CHARLES HULTMAN

STUDIEPLAN

MED METODISKA ANVISNINGAR FÖR MATEMATIK-

UNDERVISNINGEN I ÅRSKURSERNA 3–6

I GRUNDSKOLAN

SKOLFÖRLAGET GÄVLE AB

Printed in Sweden by Westlund & Söner Boktryckeri ab 1963

FÖRORD

1957 års skolberedning, Kungl. Skolöverstyrelsen och andra ansvariga skolmyndigheter har framhållit det betydelsefulla i att studieplaner utarbetas till grundskolans läroplan. Denna studieplan vill bidraga till att täcka det behov av aktuella studieplaner, som föreligger. Författaren har av Kungl. Skolöverstyrelsen tilldelats stipendium för studieplansarbete.

För författaren till detta arbete har det varit angeläget att inte bara presentera *vad* som skall behandlas i årskurserna 3—6 utan också ge anvisningar om *hur* stoffet kan behandlas. Studieplanen innehåller därför metodiska anvisningar.

Det är författarens förhoppning, att studieplanen skall kunna underlätta lärarens arbete och dessutom bidraga till att öka intresset för den matematikmetodiska debatten.

Stockholm i juli 1963.

Charles Hultman

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

Sid.

Sid.

— Kap. 1 —

Utdrag ur grundskolans läroplan:

MATEMATIK

Mål

Genom undervisningen i matematik skall elevernas förmåga att handskas med kvantitativa begrepp utvecklas. Undervisningen har till uppgift att ge kunskap och färdighet i elementär aritmetik och algebra samt förtrogenhet med geometrins elementära begrepp och metoder. På grundval av en klar insikt bör eleverna förvärva säkerhet i att genom såväl huvudräkning som ändamålsenliga skriftliga tillvägagångssätt lösa olika slag av matematiska uppgifter, i första hand av praktisk natur. Undervisningen i geometri bör med utgångspunkt i elevernas iakttagelser av figurers och kroppars form öva deras förmåga av rumsföreställning och utveckla deras geometriska fantasi. Eleverna bör efter hand göras förtrogna med allmänt brukliga matematiska termer och uttryckssätt. Genom sitt innehåll bör undervisningen ge dem en vidgad natur- och samhällsorientering.

Huvudmoment

Lagstadiet

Uppfattning av de hela talen till och med tiotusen; grundtal och ordningstal; udda och jämna tal; ental, tiotal, hundratal, tusental.

Huvudräkning företrädesvis inom talområdet 1—100, varvid säkerhet bör eftersträvas i addition och subtraktion inom talområdet 1—18; grundlig övning i multiplikation med båda faktorerna inom talområdet 1—10 och motsvarande divisioner.

Begreppet noll.

Beteckning av talen inom talområdet 1—10 000.

Matematisk skrift för redovisning av olika tankegångar, innebärande addition, subtraktion, multiplikation och division ($6+2=8$ etc.).

Skriftlig räkning inom talområdet 1—10 000: addition med högst fem tresiffriga termer; subtraktion med i allmänhet högst tresiffriga termer; multiplikation med den ena faktorn ensiffrig och den andra i allmänhet högst tresiffrig; division utan rest av högst tresiffriga tal med ensiffrig divisor, i regel ej högre än 5.

Enkla problem.

Öre och kronor samt allmänt brukliga längd-, vikt- och volymmått. Enkla sortförvandlingar.

Mellanstadiet

Uppfattning och beteckning av de hela talen till och med en miljard, av bråk med små nämnare och decimaltal med tiondelar, hundradelar och tusendelar.

Huvudräkning: enkla beräkningar för att finna ett ungefärligt värde (överslagsberäkning) och enkla beräkningar för att finna ett exakt värde, varvid full säkerhet bör eftersträvas i addition och subtraktion med hela tal inom talområdet 0—18 samt i multiplikation med hela tal inom talområdet 0—10 och motsvarande divisioner.

Skriftlig räkning: de fyra räknesätten med hela tal och decimaltal av i praktiskt bruk förekommande storlek; avrundning; addition och subtraktion med de vanligast förekommande bråken, multiplikation med den ena faktorn ett bråk och den andra ett heltal, division av bråk med heltalsdivisor; förlängning och förkortning.

Procentbegreppet samt räkning med procenttal.

De viktigaste geometriska begreppen: linjer, strålar, sträckor, vinklar, ytor, kroppar; skala; enkla ritövningar och mätningar med graderad linjal, passare, gradskiva och smygvinkel; mätning och beräkning av omkrets och yta av rektanglar och trianglar samt volym av kuber och andra raka prismor med rektangulär basyta.

Problem ur vardagslivet med beaktande av elevernas intressen samt problem i anslutning till andra ämnen. Enkla övningar i grafisk framställning.

Öre och kronor samt allmänt brukliga längd-, yt- och volymmått, vikter, tidmått. Något om stycketalssorter. Sortförvandlingar av betydelse i vardagslivet.

Förslag till disposition av en studieplan

Årskurs 3

Uppfattning av talen till och med tio tusen, dels genom räkning med ett i taget — särskilt vid övergångarna mellan de olika hundratalen och tusentalen — dels genom räkning med hela tiotal, hundratal och tusental.

Beteckning av talen till och med 10 000. Ental, tiotal, hundratal, tusental; entalssiffra, tiotalssiffra, hundratalssiffra, tusentalssiffra; entalsrad, tiotalsrad, hundratalsrad, tusentalsrad. Tiotalssystemets egenskaper.

Huvudräkning: enkla additions- och subtraktionsuppgifter inom talområdet 1—100; repetition av additions- och subtraktionstabellerna inom talområdet 1—18; grundlig övning i multiplikation med båda faktorerna inom talområdet 1—10 och motsvarande divisioner.

Skriftlig räkning: addition utan och med minnessiffror samt med högst fem tresiffriga termer; subtraktion, även med lån, med i allmänhet högst tresiffriga termer; multiplikation med den ena faktorn ensiffrig och den andra i allmänhet högst tresiffrig; division utan rest av högst tresiffriga tal med ensiffrig divisor, i regel ej högre än 5.

Enkla problem med i regel endast ett räknesätt.

Övningar att uppfatta och — i tillämpliga fall — använda öre, kronor; centimeter, decimeter, meter, kilometer, mil; hektogram, kilogram; deciliter, liter. Sortförvandlingar mellan två närliggande sorter, varvid meter och centimeter betraktas som närliggande.

Årskurs 4

Uppfattning av de hela talen till och med en miljon, dels genom räkning med ett i taget — särskilt vid övergångarna mellan de olika hundratalen, tusentalen osv. — dels genom räkning med hela tiotal, hundratal, tusental osv. Tiotalssystemets egenskaper. Uppfattning av halva, tredjedelar, fjärdedelar, femtedelar och sjättedelar.

Beteckning av hela tal till och med 1 000 000 samt av halva tredjedelar, fjärdedelar, femtedelar och sjättedelar.

Huvudräkning med hela tal: addition och subtraktion huvudsakligen inom talområdet 0—100; inlärande av multiplikations- och divisionstabellerna; överslagsberäkning med hela tal huvudsakligen inom talområdet 0—100; uppgifter av typen $4+?=7$; $?-3=4$; $?\cdot 3=12$; $\frac{?}{3}=4$.

Skriftlig räkning med hela tal: addition med högst sex termer; subtraktion; multiplikation med minsta faktorn företrädesvis ensiffrig; division med företrädesvis ensiffrig divisor; multiplikation med 10, 100 och 1 000 samt motsvarande division.

Praktiska problem av olika slag med i allmänhet ett räknesätt.

Åskådningsgeometri: linje, sträcka, vinkel, yta, omkrets, rektangel, kvadrat; mätningar med kvadratcentimeter och kvadratdecimeter.

Övningar att uppfatta och — i tillämpliga fall — använda i föregående årskurser angivna måttenheter samt millimeter; hektoliter; gram, ton; sekund, minut, timme, dygn, vecka, månad, år. Förvandling mellan två närliggande sorter, varvid uppmärksammas, att meter och centimeter i regel kan betraktas som närliggande. Begreppen kilo—tusen och hekto—hundra.

Årskurs 5

Talsystemet till och med tio miljoner. Bråk med små nämnare, företrädesvis valda inom grupperna 2, 4, 8 och 3, 6, 12, samt decimaltal med tiondelar, hundradelar och tusendelar. Tiotalssystemets egenskaper.

Beteckning av hela tal till och med 10 000 000, bråk till och med tolftedelar och decimaltal till och med tusendelar. Små hela tal, uttryckta och betecknade som halva, tredjedelar och fjärdedelar; blandade tal med små nämnare.

Huvudräkning och överslagsberäkning med hela tal inom talområdet 0—1 000; huvudräkning med enkla bråk och decimaltal. Fortsatt övning av uppgifter av typen $?+4=7$; $7-?=3$; $3\cdot ?=12$; $\frac{12}{?}=4$.

Skriftlig räkning med hela tal: additioner med högst åtta termer; subtraktion; multiplikation med minsta faktorn högst tvåsiffrig; division med högst tvåsiffrig divisor; multiplikation och division med 10, 100 och 1 000; avrundning.

Skriftlig räkning med decimaltal: addition med högst åtta termer; subtraktion; multiplikation och division med högst tvåsiffriga heltal; avrundning. Enkel skriftlig räkning med bråk: addition och subtraktion med liknämniga bråk; bråks multiplikation och division med ensiffrigt heltal. Förlängning och förkortning.

Praktiska problem av olika slag även med flera räknesätt.

Åskådningsgeometri: repetition av i föregående årskurs ingående moment; kroppar; ytmått; beräkning av rektangelns omkrets och yta; mätningar med kubikcentimeter och kubikdecimeter.

Övningar att uppfatta och — i tillämpliga fall — använda i föregående årskurser angivna måttenheter samt kvadratmillimeter, kvadratcentimeter, kvadratdecimeter, kvadratmeter; kubikcentimeter, kubikdecimeter. Sambandet mellan kubikdecimeter och liter. Sortförvandlingar av praktisk natur. Begreppen deci = tiondel, centi = = hundradel och milli = tusendel.

Årskurs 6

Talsystemet till och med en miljard. Bråk i första hand till och med tjugofjärdedelar samt decimaltal till och med tusendelar.

Beteckning av hela tal till och med 1 000 000 000, av bråk till och med tjugofjärdedelar samt av decimaltal till och med tusendelar. Hela tal uttryckta och betecknade som bråk; blandade tal; övergång från decimaltal till bråk och omvänt.

Huvudräkning och överslagsberäkning: hela tal, bråk, decimaltal, procenttal; avrundning. Kombinationer av typen ? + 0,2 = 0,8; ? — 0,3 = 0,4; 2 · ? = 0,6; ? : 2 = 0,4.

Skriftlig räkning med heltal och decimaltal. Skriftlig räkning med bråk; addition och subtraktion med tal, innehållande företrädesvis nämnarna 2, 4, 8, 16; 3, 6, 12, 24; 2, 5, 10, 20; multiplikation med ena faktorn ett heltal och division med heltalsdivisor.

Praktiska problem av olika slag, bl. a. beräkning av medelvärden och procenträkning. Enkla stolp-, stapel- och linjediagram.

Geometri: enkla ritövningar med graderad linjal, passare, gradskiva och smygvinkel; strålar och sträckor; skala; vinklar och vinkelmätning; parallellogrammer och trianglar; omkrets- och ytberäkning av rektanglar och trianglar samt volymberäkning av raka prismor med rektangulär basyta.

Översikt av de dekadiska sorterna och tidmåtten. Orientering angående stycketalssorter. Sortförvandlingar av praktisk natur.

Anvisningar och kommentarer

Allmänna synpunkter

För barn i förskoleåldern uppstår kvantitetsproblem ur enkla vardagsupplevelser. I den mån de förmår lösa sådana problem, sker det i regel genom manuella operationer med verkliga föremål. Först i sjuårsåldern är genomsnittsbarnet i stånd till sådana tankeoperationer, som leder till lösning av uppgifter i addition, subtraktion, multiplikation och division. Vid denna tidpunkt har de manuella operationerna på grund av barnets mognad och kunskapsförvärv gradvis överförts till primitiva tankeoperationer. Denna mognad är också en förutsättning för att barnet skall kunna räkna skriftligt samt mäta och väga med standardiserade måttenheter. Många barn behöver ännu vid skolgångens början i stor utsträckning använda konkret materiel, då de räknar.

För ett fåtal elever sker utvecklingen från lösning med hjälp av konkret arbetsmateriel och vardagligt språk till tänkande i talsymboler och matematisk terminologi tämligen snabbt. För flertalet elever tar processen lång tid. Om de sistnämnda alltför tidigt och forcerat får övergå till symbolspråk, såsom vid sifferskrivning och uppställd räkning eller — längre fram — till algebraiskt språk, kommer deras tankeoperationer vid lösandet av matematiska problem att vila på osäker grund. Dessa elever riskerar att tillägna sig det matematiska innehållet på ett mekaniskt sätt, varav ofta följer förväxlingar av matematiska fakta och regler samt bortfall av väsentliga delar av det inlärda.

Även på senare åldersstadier sammanhänger kvantitetsuppfattning och matematiskt tänkande med erfarenheter av konkreta situationer. Så ofta som möjligt bör därför den inledande orienteringen om nya kursmoment utgå från manuellt arbete, mätövningar och demonstrationer med hjälp av åtskådliga figurer. Verbala härledningar och förklarande resonemang kan härigenom få en fastare förankring. Detta gäller bl. a. vid införandet av nya måttenheter, t. ex. längder, ytor, volymer och vikter. Även vid den fortsatta behandlingen av ett visst moment kan den konkreta framställningen behöva upprepas med längre tids mellanrum. Användningen av typproblem, formler, ekvationsmetoder och liknande lösningsförfaranden bör också för undvikande av tanklöst bruk av schablonmetoder omväxla med förnyat manuellt arbete, åskådliga demonstrationer eller begreppsutredningar, avpassade efter elevernas mottaglighet.

Eleverna bör tidigt göras uppmärksamma på de samband, som råder mellan olika räknesätt och mellan olika kunskapsmoment. Addition och subtraktion bör liksom multiplikation och division betraktas som besläktade räknesätt. Även sambandet mellan addition och multiplikation liksom mellan subtraktion och division bör påvisas. Geometrin kan användas vid demonstration av satser inom aritmetik och algebra. Omvänt bör kunskaper i aritmetik och algebra utnyttjas vid studiet av geometrin. Såvitt möjligt bör eleverna ledas att själva inse matematiska sammanhang och regler.

Ett huvudsyfte vid räkneundervisningen är att eleverna bibringas säkerhet och snabbhet i såväl huvudräkning som skriftlig räkning. För övning av den mekaniska räknefärdigheten bör rena sifferuppgifter förekomma i betydande omfattning. Huvudräkning skall övas i alla årskurser och på alla stadier. Sådan övning bör förekomma ofta men blott korta stunder varje gång, gärna i början av lektionen. Särskilt när det gäller att förbereda och för eleverna klargöra ett nytt moment, är huvudräkning med enkla tal ett viktigt hjälpmedel.

Eleverna bör lära sig att inse vikten av reda och noggrannhet. Läraren måste ständigt ge akt på deras redovisning av uppgifterna och ingripa så snart anledning därtill finns. Han skall härvid vara i minst lika hög grad positiv och rådgivande som negativ och rättande.

Lärostoff

Vid valet av uppgifter bör största hänsyn tas till elevernas erfarenheter och intressen. Att ofta och utan särskild introduktion låta eleverna tillämpa matematik på för dem okända områden innebär risk för att övningen stannar vid meningslös mekanisering. Eftersom matematikundervisningen i första hand skall fylla en praktisk uppgift, bör eleverna lära sig lösa sådana räkneuppgifter, som möter varje medborgare i hem, arbetsliv och samhälle. Så ofta det är lämpligt, bör matematiska problem behandlas i sitt praktiska sammanhang, även om detta ibland får till följd, att en traditionell systematik i undervisningen bryts. En överdriven gruppering av tillämpningsuppgifter i t. ex. rörelseproblem och blandningsproblem, som löses med speciella metoder, bör sålunda undvikas. I stället bör undervisningen läggas så, att eleverna vänjer sig vid att noggrant studera uppgiften och att göra klart för sig, vad som är bekant och vad som efterfrågas. De får på så sätt bättre förutsättningar att använda sina insikter och färdigheter i skiftande praktiska situationer.

Stor omsorg bör ägnas valet av uppgifter, så att svårighetsgraden väl avvägs med hänsyn till elevernas förutsättningar. Särskilt på de lägre stadierna bör räkneövningarna i regel omfatta enkla sifferexempel, som inte fordrar långa och tidsödande räkneoperationer. Alltför svåra uppgifter bör ej förekomma. Ett misslyckande i matematik blir ofta mer påtagligt än i de flesta andra ämnen och kan därför, särskilt på ett tidigt stadium, alstra olust och brist på självförtroende, vilket i fortsättningen kan hämma prestationsförmågan. Undervisningen bör därför läggas så, att om möjligt varje elev får erfara tillfredsställelsen att efter tankemöda lyckas med förelagda uppgifter.

Planering av studierna

Läraren bör vid varje undervisningstillfälle göra klart för sig vad han vill att eleverna skall lära sig. Det är viktigt, att det nya stoffet snarare är för litet än för stort. Tillräcklig tid måste anslås åt genomgång och klargörande av varje nytt moment. Därvid bör enkla tillämpningsexempel behandlas och uppgifternas svårighetsgrad endast långsamt stegras. Även behovet av repetition uppmärksammas. De olika momenten bör återkomma flera gånger under läsåret, så att den genomgångna kursen ständigt hålls aktuell. Vid undervisningen bör ett klart och koncist språk användas, och en korrekt matematisk terminologi införas alltefter elevernas ålder och förutsättningar. Såväl metoder som förklaringar bör vara omsorgsfullt förberedda och genomtänkta och noga avpassade efter elevernas allmänna utvecklingsståndpunkt. Det är ofta lämpligt att under en och samma lektion disponera tiden till såväl gemensam undervisning som individuellt arbete. Möjligheterna att individualisera undervisningen bör för övrigt flitigt utnyttjas. För att lättare kunna anpassa denna efter elevernas förutsättningar har man för högstadiet en allmän och en särskild kurs.

Under ämneskonferenser bör lärobokens innehåll noga granskas och undervisningens tidsmässiga och metodiska uppläggning diskuteras och planeras. Av skolöverstyrelsen utfärdade bestämmelser och kursförslag för matematikundervisningen genomgås.

Huvudmomenten anger, vad grundkursen skall omfatta, dvs. det som alla elever på det angivna stadiet skall arbeta med, samt — i fråga om den grundläggande undervisningen — vilka föreställningar och begrepp de skall förvärva, vilka matematiska operationer som skall övas och vilka måttenheter de skall lära sig att uppfatta och använda. Det som anses väsentligt i grundkursen bör om möjligt alla elever behärska vid slutet av ifrågavarande stadium. I varje årskurs skall även ingå överkurser. Så många elever som möjligt bör, enskilt eller i grupper, arbeta med överkursuppgifter, vilkas inriktning, omfång och svårighetsgrad blir beroende av varje elevs intresse och förmåga. För en del kommer arbetet att begränsas till grundkursen eller till en kurs, som också innehåller extra uppgifter av ringa svårighetsgrad. Andra kan föreläggas en överkurs med mer komplicerade problem inom grundkursens ram, med uppgifter för en högre årskurs eller med uppgifter utanför huvudmomenten.

Samverkan med andra ämnen

Samverkan bör ske med undervisningen i andra ämnen. De systematiska räkneövningarna kan i stor utsträckning hämta stoff från och stödjas av undervisningen i övrigt, t. ex. i hembygdskunskap, geografi, samhällskunskap, fysik, kemi, teckning, hemkunskap och slöjd. Vissa moment inom orienteringsämnena kan erhålla kvantitativ belysning under matematiklektioner genom att eleverna bearbetar statistiska data i form av diagram, utför medelvärdesberäkningar osv. Samverkan kan också åstadkommas på det sättet, att både den sakligt orienterande och den matematiska undervisningen sker inom ifrågavarande orienteringsämnes ram. Sålunda kan behandlingen av samhälls- och privatekonomiska förhållanden, t. ex.

aktier, obligationer och växlar, förläggas till lektioner i samhällskunskap, medan för eleverna mer aktuella moment, t. ex. angående ränta och rabatt, kan såväl ur saklig som matematisk synpunkt behandlas under matematiklektioner.

Arbetssätt

Nytt stoff presenteras ofta samtidigt för alla elever eller vid särskilda tillfällen för grupper av elever. Presentationen bör ske vid diskussion i klassen eller gruppen under lärarens ledning, varvid eleverna aktivt medverkar med synpunkter och uppslag. Ensidig demonstration från lärarens sida bör undvikas. Efter presentationen fortgår den gemensamma undervisningen kortare eller längre tid beroende på hur eleverna förmår att tillägna sig stoffet. Därefter måste de få tillfälle till självständigt arbete. Den gemensamma undervisningen bör inte få en sådan omfattning, att tiden för individuellt arbete blir alltför knapp. Vidare måste observeras, att laborativa moment inte får vara fristående utan bör ingå som naturliga led i undervisningen.

Eleverna bör tid efter annan arbeta med *övningsskrivningar,* som rättas men ej betygssätts. Läraren kan under sådana skrivningar undervisa elever, som t. ex. visar sig ej ha förstått elementära förfaringssätt eller över huvud taget har svårt för ämnet.

Eleverna skall under matematikstudierna vänjas vid noggrannhet, kritiskt tänkande och självkontroll. Redovisningen av behandlade problem bör vara redigt och noggrant gjord. Korrekta beteckningar och uppställningar bör användas. Siffror och bokstäver skall vara tydligt skrivna. Hjälpmedel, t. ex. linjal och passare, bör utnyttjas.

Vid problembehandling bör eleverna övas att genom en enkel överslagsberäkning söka göra sig en föreställning om det sökta resultatet och att pröva riktigheten eller åtminstone rimligheten av ett erhållet resultat. Också i andra sammanhang har överslagsberäkningar ett betydande praktiskt värde. Därför bör bl. a. uppskattning av relationer mellan tal med och utan angivna måttenheter övas, så att eleverna snabbt inser, t. ex. att 200 är ungefär dubbelt så mycket som 98. Överslagsberäkningar kan också för dem klargöra mätningars otillförlitlighet och visa värdet av att måttbestämda storheter anges utan onödig eller skenbar noggrannhet.

Kunskapsbehållningen blir större och varaktigare, om eleverna omedelbart kan konstatera, huruvida ett erhållet resultat är riktigt eller felaktigt. Eftersom läraren inte kan hinna kontrollera varje skriftlig räkneuppgift omedelbart sedan den utförts, bör eleverna i stor utsträckning ha tillgång till facit. Naturligtvis skall läraren ändå granska deras skriftliga arbete och ge behövliga anvisningar för korrigering eller omräkning av oriktigt lösta uppgifter.

Av särskild vikt är att de hemuppgifter som föreläggs eleverna behandlar i skolan genomgångna moment och är så få och enkla, att eleverna kan utföra dem på rimlig tid och utan hjälp. Stor återhållsamhet bör iakttas med hemuppgifter särskilt för de lägre årskurserna.

Elevernas kunskaper och färdigheter kontrolleras genom olika former av prov (jfr s. 29—31). Med hjälp av *diagnostiska prov* kan läraren konstatera, om eleverna inhämtat kursmomenten och på vilka punkter eventuella brister är mest allvarliga. Särskilt då läraren tar emot en ny klass är det angeläget, att han har till sitt förfogande prov som snabbt kan ge honom en uppfattning om, i vad mån eleverna behärskar genomgångna kursavsnitt. Även under arbetets gång bör sådana prov ges allt emellanåt, så att läraren ständigt vet, vem han bör lämna hjälp och anvisningar och på vilket sätt han bör göra det. *Egentliga provräkningar* bör vara så konstruerade, att de, utöver att visa hur eleven tillgodogjort sig undervisningen, ger en relativt tillförlitlig upplysning om hans matematiska förmåga. Det kan vara lämpligt att omkring en tredjedel av uppgifterna i en provräkning är mycket lätta och hämtade från nyss behandlade områden. Den därpå följande tredjedelen bör då vara av något högre svårighetsgrad och de återstående uppgifterna relativt svåra. Någon av de sista uppgifterna bör kräva viss kombinationsförmåga och inte vara endast en direkt tillämpning av genomgångna moment.

Hjälpmedel

Förutom läroboken behövs materiel av skiftande slag för att möjliggöra åskådlighet och konkretion i undervisningen — för läraren demonstrationsmateriel och för eleverna övningsmateriel.

Flanelltavla med tillbehör kan användas för att t. ex. åskådliggöra räknesituationer, underlätta undervisningen om talsorter och bråk samt för att på ett effektivt sätt stödja geometriundervisningen. Winnetkakort och räknespel ger omväxling i arbetet och befordrar inlärningen av väsentliga moment. Figurer och kroppar av olika form och material spelar en viktig roll vid ritnings- och mätningsövningarna. Företeelser i omgivningen kan tas till utgångspunkt för mätningar och beräkningar.

Undervisning på lågstadiet

Vid den förberedande matematikundervisningen skall eleverna genom konkret stoff erhålla åskådliga föreställningar om innebörden av mängd och antal. I anslutning härtill inövas begrepp som lika många, mera än, mindre än etc. Taluppfattningen skall byggas upp långsamt och systematiskt. Eleverna måste få en klar uppfattning av motsvarigheten mellan de hela talen och antalet föremål i olika mängder. De bör övas att se storleksförhållanden mellan tal och att uppfatta talens uppdelning och sammansättning.

Samverkan bör ske med undervisningen i t. ex. hembygdskunskap, som ger åtskilligt konkret stoff för matematikundervisningen. Under hembygdslektionerna kan man praktiskt tillämpa kunskaperna om de allmänt brukliga längd-, vikt- och volymmåtten samt om öre och kronor. Undervisningen i matematik kan också i viss mån anknyta till ämnet svenska. Att berätta »räknehistorier» har betydelse för barnens språkliga utveckling. Problemlösningen grundar sig på förståelse av den lästa texten.

När skriftlig räkning påbörjas bör man ge noggranna instruktioner om hur redovisningen skall utföras.

Varje klassrum för lågstadieklasser bör vara utrustat med våg med viktsatser, meterlinjal och måttband, liter- och decilitermått samt myntmateriel. Varje elev bör ha en centimetergraderad linjal och en myntsats samt någon lätthanterlig räknematerial, som kan användas vid den inledande behandlingen av nya kursavsnitt, t. ex. räknelappar, klossar, kulor och knappar.

UNDERVISNINGSPRINCIPER

Matematiken är under låg- och mellanstadiet ett renodlat färdighetsämne. Det finns få möjligheter för eleverna att själva välja ut de moment, som mest intresserar dem, och ägna sig speciellt åt dessa. Ämnets karaktär är sådan, att samtliga moment åtminstone till viss del måste behärskas av eleverna för att de skall kunna gå vidare i kursen.

Många lärare föredrar säkert *klassundervisning*, när det gäller grundkursen i matematik. Klasserna kan också delas upp i två à tre grupper, inom vilka *gruppundervisning* kan förekomma. Överkurserna bör lämpa sig för *individuell undervisning*.

Läroplanen betonar, att undervisningsformerna kan variera men att vissa principer måste iakttagas. »Även om sålunda undervisningsformerna och arbetssätten måste bli skiftande, gäller dock under alla omständigheter, att följande *undervisningsprinciper* i det praktiska skolarbetet skall tillämpas i ett organiskt sammanhang.» De principer, som läroplanen apostroferar, är *motivation, aktivitet, konkretion, individualisering* samt *gemenskap och samarbete*. Läroplanens framställning gäller skolans ämnen i stort. Det mesta som säges är tillämpligt på ämnet matematik och rekommenderas varmt till läsning. Utöver läroplanens framställning skall endast följande kortfattade synpunkter presenteras.

Motivation

Eleverna på låg- och mellanstadiet sätter oftast matematik högt upp, om de tillfrågas, vilka ämnen som de tycker bäst om. Ämnet som sådant är således högt motivationsladdat. När motivationen sviktar, beror det ofta på att det aktuella momentet är för svårt för eleverna. Bästa sättet att vidmakthålla den höga motivationen är tydligen att låta barnen syssla med sådana moment, som passar deras mognadsnivå. Tyvärr vet vi alltför litet om vilka moment som passar olika åldrar. Bråkläran anses av många elever alltför avancerad och bör följaktligen sättas in sent. Detsamma gäller också vissa geometriska moment, t. ex. volymsuppfattning och volymsmätning, som många elever upplever som alltför krångliga, då deras spatiala uppfattning ännu inte nått tillräcklig mognad.

För att eleverna skall bli motiverade att syssla med ett visst moment, måste de undervisas om momentet i fråga. Om läraren kan presentera stoffet på ett sådant sätt, att eleverna verkligen *förstår* de operationer, som leder till resultat, och inte endast lär sig en viss teknik, har mycket vunnits för en riktig motivation.

De flesta uppgifterna bör ur motivationssynpunkt anknyta till den verklighet, som eleverna kommer att möta eller redan är förtrogna med. Men många elever roas också av att möta uppgifter av räknegåtskaraktär och sådana uppgifter som kräver självständigt matematiskt tänkande.

Aktivitet

Vid genomgång av ett nytt moment eller repetition av ett tidigare genomgånget avsnitt skall eleverna vara aktivt engagerade. Ofta lämpar sig här en heuristisk metod. Läraren är frågeställare och eleverna för med sina svar undervisningen framåt. Eftersom alla elever skall vara aktiva, måste läraren avpassa sina frågor så, att även de svagaste kan svara rätt på en del frågor.

Utomordentligt viktigt är, att eleverna ges tillfälle att ställa frågor till läraren och naturligtvis också till kamraterna.

