*Skrifter utgivna av Sveriges yngre läroverkslärares förening*
**15**

# Matematikundervisningen

**i realskolan och motsvarande skolformer**

**En handledning**

**av**

**HALFRID STENMARK**

LUND
C W K GLEERUPS FÖRLAG

*Redaktörer för skriftserien:*
*Fil. dr Hans Lennart Lundh och fil. lic. Carl-Henrik Wittrock*

**Till tryckningen av denna bok**
**har utgått statsbidrag,**
**för vilket föreningen frambär sitt tack.**

MALMÖ 1956
NYA LITOGRAFEN

# FÖRORD

Sommaren 1951 uppmanade redaktören för SYL:s skriftserie mig att i bokform sammanfatta mina erfarenheter av matematikundervisningen i realskolan. Mitt försök att åstadkomma en handledning föreligger i denna skrift; jag vågar hoppas, att den skall kunna ha något att ge icke endast yngre lärare vid realskolor av den nu vanliga, kanske försvinnande typen utan även vid varje skolform, där det meddelas undervisning i elementär matematik av högst samma omfång som hittills i den gamla realskolan.

Mina omdömen i föreliggande arbete rörande lämpligheten av den ena eller andra metoden är naturligtvis uttryck för min personliga uppfattning; egentligen borde de överallt föregås av ett ”Enligt min mening . . .”.

En och annan lärare kommer kanske att tycka, att jag varit för optimistisk ifråga om möjligheten att hinna med lärostoffet. Men dels är en lärare nog av naturen en optimist, dels är det inte meningen, att mina anvisningar skall sättas i händerna på eleverna utan på läraren, och då kan där ju också få stå något, som riktar sig till läraren men som inte är avsett att vidarebefordras till eleverna. Jag tänker därvid t. ex. på avdelningen om talsystem och felberäkning, vissa delar av algebran, uppgifter för träning och huvudräkning och Euklides’ algoritm.

Som väl är, har det under senare år med skärpa betonats, att läraren måste ha stor frihet att välja sitt arbetssätt. Men målet måste alltid vara att bibringa eleverna en viss säkerhet att utföra enkla räkningar och att på svenska hjälpligt uttrycka sina tankar samt att göra dem bekanta med gängse matematiska uttryck och benämningar. Elevers brist på kännedom om dylik terminologi är ofta förvånande.

Detta missförhållande beror ej sällan på att eleverna ofta under stor del av de dyrbara timmarna i skolan sättes att i sina böcker räkna uppgift efter uppgift — vanligen utan ett försök att med text förklara sina tankar. Det är klart, att eleverna skall träna in räkneregler m. m., men det behöver icke ske genom tyst räkning i böckerna; det kan troligen ske minst lika bra genom gemensam huvudräkning eller så, att 5 eller 6 elever samtidigt får räkna enkla uppgifter på tavlan, under det att läraren och kamraterna kontrollerar och kritiserar (och så naturligtvis i hemuppgifterna). Den senare metoden ställer kanske stora krav på läraren, men den medför å andra sidan ofta återkommande övning för eleverna i muntlig framställning, i konsten att med egna ord uttrycka sina tankar. Därigenom besparar man också eleverna risken att sitta och "gnugga" in olämpliga metoder, som t. ex. denna:

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = \frac{4 \cdot 12}{12 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

Denna räkning är visserligen riktig, men vänjer lärjungarna sig vid att ofta arbeta så, kommer de att förlora alltför mycket tid.

Med tanke på de olika skolformer, som för närvarande existerar, har jag för att något kunna förenkla framställningen i det följande använt klassbeteckningarna 5—9 i stället för de i realskolan vanliga $1^5$, $2^5$, $2^4$ o. s. v. Hur klasserna svarar mot varandra framgår av nedanstående uppställning:

| Mot klass | svarar klasserna |
|---|---|
| 9 | $5^5$, $4^4$, $3^3$ |
| 8 | $4^5$, $3^4$, $2^3$ |
| 7 | $3^5$, $2^4$, $1^3$ |
| 6 | $2^5$, $1^4$ — |
| 5 | $1^5$ — — |

Boken kan härigenom möjligen lättare bli till nytta för matematiklärare i enhetsskolan, åtminstone för undervisningen i vissa av högstadiets klasser.

Slutligen får jag framföra ett varmt tack till dem, som främjat tillkomsten av denna bok: till undervisningsrådet Jonas Orring, som noggrant gått igenom hela manuskriptet och föreslagit många ändringar och tillägg; till adjunkt Bertil Boström och lektor Sven Hilding, som välvilligt sett igenom den ämnesmetodiska avdelningen, samt fil. lic. Carl-Henrik Wittrock, som svarat för den redaktionella granskningen av manuskriptet ur språklig och formell synpunkt.

Bromma i februari 1956.

*Halfrid Stenmark.*
Adjunkt vid Högre allmänna
läroverket i Bromma.

## INLEDNING

Undervisning kan bedrivas på många olika sätt. Det är ändå till slut lärarens personlighet, hans kunskaper på området, hans intresse för och glädje i arbetet, som avgör, vad det blir för slags undervisning.

Man skulle kunna tänka sig, att en matematiklektion tillgår på följande sätt. Läraren kommer in i klassen, låter eleverna ta fram sina räkneböcker och räknehäften och säger till dem att fortsätta att räkna, där de slutade förra gången. Och medan så arbetet fortskrider, går läraren runt i klassen och hjälper till, där det behövs.

En annan lärare använder kanske hälften av timmen till att gå igenom något nytt och låter sedan eleverna försöka arbeta på egen hand.

En tredje lärare arbetar tillsammans med eleverna igenom det nya stoffet, gör själv enkla uppgifter och låter eleverna försöka både tillverka och lösa uppgifter, så att de får pröva på arbetet från båda sidor men inte för sig själva i sina böcker utan på svarta tavlan, så att alla kan följa med. Den individuella övningen får bl. a. komma vid arbetet med hemuppgifter.

Vilken av dessa metoder som är att föredraga, det beror väl också något på lärarens läggning, men så mycket tycks mig klart, att det måste vara brister i diskussioner, resonemang och förklaringar, som medför, att man så sällan träffar elever, som kan uttrycka sig på lämpligt sätt, då det t. ex. gäller att säga, hur de går till väga vid vanlig heltalsdivision. Frågar man t. o. m. i gymnasiet: ”Hur säger Ni, då Ni skall utföra divisionen 25 873 456 : 2 978 ?" så blir svaret vanligen: "Tvåtusenniohundrasjuttioåtta i tjugofemmillioneråttahundrasjuttiotretusenfyrahundrafemtiosex går . . ." och så är det stopp. Det är sällan man får svaret: "Tre i tjugosex går åtta gånger." Samma brister måste det vara, som leder till att man i första ringen kan träffa på elever, som inte kan skilja på dividend och divisor eller som inte känner till begreppet algebraisk summa för att inte tala om hur många det är även i gymnasiets första ring, som inte har någon aning om hur ett enkelt geometriskt bevis skall utföras.

