George A. W. Boehm · Den nya matematiken

Originalets titel: The New World of Math
Till svenska av Frank Hirschfeldt
Omslag av Hans Holst

Tryckindustri AB, Solna 1963

Innehåll

Inledning

Denna bok är avsedd att ge en uppfattning om några av de fascinerande arbetsuppgifter som matematikerna av i dag ägnar sig åt. De två inledande avsnitten har ursprungligen varit publicerade som artiklar i den amerikanska tidskriften *Fortune*, medan återstoden av innehållet är helt nyskrivet.[1]

I våra dagar är intresset för matematik större än någonsin. Men den tid då lekmän kunde göra betydelsefulla insatser inom matematiken är förmodligen förbi. Det matematiska tänkandet rör sig nu inom så höga sfärer och arbetsmetoderna är så invecklade att endast personer med särskild fallenhet och god specialutbildning kan skapa något nytt. Men nästan varje vaken och energisk människa kan fatta och njuta av de matematiska grundbegreppen.

Det är verkligen beklagligt att så få människor i dag erbjuds möjligheter att uppskatta matematiken. På något sätt har man tappat bort ämnet i den allmänbildande undervisningen, där det tidigare traditionellt hade en given plats. Platon betraktade matematiken som absolut oumbärlig för den bildade människan. Under medeltiden krävdes för inträde vid universiteten kunskaper i aritmetik, geometri, astronomi och musik. Och för inte så länge sedan fordrade man vid vissa universitet att matematik skulle ingå som ett ämne i den filosofiska lärokursen.

I dag tycks pedagogerna inte längre vara medvetna om att matematiken är en omistlig del av västerlandets kultur-

[1] Ett avsnitt om framtidens datamaskiner i det amerikanska originalet har måst uteslutas i den svenska upplagan, då det redan blivit inaktuellt på grund av den enormt snabba utvecklingen på detta område. Vissa partier som berör rent amerikanska förhållanden (undervisning m. m.) har också uteslutits vid översättningen. *Utg. anm.*

arv. När man i vår tid undervisar i renässansens konst, litteratur och filosofi, bortser man utan vidare från det inflytande som samtidigt utövades av den återuppväckta matematiska tanken. Det var till exempel vid denna tidpunkt som matematikerna började grubbla över hasardspelets natur och därvid utvecklade sannolikhetskalkylen, som sedermera har gjort det möjligt för fysiker, ekonomer, statistiker och sociologer att på ett rationellt sätt behandla de okända faktorer som bildar grundvalen för deras vetenskap. När matematik lärs ut, presenteras den huvudsakligen som en samling regler och operationer. Åt de ofta mycket enkla grundbegreppen ägnas ytterst liten uppmärksamhet. Om man bedrev undervisningen i konst på samma sätt, skulle den huvudsakligen handla om hur man hugger sten och blandar färg.

Matematiken har en given plats inom byggnadskonst, ingenjörskonst, statistik, ekonomi och naturvetenskap. Men det är också mödan värt att lära sig matematik för dess egen skull – helt enkelt för att få uppleva intellektuell spänning och stimulans.

Förmedlandet av matematiska tankegångar är ett problem till och med bland matematiker. Många framstående matematiker är bekymrade över det sätt att uttrycka matematiska tankegångar som blivit vanligt under de två senaste decennierna. Matematiska uppsatser är komprimerade till den gräns där alla intuitiva tankegångar har rensats ut. Resultatet blir, säger med beklagande en matematiker, att "de flesta uppsatser endast läses tre gånger – första gången av författaren, andra gången av utgivaren och tredje gången av recensenten".

En del matematiker fruktar idag att deras ämne skall urarta till att bli en ren övning i handhavandet av symboler. Och visst kan en finslipad symbolik ibland användas till att skyla över och försköna tämligen triviala tankegångar. "Less than meets the eye" – så brukar en ledande matematiker kommentera utseendemässigt imponerande men idéfattiga uppsatser. Medan denna matematiker endast är bekymrad över vissa uppsatsers torftighet, är en del av hans kolleger oroliga över sitt ämnes höggradiga abstraktion. Matematiken har alltid fått sin mest fruktbara inspiration från den fysiska världen, påpekar de, men idag arbetar de flesta skapande matematiker helt utan kontakt med den yttre verkligheten.

Symbolspråket är på både gott och ont. Det är svårt att föreställa sig hur moderna matematiska tankegångar över huvud taget skulle ha kunnat utvecklas utan det fulländat kompakta beteckningssystem som vi använder idag. Historiskt är det också ett faktum att förbättringar i beteckningssystemet alltid tätt följts av matematiska framsteg.

Med de talsystem som användes i antiken var det endast ett fåtal specialister som gick iland med elementära aritmetiska operationer. Egyptierna, till exempel, använde ett mycket ohanterligt decimalsystem, mera besläktat med det romerska än med vårt moderna talsystem. Enligt det egyptiska skrivsättet återgavs talet 1 med ett rakt streck. För talet 9 drogs nio sådana streck. Talet 10 betecknades med ett uppochnervänt U. För att kunna återge talet 99 fick man rita nio sådana U:n plus nio raka streck. Alla bråk hade talet 1 till täljare. 7/29 fick därför skrivas som summan av 1/6, 1/24, 1/58, 1/87 och 1/232. Det fanns mycket omfattande tabeller som visade hur man kunde återge bråk som summan av andra bråk. Babylonierna begagnade sig av ett ännu ohanterligare talsystem, som inte var ett decimalsystem utan baserade sig på talet 60 – det fanns alltså 60 olika siffersymboler. Men trots allt lyckades egyptierna på något sätt utveckla lantmäteri- och byggnadskonsten i hög grad, och babyloniska astronomer beräknade ett mycket exakt närmevärde på π.

Även grekerna, som lämnade så många värdefulla bidrag till matematiken, var handikappade av ett mycket svårhanterligt talsystem. Trots detta kunde pytagoréerna inse och bevisa att uttryck som $\sqrt{2}$ är irrationella (dvs. inte kan uttryckas som bråk), och Euklides visade att antalet primtal är oändligt. Arkimedes, som var född på Sicilien men av grekisk härkomst, uppfann och tillämpade till och med en primitiv form av integralkalkyl.

Grekerna var emellertid huvudsakligen intresserade av geometri. Det var under medeltiden som hinduerna utvecklade algebran, samtidigt som matematiken stagnerade i Europa och Egypten. Hinduerna hade till sin hjälp ett oerhört mycket bättre beteckningssystem. De uppfann de siffror vi numera kallar arabiska, men deras viktigaste bidrag var införandet av ett positionssystem. I stället för att återge talet 99 genom att nio gånger upprepa tecknen för talen 10 och 1, skrev hinduerna det på ett sätt som mycket liknar vårt skrivsätt. Det var också hinduerna som införde särskilda symboler för okända storheter.

Under renässansen började den sammansmältning av västerlandets geometri och österlandets algebra som slutgiltigt genomfördes i början av 1600-talet i Frankrike, där René Descartes skapade den analytiska geometrin, ett sätt att framställa geometriska figurer i form av algebraiska formler och vice versa. Ungefär vid samma tid fick den europeiska matematiken slutligen sitt moderna symbolspråk, med likhetstecken, särskilda beteckningar för kubikrötter och exponenter, användningen av alfabetets första bokstäver för bekanta storheter och bokstäver i slutet av alfabetet för obekanta. Ända till dess hade matematikerna endast kunnat uttrycka sina tankar i retorisk form – uttrycket $4x^5$ uttrycktes t. ex. som "kuben av en okänd kvantitet multiplicerad med dess kvadrat och talet 4". Då matematiska tankeprocesser är i hög grad symboliska, är det förvånansvärt att matematikerna förmådde tänka sammanhängande och följdriktigt trots att de saknade ett strömlinjeformat beteckningssystem. Det är tveksamt huruvida dagens matematiker skulle kunna göra några nämnvärda framsteg utan sitt symboliska "stenografisystem".

Tillsammans täcker de olika delarna i föreliggande bok det mesta av den moderna matematiken. För dem som vill skaffa sig djupare kunskaper i dessa ämnen kan bl. a. följande böcker rekommenderas:

What Is Mathematics? av Richard Courant och Herbert Robbins, New York 1941. Två ledande matematiker diskuterar utförligt många av matematikens viktigaste tankegångar och metoder.

Matematiken och fantasien av Edward Kasner och James R. Newman, Stockholm 1942. En klar och ofta underhållande beskrivning av ett antal viktiga begrepp.

Prelude to Mathematics av W. W. Sawyer (en Penguinbok). Denne ovanligt begåvade popularisator ger här några aspekter på sådana problem inom algebran och geometrin som han finner särskilt spännande.

Introduction to Finite Mathematics av John G. Kemeny, J. Laurie Snell och Gerald L. Thompson, Prentice Hall. De tre författarna, som är verksamma vid matematiska institutionen vid Dartmouth College presenterar verkligt moderna aspekter på matematiken i denna mycket läsvärda kursbok.

An Introduction to Probability and its Applications av William Feller, John Wiley & Sons. En mycket välskriven kursbok för universitetsstadiet, som är svår att följa för den matematiskt otränade, men väl värd att läsas av dem som inte är rädda för algebraiska symboler.

SIGMA (6 band) redigerad av James R. Newman, Stockholm 1960. En bestseller som ger en översikt över matematiken från Rhindpapyrusen till Einstein. Även om en del artiklar är mycket teoretiska gör Newmans kommentarer och den redaktionella notapparaten verket väl värt sitt pris.

How to Solve It av George Pólya, New Yersey, 1945. En framstående matematiker talar om hur han löser problem och föreslår olika sätt på vilka läsaren kan göra det. Valda delar av denna bok ingår i ovannämnda verk *SIGMA*.

A Mathematician's Apology av G. H. Hardy, Cambridge University Press 1941. En djupsinnig betraktelse av en av världens stora matematiker, där han beskriver hur och varför män som han skapar nya matematiska tankegångar. Ett utdrag ur denna bok ingår i *SIGMA*.

Den nya matematiken

Den vetenskap som idag befinner sig i den snabbaste utvecklingen och undergår den mest radikala förändringen är matematiken. Den är den enda lärdomsgren vars huvudteser är mer än tvåtusen år gamla och ändå fortfarande äger giltighet, och trots detta har tillflödet av helt nya idéer och tankar aldrig varit större än i vår tid. Nya grenar inom matematiken, t. ex. spelteorin, har resulterat i anmärkningsvärda insikter rörande mänskliga förhållanden som aldrig tidigare varit föremål för exakt vetenskaplig analys. Äldre grenar som sannolikhetsteorien tillämpas numera på så nya områden som trafiktäthet och teleteknik. Och rymdfarten har tvingat matematikerna att skapa en ny navigationsteknik, vida mera komplicerad än den som nu tillämpas på sjöfart och flygtrafik.

Men det är inte på matematikens praktiska tillämpningsområde som de största förändringarna sker. Just nu, när människorna mer och mer har upptäckt matematikens praktiska användbarhet, håller de ledande teoretiska matematikerna på att föra den rena matematiken allt längre bort från den fysiska verkligheten. Matematikerna har alltid haft en viss förkärlek för abstraktioner och föredragit vetenskaplig skönhet framför praktisk användbarhet. Dagens matematiker har dock lyckats uppnå höjder av abstraktion som deras förfäder inte ens vågat drömma om. En del geometriska tankegångar tillämpar de på ett oändligt antal dimensioner, andra geometriska tillämpningar förlägger de till områden där begreppet storlek inte längre har någon mening. De utvecklar en algebra där aritmetikens lagar inte längre gäller. De konstruerar abstrakta universalmodeller där de sammanbinder så vitt skilda begrepp som tal, rum, rörelse och algebraiska formler.

Allt detta kan mycket väl vara början till ett av historiens mest spännande intellektuella äventyr. Det kan dröja länge, men matematiska rön av det mest abstrakta slag – som i förstone tyckts onyttiga eller till och med kuriösa – har i det förflutna gett upphov till nya teorier inom de övriga naturvetenskaperna. År 1854 skapade t. ex. den tyske vetenskapsmannen Bernhard Riemann en icke-euklidisk geometri. Den fick vila i den rena matematikens elfenbenstorn ända till ett halvt århundrade senare, då Albert Einstein använde den som utgångspunkt för relativitetsteorin och sedan på denna byggde upp hela den moderna fysiken. De abstraktioner som matematikerna skapar idag kommer – kanske inte förrän om många år – med största sannolikhet att öppna vägen för nya teorier av samma räckvidd som relativitetsteorin, och kanske blir resultatet till och med helt nya vetenskapsgrenar.

För de forskare som ägnar sig åt den rena matematiken är matematiken nästan som ett spel. De förlitar sig inte längre på intuitionen, som bygger på erfarenheter om den fysiska verkligheten. I stället skapar de sin egen värld med hjälp av axiom. Till skillnad från Euklides axiom, som härleddes ur observationer och antogs vara ”självklara sanningar”, är den moderna matematikens axiom abstrakta antaganden. I inskränkt betydelse är de inte mer ”sanna” än schackspelets regler. Men de är ingalunda helt godtyckliga. Även om de rena matematikerna har flyttat sina abstraktioner bortom den fysiska verklighetens råmärken, måste de erkänna existensen av en matematisk ”verklighet” – ett slags platonskt ideal som höjer matematiken över det enkla spelets nivå – och en skicklig matematiker väljer sina axiom så att de skall avslöja egenskaperna hos denna speciella verklighet. Trots detta kan matematikerna aldrig vara helt säkra på att deras skapelser är logiskt perfekta. Ty det ligger utanför matematikens makt att klargöra sitt eget väsen.

Många av grundbegreppen är av naturen enkla, så enkla att till och med ett barn kan förstå dem. Flera av den moderna matematikens svåraste problem bygger på teorin för oändliga mängder, dvs. samlingar av ett oändligt antal föremål, t. ex. alla punkter på en linje eller alla tänkbara hela tal. Ändå brukade den nu avlidne kände amerikanske matematikern Edward Kasner undervisa småskolebarn om oändliga mängder. Han fann att barnen mycket lätt kunde göra sig förtrogna med oändlighetsbegreppet och fattade mängdteorins mycket fundamentala begrepp lättare än en del av hans studenter vid universitetet gjorde. Barn förefaller av naturen vara mottagliga för matematiska abstraktioner, kanske därför att dessa vädjar till den rena fantasin. (Det är kanske betecknande att en av de populäraste barnböcker som finns, *Alice i underlandet,* skrivits av en yrkesmatematiker, Charles L. Dodgson, vars pseudonym var Lewis Carroll).

Tankarnas elegans

En av de finaste komplimanger en matematiker kan ge en annan matematikers arbete är att kalla det ”elegant”; ty om det är någonting som placerar den moderna matematiken i en klass för sig, så är det de estetiska krav som matematikerna ställer på sitt arbete. Elegant matematik är lika svår att definiera som en vacker flicka. Professor George Pólya vid Stanford University har dock åstadkommit en definition på matematisk elegans som accepteras av många matematiker. Enligt hans åsikt är ett teorems elegans ”direkt proportionell mot det antal tankegångar som man kan upptäcka i det och omvänt proportionell mot den ansträngning som man får lägga ner för att upptäcka dem”.

En mycket framstående engelsk matematiker, G. H. Hardy, har behandlat detta ämne mera ingående i en liten bok som han kallade *A Mathematician's Apology* (En matematikers försvarstal). Han skrev: "Det mönster matematikern skapar måste lika väl som målarens eller poetens vara *vackert;* idéerna liksom färgerna och orden måste passa ihop på ett harmoniskt sätt. Skönhet är det första kriteriet: det finns ingen varaktig plats i världen för oskön matematik." Hardy uppfattade också en funktionell kvalitet i den matematiska skönheten. En elegant matematisk tankegång kan i motsats till ett korsord eller ett schackproblem inte vara en intellektuell blindtarm; den måste länka ihop andra matematiska tankegångar och på så sätt berika matematiken.

En av Amerikas mest framstående matematiker, Marston Morse vid Institute of Advanced Study, går ännu ett steg längre. "Det första betydelsefulla bandet mellan matematiken och konsten", säger han, "finner man däri att det matematiska upptäckandet inte är en fråga om logik. Det är snarare ett resultat av mystiska krafter som ingen förstår och i vilka det omedvetna uppfattandet av skönheten måste spela en betydelsefull roll. Ur den oändliga mängden av samband väljer matematikern ett för dess skönhets skull och för det ned till jorden."

Den rene matematikerns högt utvecklade estetiska sinne tycks göra honom särskilt begåvad inom en av de sköna konsterna: musiken. Ett icke ringa antal matematiker är utomordentliga musiker, och på många platser där yrkesmatematiker samlas har man organiserat kammarmusikensembler, ibland till och med hela orkestrar. I musiken, som av allt att döma är den mest abstrakta av de sköna konsterna, finner matematikerna en klar återspegling av många av sina egna begrepp. Det är även möjligt för dem att matematiskt analysera de stilistiska särdrag som utmärker varje kompositör. Man har faktiskt lyckats programmera en datamaskin så att den kunnat komponera musik i Bachs stil.

Många matematiker är roade av schack, bridge, eller det japanska Go-spelet, även om endast ett fåtal matematiker speciellt utmärkt sig på dessa områden (två tidigare schack-världsmästare, Emanuel Lasker och Max Euwe, samt två av Amerikas främsta bridgespelare har dock varit matematiker till yrket).

En del matematiker har en speciell förmåga till visuellt tänkande och egenskapen att kunna utföra snabba överslagsberäkningar. Några har en intuitiv känsla för samband, t. ex. för sambandet mellan ett femdimensionellt föremål och det sjudimensionella rum som omger det. Och den framstående matematikern John von Neumann brukade förbluffa andra matematiker med sin förmåga att snabbt lösa långa och komplicerade problem i huvudet. I regel kan man dock säga att matematiker i allmänhet inte kan uppfatta formen av vanliga fysiska föremål lika bra som ingenjörer och mekaniker och inte heller kan utföra aritmetiska beräkningar lika snabbt som bokhållare och revisorer.

Ett gemensamt kännetecken för många skapande matematiker är att deras skaparkraft står på höjdpunkten redan i deras tidiga ungdom. Isaac Newton sade exempelvis att han befann sig på toppen av sin matematiska skaparförmåga vid tjugotre till tjugofyra års ålder. De flesta stora matematiker har gjort sina mest betydelsefulla insatser när de varit trettio à fyrtio år gamla. Efter femtioårsåldern har de i allmänhet ägnat sig åt undervisning, filosofiska insatser eller åt att tillämpa sitt matematiska vetande på andra områden.

Men det mest karakteristiska för en matematiker är kanske att han vill utföra sitt arbete ensam. Teamwork utövar ingen större lockelse på honom. Relativt få matematisk-vetenskapliga arbeten har mer än en författare, och praktiskt taget inget har mer än två. Inte heller är matematikerna i behov av någon större utrustning vid sidan om ett eget arbetsrum, ett referensbibliotek och papper och penna. Medan fysiker och kemister är bundna till sina instrument och apparater har matematikern en större rörelsefrihet. Han rör sig en hel del – betydligt mer än vetenskapsmän på andra områden. För en matematiker hör det inte till ovanligheten att åka halva jorden runt för att utbyta tankar med andra matematiker.