När lärarens genomgång är avslutad och eleverna har frågat färdigt, vidtager elevernas arbete, enskilt eller i grupp. Ofta består detta arbete i att räkna ett antal uppgifter, liknande dem som nyss behandlats gemensamt. Av vikt är, att uppgifterna varieras så, att räknandet inte bara blir rutin utan kräver ett visst mått av eftertanke. Andra elevaktiviteter bör också förekomma, t. ex. mätningar av olika slag, helst åtföljda av anteckningar om erhållna värden. I samband med geometriundervisningen bör eleverna kunna få skapa olika mönster med hjälp av passare och linjal osv. En viktig form av elevaktivitet är kontrollen av de egna uppgifterna. Ju snabbare eleverna kan få bekräftat, att de har arbetat på rätt sätt, ju lättare är det att hålla aktiviteten uppe. Den omedelbara kontrollen förstärker också inlärningseffekten.

Konkretion

Utan konkretion existerar ingen matematikundervisning värd namnet. När eleverna börjar syssla med matematik, måste talföreställningarna byggas upp med konkret material. Syn, hörsel och känsel måste hela tiden få spela samman. Materialet kan vara enkelt. Kulor, knappar, lappar, knackningar att räkna, plastelina att göra kulor eller »gubbar» av osv.

Sorträkning och sortförvandling skall alltid läras i samband med konkreta mätningar och skattningar. Geometriundervisningen är otänkbar utan konkreta figurer, ritade av eleverna själva, att arbeta med. Dessutom måste rätblock, cylindrar och annan geometrisk materiel finnas.

I konkretion ingår också att utnyttja praktiska räknesituationer. Hit hör t. ex. arbete med prislistor, statistiska uppgifter ur dagspressen, idrottsresultat, matematiska problem hämtade från slöjd, teckning, geografi, samhällskunskap osv.

Ett mera komplicerat moment kan oftast konkretiseras genom hänvisning till redan inlärda kunskaper. *Det finns inga moment, som inte bygger på tidigare inlärda.* Enstaka detaljer kan vara matematiska konventioner. Detta gäller bl. a. vissa skrivsätt. Dessa detaljer är inte flera än att eleverna utan svårighet kan lära dem. Läraren bör tala om, att det rör sig om konventioner och inte tillgripa krystade förklaringar, som mera krånglar till än benar upp. Detta gäller t. ex. de matematiska tecknen, bråkbeteckningen, beteckningen av yt- och volymsorter osv.

Individualisering

Få ämnen torde lämpa sig bättre för individualisering än ämnet matematik. Bäst behövs individualiseringen dels för de räkneretarderade eleverna och dels för de speciellt räknebegåvade eleverna. Varje erfaren lärare vet, att även en mycket kort handledning av en enskild elev kan tillrättalägga och hjälpa på traven. Rätt snart lär sig läraren, vilka elever i klassen som har svårt att komma i gång med eget arbete. Ofta räcker det, att läraren ställer sig vid elevens arbetsplats. Ibland behövs också en liten fingervisning och ett uppmuntrande ord.

Överkurserna bör ge rika möjligheter till individualisering. De matematikbegåvade eleverna bör i överkurserna hitta uppgifter, som tillfredsställer deras behov av mera avancerat arbete. Samtidigt behöver den räknesvage finna uppgifter, som ger ytterligare lätt träning av matematiska elementa. Naturligtvis vore det idealiskt, om varje elev helt utan påtryckningar kunde få följa sin egen takt. Tyvärr skulle dock detta vålla stora administrativa svårigheter, inte minst vid övergången mellan olika stadier eller vid lärarbyte. Helst bör nog eleverna hållas samman inom grundkursen och individualiseringen ske inom överkursen.

Hemuppgifterna bör helst individualiseras, både till antal och till svårighetsgrad. Den matematikbegåvade, som dessutom kanske kan få hjälp hemma, kan lösa flera och svårare uppgifter, kanske rent av få författa nya uppgifter till ett avsnitt, medan den räknesvage bör tilldelas endast ett par enkla uppgifter, som han efter viss tankemöda till sin egen tillfredsställelse kan lösa.

Gemenskap och samarbete

Eleverna bör uppmuntras att samarbeta så ofta de kan. Ingenting hindrar, att eleverna delas upp i arbetsgrupper, som inom sig har hunnit lika långt i undervisningen. Detta betyder oftast, att elever med i stort sett samma förutsättningar samarbetar.

I allmänhet är det bäst med ganska små grupper i samarbetet inom ämnet matematik, och helst bör grupperna bestå av ganska jämbördiga elever. Två och två arbetar eleverna ofta mycket bra tillsammans. Blir grupperna större och arbetstakten och begåvningen hos gruppmedlemmarna är väsentligt olika, kan den saktfärdige utsättas för en onödig press. Han frestas att bli en avskrivande elev i stället för en räknande elev.

Vid vissa arbeten, t. ex. vid mätningar, kan grupperna göras större. Ofta behövs två elever för att utföra själva mätningen, medan två kan anteckna resultaten. Tabellträning kan också ske inom en grupp om tre à fyra elever. Eleverna inom en grupp bör givetvis få sköta rättning och kontroll själva. Lärarens uppgift blir att undervisa och förklara.

Det finns givetvis alltid elever, som föredrar att arbeta ensamma. Det är självklart, att de skall tillåtas göra detta.

Grundkurs och överkurs

Ur *Anvisningar och kommentarer* hämtas: »Huvudmomenten anger, vad grundkursen skall omfatta, dvs. det som alla elever på det angivna stadiet skall arbeta med, samt — i fråga om den grundläggande undervisningen — vilka föreställningar och begrepp de skall förvärva, vilka matematiska operationer som skall övas och vilka måttenheter de skall lära sig att uppfatta och använda. Det som anses väsentligt i grundkursen bör om möjligt alla elever behärska vid slutet av ifrågavarande stadium. I varje årskurs skall även ingå överkurser. Så många elever som möjligt bör, enskilt eller i grupper, arbeta med överkursuppgifter, vilkas inriktning, omfång och svårighetsgrad blir beroende av varje elevs intresse och förmåga. För en del kommer arbetet att begränsas till grundkursen eller till en kurs, som också innehåller extra uppgifter av ringa svårighetsgrad. Andra kan föreläggas en överkurs av mer komplicerade problem inom grundkursens ram, av uppgifter för en högre årskurs eller av uppgifter utanför huvudmomenten.»

Grundkursens och överkursens uppgifter bör för de flesta elever vara intimt knutna till varandra, antingen så, att överkursuppgifterna följer i direkt anslutning till grundkursuppgifterna eller så, att grundkursavsnittet har ett mot innehållet svarande överkursavsnitt på annat ställe i läroboken, lämpligen i dess senare del. Om överkursavsnittet följer i direkt anknytning till grundkursavsnittet, har eleverna svårigheter att skilja de båda åt. Detta medför, att *samtliga* elever vill räkna *samtliga* uppgifter — både grundkursens och överkursens — och detta är en alltför ansträngande uppgift för många elever. För att lindra denna press på eleverna — inte sällan ligger föräldrarna bakom — är det att föredra, att överkursavsnitten är placerade i slutet av boken. Eleverna kan då känna sig färdiga med ett avsnitt, när grundkursen är genomarbetad, och detta skänker tillfredsställelse.

När eleverna lämnar mellanstadiet bör alla behärska räkning med hela tal och decimaltal samt mycket enkel sortförvandling och sorträkning. Dessutom bör de ha fått träning i att använda linjal och passare. Då framför allt de svagare eleverna har begränsad minnesvidd, bör de i berörda avsnitt ingående momenten erhålla så mycken övning, att man kan tala om *överinlärning*. Allt talar för att de svagare eleverna behöver mycken övning att lösa uppgifter utan text, s. k. mekaniska uppgifter. Den verbala situationen, dvs. då eleven föreläggs att lösa en textuppgift, har mycket litet att göra med verkligheten, som den upplevs av eleven. Samma elev, som inte alls klarat den verbala uppgiften, löser elegant uppgiften, när den uppenbarar sig i verkliga livet. Men för att kunna göra detta måste eleven behärska redskapet, dvs. den mekaniska räkningen.

Av hänsyn till det ovan sagda är det viktigt, att överkursavsnitten för de svagaste eleverna innehåller rikligt med s. k. mekaniska uppgifter, gärna något enklare än grundkursuppgifterna. Om grundkursen inte tillåtes svälla för mycket, kan det bli tid även för de svagare eleverna att arbeta med överkursuppgifter av nämnt slag. Särskilt för elever i de lägre årskurserna är detta viktigt. Intresset för matematik hålles levande och arbetsintensiteten är stor.

De flesta eleverna tillhör begåvningsmässigt mellanskiktet. Dessa elever behöver ofta mycken övning i mekanisk räkning. Dessa uppgifter skall vara av samma svårighetsgrad som grundkursuppgifterna eller obetydligt svårare. Åtskilliga av dessa elever känner tillfredsställelse, när de får bena upp en textuppgift och lösa den. Viktigt är, att textmassan i alla uppgifter är liten. Vi måste minnas att praktiskt taget varje klass innehåller elever med mer eller mindre uttalade läs- och skrivsvårigheter. En läsretarderad elev kan vara en god matematiker. Det är väsentligt att så långt möjligt försöka få dessa elever att i matematiken uppleva den tillfredsställelse som på grund av lässvårigheter förmenas dem i en rad andra ämnen.

Även de mest begåvade eleverna skall tillfredsställas. Dessa elever är ofta förtjusta i s. k. räknegåtor och andra uppgifter, som kräver självständigt matematiskt tänkande. Sådana uppgifter kan mycket väl serveras inom grundkursens ram. Den lärare, som så önskar, kan naturligtvis också låta de mest begåvade eleverna arbeta med moment, avsedda för en högre årskurs. En viss restriktivitet är nog ändå tillrådlig, då inte endast den matematiska begåvningen utan också den allmänna mognaden spelar roll för elevernas arbete. En matematiskt välbegåvad elev, som i fråga om allmän mognad inte skiljer sig från sina kamrater, mår säkert bättre av att syssla med avancerade uppgifter inom grundkursens ram än att mer eller mindre på egen hand försöka klara uppgifterna för en högre årskurs.

Några förslag till överkursuppgifter

Naturligtvis kan här nedan endast serveras ett mycket litet urval av lämpliga uppgifter. Repetitionsprincipen bör vara kraftigt uttalad i överkursavsnitten. Eleverna bör ofta få tillfälle att byta räknesätt, detta för att hålla kunskaperna aktuella.

A-uppgifter: avsedda för de svagare eleverna.
B-uppgifter: avsedda för mellanskiktet.
C-uppgifter: avsedda för de bäst begåvade eleverna.

Årskurs 3

Addition

A-uppgifter: mekanisk addition; uppgifter av typen $2+?=8$.
B-uppgifter: mekanisk addition; uppgifter av typen $2+?=8$; enkla textuppgifter.
C-uppgifter: räknegåtor; magiska kvadrater.

Subtraktion

A-uppgifter: mekanisk subtraktion; uppgifter av typen $8-?=6$.
B-uppgifter: mekanisk subtraktion; uppgifter av typen $8-?=6$; enkla textuppgifter.

Multiplikation

A-uppgifter: mekanisk multiplikation; uppgifter av typen $3 \cdot ?=6$.
B-uppgifter: mekanisk multiplikation; uppgifter av typen $3 \cdot ?=6$; enkla textuppgifter.
C-uppgifter: räknegåtor; uppgifter med två räknesätt; enkel faktoruppdelning.

Division

A-uppgifter: mekanisk division; uppgifter av typen $?:4=2$.
B-uppgifter: mekanisk division; uppgifter av typen $?:4=2$; enkla textuppgifter.
C-uppgifter: räknegåtor; uppgifter med två räknesätt.

Allmänt

C-uppgifter: Uppgifter av typen: »Två termer var 48 och 65. Hur stor var summan? Skillnaden mellan två tal var 97. Det ena talet var 68. Hur stort var det andra talet? Vilken produkt ger faktorerna 6 och 8? I en uppgift var dividenden 16 och kvoten 4. Vilken var divisorn? »Korsord» med alla räknesätt och sortförvandling; konstruktion av egna »korsord».

Årskurs 4

Addition

A-uppgifter: mekanisk addition, rep. av uppgifter, lösta i årskurs 3; fortsatt övning av uppgifter av typen $4+?=7$.

B-uppgifter: mekanisk addition; fortsatt övning av uppgifter av typen $4+?=7$; enkla textuppgifter, även med två räknesätt.

C-uppgifter: se nedan.

Subtraktion

A-uppgifter: mekanisk subtraktion; rep. av uppgifter lösta i årskurs 3; fortsatt övning av uppgifter av typen $8—?=3$.

B-uppgifter: mekanisk subtraktion; fortsatt övning av uppgifter av typen $8—?=3$; enkla textuppgifter, även med två räknesätt.

C-uppgifter: se nedan.

Multiplikation

A-uppgifter: mekanisk multiplikation, framförallt med ensiffrig första faktor; rep. av uppgifter lösta i årskurs 3; fortsatt övning av uppgifter av typen $8 \cdot ?=32$.

B-uppgifter: mekanisk multiplikation; fortsatt övning av uppgifter av typen $8 \cdot ?=32$; enkla textuppgifter även med två räknesätt.

C-uppgifter: se nedan.

Division

A-uppgifter: mekanisk division, framförallt med ensiffrig divisor; rep. av uppgifter lösta i årskurs 3; fortsatt övning av uppgifter av typen $?:3=4$.

B-uppgifter: mekanisk division; fortsatt övning av uppgifter av typen ? : 3 = 4.

C-uppgifter: se nedan.

C-uppgifter i årskurs 4

Räknegåtor; uppgifter med flera räknesätt; att ersätta frågetecken, t. ex. 4 · 19??? = ?6700; 5???5—?389? = 14875; 423?0? : 9 = ??056 osv. uppdelning av enkla produkter i faktorer; enkla uppgifter rörande skalbegreppet; »talmystik» av typen: Skriv av och fyll i »tabellen»:

33 · 3 367 =
66 · 3 367 =
99 · 3 367 = osv.

Multiplikation och division med tresiffrig första faktor respektive divisor.

Årskurs 5

Hela tal och decimaltal

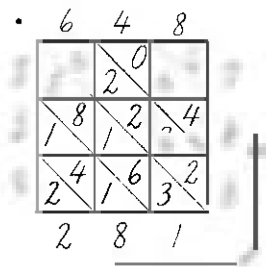
A-uppgifter: mekaniska uppgifter; uppgifter av typen ? + 4 = 13 osv.; rep. av uppgifter lösta i årskurs 4.

B-uppgifter: mekaniska uppgifter; uppgifter av typen ? + 4 = 13 osv.; enkla textuppgifter med flera räknesätt.

C-uppgifter:

»Muselmansk» multiplikation

Uppgiften, som skall lösas, är 435 · 648 = 281 880.



Utför varje enkel kombination för sig. Ta t. ex. 5 · 8 = 40. 4:an skrives under och 0:an över diagonalen. När rutsystemet ifyllts, adderas utefter diagonalerna. Produkten läses i pilens riktning.

»Egyptisk» multiplikation

Uppgiften, som skall lösas, är $23 \cdot 35 = 805$.

23	35
11	70
5	140
~~2~~	~~280~~
1	560
	805

Ta »hälften av» i vänstra kolumnen och »dubbelt upp» i den högra. Om halva erhålles vid halveringen i vänstra kolumnen, så negligeras dessa. Ta i vänstra kolumnen reda på alla jämna tal, och stryk »rakt över». Addera återstående tal i högra kolumnen.

Geometri

C-uppgifter: enkla konstruktioner med linjal och passare.

Årskurs 6

Hela tal och decimaltal

A- och B-uppgifter: se årskurs 5.

C-uppgifter: något om förhållanden; halvårsränta; räknegåtor av typen $12 + \square = \triangledown$

$\triangledown : \square = \bigcirc$

$\bigcirc \cdot \triangledown = 54$, där varje figur står för ett bestämt tal.

Geometri

C-uppgifter: enkla konstruktioner med linjal och passare; »mönsterkompositioner».

Diagram

C-uppgifter: att konstruera enkla diagram.

Samverkan med andra ämnen

Utöver vad läroplanen säger (sid. 172), kan följande anföras. Ofta har framhållits, att varje lärare skall vara en modersmålslärare, oavsett vilket ämne han undervisar i. Under matematiklektionerna kan träning i exakt läsning ges. Men på samma sätt kan varje lärare, oavsett ämne, vara en matematiklärare. Under arbetet i hembygdskunskapen och orienteringsämnena kan eleverna erhålla mängder av uppgifter, som lämpar sig för matematisk lösning. Självfallet erbjuder övningsämnena goda tillfällen till räkning. Skall matematiken kunna ingå som en komponent i den samlade undervisningen, måste den naturligt in, då den har en uppgift att fylla.

Lärarens roll

Lärarens roll i matematikundervisningen är mångfaldig. Här skall endast ett par uppgifter nämnas.

Genomgången av nya ämnesområden bör ske på svarta tavlan. Läraren tjänstgör som *uppgiftsgivare, frågeställare* och *sekreterare.* Eleverna är ständigt engagerade av lärarens frågor, som skall vara så konstruerade, att de i sig själva innehåller ett inlärningsmoment.

Rättning och kontroll av elevernas arbete

Den moderna inlärningspsykologien betonar starkt värdet av *reinforcement,* förstärkning. För att förstärkning (i inlärningen) skall erhållas fordras att eleverna, omedelbart sedan en uppgift lösts, får bekräftelse på om den är rätt eller felaktigt behandlad. Eftersom det är uteslutet, att läraren omedelbart skall kunna kontrollera resultatet, är det väsentligt, att eleverna har tillgång till facit. Helst bör varje elev ha egen sådan. En del lärare kanske menar, att detta inbjuder till fusk, men om förhållandet mellan lärare och elev är det rätta, och eleven känner, att han i läraren har en vän och hjälpare, har han ingen anledning att fuska.

Naturligtvis blir inte lärarens arbete mindre, för att facitarbetet överlåtes på eleverna. Läraren får lika mycket att göra, men hans kapacitet utnyttjas till väsentliga uppgifter, nämligen kontroll av arbetssätt, felanalys och handledning. Om eleverna har tillgång till facit, hindras de också från att räkna uppgift efter uppgift fel. Modellen med sidor fulla av bockar är definitivt antikverad.

Prov och betygssättning

Diagnostiska prov

De diagnostiska proven kan vara av två slag. Det bör finnas prov, som kan sättas in t. ex. då eleven startar sin skolgång på mellanstadiet eller högstadiet. Dessa prov bör avse att undersöka, om eleverna behärskar vissa matematiska elementa, t. ex. räkning med hela tal. Av samma slag är diagnostiska prov, som sättes in, innan ett repetitionsavsnitt startar. Här är naturligtvis avsikten att ta reda på om några elever så väl behärskar det närmast kommande avsnittet, att de kan få mera meningsfullt arbete med överkursavsnitt i stället för att tråkas av ett avsnitt, vars innehåll de redan är fullt förtrogna med.

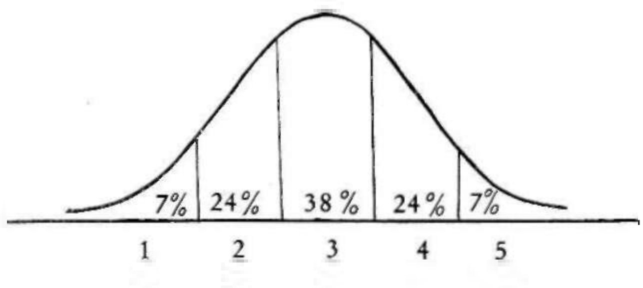
Det bör också finnas diagnostiska prov, vars uppgift är att kontrollera, om ett just avslutat avsnitt verkligen inlärts, eller om några elever eventuellt behöver ytterligare handledning och övning, innan det nya avsnittet startas.

De diagnostiska proven är sålunda avsedda att ge läraren upplysningar om vilka elever som kan få sysselsätta sig med nya moment eller vilka elever som behöver mera undervisning och övning. *Diagnostiska prov skall under inga omständigheter betygsättas.*

Provräkningar

Tyvärr synes inte alla läroboksförfattare och provkonstruktörer kunna skilja mellan diagnostiska prov och provräkningar. De egentliga provräkningarnas uppgift är att visa elevens matematiska status jämförd med andra elevers. Medan resultatet av ett diagnostiskt prov helst bör vara sådant, att 100 % av eleverna har 100 % rätt, är provräkningar, som inte kan differentiera eleverna i betygshänseende på alla nivåer, värdelösa.

För betygssättningen har Kungl. Skolöverstyrelsen utfärdat anvisningar. På ett riksrepresentativt urval skall betygsfördelningen se ut på följande sätt.



De provräkningar, som anknyter till läroboken, bör på ett representativt urval av elever ge ovan visade betygsfördelning. Det är därför nödvändigt, att provräkningarna utprövas. Det måste finnas uppgifter med nära hundraprocentig lösningsfrekvens och sådana med mycket låg lösningsfrekvens, och uppgifterna inom provräkningen skall vara ordnade i stegrad svårighetsgrad. Uppgiftsanalys skall vara verkställd, så att man vet hur uppgifterna särskiljer på olika begåvningsnivåer.

Givet är, att en enskild klass på 30-talet elever inte uppvisar någon normalfördelning. Två sexor kan mycket väl läsa i klassrummen intill varandra och båda ha utomordentligt duktiga lärare och ändå kanske den ena klassen ligger betygsmässigt väsentligt sämre till än den andra. Detta beror naturligtvis på att begåvningsunderlaget är olika i de båda klasserna och förhållandet får varken vara en källa till glädje eller till besvikelse. Det är endast att konstatera, att skillnaderna föreligger.

En god provräkning kan lämpligen till en tredjedel bestå av mekaniska uppgifter, till en tredjedel av kursbundna uppgifter med text samt till en tredjedel av uppgifter, som särskilt prövar elevernas förmåga av självständigt matematiskt tänkande.

Antalet uppgifter i en provräkning är givetvis beroende på vilken tid som står till förfogande för provräkningen samt av uppgifternas art. Elever på mellanstadiet bör inte ha provräkningar som i årskurs 4 kräver mer än 1 timme och i årskurs 6 mer än $1^1/_2$ timme. Längre provräkningar kan utsätta eleverna för alltför stora påfrestningar. På denna tid kan eleverna högst hinna med 10 à 12 uppgifter. För den som är något förtrogen med testmetodik står det omedelbart klart, att det inte finns någon som helst möjlighet att ge eleverna ett betyg, som har någon grad av tillförlitlighet, på så få uppgifter som 10 à 12. Att påstå något annat vore nonsens. Om man däremot slår ihop resultaten från två provräkningar, omfattande sammanlagt 20 à 24 uppgifter, blir möjligheterna till en tillförlitligare betygssättning avsevärt bättre, men antalet uppgifter är fortfarande otillräckligt. Mest tillfredsställande blir betygssättningen, om resultaten från 6 à 8 provräkningar används som underlag. Slumpinflytelserna kan då betraktas som tillräckligt små för att betygssättningen skall bli rättvisande.

Tips för års- eller terminsplaneringen

1. Gå igenom läroboken och läroplanen samtidigt. Vilka moment kan strykas ned, vilka behöver mera övning?

2. Diskutera lärogången i läroboken och dela vid behov upp den i lämpliga veckoavsnitt. Denna uppdelning skall givetvis endast vara rådgivande, inte bindande.

3. Diskutera de algoritmer och metodiska tips läroboken rekommenderar. Lärobokens förslag behöver inte nödvändigtvis vara de bästa.

4. Uppdrag åt någon matematikintresserad kollega att muntligt och åskådligt demonstrera och kommentera lärobokens förslag till lösning av metodiska problem. Gör nödvändiga korrigeringar. Försök att enas om algoritmer.

5. Resonera igenom vilken materiel, som behöver anskaffas till hjälp i undervisningen. Våg, viktsatser, måttband, mätlinjaler, flanellografer skall finnas i klassrummen.

6. Ge någon kollega i uppgift att svara för att diagnostiska prov, provräkningar och facit till läroboken rekvireras.

7. Diskutera var diagnostiska prov och provräkningar bör sättas in, om läroboken inte tydligt anger detta.

8. Granska överkursavsnitten. Erbjuder dessa tillräcklig extra träning för svaga elever och lämpligt huvudbry för de bäst begåvade?

9. Ge varandra tips på andra övningar, som läroboksförfattaren förbisett eller aldrig hört talas om.

10. Fråga Er själv och kollegerna: Behöver eleverna verkligen kunna detta? Hur stort är behovet av förmågan att kunna utföra förvandlingar mellan t. ex. hektoliter och liter?

11. Om geometriavsnittet är samlat i slutet av läroboken, bör det vid årsstarten fördelas någorlunda jämnt över läsåret.

— Kap. 3 —

ÅRSKURS 3

Huvudräkning

Ur *Anvisningar och kommentarer* till läroplanen saxas: »Ett huvudsyfte vid räkneundervisningen är att eleverna bibringas säkerhet och snabbhet i såväl huvudräkning som skriftlig räkning. *För övning av den mekaniska räknefärdigheten bör rena sifferuppgifter förekomma i betydande omfattning.* (Kurs. här.) Huvudräkning skall övas i alla årskurser och på alla stadier. Sådan övning bör förekomma ofta men blott korta stunder varje gång, gärna i början av lektionen. Särskilt när det gäller att förbereda och för eleverna klargöra ett nytt moment, är huvudräkning med enkla tal ett viktigt hjälpmedel.»

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* Huvudräkning: enkla additions- och subtraktionsuppgifter inom talområdet 1—100: repetition av additions- och subtraktionstabellerna inom talområdet 1—18; grundlig övning i multiplikation med båda faktorerna inom talområdet 1—10 och motsvarande division.»

Ur *Anvisningar och kommentarer:* »Eleverna bör tidigt göras uppmärksamma på de samband, som råder mellan olika räknesätt. — — — Addition och subtraktion bör liksom multiplikation och division betraktas som besläktade räknesätt. Även sambandet mellan addition och multiplikation — — — bör påvisas.»

All räkning är givetvis huvudräkning. Därför vore det kanske lämpligare att använda termen »muntlig räkning». Men denna täcker inte heller allt, som rymmes inom det gamla begreppet huvudräkning, eftersom åtskilliga uppgifter inom området kan redovisas genom att resultatet av räkningen skrives.

Additionstabellen

Viktigt är att de s. k. svåra kombinationerna övas. Dessa är:

4+8; 8+4	6+7; 7+6
5+7; 7+5	6+8; 8+6
5+8; 8+5	7+8; 8+7

En additionskombination bör oftast presenteras tillsammans med sin omvändning. Efter $4+8$ bör komma $8+4$. Därmed uppmärksammas den *kommutativa lagen* $a+b=b+a$.

Lämpligt är att i samband med den muntliga räkningen »följa upp» kombinationerna. En serie frågor kan alltså se ut så här: $7+5=?$; $17+5=?$ osv. $5+7=?$; $15+7=?$; $25+7=?$ osv.

Givetvis bör också enkla övningar med båda termerna två- eller tresiffriga förekomma: $11+70=?$ $21+10=?$ $31+10=?$ osv. $11+11=?$ $21+11=?$ osv. $101+100=?$ $201+100=?$ osv.

Subtraktionstabellen

Subtraktionskombinationerna bör övas i samband med additionskombinationerna: $7+5=?$ $5+7=?$ $12-7=?$ $12-5=?$ osv. Härigenom uppmärksammas kanske bäst sambandet mellan de båda räknesätten. Även här bör kombinationerna följas upp: $12-7=?$ $22-7=?$ $32-7=?$ $12-5=?$ $22-5=?$ $32-5=?$ osv.

Multiplikationstabellen

Kunskap i de olika tabellerna är matematikfärdighetens ryggrad. *Verklig kunskap kan aldrig erhållas utan förståelse.* Det är därför utomordentligt viktigt, att eleverna först genom konkreta övningar (se Skriftlig räkning osv.) verkligen får klart för sig varför $2 \cdot 3=6$ och $3 \cdot 2=6$ osv. Drill utan förståelse är totalt meningslös.

När eleverna genom konkreta övningar byggt upp sin egen multiplikationstabell, bör muntlig räkning i stor utsträckning tillgripas för att befästa kunskaperna. Genom mycken övning når eleverna en status av *överinlärning* och denna har stor betydelse för *retentionen,* dvs. att det inlärda verkligen sitter kvar i minnet.

Även i multiplikation gäller *kommutativa lagen,* dvs. $a \cdot b=b \cdot a$. Detta har eleverna redan erfarit, när tabellen byggdes upp. En kombination bör inte presenteras utan att dess omvändning också presenteras. Efter $4 \cdot 5=?$ kommer alltså $5 \cdot 4=?$ osv. Särskild uppmärksamhet bör ägnas den svårare delen av tabellen, från $6 \cdot 6$ till $9 \cdot 9$. För att sambandet mellan addition och multiplikation skall minnas, bör ibland uppgifter av typen $4+4+4=?$ åtföljda av $3 \cdot 4=?$ serveras.

Divisionstabellen

Divisionstabellen är multiplikationstabellens omvändning, och detta bör ständigt uppmärksammas i samband med multiplikationsövningar. $4 \cdot 3 = ?$; $3 \cdot 4 = ?$; $12 : 3 = ?$; $12 : 4 = ?$ osv.

När eleverna lärt sig utföra enklare skriftliga multiplikationer och divisioner, bör både *kort multiplikation* och *kort division* övas, givetvis i mycket enkla övningar av typen 1) $3 \cdot 13 = 39$; 2) $36 : 3 = 12$. Lösning: 1) $3 \cdot 10 = 30$; $3 \cdot 3 = 9$; $30 + 9 = 39$ eller $3 \cdot 3 = 9$; $3 \cdot 10 = 30$; $9 + 30 = 39$; 2) $36 : 3 = ?$, 3 i 30 går 10 gånger, 3 i 6 går 2 gånger; $10 + 2 = 12$.