Under mitt eget provår 1920 hade en av lärarkandidaterna haft en provlektion i kemi, och det ryktades bland kamraterna, att det var en utmärkt lektion, som nog skulle betygsättas med A. "Nå, vad sa' han?", frågade någon, som inte varit med, och svaret blev: "Ingenting." Bokstavligt får man väl inte ta detta svar, men lärarkandidaten hade tydligen lyckats att med få ord sätta eleverna i arbete och få dem till att rita teckningar över och lämna redogörelse för vad som behandlats vid föregående lektion eller ingick i deras hemuppgift. Det brukar inte vara så svårt att åstadkomma en till synes god lektion, då det gäller att gå igenom något nytt och läraren själv i huvudsak för ordet, men svårare är det både att få eleverna att hjälpa till vid genomgång av nya kursmoment och att vid ett förhör i önskad utsträckning redogöra för t. ex. hemuppgifterna eller tidigare genomgångna moment.

Hur jag själv tänker mig sådana arbetslektioner, där eleverna verkligen deltar i tankearbetet och inte endast passivt tillägnar sig lärarens genomgång, torde då och då komma fram i det följande.

## REPETITIONEN I KLASS 5

Enligt stadgan och Metodiska anvisningarna för matematikundervisningen i realskolan skall kursen i $1^4$ och $2^5$ börja med en repetition och fördjupning av föregående kurser. Repetitioner är nu alltid nyttiga, även om i framtiden inte som hittills i motsvarande klass 5 i enhetsskolan elever från så många olika håll kommer att sammanföras i denna klass. Ännu viktigare är, att det vid denna tidpunkt kan vara lämpligt med en utvidgning och fördjupning av dessa kursmoment.

För att eleverna skall kunna förstå, vad de sysslar med, måste de i ord kunna uttrycka det de gör. Det kan hända, att eleverna blivit vanda vid att *räkna* men inte att *tala om* det som skrives. Det är nog mera befogat att tala om övning än om undervisning, ifall en lektion skulle disponeras så, att eleverna i sina räknehäften får räkna uppgift efter uppgift, kanske utan att skriva ett enda ord till text för att klargöra sina tankar och naturligtvis utan möjlighet att uttala dessa eventuella tankar.

Visst skall eleverna räkna i sina häften, men med den knappa tid, som står till vårt förfogande, kan det bli endast i begränsad omfattning och ofta blott vid utförandet av hemarbetet. Det är därför nödvändigt, att eleverna också verkligen får lära sig hur de lämpligen skall utföra arbetet. I första hand måste man hålla på att hemarbetet, som bör hållas inom mycket snäva gränser, skall utföras ordentligt. Det är bäst att från början vänja eleverna vid att ett slarvigt utfört arbete *icke* godtages. Eleven vinner själv mest på att arbeta ordentligt.

I detta sammanhang bör kanske följande framhållas.

Om det vore möjligt att för varje klass upprätta något slags register med uppgifter om eleverna (av så växlande art som möjligt), erhållna genom intervjuer med eleverna och helst också med föräldrarna och kanske med de lärare, som eleven förut haft, så skulle det vara till mycket stor hjälp för den som undervisar. *Ett* barn kanske inte ens tål ett hårt tilltal; i ett annat fall skulle kanske föräldrarna bli överlyckliga, för att sonen eller dottern äntligen fått lära sig att begripa, att en tillsägelse skall åtlydas. Hur många, snart sagt oändligt många barn, i synnerhet pojkar, är det inte, som måst sota för att de på skolans mellanstadium fått slarva med sin stil, så att de senare inte har haft möjlighet att på korta skrivningar hinna med vad som fordras för ett godkänt betyg.

Själv har jag under åren 1938—50 följt tre årgångar gymnasister från R I till R IV och (i synnerhet i första ringen) på raster mellan dubbeltimmar intervjuat ungdomarna i klassen och fått veta en hel del om deras skolgång, om föräldrar och syskon, om hobbies och intressen. I några fall, fastän icke i många, har upplysningarna ökats ut genom samtal med föräldrarna.

För att eleverna skall kunna fullgöra sitt hemarbete ordentligt, måste de få veta, hur läraren vill ha arbetet utfört. För eleverna utgör det ett mycket gott stöd, om läraren ger klara anvisningar för arbetet även i så triviala detaljer som marginalens bredd, numrets placering, svarets omfattning och utseende o. s. v. Lektionerna måste därför bli en blandning av samtal, huvudräkning och räkning på svarta tavlan. Hur pass stor del av tiden som kommer att ägnas huvudräkningen, beror på det område, som man sysslar med. Alla partier i kursen lämpar sig ju icke lika bra för huvudräkning.

## Övningar med de enklaste benämningarna

När vi börjar vår repetitionsundervisning, kan det vara roligt att framställa några frågor till klassen för att utröna elevernas standard och kanske också för att ge de vaknare av dem en uppfattning om deras möjligheter att förstå det enklaste matematiska språket och att själva uttrycka sig med hjälp därav.

Som exempel på sådana frågor kan tänkas:

1) Hur mycket är *summan* av 3 *och* 5?
2) Hur stor är *produkten* av 3 *och* 5?
3) Hur stor är *kvoten mellan* 12 *och* 3?
4) Hur mycket blir 15 *dividerat med* 5?

(Observera, att ”dividerat i” och ”delat med” bör undvikas eller snarare inte får användas!)

5) Hur mycket är summan av 3 och 5 och 7?
6) Hur stor är produkten av 3 och 5 och 7. Egentligen borde man här säga ”3 gånger 5 gånger 7”, men vanligen användes nog ”3 och 5 och 7” eller snarare ”3, 5 och 7”.

I regel har det inte gått många minuter av timmen, förrän man upptäcker, att här är ett område, där det måste arbetas de närmaste lektionerna.

Man kan t. ex. till en början på tavlan skriva upp namnen på de storheter, som skall användas, alltså: *term*, *faktor*, *dividend*, *divisor*, *kvot*, *rest*, *summa*, *skillnad* (*rest*), *produkt* och *algebraisk summa*, så att barnen kan se dem för sig.

Övning att använda dessa beteckningar kan man få på följande sätt. Man skriver exempelvis $7 - 3 + 8 - 5 + 6 + + 10 - 9$ och ger klassen till uppgift att räkna ut denna *algebraiska summa* (ett uttryck, innehållande termer med både plus- och minustecken).