Men bäst av allt trivs framstående matematiker i kretsen av sina lärjungar. Det mesta av den bästa rena matematiken åstadkommes på ett fåtal platser där framstående matematiker har dragit till sig andra goda matematiker och de bästa studenterna. Exakt vilka platser som är de mest framstående kan säkerligen diskuteras, men varje förteckning torde uppta sådana platser som Harvard- och Princetonuniversiteten och det kända Institute for Advanced Study vid Princeton samt universiteten i Leningrad, Moskva och Paris.

Intressanta frågeställningar

Bland yrkesmatematiker anser man det nästan lika viktigt att kunna ställa frågor som att besvara dem. Matematiken vimlar av problem som har förblivit olösta under decennier eller till och med under århundraden och trots detta har bidragit till uppkomsten av helt nya vetenskapsgrenar. Matematikerna har exempelvis i hög grad utvecklat den moderna talteorin som en följd av försök att verifiera en gissning av den i övrigt synnerligen obetydlige tyske amatörmatematikern Goldbach. Denne påstod år 1742 att varje jämnt tal större än 2 utgör summan av två primtal (ett primtal är ett tal som inte är jämnt delbart med något annat helt tal utom talet 1). Så till exempel är $8=3+5$, $26=13+13$ och $62=3+59$. Ingen har ännu lyckats matematiskt bevisa Goldbachs påstående men å andra sidan har heller ingen funnit något undantag som motbevisar det. Problemet har emellertid reducerats. År 1931 bevisade den ryske matematikern Schnirelmann att varje positivt tal utgör summan av högst 300 000 primtal. År 1937 bevisade en annan ryss, I. M. Vinogradov, att varje *tillräckligt stort* udda tal utgör summan av tre udda primtal. Men vad menas med *tillräckligt stort?* Numera vet man emellertid att *tillräckligt stort* betyder ett minst 350 000-siffrigt tal – ett tal som skulle fylla ca 20 sidor i en ordinär telefonkatalog. Där befinner sig frågan tills vidare.

Den största insatsen i fråga om framläggandet av problem kan sägas ha utförts av den tyske matematikern David Hilbert (1862–1943). Kring sekelskiftet formulerade han inte mindre än tjugotre problem som han uppfordrade sina matematikerkolleger att lösa under det nya århundradet. Under lång tid använde man antalet lösta Hilbertproblem som en måttstock för matematikens utveckling. De flesta är nu lösta, men så sent som år 1952 väckte det hänförelse när Hilberts femte problem löstes av tre amerikanska matematiker: A. Gleason, D. Montgomery och L. Zippin. Och för några år sedan publicerade en ledande rysk matematiker, A. N. Kolmogorov, lösningen till Hilberts trettonde problem. (Liksom de flesta av Hilberts problem är det femte och trettonde av höggradigt teknisk natur.)

Förmågan att formulera värdefulla problem sammanhänger intimt med något slags fritt gissande, som matematikerna begagnar sig av för att utveckla matematiken. Matematik i vardande är, som Pólya påpekar, inte någon deduktiv vetenskap. Den är en induktiv, experimentell vetenskap, och gissningen är matematikerns verktyg. Matematikerna liksom andra vetenskapsmän formulerar sina teorier genom intuition, analogier och enkla exempel. De utarbetar sin rigoröst noggranna bevisföring först när de redan är i det närmaste övertygade om att vad de försöker bevisa verkligen också är rätt.

Pólya hävdar att framkastandet av skarpsinniga gissningar kan och bör läras ut. Han har författat tre böcker i ämnet, däribland en spännande pocketbok med titeln *How to Solve It* (New Yersey 1945). Konsten att gissa har sina egna logiska lagar, säger han, och bland de exempel han lämnar är följande:

Om A implicerar B,
och om B är helt sannolikt i sig självt,
och om B visar sig vara sant,
då blir A en liten aning trovärdigare.

Om A implicerar B,
och om B är mycket osannolikt i sig självt,
och om, detta oaktat, B visar sig vara sant,
då blir A mycket mera trovärdigt.

Ett sådant resonemang är tydligt underlägset ett ovederläggligt bevis, men det kan leda matematikern fram till en tankegång som är värd att prövas.

Ett matematiskt *bevis* fordrar emellertid en helt annan typ av resonemang. När en matematiker har kommit så långt i sina undersökningar att han börjar skriva ner resultatet, lägger han sin skarpsinniga intuition, sina belysande analogier och övriga undersökningsinstrument åt sidan och håller sig uteslutande inom den logiska deduktionens skrankor. I det formella beviset kan han inte lämna någonting åt fantasin. Han måste ta till hela sin uppsättning av nödvändiga definitioner och axiom och obevekligt mala fram en slutsats utan att göra ytterligare antaganden.

Strängt taget kan den noggranne matematikern inte säga: "Detta och detta är sant." I stället måste han uttrycka sig på följande sätt: "Om A är sant, så är också B sant." Och han måste därutöver inse att sanningen i hans påståenden endast står i förhållande till matematiken och därför inte kan göra anspråk på ett direkt samband med den fysiska världen. Det var denna formalism som föranledde Bertrand Russell att definiera matematiken såsom ”den vetenskap i vilken vi aldrig vet vad vi talar om och inte heller huruvida det vi säger är sant”.[1]

Monsieur Bourbaki

Den mest ambitiösa riktningen inom den matematiska formalismen hade sitt upphov i ett skämt och kan fortfarande sägas innehålla skämtsamma element. Den representeras av de skrifter som utgavs av en helt och hållet uppdiktad fransman, Nicolas Bourbaki, och utgör kanske det enda teamwork i stor skala som genomförts inom den moderna matematiken. Till dags dato har Monsieur Bourbaki publicerat omkring 20 band omfattande sammanlagt över 3 000 sidor.

Bourbaki föddes för några årtionden sedan som ett bisarrt hjärnfoster i kretsen av unga franska matematiker kring André Weil, en av världens största nu levande matematiker. Han började sin verksamhet med att sända små notiser till olika facktidskrifter. Slutligen förelade han sig omkring 1940 en synnerligen imponerande uppgift: att utarbeta en fullständig och strängt logisk framställning av hela matematiken.

Bourbaki är excentriker. Han använder ett egenhändigt konstruerat, mycket egendomligt beteckningssystem; när hans resonemang kommer på avvägar varnar han sina läsare till exempel genom att i marginalen dra en sicksacklinje som liknar ett franskt trafikmärke.

Bourbakis andlige fader Weil har nyligen tagit sin hand ifrån honom (dock inte från matematiken) i samband med sin 50-årsdag. Bourbaki har dock inte minsta tanke på att

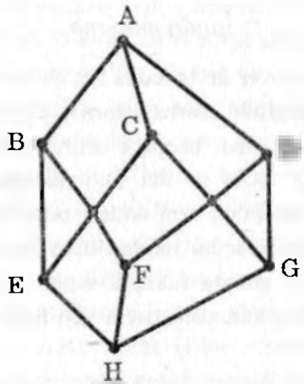
[1] Ur Bertrand Russell, *Mystik och logik*, Stockholm 1954
Övers. anm.

dra sig tillbaka på ett tag ännu. Förmodligen kommer han att leva vidare ung och aktiv för evigt, eller åtminstone så länge som matematikerna fortsätter att skapa nya begrepp och metoder. Några anhängare är av den åsikten att Bourbakis häpnadsväckande framställning (helt anspråkslöst kallad *Matematikens element)* skulle behöva komma ut regelbundet i omarbetade utgåvor. De första banden, säger de, är redan föråldrade – så fort har matematiken utvecklats under de allra senaste åren.

Bourbaki angriper matematiken extremt metodiskt, men även matematiker i allmänhet uttrycker sig med största försiktighet – och det med all rätt. Plausibla men obevisade antaganden har under gångna tider lett till uppkomsten av alltför många paradoxer. Några av förra århundradets stora matematiker råkade i allvarliga svårigheter när de antog att det i vissa oändliga serier fanns något största eller minsta element. Det förhåller sig inte så. Följande exempel är så enkelt att det inte skulle kunna föra en matematiker på avvägar, men det illustrerar ändå hur logiskt invecklade oändliga mängder kan vara. Det finns ett oändligt antal allmänna bråk, men det finns inget minsta bråk. Till ett givet bråk (t. ex. 1/999 999) är det alltid möjligt att finna ett ännu mindre bråk helt enkelt genom att man adderar talet 1 till nämnaren (vilket i detta fall ger 1/1 000 000).

De oändliga mängdernas matematiska natur strider ofta mot sunda förnuftet. Ett av de mest uppseendeväckande exemplen härpå gavs för omkring tjugofem år sedan av två polska matematiker, Stefan Banach och Alfred Tarski (den senare numera verksam i USA vid University of California). De visade hur ett klot av en ärtas storlek teoretiskt skulle kunna delas i ett ändligt antal delar och därefter sättas ihop till ett klot av solens storlek.

För att kunna utstaka en säker kurs mellan oändlighetsbegreppets farliga blindskär fick matematikerna uppfinna nya diskussionsverktyg. Ett av de mest användbara är känt under olika former och olika namn, däribland *urvalsaxiomet* och *Zorns lemma*. Det behandlar vad matematikerna kallar "delvis ordnade mängder". Som ett enkelt åskådningsexempel kan man tänka sig ordergivningskedjan i amerikanska armén. En "beordrad" (dvs. obruten) auktoritetslinje sträcker sig nedåt från presidenten till en regementschef och slutligen till den menige i dennes regemente. Men det finns ingen direkt auktoritetslinje mellan låt oss säga två löjtnanter i olika regementen. En mer komplicerad delvis ordnad mängd visas i nedanstående figur.



En given punkt definieras här såsom större än varje annan punkt med vilken den är förbunden genom nedåtriktade linjer. (Linjernas längder saknar betydelse.) Sålunda är punkten A större än alla de övriga; B är större än E; C är större än G; och alla andra punkter är större än H. Men figuren utsäger ingenting som helst om sambandet mellan B, C och D eller mellan E, F och G.

Zorns lemma säger att varje delvis ordnad mängd innehåller en maximal fullständigt ordnad mängd, dvs. tillämpat på vårt tidigare exempel en direkt ordergivningskedja som inte utgör del av någon annan ordergivningskedja i hela mängden. En största kedja kan lätt plockas ut ur mängden i figuren – A, C, F, H till exempel. Men i mängder som består av tusentals punkter, eller till och med av ett oändligt antal, är det mänskligt att döma omöjligt att finna en största fullständigt ordnad delmängd. Tack vare Zorns lemma vet matematikern att han med säkerhet kan anta att det finns en största fullständigt ordnad delmängd i varje delvis ordnad mängd han påträffar. Och han kan tryggt fortsätta sin bevisföring med detta antagande som utgångspunkt, vad han än försöker bevisa.

Intuitionisterna

Inte alla matematiker är beredda att gå med på att mängdteorin, som innefattar Zorns lemma, äger logisk giltighet. Det finns en liten men benhårt orubblig minoritet, kallad "intuitionisterna", som ur det matematiska tänkandet vill utesluta alla påståenden som endast talar om existensen av ett tal, en formel eller en mängd utan att specificera dem. Om det finns en största mängd, säger de, påvisa den då, eller visa hur man kan konstruera den med ett ändligt antal steg.

Intuitionisterna vägrar också att acceptera den indirekta bevismetoden. Med denna traditionella metod kan en matematiker som vill bevisa att ett teorem är sant först anta att det är falskt. Sedan fortsätter han med att påvisa en absurd motsägelse och drar därav slutsatsen att teoremet måste vara sant. Indirekta bevis, påpekar intuitionisterna, vilar på Aristoteles' lag om "det uteslutna tredje" som innebär att påståenden logiskt sett endast är absolut sanna eller absolut falska och aldrig någonting däremellan. Och denna sats kan ibland ge upphov till logiska läckor, när den tillämpas på oändliga mängder.

Strax efter sekelskiftet försökte den tyske matematikern David Hilbert stötta upp den matematiska logikens grundvalar. Från en utgångspunkt som var motsatt intuitionisternas försökte han rädda det klassiska resonemanget genom att definiera matematiken som ett spel som spelas på grundval av vissa klart utsagda regler (eller axiom) med meningslösa symboler. Hans mål var att göra matematiken till en sluten enhet, konsekvent till sitt inre sammanhang; ett slag föreföll han att ha uppnått sitt mål.

År 1931 sköts emellertid plötsligt hela Hilberts logiska resonemang i sank. En ung österrikisk logiker, Kurt Gödel, (numera verksam i USA) visade att det inte fanns något hopp om att matematiken skulle kunna göras helt perfekt till sin inre struktur. Genom en mycket lång och oantastlig resonemangskedja analyserade Gödel alla möjliga formella logiska system med vilkas hjälp matematiken kunde definieras. Han visade att varje system som var tillräckligt omfattande för att innehålla en definition av de hela talen, oundvikligen måste lida av två brister. Först och främst skulle ett sådant system inte kunna härleda samtliga elementära och intuitivt uppenbara aritmetiska teorem. Och vad värre är, det kan inte enligt den stränga logikens lagar bevisa sin egen motsägelsefrihet. Kort sagt, Hilberts system hade torpederats. Men det bör också framhållas att Hilbert själv var en av de första som insåg att Gödels bevis inte kunde vederläggas. Hilbert uppgav sitt räddningsförsök och betecknade det som ett fiasko.

Men trots att Hilberts stora ansträngningar ledde till intet står han som segrare i den matematisk-logiska konflikten. De flesta matematiker är idag beredda att acceptera hans sätt att angripa problemställningen, även om de är fullt medvetna om att det är riskfyllt. Professor Andrew Gleason vid Harvard förklarar detta ställningstagande: "Om man intar intuitionisternas ståndpunkt är man på den säkra sidan. Men med deras starkt restriktiva sätt att resonera kan man knappast bevisa någonting. Vi vill göra framsteg, så vi fortsätter att använda oss av den gamla osäkra logiken. Än så länge har vi inte stött på någon mera betydelsefull paradox, även om vi inte kan vara säkra på att vi inte en vacker dag kommer att göra det. Banach-Tarski-upptäckten är ingen verklig paradox. Den är ingen logisk motsägelse, den visar endast att vi inte kan ha ett fullständigt generellt volymsbegrepp. Men skulle vi stöta på en paradox kan vi förmodligen rädda den matematiska lärobyggnaden genom att lappa ihop den."

Algebra utan gränser

Hilberts metod med fristående axiom genomsyrar numera hela matematiken. Särskilt inom algebran har detta för matematikerna medfört en frihet som de aldrig tidigare kunnat glädja sig åt.

Algebraikerna begränsade sig tidigare till vad de kunde iaktta rörande ordinära tal. Hinduerna utformade algebrans grundbegrepp på grundval av de rationella talens aritmetik – dvs. på hela tal och bråk. Som tur var fordrades ingen ändring av reglerna för de följande två taltyper som man började intressera sig för inom matematiken. Först kom de irrationella talen, sådana som $\sqrt{3}$ eller $\sqrt{7}$, som inte kan sägas vara exakt identiska med några bråktal även om man kan approximera dem med hjälp av bråk. (Tillsammans bildar de rationella och de irrationella talen vad vi kallar de *reella* talen.)

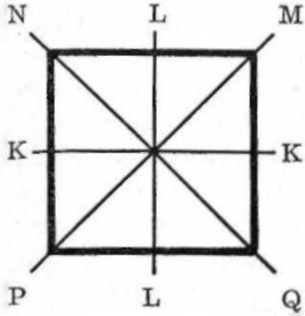
Därefter följde det imaginära talet $\sqrt{-1}$. Det är inte ens approximativt lika med något reellt tal därför att ett reellt tals kvadrat inte kan bli ett negativt tal. Ändå kunde det imaginära talet $\sqrt{-1}$, som vanligen betecknas med bokstaven i, friktionsfritt inordnas i de reella talens aritmetik. Genom addition, subtraktion, multiplikation och division kombineras det med reella tal och bilder på så sätt komplexa tal, till exempelvis $3i$, $7-\frac{1}{4}i$, $1\frac{1}{2}+\sqrt{3i}$. Och komplexa tal av dessa slag kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras enligt de regler som gäller för reella tal.

Att ändra på reglerna

Inte förrän på 1800-talet började matematikerna sysselsätta sig med tal som inte följde de gamla vanliga aritmetiska reglerna. Idag närmar sig algebraikerna sitt ämne från den motsatta sidan. De börjar med reglerna och modifierar dem, ofta godtyckligt, för att skapa nya algebraiska system som inte är tillämpliga på reella eller komplexa tal. Teoretiskt finns det ett obegränsat antal sådana system. Det har emellertid bevisats att inga tal "bortom" de komplexa talen (bestående av en reell och en imaginär del) kommer att följa alla de gamla reglerna.

Varje skolbarn som får till uppgift att multiplicera ihop flera tal upptäcker förr eller senare att det inte spelar någon roll i vilken ordning multiplikationerna utförs. Detta spelar däremot en mycket stor roll när det gäller en del taltyper bortom de komplexa talen. De vanligaste bland dessa är kvaternionerna, som består av en reell del och tre olika imaginära. Trots att kvaternionerna fungerar ungefär som vanliga tal är de inte vanliga tal, eftersom de inte lyder den kommutativa lagen, som säger att $a \cdot b = b \cdot a$ (eller $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$). När man kommer fram till cayleytalen (en reell del och sju imaginära) äger en ännu mer drastisk förändring rum: den associativa multiplikationslagen är

GRUPPBEGREPPET



I (identitetselement) kvadraten flyttas ej
A vrid kvadraten 90° moturs
B vrid kvadraten 180° moturs
C vrid kvadraten 270° moturs
D vänd kvadraten 180° kring axeln K–K
E vänd kvadraten 180° kring axeln L–L
F vänd kvadraten 180° kring axeln M–P
G vänd kvadraten 180° kring axeln N–Q

Den moderna matematikens kanske mest mångsidiga abstraktion är det algebraiska gruppbegreppet. En grupp hjälper till att knyta samman matematikens många grenar, ty begreppet grupp är så konstruerat att det kan tillämpas likartat på många olika ting: antal, rum, tid, rörelse, relationer. Som många användbara matematiska abstraktioner är grupper mycket enkla till sin principiella uppbyggnad och mycket komplicerade till sin tillämpning.

En grupp kan åskådliggöras av en tabell som i mycket liknar en multiplikationstabell. En sådan grupptabell består av ett antal element (i tabellerna på s. 29 representerade av bokstäver) och en regel för kombinerandet av dessa element. Figuren och de första två tabellerna illustrerar en förhållandevis enkel grupp av operationer. En kvadrat omflyttas utan att dess yttre konturer ändras, även om man låter de olika hörnen byta plats. Man kan föreställa sig kvadraten som en på papperet vilande pappskiva. Operationerna motsvarar ett på olika sätt företaget utbyte av bokstäverna i de olika hörnen. Den kommutativa lagen kan inte tillämpas för denna grupp, dvs. det är inte betydelselöst i vilken ordningsföljd operationerna

inte längre sann. Dvs. om *a*, *b* och *c* är tre cayleytal, erhåller man ett resultat om man först multiplicerar *a* med *b* och därefter multiplicerar resultatet med c, och ett helt annat om man först multiplicerar *b* med *c* och sedan multiplicerar *a* med resultatet.