Sortförvandling

Även beträffande sortförvandlingen gäller, att drill aldrig får ersätta förståelse, och förståelse får eleverna endast genom upprepade mätningar och skattningar. Eleverna kommer att gissa fel i början, men så småningom får de rätt god uppfattning om storleksrelationer, om sorter och sortrelationer.

Väl lämpade som muntliga övningar är enkla sortförvandlingar (sortförvandlingar ska alltid vara enkla!) av typen: Hur många deciliter kan jag få av 1 l, 2 l, 1 l 5 dl osv.?

Överslagsberäkning

Redan i årskurs 3 bör eleverna kunna utföra mycket enkla överslagsberäkningar. Räcker 22 öre till 5 kola, om 1 kola kostar 5 öre? Kalle har 5 kr. Kan han köpa en tidning för 1 kr och en boll för 4 kr 50 öre? Pappa går en kilometer på 9 min. Hinner han med samma fart 3 km på en halv timme?

Introduktion av problemavsnitt

Vid introduktion av ett problemavsnitt bör åtskilliga uppgifter lösas gemensamt med klassen eller gruppen, så att eleverna efter genomgången kan arbeta självständigt. Vid den gemensamma genomgången bör mätetalen vara så valda, att uppgifterna kan lösas genom muntlig räkning.

Huvudräkningen måste givetvis handhas med sunt pedagogiskt förnuft. En huvudräkningsretarderad elev kan uppleva misslyckandet gång på gång med räkneskräck som följd, om han utsättes för snabba, stötartade frågor, som ofta leder till svar av trial- and error-typ. Ett felaktigt svar — särskilt om det följs av skratt från kamraterna — alstrar en stark känsloreaktion, som ger upphov till fruktan, fruktan för matematik.

Skriftlig räkning

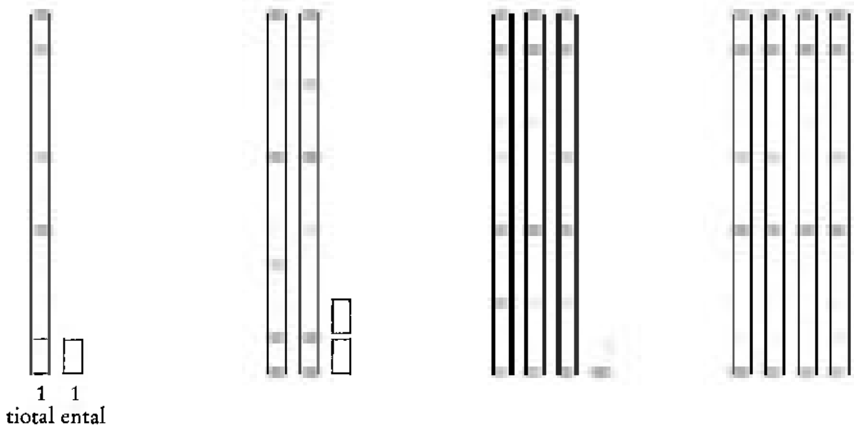
Ur *Förslag till disposition — — —:* »Skriftlig räkning: addition utan och med minnessiffror samt med högst fem tresiffriga termer; subtraktion, även med lån, med i allmänhet högst tresiffriga termer; multiplikation med den ena faktorn ensiffrig och den andra i allmänhet högst tresiffrig; division utan rest av högst tresiffriga tal med ensiffrig divisor, i regel ej högre än 5.»

Addition med minnessiffror

När eleverna börjar i årskurs 3 har de glömt åtskilligt av det de läst i årskurs 2. Additionen bör därför börja med mycket enkla uppgifter, gärna med ensiffriga termer utan algoritm.

Sambandet mellan addition och subtraktion uppmärksammas i övningar av typen $6+?=9$; $1+?=5$ osv.

Innan additionen utvidgas, bör begreppen *ental* och *tiotal* repeteras. Sambandet mellan de båda talsorterna kan demonstreras med enkla remsor i velouriserat papper, som sättes upp på flanellograf. Vilka tal visas med följande bilder?

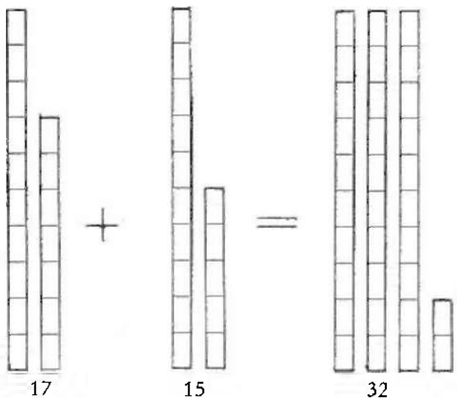


Naturligtvis bör man också arbeta med andra bilder, t. ex. tioöringar och ettöringar och flitigt öva växling.

De första additionerna med flersiffriga termer demonstreras lätt med flanellografmaterialet eller med tioöringar och ettöringar. Dessa övningar bör vara utan tiotalsövergång. Namnge gärna talsorten vid räkning i algoritm.[1]

Addition utan minnessiffror

Denna addition bör också inledas genom övningar med konkret material.



7 ental + 5 ental = 12 ental. 12 ental = 1 tiotal 2 ental. Skriv de 2 entalen i entalsraden. Skriv 1 tiotal ovanför »hyllan» i tiotalsraden. 1 tiotal + 1 tiotal + 1 tiotal = = 3 tiotal, som skrives i summan.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 17 \\ 15 \\ \hline \end{array} \quad \cancel{1}\,\cancel{2}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 15 \\ \hline 41 \end{array}$$

Som framgår av algoritmen utskrives delsumman 12 vid sidan av algoritmen. Detta sker för att förhindra fel som i algoritmen under. Gör eleverna fel av den typen betyder det, att inlärningsgången varit för snabb. Eleverna har inte fattat något av additionen. Givetvis skall inte delsumman utskrivas för sin egen skull. En elev behöver kanske endast markera delsumman under del av lektion, medan en annan elev behöver markera delsumman längre för att förstå och befästa momentet.

[1] Algoritm kallas en uppställning för uträkning. Det finns alltså additionsalgoritmer, subtraktionsalgoritmer osv.

Att utvidga talområdet

Utvidgningen av talområdet upp till 10 000 sker i årskurs 3 successivt genom addition.

9+1= 10	9+2= 11	9+5= 14
99+1= 100	99+2= 101	99+5= 104
999+1= 1 000	999+2=1 001	999+5=1 004
9999+1=10 000		

Särskilt grundlig övning kräver övergångarna mellan hundratal och tusental.

997+3=1 000	990+10=1 000
997+4=1 001	991+10=1 001
997+5=1 002	992+10=1 002
osv.	osv.
980+10= 990	810+100= 910
980+20=1 000	810+200=1 010
980+30=1 010	810+300=1 110
osv.	osv.

4 2 3 5

För att förstå *positionssystemet* (tiotalssystemet) behöver eleverna mycken övning att dela upp tal: 4 235=4 000+200+30+5. Genom att utföra den tecknade additionen kan de konstatera, att de gjort rätt.

Vid skriftlig räkning bör inte termerna vara flera än fem. Additionen utföres uppifrån och nedåt med kontrollräkning åt andra hållet.

Terminologi

Redan från starten bör läraren bemöda sig om att använda en korrekt terminologi. 6+7=13 är en *addition.* I 6+7=13 adderas 6 och 7. 6 och 7 är *termer,* 13 är *summa.* Tecknet + läses alltid *plus* och = läses *är* eller *är lika med.*

Naturligtvis får inte terminologikunskap bli självändamål. Det är alltid tillåtet att använda korrekta svenska uttryck: Pelle har och Pelle får. Hur mycket har han tillsammans? osv.

Multiplikation utan minnessiffror

Vilket räknesätt skall behandlas efter addition, subtraktion eller multiplikation? Man kan finna skäl för båda valen. I detta arbete skall multiplikation behandlas som andra räknesätt.

Multiplikation definieras ofta som upprepad addition. Uttrycket $4+4+4$ kan också skrivas $3 \cdot 4$. Det är inte tillräckligt att betrakta multiplikationen på detta sätt. Redan i årskurs 2, när eleverna stiftar bekantskap med räknesättet multiplikation bör de se räknesättet tvådimensionellt. Talet 3 kan åskådliggöras på detta sätt: 0 0 0

En bild av

$3+3=2 \cdot 3=6$ kan se ut så här:

0 0 0 3 $2 \cdot 3=6$
0 0 0 + 3 $3 \cdot 2=6$

$2+2+2=6$

Men bilden visar också $2+2+2=3 \cdot 2=6$.

Eleverna upptäcker redan från början den viktiga kommutativa lagen, $a \cdot b=b \cdot a$, om de får rita sin egen multiplikationstabell.

Ex. $5 \cdot 4=4 \cdot 5$

0 0 0 0 4
0 0 0 0 4
0 0 0 0 4
0 0 0 0 4
0 0 0 0 + 4

$5+5+5+5=20$

$5 \cdot 4=20$
$4 \cdot 5=20$

Ex. $6 \cdot 8=8$ [illegible] 6

0 0 0 0 0 0 0 0 [illegible]
0 0 0 0 0 0 0 0 [illegible]
0 0 0 0 0 0 0 0 [illegible]
0 0 0 0 0 0 0 0 [illegible]
0 0 0 0 0 0 0 0 [illegible]
0 0 0 0 0 0 0 0 [illegible] [illegible]

$6+6+6+6+6+6+6+6$ [illegible]

$6 \cdot 8=48$
[illegible] $6=$ [illegible]

En del lärare tycker kanske, att ritandet och ifyllandet av tabellen tar för lång tid. Det är väl använd tid. Lägg för övrigt märke till att endast halva antalet uppgifter skall ritas. $3 \cdot 4$ är ju $4 \cdot 3$ och $9 \cdot 8=8 \cdot 9$ osv. (Se nästa sida.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Pytagoreiska tabellen

När tabellen är ordentligt genomarbetad, skall eleverna lösa uppgifter av typen 3 · 12. 3 · 12 = 12 + 12 + 12 = 36. Ställ de båda algoritmerna bredvid varandra, så förstärkes förståelsen för sambandet mellan addition och multiplikation.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ 12 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

Vad består 12 av? 1 tiotal och 2 ental. 3 · 2 ental = 6 ental. Skriv 6 i entalsraden. 3 · 1 tiotal = 3 tiotal. Skriv 3 i tiotalsraden.

$$\begin{array}{r} 513 \\ 513 \\ 513 \\ \hline 539 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 513 \\ \cdot\ 3 \\ \hline 1539 \end{array}$$

3 · 513 = 513 + 513 + 513 = 1 539.

Vad består 513 av? Svar: 5 hundratal, 1 tiotal, 3 ental.

3 · 3 ental = 9 ental. Skriv 9 i entalsraden.

3 · 1 tiotal = 3 tiotal. Skriv 3 i tiotalsraden.

3 · 5 hundratal = 15 hundratal. Skriv 15 framför 3.

Vilken talsort är 1:an i 1 539?

Multiplikation med minnessiffror

Uppgiften som skall lösas är 2 · 36. 2 · 36 = 36 + 36 = 72. Visa de båda algoritmerna bredvid varandra, så att sambandet mellan räknesätten framgår.

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ \hline & 36 \quad \cancel{1}\,\cancel{2} \\ + & 36 \\ \hline & 72 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 36 \quad \cancel{1}\,\cancel{2} \\ \cdot & 2 \\ \hline & 72 \end{array}$$

Vad består 36 av? Svar: 3 tiotal och 6 ental.

2 · 6 ental = 12 ental = 1 tiotal 2 ental. 2:an skrives i entalsraden. 1 tiotal »sparas».

2 · 3 tiotal = 6 tiotal. 6 tiotal + 1 tiotal = 7 tiotal. Skriv 7 i tiotalsraden.

Som framgår av algoritmerna är både delsumma och delprodukt skrivna vid sidan om algoritmerna. Detta sker givetvis endast under inlärningsstadiet, som kan vara olika långt för olika elever.

Det torde vara bättre att skriva ut hela delprodukten än att endast markera minnessiffran. Att skriva minnessiffror blir så lätt slentrian, till föga eller ingen nytta för eleven. Någon invänder kanske, att minnessiffrorna behövs så länge eleven inte perfekt behärskar multiplikationstabellen. Till detta är endast att säga, att eleven i så fall hellre bör arbeta med tabellen än med mera avancerade uppgifter.

Utmärkta övningar för tabellträning är följande av ekvationstyp: 2 · ? = 12; 3 · ? = 15 osv. Dessa uppgifter visar dessutom sambandet mellan multiplikation och division.

Terminologi

4 · 12 = 48

faktor · faktor = produkt. Tecknet · läses gånger.

Subtraktion utan lån

Liksom beträffande addition och multiplikation gäller att eleverna i årskurs 3 måste börja subtraktionen med en repetition av vad eleverna arbetade med i årskurs 2. Först repeteras alltså uppgifter av typen 35—11 dvs. uppgifter utan »lån». Så långt möjligt bör uppgifternas lösning konkretiseras med hjälp av lämplig materiell, t. ex. det flanellografmaterial som nämndes i samband med addition. Uppgiften 35—11 kan lösas så här (se nästa sida):

Bilden a visar talet 35, bestående av 3 tiotal och 5 ental. 35 skall minskas med 11, som består av 1 tiotal och 1 ental. När 1 tiotal och 1 ental tagits bort, finns 2 tiotal och 4 ental, dvs 24, kvar.

Uppgiften 35—11 = 24 behandlades, som om vi hade 35 och därifrån skulle avlägsna 11. 24 blev alltså en *rest*. Men även den subtraktion, som ger en *skillnad* som resultat, bör demonstreras, b. Detta kan ske genom *parbildning*. Skillnaden blir 24. Bäst är det att visa begreppen *rest* och *skillnad* med mindre tal. Bilden visar tillvägagångssätten

1) Kalle har 5 kr och köper för 2 kr. Hur mycket har han sedan kvar?

Kalle har:

0 0 0 0 0

Kalle har köpt för 2 kr och har kvar 3 kr:

0 0 0 ~~0~~ ~~0~~

2) Kalle har 5 kr och Pelle har 2 kr. Hur stor är skillnaden mellan deras kassor?

Hur mycket mera har Kalle? Kalle: 0 0 | 0 0 0

Pelle: 0 0 |

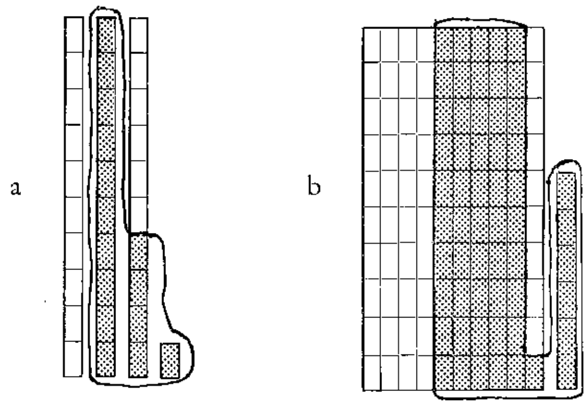
$$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 11 \\ \hline 24 \end{array}$$

Algoritmen kan ha detta utseende:
5 ental minus 1 ental är 4 ental.
3 tiotal minus 1 tiotal är 2 tiotal.

Subtraktion med lån

E j l å n ö v e r n o l l

Innan eleverna börjar subtraktion med lån över noll måste de vara väl förtrogna med begreppen ental, tiotal osv. samt behärska växling mellan två närliggande talsorter.



a) Uppgiften som skall lösas är 31—15. Flanellografmaterialet användes. Från 31 som är 3 tiotal och 1 ental skall 15, dvs. 1 tiotal och 5 ental, tas bort. För att kunna göra det växlas 1 tiotal i 31 till 10 ental. Tillsammans finns det nu 2 tiotal och 11 ental. Nu går det lätt att avlägsna 1 tiotal och 5 ental. Kvar blir 1 tiotal och 6 ental, dvs. 16. (Konkretisera också med tioöringar och ettöringar.)

Algoritmen kan ha följande utseende:

$$\begin{array}{rr} & {}^{10} \\ \hline & \cancel{3}\;1 \\ - & 1\;5 \\ \hline & 1\;6 \end{array}$$

1 ental minus 5 ental går inte. Vi tar 1 tiotal från 31 och växlar detta till 10 ental. Att vi tagit 1 tiotal markerar vi med en liten »flagga» i 3:ans övre högra hörn. De nya 10 entalen placeras på »hyllan» ovanför entalsettan. 10 ental+1 ental=11 ental. 11 ental—5 ental=6 ental, 2 tiotal—1 tiotal=1 tiotal.

L å n ö v e r n o l l

Uppgiften som skall lösas är 106—57. Även nu kan flanelltavlan användas. Bilden b visar talet 106. 57 skall avlägsnas. 1 hundratal växlas till 10 tiotal och 1 tiotal till 10 ental. I stället för talet 106 har vi nu 9 tiotal och 16 ental. Om 5 tiotal och 7 ental tas bort, blir det 4 tiotal 9 ental, dvs 49 kvar.

Algoritmen kan ha följande utseende:

~~10~~ 10
~~1~~ ~~0~~ 6
− 5 7
4 9

6—7 går inte. Vi har inga tiotal att låna av utan går till hundratalet och lånar det. 1 hundratal = 10 tiotal. Nu har vi tiotal att låna av, 1 tiotal = 10 ental.

Vi har tidigare 6 ental, nu 16 tillsammans. 16 ental—7 ental = 9 ental. 9 tiotal—5 tiotal = 4 tiotal.

Så småningom bör eleverna försiktigt uppmuntras att utföra subtraktion utan 10-överskrivning.

Resultatet av subtraktionen kontrolleras genom addition av resten (skillnaden) och andra termen. Summan skall bli lika med första termen.

Terminologi

106—57 är en *subtraktion.* I uttrycket 106—57 = 49 är 106 och 57 *termer.* Resultatet 49 kallas antingen *rest* eller *skillnad,* beroende av den räknesituation, som föranlett operationen. Tecknet — heter alltid *minus.* Termer som »ta bort» får inte förekomma.

Division

Man har länge velat betrakta divisionen som ett samlingsnamn för två räknesätt, innehållsberäkning och likadelning. Olika metodiska skolor har diskuterat det berättigade i denna tudelning. Några har ansett det omöjligt att klargöra divisionen för eleverna utan denna tudelning. Andra har återigen ansett denna tudelning som rent nonsens. Sanningen är väl den, att det finns ett antal olika räknesituationer, som kan redas ut genom division, precis som det finns andra, som löses genom addition, subtraktion eller multiplikation.

Matematiskt är division multiplikationens omvändning. I multiplikation är faktorerna kända och man söker produkten. I division är en av faktorerna okänd, medan produkten är bekant.

Sambandet belyses lättast med ett exempel:

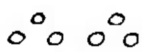
Mult.: $5 \cdot 6 = ?$ Div.: $5 \cdot ? = 30$.

Om man utgår från denna definition av divisionen blir det naturligt att starta divisionsundervisningen med att repetera multiplikationstabellen.

Efter övningar av typen $5 \cdot 6 = ?$, presenteras $5 \cdot ? = 30$. Vilket tal skall stå i stället för frågetecknet?

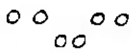
När eleverna skall arbeta med division, måste det till en början alltid ske i konkreta situationer. Exempel ges här nedan.

a) Hur många kulor är det sammanlagt?
b) Hur många lika stora högar är de uppdelade på?
c) Hur många kulor är det i varje hög?

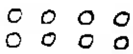


a) Hur många kulor är det sammanlagt?
b) Hur många kulor är det i varje hög?
c) Hur många högar är det?

a) Hur många kulor är det sammanlagt?
b) Hur många lika stora högar är de uppdelade på?
c) Hur många kulor är det i varje hög?



a) Hur många kulor är det sammanlagt?
b) Hur många kulor är det i varje hög?
c) Hur många högar är det?



a) Hur många kulor visar bilden?
b) Hur många högar med 2 kulor i varje kan du dela dem på?
c) Hur många högar med 4 kulor i varje kan du dela dem på?
d) Hur många kulor blir det i varje hög, om du gör fyra lika stora högar?
e) Hur många kulor blir det i varje hög, om du gör två lika stora högar?

Dela 10 kulor i två lika stora högar. Hur många kulor blir det i varje hög?

Uppgiften tecknas $10 : 2 = 5$ och läses 10 *dividerat med* 2 är lika med 5.

Svar: Det blir 5 kulor i varje hög.

Hur många högar får du av 10 kulor, om det skall vara 2 kulor i varje hög?

Uppgiften tecknas $10 : 2 = 5$ och läses 10 *dividerat med* 2 är lika med 5.

Svar: Det blir 5 högar.

Efter dessa övningar bör sambandet mellan multiplikation och division uppmärksammas. Detta sker bl. a. i övningar av följande slag, där också skrivsättet $a : b = c$ ytterligare tränas.

$3 \cdot ? = 15$	$4 \cdot ? = 12$	$? \cdot 7 = 21$	osv.
$15 : 3 = ?$	$12 : 4 = ?$	$21 : 7 = 3$	

Då divisionen är det svåraste räknesättet, måste man gå ytterligt långsamt fram. Det kan t. ex. vara lämpligt att i den första träningen av divisionstabellerna ej använda högre divisorer än 5. Så småningom skall man arbeta med samtliga ensiffriga heltalsdivisorer.

Division med ensiffrig divisor utan delrest

Innan divisionsalgoritmen behandlas bör övningar i att ta reda på hur många gånger en viss faktor finns i en bestämd produkt sättas in. Ex.: Hur många gånger finns

2 i a) 4	b) 2	c) 16	d) 8	e) 18	osv.
3 i a) 6	b) 9	c) 12	d) 18	e) 24	

Därefter presenteras algoritmen, och det torde vara lämpligt att därvid använda så enkla kombinationer, att algoritmen egentligen är onödig. Lämpliga uppgifter är t. ex. $24 : 2$, $33 : 3$, $48 : 4$ och liknande.

$2 \cdot 12 = 24$. Vad är då $24 : 2$? Svar: $24 : 2 = 12$. Varför?
$24 : 2 = 12$ därför att $2 \cdot 12 = 24$.

```
   1 2
  ┌2 4
  —2
  ───
   0 4
  — 4
  ───
     0
```

Algoritmen bör ha detta utseende:

Stadium 1

2 i 2 går 1 gång. Skriv tiotals-ettan ovanför 2 tiotal i 24. Kontrollera genom multiplikationen $1 \cdot 2 = 2$ att alla tiotalen använts. $2 - 2 = 0$. Flytta ned 4:an.

2 i 4 går 2 gånger. Kontrollera genom multiplikationen $2 \cdot 2 = 4$, att alla ental använts. $4 - 4 = 0$.

De ytterligare exempel, som presenteras här, bör ge en uppfattning om hur momentets svårighetsgrad lämpligen kan stegras.

Stadium 2

```
   3 2 1
3 | 9 6 3
  — 9
    0 6
    — 6
      0 3
      — 3
        0
```

3 i 9 går 3 gånger. 3 · 3 = 9; 9—9 = 0.
3 i 6 går 2 gånger. 2 · 3 = 6; 6—6 = 0.
3 i 3 går 1 gång. 1 · 3 = 3; 3—3 = 0.

Stadium 3 (noll i kvoten)

```
   2 0
4 | 8 0
  — 8
    0 0
    — 0
      0
```

4 i 8 går 2 gånger. 2 · 4 = 8; 8—8 = 0.
4 i 0 går 0 gånger. 0 · 4 = 0; 0—0 = 0.

Stadium 4 (noll i kvoten)

```
   2 0 1
4 | 8 0 4
  — 8
    0 0
    — 0
      0 4
      — 4
        0
```

4 i 8 går 2 gånger. 2 · 4 = 8 | 8—8 = 0.
4 i 0 går 0 gånger. 0 · 4 = 0 | 0—0 = 0.
4 i 4 går 1 gång. 1 · 4 = 4 | 4—4 = 0.

Låt genom stödfrågor eleverna upptäcka, att kvotens hundratalssiffra står rakt ovanför dividendens hundratalssiffra osv.

Division med delrest

Alla divisioner går inte »jämnt upp». Innan division med rest övas, kan läraren låta eleverna utföra några övningar av denna typ: $4 \cdot \square + \triangle = 17$. Tala om för eleverna, att $\square$ och $\triangle$ står för olika tal. Det gäller att sätta in ett sådant tal i rutan, att talet i trekanten blir så litet som möjligt.

Elevernas lösningar får gärna bli så här:

$4 \cdot \boxed{1} + \overset{\triangle}{13} = 17.$

$4 \cdot \boxed{2} + \overset{\triangle}{9} = 17.$

$4 \cdot \boxed{3} + \overset{\triangle}{5} = 17.$

$4 \cdot \boxed{4} + \overset{\triangle}{1} = 17.$

$4 \cdot \boxed{5} + \triangle = 17$ går inte.

Den bästa lösningen är tydligen $4 \cdot 4 + 1 = 17$, som också kan skrivas $17 : 4 = 4$ rest 1.

Låt eleverna upptäcka, att det gäller att **hitta den produkt närmast under dividenden, som är jämnt delbar med en bestämd faktor.** Ex.: $5 : 2 = 2$ rest 1. 4 är den produkt, närmast under dividenden 5, i vilken 2 är en faktor.

Begreppet *rest* blir klart för eleverna, när de löst många uppgifter av typen:

3 : 2	5 : 3	5 : 4	6 : 5	
5 : 2	7 : 3	7 : 4	9 : 5	osv.
7 : 2	8 : 3	6 : 4	8 : 5	

Stadium 5

$2 \cdot 16 = 32$. Alltså är $32 : 2 = 16$. Algoritmen, som ger denna lösning, kan se ut så här:

```
   16
2 |32
 - 2
  ---
   12
 - 12
  ---
    0
```

2 i 3 går 1 gång. $1 \cdot 2 = 2$. 2 skrives under 3. $3 - 2 = 1$. 2:an flyttas ned. 2 i 12 går 6 gånger. $6 \cdot 2 = 12$, som skrives under 12. $12 - 12 = 0$.

Momentets svårighetsgrad kan lämpligen stegras på följande sätt:

Stadium 6 (noll tiotal i kvoten)

```
   208
4 | 832
  − 8
   03
   − 0
    32
  − 32
     0
```

4 i 8 går 2 gånger: $2 \cdot 4 = 8$.
8—8 = 0. 3:an flyttas ned.
4 i 3 går 0 gånger: $0 \cdot 4 = 0$.
3—0 = 3. 2:an flyttas ned.
4 i 32 går 8 gånger: $8 \cdot 4 = 32$.

Stadium 7 (noll hundratal i kvoten)

2 i 1 går 0 gånger.
2 i 19 går 9 gånger.
2 i 16 går 8 gånger.

```
2 | 196
  − 18
     16
   − 16
      0
```

Terminologi:

48 : 8 = 6
Dividend : *divisor* = *kvot*. Tecknet : läses *dividerat med*.

Sortförvandling och sorträkning

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:*

»Övningar att uppfatta och — i tillämpliga delar — använda öre, kronor, centimeter, decimeter, meter, kilometer, mil; hektogram, kilogram; deciliter, liter. Sortförvandlingar mellan två närliggande sorter, varvid meter och centimeter betraktas som närliggande.»

Det är väl känt, att eleverna behärskar räkning med kronor och öre bättre än annan sorträkning. Varför? I och för sig bör det inte vara lättare att räkna med *kronor* och *öre* än med *meter* och *centimeter*. Svaret är naturligtvis det, att barnen bäst *känner till* kronor och öre. Genom nästan dagligt umgänge med pengar har eleverna lärt sig att räkna med dem. Detta faktum utgör ett viktigt memento. För att eleverna skall kunna räkna med sorter fordras, att de genom flitigt umgänge med sorterna ifråga blivit förtrogna med deras användning.

Nutidens elever är i ett väsentligt sämre läge än eleverna för bara en generation sedan, när det gäller att lära sorter och sortförvandling. Hur ofta har nutidens elever tillfälle att praktiskt stifta bekantskap med längdmåtten? I slöjden förekommer väl den mesta undervisningen om längdmått och deras användning. Meter, decimeter och centimeter var inte främmande för oss vuxna, när vi var barn. Kläder syddes ofta i hemmen. Varje flicka visste, hur mycket tyg som krävdes till en klänning och kunde handla därefter. Pojkarna visste, att vedtraven innehöll meterlånga vedträn. Att cykla eller gå en mil var arbetsamt. I våra dagar slukar bilarna en sådan sträcka på en kort stund. Man säger, att avstånden har krympt. Kunskapen om längdmåtten har också krympt.

Ännu sämre har eleverna reda på viktmått och volymmått. För de nu vuxna var kilogram och hektogram, liter och deciliter relevanta storheter. Numera är praktiskt taget allting förpackat. Vi köper ett *paket* bröd, en *påse* mjöl, en *flaska* grädde, en *burk* marmelad osv. Eleverna har färre möjligheter att i praktiska livet lära sorter.

För att den formella sortförvandlingen skall ha någon som helst mening, måste den föregås av dels exakta *mätningar,* dels *skattningsövningar.* För mätningarna fordras en del materiel. Ur läroplanens anvisningar (sid. 174) kan citeras: »Varje klassrum för lågstadieklasser bör vara utrustat med våg med viktsatser, meterlinjal och måttband, liter- och decilitermått samt myntmaterial. Varje elev bör ha en centimetergraderad linjal och en myntsats — — —» Med hjälp av denna materiel kan eleverna lätt se relationerna mellan olika längdmått, viktmått osv. samt göra mätningar.