Nu kan det naturligtvis inträffa, att en del elever räknar så här: $7 - 3 = 4$; $8 - 5 = 3$; $6 + 10 = 16$; $16 - 9 = 7$ och sedan $4 + 3 + 7 = 14$. Ja, om något barn får räkna på tavlan, kan det t. o. m. hända, att man får se något i den här stilen:

$$\underbrace{7-3}_{4}+\underbrace{8-5}_{3}+\underbrace{\underbrace{6+10}_{16}-9}_{7}=14,$$

en behandlingsmetod, som på grund av för mycket klotter lätt medför oreda och därför bör undvikas.

Utan att närmare diskutera, hur uppgiften lämpligen bör räknas, kan man antingen själv göra en ny uppgift eller låta en elev författa en liknande uppgift.

Låt oss tänka oss, att den nya uppgiften ser ut så här:

$$2-7-8+5-3+12=$$

De elever, som föregående gång tog termerna två och två, är kanske nu snarast hågade att säga, att det inte går att räkna uppgiften, och det är endast de elever, som vant sig att räkna så här: $2+5+12=19$; $7+8+3=18$; $19-18=1$, som nu lyckas klara frågan.

Det är lätt för läraren att spinna vidare på den här tråden, men det är ont om tid, och ganska snart måste läraren ta saken i egen hand och visa eleverna, hur arbetet lämpligen bör utföras. Emellertid torde en inledning av ovan skisserade art kunna väcka åtminstone de bättre elevernas intresse. Behandlingen kan förslagsvis till en början ske så här.

Termer, som är försedda med $+$tecken eller inte något tecken alls (utelämnat $+$tecken), är inkomsttermer (man kan tänka på inkomster och utgifter i en affär) och termer, som är försedda med minustecken, kallas utgiftstermer (minustecknet anger, att det är fråga om en utgift, och talet efter minustecknet anger utgiftens storlek). Inkomsttermer kan också kallas för *plustermer* och utgiftstermer för *minustermer*.

Vi skriver nu på svarta tavlan:

$$2-7-8+5-3+12=$$

| Inkomster | Utgifter | Behållning |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 19 |
| 5 | 8 | − 18 |
| + 12 | + 3 | 1 och alltså |
| 19 | 18 | |

$$2 - 7 - 8 + 5 - 3 + 12 = 19 - 18 = 1.$$

Sedan blir det naturligt för eleverna att på svenska uttrycka den enkla regeln: Lägg ihop alla inkomsttermer för sig och alla utgiftstermer för sig och minska sedan inkomsterna med utgifterna.

### *Räknearbetet bör också beskrivas på svenska*

Men vi är i alla fall ännu inte nöjda med behandlingen. Nu bör uppgiften och lösningen också beskrivas på svenska, t. ex. så här:

Uppgiften är en algebraisk summa, som består av 6 termer, av vilka 3 är plustermer och 3 minustermer. Plustermerna är 2, 5 och 12, minustermerna 7, 8 och 3. Plustermernas summa är 19 och minustermernas 18. Den algebraiska summans värde är + 1.

Har man kommit så långt och kanske ytterligare tillsammans med klassen räknat några uppgifter (både skriftligt och muntligt), kan det vara tid att sätta klassen lite mer i arbete.

### *Eleverna författar uppgifter*

Har man en tavla över hela väggen, och det är så gott som nödvändigt för en effektiv undervisning, kan arbetet t. ex. fortsätta så här:

Sitter barnen radvis, kan man nu låta den förste på varje rad samtidigt författa var sin uppgift i stil med de nyss behandlade, men med tillsägelse, att den algebraiska summan inte får innehålla mer än t. ex. 6 termer.

Därvid inträffar alldeles säkert något nytt, ty i något fall kommer den författade uppgiften att ta sig ut någonting i den här stilen:

$$2-7-8+5-12+3$$

och när sedan eleven nr 2 på varje rad skall utföra räkningarna, under det att övriga elever kontrollerar det arbete, som radens representant utför,[1] så kommer nästan säkert den som fått sig uppgiften

$$2-7-8+5-12+3$$

förelagd att säga, att den uppgiften kan man inte räkna ut.

Då är det tid att låta allihop sitta ned och att behandla denna fråga med hela klassen. Om man skriver som förut

| Inkomster | Utgifter |
| --- | --- |
| 2 | 7 |
| 5 | 8 |
| + 3 | + 12 |
| 10 | 27 |

så ligger det nära till hands att säga till eleverna, att nu passar det inte att som tredje överskrift använda ordet *behållning*, och nog bör några i klassen kunna komma på att *skuld* eller eventuellt *brist* nu är det riktiga ordet. Till höger om de två föregående uppställningarna skriver vi

| Skuld |
| --- |
| 27 |
| − 10 |
| 17 |

och behandlingen av uppgiften tar sig ut så här:

$$2-7-8+5-12+3=10-27=-17,$$

[1] Denna metod att sätta klassen i arbete har i fortsättningen betecknats med radräkning.

ty vi kommer överens om att en utgift, brist eller skuld betecknar vi med minustecken.

När så uppgiften behandlats tillsammans med hela klassen, kan arbetet fortsätta radvis.

## Uppgifter med multiplikation

Vi fortsätter nu med en enkel uppgift, där även multiplikation ingår, t. ex.

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot 3.$$

Begär man liksom förut, att eleverna skall räkna ut denna skillnad, kan svaren säkert delas upp i två grupper. En del av klassen kommer att anse, att skillnaden blir 1, och en annan del, att den blir 21. Några stänkröster torde nog också hålla på 12.

Om läraren skriver upp de tre möjligheterna på tavlan och sedan frågar: ”Hur många är det som anser, att resultatet bör bli 1?”, och så noterar antalet, torde man på tavlan kunna få någonting i denna stil:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 21 | 12 |
| 10 | 20 | 5 |

Efter detta vore det väl underligt, om icke bra många av eleverna verkligen har blivit intresserade och på allvar undrar, vilket som egentligen är det riktiga svaret.

Nu måste uppgiften ingående klargöras för eleverna. Dock inte så: ”Nu skall ni komma ihåg, att multiplikation och division går före addition och subtraktion!”, vilket väl snarast är att betrakta som någon sorts kokboksregel, utan ungefär så här:

Alla uttryck, som vi sysslar med, är algebraiska summor, dvs. innehåller några termer, åtskilda genom plus- och minustecken. Det säger sig då självt, att det är omöjligt att finna den algebraiska summans värde, om man inte först känner värdet av varje enskild term. Det som står emellan två plus- eller minustecken (plustecken utelämnat i [framför] första termen och inget tecken efter den sista), är just termer, och därför är det självklart, att multiplikationer och divisioner först måste räknas ut, så att man får reda på termernas värden.