Ett annat enkelt aritmetiskt faktum är att produkten av två tal kan bli noll endast om åtminstone ett av talen är noll. Denna regel gäller också för kvaternioner och cayleytal men inte för andra tal. Det finns alltså inget entydigt sätt att di-

	I	A	B	C	D	E	F	G
I	I	A	B	C	D	E	F	G
A	A	B	C	I	G	F	D	E
B	B	C	I	A	E	D	G	F
C	C	I	A	B	F	G	E	D
D	D	F	E	G	I	B	A	C
E	E	G	D	F	B	I	C	A
F	F	E	G	D	C	A	I	B
G	G	D	F	E	A	C	B	I

	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	B	C	I
B	B	C	I	A
C	C	I	A	B

utförs. Operation F som följs av operation A utbyter hörn M mot hörn N och hörn P mot hörn Q; resultatet är därför ekvivalent med operation E. Om å andra sidan operation A följs av operation F utbyts N mot P och M mot Q och resultatet blir ekvivalent med operation D. (Axlarna flyttas inte om kvadraten roteras eller sätts i rörelse.)

Den mindre grupptabellen (ovan till höger) representerar tre olika matematiska processer och uppdagar därigenom att dessa alla uppvisar samma matematiska struktur. (Detta är en kommutativ grupp, eftersom operationerna kan göras i valfri ordning.) Tabellen kan tolkas på vart och ett av följande sätt:

(1) Rotationerna ändrar inte kvadratens yttre kontur. Identitetselementet I flyttar icke kvadraten. A roterar 90° moturs; B 180°; och C 270°. (En "undergrupp" till den grupp som representeras av den större tabellen.)

(2) Additioner i ett talsystem som endast består av fyra tal: 0, 1, 2 och 3. Detta motsvarar att man adderar de hela talen, dividerar summan med fyra och antecknar resten. I denna tolkning är identiteten I lika med *noll*: A är 1; B är 2; och C är 3.

(3) Multiplikation i ett talsystem som består av talen 1, 2, 3 och 4. Detta motsvarar att man multiplicerar talen, dividerar produkten med 5 och antecknar resten. Identiteten I är 1; A är 2; B är 4; och C är 3.

---

videra tal. Detta teorem har för inte så länge sedan bevisats av de amerikanska matematikerna Bott, Kervaire och Milnor. Inom parentes sagt använde de som hjälpmedel den algebraiska topologin (som behandlas längre fram).

Cheshirekattens leende

De moderna matematikerna har övertagit ett av den moderna algebrans väsentligaste begrepp: "grupp". En fram-

ETT LOCKANDE PROBLEM

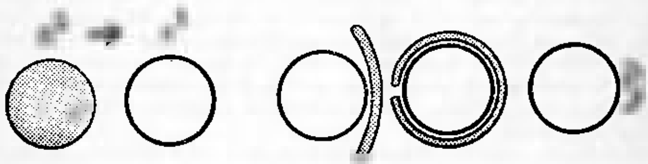
En viktig tillämpning av gruppbegreppet finner man inom topologin. Problemet är att beräkna sfärers "homotopiska" grupper. Den grovt förenklade innebörden är följande: På hur många sätt kan man kränga en gummisfär kring en annan sfär?

Man måste dock först ha klart för sig att "sfär" i detta sammanhang representerar ett oändligt antal geometriska föremål av olika dimensioner. En endimensionell sfär, S^1, är en cirkel. En tvådimensionell sfär, S^2, är ett ihåligt klot. Flerdimensionella sfärer kan givetvis inte återges i vår tredimensionella värld; de är matematiska utvidgningar av det fullkomliga rundhetsbegreppet. Geometriskt kan detta uttryckas så att en sfär som är av högre dimension än en given annan sfär kan konstrueras genom att man väljer två punkter (poler) i nästa dimension och förenar dem med varje punkt på den givna sfären. Uttryckt i algebraisk form representeras en n-dimensionell sfär av följande ekvation:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = r^2$$

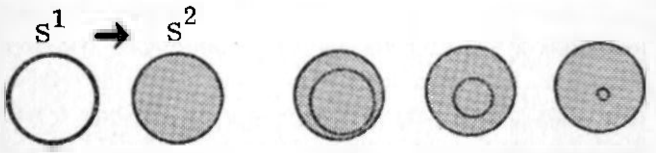
där varje x avser avståndet i en viss dimension från en punkt på sfärens utsida till dess centrum.

Problemet är särskilt lockande därför att man har löst det till hälften. En del fall är förhållandevis enkla. En cirkel kan krängas kring en annan cirkel på oändligt många sätt. En gång, två gånger, tre gånger osv., se nedan:

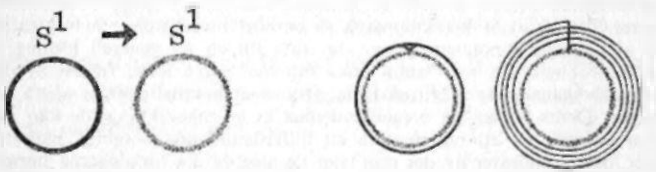


stående matematiker, Evariste Galois (1811–1832), var den förste som (år 1830) använde gruppbegreppet för att finna nya metoder för lösning av ekvationer. Han publicerade sin upptäckt, 20 år gammal, kvällen innan han dödades i en meningslös duell. Först på senare år har matematikerna helt utnyttjat gruppbegreppet; det har visat sig vara ett mångsidigt användbart verktyg. En grupp har jämförts med det leende som finns kvar när Lewis Carrolls Cheshirekatt har försvunnit. Gruppbegreppet kan tillämpas på allt slags

Men det finns bara ett enda generellt sätt på vilket man kan kränga en cirkel kring ett ihåligt klot. Om cirkeln representeras av ett gummiband kan den glida av bollens ekvator och krympa ihop till en enda punkt, se nedan:



Att kränga ett ihåligt klot kring ett annat är likartat med problemet att kränga en cirkel kring en annan cirkel. Det yttre klotet kan fläkas och träs kring det inre ett obegränsat antal gånger. Om å andra sidan ett ihåligt klot sammanpressats till en rät linje och sedan trätts kring en cirkel, kan det alltid krympas ner till en enda punkt, se nedan:



Generellt gäller att om två sfärer har samma antal dimensioner, kan den ena alltid krängas kring den andra på ett oändligt antal sätt. Och den yttre sfären kan alltid krympas ihop till en punkt om den har lägre dimension än den inre sfären.

De intressantaste fallen är de där den yttre sfären är av högre dimension än den inre sfären. Det är med rent algebraiska metoder teoretiskt möjligt att beräkna det antal sätt på vilket varje given sfär kan krängas kring varje annan given sfär. De algebraiska metoder som här avses har utar-

---

matematik: fysikalisk rörelse, tal, vektorer, rymdgeometri, ekvationer etc. Definitionsmässigt består en grupp av ett antal "element" (därmed avses alla slags matematiska tankeföremål) och en regel som gör det möjligt att kombinera elementen (två element kan kombineras till ett tredje, en sådan sammansättning kallar man *komposition*). Vissa grupper innehåller ett oändligt antal element. Elementen återges med bokstäver som kombineras med symbolen *. För att ett sådant system skall kunna kallas grupp måste det uppfylla följande fyra villkor:

Antal dimensioner		Antal sätt på vilka den yttre sfären kan krängas kring den inre
yttre sfärens	inre sfärens	
3	2	obegränsat
4	3	2
4	2	2
5	3	2
17	3	30
18	4	90 720
19	5	12
26	11	480
27	12	480
31	16	obegränsat

betats av den franske matematikern Jean Leray och först tillämpats för homotopiska grupper år 1950 av en annan fransk matematiker, Jean-Pierre Serre. Emellertid är beräkningarna så oerhört invecklade och tråkiga att de algebraiska topologerna sökt sig fram till en ny generell lösning av detta problem. Ett stort antal olika fall har redan lösts, främst av den japanske matematikern Hirosi Toda. Ovanstående tabell återger några lösningar. Deras beklagliga oregelbundenhet är en missräkning; de kan inte göra anspråk på att representera ett tillfredsställande slutgiltigt matematiskt lösningsmönster av det slag som de algebraiska topologerna hoppas kunna finna.

---

(1) Alla kompositioner av element är själva element i gruppen.

(2) Multiplikationen skall, liksom vanlig multiplikation, vara associativ, dvs. lagen $a*(b*c)=(a*b)*c$ skall gälla. Härvid förutsätts att kompositionerna inom parenteserna utförs först.

(3) Det finns ett *enhetselement* (*identitetselement*) I så beskaffat att ingen förändring skall inträffa om det komponeras med ett godtyckligt element i gruppen, dvs. $I*a=I=a*I$ för vilket element a som helst.

(4) Till varje element a skall finnas ett inverst element a^{-1}, sådant att $a*a^{-1}=I=a^{-1}*a$.

Elementen kan till exempel utgöras av alla positiva hela tal och bråk, och kompositionen kan vara vanlig multiplikation. I detta fall skulle enhetselementet, det element som är så beskaffat att det inte förändrar de andra elementen om det komponeras med dem, vara talet 1. Och det inversa elementet av 2 skulle vara ½. Man kan också tänka sig att elementen utgörs av samtliga heltal, negativa såväl som positiva, och kompositionen är vanlig addition. Då skulle enhetselementet vara talet 0. Och det inversa elementet till talet 3 skulle då vara —3. I dessa två grupper gäller den kommutativa lagen; dvs. $a*b$ är alltid lika med $b*a$. Men inte alla grupper är kommutativa. En grupp där den för vanlig multiplikation gällande kommutativa lagen icke gäller är t. ex. den som uttrycker rörelser i en dans. Man kommer till en viss punkt om man först gör en högervändning och sedan går tre steg framåt, men man kommer till en helt annan punkt om man först går tre steg framåt och sedan vänder sig åt höger. (För ytterligare illustrationer av grupper se figurerna på sidorna 28 och 29).

Generaliserad geometri

Den moderna geometrin är inte mindre abstrakt än den moderna algebran. En av matematikens mest aktiva grenar idag är topologin, en form av geometri som bygger på ett allmänt formbegrepp där man helt bortser från storlek. I många sammanhang skiljer topologen inte mellan en kub och en sfär eller mellan en ellips och en triangel. Men topologen ser en grundläggande skillnad mellan en sfär och varje solid figur i vilken man gjort ett hål, dvs. en ring. Och med hans betraktelsesätt är alla solida figurer med endast ett hål lika (vilket kommer andra matematiker att definiera en topolog som "en man som inte kan skilja mellan en flottyrring och en kaffekopp").

Ett av topologins mest fascinerande forskningsresultat är *fixpunktsatsen*, som för cirka 50 år sedan formulerades av den kände holländske matematikern L. E. Jan Brouwer. Satsen säger att om en solid skiva kontinuerligt deformeras – dvs. tänjs ut, pressas samman, viks ihop eller vrids, men *icke* slits sönder – och sedan placeras innanför sina ursprungliga konturer, så kommer åtminstone en punkt av figuren att befinna sig på samma ställe som i utgångsläget. Om till exempel skivan får beskriva en enkel rotationsrörelse, kommer medelpunkten att förbli fixerad. Det är enklare att förstå satsen om man tänker sig skivan som en tunn cirkelrund gummiskiva. Satsen har funnit vidsträckt användning inom andra matematiska grenar, däribland inom sådana avlägsna områden som hydrodynamiken och spelteorin. (I förbigående kan nämnas att fixpunktsatsen är en typisk "existens"-sats, då den inte talar om vilken punkt som förblir fix. Intuitionisterna avskyr existenssatser; trots detta har Brouwer efter att ha ändrat ståndpunkt blivit en av ledarna av den intuitionistiska skolan inom den matematiska logiken.)

Formens algebra

En av den moderna matematikens mest fängslande och abstrakta grenar har framkommit ur äktenskapet mellan algebra och topologi, nämligen den algebraiska topologin. Där är de förekommande problemen typiskt geometriska problemställningar, men matematikerna begagnar sig av den algebraiska lösningstekniken. (En exemplifiering av ett huvudproblem på detta område ges på sidorna 30–32.)

Geometrin har också generaliserats i andra riktningar. Den algebraiska geometrin, en kunskapsgren med rötter i den analytiska geometrin, gör sig fri med hjälp av alla slags abstrakta tal som algebran kan uppfinna. Den sträcker sig från studiet av elementära algebraiska kurvor eller diagram, från den analytiska geometrin till det generella algebraiska kurvbegreppet och ytor av godtycklig dimension.

Medan det gångna århundradets matematiker tog ett stort steg genom att utforska den fyrdimensionella geometrin, utgör antalet dimensioner inte längre någon gräns för dagens matematiker. Många ägnar sina studier åt Hilbert-rum, vilkas geometri rör sig med ett oändligt antal dimensioner, i vilka avstånd och vinklar mäts på likartat sätt som i den vanliga tredimensionella euklidiska geometrin. Ett ännu mer abstrakt geometriskt begrepp av ett godtyckligt antal dimensioner är det metriska rummet. Det baseras på endast tre axiom:

(1) Avståndet mellan två punkter är ett positivt tal och är detsamma mätt i båda riktningarna.

(2) Avståndet mellan en punkt och punkten själv är noll.

(3) Summan av längden av två sidor i en triangel är större än längden av den tredje sidan.

Är det användbart?

En stor del av den moderna matematiken har man svårt att tänka sig tillämpad på andra vetenskaper och mänskliga förhållanden. De flesta vetenskapsmän som arbetar vid den rena matematikens yttersta frontlinjer visar också föga intresse för denna sida av saken. Deras intresse går huvudsakligen ut på att skapa begrepp. Samuel Eilenberg vid Columbiauniversitetet i USA ger uttryck åt denna inställning när han skämtsamt jämför sig själv med skräddare som syr rockar för sitt eget estetiska nöjes skull. "Ibland gör jag dem med fem ärmar", förklarar han, "en annan gång med sju ärmar. Om det roar mig syr jag en rock med två ärmar. Och skulle den passa på någon så är jag glad om han vill ha den på sig."

Eilenberg är emellertid säker på att hans forskningsresultat, som huvudsakligen uppnåtts inom den algebraiska topologin, en vacker dag kommer att bli till praktisk nytta. I likhet med de flesta rena matematiker hyser han en nästan mystisk tro på den goda matematikens nyttighet – med god matematik avser han då matematik som uppfyller matematikens estetiska krav. Hans åsikt finner stöd i historien. År 1858 introducerade till exempel den engelske matematikern Arthur Cayley (1821–1895) matrisalgebran – grupper av tal eller andra matematiska symboler ordnade i horisontella rader och vertikala kolumner. Själv sade Cayley dystert att här hade man verkligen en typ av matematik som ingen människa någonsin skulle komma att praktiskt tillämpa. Men idag används matriser av teoretiska fysiker och ingenjörer nästan som ett slags räknesticka för att lösa många olika slags problem.

Ett annat exempel är den icke-euklidiska geometri som år 1854 grundlades av den då 28-årige tyske matematikern Bernhard Riemann (1826–1866). Genom att anta att linjer inte kan vara parallella – dvs. att de så småningom måste mötas på samma sätt som jordmeridianerna – skapade han ett geometriskt system av fulländad konsekvens. Trots att det till en början föreföll egendomligt, utgör det idag det matematiska språket för beskrivning av relativitetens krökta rum. Och när Einstein under utvecklandet av relativitetsteorin behövde ett matematiskt verktyg för att kunna formulera sin tes att varje betraktare har sitt eget referenssystem i rumstiden, gick han tillbaka i matematikens historia till tensorkalkylen, som omkring tjugo år tidigare hade utvecklats av två italienare, G. Ricci och T. T. Levi-Civita.

Ännu ett exempel som visar den rena matematikens användbarhet är Hilbert-rummet. När Hilbert gav sig i kast med att generalisera det euklidiska rumsbegreppet så att det skulle gälla för ett oändligt antal dimensioner, tycktes hans idéer till en början knappast ha någon beröring med atomfysiken. Men idag bygger kvantmekaniken till stor del på Hilbert-rummet.

Einstein yttrade en gång: "I den mån matematikens lagar hänför sig till verkligheten är de inte säkra; och i den mån de är säkra hänför de sig inte till verkligheten." Det läge i vilket kvantmekaniken för närvarande befinner sig bekräftar hans uttalande. Det finns till exempel en formel som beskriver en växelverkan mellan en partikel och ett energifält. Formelns första term är en nära approximation av vad fysikerna verkligen observerar. Den andra termen borde förbättra approximationen, men det gör den inte. Den andra termen och alla de följande är i själva verket oändliga. Fysikerna kombinerar den första approximationen med de ändliga delarna av återstående formel, ett konstgrepp som matematikerna betraktar som minst sagt opportunistiskt om inte rentav oegentligt.

En grupp unga matematiker, däribland professor Irving Segal i Chicago, har ägnat sig åt att förbättra kvantmekanikens matematiska grunder. Segal misstänker att fysikerna använder ett felaktigt gruppbegrepp. Den newtonska mekaniken baserar sig på den så kallade galileiska gruppen, som omfattar alla de rörelser som kan utföras av en stel kropp. I denna grupp förändras inte avståndet mellan två närbelägna punkter. Den relativistiska mekaniken grundar sig å andra sidan på ett mera komplicerat gruppbegrepp – Lorentzgruppen, som kombinerar tiden med det vanliga tredimensionella rummet. (Förhållandet mellan tid och rum är av mycket speciellt slag. Den kvantitet som inte undergår någon förändring formuleras matematiskt som: $dx^2+dy^2+dz^2-dt^2$, där dx, dy och dz betecknar små längdavvikelser uppmätta i det tredimensionella rummet och dt är en liten förändring i tid.) Medan Lorentzgruppen tycks vara tillämplig på den makroskopiska världen, anser Segal att de subatomära partiklarna i mikrokosmos mycket väl kan tänkas bete sig på ett sätt som representeras av en helt annan rörelsegrupp. Han misstänker att det utöver protoner, elektroner, neutroner, mesoner och de övriga partiklar som fysikerna har upptäckt kan finnas en obegränsad mångfald grundpartiklar – tillräckligt många för att helt och hållet fylla ut raden mellan den tyngsta och den lättaste. Om detta visar sig vara sant, och om man kan finna det rätta gruppbegreppet, kan fysikerna tänkas bli i stånd att förutsäga alla partiklars egenskaper med samma framgång som de har förutsagt mesonens existens.

Idag finns det många matematiker som anser att deras vetenskap hämtar sin rikaste inspiration från den fysikaliska verkligheten. De koncentrerar sig på den matematik som ger de största löftena om omedelbar praktisk tillämpning.

Därutöver är dock alla matematiker, vare sig de ägnar sig åt ren eller tillämpad matematik, väl medvetna om att matematiken har sin inneboende realitet, en realitet som finns nedlagd i den mänskliga hjärnan och inte behöver bekräftas genom tolkandet av fysiska experiment. Fysikern är bunden till den sanning hans instrument kan tänkas tala om för honom; matematikern däremot har frihet att utforska en mycket rikare värld, mestadels skapad av honom själv. I denna frihet ligger den största tjusningen med att vara matematiker. De flesta matematiska forskare av idag skulle instämma med den tyske 1800-talsmatematikern C. G. J. Jacobi (1804–1851), som på frågan varför han sysslade med matematik svarade: ”Pour l'honneur de l'esprit humain” (för att ära det mänskliga intellektet).

Nya användningsområden för den abstrakta matematiken

Aldrig har så många människor tillämpat abstrakt matematik på så mångskiftande problem som i vår tid. För att kunna tillfredsställa industrins, teknikens och andra vetenskapers behov har matematikerna fått uppfinna nya och vidareutveckla gamla matematiska grenar. De har uppfört en gigantisk byggnad av moderna idéer, vilka av dem som fått sin intellektuella skolning i ämnets klassiska grenar knappast skulle kännas igen som matematik.