Runt om i klassrummet finns mängder av föremål, som kan tjäna skattningsövningarna. Hur lång är tavlan? Hur bred? Vad väger boken? Hur mycket rymmer vasen? Vilken är lättast, vilken är tyngst? Vilken är störst, vilken är minst? Naturligtvis gissar barnen fel i början, men så småningom får eleverna vissa *riktiga* föreställningar om storleksordningar. *Saknar eleverna dessa föreställningar, är undervisningen i sorträkning meningslös.* Läroböckerna innehåller mängder av övningar i sortförvandling. Författarnas intentioner är goda, men resultatet av övningarna blir magert, om verklighetsunderlaget saknas, dvs. om eleverna inte fått väga, mäta och uppskatta *tillräckligt* före de skriftliga övningarna.

Av tradition har sorträkningen givits en stor plats i svensk skola. Hur ofta har vi behov av att förvandla mellan meter och decimeter? När räknade du med hektoliter och liter i det praktiska livet? Betydelsen av sortförvandlingskunskap och sorträkningsförmåga är betydligt överdriven. Därför bör sorträkning och sortförvandling begränsas så mycket som möjligt.

Uppgiften 1 m 7 cm+2 m 98 cm+1 m 12 cm kan lösas på olika sätt.

Algoritm

1 1
1 0 7
2 9 8
+ 1 1 2
5 1 7

1. Förvandling till lägsta sort:
1 m 7 cm+2 m 98 cm+1 m 12 cm=107 cm+298 cm+112 cm=517 cm.
Svar: (t. ex.) Bandet var från början 5 m 17 cm långt.

Algoritm

	1
1	7
2	9 8
+1	+ 1 2

4 m 117 cm=5 m 17 cm

2. Utan förvandling till lägsta sort:
1 m 7 cm+2 m 98 cm+1 m 12 cm=5 m 17 cm.
Svar: (t. ex.) Bandet var från början 5 m 17 cm långt.

I metod 1 sker inte mindre än fyra sortförvandlingar, som automatiskt innebär fyra felmöjligheter. I metod 2 sker endast *en* sortförvandling, som alltså innebär *en* felmöjlighet. Då lärarens undervisning utan tvivel bör vara sådan, att eleverna så långt möjligt hindras göra fel, rekommenderas metod 2. Troligen kan denna metod också förhindra en mängd onödiga sortförvandlingar.

Subtraktion och *multiplikation* behandlas analogt.

kr	öre
	10 10
~~4~~	~~1~~ ~~1~~ 3
− 2	− 7 6
1 kr	3 7 öre

Ex.: 4 kr 13 öre—2 kr 76 öre=1 kr 37 öre. 13 öre— 76 öre går inte. Låna 1 kr av 4 kr. 1 kr=100 öre. 100 öre+13 öre=113 öre. Nu går subtraktionen att utföra. Svaret erhålles utan ytterligare förvandlingar.

kr öre
3 55
· 3
9 kr 165 öre = 10 kr 65 öre

Ex.: 3 · 3 kr 55 öre = 10 kr 65 öre.

271
2 | 542
− 4
14
− 14
02
− 2

Ex.: 5 m 42 cm : 2 = 2 m 71 cm. I detta fall är det lättast för eleverna att först förvandla till uppgiftens lägsta sort. 5 m 42 cm = 542 cm.

Problemlösning

Enligt *Förslag till disposition av en studieplan* skall i årskurs 3 behandlas »Enkla problem med i regel endast ett räknesätt».

De s. k. benämnda upgifterna bör ge eleverna god övning i läsförståelse. Det är därför betydelsefullt att läraren och eleverna då och då — i början av årskurs 3 mycket ofta — läser igenom uppgifterna och diskuterar dem. Vad *vet* vi? Vad *kan* vi ta reda på? Vad *skall* vi ta reda på? Låt gärna eleverna stryka under frågan i uppgiften.

Ex.: En boll kostade 75 öre. Kalle köpte 3 bollar. *Hur mycket* skulle han betala för bollarna?

Det finns ingen anledning att på detta stadium kräva en formalistisk behandling av uppgifterna. Att teckna uppgiften är onödigt. Däremot bör eleverna vänjas vid att »plocka ord» ur uppgiftens fråga och skriva ett fullständigt svar. Ovanstående uppgift kan alltså redovisas så här.

75
· 3
225

Svar: Kalle betalade 2 kr 25 öre (för bollarna).

— Kap. 4 —

ÅRSKURS 4

Huvudräkning

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Huvudräkning och subtraktion huvudsakligen inom talområdet 0—100; inlärande av multiplikations- och divisionstabellerna; överslagsberäkning med hela tal huvudsakligen inom talområdet 0—100; uppgifter av typen $4 + ? = 7$; $? - 3 = 4$; $? \cdot 4 = 12$; $\frac{[illegible]}{?} = 4$».

Under årskurs 4 tränas tabellerna grundligt på det sätt som beskrives för årskurs 3. Se sid. 33—35.

Överslagsberäkning

Eleverna göres uppmärksamma på att man i praktiska livet ibland måste kunna göra ganska besvärliga beräkningar som huvudräkning, t. ex. för att se efter om pengarna räcker till önskade inköp. I skolan kan en överslagsberäkning ge besked, om ett svar på en uppgift är rimligt.

Några exempel:

Inga hade 1 kr. Räckte pengarna till en glass för 50 öre och choklad för 60 öre?

Lena hade 2 kr, när hon skulle resa hem från mormor. Bussbiljetten kostade 1 kr. Räckte pengarna också till en veckotidning för 85 öre och tuggummi för 25 öre?

Fru Holm skulle besöka mormor. Resan kostade 2 kr. Fru Holm tänkte ta med sig en tårta för 5 kr och kakor för 2 kr. Räckte en tia?

Klas ville köpa en bok för 4 kr. Han hade 2 kr 75 öre själv och fick 1 kr 50 öre av pappa. Räckte pengarna till boken?

Lena dividerade 408 med 4 och fick kvoten 12. Är svaret rimligt?

Kan $11 \cdot 35$ bli 345?

Erik, Leif och Klas skulle dela 90 kr lika. »Då får jag 33 kr», sade Leif. Var det riktigt?

Herr Holm skulle betala 5 stolar, som vardera kostade 78 kr 50 öre. Han lämnade fram 400 kr. Räckte pengarna?

Inga, Lena och Klas gissade, hur mycket hälften av 947 kr ungefär kunde vara. Inga gissade 325 kr, Lena 475 kr och Klas 525 kr. Vem kom närmast?

Uppgifter med frågetecken

Uppgifter av typen $4+?=7$; $?-3=4$; $? \cdot 3=12$; $\frac{3}{?}=4$ osv. är givetvis till sin karaktär ekvationer, men meningen är inte att några generella lösningsmetoder skall användas. Uppgifterna skall belysa sambanden mellan olika räknesätt.

Lämpliga frågor

$4+?=7$	Vilket tal skall adderas till 4, för att summan skall bli 7?
$?-3=4$	Vilket tal skall subtraheras med 3, för att skillnaden skall bli 4?
$? \cdot 3=12$	Vilket tal skall 3 multipliceras med, för att produkten skall bli 12?
$\frac{?}{3}=4$	Vilket tal, dividerat med 3, ger kvoten 4?

Läraren kan också skriva upp uppgifter av dessa typer på tavlan och »täcka över».

$1+\square=11$. Vilket tal skall stå under skivan? osv.

Skriftlig räkning med hela tal

Ur *Förslag till disposition — — —:* »Skriftlig räkning med hela tal: addition med högst sex termer, subtraktion, multiplikation med minsta faktorn företrädesvis ensiffrig; division med företrädesvis ensiffrig divisor; multiplikation med 10, 100 och 1 000 samt motsvarande division».

Addition

Additionen i årskurs 4 är densamma som i årskurs 3 och presenteras där på sid. 36—38.

Att utvidga talområdet

I årskurs 4 utvidgas talområdet upp till och med en miljon. Detta kan ske successivt genom addition med 1, 10, 100, 1 000, 10 000 och 100 000 i taget.

9+1=	10	90+10=	100
99+1=	100	990+10=	1 000
999+1=	1 000	9 990+10=	10 000
9 999+1=	10 000	99 990+10=	100 000
99 999+1=	100 000	999 990+10=	1 000 000
999 999+1=	1 000 000		
900+100=	1 000		
9 900+100=	10 000		
99 900+100=	100 000		
999 900+100=	1 000 000	osv.	

Särskilt grundlig övning kräver övergångarna mellan de olika hundratalen, tusentalen, tiotusentalen osv.

997+3	991+10	9 990+10	10 995+5
7 997+4	9 991+10	9 990+20	100 995+5
9 997+5	99 991+10	9 990+30	110 995+5
79 997+6			
[illegible] 997+2	999 991+10	9 990+40	999 995+5
[illegible]	osv.	osv.	osv.

Mängder av dylika uppgifter bör ges eleverna.

Andra lämpliga uppgifter kan vara av följande typ:

Börja med 1 600 och lägg till 200 i taget. Sluta med 2 400!
Börja med 2 700 och lägg till 200 i taget. Sluta med 3 500!
Börja med 9 400 och lägg till 200 i taget. Sluta med 10 000!
Börja med 10 000 och lägg till 1 000 i taget. Sluta med 16 000!
Börja med 75 000 och lägg till 5 000 i taget. Sluta med 100 000!
Börja med 100 000 och lägg till 2 000 i taget. Sluta med 110 000!
Börja med 150 000 och lägg till 10 000 i taget. Sluta med 200 000!
Börja med 292 000 och lägg till 2 000 i taget. Sluta med 302 000!
Börja med 400 000 och lägg till 100 000 i taget. Sluta med 900 000!
Börja med 994 000 och lägg till 1 000 i taget. Sluta med 999 000!

När eleverna behandlat och behärskar multiplikation med 10, kan det vara intressant att studera, vad som sker med ett tal vid multiplikation med 10.

10 ·	2 =	20
10 ·	20 =	200
10 ·	200 =	2 000
10 ·	2 000 =	20 000
10 ·	10 000 =	100 000
10 ·	100 000 =	1 000 000

Vid successiv multiplikation med 10 flyttas 2:ans och 1:ans position *ett* steg åt vänster. Nollorna är bara fyllnadsgods för att ge 2:an och 1:an riktig position.

Fortsatta övningar att dela upp tal befäster förståelsen för och kunskapen om positionssystemet.

Ex.: 983 467 = 900 000 + 80 000 + 3 000 + 400 + 60 + 7.

Kontrolladdition visar, om eleverna gjort rätt.

$$\begin{array}{r} 900\,000 \\ 80\,000 \\ 3\,000 \\ 400 \\ 60 \\ +\ 7 \\ \hline 983\,467 \end{array}$$

Eleverna bör också få övning att läsa stora tal och skriva stora tal efter lärarens eller kamraternas diktamen.

Läs dessa tal:

100 000	602 035
310 000	730 068
425 687	980 009
563 400	1 000 000

Skriv dessa tal:

Sjuttiosextusenfyra.
Etthundratusen-trehundratjugofem.
Femhundrasextioåttatusen-tvåhundratre.
Åttahundrasjutusen-sex.

Terminologi: se sid. 38.

Subtraktion: se sid. 41—44.

Terminologi: se sid. 44.

Multiplikation med ensiffrig första faktor: se sid. 39—41.

Grundlig övning i kort multiplikation av typen $5 \cdot 63 = 315$; $8 \cdot 309 = 2\,472$ osv.

Terminologi: se sid. 41.

Multiplikation med 10, 20, 30; 100, 200, 300 osv.

Behandlingen av detta moment inledes lämpligen med en repetition av kommutativa lagen för multiplikation.

$2 \cdot 3 = 6$	$4 \cdot 6 = 24$	$3 \cdot 10 = 30$
$3 \cdot 2 = 6$	$6 \cdot 4 = 24$	$10 \cdot 3 = 30$

Uppgiften $3 \cdot 10$ kan eleverna redan lösa: $3 \cdot 10 = 10 + 10 + 10 = 30$. Eftersom kommutativa lagen gäller, ger $3 \cdot 10$ och $10 \cdot 3$ samma produkt, nämligen 30. För att nå resultatet 30 räcker det tydligen att multiplicera 3 med 1 och sedan sätta en nolla efter. Låt oss se, om den metoden kan användas för att lösa andra liknande uppgifter.

$3 \cdot 20 = 60$
$20 \cdot \ \ 3 = 60 \qquad 2 \cdot 3 = 6$ Nollan placeras efter 6:an. $20 \cdot 3 = 60$.

$3 \cdot 40 = 120$
$40 \cdot \ \ 3 = 120 \qquad 4 \cdot 3 = 12$ Nollan placeras efter 12. $40 \cdot 3 = 120$.

I uppgiften $40 \cdot 23$ ligger problemet i att klara multiplikationen $4 \cdot 23$, men detta kan eleverna redan.

$40 \cdot 23$ är tydligen 920, eftersom $4 \cdot 23 = 92$.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \cdot\ 4 \\ \hline 92 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 23 \\ \cdot\ 4 \\ \hline 920 \end{array}$$

Nollan »vandrar» ned.

Om även andra faktorn slutar på noll(or), bör algoritmen för konsekvensens skull ha följande utseende:

$$\begin{array}{r} \text{[illegible]} \\ 40 \\ \hline 5200 \end{array}$$

Eleverna behöver övning i att multiplicera faktorn 0 med en annan faktor.

$$\begin{array}{r} 130 \\ \cdot\ 40 \\ \hline 520\text{[illegible]} \end{array}$$

Vidstående algoritm, som inte kan rekommenderas, hör ihop med det som kallas standardiserad talskrivning, dvs. $40 \cdot 130 = 4 \cdot 13 \cdot 10^2 = 52 \cdot 10^2$.

Multiplikation med tvåsiffrig multiplikator

Multiplikation med godtycklig tvåsiffrig första faktor bygger på att eleverna har visats, dels att den s. k. distributiva lagen gäller och dels att de kan utföra multiplikation med faktorerna 10, 20, 30 osv.

Distributiva lagen, $8 \cdot 6 = (5+3) \cdot 6 = (4+4) \cdot 6$ osv, demonstreras i följande övningar. (Namnet distributiva lagen skall givetvis inte nämnas för barnen, endast lagens innebörd.)

Eleverna kan tabellen och vet, att $8 \cdot 6 = 48$. Genom att dela upp 8 på olika sätt erhålles t. ex.

Förövning 1:

$$\left.\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\right\}\cdot 6 = \begin{array}{r}24\\+24\\\hline 48\end{array} \qquad \left.\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right\}\cdot 6 = \begin{array}{r}30\\+18\\\hline 48\end{array} \qquad \left.\begin{matrix}7\\1\end{matrix}\right\}\cdot 6 = \begin{array}{r}42\\+\ 6\\\hline 48\end{array} \qquad \text{osv.}$$

Förövning 2:

$10 \cdot 6 = 60$; $20 \cdot 6 = 120$ osv.

Inlärning:

$12 \cdot 13 = 2 \cdot 13 + 10 \cdot 13 = 26 + 130 = 156$ eller kanske enklare för eleverna

$$\left.\begin{matrix}2\\10\end{matrix}\right\}\cdot 13 = \begin{array}{r}26\\+130\\\hline 156\end{array}$$

Algoritm

Först $\begin{array}{r}13\\12\\\hline 26\\+130\\\hline 156\end{array}$ sedan $\begin{array}{r}13\\12\\\hline 26\\+13\ \\\hline 156\end{array}$

Division med ensiffrig divisor utan slutrest: se sid. 46—47

Terminologi: se sid. 49.

Eleverna bör göras bekanta med divisionstecknet —.

Division med godtycklig ensiffrig divisor

I årskurs 3 skulle divisorn i regel ej vara högre än 5 — en rätt tvivelaktig rekommendation, då divisionerna 777 : 7 eller 880 : 8 givetvis är väsentligt enklare än t. ex. 675 : 5 eller 972 : 4.

I årskurs 4 skall division med godtycklig ensiffrig divisor utföras och divisorn behöver inte gå jämnt upp i dividenden.

Detta medför *slutrest.*

Ex.: 579 : 4 = 144 rest 3.

Algoritm

```
      1 4 4  rest 3
   4 | 5 7 9
     - 4
      17
      16
       1 9
       1 6
         3
```

Momentet vållar knappast några nya svårigheter.

Kort division av typen **635 : 5 = 127** bör övas grundligt.

Exempel: $\frac{424}{\text{[illegible]}} = 106$, $\frac{376}{\text{[illegible]}} = 12$[illegible] rest 1

Terminologi:

579 : 4 = 144 rest 3

Dividend : divisor = kvot med rest.

Division med 10, 20, 30; 100, 200, 300; 1 000, 2 000, 3 000 osv.

Först repeteras sambandet mellan multiplikation och division i övningar av typen

$2 \cdot 3 = 6$	$7 \cdot 8 = 56$	
$6 : 3 = 2$	$56 : 7 = 8$	osv.

Därefter

$10 \cdot 3 = 30$	$100 \cdot 4 = 400$	$1\,000 \cdot 5 = 5\,000$
$30 : 10 = 3$	$400 : 100 = 4$	$5\,000 : 1\,000 = 5$

Momentet bör framför allt övas som huvudräkning.

Detsamma gäller följande uppgifter:

20 : 20	40 : 20	60 : 20
200 : 20	400 : 20	600 : 20
2 000 : 20	4 000 : 20	6 000 : 20
60 : 30	40 : 40	100 : 50
90 : 30	120 : 40	350 : 50
120 : 30	200 : 40	450 : 50
200 : 200	600 : 300	1 400 : 700
400 : 200	800 : 400	2 700 : 900
600 : 200	1 000 : 500	3 200 : 800

När behov av algoritm föreligger, bör den se ut så här:

0 0 4
3 0 | 1 2 [illegible]
— 1 2 0
[illegible]

30 i 1 går 0 gånger.
30 i 12 går 0 gånger.
30 i 120 går 4 gånger.

0 5 rest 1
3 ~~0~~ | 1 6 ~~0~~
− 1 5
1

Strykning av nollor är olämplig och bör sparas tills förkortning och decimaltal behandlats. Annars uppstår lätt den situation som demonstreras till vänster.

Division med vissa tvåsiffriga divisorer

Divisionen är det svåraste räknesättet och division med flersiffrig divisor vållar många elever stora bekymmer. Detta faktum får inte tas till intäkt för att flytta momentet till högre årskurser. Däremot bör det stimulera till att genomföra en mycket långsam stegring i inlärningsgången.

Även i detta fall vädjar vi till elevernas kunskaper i multiplikation och deras förståelse för sambandet mellan multiplikation och division. Eftersom $4 \cdot 12 = 48$ är $48 : 12 = 4$. Kvoten 4 erhålles också i algoritmen

först sedan

```
först            sedan
     0 4              0 4
 1 2 | 4 8       1 2 | 4 8
    — 0             — 4 8
     4 8              0
   — 4 8
       0
```

12 i 4 går 0 gånger. 12 kan inte finnas flera gånger i 48 än 1 finns i 4. 1 i 4 går 4 gånger. $4 \cdot 12 = 48$. $48—48 = 0$.

Följande tre stadier kan med fördel behandlas i årskurs 4.

Stadium 1

Divisorns första siffra går jämnt upp i dividendens första siffra. Kvoten är ensiffrig (med eller utan nollor).

Ex.: 39 : 13; 48 : 12; 93 : 31; 390 : 13; 480 : 12; 9 300 : 31 osv.

```
      0 4 0
 1 2 | 4 8 0
    — 4 8 0
          0
```

12 i 4 går 0 gånger. 1 i 4 går 4 gånger. $4 \cdot 12 = 48$. $48—48 = 0$. 1 i 0 går 0 gånger. $0 \cdot 12 = 0$. $480—480 = 0$.

Stadium 2

Divisorns första siffra går jämnt upp i dividendens (deldividendens) första siffra (siffror). Kvoten är två- eller tresiffrig.

Ex.: 156 : 12; 167 : 11 osv.

```
      0 1 3
 1 2 | 1 5 6
    — 1 2
        3 6
      — 3 6
          0
```

Stadium 3

Divisorns första siffra går inte jämnt upp i dividendens (deldividendens) första siffra (siffror). Närmast liggande val av kvotsiffra ger den riktiga kvotsiffran.

Ex.: 195 : 65; 782 : 23; 546 : 42; 644 : 46 osv.

```
     0 0 3
   ┌──────
6 5│ 1 9 5
   - 1 9 5
   ───────
         0
```

65 i 1 går 0 gånger.
65 i 19 går 0 gånger.
6 i 19 går 3 gånger. 3 · 65 = 195. 195—195 = 0.

```
     0 1 4
   ┌──────
4 6│ 6 4 4
   — 4 6
   ───────
     1 8 4
   — 1 8 4
   ───────
         0
```

46 i 6 går 0 gånger.
4 i 6 går 1 gång. 1 · 46 = 46. 64—46 = 18.
4 i 18 går 4 gånger. 4 · 46 = 184. 184—184 = 0.

Den metod som ovan använts för att finna kvotsiffran är *förstasifframetoden*. Denna och *höjningsmetoden* beskrives utförligare på sid. 77—78.

Sorträkning och sortförvandling

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Övningar att uppfatta och — i tillämpliga fall — använda i föregående årskurser angivna måttsenheter samt millimeter; hektoliter; gram, ton; sekund, minut, timme, dygn, vecka, månad, år. Förvandling mellan två närliggande sorter, varvid uppmärksammas, att meter och centimeter i regel kan betraktas som närliggande. Begreppen kilo — tusen och hekto — hundra.»

Även för årskurs 4 gäller, att stor restriktivitet med sorträkning och sortförvandling skall iakttas. Fortfarande är praktisk behandling, dvs. mätningar och skattningar det viktigaste. Se sid. 49—51.

Begreppen *kilo* — *tusen* och *hekto* — *hundra* skall behandlas. Övningar av följande typ kan förekomma:

Ex. 1: 4 km 500 m = 4 tusen m + 500 m = 4 500 m.
4 500 m = 4 000 m + 500 m = 4 km 500 m.

Ex. 2: 1 hl 25 l = 1 hundra liter + 25 l = 125 l.
125 l = 100 l + 25 l = 1 hl 25 l.

Varje sortförvandling bör vara en matematisk operation. Stor försiktighet tillråds, så att inte mekanisering sker för snart.

År, månader, veckor och dygn

I årskurs 4 introduceras *tidmätten*. Dessa bör nu vara välbekanta för eleverna, eftersom tidsbegreppen ingått i hembygdsundervisningen på lågstadiet. Eleverna skall presenteras uppgifter, som har verklighetsunderlag. Uppgifter av typen Hur många dagar är 9 år, om två av åren är skottår? kan saklöst strykas såsom varande totalt ointressanta, medan uppgifterna här nedan kan få förekomma.

1 år = 12 månader.	1 vecka = 7 dygn.
1 år = 365 dygn.	1 arbetsvecka = 6 dagar.

Kan du svara på dessa frågor:

Vilken månad börjar året?
Vad heter månaderna?
Vilken månad har 28 dagar?
Vilka månader har 30 dagar?
Vilka månader har 31 dagar?

Vilka månader bildar första kvartalet?
» » » andra »
» » » tredje »
» » » fjärde »

Hur många månader har ett år?
» » » » » halvt år?

Nu räknar vi

Under andra kvartalet tjänade Klas' pappa 1 300 kr varje månad. Hur mycket tjänade han sammanlagt under andra kvartalet?

Varje kvartal betalade familjen Berg 900 kr i hyra. Hur stor var årshyran?

Att prenumerera på en tidning kostade 8 kr i månaden. Om man betalade för ett halvår på en gång, kostade tidningen 45 kr 50 öre. Hur mycket billigare blev det att ta tidningen på ett halvår?

Eva föddes den 5 april 1949. När fyllde hon 10 år?

Vilket år föddes Evas mormor, om hon fyllde 60 år 1958?

Ingrid föddes den 20 maj 1959. När var hon 6 månader gammal?

»I dag är det precis 4 veckor till påsk», sade mamma. Hur många dagar är det?

En arbetsvecka är 6 dagar. Kalle tjänar 15 kronor om dagen. Hur mycket tjänar han på en vecka?

Pappa var bortrest i 3 veckor och 5 dagar. Hur många dagar var han borta?

Sven tittade i almanackan och såg, att det var den 15 december. »Om en vecka och 4 dagar fyller jag år», sa Sven. Vilket datum hade Sven sin födelsedag?

Kan du klockan?

1 dygn = 24 timmar. Timmar förkortas tim Hur många timmar är:

a) $1^1/_2$ dygn? b) 2 dygn? c) en dag och en natt?

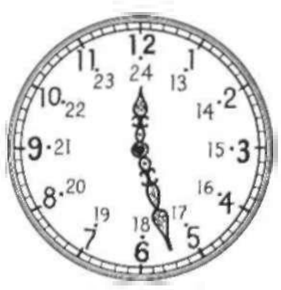
Den 2/4 slutade Ingegerd skolan klockan 12. Den 3/4 hade hon lov. Den 4/4 började hon skolan klockan 9. Hur många timmar hade hon varit från skolan?

Margit somnade kl 20 och sov i 10 timmar. Hur dags vaknade hon?

Kristina åkte tåg till morfar. Tåget gick kl 11 och var framme kl. 16. Hur lång tid tog resan?

Ingegerd och Margit for till badet kl. 9. »Ni ska vara hemma kl. 5», sade mamma. Hur många timmar fick de vara ute?

1 timme = 60 minuter. Minuter förkortas min



Hur många min är:	Hur många tim och min är:
en halvtimme?	75 min?
en kvart?	100 min?
$1^1/_2$ timme?	200 min?
$2^1/_2$ timme?	240 min?

Margits schema såg ut så här:

Nr	Klockan	M	Ti	O	To	F	L
1	8.10— 9.05	x	x	x	x	x	x
2	9.15—10.00	x	x	x	x	x	x
3	10.10—10.50	x	x	x	x	x	x
4	10.50—11.55	F r u k o s t					
5	11.55—12.40	x	x	x	x	x	x
6	12.50—13.35	x		x		x	x
7	13.50—14.30	x		x		x	

Läs på schemat och lös följande uppgifter:

Som du ser börjar första lektionen kl 8.10 och slutar kl 9.05. Hur lång är den?

tim	min
	65
	(05)
8	—10
0 tim	55 min

eller

Från kl. 8.10 till kl. 9.00 är det 50 min.
Från kl. 9.00 till kl. 9.05 är det 5 min.
50 min +5 min = 55 min.

Svar: Första lektionen är 55 min lång.

När slutar Margit skolan på a) tisdagarna, b) onsdagarna, c) fredagarna?

Hur lång frukostrast har Margit?

Hur lång är rasten mellan a) 1:a och 2:a lektionen, b) 6:e och 7:e lektionen?

Hur lång tid är Margit i skolan på fredagarna?

Hur lång tid går Margit i skolan efter frukost på lördag?

Hur dags kan Margit vara hemma på måndagarna, om hon har en kvarts gångväg från skolan till hemmet?

1 minut = 60 sekunder. Sekunder förkortas sek

Hur många sek är: a) $1^1/_2$ min b) 2 min c) 2 min 15 sek?

Hur många min och sek är a) 75 sek b) 90 sek c) 180 sek?

En löpare sprang 400 m på 46 sek. Hur många min och sek skulle han springa 800 m på, om han kunde hålla samma fart?

Pappa ringde »Fröken Ur». Hon sade: 13.3 och 10. Pappas klocka var 13.5.20. Hur mycket gick klockan före?

Vid en stafettlöpning sprang fyra pojkar olika sträckor. Så här lång tid tog det för pojkarna: Leif 1 min 4 sek, Göran 2 min 13 sek, Erik 31 sek, Tor 1 min 12 sek. På vilken tid sprang laget?

Problemlösning

Enligt *Förslag till disposition av en studieplan* skall i årskurs 4 behandlas »Praktiska problem av olika slag med i allmänhet ett räknesätt».

Eleverna har fortfarande behov av att tillsammans med läraren få diskutera problemens innehåll. Vad vet vi? Vad kan vi ta reda på? Vad skall vi ta reda på? En del elever behöver fortfarande hjälpen att få stryka under frågan i uppgiften. Se sid. 52.

Om textuppgifterna används på detta sätt, blir övningen i exakt läsning en god studieteknisk övning.

Vi föreställer oss kanske, att man kan sätta likhetstecken mellan en *verbal* situation och en *verklig* situation. Det föreligger faktiskt en stor skillnad mellan de båda. Ett exempel av följande typ kan bereda åtskilliga elever svårigheter, då textmassan tycks dem oöverkomlig.

»Kalle hade 10 kr. Han köpte 2 kg socker à 1 kr 50 öre och $1^1/_2$ kg äpplen à 2 kr 20 öre. *Hur mycket fick han tillbaka på tian?*»

Genom att stryka under frågan har eleverna fått god hjälp. Men detta är inte tillräckligt. Läraren bör ge delfrågor för att uppgiften skall benas upp.

a) Hur mycket kostade sockret? Svar: $2 \cdot 1$ kr 50 öre $=$ 3 kr.

b) Hur mycket kostade äpplena? Svar: 2 kr 20 öre $+$ 1 kr 10 öre $=$ 3 kr 30 öre.

c) Hur mycket kostade äpplena och sockret tillsammans? Svar: 6 kr 30 öre.

c) Hur mycket skulle han ha tillbaka? Svar: 3 kr 70 öre.

Någon formell uppställning med parenteser och plus och minus får *inte* förekomma. Eleverna skall lösa uppgiften steg för steg och gärna som huvudräkning.

Redan på detta stadium kan eleverna få stifta bekantskap med uppgifter med direkt proportionalitet.

Man måste se till att proportionalitet verkligen föreligger. Olämplig uppgift: 3 kuvert kostade 18 öre. Hur mycket skulle man betala för 10 000 kuvert?

Ex.: Karin köpte 3 bollar och betalade 9 kr för dem. Hur mycket skulle 5 likadana bollar ha kostat?

Redovisning: 3 bollar kostade 9 kr

1 boll » $\frac{9}{3}$ kr = 3 kr

5 bollar » $5 \cdot 3$ kr = 15 kr

Uppfattning av bråkdelar

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Uppfattning av halva, tredjedelar, fjärdedelar, femtedelar och sjättedelar.