Den muntliga behandlingen av vår uppgift (och den är minst lika viktig, ja, kanske viktigare än den skriftliga) kommer nu att låta ungefär så här:

Uppgiften är en skillnad, som består av två termer. Den första termen är en plusterm (tillgångsterm) och är produkten av de två faktorerna 2 och 5. Den andra termen är produkten av två lika faktorer 3. Värdet av den första termen är 10 och av den andra 9. Skillnaden blir 1.

På tavlan ter det sig så här:

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1.$$

Om eleverna får skriva sådana uppgifter utan noggrann genomgång, kommer säkert fel av följande typ att förekomma:

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 10(!) = 10 - 9 = 1.$$

Det är, som varje lärare känner till, ytterst vanligt, att respekten för likhetstecknet saknas; eleverna har sålunda inte alltid klart för sig, att det som kommer efter ett likhetstecken, måste vara lika med det som står före.

När så några uppgifter av detta enkla slag, som faktiskt kan användas som prov i den muntliga realexamen, noggrant behandlats både skriftligt och muntligt, har man helt naturligt att öka ut uppgiften t. ex. i likhet med följande:

$$5 \cdot 3 - 8 \cdot 3 \cdot 4 + 63 : 7 - 2 \cdot 5 \cdot 4 + 8 \cdot 9.$$

Den muntliga behandlingen av denna uppgift skulle låta ungefär så här:

Uttrycket är en algebraisk summa av 5 termer, 3 plustermer och 2 minustermer. Den första termen är en plusterm, och den är produkten av 5 och 3. Den andra termen, som är en minusterm, är produkten av de tre faktorerna 8 och 3 och 4.

Den tredje termen är kvoten mellan 63 och 7 eller en kvot, vars dividend är 63 och divisor 7 etc.

Innan vi lämnar detta område, må ännu en uppgift av liknande art få komma med:

$$3 \cdot (5 \cdot 3 - 2 \cdot 4) - 25 : (8 \cdot 3 - 30 : 2 - 4)$$

Dess beskrivning bör bli följande: Denna uppgift är skillnaden mellan två termer. Den första termen är produkten av faktorn 3 och en faktor, som är skillnaden mellan två produkter, den första av 5 och 3, den andra av 2 och 4. Den andra termen är en kvot, vars dividend är 25 och vars divisor är en algebraisk summa av tre termer, en plusterm, bildad av faktorerna 8 och 3, och två minustermer, av vilka den ena är kvoten mellan 30 och 2 och den andra är 4.

Så återstår den räknemässiga framställningen:

$$3 \cdot (5 \cdot 3 - 2 \cdot 4) - 25 : (8 \cdot 3 - 30 : 2 - 4) =$$
$$= 3(15 - 8) - 25 : (24 - 15 - 4) =$$
$$= 3 \cdot 7 - 25 : (24 - 19) = 21 - 25 : 5 = 21 - 5 = 16.$$

Det är klart, att den muntliga behandlingen måste ske med hela klassen. Räkningarna på tavlan kan lämpligen göras av eleverna radvis, så att en elev tillverkar en uppgift, nästa utför räkningen under hela radens kontroll etc.

Har man nu på detta sätt behandlat några uppgifter, bör man kunna ge hemläxa ur läroboken och, åtminstone i några fall, begära behandling med införande av fullständig text.

Eftersom man nu har möjlighet att någon tid ge hemuppgifter på behandling av algebraiska summor med hela tal, är tiden inne att arbeta med sorter.

## Sorter

Här är nog att förorda, att man gör (fullt) klart för eleverna, att man av vilken enhet som helst (tum, fot, pund) kan bilda *överavdelningar* med hjälp av orden Deka = 10, hekto = 100, kilo = 1000 och Mega (stor) = 1 000 000, som bildats av motsvarande grekiska räkneord (deka, hekaton, khilioi, mega) samt att underavdelningar erhålles med hjälp av deci-, centi- och milli-, som bildats av de latinska räkneorden decem = 10, centum = 100 och mille = 1 000, men som här får betydelsen tiondel, hundradel och tusendel. Dessutom användes det grekiska ordet mikro (mikros = liten) i betydelsen milliondel.

Av t. ex. fot skulle vi få följande längdmått:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 Megafot | = | 1 Mfot | = | 1 000 000 fot |
| 1 kilofot | = | 1 kfot | = | 1 000 fot |
| 1 hektofot | = | 1 hfot | = | 100 fot |
| 1 Dekafot | = | 1 Dfot | = | 10 fot |
| 1 fot | | | = | 1 fot |
| 1 decifot | = | 1 dfot | = | en tiondels fot |
| 1 centifot | = | 1 cfot | = | en hundradels fot |
| 1 millifot | = | 1 mfot | = | en tusendels fot |
| 1 mikrofot | = | 1 $\mu$fot | = | en milliondels fot, |

varvid man lämpligen i början utesluter Megafot och mikrofot (det kan ju möjligen tagas upp i klass 9) och dessutom lägger märke till att dekafot tecknas med stort D till skillnad från decifot med litet d.

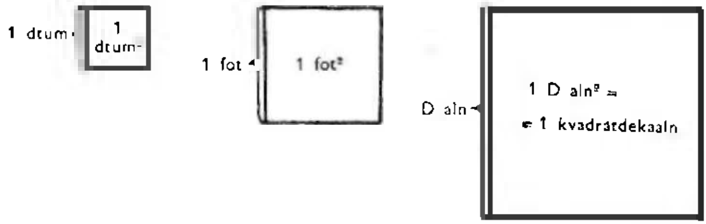
I huvudsak kommer väl arbetet att röra sig med metersorterna, d. v. s. km, hm, Dm, m, dm, cm och mm.

Den stora fördelen med införande av hektometer och dekameter är ju, att reduktionstalet vid övergång från större sorter till mindre alltjämt är 10.

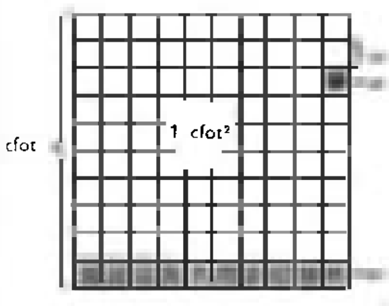
Nu vet ju varje elev, att metermått kan köpas i en affär, men hur får man ytmått, exempelvis ett kvadratmetermått?