Den tillämpade matematikens utövare har med framgång angripit världens problem vid en tidpunkt då utövarna av den rena matematiken egendomligt nog nästan tycks ha förlorat kontakten med verkligheten. Matematiken har alltid varit abstrakt, men de rena matematikerna driver abstraktionen allt längre.

Ändå är det den långt drivna abstraktionen som gör matematiken särskilt användbar. Genom att tillämpa matematiska begrepp på praktiska problem kan matematikern ofta skala bort oväsentliga detaljer och avslöja enkla mönster. Den celesta mekaniken gör det till exempel möjligt för astronomerna att beräkna planeternas läge vid varje tidpunkt, både framåt och bakåt i tiden, och att förutsäga kometers uppdykande och försvinnande. På så sätt har denna gamla och svårfattliga gren av matematiken fått den största praktiska betydelse för beräkningen av jordsatelliternas bana.

Till och med matematiska gåtor kan ge upphov till viktiga praktiska rön. Matematikerna försöker fortfarande finna en generell regel för beräkningen av antalet möjliga sätt på vilka en partikel kan röra sig från ett hörn i ett rektangulärt fält till ett annat hörn utan att korsa sin egen väg. När de löser detta till synes enkla problem, kommer de att kunna berätta åtskilligt för kemisterna om hur polymerernas långa molekylkedjor är uppbyggda.

Matematiker som är intresserade av praktiska problem har lärt sig att lösa många sådana som för några årtionden sedan föreföll att ligga utom räckhåll för matematisk behandling. I våra dagar har de utarbetat nya statistiska metoder för kvalitetskontroll inom den allt snabbare industriella massproduktionen. Grunderna har lagts för den operationsanalysteknik som affärsmännen använder vid produktionsplanering och distributionsanalys. En mycket funktionsduglig informationsteori har utarbetats som gör det möjligt för teleingenjörer att exakt beräkna ledningssystemen för telefon-, radio- och televisionsanläggningar. Man har också gett sig i kast med att klarlägga lagarna för det invecklade mänskliga beteendet genom spelteorin, som kan tillämpas på såväl militär som ekonomisk strategi. Man har analyserat planläggningen av automatisk kontroll för så komplicerade system som fabrikers produktionsserier och byggandet av överljudsflygplan. Nu är man i färd med att lösa många problem inom rymdfarten – från fjärrstyrning och navigation till dynamiska problem rörande rymdraketer.

Trots att matematikerna ännu inte i högre grad har inriktat sitt intresse på biologin och socialvetenskaperna, har dessa en gång rent deskriptiva vetenskaper redan börjat få en anstrykning av matematisk precision. Biologerna har börjat tillämpa informationsteorin inom ärftlighetsforskningen. Sociologerna använder modern statistik för att kunna kontrollera sina stickprovsundersökningar. Bandet mellan matematiken och de tillämpade humanistiska vetenskaperna har blivit allt starkare genom utvecklandet av en hel grupp matematiska specialiteter, såsom biometri, psykometri och ekonometri.

Med hjälp av elektroniska datamaskiner kan matematikerna numera lösa problem som de inte skulle ha vågat angripa för ett antal år sedan. På några minuter kan man nu erhålla svar som det tidigare skulle ha tagit månader eller till och med år att räkna fram. För att konstruera datamaskiner och därutöver programmera dem har matematikerna fått utforma nya metoder. Även om datamaskiner tills vidare endast i ringa grad har lämnat bidrag till den rena matematiken, har de kunnat användas till att undersöka speciella sammanhang som råder mellan talen. Det förefaller nu möjligt att man en vacker dag med datamaskin kommer att kunna upptäcka och bevisa ett helt nytt matematiskt teorem.

Det enormt ökade behovet av matematisk forskning har i de flesta länder medfört en akut brist på goda matematiker. Att tillfredsställa detta behov är ett svårlöst problem. Matematikerna behöver en mera omfattande utbildning idag än någonsin tidigare; det är detta ökade utbildningsbehov som är svårt att tillgodose.

Matnyttiga kuriositeter

Den tillämpande matematikern måste kunna skapa nytt, ty den tillämpade matematiken är mera än enbart problemlösning. Ett primärt mål är att finna metoder att matematiskt angripa stora och varierande problemkomplex. Samma differentialekvation kan till exempel användas för att beskriva neutronernas spridning genom atomkärnemodellen och radiovågornas fortplantning genom jonosfären. Samma topologiska labyrint kan representera såväl en matematisk modell av kablar som leder ström i ett elektriskt nät som en modell av skvallrets spridning på ett kafferep. Eftersom den tillämpade matematiken är oupplösligt förenad med de problem den skall lösa, måste den tillämpande matematikern vara hemma i ytterligare åtminstone ett ämne – t. ex. aerodynamik, elektronik eller genetik.

Den rene matematikern bedömer sitt ämne huvudsakligen efter estetiska normer; den tillämpande matematikern är pragmatiker. Det är hans uppgift att konstruera abstrakta matematiska modeller av verkligheten, och om de fungerar är han nöjd. Ofta är hans abstraktioner egendomligt långsökta. Så kan till exempel solen tänkas som en massa koncentrerad kring en punkt utan volym, eller också kan den behandlas som en fullkomligt rund, homogen sfär. Båda modellerna kan accepteras om de leder till förutsägelser som överensstämmer med experiment- och observationsresultat.

Denna praktiska inställning förklarar delvis de radikala förändringar som har ägt rum på sannolikhetsteorins område. Italienska och franska matematiker började dryfta detta ämne för ungefär trehundra år sedan i syfte att analysera oddsen vid hasardspel. Sedan dess har matematiskt intresserade filosofer ägnat ett ingående studium åt att upptäcka naturen hos »slumpens mystiskt verkande kraft». Verksamma matematiker behöver emellertid inte bekymra sig om något filosofiskt slumpbegrepp. De betraktar i stället sannolikhet som en abstrakt och odefinierad egenskap – på ungefär samma sätt som fysikerna betraktar begreppen massa och energi. På så sätt har matematikerna utvidgat sannolikhetsteorins teknik så att den även kan tillämpas på många problem som inte nödvändigtvis behöver innefatta slumpelementet.

Sannolikhetsteorin kan idag nästan betraktas som en gren inom geometrin. Varje tänkbart utfall av ett visst försök åskådliggöres som en punkt på en linje. På samma sätt kan utfallet av ett antal upprepningar av försöket åskådliggöras som koordinaterna för en punkt i en rymd av högre dimensionstal (dimensionstalet är lika med antalet upprepningar). Sannolikheten av ett resultat är ett mått som mycket liknar det geometriska måttet för volym. Många sannolikhetsproblem smälter då samman till en geometrisk analys av punkter spridda i en mångdimensionell rymd.

Ett av den moderna sannolikhetsteorins mest fruktbärande problem är den s. k. "random walk". (Uttrycket som används med sin engelska benämning skulle kunna översättas med "slumpmässig promenad".) En enkel illustration är bankruttproblemet, som innebär att två personer spelar ett parti tills en av dem är pank. Om den ene startar med 100 kronor och den andre med 200 kronor och de spelar med 1 kronas insats, kan spelets utveckling grafiskt återges som en punkt på en linje av längden 300 enheter (dvs. kronor). Punkten förflyttar sig ett steg, åt höger eller åt vänster, vid varje spelomgång, och när den når slutet av linjen åt ena eller andra hållet, är en av spelarna bankrutt. Problemet är att beräkna hur länge spelpartiet kan tänkas pågå och hur stor varje spelares vinstchans är.

Matematikerna har nyligen upptäckt en del förvånande fakta beträffande sådana typer av spel. Om båda spelarna har ett obegränsat kapital och spelet kan pågå i oändlighet, växlar spellyckan mellan de båda spelarna inte alls så ofta som man i allmänhet skulle kunna föreställa sig. I ett spel där båda spelarna har samma vinstchans – t. ex. krona och klave – är det efter 20 000 spelomgångar omkring 88 gånger så sannolikt att vinnaren har haft ledningen hela tiden som att de två spelarna har lett lika många gånger. Oberoende av hur länge spelet pågår är det mera sannolikt att en spelare har haft ledningen från början än att ledningen har växlat mellan spelarna ett givet antal gånger.

Random walk-abstraktionen kan tillämpas på ett stort antal fysikaliska problem. En del av dessa problem innehåller ett påtagligt slumpelement, exempelvis gasdiffusion, biltrafikproblem, ryktesspridning, epidemiska sjukdomars spridning. Samma teknik har även tillämpats för att visa att den sista istidsperiodens fröbärande fåglar måste ha bidragit till inplanteringen av ekskogar i de brittiska öarnas norra delar. En del moderna random walk-problem har däremot ingen uppenbar anknytning till slumpen. I en komplicerad elektrisk strömkrets kan man till exempel, om spänningen vid de båda ändarna är konstant, beräkna spänningen vid olika punkter i ledningsnätet genom att betrakta hela strömkretsen som en sorts tvådimensionell variant av det tidigare omnämnda bankruttspelet.

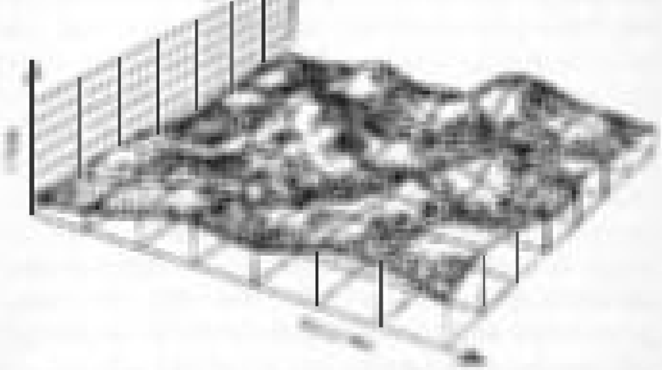
Risk kontra vinst

Den matematiska statistiken, sannolikhetsteorins viktigaste avläggare, håller på att ändra karaktär lika radikalt som sannolikhetsteorin själv. Den klassiska statistiken kan sägas huvudsakligen ha fungerat som en domstol som varnat dem som anlitat den för att dra alltför riskfyllda slutsatser. De domar som den avkunnat har alltid varit ungefär lika mångtydiga som till exempel uttalandet: "Det är till 98 % säkert att läkemedlet A är åtminstone dubbelt så starkt som läkemedlet B." Men vad händer om läkemedlet A råkar vara endast hälften så starkt? Även om den klassiska statistiken räknar med denna möjlighet, beräknar den inte dess konsekvenser. Moderna statistiker har gått ännu ett steg längre med nya begreppsbildningar som sammantagna är kända under beteckningen beslutsteori. "Vi försöker nu skapa en vägledning för handlingar som måste utföras under osäkra förhållanden", förklarade den amerikanske matematikern Herbert Robbins, verksam vid Columbia University. "Målet är att till ett minimum reducera den förlust som beror på bristande kunskap om tingens natur. Ur spelteorins synpunkt innebär faktiskt den på statistiska grunder dragna slutsatsen den bästa strategin för genomförandet av det spel som kallas vetenskap."

Detta nya sätt att närma sig problemet illustreras av följande exempel. En filantrop erbjuder sig att kasta ett mynt en gång och låter er gissa krona eller klave. Gissar ni rätt betalar han er 100 kronor. Ni observerar att myntet är så illa och ojämnt slitet att det kan antas hamna oftare med den ena än med andra sidan upp. Men ni kan inte avgöra *vilken* sida myntet oftast kommer att visa. Filantropen är dock villig att låta er göra ett antal provkast, men han fordrar att ni betalar honom 1 krona för varje försökskast. Hur många försökskast bör ni inlåta er på innan ni bestämmer er? Svaret beror förstås på hur provkasten utfaller. Om myntet visar krona de första fem gångerna, drar ni kanske slutsatsen att myntet slår fel till förmån för krona. Men om försöket ger tre krona och två klave, kommer ni med all säkerhet att vilja fortsätta försöksserien.

Inom industrin står man dagligen inför liknande problem. En industriledare som har fått fram en ny produkt prövar den innan han avgör om han skall släppa ut den på marknaden eller inte. Ju mer han testar den, desto bättre förutsättningar har han att kunna fatta ett riktigt beslut. Men utprovningen kostar pengar och tar tid. Nu kan statistiken emellertid hjälpa honom att väga risken mot vinsten och avgöra hur länge det lönar sig att fortsätta provserien. Statistiken kan också hjälpa honom att rätt utforma och utföra experimentserier. Nya metoder med starka inslag av flerdimensionell geometri kan visa hur produkter och industriella processer skall kunna förbättras. En statistiker kan ofta tillämpa dessa metoder för att förbättra avkastningen av en hel industriell anläggning utan att störa dess produktion. (Som ett exempel se figurerna på s. 46 och 47.)

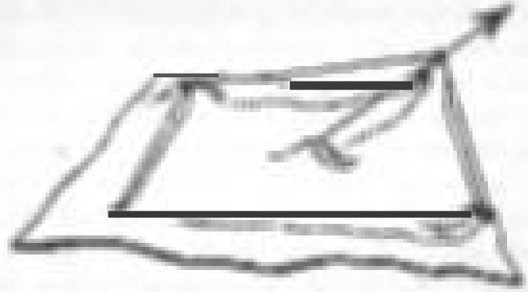
Den klassiska statistiken har också utvidgats på annat sätt. Till de senaste landvinningarna hör de s. k. icke-parametriska metoderna för utnyttjande av statistiskt material. Dessa metoder gör det möjligt att dra slutsatser om föremål som kan ordnas efter storlek, livslängd, värde i kronor eller någon annan mätbar egenskap. Det som i sammanhanget är



Med geometrins hjälp kan statistikern förbättra industriprodukter, och som exempel visas ovan avbildade hypotetiska kemiska process. I likhet med ett stort antal processer är den svår att genomföra perfekt, då reaktionerna på temperatur- och tryckförändringar är mycket oregelbundna. Det är inte nödvändigt för statistikern att känna till den teoretiska kemiska bakgrunden till processen för att finna den temperatur-tryck-kombination som ger det bästa utbytet, dvs. högsta punkten på den yta som åskådliggör utbytet som funktion av tryck och temperatur. Man kan här snarare likna statistikern vid en blind man som försöker finna den högsta bergstoppen i ett okänt land. Illustrationen på nästa sida åskådliggör hans till-

av betydelse är det statistiska samplets (stickprovets) storlek och varje särskilt föremåls plats i ordningsföljden. Det är inte nödvändigt att mäta något av föremålen så länge de kan jämföras inbördes. Det är t. ex. möjligt att säga att det om samplet består av 473 föremål råder 99 % säkerhet att endast 1 % av samtliga föremål av detta slag kommer att vara större än det största föremålet i samplet. Det spelar ingen roll vilka föremål det är fråga om, det kan vara människor, bilar, sädesax eller nummer dragna ur en hatt. Och satsen gäller fortfarande om man i stället för storlek betraktar litenhet, intelligens, ett fartygs hastighet eller någon annan tillämplig egenskap.

Praktiskt används icke-parametriska metoder bl. a. för



vägagångssätt. Han startar från godtyckliga utgångspunkter och rör sig med små variationer, så att han kan bestämma sänkningar och upphöjningar i de olika hörnen på små fyrkanter på markytan. Om ett hörn är avsevärt högre än de andra, tar han detta som ny utgångspunkt och varierar förutsättningarna för att kunna utforska en annan liten fyrkant. Hans successiva stegförflyttningar leder honom högre och högre. Som man ser av figuren på vänstersidan, skulle han kunna vilseledas av flera topografiska förhållanden – exempelvis av den lilla toppen i förgrunden, upphöjningen till höger eller av krönet i passet mellan de bortersta tvillingtopparna. En yta av det här slaget skulle likaväl kunna representera en motors gång vid varierande bränsletillförsel och förgasarjustering eller överhuvudtaget vilken mätbar storhet som helst. Ju fler variabler man måste ta hänsyn till, desto mer komplicerad blir den geometriska tillämpningen, eftersom den geometriska ytans dimensionstal motsvarar antalet oberoende variabler som förekommer i sammanhanget.

---

provning av glödlampor. Genom att till exempel prova 63 slumpvis utvalda glödlampor kan tillverkaren dra slutsatsen att 90 % av alla glödlampor i hela tillverkningsserien med största säkerhet (99 chanser på 100) har större livslängd än den glödlampa som slocknar som nummer två.

Ett av de mest fascinerande framsteg som gjorts inom den tillämpade matematiken på senare tid är som nämnt uppkomsten av spelteorin, en sidogren av sannolikhetsteorin. Från matematisk synpunkt är spelteorin inte speciellt svårfattlig; många matematiker betraktar den till och med som ganska ytlig. Men den är intressant därför att den har gett matematikerna en möjlighet att underkasta det mänskliga beteendet matematisk analys.

Spelteorin kan huvudsakligen karaktäriseras som en matematisk beskrivning av konkurrens mellan människor eller sådana grupper av människor som arméer, affärsföretag eller bridgelag. Teorin förutsätter att samtliga spelare känner till samtliga möjliga slutresultat, och det förutsätts också att de har en klar föreställning om vad varje delresultat är värt för dem. De måste vara medvetna om alla strategier som står dem själva till buds och äga samma kännedom om motståndarens möjligheter. Och de måste hela tiden bete sig "rationellt" (även om matematikerna inte är säkra på hur man exakt skall definiera "rationellt" beteende). Det är tydligt att spelteorin innebär en höggradig abstraktion, eftersom man i praktiken aldrig kan förutsätta att människor är så målmedvetna och välinformerade som teorin förutsätter. De är det inte ens i ett så avgränsat specialfall som ett parti schack. Men trots allt ger abstraktionen en så god bild av mänskligt handlande att spelteorin visat sig praktiskt användbar för analys av konkurrenssituationer och militärstrategiska problem.

När spelteorin på tjugotalet började utvecklas av Emil Borel i Frankrike och John von Neumann i Tyskland, var dess tillämpningsområde begränsat till de enklaste formerna av tävlings- eller konkurrenssituationer. Så sent som år 1944 hämtade den viktigaste avhandlingen om detta ämne (*Theory of Games and Economic Behavior* av von Neumann och Princetonekonomen Oskar Morgenstern) många av sina belysande exempel från en form av ett-kortspoker med begränsad insats, spelad av två personer. Numera har strategierna i tvåpersoners nollsummespel (i vilka den ene spelaren vinner lika mycket som den andre förlorar) blivit synnerligen noggrant analyserade. Och spelteoretikerna har utvidgat teorin till att gälla komplexa typer av konkurrenssituationer som har större anknytning till det verkliga livet.