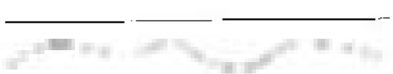
Beteckning av — — — halva, tredjedelar, fjärdedelar, femtedelar och sjättedelar.»

Momentet kan med fördel anstå till årskurs 5. Se sid. 83.

Åskådningsgeometri

All *geometri* på mellanstadiet skall vara *åskadningsgeometri,* dvs. eleverna skall *iakttaga, rita* och *mäta.*

Under fjärde årskursen kan lämpligen följande geometriska begrepp genomgås: räta och krokiga linjer, strålar och sträckor; vinklar; ytor.



En linje har ingen början och inget slut. Vi kan endast uppfatta eller rita en liten del av den.

En krokig linje kan vara sluten. Då bildas sådana figurer, som bilderna visar. Viktigast av dessa är *cirkeln.*

Om en rät linje startar i en bestämd punkt, kallas den en *stråle.* Bilden visar två strålar, a och b, som båda utgår från punkten P.

Om vi begränsar en rät linje med två punkter, A och B, uppkommer mellan punkterna en *sträcka,* som här betecknas med a.

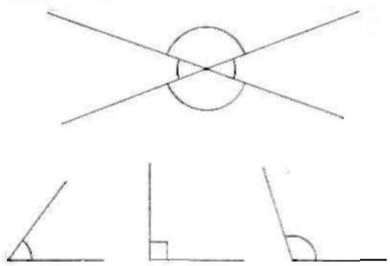
Övningsuppgifter

Låt eleverna leta rätt på räta och krokiga linjer i skolsalen och i naturen. Vilka hjälpmedel behöver man för att kunna rita en rät linje? Eleverna bör få rita krokiga linjer på fri hand, räta linjer i olika lägen, vågrätt, lodrätt och snett, samt slå cirklar med hjälp av passare.

Låt eleverna rita sträckor av olika längd samt dela dessa sträckor i lämpligt antal delar med hjälp av graderade linjaler.

Två räta linjer kan förhålla sig till varandra på två olika sätt.

Antingen är de parallella (detta moment kan lämpligen anstå tills parallellogrammerna behandlas under årskurs 6) eller också skär de varandra.



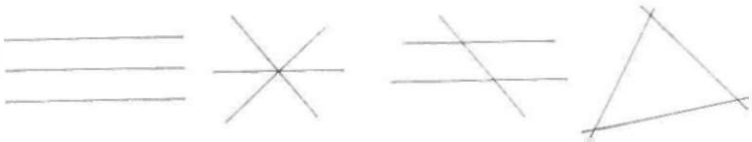
Två räta linjer skär varandra i *en* punkt. Vinklar uppkommer, som kan vara av tre olika slag: *spetsiga, räta* och *trubbiga*. En vinkel består av två strålar, som kallas *vinkelben*. Den punkt, som strålarna går ut ifrån, kallas *vinkelspets*.

Övningsuppgifter

Leta i klassrummet reda på olika vinklar. Vilket slag finns det mest av? Hur ser vinklarna ut i naturen? Rita ett träd och markera de olika vinklarna med olika färger, t. ex. blått för spetsiga, rött för trubbiga och blyerts för räta. Låt eleverna upptäcka, att det finns oändligt många spetsiga och trubbiga vinklar men bara *en rät*. I ett alfabet med versaler kan eleverna få rita in de olika vinklarna. Många frågor kan ställas:

a) Vilka bokstäver består av bara räta linjer?
b) » » » » » krokiga linjer?
c) » » » » både räta och krokiga linjer?
d) Hur många spetsiga vinklar har alfabetet?
e) » » trubbiga » » »
f) » » räta » » »

Tre räta linjer kan uppföra sig på ett av följande sätt:



I fallet längst till höger uppkommer en figur som kallas *triangel.*

Övningsuppgifter

Rita, hur fyra räta linjer kan uppföra sig.

Hur många sidor och hörn har figuren? Vilket slags vinklar bildar hörnen? Figuren kallas en *rektangel.* Rektangeln har *längd* och *bredd.*

Rita olika rektanglar med självvalda mått.
Rita rektanglar med följande mått och beräkna omkretsen:

Längd	Bredd	Omkrets
5 cm	4 cm	?
6 cm	3 cm	?
	osv.	
6 cm	4 cm	?
6 cm	5 cm	?
6 cm	6 cm	?

Vad kan berättas om den sista rektangeln? En rektangel med lika långa sidor kallas en *kvadrat.*

Rita en kvadrat med sidan 1 dm på styvt papper och klipp ut den. Kvadratens yta är *1 kvadratdecimeter,* som förkortas *1* dm^2. Eleverna bör nu använda sina kvadratdecimeter till mätningar av olika ytor: bänklocket, kartboken, på tavlan ritade rektanglar osv. Några exakta mätningar bör inte eftersträvas. Det väsentliga är, att eleverna blir förtrogna med kvadratdecimetern som ett *ytmått.*

Låt nu eleverna få se en *kvadratcentimeter* och i centimeterrutat papper få tillverka en remsa med 10 kvadratcentimeter. Med hjälp av denna bestämmes laborativt 1 dm^2 vara 100 cm^2. På liknande sätt bestämmes ytan av 1 m^2 vara 100 dm^2.

— Kap. 5 —

ÅRSKURS 5

Huvudräkning

Ur *Förslag till disposition av en studieplan* saxas: »Huvudräkning och överslagsberäkning med hela tal inom talområdet 0—1 000; huvudräkning med enkla bråk och decimaltal. Fortsatt övning av uppgifter av typen $?+4=7$; $7-?=3$; $3\cdot ?=12$; $\frac{12}{?}=4$.»

Under årskurs 5 tränas tabellerna grundligt på det sätt som beskrives för årskurs 3. Se sid. 33—35. Dessutom övas huvudräkning av typen

$\frac{3}{4}+\frac{[illegible]}{4}$; $\frac{[illegible]}{6}-\frac{3}{6}$; $5\cdot\frac{1}{2}$; $\frac{6}{5}:3$; $1{,}2+3{,}4$; $4{,}6-2{,}4$; $3\cdot 1{,}3$; $4{,}9:7$

Överslagsberäkning

Till överslagsberäkning hör fortsatt övning att bedöma rimligheten av erhållna resultat. Andra övningar bör göra klart för eleverna, att en räkneoperation kan vara omöjlig att utföra även om man har tal till sitt förfogande.

Några exempel:

Utan papper och penna. Svara bara ja eller nej.

Kan hälften av 13 vara 7,5?

Kan 2 · 4,5 bli mera än 8,9?

Är 1,1 femtedelen av 5,5?

Är 0,040 delbart med 5?

Kan man dividera 4,4 med 20 och få kvoten 2,2?

Kan skillnaden mellan 35 och 12 vara 47?

Sven, Siv och Rut delade en påse äpplen lika. Fick var och en fjärdedel?

Kalle åt $\frac{\text{[illegible]}}{8}$ av en limpa. Blev det $\frac{\text{[illegible]}}{6}$ av limpan över åt Pelle?

Räcker en femma som betalning för 0,5 m tyg à 9 kr?

Kan man betala 10 kg strösocker à 1,44 kr med en tia och en femma och få pengar tillbaka?

Säg eller skriv bara svaret

Vilket tal närmast 31 är jämnt delbart med 3?

Vilket av talen $\frac{8}{\text{[illegible]}}$, $\frac{6}{\text{[illegible]}}$, $\frac{4}{\text{[illegible]}}$ är lika mycket som $\frac{1}{\text{[illegible]}}$?

I Norge användes sommartid, dvs. klockorna är ställda en timme tidigare än i Sverige. Är klockan i Oslo 3 eller 5, när klockan i Stockholm är 4?

Vilket av talen 50, 48, 52 är närmast hälften av 99,5?

Vilket av följande bråk kan direkt skrivas som decimaltal?

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}?$$

Vilka av följande bråk är lika mycket som 1:

$$\frac{38}{37}, \frac{26}{26}, \frac{42}{43}, \frac{96}{95}, \frac{104}{104}?$$

Läs noga och tänk efter: Vilka uppgifter är orimliga?
Räkna bara de uppgifter som är rimliga.

Kalle sprang 60 m på 9,2 sek och Pelle samma sträcka på 8,9 sek. Hur fort sprang Erik?

1 kg strösocker kostade 1,44 kr. Hur mycket kostade 25 kg?

Erik tog 15 m lång sats och hoppade 3,25 m i längdhopp. Hur långt hade han hoppat, om han hade tagit 30 m lång sats?

Sven, som är 15 år, hoppar 135 cm i höjdhopp. Hur högt bör han hoppa, när han blir dubbelt så gammal?

I OS 1960 vann spjutsegraren på 84,64 m. Tvåan kastade 79,36 m. Hur långt före tvåan var segraren?

Bronsmedaljören i spjut kastade 78,57 m. Svensken Knut Fredriksson blev 6:a på 78,33 m. Hur mycket längre borde han ha kastat, för att komma 1 cm längre än bronsmedaljören?

En häst sprang 1 000 m på 2 min 3 sek. Hur lång tid tar det för 10 hästar att springa samma sträcka?

Hur många kilogram äpplen behövs det till 26 kg äppelmos, om det till 13 kg mos behövs 1 kg äpplen?

Mor köpte 20 l hallon à 1,75 kr till sylt och saft. Hur mycket skulle mor betala för bären?

Farbror Nilsson grävde ett 2 meter långt dike på 60 min. Hur lång tid skulle 100 man ha behövt för att gräva samma dike?

I OS 1960 vann Bill Nieder kulstötning på 19,68 m. Hur långt kan han stöta med en kula, som är bara hälften så tung?

I stafettlöpning 4×400 m i OS 1960 segrade USA:s lag på 3 min 2,2 sek. Vilken blev genomsnittstiden på 400 m för var och en av de fyra löparna?

Rätta felen

Slarv ställer till mycken förtret. Hjälp Anders att rätta felen.

```
a)    1 2 1
      -----
      1 4 6,3
      1 5,9 2
          7 8
    + 3,4 2
    --------
      3 4,7 5
```

```
b)    10 10 10
      ---------
       5 6, 3 2
    -  3, 8 4 5
    -----------
       1, 7 8 7
```

```
c)    3,2 4          9
       · 8 0       9 X 9
    ---------        9
    2 5,9 2 0
```

Kan du rätta de här felen?

```
a)      2,6 5          4
       · 4 3 0       1 X 1
      --------         7
         7 9 5
     + 1 0 6 0
     ---------
      1 1 3,9 5
```

```
b)          7,8 1
       80 | 6,2,4 8
          - 5 6
          -----
            6 4
            6 4
          -----
            0 8
            - 8
              0
```

```
c)           1 5 4
      300 | 4,6 2,
            - 3
            ---
            1 6
          - 1 5
          -----
              1 2
            - 1 2
            -----
```

Tryckfelsnisse har varit framme.

Rätta till sorterna i uppgifterna och räkna.

I längdhopp hoppade Kalle 312 m och Pelle 308 m. Hur mycket längre hoppade Kalle?

Fru Alm köpte 3 g äpplen à 1,90 per kg. Hur mycket skulle hon betala?

Karin behövde 5,40 st handduksväv till 9 m lika långa handdukar. Hur lång blev varje handuk?

Åkare Ågrens taxibil drar 1 hl bensin per mil. Hur mycket bensin gick åt under en färd på 62 mil?

Uppgifter med frågetecken

Se årskurs 4, sid. 54.

Skriftlig räkning med hela tal

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Skriftlig räkning med hela tal: additioner med högst åtta termer; subtraktion; multiplikation med minsta faktorn högst tvåsiffrig; division med högst tvåsiffrig divisor; multiplikation och division med 10, 100 och 1 000; avrundning».

Addition, subtraktion, multiplikation med ensiffrig första faktor, division med ensiffrig divisor

Se sid. 36—49.

Multiplikation med 10, 100, 1 000 osv. samt med godtycklig tvåsiffrig första faktor, division med ensiffrig divisor och slutrest, division med begränsad tvåsiffrig divisor

Se sid. 57—59.

Division med godtycklig tvåsiffrig divisor

Som tidigare påpekats, vållar detta moment många elever stora svårigheter (sid. 61). Därför bör inlärningsgången vara mycket långsam. De tre första stadierna av detta moment kan med fördel behandlas i årskurs 4 (sid. 62—63), medan den fortsatta inlärningen sparas till årskurs 5, då följande stadier passeras.

Stadium 4

Divisorns första siffra går inte jämnt upp i dividendens (deldividendens) första siffra (siffror). Närmast liggande val av kvotsiffra ger den riktiga kvotsiffran. Tiotalssiffran blir 0.

Ex.: 4 738 : 46; 3 536 : 34 osv.

```
      0 1 0 3
 4 6 | 4 7 3 8
       4 6
       -----
         1 3 8
         1 3 8
         -----
```

46 i 4 går 0 gånger.
4 i 4 går 1 gång. 1 · 46 = 46. 47—46 = 1.
4 i 1 går 0 gånger.
4 i 13 går 3 gånger. 3 · 46 = 138. 138—138 = 0.

Stadium 5

Närmast liggande val ger en kvotsiffra som är 1 enhet för hög.

Ex.: 450 : 15; 368 : 16; 875 : 25; 2 065 : 59 osv.

```
       0 2 3
 1 6 | 3 6 8
     - 3 2
     -----
         4 8
       - 4 8
       -----
           0
```

16 i 3 går 0 gånger. 16 kan inte gå i 36 flera gånger än 1 går i 3. 1 i 3 går 3 gånger. Pröva: 3 · 16 = 48. Kvotsiffran 3 var för hög. Försök med kvotsiffran 2. 2 · 16 = 32. 36—32 = 4. Flytta ned 8:an. 16 i 48 kan inte gå i 48 flera gånger än 1 går i 4. Pröva: 4 · 16 = 64. Kvotsiffran 4 var för hög. Försök med 3. 3 · 16 = 48. 48—48 = 0.

Stadium 6

Närmast liggande val ger en kvotsiffra, som är 2 enheter för hög.

Ex.: 60 : 15; 84 : 14; 414 : 18 osv.

Stadium 7

Närmast liggande val ger en kvotsiffra, som är 3 eller flera enheter för hög.

Ex.: 666 : 18.

Förstasifframetod eller höjningsmetod?

I de fullt utförda divisionerna här ovan har *förstasifframetoden* använts. Om denna metod används, tas hänsyn endast till divisorns första siffra. Tillämpas *höjningsmetoden,* höjes divisorns första siffra en enhet, om den andra siffran är 5 eller högre, dvs. divisorn avrundas till närmast liggande tiotal, hundratal osv. enligt de vanliga avrundningsreglerna. Ett exempel får klargöra vad saken gäller. Uppgiften som skall lösas är 2 976 : 48.

Förstasifframetoden

$$\begin{array}{r|l} & 62 \\ \hline 48 & 2976 \\ & -288 \\ \hline & 96 \\ & -96 \\ \hline & 0 \end{array}$$

När kvotsiffran sökes, tas hänsyn endast till divisorns första siffra, i vårt fall **4. 4 i 29 går 7** gånger. 7 · 48 = 336. Kvotsiffran 7 är tydligen för hög. Vi försöker med 6. 6 · 48 = 288. 297—288 = 9. 6:an flyttas ned. 4 i 9 går 2 gånger. 2 · 48 = 96. 96—96 = 0.

Höjningsmetoden

$$\begin{array}{r|l} (5) & 62 \\ \hline 48 & 2976 \\ & -288 \\ \hline & 96 \\ & -96 \\ \hline & 0 \end{array}$$

8:an i 48 får påverka 4:an, så att denna höjes till 5. 5 i 29 går 5 gånger. 5 · 48 = 240. 297—240 = = 57. Resten blir alltså större än divisorn, vilket indikerar en högre kvotsiffra. Vi försöker med kvotsiffran 6. 6 · 48 = 288. 297—288 = 9. 6:an flyttas ned. 5 i 9 går 1 gång. 1 · 48 = 48. Resten blir lika stor som divisorn, varför kvotsiffran 1 ändras till en 2:a. 2 · 48 = 96. 96—96 = 0.

Farliga blindskär lurar alltså här på eleven, som kanske räknar fel och gör som på följande sida.

```
        5 1 1 1
 4 8 | 2 9 7 6
       2 4 0
      -------
         5 7
       - 4 8
      -------
           9 6
           4 8
      -------
           4 8
         — 4 8
      -------
             0
```

8:an i 48 får påverka 4:an, så att denna höjes till 5. 5 i 29 går 5 gånger. 5 · 48 = 240. 297—240 = = 57. Risken är stor, att eleven fortsätter divisionen utan att korrigera den felaktiga kvotsiffran. 5 i 5 går 1 gång. 1 · 48 = 48. 57—48 = 9. 6:an flyttas ned. 5 i 9 går 1 gång. 1 · 48 = 48. 96—48 = 48. Slutligen går 48 i 48 1 gång. 1 · 48 = 48. 48—48 = 0.

I de fall förstasifframetoden användes, löper man risken att få för hög kvotsiffra, vilket ger en för hög produkt, varför subtraktionen i algoritmen inte går att utföra. Det gjorda felet upptäckes lätt. Höjningsmetoden kan ge för låg kvotsiffra, produkten blir för liten och resten blir större än divisorn, vilket inbjuder till ytterligare en division.

Den vane räknaren använder båda metoderna lika suveränt, medan vi i undervisningen av eleverna på mellanstadiet är hänvisade till *en* metod. Denna bör vara *förstasifframetoden.*

Skriftlig räkning med decimaltal

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Skriftlig räkning med decimaltal: addition med högst åtta termer; subtraktion; multiplikation och division med högst tvåsiffriga heltal; avrundning».

En siffras värde i ett tal bestämmes dels av dess *storlek* och dels av dess *position.* I talet 739 betyder 7:an 700, 3:an 30 och 9:an 9. 739 är alltså 700+30+9. Några sådana övningar att analysera hela tal, att diskutera *positionssystemet,* bör vara inledningen till undervisningen om decimaltal.

Talet 111 är 100+10+1. Om vi flyttar en av 1:orna ett steg åt vänster, får den ett värde som är 10 gånger så stort som dess föregående värde. Flyttar vi två steg blir värdet 100 gånger så stort osv. Vi kan naturligtvis också gå åt höger. Flyttas en 1:a ett steg åt höger, blir värdet tiondelen av det föregående, flyttas den två steg åt höger, blir värdet hundradelen av det föregående osv.

111 är *heltal.* Något mindre heltal än 1 ental finns inte. Till höger om entalsettan finns alltså talsorter som är mindre än 1 och som måste skiljas från entalsettan. Detta sker genom ett *decimalkomma.* Heltalet 111 kan alltså skrivas 111,. Om vi skriver till ytterligare en 1:a, blir talet 111,1.

1:an efter entalsettan har ett värde, som är tiondelen av entalsettans värde. Talet 111,1 läses alltså 111 hela 1 *tiondel.* Sättes en 1:a efter tiondelsettan kommer talet att bli 111,1*1*. Den kursiva ettan står två steg till höger om entalsettan och har alltså ett värde, som är hundradelen av entalsettans värde. Den kallas också en *hundradel.* Det går tio hundradelar på en tiondel, 111,11 är alltså 111 hela och 11 hundradelar. Så bör talet läsas under hela mellanstadiet och även långt upp på högstadiet.

Efter en genomgång av skisserat slag bör eleverna få läsa och skriva några decimaltal.

Addition

Uppgiften, som skall lösas, är 8,6+4,7+9,8.

Tiondelar skall adderas till tiondelar, ental till ental. Algoritmen får då följande utseende:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 8,6 \\ 4,7 \\ +\,9,8 \\ \hline 23,1 \end{array}$$

6 tiondelar+7 tiondelar+8 tiondelar= 21 tiondelar. 21 tiondelar växlas till 2 hela 1 tiondel. 1 tiondel skrives i tiondelskolumnen. För att vi ska se, att 1:an är tiondel, måste decimalkomma sättas ut framför den. 2:an blir minnessiffra och additionen fortsätter.

Eleverna bör själva få upptäcka, att decimalkommatecknen kommer under varandra.

Resonemanget blir naturligtvis liknande, om vi också har hundradelar. I exemplet är summan av tiondelarna utsatt vid sidan av algoritmen. Detta kan vara lämpligt under inlärningsstadiet men skall senare överges.

Uppgifter av typen 39,5+48+68,76 bör förekomma mycket sparsamt. Uppenbarligen har de tre termerna olika noggrannhetsgrad. Bättre vore, att uppgiften hade följande utseende: 39,50+ +48,00+68,76. I varje fall är det nog lämpligt med nollutfyllning i algoritmen.

Subtraktion

```
  4,68
– 2,35
------
  2,33
```

Uppgiften 4,68—2,35 vållar inga svårigheter.

Eleverna bör i inlärningssituationen få säga 8 hundradelar minus 5 hundradelar är 3 hundradelar osv.

```
   10 10 10
   --------
   [illegible]
 – 1 6,7 8
 ----------
     8,6 4
```

I uppgiften 25,42—16,78 förekommer lån.

2 hundradelar minus 8 hundradelar går inte. Vi lånar 1 tiondel, som förvandlas till 10 hundradelar osv.

I uppgiften 100—74,59 måste båda termerna före lösandet få samma noggrannhet: 100,00—74,59. Tillvägagångssättet blir sedan analogt med tillvägagångssättet i föregående exempel.

Multiplikation

Uppgifterna 2 · 0,6 och 3 · 1,4 kan lösas som upprepade additioner: 2 · 0,6 = 0,6 + 0,6 = 1,2; 3 · 1,4 = 1,4 + 1,4 + 1,4 = 4,2. Med algoritm löses 3 · 1,4 på följande sätt:

1,4 $\cancel{12}$

3

4,2

3 gånger 4 tiondelar är 12 tiondelar, som växlas t'll 1 hel 2 tiondelar. De två tiondelarna skrives ut. För att vi ska se, att 2:an betecknar tiondelar, måste den stå bakom ett decimalkomma. 3 gånger 1 hel är 3 hela. 3 hela + 1 hel är 4 hela.

Delprodukten 12 tiondelar kan med fördel utskrivas under inlärningsstadiet. Därefter överges delproduktsskrivningen.

Eleverna får själva upptäcka, att man i produkten skall avskilja lika många decimaler som den ena faktorn innehåller. (Den andra faktorn är i årskurs 5 ett helt tal.)

Multiplikation med faktorer som slutar på noll(or)

Uppgiften 10 · 3,2 löses, sedan jämförelse gjorts med heltalsmultiplikationen 10 · 32 = 320, som eleverna redan behärskar. Vid multiplikationen har 32 ryckt ett steg åt vänster. 2 ental har blivit 2 tiotal, 3 tiotal har blivit 3 hundratal. 0:an fyller ut entalsplatsen. På samma sätt i uppgiften 10 · 3,2 = 32,0. Positionerna ändras, dvs. hela talet har ryckt ett steg åt vänster. Detta resonemang torde vara riktigare än att säga, att decimalkommat har flyttat ett steg åt

höger. Vid multiplikation med 100 resp. 1 000 rycker talet två resp. tre steg åt vänster. $100 \cdot 3{,}2 = 320$; $1\,000 \cdot 3{,}2 = 3\,200$. Vid multiplikation med 20, 30, 200, 300 osv. genomföres samma resonemang $20 \cdot 3{,}2 = 2 \cdot 10 \cdot 3{,}2 = 2 \cdot 32 = 64$;
$300 \cdot 6{,}5 = 3 \cdot 100 \cdot 6{,}5 = 3 \cdot 650 = 1950$.

Algoritmen bör ha följande utseende:

$$\begin{array}{r} 6.5 \\ \cdot\, 3\,0\,0 \\ \hline 1\,9\,5\,0{,}0 \end{array}$$

Multiplikation med tvåsiffrig multiplikator

Operationen $13 \cdot 15{,}6$ utföres genom att distributiva lagen tilllämpas på samma sätt som vid räkning med heltalsfaktorer.

$$\left.\begin{array}{r} 3 \\ 10 \end{array}\right\} 15{,}6 = \begin{array}{r} 46{,}8 \\ +156{,}0 \\ \hline 202{,}8 \end{array}$$

Efter flera sådana uppgifter överföres operationen till algoritm.

$$\begin{array}{r} 1\,5{,}6 \\ \cdot\, 1\,3 \\ \hline 4\,6\,8 \\ 1\,5\,6 \\ \hline 2\,0\,2{,}8 \end{array}$$

Decimalkommat utsättes inte i delprodukterna.

Multiplikation med decimalmultiplikator och heltalsmultiplikand

Operationen $1{,}3 \cdot 42$ kan eleverna inte utföra, förrän kommutativa lagen antagits gälla även i detta fall. $1{,}3 \cdot 42$ antages vara detsamma som $42 \cdot 1{,}3$, och nu går operationen att utföra. Eleverna kan också konstatera, att de båda algoritmerna ger samma produkt, om antalet decimaler i produkten är detsamma som antalet decimaler i decimalfaktorn.

$$\begin{array}{r} 1.3 \\ \cdot\, 4\,2 \\ \hline 2\,6 \\ +\,5\,2 \\ \hline 5\,4{,}6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,2 \\ \cdot\, 1{,}3 \\ \hline 1\,2\,6 \\ +\,4\,2 \\ \hline 5\,4{,}6 \end{array}$$

Division med heltalsdivisor

Uppgiften som skall lösas är $\frac{6,9}{3}$.

```
    2,3
   ____
3 | 6,9
 − 6
  ___
   0 9
   — 9
  ____
     0
```

Tredjedelen av 6 hela är 2 hela. Decimalkommat visar, att nästa siffra blir tiondelar. Tredjedelen av 9 tiondelar är 3 tiondelar.

Flera uppgifter av liknande typ åskådliggör, att decimalkommat i kvoten alltid har sin plats rakt ovanför decimalkommat i dividenden. Då decimalkommats plats är given, bör eleverna uppmanas att först sätta ut decimalkommat på dess plats i kvoten.

Division med 10, 100 osv.

Först repeteras sambandet mellan multiplikation och division. $5 \cdot 3 = 15$; $15 : 5 = 3$ osv. Därefter $10 \cdot 4,5 = 45$; $45 : 10 = 4,5$ eller hellre $45,0 : 10 = 4,5$. Vid division med 10 ändras positionen, i det att kvoten innehåller dividendens siffror flyttade ett steg till höger. Motsvarande resonemang vid division med 100, 1 000 osv.

Avrundning av decimaltal

Antalet decimaler måste bestämmas av den sort man räknar med och den noggrannhet som eftersträvas.

När ett decimaltal avrundas, ersättes talets värde av ett närmevärde, varvid alla siffror i talet efter en viss siffra, *avrundningssiffran,* utelämnas. Ex.: Talet 246,34261 skall avrundas, så att det bara innehåller en decimal. Det skrives då 246,3. Tiondelstrean är *avrundningssiffra.* Denna siffra kan kvarstå oförändrad som i exemplet eller höjas. Följande regler bör tillämpas (enligt Sveriges standardiseringskommission):

1. Om siffran efter avrundningssiffran är mindre än 5, höjes inte avrundningssiffran. Ex.: 2,342 avrundas till 2,34, 2,3 eller 2.
2. Om siffran efter avrundningssiffran är 5 eller större, höjes avrundningssiffran. Ex.: 2,567 avrundas till 2,57, 2,6 eller 3.

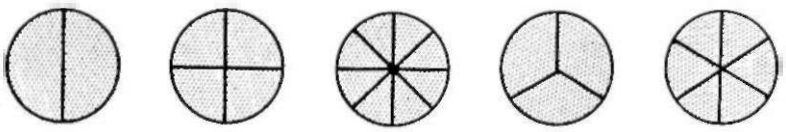
Skriftlig räkning med bråk

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Enkel skriftlig räkning med bråk: addition och subtraktion med liknämniga bråk; bråks multiplikation och division med ensiffrigt heltal. Förlängning och förkortning.»

Att undervisa om *brak* på mellanstadiet är att ge eleverna kunskap om vissa elementära begrepp rörande bråkens egenskaper och några av de enklaste operationerna med bråk. Det praktiska livets matematik kräver knappast någon kännedom om bråk, medan den fortsatta undervisningen i matematik på högre stadier fordrar viss kunskap om *principerna* för bråkbehandlingen.

Det är på mellanstadiet lämpligt att arbeta med så stora och så få bråkdelar som möjligt. För att tillgodose elevernas behov av konkret och laborativ undervisning bör bråken väljas så, att de lätt kan åskådliggöras. Bäst sker detta kanske med hjälp av cirkelsektorer.

Först måste eleverna få en symbol för *en hel.* En hel kan representeras av en cirkelskiva med ca 15 cm diameter. Denna skiva delas på olika sätt.



Hur många delar är de olika skivorna delade i?

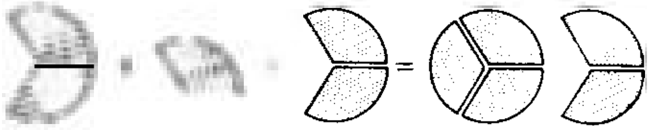
Skrivsätten för och namnen på de olika delarna måste läraren meddela eleverna.

En fjärdedel skrives $\frac{1}{4}$, en tredjedel $\frac{1}{3}$ osv. Två fjärdedelar skrives $\frac{2}{4}$, två tredjedelar $\frac{2}{3}$ osv. Skrivsättet är en konvention.

Om *halva, fjärdedelar* och *åttondelar* göres i en färg samt *tredjedelar* och *sjättedelar* i en annan, vinnes att eleverna lätt dels lär sig skilja mellan de olika delarna och dels lär sig släktskapet mellan dem.

Addition

Addition av enkla bråk visas med fördel på en flanelltavla.