Här är kanske lämpligast, att läraren för att spara tid själv talar om, hur det ligger till. Han kan t. ex. på tavlan rita en kvadrat och dela dess sida i 10 lika delar eller (vilket är lättare) rita två mot varandra vinkelräta linjer och avsätta från deras skärningspunkt på vardera åt ett håll 10 lika bitar (t. ex.

bredden eller längden av en tändsticksask). Då får han lätt genom att draga med de ursprungliga linjerna parallella linjer en stor kvadrat, delad i 100 st små kvadrater. Dessutom kan det vara lämpligt att rita en hel del kvadrater på tavlan, och här kan ju flera elever samtidigt få rita. Som vinkelhake duger en vanlig blå skrivbok alldeles utmärkt. Barnen kan själva få hitta på namn på sträckorna, och då kan man få något i den här stilen:




Naturligtvis måste läraren här tala om ytans namn och öva: *En kvadratfot är en kvadrat, vars sida är en fot*, etc. Det är säkert ingen konst att sätta elevernas fantasi i rörelse. Här är ett stort fält för lärarens fantasi också. Vi låter t. ex. 7 elever, om tavlan medger det, rita olika stora kvadrater, delade i hundra delar, och låter så den, som sysslar med den minsta kvadraten, skriva:




1 cfot² = 100 mfot²
En kvadratcentifot = 100 mfot²
1 mfot
1 mfot² = 1 kvadratmillifot =
= en hundradel av enheten (cfot)²
En hundradel av enheten får man, om man delar enheten i etthundra lika delar eller en tiondel av enheten i tio lika delar eller. *En tiondel av en tiondel är en hundradel.*
en tiondel av enheten (1 cfot²)

Nästa elev skriver 1 $dfot^2 = 100$ $cfot^2$ o. s. v.

På det viset skulle vi få följande tabell:

| | | |
|---|---|---|
| (*1 Mfot*$^2$ | = | 1 000 000 *kfot*$^2$) |
| *1 kfot*$^2$ | = | *100 hfot*$^2$ |
| *1 hfot*$^2$ | = | *100 Dfot*$^2$ |
| *1 Dfot*$^2$ | = | *100 fot*$^2$ |
| *1 fot*$^2$ | = | *100 dfot*$^2$ |
| *1 dfot*$^2$ | = | *100 cfot*$^2$ |
| *1 cfot*$^2$ | = | *100 mfot*$^2$ |
| (*1 mfot*$^2$ | = | *1 000 000 ufot*$^2$) |

Det säger sig väl självt, att den första och den sista raden icke bör medtagas förrän möjligen vid någon repetition i avslutningsklassen.

Man har nog icke tid att arbeta igenom detta mer än en gång. Sedan måste man lämna "fot", eller vad det nu kan vara för någon grundsort man valt, och övergå till grundenheten meter. Därvid bör vi påminna eleverna om att vi i allmänhet kallar en $Dm^2$ för en ar (a) och $hm^2$ för en hektar (ha), något, som väl snarast borde ändras.

När detta repeteras, vilket brukar bli ganska tidigt på hösten, ger vi en gång barnen till uppgift att skaffa sig ett snöre och på det göra 11 knutar med en meters mellanrum och medföra detta till nästa lektion. Den äger rum på skolgården eller en idrottsplan. Där delar vi upp barnen i grupper med t. ex. 4 i varje grupp och låter varje grupp med hjälp av medförda träpinnar (eller kritor, om skolgården skulle vara cementerad) rita upp en $Dm^2$ (ar), indelad i 100 kvadrater. När detta är gjort, brukar vi samlas inom en sådan ar och prata litet om den, så att barnen får tillfälle att bekanta sig med benämningen, gå runt i kvadraten och räkna rutorna eller vad nu läraren kan hitta på för dem att göra.

Vi brukar också hinna med att börja med arbetet att "inhägna" en hektar. Om skolgården eller planen är tillräckligt stor i någon riktning, skickar vi 11 barn med sina snören att ställa sig i rät linje med (de 10 m långa) snörena utsträckta mellan sig. Sedan får vi skicka 10 barn att utgående från vardera ”flygeleleven” på samma sätt ställa sig i rät linje, så att alla barnen bildar tre sidor i en kvadrat. Även om det i de allra flesta fall inte går att åstadkomma mer än en tredjedels eller en halv kvadrat, så får barnen ändå en uppfattning om att en hektar är en mycket stor yta. (Ett tunnland är i det närmaste lika med en halv hektar.)

Skulle det vara möjligt att ”rita” de förut omtalade 8 à 10 ar-ytorna efter varandra vid en sida av den påtänkta hektaren, är det så mycket bättre.

Nu kanske någon invänder, att denna väg är tidsödande. Men ingen kan dock underlåta att rita, och det faller väl numera knappast någon in att utan vidare låta barnen plugga in de tabeller om dessa reduktioner, som brukar finnas i slutet av läroböckerna.

Det kan nog anses säkert, att den ovan skisserade metoden ger lika mycket eller, jag vågar tro det. mera än en ev. metod att låta barnen sitta för sig själva och räkna exempel efter exempel i läroboken efter att ha pluggat ramsan utantill först eller eventuellt med reduktionstabellen framför sig.

Skulle någon finna införandet av Dm och hm opåkallat, vill jag påminna om att då för några år sedan storheten pond infördes. det väl ansågs naturligt, att man skulle använda Dp, hp, kp och Mp.

Det är nästan självklart, att man får gå fram på samma sätt, när det gäller rymdmåtten. Att man inte kan rita så mycket nu är givet, men varje barn bör åtminstone kunna rita en acceptabel låda.

Ett försök att rita ut en figur med en kub delad i tusen små kuber skulle endast leda till att ingen kunde se något för alla linjerna.

Man får väl nöja sig med en figur sådan som fig. 1, där lärarens och barnens möjligheter och intresse får avgöra, hur mycket som skall ritas. Det är säkert en väl använd tid, även om därtill skulle åtgå en hel timme eller mera. Man

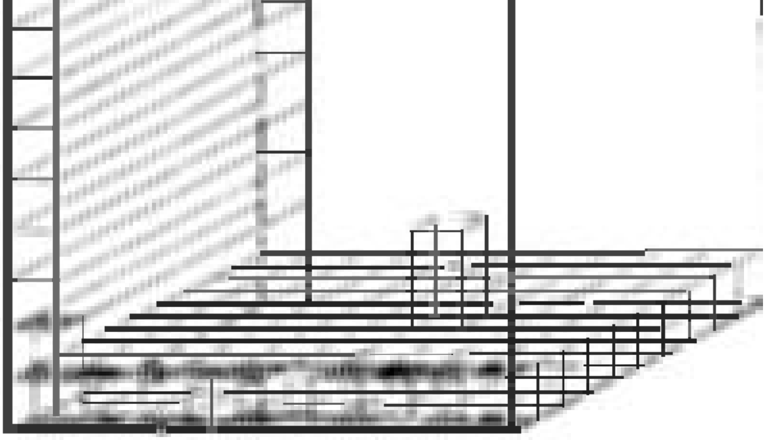
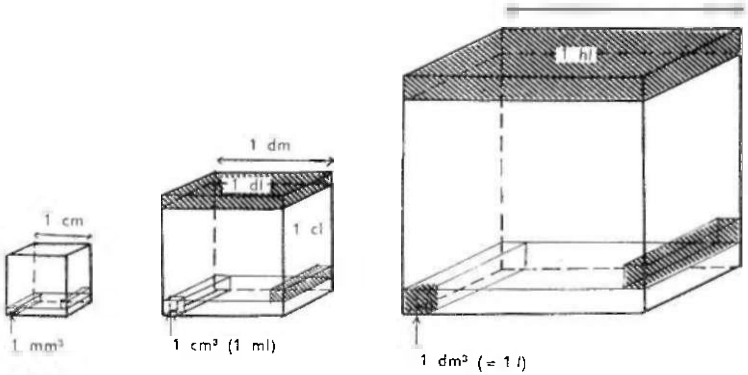