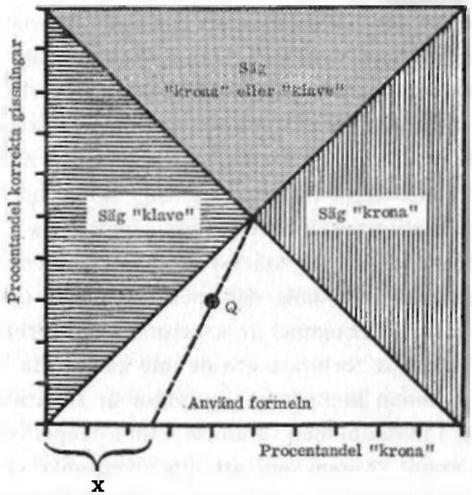
En stor svaghet hos den tidigare spelteorin var att den förutsatte en allvetande motspelare, som skulle komma underfund med den tillämpade strategin och därefter sätta in sin egen mest effektiva motstrategi. Överfört på det militära området skulle detta innebära att man antog att motståndarens underrättelseväsen var ofelbart. Den spelteoretiska lösningen blev en slumpmässig, blandad strategi, där varje drag dikteras av slumpen – exempelvis ett myntkast, så att motståndaren inte har någon möjlighet att förutsäga utgången. (Av samma anledning får idag de amerikanska officerarna lära sig att det är bättre att uppskatta motståndarens möjligheter än hans avsikter.) Många matematiker har betraktat detta tillvägagångssätt som försiktigt i överkant. För någon tid sedan har spelteoretikerna utarbetat strategier som drar nytta av oförsiktighet eller okunnighet hos motparten utan att riskera något ifall han plötsligt skulle börja spela listigt. (Ett relativt enkelt exempel ges i figuren på s. 50.)

De spelformer som är svårast att analysera från matematisk synpunkt är sådana där spelarna inte direkt tävlar med varandra. Ett exempel är arbetsmarknadsförhandlingar; båda parter är förlorare om de inte kan träffa en uppgörelse. En annan komplicerande faktor är situationer där spelare står i maskopi med varandra – till exempel två köpare som kommit överens om att inte överbjuda varandra. Ytterligare ett komplicerande fall är utbetalandet av pengar utanför "spelets" ram, som när en stor leverantör håller en detaljist under armarna genom direkt ekonomiskt stöd.

Vem får vad och hur mycket?

Det största problemet som uppstår när man skall analysera sådana komplicerade situationer är att finna ett matematiskt tillvägagångssätt för fördelning av vinsten på ett sätt som tillfredsställer de "rationella" spelarna. Lloyd Shaply vid det stora amerikanska affärsföretaget Rand Cor-

Tidigare spelteoretiker utarbetade strategier som med stor framgång kunde tillämpas på ofelbara motståndare, men dagens matematiker tar även för säkerhets skull vårdslösa motståndare med i beräkningen. Nedanstående figur anger den bästa strategin för en gissning huruvida en tänkt motståndare har placerat ett dolt mynt med krona eller klave upp. Om motståndaren vore listig skulle han blanda krona och klave slumpmässigt genom att helt enkelt singla slant vid varje tillfälle. I så fall skulle man i det långa loppet varken vinna eller förlora. Men om motståndaren försöker förekomma ens gissningar kan man med figurens hjälp vinna så snart han följer ett fast mönster; och i varje fall händer ingenting värre än att man i längden varken vinner eller förlorar.



Under spelets fortsatta gång håller man reda på hur många av totala antalet gånger som motståndaren visat krona och hur många gånger man själv vunnit. Detta bestämmer läget av punkten *Q*. Om *Q* är belägen i den grå eller någon av de streckade trianglarna, följer man den rena strategin som visas i figuren. Men om *Q* är belägen i den vita triangeln måste man tillämpa en blandad strategi som man beräknar enligt följande: drag en linje från figurens medelpunkt genom *Q* och vidare ut till baslinjen. Längden *x* bestämmer den strategi som skall tillämpas. När *x* som i fallet ovan är 1/4 bör man låta valet bestämmas av någon slumpmetod som gör klave tre gånger så sannolikt som krona. (Man kan exempelvis i en hatt lägga 4 papperslappar, av vilka 3 markerats med klave, och dra en av lapparna.) Denna metod drar fördel av motståndarens tydliga benägenhet att lägga myntet så att det visar klave, samtidigt som den förhindrar att han gissar ens egen strategi. Följer man denna plan, bör Q förr eller senare hamna i den grå triangeln som visar att man själv har vunnit.

poration har konstruerat en sådan formel. En neutral skiljedomare får bestämma utdelningarnas storlek. Formeln talar om för domaren hur utdelningarna skall ske, så att de olika spelarna erhåller utdelningar som står i lämpligt storleksförhållande till deras insatsförmåga, och den maximerar också den totala utdelningen. Det finns uppenbara praktiska svårigheter vid tillämpningen av detta Shaplys skiljedomsförfarande. Först och främst kan utdelningen, eller värdet av vad varje spelare erhåller, knappast enbart mätas i pengar. Skiljedomaren skulle därför få brottas med avsevärda svårigheter vid bestämningen av en lämplig fördelning om spelarna inte sanningsenligt upplyste honom om vad de önskade få ut av spelet och hur de värderade sina förväntningar.

Även om spelteorin redan har lämnat stora bidrag till beslutsteorin, har de praktiska tillämpningarna inte utfallit särskilt lyckligt i komplicerade mänskliga sammanhang. Den största svårigheten har varit att det inte tycks finnas några objektiva matematiska metoder att formulera begreppet "rationellt beteende" eller att mäta det värde som ett visst givet resultat har för en viss spelare. Men i varje fall har spelteorin åtminstone väckt matematikernas intresse för analys av mänskliga beteenden och stimulerat ekonomer och sociologer att skaffa sig kunskaper i högre matematik. Spelteorin kan vara förelöparen till ännu skarpsinnigare matematiska metoder att angripa dessa problem, metoder som en dag kommer att hjälpa oss att tolka mänskligt beteende.

Universalverktyget

Matematikens ryggrad, såväl den renas som den tillämpades, utgörs av det konglomerat av metoder som är känt under benämningen "analys". Begreppet analys var ursprungligen liktydigt med differential- och integralkalkylens tillämpning.

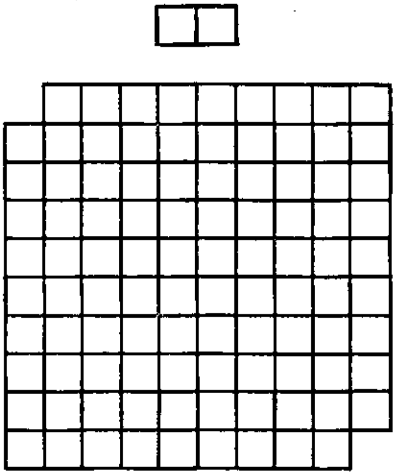
Moderna analytiker begagnar sig emellertid av teorem och metoder från matematikens alla fält inklusive topologin, talteorin och den abstrakta algebran.

Under de senaste tjugo eller trettio åren har forskare som ägnat sig åt matematisk analys gjort snabba framsteg på differentialekvationernas område. Differentialekvationer används som matematiska modeller för praktiskt taget alla fysikaliska fenomen som inbegriper någon form av förändring. Idag förfogar matematikerna över tämligen enkla metoder som gör det möjligt att lösa en mängd olika typer av differentialekvationer med hjälp av datamaskiner.

Men man känner fortfarande inte till några metoder att lösa enkla icke-linjära differentialekvationer – sådana som vanligen dyker upp då stora eller plötsliga förändringar inträffar. Typfall är de aerodynamiska chockvågor som åstadkommes när ett flygplan passerar ljudvallen.

Ryssarna har lagt ned ett enormt arbete på teorin för icke-linjära differentialekvationer. Som en direkt följd av dessa ansträngningar har de idag ett försprång framför hela den övriga världen när det gäller studiet av automatisk kontroll, och det kan vara en starkt bidragande orsak till deras framgångsrika raketuppsändningar.

Det är på analysens område som datamaskinerna har lämnat sina kanske betydelsefullaste bidrag till den tillämpade matematiken. Man måste fortfarande vara en skicklig matematiker för att kunna sätta upp en differentialekvation och tolka lösningen. Men i slutskedet kan man vanligen reducera arbetet till ett numeriskt förfarande – långt och tröttsamt kanske, men tillräckligt enkelt för att en datamaskin skall kunna klara av det på några minuter eller i mycket komplicerade fall på några timmar. Datamaskinerna ger möjlighet att matematiskt analysera ett stort antal problem som tidigare vanligen löstes approximativt med hjälp av något slags tumregel.

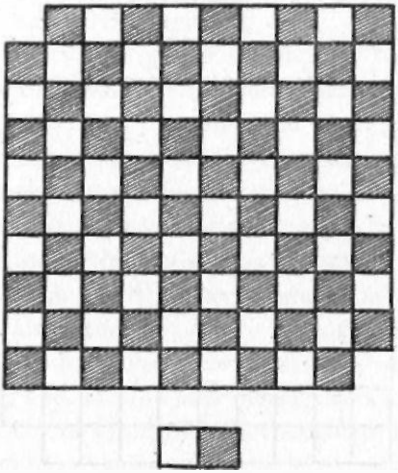


Problem: om man får använda ett valfritt antal av de små rektanglarna, är det då möjligt att med dem helt täcka ovanstående figur? Ingen av de små rektanglarna får täcka någon av de andra eller skjuta ut över den större figurens kanter. Problemet är olösligt, svårigheten är bara att åstadkomma ett bindande *bevis* för att det är olösligt. Förfaringssättet visas på nästa sida.

Matematisk logik

Datamaskinernas uppkomst har också haft vissa konsekvenser för den rena matematiken. Problemet att programmera datamaskinerna, dvs. att bestämma vad de skall göra och hur de skall göra det, har för matematikerna åter öppnat ett gammalt och delvis ouppmärksammat arbetsfält: den booleska algebran. Denna gren av matematiken reducerar den formella logikens regler till algebraiska formler. Två av dess postulat skiljer sig totalt från de grundläggande satser man känner till från skolalgebran. I den booleska algebran är $a+a=a$ och $a \cdot a=a$. Anledningen kan lättare för-

LÖSNING TILL PROBLEMET PÅ SIDAN 53



Nyckeln till lösningen är att föreställa sig att angränsande kvadrater har olika färger, som på ett schackbräde. Det blir då uppenbart att varje rektangel måste täcka en vit och en svart kvadrat. Eftersom den stora figuren inte innehåller samma antal svarta och vita kvadrater, är det inte möjligt att täcka den helt med rektanglarna. Lösningen innehåller ett fullt bindande negativt bevis. Detta tillvägagångssätt är matematiken ganska ensam om; inom andra vetenskaper är negativa slutledningar i allmänhet mycket riskfyllda. Att tänka sig rutor av olika färg är en relativt enkel abstraktion, men den är karakteristisk för de metoder som matematikerna använder när de vill förenkla problem och teorem.

---

stås om *a* antas stå för en utsaga, plustecknet för "eller" och multiplikationstecknet för "och". Sålunda kan man till exempel illustrera additionssatsen med följande: "(denna klänning är röd) eller (denna klänning är röd) betyder att (denna klänning är röd)".

Den numeriska analysen, som är ett mycket betydelsefullt element vid studiet av approximationer, är ett annat område som har fått intresse för matematikerna i samband med programmeringen av datamaskiner. Det återstår fortfarande en hel del ren och fundamental matematisk forskning för att komma underfund med de numeriska fel som uppkommer i samband med avrundningar av tal. Datamaskiner är särskilt benägna att åstadkomma just sådana fel, då antalet siffror de kan handskas med är begränsat. Om en datamaskin får ett stort mångsiffrigt tal, måste den släppa ett antal siffror i slutet och arbeta med approximationer. Även om approximationen är mycket god kan felet växa enormt om talet multipliceras med en stor faktor i ett senare skede av uträkningen. I allmänhet kan man lugnt utgå ifrån att avrundningen jämnar ut sig i långa aritmetiska problem. När man till exempel adderar en lång sifferkolumn uppstår inget större fel om man betraktar 44,23 som 44 och 517,61 som 518. Men det är ren vidskepelse att tro att avrundningen inte skulle utgöra en ackumulerad felkälla. Alla talen kunde ju till exempel råka sluta med decimalerna 499.

Det finns lömskare fallgropar när det gäller vissa mera invecklade beräkningar. För några typiska beräkningsproblem som innehåller matriser och som används för att lösa simultanekvationer har den amerikanske vetenskapsmannen John Todd konstruerat till synes enkla numeriska problem som en datamaskin inte skulle gå iland med. I vissa fall ger datamaskinen grovt felaktiga resultat; i andra fall kan den inte åstadkomma några lösningar alls. Det är en väsentlig uppgift för de numeriska analytikerna att finna metoder för att förutse detta slags svårigheter och att undvika dem.

Primtalsmönster

Datamaskinerna har hittills åstadkommit mycket få direkta bidrag till den rena matematiken med undantag för det talteoretiska området. Här har resultaten knappast varit övertygande, men däremot intressanta. Den amerikanske vetenskapsmannen D. Lehmer vid University of California har fått en datamaskin att räkna upp samtliga primtal upp till 46 000 000.[1] När man studerar denna primtalsförteckning får man en bekräftelse på att primtalen, åtminstone upp till 46 000 000, är fördelade bland de övriga heltalen i enlighet med en "lag" som teoretiskt utarbetats för ungefär ett århundrade sedan. Denna lag, känd under namnet primtalssatsen, säger att antalet primtal mindre än ett givet stort tal x är approximativt lika med x dividerat med log x (den naturliga logaritmen för x). (Egentligen ligger det approximativa värdet något i underkant.) Lehmers tabell tycks också bekräfta tidigare förmodanden om primtalstvillingarnas fördelning. Med primtalstvillingar avses par av konsekutiva udda tal vilka båda är primtal, som 29 och 31 eller 101 och 103. Antalet primtalstvillingar mindre än x är ungefär lika med x dividerat med *kvadraten* på log x.

Lehmer och H. S. Vandiver vid University of Texas har också använt en datamaskin för att bevisa en berömd sats som matematikerna världen över fortfarande försöker bevisa eller vederlägga. För trehundra år sedan sade den franske matematikern Fermat (1601–1665) att likheten $a^n+b^n=c^n$ icke gäller för heltalsvärden på a, b och c skilda från noll, om n är ett heltal större än 2.

Lehmer och Vandiver har försökt finna något enda undantag. Skulle de lyckas med det vore satsen motbevisad. Lyckligtvis har de inte behövt undersöka varje tänkbar talkombination; det är tillräckligt att pröva samtliga primtal. Och dessutom finns det ytterligare genvägar. Talet n får t. ex. inte vara en jämn divisor till vissa grupper av s. k. "Bernoullital", då det i så fall inte kan satisfiera ekvationen. (Bernoullitalen är oregelbundna. Det första är 1/6, det tredje

[1] Det största hittills kända primtalet torde vara $2^{4423}-1$, som Lehmer och J. Selfridge fått fram med hjälp av datamaskin. Talet har i utskriven form 1 332 siffror. *Övers. anm.*

1/30, det elfte 691/2 730, det trettonde 7/6, det sjuttonde 43 867/798 och det nittonde 1 222 277/2 310. Därefter följande tal är enormt stora.)

Lehmer och Vandiver har undersökt Fermats stora sats, som teoremet kallas, för alla primtal n upp till 4 000, men de tycks ha fastnat i en återvändsgränd. Bernoullitalen har på denna nivå en längd av nästan 10 000 siffror, och till och med en snabb datamaskin behöver en hel timme för att pröva varje värde för n. Bara det faktum att en maskin inte har lyckats finna något undantag, bevisar naturligtvis inte Fermats sats, även om det kanske gör det mer troligt att satsen är sann.

Men det är möjligt för en datamaskin att åstadkomma ett matematiskt bevis. De båda amerikanska vetenskapsmännen Allen Newell och Herbert A. Simon har utarbetat ett program som instruerar en snabb datamaskin att utarbeta bevis för några elementära satser på den matematiska logikens område, hämtade ur Alfred North Whiteheads (1861–1947) och Bertrand Russells berömda gemensamma arbete *Principia Mathematica,* publicerat åren 1910–1913.

Newells och Simons program bygger på heuristiskt tänkande – en slutledningskonst baserad på intuition och analogier som det skapande mänskliga intellektet ofta begagnar sig av för att förenkla komplicerade problem. Datamaskinen programmeras med ett antal grundläggande axiom och lagrar alla de teorem som den redan har bevisat. När den har till uppgift att bevisa ett obekant teorem, försöker den först att jämföra det med de teorem och analogier den redan känner till. I många fall åstadkommer datamaskinen ett logiskt bevis på några minuter: i andra fall kan den misslyckas helt och hållet. Det skulle vara möjligt att programmera en datamaskin så att den kunde lösa teorem genom att angripa dem algoritmiskt, en helt säker metodisk procedur som tar alla möjligheter med i beräkningen. Men med en sådan programmering skulle förmodligen även den snabbaste datamaskin behöva flera år för att utföra sin uppgift.

Även om de flesta matematiker ler skeptiskt åt denna tanke, är Newell och Simon övertygade om att en heuristisk programmering snart kommer att göra det möjligt för datamaskinerna att utföra i ordets sanna bemärkelse skapande matematiskt arbete. De gissar att en datamaskin inom loppet av tio år kommer att bevisa ett viktigt matematiskt teorem som ingen mänsklig matematiker tidigare funderat över.

Lediga platser

Men datamaskinerna kommer inte att göra matematikerna arbetslösa. Tvärtom har datamaskinerna öppnat så många nya vägar för matematiska tillämpningar att arbetstillfällena för matematiker inom industrin mer än fördubblats under de senaste fem åren.

Medan de flesta företag föredrar matematiker som också har gedigna kunskaper i fysik och kemi eller i teknik i största allmänhet, finns det också många företag som vill ha vetenskapsmän som specialiserat sig på ren matematik. I USA betalar man numera en ung nybliven filosofie doktor i matematik, inom till exempel flygindustrin, en årslön av 10 000 dollar, vilket är ungefär dubbelt så mycket som man betalade år 1950 (och ungefär dubbelt så mycket som man i dag betalar som begynnelselön för universitetslärare).

Inom industrin finns det också många fysiker och ingenjörer som efter sin examen har börjat ägna sig åt matematik. Där finns också plats för matematiker med lägre utbildning, filosofie kandidater och filosofie magistrar, främst för programmering av datamaskiner.

Företagen sysselsätter sina matematiker på flera olika sätt. En del företag låter dem bilda forskarlag tillsammans med ingenjörer och naturvetenskapsmän på andra områden. Andra företag har bildat speciella matematiska forskargrupper som dels sysslar med egna forskningsobjekt och dels utför ett strängt begränsat antal forskningsuppgifter för andra vetenskapliga avdelningar.

Ett av Amerikas äldsta och mest berömda industriella matematiska forskningscentra grundlades 1930 av Bell Telephone Laboratories. I början fanns där endast sex eller åtta yrkesmatematiker, varefter antalet långsamt växte fram till krigsslutet. Under de därpå följande tio åren fördubblades antalet. Idag sysselsätter denna avdelning omkring trettio yrkesmatematiker, varav hälften är filosofie doktorer i matematik och resten är filosofie doktorer i andra naturvetenskapliga ämnen. Denna avdelning har lämnat viktiga bidrag till den matematiska forskningen. Särskilt bör framhållas informationsteorin, vilken utvecklats under och efter kriget av den internationellt berömde matematikern Claude Shannon som en matematisk modell för språket och dess användning.

Matematik för barn

De amerikanska strävandena att införa flera lärotimmar i matematik och börja tidigare med ämnet har nu även nått lägre skolstadier. College Entrance Examination Board (Nämnden för inträdesprövningar till läroverket) har genom sin specialavdelning för matematik dragit upp riktlinjer för modernisering av gymnasiekurserna i matematik. Nämndens huvudsyfte är enligt dess verkställande ledamot, Albert E. Meder, att ge eleverna en uppfattning om matematikens sanna väsen och om den moderna utvecklingen. "Algebran", säger Meder, "är inte längre ett osammanhängande antal minnesregler utan ett studium av matematikens uppbyggnad; geometrin är inte längre en mängd teorem som man kan lära sig utantill utan att förstå dem."

