cirkelbågar, som skära hvarandra; skärningspunkten C sammanbindes med A och B; den uppkomna vinkeln ACB skäres midt i tu (enl. 81) genom linien CE.

I de båda trianglarne AEC och BEC är AC = BC, emedan de äro radier i lika stora cirklar; linien CE är gemensam i båda trianglarne, och vinkeln ACE är gjord = ECB (emedan ACB är skuren midt i tu). Derför blifva nu de två trianglarne sammanfallande, och AE = EB, hvadan AB är skuren midt i tu.

83. ***Att från en gifven punkt C på en rät linie AB draga en mot henne vinkelrät linie.***

Här äro en linie AB och en punkt C på henne gifna; jag skall från den gifna punkten C draga en vinkelrät linie mot AB.

Ligger den gifna punkten på liniens ändpunkt, så utdrages hon. Jag tager den gifna punkten till medelpunkt och uppritar å ömse sidor derom en cirkelbåge, som skär AB; skärningspunkterna, som jag kallar D och E, tager jag till nya medelpunkter och uppritar bågar, som skära hvarandra; bågarnes skärningspunkt F sammanbindes med D och E, och den uppkomna vinkeln DFE skäres midt i tu genom linien FH.

I de två trianglarne FDC och FEC är sidan CD = CE, emedan de äro radier i samma cirkel; DF är lika stor med EF, emedan de äro radier i lika stora cirklar, och FC är gemensam i båda trianglarne, hvadan således dessa äro sammanfallande (80) och vinkeln FCD = FCE, och hvardera af dem således en rät vinkel.

84. ***Att från en punkt C, utom en obegränsad rät linie, draga en mot henne vinkelrät linie.***

Här äro en obegränsad linie AB och en punkt C utom densamma gifna;

jag skall från den gifna punkten C draga en vinkelrät linie mot AB.

Jag tager den gifna punkten C till medelpunkt och uppritar en cirkelbåge, som skär AB — utdragen, om så behöfves — i två punkter, som jag kallar D och E; dessa punkter sammanbindas med C, och vinkeln DCE skäres midt i tu med linien CF.

I de båda trianglarne CDG och CEG är sidan CD

= CE, emedan de äro radier i samma cirkel; CG är gemensam för båda trianglarne, och vinkeln DCG = GCE, hvadan de båda trianglarne äro sammanfallande (78), och invkeln CGD = CGE, och hvardera af dem således en rät vinkel.

85. ***Att i en punkt A, vid en gifven rät linie AB, sätta en vinkel, som är lika stor med en gifven rätlinig vinkel DCE.***

Här äro en linie AB, en punkt på henne A, och en rätlinig vinkel DCE gifna;

jag skall i den gifna punkten A, mot linien AB, sätta en vinkel lika stor med DCE.

Jag tager C till medelpunkt och uppritar en cirkelbåge, som skär CD och CE; skärningspunkterna F och G sammanbindas med en linie FG; med samma radie som förut och A till medelpunkt uppritar jag en cirkelbåge HL; sedan tager jag en cirkelöppning så stor som FG och uppritar med denna till radie och H till medelpunkt en cirkelbåge; skärningspunkten K mellan den senare bågen och KL sammanbindes med A och H.

I de två trianglarne AKH och CFG äro alla sidorna i den ena lika med hvar sin sida i den andra triangeln, ty CF, CG, AK och AH äro radier i lika stora cirklar, liksom FG och HK; trianglarne äro således (80) sammanfallande, hvadan vinkeln FCG = KAH.