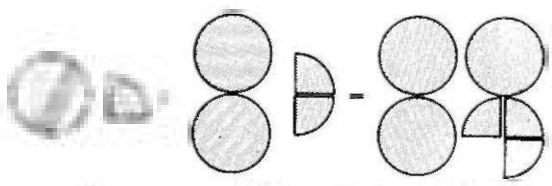


$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Nu kan det vara rätt tid att konstatera, hur många tredjedelar man behöver till 1 hel, hur många man behöver till 2 hela osv.

Eleverna visas därefter, att $\frac{5}{\text{[illegible]}}$ ger $1\frac{2}{\text{[illegible]}}$ som svar om bråkstrecket betraktas som divisionstecken. Helt korrekt är inte detta. Om man vill ta reda på hur många hela och tredjedelar $\frac{\text{[illegible]}}{3}$ räcker till, borde egentligen operationen $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} : \frac{3}{\text{[illegible]}}$ utföras.

Addition av blandade tal



$1\frac{\text{[illegible]}}{4} + \text{[illegible]}$

Delarna adderas för sig och de hela för sig. Förvandling av de blandade talen till oegentliga bråk före additionen får *inte* ske.

Inlärningsgången bör vara denna:

Stadium 1: a) $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} + \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} = \frac{\text{[illegible]}}{3}$

b) $1\frac{\text{[illegible]}}{8} + 1\frac{\text{[illegible]}}{8} = 2\frac{\text{[illegible]}}{8}$

Stadium 2: a) $\frac{\text{[illegible]}}{4} + \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} + \frac{\text{[illegible]}}{4} = \frac{\text{[illegible]}}{4} = 1\frac{\text{[illegible]}}{4}$

b) $1\frac{3}{4} + 1\frac{2}{4} = 2\frac{5}{4} = 3\frac{1}{4}$

Subtraktion

Uppgifter av typen $\frac{5}{\text{[illegible]}}-\frac{4}{\text{[illegible]}}=\frac{1}{\text{[illegible]}}$ visas på flanelltavlan. Fem sjättedelar placeras på flanelltavlan, varefter fyra sjättedelar tas bort. En sjättedel blir kvar.

Nästa typ av uppgifter torde vara följande. En hel placeras på flanelltavlan. En elev uppmanas att ta bort en tredjedel. Operationen tecknas på tavlan $1-\frac{\text{[illegible]}}{3}$. För att operationen skall kunna utföras, måste en hel förvandlas till tredjedelar. $1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Därefter uppgifter av typen $2\frac{1}{\text{[illegible]}}-\frac{2}{\text{[illegible]}}$ osv., i vilka en hel måste växlas till delar.

Inlärningsgång:

Stadium 1: a) $\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$

b) $3\frac{5}{6}-1\frac{4}{6}=2\frac{1}{6}$

Stadium 2: a) $1-\frac{\text{[illegible]}}{3}=\frac{\text{[illegible]}}{3}-\frac{\text{[illegible]}}{3}=\frac{2}{3}$

[illegible]

Multiplikation

All egentlig multiplikation kan på mellanstadiet utföras som upprepad addition. $3\cdot\frac{1}{4}$ kan alltså skrivas och räknas: $\frac{\text{[illegible]}}{4}+\frac{1}{4}+\frac{\text{[illegible]}}{4}=$ $=\frac{3}{4}$; $2\cdot 1\frac{\text{[illegible]}}{3}=1\frac{\text{[illegible]}}{3}+1\frac{2}{3}=$ [illegible] $=3\frac{\text{[illegible]}}{3}$ osv. Efter många sådana övningar upptäcker eleverna att resultatet $\frac{\text{[illegible]}}{4}$ av operationen $3\cdot\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$ erhålles, om 1:an i uttrycket $\frac{1}{\text{[illegible]}}$ multipliceras med 3, resultatet $2\frac{4}{3}=3\frac{1}{3}$ av operationen $2\cdot 1\frac{2}{3}$, om dels 1 hel och dels 2:an i uttrycket $\frac{2}{3}$ multipliceras med 2 osv.

Förvandling till oegentligt bråk före multiplikationen skall *inte* ske.

Inlärningsgång:

Stadium 1: a) $3 \cdot \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} = \frac{\text{[illegible]}}{4}$

b) $3 \cdot 1\frac{1}{\text{[illegible]}} = 3\frac{3}{4}$

Stadium 2: a) $2 \cdot \frac{\text{[illegible]}}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{\text{[illegible]}}{3}$

b) $2 \cdot 1\frac{2}{3} = 2\frac{4}{3} = 3\frac{1}{3}$

Multiplikation med bråkmultiplikator och heltalsmultiplikand

Uppgiften $\frac{2}{\text{[illegible]}} \cdot 4$ läses »två tredjedelar av fyra» eller »två tredjedelar gånger fyra». Uppgiften är ingen multiplikation, om denna skall definieras som upprepad addition.

Enklaste sättet att lösa uppgifter av denna typ är att anta, att kommutativa lagen, $a \cdot b = b \cdot a$, som tidigare visat sig gälla för naturliga tal, också gäller i detta fall. $\frac{2}{\text{[illegible]}} \cdot 4$ kan då skrivas $4 \cdot \frac{2}{\text{[illegible]}}$ och lösas på tidigare inlärt sätt.

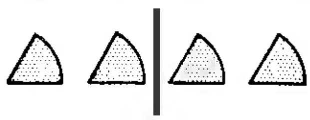
Multiplikation av två bråkfaktorer skall inte förekomma på mellanstadiet.

Division

På mellanstadiet skall endast division med heltalsdivisor förekomma. I årskurs 5 bör divisorn gå jämnt upp i dividendens täljare.

Ex.: $\frac{4}{6}:2,\ \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}:3,\ \frac{10}{\text{[illegible]}}:5$ osv.

Uppgifter av den typen kan lätt demonstreras på flanelltavlan.



$\frac{4}{6}:2 = \frac{\text{[illegible]}}{6}$

Uppgiften $2\frac{[illegible]}{[illegible]}:3$ kan inte lösas utan vidare. Men om 2 hela förvandlas till fjärdedelar, blir $2\frac{[illegible]}{[illegible]}$ lika med $\frac{[illegible]}{[illegible]}$. Operationen $\frac{[illegible]}{[illegible]}:3$ går lätt att demonstrera och utföra.

Inlärningsgång:

Stadium 1: $\frac{[illegible]}{6}:2=\frac{[illegible]}{6}$

Stadium 2: $2\frac{[illegible]}{4}:3=\frac{9}{4}:3=\frac{[illegible]}{4}$

Nämnare och täljare; egentligt och oegentligt bråk; blandat tal

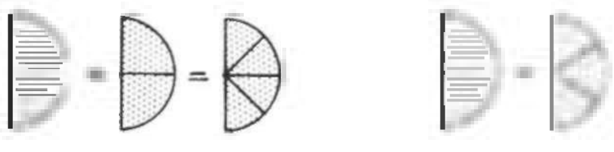
Om undervisningen är konkret, har eleverna rätt liten nytta av terminologikunskaper, vilket inte hindrar, att vissa elementära begrepp bör kunna namnges.

I uttrycket $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ är det 3:an som ger ***namn*** åt delarna. 3:an kallas ***nämnare.*** 2:an talar om, hur många tredjedelar bråket har. 2:an kallas *täljare.*

Bråken $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{[illegible]}{8}$ är alla *mindre än 1.* Bråk, vars värde är mindre än 1, kallas *egentliga bråk.* Bråken $\frac{[illegible]}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{4}, \frac{8}{8}$, är samtliga *lika med* eller *större* än 1. Sådana bråk kallas *oegentliga bråk.* Ett oegentligt bråk kan alltid förvandlas till ett ***blandat tal*** eller till *hela tal.* $\frac{3}{[illegible]}=1\frac{1}{[illegible]}$, $\frac{3}{[illegible]}=1$, $\frac{8}{[illegible]}=1\frac{[illegible]}{[illegible]}$ osv.

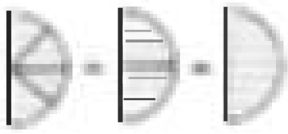
Förlängning och förkortning

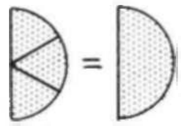
Förlängning och förkortning går lätt att åskådliggöra på flanelltavlan.



Hur erhålles $\frac{4}{8}$ av $\frac{1}{2}$? Svar: Täljare och nämnare multipliceras med 4. Att *förlänga* ett bråk innebär att *multiplicera* täljare och nämnare *med samma tal.*

Förkortningen är förlängningens inversion.





$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Hur erhålles $\frac{1}{2}$ av $\frac{4}{8}$? Svar: Täljare och nämnare divideras med 4. Att *förkorta* ett bråk innebär att *dividera* täljare och nämnare *med samma tal.*

Under inlärningsstadiet utskrives de tal, med vilka förlängningen och förkortningen sker. Ex.:

$$\frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{4}{8}, \qquad \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2}.$$

Hur bör förkortning utföras?

Det är önskvärt, att förkortningen sker utan strykning. »Kluddförkortning» av nedanstående typ bör inte tillåtas. Bättre är att bråket skrives om:

$$\frac{\begin{array}{c}1\\ \cancel{2}\\ \cancel{4}\\ \cancel{8}\\ \cancel{16}\end{array}}{\begin{array}{c}\cancel{48}\\ \cancel{24}\\ \cancel{12}\\ \cancel{6}\\ 3\end{array}} = \frac{1}{3}$$

$\frac{16}{48} = \frac{8}{24} = \frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Då detta innebär ett betydligt merarbete för eleverna, kan man hoppas, att eleverna söker förkorta med allt större faktorer.

Problemlösning

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Praktiska problem av olika slag även med flera räknesätt».

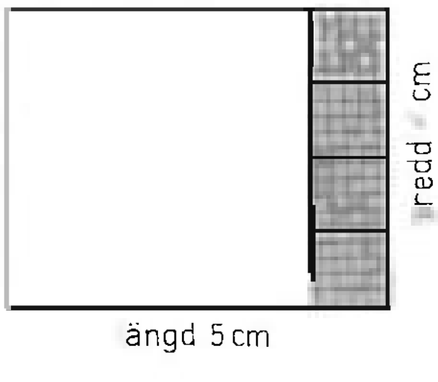
Angående momentets behandling se årskurs 4, sid. 68—69.

Åskådningsgeometri

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Åskådningsgeometri: repetition av i föregående årskurs ingående moment; kroppar; ytmått; beräkning av rektangelns omkrets och yta; mätningar med kubikcentimeter och kubikdecimeter».

Under årskursen repeteras först det som behandlats under föregående årskurs. Sedan eleverna gjort förnyade mätningar med *kvadratdecimetern* och *kvadratcentimeterremsan,* bestämmes än en gång, hur många kvadratcentimeter som får plats på en kvadratdecimeter samt kvadratdecimeter på en kvadratmeter. Därefter övningar med förvandling mellan de olika ytmåtten, varvid förvandling endast bör ske mellan närliggande sorter.

Som nytt moment tillkommer *beräkning av rektangelytans storlek.*

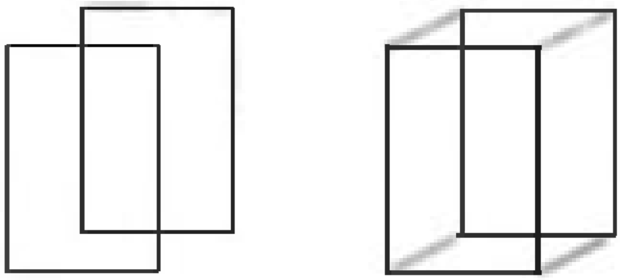


Hur många kvadratcentimeter får plats utefter bredden? Svar: 4 cm^2.

Hur många staplar med 4 cm^2 får plats på rektangeln? Svar: 5 st.

Hur många kvadratcentimeter får plats på rektangeln? Svar: $5 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 20 \text{ cm}^2$.

Under årskurs 5 introduceras lämpligen *rätblocket.* Vid ritning av rätblock bör parallellperspektiv användas. Först ritas två rektanglar, den ena »snett bakom» den andra. Därefter förenas hörnen.



Övningsuppgifter

Låt eleverna rita rätblock, först med självvalda sedan med givna mått.

Längd	Bredd	Höjd
4 cm	3 cm	5 cm
6 cm	4 cm	3 cm
	osv.	
5 cm	5 cm	5 cm

Vad kan berättas om det sista rätblocket?

Ett rätblock, vars kanter är lika långa, kallas en *kub.*

Hur många kanter har ett rätblock?

» » hörn » » » ?

» » kanter utgår från varje hörn?

Naturligtvis bör varje klassrum vara utrustat med ett antal rätblock av olika storlek, så att eleverna får se, ta på och rita av dem.

Eleverna får till sist stifta bekantskap med de kuber, som har 1 dm resp. 1 cm långa kanter, *kubikdecimetern* och *kubikcentimetern,* samt utföra mätningar med dessa. Några exakta mätningar bör inte eftersträvas, däremot god förtrogenhet med *rymdmåtten.*

Sorträkning och sortförvandling

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Övningar att uppfatta och — i tillämpliga fall — använda i föregående årskurser angivna måttenheter samt kvadratmillimeter, kvadratcentimeter, kvadratdecimeter, kvadratmeter, kubikcentimeter, kubikdecimeter. Sambandet mellan kubikdecimeter och liter. Sortförvandlingar av praktisk natur. Begreppen deci = tiondel, centi = hundradel och milli = = tusendel.»

När sorträkning förekommer i praktiska livet, är det nästan uteslutande som räkning med decimaluttryck. Övningar av följande typ kan därför vara berättigade, och fortfarande gäller, att varje sortförvandling skall vara en matematisk operation. Inga slags konstruerade tabeller kan hjälpa eleverna att klara sortförvandlingen. Sådana tabeller torde tvärtom göra mera skada än nytta. Eleverna måste kunna två moment ordentligt för att klara sortförvandlingen:

1) *relationen mellan två närliggande sorter,* t. ex. 1 kg = 10 hg, 1 kr = 100 öre, 1 ton = 1 000 kg osv.;

2) *Positionssystemet*

Ex. 1: Uttryck 4 kg 3 hg som kilogram.

Hur många hela kilogram har vi? Svar: 4. Skriv 4, kg.

Vad heter sorten under kilogram? Svar: Hektogram. Hur många hektogram är 1 kg? Svar: 10 hg. Hur stor del av 1 kg är 1 hg? Svar: 1 tiondel. 3 hg? Svar: 3 tiondelar. 4 kg 3 hg är alltså 4,3 kg, som läses 4 hela 3 tiondels kg.

Ex. 2: Uttryck 1 m 4 dm 3 cm som meter.

Hur många meter har vi? Svar: 1 m. Skriv 1, m.

Vad heter sorten under meter? Svar: Decimeter. Hur många decimeter är 1 m? Svar: 10 dm. Hur stor del av 1 m är 1 dm? Svar: 1 tiondel. 4 dm? Svar: 4 tiondelar. Vi kan nu skriva 1 m 4 dm som 1,4 m. Vad heter sorten under decimeter? Svar: Centimeter. Hur många centimeter går på 1 m? Svar: 100 cm. Hur stor del av 1 m är 1 cm? Svar: 1 hundradel. 3 cm? Svar: 3 hundradelar. 1 m 4 dm 3 cm kan nu skrivas som 1,43 m.

Givetvis skall övningar av denna typ med tre sorter förekomma ytterligt sparsamt. Vettigast hade varit att förvandla 1 m 4 dm 3 cm till 1 m 43 cm = 1,43 m.

Ex. 3: Uttryck i olika sorter 4,05 km.

Hur många hela kilometer har vi? Svar: 4 hela km. Skriv 4 km. Vad heter sorten under kilometer? Svar: Meter. Hur många meter är 1 kilometer? Svar: 1 000 m. Hur stor del av 1 km är 1 m? Svar: 1 tusendel. 25 m? Svar: 25 tusendelar osv. Vilken sorts delar måste vi alltså ha för att kunna förvandla till meter? Svar: Tusendelar. Vilka delar har vi? Svar: Hundradelar. Hur ska vi få tusendelar? Svar: 4,05 km förlänges till 4,050 km. Hur många tusendels kilometer har vi? Svar: 50 tusendels kilometer. Hur många meter är det? Svar: 50 m. 4,05 km = 4,050 km = 4 km 50 m.

Naturligtvis verkar ovanstående vara rena drillen. Det är det också. Men drill får aldrig ersätta förståelse, endast hjälpa till att befästa kunskaperna.

I årskurs 5 introduceras också begreppen *deci = tiondel, centi = = hundradel* och *milli = tusendel* i samband med decimaltalsläran.

Ex.: 4 meter 3 *deci*meter = 4 hela 3 *tiondels* meter = 4,3 m.
1 meter 5 *centi*meter = 1 hel 5 *hundradels* meter = 1,05 m.
1 meter 8 *millimeter* = 1 hel 8 *tusendels* meter = 1,008 m.

— Kap. 6 —

ÅRSKURS 6

Huvudräkning och överslagsberäkning

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Huvudräkning och överslagsberäkning: hela tal, bråk, decimaltal, procenttal; avrundning. Kombinationer av typen $? + 0{,}2 = 0{,}8$; $? — 0{,}3 = 0{,}4$; $2 \cdot ? = 0{,}6$; $? : 2 = 0{,}4$.

Under årskurs 6 fortsättes tabellträningen på det sätt som beskrives för årskurs 3. Dessutom bör eleverna kunna utföra enkla operationer av typen $12 \cdot 13$ i huvudet. Uppgiften löses på följande sätt: $12 \cdot 13 = 10 \cdot 13 + 2 \cdot 13 = 130 + 26 = 156$. De flesta eleverna bör kunna erhålla god färdighet i detta moment.

Övning av uppgifter av typen

[illegible]/8 + [illegible]/8, [illegible]/6 [illegible]/6, [illegible]/2, [illegible]/5 [illegible],

$1{,}25 + 0{,}50$, $2{,}35 — 0{,}25$, $2 \cdot 1{,}32$, $10{,}8 : 9$ bör förekomma flitigt.

När eleverna behandlat *procentbegreppet* bör enkla procentuppgifter övas som huvudräkning i stor utsträckning. Uppgifter av följande typ är lämpliga:

Hur mycket är 5 % av 100 kr, 200 kr, 300 kr, 400 kr osv.?

Hur många procent av 100 kr är 10 kr, 20 kr, 30 kr osv.?

Hur många procent av 200 kr är 10 kr, 20 kr, 30 kr osv.?

Av eleverna i klassen var 48 % pojkar. Hur många procent var flickor?

Av familjen Eks inkomster kunde 15 % sparas och resten gick till olika utgifter. Hur många procent utgjorde utgifterna?

Hur många procent är hälften, fjärdedelen, tre fjärdedelar, tiondelen, femtedelen osv.?

Överslagsberäkning

Övningar att bedöma rimligheten av erhållna resultat bör förekomma. Avrundning med bruk av tecknet för »ungefär lika med» bör övas flitigt. Eleverna bör också få fortsatt träning i att bedöma om en uppgift är rimlig eller orimlig. Några exempel:

Beräkna utan att ställa upp till uträkning det *ungefärliga* svaret. Eftersom svaret bara blir »ungefär lika med» det rätta svaret, använder vi inte likhetstecknet = utan i stället tecknet för »ungefär lika med».

Skriv uppgiftens nummer och svaret så här: 618. $\approx$ 1900.

200 + 400 + 803 + 501
403 + 199 + 593
398 + 399 + 400 + 401
1 203 + 899

a) $11 \cdot 39$ b) $10{,}1 \cdot 10{,}2$ c) $20 \cdot 20{,}6$
a) $24{,}13 : 2$ b) $42 : 4{,}1$ c) $100 : 9{,}99$

Vad är hälften av 49?
Vad är tredjedelen av 33,5?
Vad skall jag multiplicera 15 med för att få produkten 152,6?
Hur stor del är 40 av 83?

Minns du att

$$10\ \% \quad \frac{1}{10},\ 25\ \% = \frac{1}{4},\ 50\ \% = \frac{1}{2}$$

Hur mycket är
10 % av 111 kr? 9,8 % av 230 kr?
25 % av 23 kr? 25,2 % av 200 kr?
50 % av 99,75 kr? 49 % av 500 kr?

Hur många procent av 200 kr är 99 kr?
Hur många procent av 101,8 kr är 49,88 kr?
Hur många procent av 100 kr är 10,30 kr?
Hur många procent av 200 kr är 51,25 kr?
Hur många procent av sin lön kan Åke spara, om lönen är 740 kr och Åke sätter in 75 kr?
En låda äpplen vägde 21,3 kg. Ca 2 kg var skadade. Hur många procent var skadade?

Rimligt och orimligt

Räkna bara de rimliga uppgifterna

Åke fyllde den 1 april 13 år. Hans pappa fyllde 43 år den 1 maj. Hur gammal var Åkes mamma?

Åke såg först ett TV-program, som varade 35 minuter, och sedan ett, som varade 25 minuter. Hur lång var pausen mellan de båda programmen?

1 g rent guld är värt 6,30 kr. Hur mycket är guldet i mammas släta ringar värt, om vardera ringen innehåller 4,5 g rent guld?

Åke ägde i sedlar 15 kr. Pelle hade 11,97 kr i småmynt. Hur mycket mera hade Åke?

Mamma behövde 2,5 tim för att städa en trerumslägenhet på 75 m^2. Hur lång tid skulle hon ha behövt för lika noggrann städning av en trerummare på 680 m^2?

När Åke köpte en fotboll för 19,75 kr fick han 20 % rabatt. Hur mycket betalade han för bollen?

Till en efterrätt köpte mamma två paket puddingpulver à 1,40 kr, en burk ananas à 2,50 kr samt 2 dl grädde à 82 öre. Efterrätten räckte till 7 personer. Hur mycket kostade varje portion?

Innan pappa rakade sig, var hans skäggstubb 0,5 mm. Rakningen tog 5 min. Hur lång tid skulle rakningen ha tagit, om han haft 3 cm långt helskägg?

»Om man rör ihop mjölk, mjöl, salt, socker och ägg, blir det pannkaka av alltihop», sade Åkes mamma. Hur mycket kostade en portion pannkaka, om följande recept räcker till fem personer: 1 l mjölk à 0,82 kr, 2 hg mjöl à 0,10 kr, 3 st ägg à 0,33 kr, socker och salt för 0,05 kr.

Thomas räknade en uppgift på 4 min 15 sek. Hur lång tid behöver han för att räkna 20 uppgifter?

En känd konstnär sålde en tavla med ytan 12 dm^2 för 400 kr. Hur mycket skulle han begära för en tavla, som var 24 dm^2?

Inga brukar köpa för 1 kr snask i veckan. När hon kom till tandläkaren hade hon fyra hål. Hur många hål hade Eva, som bara köpte för 50 öre snask i veckan?

Uppgifter med frågetecken

Se årskurs 4, sid. 54.

Skriftlig räkning med decimaltal

I årskurs 6 repeteras först decimaltalsräkningen i årskurs 5. Det nya som tillkommer är multiplikation, då båda faktorerna är decimaltal, och division, då både dividend och divisor är decimaltal.

Multiplikation med två decimalfaktorer

Behovet av att kunna utföra rubricerad multiplikation motiveras med frågeställningar av följande slag:

1 kg äpplen kostar 2,50 kr. a) Vad kostar 0,4 kg? b) Vad kostar 1,4 kg?

1	kg	kostar	2,50 kr.
0,1	»	»	0,25 »
0,4	»	»	$4 \cdot 0{,}25$ kr $= 1{,}00$ kr.
1,4	»	»	$2{,}50$ kr $+ 1{,}00$ kr $= 3{,}50$ kr.

Algoritmen ger samma resultat, om tre decimaler avskiljes.

$$\begin{array}{r} 2{,}50 \\ \cdot\ 1{,}4 \\ \hline 1000 \\ +\ 250 \\ \hline 3{,}500 \end{array}$$

Division med decimaldivisor

Praktiska uppgifter introducerar problemet. Hur mycket kostar 1 kg ost, om 0,4 kg kostar 2,20 kr?

Hur mycket kostar 1 kg, om 2 kg kostar 11 kr? 3 kg kostar 16,50 kr osv. I de sista exemplen måste vi dividera: 11 kr : 2; 16,50 kr : 3 osv. Vår ursprungliga uppgift är tydligen också en division, som kan tecknas 2,20 kr : 0,4 eller $\frac{2{,}20}{0{,}4}$ kr.

0,4	kg	kostar	2,20 kr.
4,0	»	»	22,00 »
1,0	»	»	$\frac{22{,}00}{4}$ »

Uttrycket $\frac{2{,}20}{0{,}4}$ jämföres med uttrycket $\frac{22{,}00}{4}$ och eleverna får konstatera, att det första har förlängts med 10 för att bli det senare.

Tillvägagångssättet kan också motiveras på följande sätt:

1 800	300 = 6	ty	6 300 = 1 800
180	30 = 6	ty	6 30 = 180
18	3 = 6	ty	6 3 = 18
1,8	0,3 = 6	ty	6 0,3 = 1,8

Om både dividend och divisor multipliceras eller divideras med samma tal blir kvoten hela tiden densamma.

1,8 : 0,3 bör alltså också bli 6. Detta resultat kan verifieras: $6 \cdot 0{,}3 = 1{,}8$.

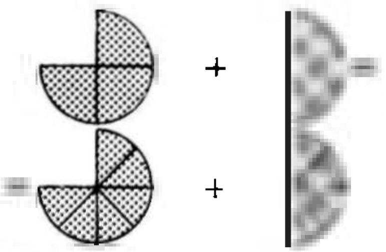
Efter flera liknande övningar påpekas för eleverna, att de alltid skall förlänga, så att divisorn blir ett helt tal. När divisorn blivit ett helt tal, utföres divisionen som vanligt.

Skriftlig räkning med bråk

Ur *Förslag till disposition av en studieplan* saxas: »Skriftlig räkning med bråk: addition och subtraktion med tal, innehållande företrädesvis nämnarna 2, 4, 8, 16; 3, 6, 12, 24; 2, 5, 10, 20; multiplikation med ena faktorn ett heltal och division med heltalsdivisor».

Nytt moment i årskurs 6 är bl. a. *liknämniggörande.*

På mellanstadiet skall inte primfaktoruppdelning ske. Nämnarna skall väljas så, att minsta gemensamma nämnaren erhålles genom *inspektion.* Detta åstadkommes, om nämnarna väljes inom bestämda grupper, t. ex. 2, 4, 8; 2, 3, 6, 12; 2, 5, 10, 20. Uppmärksammas bör, att vi fortfarande sysslar med principerna för behandling av bråk, och att den praktiska nyttan av denna behandling är avlägsen.



Flanelltavlan kan nu också vara mycket användbar. Eleverna ser, att $\frac{3}{4}$ måste förvandlas till $\frac{\text{[illegible]}}{8}$ och att $\frac{1}{\text{[illegible]}}$ måste förvandlas till $\frac{4}{\text{[illegible]}}$, innan det går att addera.

Uppgifterna för årskurs 6 bör vara av följande typ:

[illegible]

[illegible]

$8\frac{[illegible]}{3} - 5\frac{[illegible]}{6}$; $7\frac{[illegible]}{10} - 5\frac{[illegible]}{5}$, $6\frac{[illegible]}{2} - 4\frac{[illegible]}{12}$

Division med heltalsdivisor, som inte gar jämnt upp i täljaren

Uppgifter av typen $\frac{4}{[illegible]} : 2$, $2\frac{2}{5} : 3$ behandlas redan i årskurs 5. Divisorn 2 går jämnt upp i täljaren 4 i bråket $\frac{[illegible]}{5}$ och divisorn 3 går jämnt upp i täljaren 12 i bråket $\frac{[illegible]}{5} = 2\frac{[illegible]}{5}$. I årskurs 6 bör också eleverna stifta bekantskap med uppgiften av typen $\frac{[illegible]}{5} : 4$, dvs. när divisorn inte går jämnt upp i täljaren. Momentet kan lämpligen få följande behandling:

$$\frac{3}{5} : 4 = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 5} : 4 = \frac{12}{20} : 4 = \frac{3}{20}$$

Uppgiften $\frac{3}{5} : 4$ kan vi inte lösa som den står. Täljaren 3 går inte att dividera med 4, så att vi får ett helt tal som ny täljare. Ett tal, som skall vara möjligt att jämnt dividera med 4, måste innehålla faktorn 4.

Vi förlänger $\frac{3}{[illegible]}$ med 4. $\frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 5} \quad \frac{12}{20}$. Nu kan vi dividera.

$\frac{12}{[illegible]} : 4 = \frac{3}{[illegible]}$. Men $\frac{3}{[illegible]}$ är detsamma som $\frac{3}{[illegible]}$.

$\frac{3}{[illegible]} : 4$ är alltså $\frac{3}{[illegible]} = \frac{3}{[illegible]}$

Problemlösning

Ur *Förslag till disposition av en studieplan:* »Praktiska problem, bl. a. beräkning av medelvärden och procenträkning. Enkla stolp-, stapel- och linjediagram».

Uppgifter med direkt proportionalitet

Uppgifter med direkt och indirekt proportionalitet behandlades förut under rubriken reguladetri, som om man här hade att göra med ett nytt räknesätt. Termen är olycklig och bör snarast försvinna. Uppgifterna innehåller två moment, en division och en multiplikation, och bör behandlas som vilka uppgifter som helst, som kräver mer än ett räknesätt för sin lösning.

På mellanstadiet skall endast uppgifter med direkt proportionalitet behandlas. Denna behandling kan börja mycket tidigt om uppgifterna göres tillräckligt enkla. Se årskurs 4, sid. 69, överst.

Exempel:

4 st historieböcker kostar 32 kr. a) Vad kostar en bok? b) Vad kostar 5 böcker?

4 böcker kostar 32 kr

a) 1 bok kostar $\frac{32}{4}$ kr $= 8$ kr

b) 5 böcker » $5 \cdot 8$ kr $= 40$ kr

Om momentet grundlägges på detta sätt, behöver det inte medföra några större svårigheter i fortsättningen.