Det kanske radikalaste steget i den amerikanska matematikundervisningen har tagits av Illinoisuniversitetets experimentläroverk. Där har man under ledning av en ledamot av universitetets matematiska fakultet, professor Max Beberman, infört en fullständigt ny lärokurs i matematik. Den börjar med att man på ett informellt axiomatiskt sätt behandlar aritmetiken och algebran och därefter fortsätter fram till en genomgång av sannolikhetsteorin, mängdteorin, talteorin, komplexa tal, matematisk induktion och den analytiska geometrin. Genom denna uppläggning har man lyckats ge eleverna en uppfattning om den moderna matematikens exakthet, abstraktion och generella giltighet. För att även kunna bereda plats åt några av matematikens nya begrepp har Beberman och hans rådgivare fått reducera framställningen, så att mindre tid ägnats åt exempelvis uppdelning i faktorer av algebraiska uttryck.

Av vad man hittills har sett, tycks experimentet ha varit synnerligen stimulerande för studenterna – delvis naturligtvis av den orsaken att kursen just varit ett experiment. Vid inträdesprövningarna till universitetet 1957 uppvisade den första studentkullen som sökte inträde vid Illinoisuniversitetets fyraåriga kurs ett av de bästa resultaten i hela USA.

Medan tolv andra läroverk nu också har övergått till Illinoisläroverkets matematiska kursplan är det inte sannolikt att det under den närmaste tiden kommer att spridas ytterligare. Anledningen är att det i så fall blir nödvändigt för de flesta läroverkslärare att genomgå en fullkomlig omskolningskurs för att kunna undervisa efter det nya systemet. Med understöd från Carnegie Foundation har Illinoisuniversitetet inrättat ett antal sådana omskolningskurser för lärare från ett stort antal stater.

Hur många matematiker som än utbildas kommer det alltid att finnas behov av framstående begåvningar som kan skapa nytt inom matematiken. Detta gäller såväl tillämpad som ren matematik. Ty vad den tillämpade matematiken beträffar, så är den tillräckligt intellektuellt inbjudande för att till och med tilltala sådana akademiker som känner en viss stolthet över att de skapar matematik för dess egen skull.

Helt nya grenar av matematiken behövs för behandlingen av andra vetenskapers problem och praktiska samhällsproblem. Så saknar till exempel kommunikationstekniken fortfarande en matematisk metod för analys av trafikflödet på fyrfiliga huvudvägar, och det kan dröja många år innan man funnit ett sätt att tillämpa exakta matematiska resonemang på den tredimensionella lufttrafiken. Biologerna har nästan inte alls använt sig av matematiska resonemang, utom statistiska, men idag gör en del av dem allvarliga försök att tillämpa topologiska rön. Topologin förefaller att erbjuda den bästa möjligheten att beskriva de levande cellerna med deras enorma variationer vad avser just form och storlek. Neurofysiologerna försöker finna en ny algebra som kan beskriva tankeprocesserna, vilka ju inte på något sätt kan betecknas som slumpmässiga men ändå inte heller är enbart metodiska.

Det återstår fortfarande en del anmärkningsvärt enkla problem som är hårda nötter att knäcka för matematikerna. Så har man till exempel ännu inte funnit en generell lösning till följande problem: Man har ett kartblad som är hopvikt med N vikningar, på hur många sätt kan man veckla upp det? Och när det problemet är löst uppstår genast ett nytt, och så vidare.

Moderna begrepp, metoder och problem

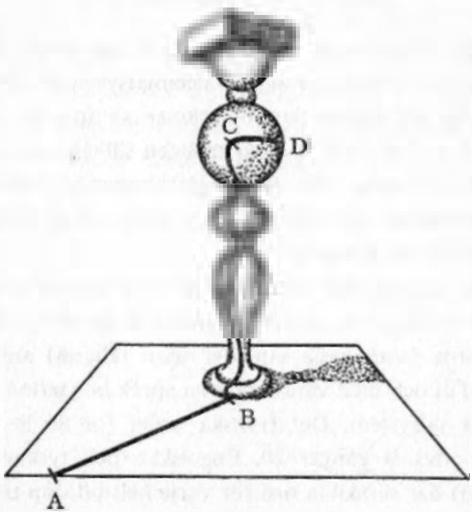
Olika former av räta linjer

Euklides' definition av en rät linje är varken tillräckligt allmängiltig eller tillräckligt exakt för att svara mot den moderna matematikens krav. Han definierade en rät linje som "en kurva som ligger i nivå med samtliga punkter i sig själv". De moderna matematikerna har frångått sådana dunkla beskrivningar. I stället definierar de en rät linje med utgångspunkt från en av dess grundläggande egenskaper: det faktum att den är det kortaste avståndet mellan två punkter. Som en följd därav har "räta" linjer en mångfald olika former under olika omständigheter. Förvirringen blir mindre om man helt och hållet slopar termen "rät linje" med dess vaga intuitiva innebörd och i stället talar om "geodet", exakt definierad som det kortaste avståndet mellan två punkter.

Om man betraktar jorden som en fullkomlig sfär, är det kortaste avståndet mellan två punkter på jordytan en storcirkelbåge – dvs. en cirkel som går genom ändpunkterna av en godtycklig diameter, alldeles som meridianerna tangerar jordaxeln vid polerna. En storcirkel är en säregen rät linje. Den har inga paralleller eftersom den skär varje annan storcirkel i två punkter. Dessutom är den ändlig, trots att den inte har någon begränsning. I andra geometrier, som kan tillämpas på ytor av andra slag, har geodeter ytterligare andra egenskaper. På en sadelformad yta har t. ex. varje geodetisk linje ett oändligt antal paralleller genom en given punkt som inte själv ligger på den geodetiska linjen, och samtliga geodetiska linjer är oändliga, trots att det i detta fall finns slutpunkter som de ständigt närmar sig utan att någonsin nå.

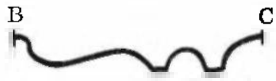
Det moderna geodetbegreppet har föranlett fysikerna att införa benämningen "krökt rum". I Einsteins allmänna relativitetsteori betraktas rummet t. ex. som krökt på ungefär samma sätt som ytan av en sfär. Vid varje punkt beror krökningsgraden av rummets materia. Talrika experiment visar riktigheten av denna matematiska modell för universum. Stjärnornas ljus, som alltid rör sig längs geodetiska linjer, avböjs faktiskt när det passerar i närheten av solen.

I själva verket är det svårt för att inte säga omöjligt att ge det vanliga intuitiva begreppet "rät linje" en konsekvent matematisk innebörd. Rätlinjighetsbegreppet är helt avhängigt av personlig erfarenhet av ett visst speciellt universum. Figuren nedan visar t. ex. en skalbagges universum, endast bestående av golvet och ett bordsben. Skalbaggen känner endast till den väg som den för tillfället kryper fram utefter, ty den är blind, döv och ur stånd att förnimma någon tyngd. På ett sätt är den emellertid en ovanligt klok skalbagge: den väljer alltid den kortaste vägen, vilken den helt logiskt betraktar som en rät linje.



När skalbaggen kryper från A till B överensstämmer dess uppfattning om en rät linje med vår egen intuitiva uppfattning.

Men från B till C ser skalbaggens räta linje ut så här:



Och skalbaggens räta linje från C till D skulle vi kalla för en cirkelbåge:

Välj vilket talsystem som helst

Det beror uteslutande på konvention att huvuddelen av mänskligheten begagnar sig av decimalsystemet. Bruket att återge alla tal genom kombinationer av just tio siffror – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – går troligen tillbaka på vanan att räkna på fingrarna. Men talens egenskaper är oberoende av decimalsystemet; det går bra att använda vilket antal siffror som helst för att återge tal.

Andra kulturer har begagnat sig av andra talsystem. Babylonierna byggde t. ex. sitt talsystem på 60 siffror. De gamla grekerna (som hade sandaler utan tåhätta) använde 20 siffror. Till och med våra moderna språk bär vittne om icke-decimala talsystem. Det franska ordet för 80 är ”quatre-vingt” – dvs. 4 gånger 20. Engelskan och tyskan (liksom svenskan) har särskilda ord för varje helt tal upp till 12, och ordet ”dussin” har också en historisk förklaring.

Icke-decimala talsystem används alltjämt inom speciella områden. Datamaskinerna räknar huvudsakligen enligt det binära systemet, som arbetar med endast två siffror, 0 och 1. Det binära systemet lämpar sig speciellt väl för datamaskinernas tekniska förutsättningar, eftersom det är enkelt att handskas med nollor och ettor med hjälp av kontakter som antingen är ”på” eller ”av” eller av ferritkärnor som är magnetiserade i endera av två riktningar. Sättet för binär talåtergivning är i princip detsamma som schemat för decimal återgivning. I decimalsystemet representerar 496 talet $4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$. (Den första potensen av ett tal är talet självt; ett tal upphöjt till 0 är lika med 1.) På samma sätt representerar i det binära systemet 110 010 talet $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. En addition av dessa termer visar att detta är det tal som skrivs som 50 i decimalsystemet. Reglerna för multiplikation och addition av binära tal är anmärkningsvärt enkla. Multiplikationstabellen är i sin helhet: $0 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$. För addition gäller: $0+0=0$; $0+1=1+0=1$; $1+1=0$ (och 1 i minne).

Vilket bastal som helst skulle fungera lika bra som 10 eller 2. Tag t. ex. talet 4 som bas. I ett sådant system representerar siffrorna multipler av potenser av talet 4. Multiplikation och addition skulle följa reglerna i nedanstående tabeller:

Addition

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

Multiplikation

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Här är ett multiplikationsexempel:

bastal 4		motsvarande siffror i decimalsystemet
23102	$=2\cdot 4^4+3\cdot 4^3+1\cdot 4^2+2\cdot 4^0=$	722
321	$=3\cdot 4^2+2\cdot 4^1+1\cdot 4^0=$	57
23102		5054
112210		3610
201312		
22003002	$=2\cdot 4^7+2\cdot 4^6+3\cdot 4^3+2\cdot 4^0=$	41154

Det är till och med möjligt att använda talsystem där siffrorna inte anger multipler av gastalets potenser. Ett sådant system är "den cykliskt permuterade koden", känt under beteckningen "CP". Det bildas av det binära systemet, så förändrat att två på varandra följande tal alltid är identiska med undantag för en siffra. Detta förenklar "hållandet i minne" för utförandet av aritmetiska operationer i en datamaskin. Formeln för "översättning" från CP-systemet till decimalsystemet är en smula komplicerad. I CP-systemet representerar n:te siffran från höger en multipel av (2 —1) och ettorna i ett sifferuttryck har alternativa plus- och minustecken. Sålunda svarar 1011 mot 15—3+1=13 i decimalsystemet; och 11011 svarar mot 31—15+3—1=18; på samma sätt svarar 111011 mot 63—31+15—3+1=45.

Ju större bastalet är, desto färre siffror fordras det för att återge ett givet tal vilket som helst. Tag till exempel år 1963. Härnedan visas hur det skulle återges i olika talsystem:

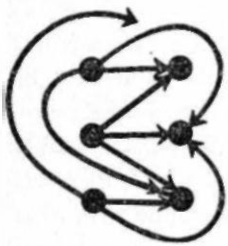
binärt	bastal 4	bastal 7	bastal 9
11110101011	132223	5503	2621

Använder man bastalet 60, kan man skriva 1963 med endast 2 siffror. Beundransvärt kortfattat, men å andra sidan skulle de "babyloniska" barnen behöva lära sig 60 olika siffersymboler innan de kunde börja utföra aritmetiska operationer.

Geometriska figurer antar förvrängda former i den gren av geometrin som är känd under namnet topologi. Den vanliga euklidiska geometrin medger endast stela rörelser av figurer; längd- och vinkelproportioner samt former förändras aldrig. Men inom topologin kan figurerna vikas, sträckas, krympas, böjas och förvridas på nästan vilket sätt som helst, så länge närliggande punkter stannar tätt intill varandra. Räta linjer kan under denna behandling förvandlas till kurvor och kurvor till räta linjer och sådana mått som vinkelstorlek, längd, yta och volym saknar betydelse.

En av de få grundläggande och oföränderliga geometriska egenskaper som är av intresse för topologen är "sammanhangsgraden". För ytor kan man uttrycka denna som det *maximala* antal snitt man kan utföra – t. ex. genom att rita enkla slutna kurvor – utan att dela ytan i med varandra icke sammanhängande delar. Konstruerar man till exempel en sluten kurva på en kub, delas den alltid i två delar. På samma sätt förhåller det sig med en sfär, som i topologiskt avseende är likvärdig med en kub. Men konstruerar man på rätt sätt en cirkel på en torus (en gardinring eller en "munk" t. ex.), hänger den fortfarande ihop. Detta förhållande illustrerar en väsentlig skillnad mellan en rings och en sfärs sammanhangsgrad. Genom att klyva ringen på annat sätt (inte visat här) kan man med ett snitt dela den i två delar.

Skillnaderna i sammanhangsgrad mellan olika geometriska figurer är ofta mycket förbryllande. Det finns ett välkänt problem som går ut på att man skall förbinda tre olika hus med tre olika brunnar, så att varje hus står i förbindelse med samtliga brunnar och så att vägarna inte korsar varandra. Det är i själva verket omöjligt att göra detta på en plan yta, en sfär eller någon annan yta med liknande sammanhangsgrad. Men på en ring eller någon annan figur av högre sammanhangsgrad är uppgiften enkel att lösa (se nedan).



Ett annat belysande exempel som visar en grundläggande skillnad mellan en sfär och en ring är fyrfärgsteoremet. Dess innebörd är följande: en kartritare behöver aldrig mer än fyra färger för att kunna åstadkomma en karta på vilken till varandra gränsande länder har olika färger. Matematikerna har hittills inte lyckats bevisa denna sats. Men å andra sidan har ingen hittills stött på en karta som för ändamålet erfordrar fem eller flera färger. Satsen kan dock endast gälla för kartor på sådana ytor som har en sfärs eller en plan ytas sammanhangsgrad. På en ring av högre sammanhangsgrad är situationen en helt annan. Matematikerna har kunnat bevisa att en kartograf behöver sju färger för en del "flottyrringskakor" men aldrig åtta eller fler.

Matematikerna har frigjort många delar av den moderna algebran från aritmetikens vanliga regler. Ett viktigt exempel är matrisalgebran. Matriser är rektangulära taluppställningar. I vissa avseenden beter sig dessa taluppställningar som vanliga tal. De kan adderas, subtraheras och multipliceras, dock inte divideras. Men i andra avseenden lyder matriser inte aritmetikens regler, såsom skall visas längre fram.

Matriserna uppfanns för ungefär hundra år sedan i samband med forskningsarbete inom den analytiska geometrin, särskilt studiet av tänjning, rotation och andra enkla förändringar och rörelser hos geometriska figurer. Sedan dess har matematikerna fått användning för matriser på ett utomordentligt stort antal områden. Ingenjörerna använder matriser för att beskriva stålbalkars deformering under tryckpåkänningar, uppkomsten av elektriska och magnetiska fält, luftströmmar kring en flygplansvinge, vibrationer i en maskin och många andra fenomen. Fysikerna utvecklade kvantteorin med hjälp av matriser och en generaliserad form av matris, som kallas tensor, har stor betydelse inom relativitetsteorin. Med matrisernas hjälp kan man också lösa simultana differentialekvationer som förekommer inom alla de olika naturvetenskaperna.

En matris kan ha vilken storlek och vilka proportioner som helst. Låt oss emellertid för enkelhetens skull börja med att undersöka sådana algebraiska matrisoperationer som erfordrar matriser med endast två rader och två kolumner. Vi väljer två matriser A och B, skrivna på följande sätt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Skall matrisen multipliceras med ett vanligt tal, sker detta helt enkelt genom att man multiplicerar varje i matrisen ingående term med detta tal:

$$5 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Skall man addera två matriser, adderar man de termer i de båda matriserna som motsvarar varandra och skriver ut resultatet i en ny matris av samma form och utseende:

$$A+B = \begin{pmatrix} 0+4 & 1+6 \\ 2+5 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Subtraktion av en matris från en annan sker på samma sätt som additionen:

$$B-A = \begin{pmatrix} 4-0 & 6-1 \\ 5-2 & 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Att multiplicera två matriser med varandra är en smula mer komplicerat. Multiplicera först varje term i första *raden* i matris A med motsvarande term i första *kolumnen* i matris B; addera produkterna och för in resultatet i rad 1, kolumn 1 i den nya matrisen. Multiplicera sedan varje term i andra raden i matrisen A med motsvarande term i första kolumnen i matrisen B; addera produkterna och för in resultatet i rad 2, kolumn 1 i den nya matrisen. De övriga termerna i den nya matrisen bildas på samma sätt – dvs. A:s rader bestämmer radpositionen i den nya matrisen och B:s kolumner bestämmer den nya matrisens kolumnpositioner. Den fullständiga multiplikationen ser ut på följande sätt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4+1 \cdot 5 & 0 \cdot 6+1 \cdot 7 \\ 2 \cdot 4+3 \cdot 5 & 2 \cdot 6+3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 23 & 33 \end{pmatrix}$$

Matrismultiplikationer följer inte den aritmetiska kommutativa lagen; resultatet beror på vilken matris man skriver först. I vårt exempel framgår också tydligt att resultatet av multiplikationen B · A avsevärt skiljer sig från resultatet av multiplikationen A · B, enligt nedan:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4\cdot 0+6\cdot 2 & 4\cdot 1+6\cdot 3 \\ 5\cdot 0+7\cdot 2 & 5\cdot 1+7\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 14 & 26 \end{pmatrix}$$

Det finns en matris som motsvarar talet noll; dvs. när nollmatrisen multipliceras med en annan matris blir produkten en nollmatris. Såsom man kunde vänta sig är varje term i nollmatrisen 0:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det finns också en matris som motsvarar talet 1; den förändrar inte värdet på någon matris med vilken den multipliceras. Den kallas identitets- eller enhetsmatrisen, I, och konstrueras av ettor och nollor i följande kombination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikationen med enhetsmatrisen följer den kommutativa lagen; det spelar ingen roll vilken av matriserna som står först.

$$I \cdot A = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 2 & 1\cdot 1+0\cdot 3 \\ 0\cdot 0+1\cdot 2 & 0\cdot 1+1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrisalgebran skiljer sig från vanlig aritmetik också i ett annat viktigt avseende: produkten av två matriser kan bli noll även om ingen av dem är en nollmatris. Till exempel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 0+4\cdot 0 & 2\cdot 2+4\cdot -1 \\ -1\cdot 0+-2\cdot 0 & -1\cdot 2+-2\cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Följaktligen kan matriser inte "strykas" på samma sätt som vanliga tal; i en ekvation av typen $A \cdot C = B \cdot C$ är A inte nödvändigtvis identiskt med B, ens om C skiljer sig från noll.

För matriser av godtycklig form och storlek finns det också några inskränkningar som gäller för addition, subtraktion och multiplikation. Om två matriser är av exakt samma form och storlek kan de adderas eller subtraheras enligt samma tillvägagångssätt som gäller för matriser med 2 rader och 2 kolumner ($2 \cdot 2$-matriser). I andra fall är addition och subtraktion meningslösa.