Fig. 1. I denna figur är de valda måtten till en viss grad olämpliga på så sätt, att många linjer sammanfaller, men den fördelen, som ligger i att det är jämförelsevis lätt att rita teckningen, överväger nog nackdelarna.

har väl skäl att räkna med att det åtminstone hos de flesta barnen kommer att kvarstå en minnesbild av den stora kuben med 100 småkuber på botten och märkena på en av de lodräta kanterna, som skall ange, att man kan plocka in 10 lager på varandra (med hundra småkuber i varje lager).

Även i detta fall kan man låta eleverna rita på tavlan:

Här kan teckningarna endast ge en antydan om vad som avses, men på svarta tavlan kan man rita figurerna i verklig storlek, åtminstone vad längd och höjd beträffar. Visserligen blir väl den minsta figuren knappast mer än en stor kritprick,




1 $cm^3$ = 100 $mm^3$ 1 $dm^3$ (= 1 l) = = 1 000 $cm^3$ 1 $m^3$ = 1 000 $dm^3$

**Fig. 2**[1].

men barnen bör nog ändå få ett bestående synintryck av sambanden mellan de olika rymdmåtten. Samtidigt måste liksom vid ytmåtten övas: 1 kubikmeter är en kub, vars kant är 1 m, en kubikdecimeter är en kub, vars kant är en decimeter etc.

Ofta brukar det i skolorna finnas både en hopfällbar kubikmetermodell och en kubikdecimetermodell, vilken delvis består av "kubikcentimetrar". Man bör inte underlåta att använda dessa modeller.

Samtidigt kan vi passa på att tala om (i 1[4] repetera), att den lilla kuben är en tusendel av den stora, och så kan vi låta två elever skriva på tavlan:

| | |
|---|---|
| 1 $cm^3$ = 1000 $mm^3$ | 1 $mm^3$ = 0,001 $cm^3$ |
| 1 $dm^3$ = 1000 $cm^3$ | 1 $cm^3$ = 0,001 $dm^3$ |
| 1 $m^3$ = 1000 $dm^3$ | 1 $dm^3$ = 0,001 $m^3$ |
| 1 $Dm^3$ = 1000 $m^3$ | 1 $m^3$ = 0,001 $Dm^3$ |
| 1 $hm^3$ = 1000 $Dm^3$ | 1 $Dm^3$ = 0,001 $hm^3$ |
| 1 $km^3$ = 1000 $hm^3$ | 1 $hm^3$ — 0,001 $km^3$ |
| 1 $mil^3$ = 1000 $km^3$ | etc. |
| (1 $Mm^3$ = 1 000 000 000 $km^3$) | |

[1] I mellersta figuren ovan hänför sig 1 cl till det därunder streckade området.

där m naturligtvis kan bytas ut mot tum eller fot eller famn etc.

Vid arbetet bör man se till, att eleverna omedelbart förvandlar en uppgift av formen 2 $hm^3$ 13 $Dm^3$ 1738 $cm^3$ till den uppgivna sorten. Den givna uppgiften blir då t. ex. lika med

2013000,001738 $m^3$. Lite var använder vi väl oss av att man vid förvandling av rymdmått alltid har 3 siffror i varje grupp. I det här fallet tänker vi så här:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 013 | 000 | 001 | 738 |
| $hm^3$ | $Dm^3$ | $m^3$ | $dm^3$ | $cm^3$ |

och skriver i regel inte ut de lodräta strecken eller sorterna under grupperna.

Behandlingar av följande typ bör inte få förekomma:

$$
\begin{array}{r l}
2000000, & \\
13000, & \\
0, & 001 \\
0, & 000\,738 \\
\hline
2013000, & 001\,738
\end{array}
$$

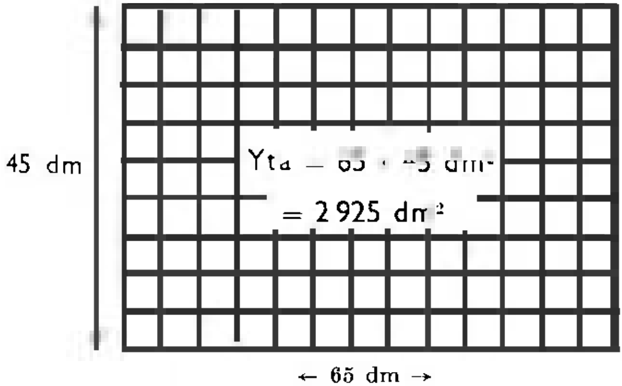
Har man hunnit igenom inledningen någonting i ovan angivna stil, är det tid att övergå till att låta klassen radvis författa och lösa uppgifter och att ge hemläxa i läroboken.

Vid behandling av uppgifter för uträkning av ytor och volymer sådana som t. ex. R.W.F.:[1] IA 145—168, där dimensionerna hos en rektangel eller en låda är givna, bör teckningar alltid ritas.

Ex. R.W.F. nr 146: En vägg är 6 m 5 dm lång och 4 m 5 dm hög. Hur stor är ytan?

I den rutade räkneboken (5 mm:s rutor) bör då längden vara 13 rutor och bredden 9 rutor:

[1] Rendahl — Wahlström — Frank, Räknebok för realskolan. Jfr Litteraturanvisningar.




```
  65
  45
 ---
 325
260
----
2925
```

En ruta =
= 5 dm

**Svar:** Väggens yta är 29 m² 25 dm².

Det kan inte skada att nämna, att figuren är ritad i skalan 1 : 100.

För eleverna bör framhållas, att man, om det inte är särskilt besvärligt, bör försöka att rita figuren, så att den får samma form som den i texten uppgivna, och att det är en fördel, om man kan ange skalan.