Exempel för årskurs 6.

Introduktion:

3 st vykort kostade 90 öre. Hur mycket kostade 5 st vykort?

3 st kostade 90 öre

1 » » $\frac{90}{3}$ öre

5 » » $\frac{5 \cdot 90}{3}$ öre

$\frac{5 \cdot 90}{3}$ öre $= \frac{5 \cdot 30}{1}$ öre $= 150$ öre $= 1{,}50$ kr

Svar: 5 vykort kostade 1,50 kr.

Följande uppgifter löses på samma sätt.

Hur mycket kostar 10 kg potatis, om 4 kg kostar 2 kr?

Per har fått 5 st band av ett uppslagsverk. De tar upp 15 cm i bokhyllan. Hur stor plats kräver hela verket, om det består av 12 st band?

För ett arbete på 16 timmar fick en arbetare 192 kr. Hur mycket skulle han ha betalt för ett arbete, som tog 24 timmar?

Till en efterrätt för 5 personer användes 2 dl grädde. Hur många deciliter grädde hade det behövts till 8 personer?

Kaffe med bröd kostade för 25 personer 57,50 kr. Hur mycket skulle det ha kostat för 34 personer?

[illegible] kg konfekt kostade 4,75 kr. Vilket var kilopriset?

Glasspinnar till 12 barn kostade 7,20 kr. Hur mycket kostade samma sorts glasspinnar för 23 barn?

Några arbetskamrater köpte 7 lotter i Penninglotteriet och betalade 105 kr. Nästa månad köpte de 12 st. Hur mycket kostade de 12 lotterna tillsammans?

Herr Alm körde med sin bil 186 km på 3 tim. Hur långt kör han på 5 timmar, om medelhastigheten är densamma?

Medeltal, medelvärden och genomsnitt

Avsnittet introduceras genom uppgifter, som bara innehåller *ett* räknesätt.

Nordström fångade under 6 dagar sammanlagt 28,2 kg hummer. Hur stor var medelfångsten per dag?

Under ett år sparade Ingrid 2 070 kr. Hur mycket hade hon i genomsnitt sparat per månad?

Därefter behandlas uppgifter, som innehåller addition och division.

Sven, Nils och Anders satt tillsammans i en grupp och Lisa, Karin, Eva och Margit satt tillsammans i en annan grupp. På sista provräkningen blev resultaten så här:

Sven	10	rätt
Nils	8	»
Anders	9	»
	27	rätt

Lisa	7	rätt
Karin	9	»
Eva	10	»
Margit	10	»
	36	rätt

»Vi hade 36 rätt! Vi var bäst!» ropade flickorna. »Det är inte rättvist», sade pojkarna. »Ni är ju en mer än vi.» »Vi tar reda på hur många rätt vi har i medeltal», sade Eva. Så här gjorde pojkarna och flickorna:

$$\frac{10+8+9}{3} = \frac{27}{3}, \qquad \frac{7+9+10+10}{4} = \frac{36}{4}$$

»Vi är ju lika bra!» ropade Margit. »Båda grupperna hade 9 rätt i medeltal.»

Beskriv, hur barnen beräknade *medeltalet.*

Hur stort är *medelvärdet* av 23, 25, 27 och 29?

Hur stort är *medelvärdet* av 112,8, 109,7 och 110,5?

Margit och Eva var ungefär lika duktiga på rättskrivningarna. Så här såg resultaten ut under höstterminen:

Margit		Eva	
Nr	Antal fel	Nr	Antal fel
1	2	1	0
2	0	2	0
3	0	3	3
4	1	4	0
5	1	5	3

a) Hur många fel hade Margit i genomsnitt?

b) Hur många fel hade Eva i genomsnitt?

Sven, Karin och Eva tävlade straffkast i basketboll mot Lisa, Margit, Nils och Anders. Alla hade lika många kast. Resultaten blev så här:

Lag I			Lag II		
Sven	16	mål	Lisa	15	mål
Karin	12	»	Margit	13	»
Eva	14	»	Nils	14	»
			Anders	15	»

a) Vilka blev genomsnittsresultaten?
b) Vilket lag vann?

Barnen i 5:orna och 6:orna i Ekhagsskolan sålde Röda Korsets julklappsadresser. 5:orna ville tävla med 6:orna. Här är resultaten:

Klass	Sålde för	Klass	Sålde för
5 a	162 kr	6 a	196 kr
5 b	206 »	6 b	211 »
5 c	178 »	6 c	142 »
5 d	155 »	6 d	135 »
5 e	203 »	6 e	111 »
5 f	122 »		

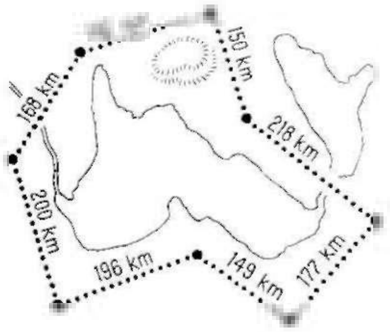
a) Vilka blev genomsnittsresultaten?
b) Hur mycket skilde sig genomsnittsresultaten från varandra?

Fru Holm vävde under oktober 22 m handduksväv och under november 18 m. Hur mycket hade hon vävt i medeltal per dag under de två månaderna? Sista decimalen skall ange centimeter.

Under en vecka hade fru Malm följande dagskassor i sin kiosk: 861,50 kr, 798,31 kr, 666,74 kr, 803,42 kr, 785,00 kr, 692,87 kr och 902,36 kr.

a) Hur stor var dagskassan i genomsnitt?
b) Hur stor bör försäljningssumman bli under oktober?

Under fem veckor handlade fru Berg till hushållet för 112,34 kr, 98,76 kr, 122,43 kr, 103,25 kr och 109,67 kr. Hur mycket hushållspengar gick det i medeltal åt per vecka?



På en åtta dagars biltur åkte Bergs den väg, som kartan visar. Hur långt åkte de i genomsnitt per dag?

Vilken *medelhastighet* höll herr Berg, om de en dag for 218 km på 4 tim?

Sista dagsetappen var 168 km lång. Hur lång tid tog den, om herr Berg kunde hålla medelhastigheten 60 km/tim (60 km per timme)?

I Brostad såg familjen Berg en tavelutställning. Den hade varit öppen i 25 dagar och besökts av 4 800 personer. Hur många besökare hade man i genomsnitt haft per dag?

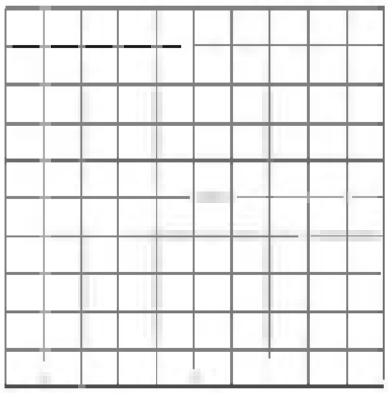
Familjen Berg plockade lingon. Mamma och pappa plockade tillsammans 45 l. Margit, Ingegerd och Kristina tillsammans 50 l. Hur många liter plockade var och en av de fem i *genomsnitt*?

Procenträkning

Procent betyder *för, på, av hundra* eller *hundradel (av)*. Över hela världen användes förkortningen %. 5 % betyder alltså 5 *hundradelar (av)*. I en kvadrat eller rektangel med 100 rutor kan procentbegreppet lätt åskådliggöras.

Visa genom att färga rutor hur mycket a) 1 %, b) 5 %, c) 10 %, d) 100 % är.

Hur många procent av hundra rutor är a) 4, b) 12, c) 50, d) 100 rutor?



Eleverna görs uppmärksamma på att

$10\ \% = 0{,}1 = \frac{1}{10}$

$20\ \% = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$25\ \% = \frac{1}{4}$

$50\ \% = \frac{1}{2}$

$75\ \% = \frac{3}{4}$

$100\ \% = 1.$

På mellanstadiet bör procenttalen vara naturliga tal, så att de lätt kan skrivas som decimaltal: 5 % = 0,05, 10 % = 0,1 osv.

Först sedan procentbegreppet grundligt behandlats — också som huvudräkning — kan den egentliga räkningen börja.

Exempel: Hur mycket är 12 % av 300 kr?

Lösning: $0{,}12 \cdot 300$ kr = 36 kr.

Svar: 12 % av 300 kr är 36 kr.

När procentbegreppet behandlats och inlärts, bör *förhallanden* uppmärksammas. Hur många procent är 60 kr av 100 kr?

Lösning: 1 kr är $\frac{1}{100}$ av 100 kr.

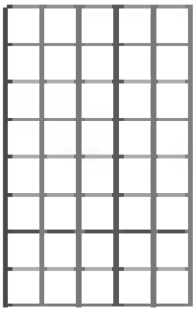
60 kr är $\frac{60}{100}$ av 100 kr.

$\frac{60}{100} = 60\ \%.$

Hur många procent är då 60 kr av 200 kr?

Lösning: 1 kr är $\frac{1}{200}$ av 200 kr; 60 kr är $\frac{60}{200}$ av 200 kr;

$$\frac{60}{200} = \frac{30}{100} = 30\ \%.$$



Hur många rutor innehåller figuren? Svar: 40 st.

Hur stor del utgör 1 ruta? Svar: 1/40.

Hur stor del utgör 24 rutor? Svar: 24/40.

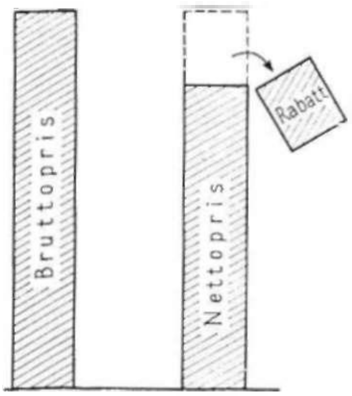
Hur många procent utgör 24 rutor av 40 rutor? **Svar: 24/40 = 6/10 = = 0,60 = 60 %.**

Därefter övningar att förvandla **bråk till procenttal** och omvänt.

På mellanstadiet bör enkla exempel på *rabatt* och *årsränta* kunna behandlas.

Rabatt.

Det pris som är satt på en vara kallas *bruttopris.* Ibland får man *rabatt,* dvs. man betalar i stället ett *nettopris.* Genom samtal med eleverna om praktiska situationer klargöres utan inblandning av procentbegreppet sambanden mellan bruttopris, rabatt och nettopris.



1.	Bruttopris	500 kr.
—	Rabatt	50 kr
	Nettopris	450 kr
2.	Bruttopris	500 kr
—	Nettopris	450 kr
	Rabatt	50 kr
3.	Nettopris	450 kr
+	Rabatt	50 kr
	Bruttopris	500 kr

En bild åskådliggör sambanden.

Senare beräknas rabatten utifrån ett procenttal.

Ex.: En stol, som kostade 110 kr, såldes med 25 % rabatt. Hur mycket skulle kunden betala?

Lösning:

	Bruttopris	110,00 kr
—	Rabatt $0{,}25 \cdot 110$ kr =	27,50 kr
	Nettopris	82,50 kr

Svar: Kunden skall betala 82,50 kr.

En vanlig form av rabatt är ***återbäring.***

Ex.: En familj handlade ett år i speceriaffären för 1 075 kr. Den fick 3 % återbäring. Hur stor var denna i kronor?

Lösning:

Inköpssumman	1 075 kr
Återbäring $0{,}03 \cdot 1\,075$ kr =	32,25 kr

Svar: Återbäringen var 32,25 kr.

Ränta.

Innan eleverna får syssla med beräkning av ränta, bör de genom samtal få reda på vad ränta är, skillnaden mellan inlåningsränta och utlåningsränta, att räntan är en betalning, som långivaren skall ha, för att han ger låntagaren tillfälle att dra nytta av lånesumman osv. Dessa samtal bör göras fylliga, så att eleverna kan få en bild av hur penningcirkulationen fungerar på detta område.

Räntan beräknas nästan undantagsfritt i procent av lånebeloppet och beräknas alltid på helår.

Exempel: Herr Björk lånar 4 000 kr och skall betala ränta efter en räntesats på 7 %. Hur stor blir årsräntan?

Lösning:

Lånebelopp	4 000 kr
Årsränta $0{,}07 \cdot 4\,000$ kr =	280 kr

Svar: Årsräntan blir 280 kr.

Enkla stolp-, stapel- och linjediagram

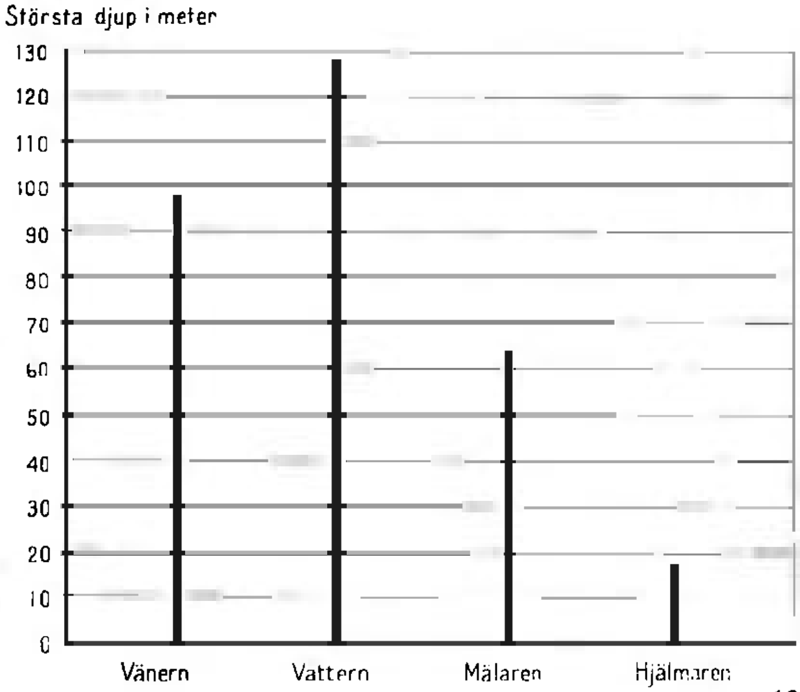
I grundkursen skall givetvis endast tolkning av enkla diagram förekomma. I samband med detta bör eleverna lära sig att överföra olika uppgifter till en tabell.

I tabellen kan man få reda på storleken av Sveriges fyra största sjöar och deras största djup. Besvara följande uppgifter genom att läsa i tabellen.

	Yta i km^2	Största djup i m
Vänern	5 500	98
Vättern	1 900	128
Mälaren	1 140	64
Hjälmaren	480	18

a) Hur stor yta har Vättern?
b) Vilken är största sjön?
c) Vilken av de fyra sjöarna har det största djupet?
d) Hur mycket större är Vättern än Hjälmaren?
e) Har den största sjön det största djupet?

För att lättare kunna göra jämförelser mellan de olika sjöarna ritar man ofta ett *diagram* över t. ex. deras största djup i meter.



Besvara följande uppgifter genom att göra avläsningar i *stolp-diagrammet:*

a) Vilken av de fyra sjöarna har det minsta djupet?

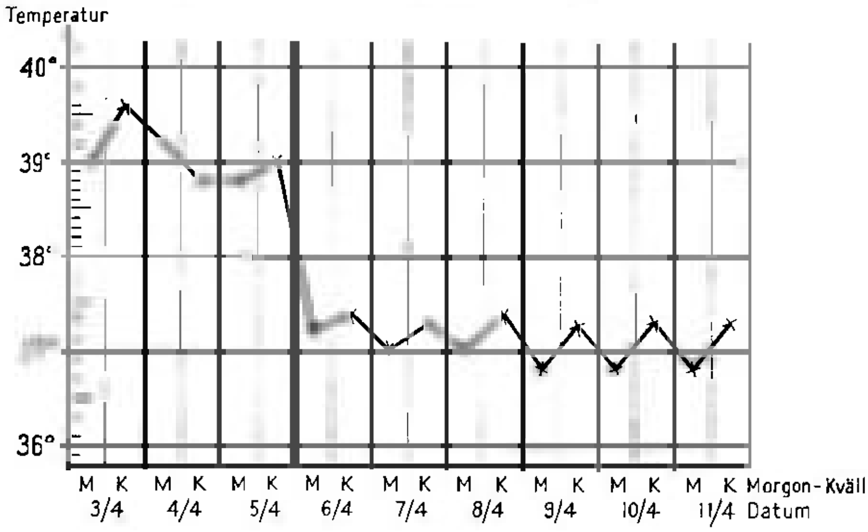
b) Hur djup är Mälaren?

c) Vilken har det näst största djupet?

d) Hur stor är skillnaden mellan de största djupen i Vänern och Vättern?

e) Hur förhåller sig det största djupet i Mälaren till det största djupet i Vättern?

När Eva hade halsfluss, ritade hennes mamma följande *feber-kurva:* (Den 4/4 fick Eva medicin av doktorn.)



Vilken temperatur hade Eva

a) På morgonen den 3/4?

b) På kvällen den 5/4?

c) På morgonen den 5/4?

d) På morgonen den 6/4?

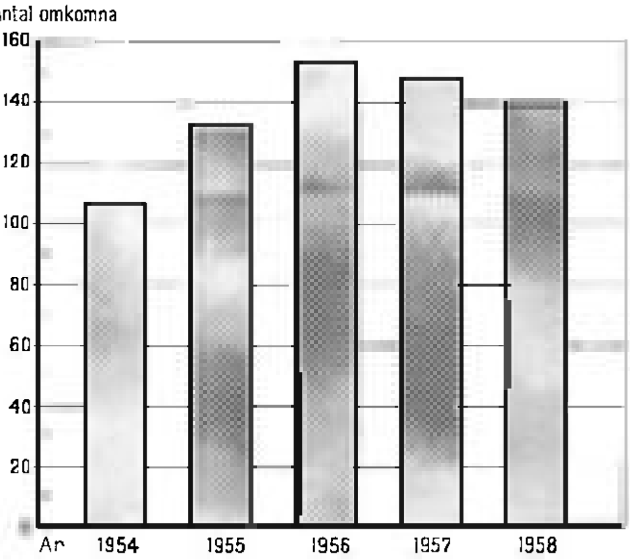
e) På eftermiddagen den 7/4?

När hade Eva den högsta febern?

Mellan vilka tillfällen sjönk temperaturen allra mest?

Den 7/4 och därefter hade Eva normal temperatur. Jämför morgon- och kvällstemperaturerna. Hur stor skillnad är det ungefär mellan dem?

Antal barn under 15 år som omkommit på grund av olyckshändelser i trafiken i Sverige 1954—1958.



Detta diagram kallas *stapeldiagram.*

a) Vilket av de fem åren var det svåraste olycksåret?

b) Läs av diagrammet. Hur många ungefär omkom under vart och ett av de fem åren?

c) Räkna ut medeltalet omkomna per år.

Resonera med hjälp av diagrammet och nedanstående tabeller om olika anledningar till ökningen av antalet omkomna åren 1954—1956. Vad kan det tänkas bero på att antalet omkomna inte ökat utan snarare minskat åren 1957—1958?

Ungefärligt antal registrerade personbilar i Sverige	
1954	536 000
1955	637 000
1956	735 000
1957	863 000
1958	972 000

Antal barn under 15 år	
1954	1 710 000
1955	1 718 000
1956	1 732 000
1957	1 742 000
1958	1 739 000

Geometri

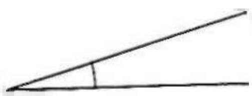
Ur *Förslag till disposition av en studieplan* hämtas: Geometri: enkla ritövningar med graderad linjal, passare, gradskiva och smygvinkel; strålar och sträckor; skala; vinklar och vinkelmätning; parallellogrammer och trianglar; omkrets- och ytberäkning av rektanglar och trianglar samt volymberäkning av raka prismor med rektangulär basyta».

Linjer, strålar och sträckor; vinklar och vinkelmätning.

En *rät linje* saknar början och slut. Vi kan därför bara rita en del av den räta linjen.

En *stråle* utgår från en punkt men har inget slut. Vi kan därför bara rita en del av strålen.

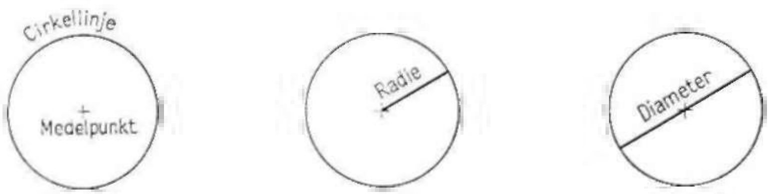
En *sträcka* är en bestämd del av den räta linjen. Sträckan börjar i en punkt och slutar i en punkt.



En *vinkel* bildas mellan två strålar, som utgår från samma punkt. Vinkeln markeras med en båge (hake för rät vinkel).

Innan vinkelmätningen behandlas, är det lämpligt att presentera några *cirkelbegrepp*.

Cirkellinjen är en *krokig* linje. *Mitt* i cirkeln ligger dess *medelpunkt*.



a) Vad kallas en sträcka, som går från cirkelns *medelpunkt* till cirkellinjen?

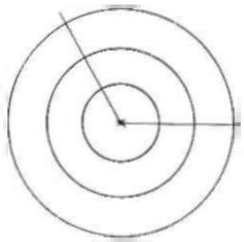
b) Vad kallas en sträcka, som går från en punkt på cirkellinjen genom medelpunkten till en annan punkt på cirkellinjen?

c) Hur många radier kan man rita i en cirkel?

d) Hur många diametrar kan man rita i en cirkel?
e) Hur lång är diametern jämförd med radien?
Eleverna bör få rita cirklar med hjälp av passare, så att de blir förtrogna med redskapet och dessutom markera begreppen medelpunkt, radie och diameter.

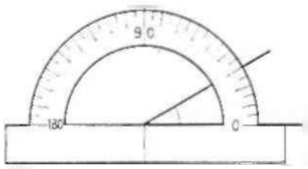
Vid vinkelmätningen utgår man från *ett helt varv*. Rita cirklar och markera på dessa ett varv, $\frac{1}{2}$ varv och $\frac{1}{4}$ varv.

Varvet tänkes delat i 360 lika stora delar, och lutningen mellan två radier är 1 grad (1°), om den båge, som radiernas ändpunkter begränsar, är 1/360 av hela varvet.



Med hjälp av två radier i koncentriska cirklar visas, att vinkelbenens längd inte påverkar vinkelns storlek.

När man mäter vinklar, använder man gradskiva.



Hur stor är den vinkel, som bilden visar?

Övningsuppgifter.

Att mäta vinklar $< 180°$ i hela grader.

Att med hjälp av gradskiva rita vinklar $< 180°$ i hela grader.
Särskilt uppmärksamhet ägnas vinklar med gradtalen 90°, 60°, 30°, 45°, 120°, 135° och 150°.

Skalbegreppet

Eleverna bör få inleda momentet med egna avbildningar i längdskalorna 1: 10, 1: 100, 1: 1 000 och även i skala 10: 1, 2: 1 osv. Följande instruktion och övningar kan vara lämpliga för årskursen.

Om det på en ritning eller en karta står, att den är utförd i *skala* 1: 10, betyder det, att alla avstånd i verkligheten är *tio gånger* så stora som på ritningen eller kartan.

Rita följande sträckor i skala 1: 10. Ange hur långa de blir.

a) 1 dm	a) 4,5 dm	a) 0,4 dm
b) 2 dm	b) 6,3 dm	b) 7 cm
c) 3 dm	c) 8,4 dm	c) 9 cm

Rita följande sträckor i skala 1: 100:

a) 1 m	a) 7 m 3 dm	a) 0,2 m
b) 5 m	b) 4 m 5 dm	b) 0,9 m
c) 6 m	c) 3,6 m	c) 6 dm

Rita följande sträckor i skala 1: 1 000:

a) 10 m	a) 93 m	a) 100 m
b) 40 m	b) 78 m	b) 98 m
c) 65 m	c) 43 m	c) 86 m

Är skalan 10: 1 betyder det, att alla avstånd i verkligheten är tiondelen av avstånden på ritningen.

Rita följande sträckor i skala 10: 1. Ange hur långa de blir:

a) 1 mm	a) 1 cm	a) 1,3 cm
b) 3 mm	b) 1 cm 1 mm	b) 1,2 cm
c) 4 mm	c) 1 cm 2 mm	c) 1,4 cm

Rita följande sträckor i skala 2: 1:

a) 1 cm	a) 5,3 cm	a) 1,55 cm
b) 2 cm 4 mm	b) 4,6 cm	b) 2,35 cm
c) 3 cm 6 mm	c) 6,4 cm	c) 4,65 cm

Denna karta är ritad i skala 1 : 2 000 000.

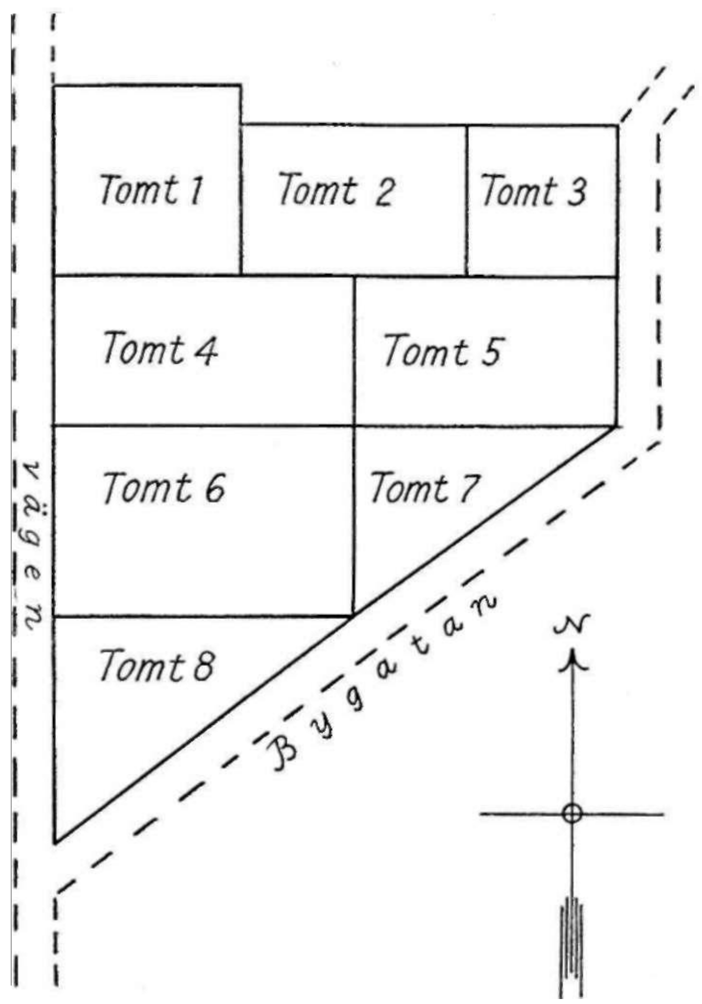
Hur många kilometer är det ungefär fågelvägen mellan

a) Hälsingborg—Landskrona?
b) Lund—Malmö?
c) Landskrona—Eslöv?

a) Ängelholm—Höganäs?
b) Höganäs—Malmö?
c) Kristianstad—Eslöv?

a) Hässleholm—Kristianstad?
b) Simrishamn—Ystad?
c) Ystad—Trelleborg?

a) Eslöv—Lund?
b) Hälsingborg—Simrishamn
c) Ystad—Höganäs?



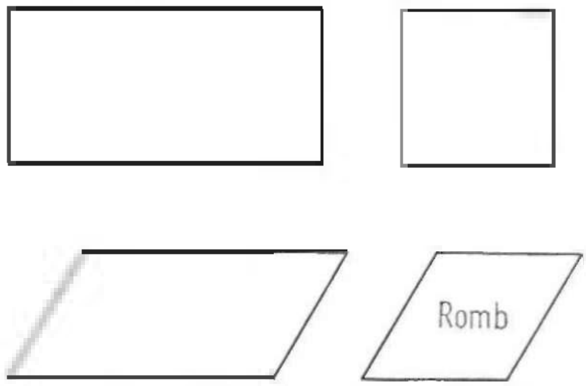
Längdskalans förhållande till ytskalan kan studeras i uppgifter, sådana som denna.

På en karta i skala 1 : 2 000 fanns åtta tomter utritade. Fyra var rektangulära, två var kvadratiska och två var triangulära. Hur stora var tomtytorna i verkligheten? Svara i hela m^2.

Parallella linjer, parallellogrammer

Om två räta linjer i samma plan aldrig skär varandra, så är linjerna parallella.

Figurer, vars motstående sidor är parallella, kallas *parallellogrammer.*



Av dessa har tre särskilda namn: romb, rektangel och kvadrat. Om man så vill, kan man skilja mellan *snedvinkliga* och *rätvinkliga* parallellogrammer.

Övningsuppgifter

Rita parallellogrammer med självvalda mått och vinklar.