Två matriser kan multipliceras med varandra endast om den första har samma antal kolumner som den andra har antal rader. Om så är fallet blir produkten en matris med samma antal rader som den första och samma antal kolumner som den andra. Multiplikationen utförs efter samma regler som till sina väsentliga delar gäller för $2 \cdot 2$-matriser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

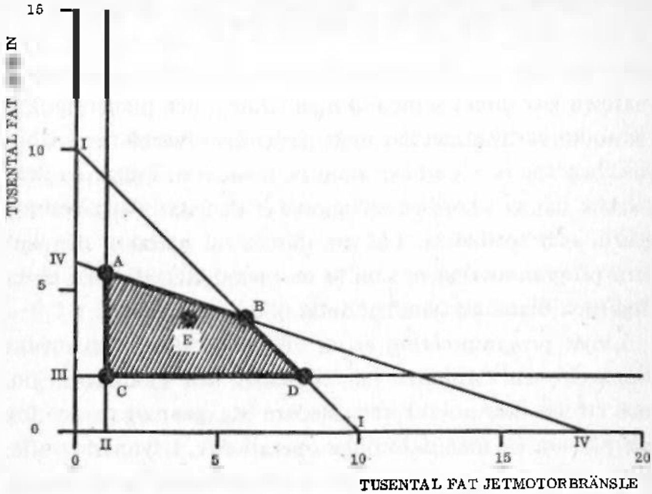
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \\ 3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 23 & 34 \\ 32 & 40 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$$

Ett vidsträckt område inom den moderna tillämpade matematiken har direkt samband med strategi och planering. Efter andra världskriget har matematikerna utvecklat en mångfald begrepp och metoder inom beslutsteorin. Tidigare i denna bok har vi i korthet redogjort för den statistiska beslutsteorin och spelteorin. Låt oss därför nu betrakta den linjära programmeringen, som är en metod att välja den bästa åtgärden bland ett oändligt antal olika möjligheter.

Linjär programmering är ett viktigt verktyg inom operationsanalysen. Militärer har tillämpat den inom strategin, och ett växande antal företagsledare begagnar sig av den för att planera en mångfald olika operationer. I synnerhet oljebolagen är beroende av linjär programmering för att kunna planera sin produktion, systematisera oljeutvinningen, bygga pipelines och rationalisera transporterna. Storproducenter inom livsmedelsbranschen är också i stort behov av linjär programmering för att kunna organisera varuflödet mellan fabriker, lagerbyggnader och distributionsställen.

De matematiska begreppen bakom den linjära programmeringen kan illustreras genom följande hypotetiska problem. Ett oljeraffinaderi önskar planera sin dagsproduktion så att lönsamheten blir den största möjliga. Raffinaderiet kan framställa två produkter: bensin, på vilken vinsten är kr 1:— per fat, och en flygbensinblandning, på vilken vinsten är kr 0:50 per fat. Det finns ett antal begränsningar av praktisk art: (1) Endast 10 000 fat råolja finns tillgängliga för förädlingsprocessen. (2) Raffinaderiet måste tillverka minst 1 000 fat jetmotorbränsle för att uppfylla ett bindande leveranskontrakt. (3) Det måste också producera åtminstone 2 000 fat bensin för att kunna tillfredsställa en distributörs omedelbara behov. (4) Båda produkterna måste transporteras i tankbilar, av vilka endast ett begränsat antal finns att



tillgå – så många att de räcker för transport av 270 000 "fat-kilometer". Jetmotorbränslet skall levereras till ett flygfält, beläget 15 km från raffinaderiet, medan bensinen måste transporteras till distributören, en sträcka på 45 km.

Den linjära programmeringen börjar med att man algebraiskt uttrycker var och en av dessa inskränkningar som en enkel variabel. Sätt antalet fat jetbränsle som skall produceras lika med x och antalet fat vanlig bensin lika med y, de olikheter som motsvarar inskränkningarna är då följande:

(I) $x + y \leqq 10\,000$
(II) $x \geqq 1\,000$
(III) $y \geqq 2\,000$
(IV) $15\,x + 45\,y \leqq 270\,000$

Symbolen $\geqq$ betyder "lika med eller större än" och symbolen $\leqq$ betyder "lika med eller mindre än".

Var och en av dessa inskränkningar representeras av en rät gränslinje i figuren på s. 74. Inom den streckade yta som de avgränsar ligger de punkter som anger sammanlagda antalet fat jetmotorbränsle och bensin som raffinaderiet kan producera under givna förutsättningar. Punkten E, till exempel, motsvarar 4 000 fat av varje sort.

Det gäller att finna den punkt på den streckade ytan där vinsten i kronor – $y+0{,}5\,x$ – är störst. I enlighet med teorin för linjär programmering kommer den maximala vinsten (likaså minimivinsten) att ligga i något av hörnen på den ytan. Därför behöver man endast beräkna vinsten för de fyra olika punkterna A, B, C, D.

Punkt	x-värde	y-värde	Vinst i kr
A	1 000	$\frac{17\,000}{3}$	6 166:67
B	6 000	4 000	7 000:— (maximum)
C	1 000	2 000	2 500:— (minimum)
D	8 000	2 000	6 000:—

De flesta linjära programmeringsproblem som förekommer i verkliga livet är naturligtvis betydligt mera invecklade. Varje ytterligare tillkommande inskränkning i förutsättningarna ökar antalet hörn i figuren. Och vad som är ännu värre, varje tillkommande variabel ökar den streckade ytans dimensionstal. Utgår man från endast två variabler – jetmotorbränsle och vanlig bensin – blir den bildade figuren en polygon. Med tre variabler skulle den bli en solid geometrisk figur och ”inskränkningarna” skulle bilda plana ytor. Med fyra variabler skulle det bildas en fyrdimensionell figur, begränsad av tredimensionella ”inskränkningar”.

Lyckligtvis har matematikerna utvecklat en metodik som gör det möjligt att lösa linjära programmeringsproblem utan att behöva försöka åskådliggöra flerdimensionella geometriska figurer. Metodiken innefattar bl. a. matrisalgebra (se s. 69–72). Varje ”inskränkning” blir en rad i matrisen. Den metod som huvudsakligen används går ut på att finna matrisens inversa värde – dvs. en ny matris som när den multipliceras med den ursprungliga matrisen ger enhetsmatrisen till resultat. Detta är ett ganska tröttsamt tillvägagångssätt, eftersom varje större matris medför ett enormt antal multiplikationer – så erfordras t. ex. 80 miljoner multiplikationer för en matris med 200 rader och 1 000 kolumner. Moderna datamaskiner kan emellertid invertera sådana matriser inom loppet av några timmar.

Ytligt sett har den linjära programmeringen ingen större likhet med spelteorin. Men de två metoderna vilar på en gemensam matematisk grundval. Det har också faktiskt kunnat bevisas att varje problem inom den linjära programmeringen kan förvandlas till ett tvåpersoners nollsummespel (i vilket två parter tävlar varav den ena vinner det den andra förlorar, se s. 48), och att omvänt varje tvåpersoners nollsummespel kan förvandlas till ett linjärt programmeringsproblem.

Hur går handelsresandens färd?

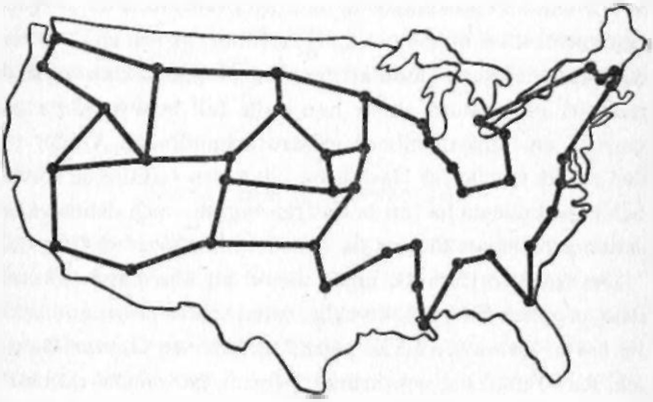
Till och med i vår tid finns det några matematiska områden där den begåvade och idoge amatören kan göra nya upptäckter. Ett av dessa är den typ av problem som matematikerna betecknar som "kombinatorik". De är i det stora hela lätta att förstå, men många sådana problem har trots detta förblivit olösta. Ett enkelt men fortfarande olöst kombinatoriskt problem är följande: På hur många sätt kan man vika en perforerad remsa med frimärken? Det är inte svårt att finna ett svar som gäller ett givet antal frimärken, men hittills har ingen matematiker lyckats finna en generell formel som gäller för ett godtyckligt antal.

Lika retsamt är problemet med handelsresanden, som ett icke obetydligt antal matematiker har brottats med under de senaste decennierna utan att finna någon generell lösning. En handelsresande skall starta i staden Washington och vill därefter i tur och ordning besöka varje delstats huvudstad för att slutligen återvända till Washington. Avstånden mellan huvudstäderna framgår av hans bilkarta. Hur skall han planera sin rundresa så att den blir så kort som möjligt?

Det förefaller frestande att låta en datamaskin ta hand om detta problem. Man skulle då kunna låta datamaskinen beräkna längden av alla tänkbara resrutter, och sedan låta den välja den kortaste. Men liksom i fråga om de flesta kombinatoriska problem är antalet möjligheter alldeles för många för att ens den snabbaste datamaskin skulle kunna klara av dem. Fram till 1959 utgjorde hans valmöjligheter omkring $3 \cdot 10^{62}$ tänkbara resrutter (eller exakt $49 \cdot 48 \cdot 47 \ldots \cdot 3 \cdot 2$). Skulle han ha en datamaskin på varje kvadrattum av jordens fastland såväl som hav och sjöar, och om var och en av dessa datamaskiner var i stånd att beräkna längden av en miljard resrutter per sekund, skulle han i alla fall behöva vänta på svaret i en miljard miljard miljard århundraden. Under tiden skulle emellertid Hawaii ha blivit den femtionde staten och han skulle då ha fått börja från början – och denna gång skulle problemets lösning ha tagit femtio gånger så lång tid.

Det finns fortfarande ingen metod att lösa handelsresandens problem för ett godtyckligt antal städer på en godtycklig karta. De amerikanska vetenskapsmännen George Dantzig, Ray Fulkerson och Selmer Johnson har emellertid utarbetat en lösning av detta problem som gäller för det antal stater som fanns innan Alaska blev upptaget som delstat i USA (*Journal of the Operations Research Society of America,* november 1954). Dessa forskare använde den linjära programmeringsmetoden, som nyss beskrivits på sidorna 73–76. Skulle de ha angripit problemet med hjälp av en vanlig programmeringsrutin, som förutsätter en komplett matematisk utgångsmodell av problemet, skulle programmet ha blivit så enormt omfattande att en datamaskin skulle ha behövt århundraden för att utföra det. Men klokt nog vägrade de att gå över broar innan de kommit fram till dem. De började med en uppenbart ofullständig modell – till innebörden en grov matematisk skiss av problemet, innehållande bl. a. en förteckning över de olika avstånden mellan städerna. (Några delstatshuvudstäder ersatte de faktiskt med andra städer, för vilka man lätt kunde finna önskade avstånd i tillgängliga bilkartor.)

Dantzig, Fulkerson och Johnson visste att de inte hade medtagit tillräckligt många inskränkningar för att kunna ställa upp problemet rätt. Och när de genomförde den linjära programmeringen erhöll de en figur av nedanstående utseende:



På detta stadium tillfogade de några ytterligare matematiska inskränkningar för att "lösa upp öglorna". Därefter var det möjligt att med deras program bestämma den kortaste resrutten, som visas upptill på nästa sida.

Själva uträkningen var så enkel att det icke erfordrades någon datamaskin; de utförde samtliga beräkningar inom loppet av några timmar med hjälp av papper och penna.

Hasardspelets olika möjligheter

Var och en som sysslat med tärningsspel har säkert kommit underfund om att när man kastar två tärningar samtidigt, så får man upp två givna lika nummer – exempelvis 6–6 – endast hälften så ofta som man får upp två givna olika nummer – exempelvis 5–3. Man kan inte omedelbart inse varför det skall förhålla sig på detta sätt om de båda tärningarna är identiska. Men det är lättare att förstå om man föreställer sig den ena tärningen röd och den andra grön. Då förstår man att det endast finns en möjlighet att få kombinationen 6–6, men två olika möjligheter att få 5–3: femma på den gröna tärningen och trea på den röda samt femma på den röda och trea på den gröna tärningen.

Samma resonemang kan tillämpas på ett antal kulor som slumpvis kastas i ett antal fack. Antag att vi har 6 kulor och 3 fack. Om vi antar att kulorna kan skiljas åt – eventuellt är försedda med nummer – då finns det 3^6 eller 729 möjligheter på vilka de olika kulorna kan fördela sig i de olika facken. Om kasten sker slumpvis och alla fördelningar är inbördes lika sannolika, är sannolikheten för att samtliga kulor skall hamna i det första facket lika med 1/729. Men sannolikheten för att fem kulor skall hamna i det första facket och en i det tredje är 6/729, eftersom det finns sex olika sätt på vilka en kula kan hamna i det tredje facket. Utförda experiment ger vid handen att kulor vid försök av denna art beter sig som om de vore inbördes åtskiljbara.

När fysikerna i början på detta århundrade utarbetade den statistiska mekaniken antog de att partiklarna skulle bete sig på samma sätt som tärningar och kulor. I enlighet med ett resonemang som är känt under namnet "Maxwell-Boltzmanns kalkyl" betraktade de partiklarna som inbördes åtskiljbara. Sålunda drog de slusatsen att om *r* partiklar slumpvis fördelades bland *n* energitillstånd, så skulle det uppstå n^r lika sannolika fördelningar (samma formel som tillämpades för kulorna och facken). Olyckligtvis visade det sig att "Maxwell-Boltzmann-kalkylen" inte åstadkom förutsägelser som överensstämde med gjorda observationer och företagna experiment.

Det visade sig att de sannolikhetslagar som är tillämpliga på tärningsspel och roulette inte gäller i atomernas rike. Partiklar beter sig som om de *icke* vore åtskiljbara. Därutöver gäller för två olika grupper av partiklar helt skilda sannolikhetslagar.

Bose–Einstein-kalkylen ger korrekta förutsägelser om fotoner och atomkärnor samt om atomer som innehåller ett jämnt antal elementarpartiklar (dvs. där totala antalet protoner, neutroner och elektroner är ett jämnt tal). Bose–Einstein-kalkylen baseras på antagandet att partiklarna icke är åtskiljbara. Om kulor betedde sig på detta sätt, skulle de två fördelningar som beskrivits ovan – samtliga kulor i det första facket eller fem kulor i det första och en i det tredje facket – bli sinsemellan lika möjliga. I detta system kan *r* partiklar slumpvis fördelas bland *n* energitillstånd på

$$\binom{n+r-1}{r}$$

sinsemellan lika möjliga sätt.

Uttrycket inuti parentesen betecknar antalet olika kombinationer av r föremål som kan plockas ut ur en grupp av $(n+r-1)$ föremål. Det kallas för binomialkoefficienten och kan beräknas enligt följande formel. Om koefficienten är $\binom{a}{b}$ kan den uttryckas som $\frac{a!}{b!\,(a-b)!}$. Utropstecknet utläses "fakultet" och har följande innebörd: $a! = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \cdot (a-3) \ldots$ etc. tills uttrycket inom parentesen blir lika med 1. Om till exempel i ovanstående uttryck $n=6$ och $r=4$, erhålles:

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

Ytterligare en avvikande sannolikhetsprincip ligger bakom Fermi-Dirac-kalkylen, som är tillämplig på partiklar som inte följer Bose–Einstein-kalkylens lagar. I Fermi–Dirac-kalkylen utgår man från antagandet att partiklarna är icke åtskiljbara samt därutöver att två partiklar icke samtidigt kan omfatta samma energitillstånd. Det måste naturligtvis finnas åtminstone lika många energitillstånd som det finns partiklar. Antalet sinsemellan lika möjliga fördelningar är $\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{r}$. Fermi-Dirac-kalkylen har kunnat göra utomordentligt goda förutsägelser om protonernas, neutronernas och elektronernas beteende.

De tre nämnda "kalkylerna" visar en viktig skillnad mellan matematik och teoretisk fysik. Från matematikerns synpunkt är alla tre systemen logiskt likvärdiga. Men fysikern handlar fullkomligt rätt när han tillämpar Bose–Einstein- och

Fermi–Dirac-kalkylen, eftersom dessa ger en riktig bild av den fysikaliska verkligheten. Och en vacker dag måste kanske fysikerna åter vända sig till matematiken för att finna en tredje modell som passar in på ytterligare andra typer av partiklar.

I mer kuriosabetonad tillämpning ger sannolikhetskalkylen bl. a. ett förbluffande svar på följande fråga: Hur många människor måste samlas på en plats för att chansen att åtminstone två av dem har samma födelsedatum skall vara större än 50 procent? Då det finns 365 tänkbara födelsedagar (här bortses från skottår), skulle de flesta gissa på 183. Men det nödvändiga antalet är inte ens tillnärmelsevis så stort. Och nedan skall visas hur man kan bevisa detta med hjälp av elementär sannolikhetskalkyl.

För problemets lösning är det enklare att vända på frågan och beräkna sannolikheten för att två människor i detta tänkta sällskap *inte* skall ha samma födelsedag. Består sällskapet av endast två personer blir sannolikheten för att de skall fylla år på olika dagar lika med antalet kombinationer av *olika* födelsedagar (365 · 364) dividerat med hela antalet möjliga kombinationer av födelsedagar (365 · 365). Om samma resonemang utvecklas till att gälla ett godtyckligt antal människor, låt oss säga n stycken, erhålles följande formel:

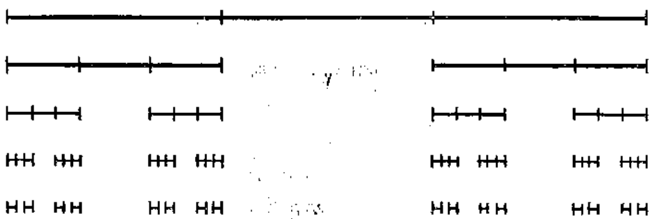
$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365}$$

Ju större antal faktorer som ingår i bråket – dvs. ju större n blir – desto mindre blir bråkets siffervärde. Om n är lika med 22, blir bråket något större än 1/2; men om $n=23$, blir bråkets värde något mindre än 1/2. Detta innebär att om det samlas 23 människor på en plats, så är chansen att inte två av dem fyller år på samma dag något mindre än 50 procent. När så många som 23 människor är samlade så är oddsen för att åtminstone två av de närvarande fyller år på samma dag alltså något bättre än 50—50.

Mysteriet med de mellersta tredjedelarna

Omkring sekelskiftet började matematikerna inse att vårt intuitiva dimensionsbegrepp har allvarliga svagheter. Upptäckten av ett antal paradoxer tvingade dem att steg för steg utveckla det moderna rigorösa punktmängdsbegreppet. En av de mest tankeväckande punktmängdsatserna utarbetades av den tyske matematikern Georg Cantor (1845–1918) och han gav den följande innebörd:

Tag ett linjesegment som är 1 måttsenhet långt och avlägsna linjens mellersta tredjedel – dvs. samtliga punkter belägna på ett avstånd av mer än en tredjedels och mindre än två tredjedels måttsenhet från en av ändpunkterna. Lägg märke till att punkterna som bildar gräns till den första och den sista tredjedelen finns kvar. Avlägsna nu den mellersta tredjedelen av de återstående segmenten. Upprepa förfarandet ett oändligt antal gånger.