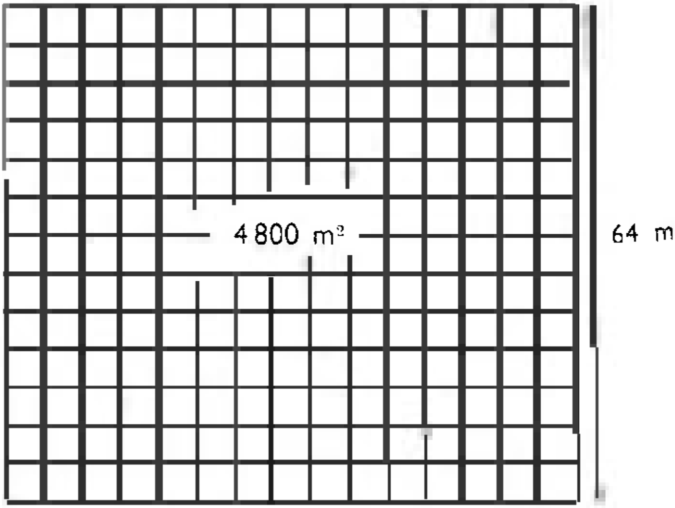
Uppgiften 153 i R.W.F: A och 50 i B.

En person skall köpa en rektangulär tomt med arealen 48 ar. Tomtens bredd måste bli 64 m. Hur stor bör längden vara?

För att finna längden måste jag dividera ytan 4800 m² med bredden 64 m. Längden blir alltså (4800 : 64) m.

```
4800 | 64
448    75
----
 320
 320
```

När vi skall teckna, väljer vi lämpligen längden 7,5 cm dvs. 15 rutor och bredden 6,4 cm eller ungefär 13 rutor.




Skala 1 : 1000
1 ruta = 5 m

Svar: Tomtens längd blir 75 m.

Ex. 166 i R.W.F: A och Ex. 58 i B.

En fyrkantig bleckburk rymmer 18 l, och dess djup är 2 dm. Hur stor är bottenytan?

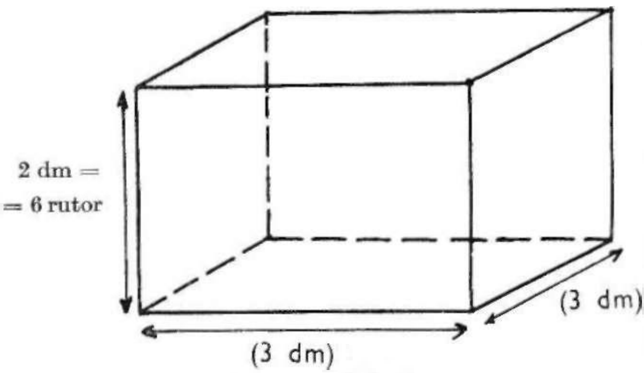



Fig. 3.

Vid en sådan uppgift får vi nog vara nöjda och belåtna, om vi får en teckning över en låda, vilken som helst (även om det kunde vara trevligt med en figur som vidstående).

För att finna bottenytan i **dm²** måste jag dividera volymen i dm³ med höjden 2 dm.

Bottenytan = 18 dm³: 2 dm = 9 dm².

Svar: Bottenytan är 9 dm².

Det är inget tvivel om att det är bättre att låta eleverna ordentligt räkna och rita 2 eller 3 uppgifter på liknande sätt som visats än 6 eller 7 uppgifter utan text och teckning.

## DECIMALBRÅK

Hur man lämpligen förfar vid införande av bråkbegreppet, får man i regel veta något om i de vanliga läroböckerna, och detta skall därför här endast flyktigt beröras.

På något sätt bör vi illustrera det nya. Det kan vi göra genom att klippa eller vika några ark eller minst lika gärna rita på tavlan.

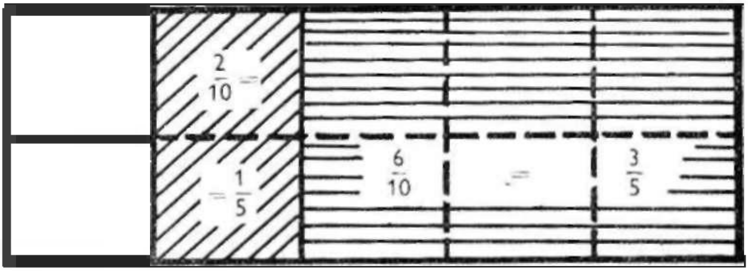



Fig. 4.

Av denna figur får man omedelbart, att $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ och $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ eller lika gärna $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ och $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Här är av vikt att framhålla, att de båda bråken $\frac{1}{5}$ och $\frac{2}{10}$ har samma *värde* men olika utseende. Man ser omedelbart, att man har rättighet att multiplicera täljare och nämnare i ett bråk med samma tal. I förra fallet (vid förlängningen) blir talen i täljaren och nämnaren större, och i senare fallet (vid förkortningen) blir de mindre, men i ingetdera fallet *ändras* värdet.

Man kan inte nog framhålla betydelsen av att eleverna ofta får säga ut hithörande tankar och använda orden *förlänga* och *förkorta*.

Att $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ passar vi på att träna in i samband med övningar i sortförvandlingar, när vi på tavlan har en figur med en stor kvadrat, delad i hundra små kvadrater, eller en kub, med kanterna delade i 10 lika delar. Då konstaterar vi också, att en tiondel av en tiondel är en hundradel och att en tiondel av en hundradel är en tusendel.

Sedan det inledande kapitlet om bråktals uppkomst, om förlängning och förkortning blivit något så när fylligt behandlat, övergår man enligt kursplanen till decimalbråken. I företalet till en lärobok, som utkom vid sekelskiftet, skrev författaren: ”Att elever på 10—11 år annat än i mycket sällsynta fall kunna bringas att verkligen förstå så svårfattliga räkneoperationer som multiplikation och division i decimalbråk, är föga sannolikt.” Men numera anses det nog icke, att eleverna (eller ens läraren själv) vid varje räkning skall förståndsmässigt tänka igenom, varför man gör så och så. Snarare måste metoden vara den, att läraren, då någonting nytt (i detta fall de fyra räknesätten i decimalbråk) skall börja, skriver, ritar och förklarar för att så småningom komma fram till en regel, som *måste* läras och som skall användas vid arbetet. *Men* antalet sådana regler måste vara litet. (Som exempel kan nämnas, att i första delen av R.W.F:s lärobok förekommer endast 15 regler, och det reder man sig med.)

Enkla, korta förklaringar i början av varje räknesätt finns i regel i räkneböckerna, men några små tillägg får ändå komma med här.