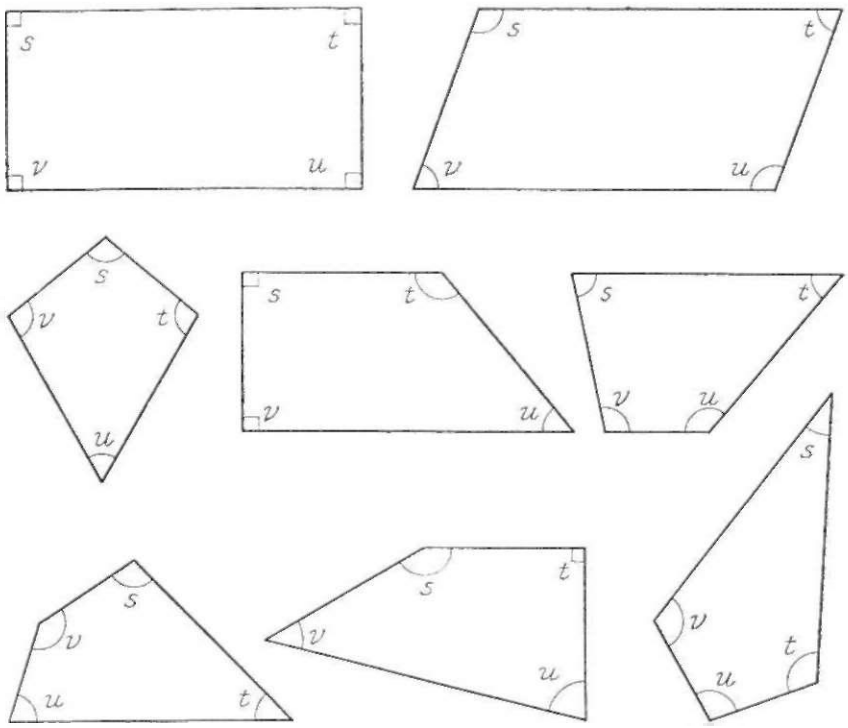
Rita parallellogrammer med givna mått och vinklar t. ex.

Bas	Höjd	Spetsig vinkel
5 cm	4 cm	60°
	osv.	

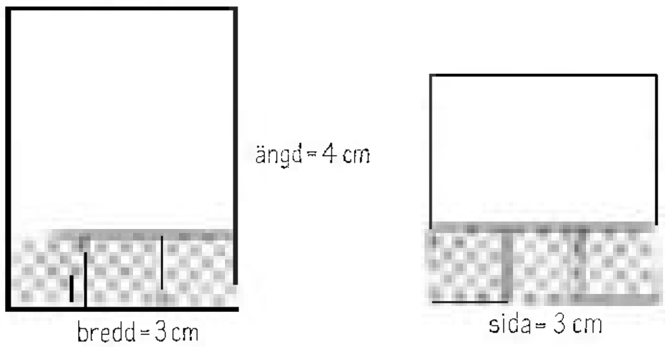
I samband med ritövningarna bör övningar att mäta vinklar läggas in. Exempel: Hur stor är vinkelsumman i en fyrhörning? Använd gradskiva och mät alla vinklarna i fyrhörningarna på nästa sida.

Skriv så här:

$$\begin{array}{rl} s = & 90^\circ \\ t = & 90^\circ \\ u = & 90^\circ \\ v = & 90^\circ \\ \hline s+t+u+v = & 360^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} s = & 110^\circ \\ t = & 70^\circ \\ u = & 110^\circ \\ v = & 70^\circ \\ \hline s+t+u+v = & 360^\circ \end{array} \qquad \text{osv.}$$



Beräkning av rektangelytans storlek



Hur många cm² får plats utefter bredden? Svar: 3 cm².
Hur många rader med 3 cm² får plats i rektangeln? Svar: 4 st.
Hur stor är alltså rektangelns yta? Svar: $4 \cdot 3\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$.

I uttrycket $4 \cdot 3$ cm$^2 = 12$ cm^2 är 4 längdens *mätetal,* 3 breddens *mätetal* och 12 ytans *mätetal.* Du kan räkna ut rektangelns yta på följande sätt, där l betyder längd, b bredd och Y yta.

l i cm		b i cm		Y i cm^2
4	$\cdot$	3	=	12

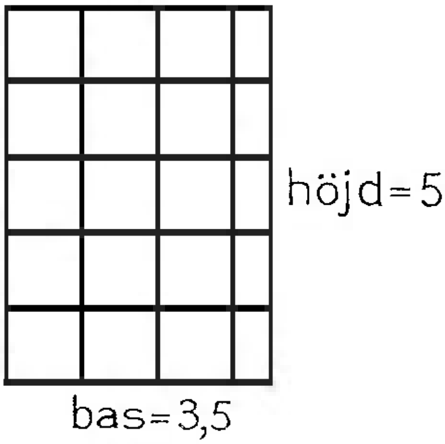
Svar: Rektangelns yta är 12 cm^2.

Beräkna kvadratens yta på liknande sätt, där s betyder sida.

s i cm		s i cm		Y i cm^2
3	$\cdot$	3	=	9

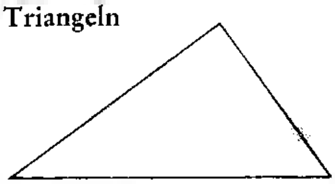
Svar: Kvadratens yta är 9 cm^2.

Senare kan ytans mätetal beräknas uteslutande från sidornas mätetal.



Yta: $5 \cdot 3{,}5 = 17{,}5$.
Svar: Rektangelns yta är 17,5 cm^2.

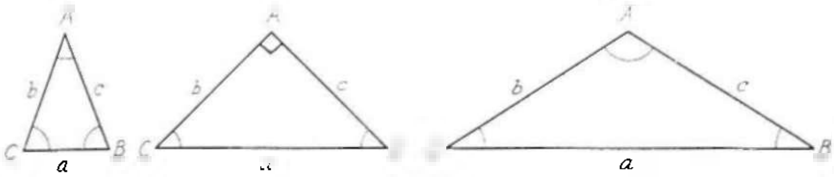
Triangeln



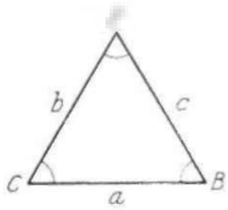
Se på figuren här intill. Hur många sidor har den? Hur många hörn har den? Hur många vinklar har den?

En figur, som begränsas av *tre* sträckor, kallas en *triangel.* Klipp i klisterpapper ut en mängd små trianglar i olika färger och klistra upp ett vackert mönster.

Olika slags trianglar

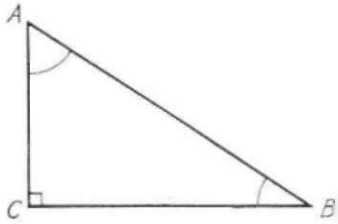


Jämför i varje triangel här ovan längden av sidorna b och c. Trianglar, som har två sidor lika långa, kallas *likbenta* trianglar. Jämför vinkeln B och vinkeln C i varje triangel.



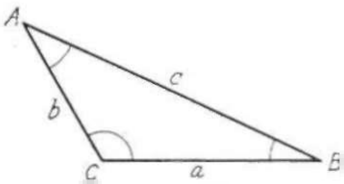
Jämför längden av sidorna a, b och c. Jämför storleken av vinklarna A, B och C.

En triangel med sidorna lika långa kallas en *liksidig* triangel.



Hur stor är vinkeln C?

En triangel, som har en rät vinkel, kallas en *rätvinklig* triangel.



Jämför längden av sidorna a, b och c.

En triangel med tre olika långa sidor kallas en *oliksidig* triangel.

Låt eleverna rita trianglar med självvalda mått och med hjälp av gradskivan bestämma triangelns vinkelsumma.

Exempel: Mät vinklarna i de trianglar du ritat och räkna ut vinkelsumman. Skriv så här: 1. A =

B =

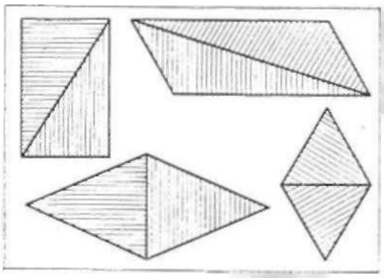
C =

A + B + C =

Hur stor är vinkelsumman?

Klipp ut a) två stycken exakt likadana *likbenta* trianglar;
b) två stycken exakt likadana *liksidiga* trianglar;
c) två stycken exakt likadana *rätvinkliga* trianglar;
d) två stycken exakt likadana *oliksidiga* trianglar.

Lägg sedan de åtta trianglarna på din bänk. Lär dig känna igen trianglarna i olika lägen.



Placera trianglarna parvis så som bilden visar.

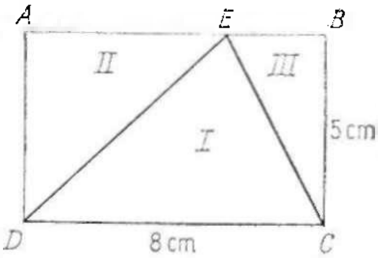
Vad kallas med ett gemensamt namn de figurer som bildats av de parvis placerade trianglarna?

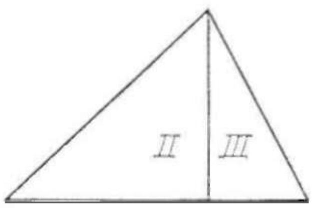
a) Vad kallas den parallellogram, som har bildats av två rätvinkliga trianglar?

b) Vad kallas den parallellogram, som har bildats av två oliksidiga trianglar?

c) Vad kallas den parallellogram, som har bildats av två likbenta eller två liksidiga trianglar?

Triangelytans storlek





Rita en rektangel ABCD med längden 8 cm och bredden 5 cm. En av sidorna kallas *bas* och den andra kallas *höjd*. Välj en punkt var som helst på sidan AB och drag sträckorna EC och ED, som bilden visar. Rektangeln har nu delats i tre trianglar, I, II och III.

Klipp ut och foga ihop II och III, som bilden visar.

Hur stor är triangeln II + III, jämförd med triangeln I?

Hur stor är triangeln I, jämförd med rektangeln ABCD?

Rektangelns yta: bas i cm höjd i cm Yta i cm^2

$$8 \cdot 5 = 40$$

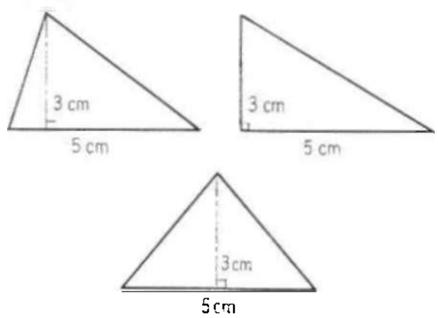
Svar: Rektangelns yta är 40 cm^2.

Triangelns yta: bas i cm höjd i cm Yta i cm^2

$$8 \quad 5 \quad = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$$

Svar: Triangelns yta är 20 cm^2.

Beräkna följande trianglars ytor:

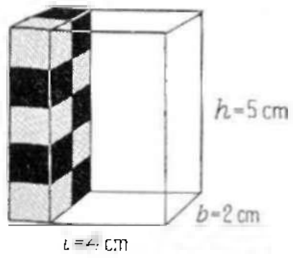


Lägg märke till att höjden alltid är det vinkelräta avståndet från basen till *motstående* hörn.

Rätblocket (det raka prismat med rektangulär basyta)

Termen *rätblock* för rakt prisma med rektangulär basyta rekommenderas av Tekniska Nomenklaturcentralen och bör på grund av sin enkelhet snabbt vinna insteg i skolan. Lärarna ombedes hjälpa till med detta.

Rätblockets volym beräknas först empiriskt. Kubikcentimeter plockas först i askar med lämpliga mått, därefter beräknas volymen av rätblock med enkla givna mått.



Hur många cm^3 får plats utefter höjden? Svar: 5 cm^3.

Hur många cm^3 får plats utefter bredden? Svar: $2 \cdot 5$ cm^3.

Hur många staplar med $2 \cdot 5$ cm^3 får plats utefter längden? Svar: 4.

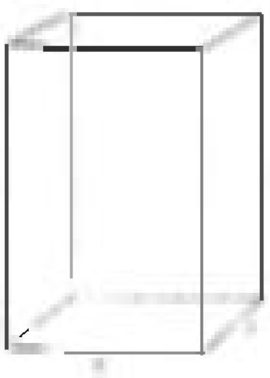
Hur stor är volymen?
Svar: $4 \cdot 2 \cdot 5$ $cm^3 = 40$ cm^3.

Om du granskar uttrycket $4 \cdot 2 \cdot 5$ $cm^3 = 40$ cm^3, ser du, att 4 är längdens mätetal, att 2 är breddens mätetal, att 5 är höjdens mätetal och att 40 är volymens mätetal. Du kan då räkna ut volymen på följande sätt, där l betyder längd, b bredd, h höjd och V volym.

l i cm		b i cm		h i cm		V i cm^3
4	$\cdot$	2	$\cdot$	5	=	40

Svar: Volymen är 40 cm^3.

Senare kan volymens mätetal beräknas uteslutande från kanternas mätetal.



Längdenhet: cm

Volym: $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$.

Svar: Rätblockets volym är 120 cm^3.

Sorträkning och sortförvandling

Dedakiska sorter, se sid. 63—64 och sid. 91—92.

Tidmått, se sid. 64—67.

I årskurs 6 bör eleverna också få beröring med problemet att förvandla icke dekadiska tidmått till decimaltal.

Följande uppgifter kan förekomma:

1. Förvandla till decimaltal

   a) 1 tim 3 min; b) 1 tim 30 min; c) 1 tim 24 min

   $$1 \text{ tim } 3 \text{ min} = 1\frac{3}{60} \text{ tim} = 1\frac{1}{20} \text{ tim} = 1\frac{5}{100} \text{ tim} = 1{,}05 \text{ tim}$$

   Förvandla till decimaltal

   a) 1 min 6 sek; b) 1 min 36 sek; c) 2 min 54 sek

2. Förvandla till timmar och minuter

   a) 2,5 tim; b) 1,2 tim; c) 4,6 tim

   $$2{,}5 \text{ tim} = 2\frac{5}{10} = 2\frac{30}{60} \text{ tim} = 2 \text{ tim } 30 \text{ min}$$

   a) 4,7 min; b) 6,8 min; c) 2,3 min

Orientering om stycketalssorterna st, par, dussin, tjog lämnas. Behovet av systematisk träning är litet.

Matematiska laborationer

Matematikundervisningen bör på alla stadier vara laborativ och manipulativ. På lågstadiet behöver eleverna klossar, pinnar, kulor, kort, knappar osv. att plocka med vid den elementära inlärningen. Behandlingen av längdmåtten måste börja med mätningar med mätlinjal och måttband. De fyra lägsta årskurserna bör ha tillgång till våg och viktsatser med kilo- och hektovikter, liter- och decilitermått i klassrummet.

Undervisningen i geometri måste vara direkt laborativ, om den skall kunna tillgodogöras av de flesta eleverna.

Den matematiska laborationen får inte fattas som ett fristående moment utan bör ingå som ett naturligt hjälpmedel vid undervisningen på alla stadier.

Mätningar inomhus och utomhus. Eleverna bör först få uppskatta avstånd och därefter kontrollera sina uppskattningar genom mätningar. I anslutning till mätningarna bör *skalbegreppet* införas.

Vägningar bör ske i samband med uppskattningsövningar, varefter kontroll sker genom vägning.

Ytmätningar. Ett ar kan ritas upp på skolgården. En serie parallellogrammer och trianglar, ritade på tavlan, kan uppskattas och därefter mätas och beräknas.

Volymmätningar. Med hjälp av liter- och decilitermått får eleverna hälla vatten i olika kärl för att få uppfattning av volymen. Därefter uppskattningsövningar följda av mätningar. Mätglaset bör presenteras i årskurs 6.

Geometriska laborationer

Mäta vinklar; dela sträckor av givna längder i lämpligt antal lika långa delar; rita parallellogrammer med givna sidor och vinklar med hjälp av linjal och gradskiva; rita olika trianglar; komponera mönster av olika geometriska figurer; klippning, rivning, klistring.

Material för laborationerna

I klassrummet:	*I materialrummet:*
meterlinjal	uppsättning skjutmått
måttband	uppsättning mätglas
tavelpassare	kubikdecimeter
tavelgradskiva	kubikcentimeter
våg med viktsatser	hektolitermått
liter- och decilitermått	stålmåttband

Eleverna bör ha

centimeterrutade arbetsböcker, gradskivor, passare, millimetergraderade linjaler.

— Kap. 7 —

ALGORITMER OCH KONTROLL-METODER

I det följande avsnittet skall visas och ibland diskuteras olika uppställningar för att utföra addition, subtraktion, multiplikation och division.

Algoritm kallas varje efter ett bestämt schema utfört räkneförfarande. Termen som sådan har ingen matematisk bakgrund utan är en förvrängning av ett personnamn, al 'Chwarizmi. Denne var en arabisk matematiker, som levde på 800-talet e. Kr. Han anses vara skapare av räkning med det arabiska siffersystemet — decimalsystemet — som ursprungligen uppfanns av hinduerna. Morerna förde detta system till Europa på 1100-talet. Vid 1300-talets mitt tycktes det fullständigt ha undanträngt den tidigare använda romerska räkningen.

Additionsalgoritmer

Addition räknas i våra dagar nästan uteslutande på samma sätt över hela världen. Den traditionella algoritmen bör ha följande utseende:

$$\begin{array}{r} \underline{3\ 3\ \ } \\ 4\,9\,8 \\ 3\,7\,6 \\ 8\,6\,9 \\ \underline{+\ 1\,6\,7} \\ 1\,9\,1\,0 \end{array}$$

Obs. hel »hylla».

Vi räknar i regel uppifrån och nedåt och kontrollräknar åt andra hållet. Amerikanska undersökningar ger vid handen att räkning nedifrån och uppåt är något säkrare.

Den eventuella svårigheten i den traditionella algoritmen skulle vara minnessifferutskrivningen. För att eliminera denna svårighet föreslår en del amerikanska metodiker följande algoritm.

$$\begin{array}{r} 498 \\ 376 \\ 869 \\ +\ 167 \\ \hline \text{[illegible]} \\ 28 \\ +\ 16 \\ \hline 0 \\ 11 \\ 8 \\ +\ 1 \\ \hline 1910 \end{array}$$

Varje talsort adderas för sig, till dess att varje delsumma blir ensiffrig. Tillvägagångssättet kan knappast vara bättre än det traditionella.

Subtraktionsalgoritmer

Den över hela världen vanligaste metoden är

Lånemetoden

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 10\,10} \\ \cancel{4}\,\cancel{2}\,3 \\ -\ 1\,7\,6 \\ \hline 2\,4\,7 \end{array}$$

Så småningom bör eleverna försiktigt rekommenderas att avstå från 10-överskrivning. Algoritmen får då följande utseende:

$$\begin{array}{r} \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]}\ 1\,7\,6 \\ \hline 2\,4\,7 \end{array}$$

eller

$$\begin{array}{r} 4\,2\,3 \\ -\ 1\,7\,6 \\ \hline 2\,4\,7 \end{array}$$

Kontroll utföres genom att addera skillnaden och minustermen. Summan skall bli lika med plustermen.

I England använder man *likatilläggsmetoden* (se sid. 126).

Likatilläggsmetoden

Metoden bygger på ett axiom: Om två storheter ökas lika mycket, blir skillnaden mellan dem oförändrad.

8— 5=3	8 ental adderas med 10 ental. Summan blir 18.
18—15=3	5 ental adderas med 1 tiotal (=10 ental). Summan blir 15. 18—15=3.

Följande algoritm visar metoden i användning.

$$\begin{array}{r} \dot{1}\,\dot{0}\,\dot{0}\,5 \\ -\ 3\,8\,6 \\ \hline 6\,1\,9 \end{array}$$

5 ental minus 6 ental går inte. Lägg 10 ental till de 5 i 1 005. Lägg lika mycket eller 1 tiotal till 386. Markera tillägget med en punkt över 8. 8+1=9. Att 1 005 ökats med 10 ental brukar inte markeras utan hålles i minnet. Räkna: 15—6=9. 0 tiotal minus 9 tiotal går inte. Lägg 10 tiotal till 1 005 och markera samma ökning, dvs. med 1 hundratal med en punkt över 3:an i 386. Räkna: 10—9=1. 0—4 hundratal går inte. Lägg 10 hundratal till 1 005 och markera samma ökning, dvs. med 1 tusental med en punkt. 10—4=6. 1—1=0.

Metoden verkar besvärlig för den som uteslutande använt lånemetoden. De undersökningar som gjorts visar dock tydligt, att likatilläggsmetoden ger en säkrare räkning än lånemetoden.

I Sydtyskland är följande metod vanlig:

Utfyllnads- eller additiva metoden

$$\begin{array}{r} 1005 \\ 386 \\ \hline 619 \end{array}$$

Vilket minsta tal skall adderas till 6, för att summan skall sluta på 5? Svar: 9. 9+6=15. 1 i minne. 1+8=9.

Vilket minsta tal skall adderas till 9, för att summan skall sluta på 0? Svar: 1. 1+9=10. 1 i minne. 1+3=4.

Vilket tal skall adderas till 4, för att summan skall bli 10? Svar: 6.

Eftersom subtraktion är en invers addition förefaller den additiva metoden att vara den naturligaste, även om själva algoritmen bör ha ett annat utseende. När små barn först stiftar bekantskap med subtraktionen är det i uppgifter av följande typ.

3+ __ =5; 4+ __ =7 osv. Senare skriver dessa 5—3= __; 7—4= __, men det är dock samma uppgifter. Om någon tillfrågas, hur mycket 112 minus 95 är, gör vederbörande två additioner: 95+5=100, 100+12=112. Svar: 112—95=5+12=17. Följande utförande av operationen 1 005—386 vore därför tänkbart.

1 005—386=? skrives 386+?=1 005.

Algoritm:

$$\begin{array}{r} 386 \\ + \\ \hline 1005 \end{array}$$

Utförande:

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ \hline 386 \\ +\,619 \\ \hline 1005 \end{array}$$

Vilket minsta tal skall adderas till 6, för att summan skall sluta på 5? Svar: 9. 1 i minne skrives på hyllan. 1+8=9.

Vilket minsta tal skall adderas till 9, för att summan skall bli 10? osv.

1 005—386=619.

Metoden är utmärkt men har en stor nackdel. Den är omöjlig att använda för nödvändiga deloperationer i divisionsalgoritmerna, åtminstone de som mera allmänt prövats.

Multiplikationsalgoritmer

$$\begin{array}{r} 412 \\ \cdot\,321 \\ \hline 412 \\ 824 \\ +1236 \\ \hline 132252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 412 \\ \cdot\,321 \\ \hline 1236 \\ 824 \\ +\,412 \\ \hline 132252 \end{array}$$

Den traditionella algoritmen drar hårt åt vänster, vilket kan göra det svårt för eleverna att disponera utrymmet på papperet på rätt sätt.

Den »ungerska» algoritmen tillåter mera konsekvens i inlärningen. Huvudräkningsmässigt arbetar man i samma ordning. 32 · 21 = =30 · 21+2 · 21=630+42=672. Uppställningen medger att algoritmens behov av utrymme redan från början kan bestämmas.

Vid multiplikation med flersiffrig första faktor tillämpas dels distributiva och dels associativa lagen för multiplikation. Distributiva lagen kan åskådliggöras med följande exempel: $23 \cdot 42 = (20+3) \cdot 42 = 20 \cdot 42 + 3 \cdot 42$. Vid beräkningen av $20 \cdot 42$ tillämpas associativa lagen: $20 \cdot 42 = 2 \cdot 10 \cdot 42 = 2 \cdot 420$. Uppgiften $23 \cdot 42$ kan alltså utföras så här: $23 \cdot 42 = 20 \cdot 42 + 3 \cdot 42 = 2 \cdot 10 \cdot 42 + 3 \cdot 42 = 2 \cdot 420 + 3 \cdot 42 = 840 + 126 = 966$. Algoritmen kan erhålla följande utseende.

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 42 \\ \hline 840 \\ +\ 12[illegible] \\ \hline 966 \end{array}$$

42 skall först multipliceras med 20, dvs. med $2 \cdot 10$. Multiplikationen med 10 markeras med 0:an under 2:an. Därefter multiplikation med 2. $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 4 = 8$; $20 \cdot 42 = 840$. Återstår att multiplicera 42 med 3. $3 \cdot 2 = 6$, som skrives i entalsraden. $3 \cdot 4 = 12$, som skrives framför 6:an. $840 + 126 = 966$.

Ett annat exempel:

$$\begin{array}{r} [illegible] \\ \hline 108600 \\ 16290 \\ +\ 3258 \\ \hline 128148 \end{array}$$

Först multiplikation med 200, dvs. med $2 \cdot 100$. Därefter med 30, dvs. med $3 \cdot 10$ osv.

De eventuella fördelarna hos ovanstående algoritm skall diskuteras, sedan divisionsalgoritmerna behandlats.

Divisionsalgoritmer

I vårt land har den s. k. angloamerikanska eller nya engelska divisionsalgoritmen snabbt vunnit terräng. Den har vetenskapligt jämförts med den traditionella algoritmen av Olof Magne, som kunde påvisa, att den angloamerikanska gav i runt tal 25 % bättre resultat. Detta är ett anmärkningsvärt högt tal i sådana här sammanhang.

Här nedan skall de båda algoritmerna visas sida vid sida.

Italiensk

```
 7 1 4 | 7
− 7 1 4 | 1 2
      0
```

(nollfel)

```
5 9,3 | 4
4     |1 4 8 2 5
1 9
1 6
  3 3
− 3 2
    1 0
  − 8
    2 0
  − 2 0
      0
```

(Ingen plats för förlängningsnollor; uteglömt decimalkomma.)

```
7 500|0,2 5
```

Plats måste lämnas för förlängningsnollor.

Angloamerikansk

```
    1 0 2
 7 ) 7 1 4
   − 7 1 4
         0
```

(Nollfelen undvikes; hundratalssiffra ovanför hundratalssiffra; tiotalssiffra ovanför tiotalssiffra osv.)

```
    1 4,8 2 5
 4 ) 5 9,3 0 0
   − 4
     1 9
   − 1 6
       3 3
     − 3 2
         1 0
        − 8
          2 0
        − 2 0
            0
```

God plats för förlängningsnollor; decimalkomma ovanför decimalkomma. Eleverna bör uppmanas att sätta ut decimalkommat, innan den egentliga divisionen utföres.

```
0,2 5 ) 7 5,0 0,
```

God plats för förlängningsnollor.

Innan den tredje algoritmen presenteras, visas nedanstående multiplikationsalgoritm igen. Uppgiften, som skall lösas, är 23 · 42 (se sid. 128).

```
2 3  ·  4 2
      8 4 0
    + 1 2 6
      9 6 6
```

Läroplanen betonar med rätta det viktiga i att sambanden mellan räknesätten belyses. Här ges ett gyllene tillfälle att via algoritmerna studera detta samband. I den presenterade multiplikationsuppgiften känner vi båda faktorerna och söker produkten.

```
23 . 42
    966
    -92
     46
    -46
      0
```

I divisionsuppgiften känner vi en faktor (divisorn) och produkten (dividenden) och söker den andra faktorn (kvoten). Algoritmen blir den bredvidstående. Läsaren ser naturligtvis omedelbart likheten mellan denna algoritm och den angloamerikanska.

Kontrollmetoder

I Terminologiutredningen (1958) rekommenderades det s. k. nioprovet för kontroll av multiplikation.

```
   467 ——————— 17 ——————— 8
   · 52 ———————————————— · 7
   ----                  ---
    934                  56 ——— 11 ——— 2
 +2335
 ------
  24284 ——————————————— 20 ————————— 2
```

Räkna ut den ensiffriga tvärsumman i 467: $4+6+7=17$; $1+7=8$.

Räkna ut den ensiffriga tvärsumman i 52: $5+2=7$.

Utför multiplikationen $7 \cdot 8=56$. Räkna ut den ensiffriga tvärsumman i 56: $5+6=11$; $1+1=2$.

Om uppgiften är rätt räknad, skall tvärsumman i produkten också bli 2. Produkten blev 24 284. $2+4+2+8+4=20$; $2+0=2$.

Uppgiften är troligen rätt löst. Det kan naturligtvis hända, att man vid uträkningen begått fel, som tagit ut varandra, dvs. sammanlagt ändrat siffersumman med 9.

Provet kallas sedan gammalt för *nioprovet.* En förklaring till provet är påkallad. Antag, att ett tal är $a+10b+100c+\ldots=T$.

Då är $T=\underbrace{(a+b+c+\ldots)}_{S}+\underbrace{(9b+99c+\ldots)}_{9 \cdot R}$

$9 \cdot R$ är tydligen alltid jämnt delbart med 9. Men S är ju talets tvärsumma. Alltså ger talet och dess tvärsumma samma rest vid division med 9. Det är denna rest vi erhåller, när vi bildar tvärsummans tvärsumma osv. tills vi får ett ensiffrigt tal.

Betrakta nu en multiplikation mellan två tal.

$$T_1 = S_1 + 9R \quad \text{och} \quad T_2 = S_2 + 9R_2$$

$$\text{Man får} \quad T_1 \cdot T_2 \ldots = S_1 \cdot S_2 + 9(\ldots)$$

Produkten av talen och produkten av samma tals tvärsummor ger tydligen samma rest vid division med 9. Detta är nioprovets innebörd.

Det hela låter kanske en smula invecklat, men användningen av provet ökar förståelsen. Naturligtvis skall inte någon förklaring till provets användbarhet delges eleverna. Provet kan med fördel användas i följande modell.

$$\begin{array}{r} 467 \\ \cdot\, 52 \\ \hline 934 \\ +\,2335 \\ \hline 24284 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 8 & \\ 2 & \times & 2 \\ & 7 & \end{array}$$

Lägg märke till att allt som blir 9 kan »kastas bort». $4+2+8+4=18$. $1+8=9$, som »kastas bort». Kvar är första 2:an.

Nioprovet bygger på decimalsystemets egenskaper. Det bör då även vara användbart för kontroll av addition, subtraktion och division. Det är det också men saknar där praktisk betydelse. I kuriositetsintresse kan ett par exempel ges.

23	5
49	4
83	2
+ 75	+ 3
230 — 5	

368		
—124		— 7
244	10	
723	3	
—563	5	— 5
160		7

Vid prövningen av sista subtraktionsuppgiften måste tvärsumman 3 adderas med 9, så att summan blir 12. $1+2$ är ju också 3. Nu går subtraktionen att utföra.

Rättelse:

Sid. 36 står i rubriken Addition med minnessiffror skall vara Addition utan minnessiffror.

Sid. 37 står i rubriken Addition utan minnessiffror skall vara Addition med minnessiffror.