Den geometriska figur som uppkommer är i sanning märklig. Det ursprungliga linjesegmentet har blivit avlägsnat i hela sin längd. Man kan nämligen teckna den totala summan av de avlägsnade punkterna som en oändlig serie:

$1 \cdot 1/3+2 \cdot 1/3^2+2^2 \cdot 1/3^3+ \ldots$ vilken blir lika med 1. Men ändå återstår ett oändligt antal icke sammanhängande punkter – t. ex. vid 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, 1/27, 2/27, osv. Det är till och med teoretiskt möjligt att para ihop dessa återstående punkter med samtliga punkter på den ursprungliga linjen, på samma sätt som man kan para ihop fingrarna på sin högra hand med fingrarna på den vänstra.

Först på senare år har matematikerna fått en dimensionsteori med vars hjälp de kan ta itu med sådana besynnerliga geometriska figurationer som de återstående punkterna i Cantors linjesegment. Teorin går ut på att man underkastar varje geometrisk figur följande prov. Varje punkt på den geometriska figuren innesluts i ett mycket snävt område, t. ex. en cirkel eller en sfär. Antalet dimensioner i vilka figuren och det omskrivande områdets rand skär varandra är lika med figurens dimensionstal minus 1.

Ett tomt rum har rent definitionsmässigt dimensionen —1. Kringströdda punkter har dimensionen 0, ty om man omskriver en sådan punkt med en tillräckligt liten cirkel, kommer denna inte att skära någon annan punkt (eller, som man också kan uttrycka det, cirkeln kommer att skära återstoden av figuren i —1 dimensioner). En rät linje har 1 dimension, ty om man omskriver en cirkel kring en punkt på linjen kommer den att skära linjen i åtminstone en punkt (0 dimensioner). En kvadrat har 2 dimensioner, eftersom varje cirkel som dras kring en punkt på kvadratens yta skär kvadraten längs en båge (1 dimension). En kub har 3 dimensioner, eftersom en sfär kring vilken som helst punkt på kuben skär kuben längs en yta (2 dimensioner). Genom att vidareutveckla detta resonemang kan man undersöka figurer med ett godtyckligt antal dimensioner.

Hur förhåller det sig med Cantors punktmängd? Det visar sig att den har dimensionen 0, eftersom det är möjligt att omskriva vilken som helst av de osammanhängande punkterna med en cirkel som inte kommer att skära någon annan punkt i mängden. Cirkeln skulle t. ex. kunna ha en radie som var lika med någon bråkdel av talet π, och i så fall skulle den gå emellan punkterna i mängden.

Det egendomliga dubbelförhållandet

Alla kartor av jorden som konstruerats på plana pappersytor är på ett eller annat sätt starkt förvrängda. Detta är oundvikligt, eftersom de geometriska egenskaperna hos en sfär och ett plan uppvisar grundläggande olikheter. Jordens krökning är omöjlig att återge på en plan karta, även om förvrängningen inte har någon större betydelse för små områden, på exempelvis bilkartor.

Redan från början måste kartografen välja bland ett antal kompromisser. Han kan i stort sett återge antingen ytor eller vinklar fria från förvrängning, men aldrig båda samtidigt. I den välkända Mercatorprojektionen överensstämmer till exempel alla vinklar på kartan exakt med motsvarande vinklar på jorden. Detta gör Mercator-projektionen särskilt användbar för navigatörer, eftersom de kan utläsa kursriktningen direkt från kartan. Polarforskare har å andra sidan mycket liten användning för Mercatorprojektionen. Den gör Norra ishavet och Antarktis enormt stora, och polerna kan inte ens kartläggas, eftersom de teoretiskt är projicerade i oändligheten.

Frågan vilka egenskaper, sådana som vinkel eller yta, som är återgivna utan förvrängning på en karta, är av utomordentligt stort intresse för matematikerna. Själva frågeställningen sträcker sig långt utanför geometrins gränser, eftersom all matematik i stort sett kan betraktas som kartstudium och kartläggning. Fysikerna med alla sina förvillande facktermer och ekvationer gör i själva verket inte annat än upprättar matematiska kartor av den fysiska världen. Matematikerna å sin sida tillämpar kartografiska metoder inom algebran och andra områden och likaså inom geometrin. Härvid studerar de ofta transformationer och ägnar särskilt intresse åt de egenskaper hos figurer eller formler som förblir oförändrade eller "invarianta".

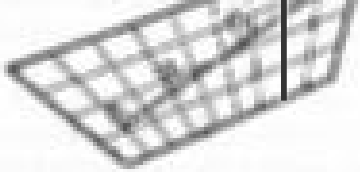
I vanlig euklidisk geometri utgörs exempelvis invarianterna av alla sådana egenskaper som förblir oförändrade vid stela kroppars rörelse – längd, yta, volym, krökning. Den projektiva geometrin rör sig med mycket färre invarianter. En rät linje projiceras som en rät linje; en punkt blir en punkt. Krökta linjer projiceras vanligen som krökta linjer, även om deras form kan förändras; en cirkel kan till exempel förvandlas till en ellips.

Den projektiva transformation som visas i nedanstående figur resulterar i en ändring av avstånden. (Linjen på den övre figuren har projicerats på den nedre figuren från en punkt, ej återgiven på bilden, som utgör skärningspunkten av de fyra linjerna AA', BB', CC' och DD'.) Till och med den inbördes längdrelationen mellan två eller tre sträckor kan förändras. Men fyra punkter på en linje uppvisar ett förhållande mellan avstånden som är invariant på ett egendomligt och komplicerat sätt. Betrakta linjen genom punkterna A, B, C och D på den övre figuren och dess projektion som går genom punkterna A', B', C' och D' på den nedre figuren. Beräkna sedan "dubbelförhållandet" mellan de inre delarna av linjen $ABCD$ enligt följande:

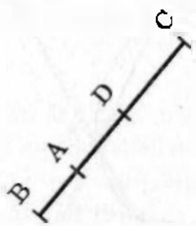
$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

Detta förhållande kan bli vilket tal som helst, men det kommer alltid att vara identiskt med motsvarande förhållande för $A'B'C'D'$, alltså:

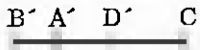
$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$$



Dubbelförhållandets invarians är helt oberoende av hur punkterna och linjerna är belägna. Så kan man till exempel ändra bokstävernas ordningsföljd så att den översta linjen får följande utseende:



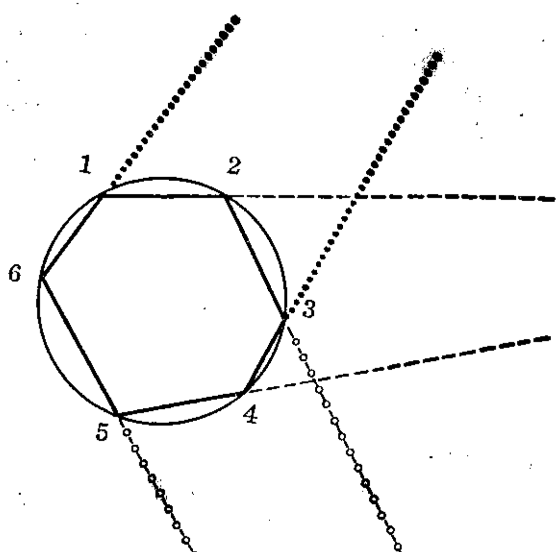
och den nedersta linjen följande utseende:



I detta fall skulle dubbelförhållandet, uträknat i enlighet med tidigare nämnda formel, ha ett annat numeriskt värde, men likheten skulle fortfarande gälla. Det finns för övrigt 24 möjligheter att kombinera fyra bokstäver, men hur de än ordnas är de båda dubbelförhållandena lika.

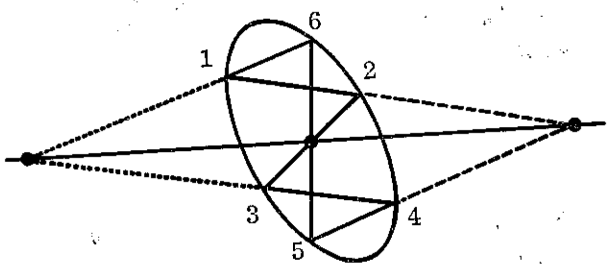
En mera generell typ av invarians, också på den projektiva geometrins område, har uttryckts i ett berömt teorem av den franske sextonhundratalsmatematikern Blaise Pascal (1623–1662). När Pascal formulerade teoremet i fråga var han endast 16 år gammal. Det äger tillämpning på kägelsnitt, de kurvor (även kallade koniska sektioner) som bildas när ett plan skär en ihålig rät cirkulär kon i olika vinklar. När en kon skärs av ett plan vinkelrätt mot konens axel bildas en cirkel. Genom att skära en kon i andra vinklar kan man åstadkomma de övriga kägelsnitten: ellipsen, hyperbeln, parabeln – och till och med två räta linjer.

Pascals teorem säger att om en sexhörning av vilket utse-



ende som helst är inskriven i en konisk sektion vilken som helst så kommer de motstående sidoparen (förutsatt att de dras ut tillräckligt långt) att skära varandra i tre punkter som ligger på en rät linje. Är den koniska sektionen en cirkel och sexhörningen någorlunda regelbunden, så kommer de motstående sidoparens skärningspunkter att befinna sig ganska långt borta.

Det är lättare att förstå vad Pascal menade om man väljer en ellips i vilken man inskriver en sexhörning som löper kors och tvärs. Det finns inte någon lag som säger att en sexhörning inte skulle kunna konstrueras på detta sätt, men man måste hålla reda på "motstående" sidor genom att numrera hörnen. (I nedanstående figur behöver sidorna 1–2 och 5–6 inte förlängas då de skär varandra inuti sexhörningen.)



Ett intressant faktum är att redan grekiska matematiker i Alexandria kände till ett specialfall av detta teorem – nämligen där den koniska sektionen utgörs av två varandra skärande räta linjer. Pascals berömda teorem illustrerar den typ av matematisk generalisering som matematikerna betraktar som en skön konst.

Register

Ett urval Prismaböcker

POPULÄRVETENSKAP

Irving Adler Tänk på ett tal *4: 50*
Isaac Asimov Blodet *6: 50*
Louis J. Battan Elementens raseri *4: 50*
Arthur H. Benade Ton och klang *6: 50*
Bergeijk – Pierce – David Ljudvågorna och vi *5: 50*
Matts Bergmark Farligt att förtära *6: 50*
Hermann Bondi Världsrymdens gåtor *4: 50*
R. L. F. Boyd Rymdraketer och satelliter *4: 50*
C. V. Boys Underverk med såpbubblor *4: 50*
I. Bernard Cohen Fysikens banbrytare *5: 50*
James A. Coleman Relativitetsteori för alla *4: 50*
Davis – Day Vatten – vetenskapens spegel *6: 50*
René Dubos Louis Pasteur och den moderna vetenskapen *4: 50*
H. J. Eysenck Psykologi på gott och ont *8: 50*
Fink – Lutyens Bakom TV-rutan *4: 50*
H. Munro Fox Djurens personlighet *5: 50*
Erich Franzen Testpsykologi *5: 50*
George Gamow Tyngdkraften *5: 50*
Donald R. Griffin Att se med hörseln *4: 50*
Donald J. Hughes Den fantastiska neutronen *4: 50*
Ian M. L. Hunter Minnet *4: 50*
Patrick M. Hurley Hur gammal är jorden *4: 50*
Lawrence P. Lessing Vad är kemi *5: 50*
Gunnar Lundquist Våra nerver *6: 50*
F. L. Marcuse Hypnos *6: 50*
A. Stuart Mason Hormonerna och hälsan *5: 50*
H. W. Newton Solens ansikte *6: 50*
Michael W. Ovenden Liv på andra planeter *5: 50*
Alfred Romer Den rastlösa atomen *5: 50*
W. W. Sawyer Räkna med nöje *6: 50*
Bengt Sjögren Farliga djur och djur som inte finns *6: 50*
Åke Wallenquist Astronomiskt lexikon *inb. 16: 50*
Hans Winterstein Sömn och dröm *5: 50*

HANDBÖCKER, REFERENSLITTERATUR

Per Estreen Vi går på operan *4: 50*
Arthur Jacobs Prisma musiklexikon *inb. 12: 50*
Samuel Karelitz Prisma barnläkarbok *6: 50, inb. 9: 50*
Keres – Kotov Konsten att vinna i schack *6: 50*
Gert Lindner Lilla fotoboken *7: 50*
Iva Maasing Sportbilar och bilsport *8: 50*
H.-P. Pellaprat Franskt kök för alla *inb. 7: 50*
Karl Ploetz Världshistorien i årtal *8: 50*
Prisma uppslagsbok *inb. 12: 50*
Prisma årsbok för aktieägare *inb. 16: 50*
Jerome och *Julia Rainer* Lyckliga tillsammans *6: 50*
Reese – Watkins Poker *5: 50*
Joseph Reither Prisma världshistoria *8: 50*
Hans Renner Musikens grunder *6: 50*
Gunnar Sandberg Vi ser på konst *7: 50*
Brita Schlyter Lek och leksaker *6: 50*
Göran Smith Arbete och ansvar *6: 50*
Göran Smith Parterna på arbetsmarknaden *5: 50*
Gunnar Stahre Vi bygger en sportstuga *6: 50*
Arthur Steiner Now you're talking *6: 50*
Maj Thermænius Gott och lättlagat *7: 50*
Jan Ullén Prisma bilhandbok *inb. 9: 50*
Åke Wallenquist Astronomiskt lexikon *inb. 16: 50*
Einar Werner Bridge på 20 lektioner *6: 50*
Westerlind – Beckman Sveriges ekonomi *4: 50*

KULTUR, POLITIK, SAMHÄLLE

Hans W:son Ahlmann m. fl. Afrika *inb. 16: 50*
Marcel Brion Dagligt liv i Wien på Mozarts och Schuberts tid *8:50*
Johannes Brøndsted Vikingarna – hemma och i härnad *8: 50*
Jérôme Carcopino Dagligt liv i antikens Rom *7: 50*
Sten Carlsson Bonde – präst – ämbetsman *6: 50*
Le Corbusier Vår bostad *8: 50*
Leonard Cottrell Försvunna städer *6: 50*
Kurt Friedlaender Mästerverk inom berättarkonsten *6: 50*
Ivar Harrie Sju grekiska sagor *7: 50*
Oscar Levertin Fyra författarporträtt *7: 50*
Ivar Lo-Johansson Zigenare *8: 50*
Einar Malm Sitting Bull och kampen om Vilda Västern *6: 50*
Wright Miller Ryssarna som människor *5: 50*
Thomas Sterling I Stanleys spår *6: 50*
Sven Stolpe Tre franska författare *6: 50*
Robert C. Suggs Polynesien – folk och kulturer *9: 50*
Hans Wattrang Det kalla kriget *7: 50*
Atos Wirtanen August Strindberg – liv och dikt *6: 50*
Alf Åberg Snapphanarna *6: 50*

ROMANER, NOVELLER, ANTOLOGIER m. m.

Henri Alain-Fournier Det underbara äventyret *4: 50*
C. J. L. Almqvist Folkliv och fantasi *6: 50*
H. C. Andersen *En Prisma-antologi 6: 50*
Sherwood Anderson Den lilla staden *4: 50*
Honoré de Balzac Frispråkiga historier *5: 50*
C. M. Bellman Fredmans epistlar. Fredmans sånger i urval *9: 50*
Georges Bernanos Prästmans dagbok *6: 50*
Erskine Caldwell Sydstatsnoveller *5: 50*
Karel Capek Salamanderkriget *6: 50*
Colette Claudine i skolan *4: 50*
Colette Claudine i Paris *4: 50*
Joseph Conrad Mörkrets hjärta *3: 50*
Stephen Crane De tappras tecken *3: 50*

R. H. Dana Två år för om masten *3: 50*
Dostojevskij *En Prisma-antologi 6:50*
Alfred Duggan Kung Romulus *5: 50*
Franska berättare *3: 50*
Gustaf Fröding Dikter *5: 50*
André Gide Om icke vetekornet dör *5: 50*
Nikolaj Gogol Taras Bulba *4: 50*
Gunnar Hahns visbok *6: 50*
Arthur Koestler Domens dag *5: 50*
D. H. Lawrence Kärlek bland höstackar *3: 50*
Anna Maria Lenngren Satir och idyll *6: 50*
Rose Macaulay Föräldralösa ön *5: 50*
A. E. W. Mason De fyra fjädrarna *5: 50*
W. Somerset Maugham Mrs Craddock *5: 50*
Guy de Maupassant En kvinna biktar och andra noveller *3: 50*
Guy de Maupassant Ett liv *3: 50*
Guy de Maupassant Olivdungen och andra noveller *4: 50*
Carson McCullers Spegling i ett gyllne öga *3: 50*
Alfred de Musset Bekännelser av ett seklets barn *4: 50*
Magnus von Platen Svenska aforismer *5: 50*
Ryska berättare *3: 50*
William Saroyan Den mänskliga komedin *3: 50*
Soya Min farmors hus *5: 50*
Spanska berättare *4: 50*
John Steinbeck Det var en gång ett krig *4: 50*
Jacob Wallenberg Min son på galejan *3: 50*
Evelyn Waugh En handfull stoft *4: 50*
Evelyn Waugh Press-stopp *3: 50*
Evelyn Waugh Skola för gentlemän *4: 50*
Oscar Wilde Lord Arthur Saviles brott och andra berättelser *3: 50*
Ödmann Hågkomster/*Geijer* Minnen *6: 50*

SPÄNNING, ÄVENTYR, HUMOR

Margery Allingham Tigern är lös *4: 50*
Margot Bennett Mannen som inte flög *3: 50*
Margot Bennett Någon från det förflutna *3: 50*
John Bingham Inspektor Morgans dilemma *4: 50*
John Bingham I repets skugga *3: 50*
Christianna Brand Katt och råtta *3: 50*
John Dickson Carr Bruden i Newgate *6: 50*
G. K. Chesterton Mr Ponds paradoxer *3: 50*
Virginia Cowles Spökmajoren *4: 50*
Lionel Davidson Nätter i Prag *4: 50*
D. V. Gallery Vi kapade en ubåt *4: 50*
Roman Garby-Czerniawski Spion 41 *5: 50*
William Haggard Hett uppdrag *4: 50*
William Haggard Ond cirkel *3: 50*
Robert A. Heinlein Dubbelstjärna *3: 50*
O. Henry Rent skoj u.p.a. *3: 50*
Geoffrey Household Duell i mörker *3: 50*
Geoffrey Household Hasard *4: 50*
Christopher Landon Kraniet *3: 50*
William March Det onda arvet *3: 50*
John P. Marquand Mellanlandning – Tokio *4: 50*
George Martelli Mannen som räddade London *5: 50*
Hans-Otto Meissner Fallet Sorge *4: 50*
A. A. Milne Röda husets gåta *3: 50*
Kar de Mumma Kar de Mummas bästa blandning *4: 50*
E. och *M. A. Radford* Vatten över huvudet *4: 50*
Shelley Smith Gift till döds *3: 50*
Thomas Sterling Mord i Venedig *3: 50*
J. F. Straker Bara inte mord *4: 50*
Julian Symons Brottets bana *3: 50*
Julian Symons Mordets färg *3: 50*
Josephine Tey Oskulden bedrar *3: 50*
John Baker White Sabotage *4: 50*