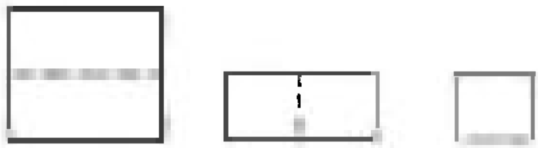
## Addition och subtraktion

Vid addition och subtraktion är det alltid på sin plats att påminna om att termerna måste vara uttryckta i samma sort (en varg + ett får = ett djur + ett djur = två djur). I vårt fall betyder det, när man räknar i häftet eller skriver på tavlan, att siffror, som betecknar samma talsort, måste skrivas under varandra. De nya *talsorterna*, hundratal, tiotal, tiondelar o. s. v., måste därför inövas. På samma sätt som man förvandlar 1 hl till dl, kan vi här fråga: Hur många tiondelar går det på ett hundratal? Hur många tiotusendelar går det på en hundradel? En god övning kan erhållas så, att ett uppskrivet decimaltal läses upp på olika sätt. Ex. 135,79246 kan t. ex. avdelas så här: 1 35,7 92 4 6 och läsas: Ett hundratal 357 tiondelar 92 tusendelar 4 tiotusendelar 6 hundratusendelar. Sådana uppgifter får man enkelt genom att låta en rad elever författa uppgifter och låta nästa rad läsa ut dem.

Huvudräkning måste här flitigt övas. Redan vid en enkel uppgift av typen 0,3 + 0,04 återkommer den här så viktiga frågan: Hur många hundradelar går det på en tiondel? Vi har att säga ungefär så här: 3 tiondelar är lika med 30 hundradelar. Lägger vi till 4 hundradelar, får vi summan 34 hundradelar. Naturligtvis måste det vid något eller några tillfällen påpekas, att vi, då vi i stället för 0,3 skriver 0,30, förlänger decimalbråket 0,3 med 10. Det kan inte skada att några gånger skriva $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$ för tydlighetens skull. Det är nog inte så ovanligt, att barnen vet, att man "får" sätta till ett godtyckligt antal nollor efter ett decimalbråk, men att man då förlänger det motsvarande bråket, är nog ofta obekant.

## Multiplikation

Vi gör nog klokt i att repetera inledningen med t. ex. följande figurer.

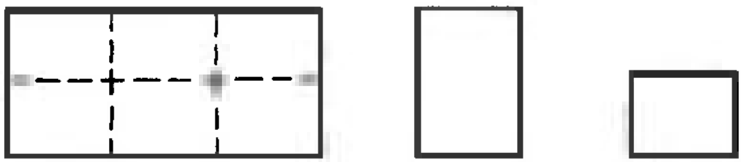


det hela = = enheten

en halv = = hälften av enheten

hälften av en halv = = en fjärdedel av det hela

Fig. 4a.



det hela

en tredjedel

hälften av en tredjedel = en sjättedel av det hela

Fig. 4 b.

Så fortsätter vi med en tiondel av en tiondel. Säkert måste vi många gånger upprepa tanken: Om enheten (det hela) delas i 10 lika delar, så kallas varje del en tiondel (av det hela). Om man sedan delar var och en av dessa tiondelar i 10 lika stora delar, så blir enheten delad i 100 lika delar. Varje sådan del kallar vi en hundradel(s enhet), och därför är en tiondel av en tiondel lika med en hundradel. På samma sätt fortsätter vi: Om var och en av hundradelarna delas i 10 lika delar, blir det hela delat i 1000 st lika delar, som vi kallar för tusendelar (av enheten), och så får vi, att en tiondel av en hundradel är en tusendel eller att en hundradel av en tiondel är en tusendel.

Om vi t. ex. skall multiplicera 0,3 och 69, kan vi gå fram så här:

En tiondel av 69 enheter är 69 tiondelar (= 6,9),
tre tiondelar av 69 enheter är $3 \cdot 69$ tiondelar ($= 3 \cdot 6{,}9$) eller
tre gånger 69 tiondelar = 207 tiondelar = 20,7.

Om vi anser oss veta, att vid en multiplikation faktorernas ordning är likgiltig, så kan räkningen också utföras så här:
69 gånger 3 st tiondelar är lika med
207 st tiondelar (av enheten) = 20,7 (enheter).

När vi så skall gå vidare och multiplicera två decimalbråk, kan vi använda oss av omvändningen av vårt föregående resultat.

Ex. $0{,}28 \cdot 7{,}8 = 0{,}01 \cdot 28 \cdot 0{,}1 \cdot 78 = 0{,}01 \cdot 0{,}1 \cdot 28 \cdot 78$. Att 0,01 av 0,1 är 0,001, blev nyss visat. Vi får nu $0{,}001 \cdot 2184 =$ = 2184 tusendelar = 2,184.

Nu kan vi åter kontrollera, att regeln är riktig.

Sedan vi låtit eleverna författa och räkna några sådana uppgifter, följer helt naturligt regeln, helst formulerad av eleverna själva: Man multiplicerar talen, som om där icke funnes några decimalkomman, och avskiljer sedan i produkten så många decimaler, som det finns i faktorerna tillsammans.

Så måste regeln "slås in". Vi skriver och låter så småningom barnen själva författa och skriva uppgifter på tavlan. Ex. $0{,}2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}0003$. (Sådana övningar kan läggas in när som helst under hela skoltiden.) Räkningen tar sig ut så här: 2 ggr 5 är 10; $10 \cdot 3$ är 30. Ofta väljer vi en faktor med en tvåa och en med en femma, så att vi får tillfälle att påpeka för barnen, att dessa två faktorer alltid gömmes till sist. Så skriver vi 30 och räknar antalet decimaler. Det blir 7 st, och resultatet är 0,0000030, vilket läses "tre milliondelar" eller (eventuellt) "noll komma fem nollor 3".

Ex. $0{,}6 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}00025 \cdot 5$.

6 ggr 5 är 30; 8 ggr 25 är 200; $200 \cdot 30$ är 6000. Antalet decimaler är 9 och resultatet 0,000006000 = 0,000006.

## Division

Att dividera ett decimalbråk med ett helt tal bereder inga svårigheter. Skall vi t. ex. utföra 10,5 : 7, så skriver vi i stället 105 tiondelar : 7 = 15 tiondelar eller 1,5 (enheter).

Om vi låter eleverna tillverka uppgifter av detta slag, kan vi gärna ta med *delningsreglerna.* Det är lätt att ordna en tävlan mellan raderna, och vilken rad som hinner med de flesta uppgifterna, beror inte endast på hur den som skall räkna ut uppgiften kan sin multiplikationstabell utan kanske mest på kamratens—författarens förmåga att komponera uppgiften så, att divisionen går jämnt upp.

När vi står inför uppgiften att dividera ett decimalbråk med ett annat decimalbråk, kan vi lämpligen börja med att skriva på tavlan t. ex.

200 äpplen : 5 äpplen

och så fråga eleverna: Om man skulle försöka sig på att författa en uppgift, vars lösning skulle tecknas på detta sätt, hur skulle den uppgiften kunna lyda? En elev svarar kanske: "Hur många gånger innehålles 5 äpplen i 200 äpplen?" och en annan: "Om man har 200 äpplen och skall dela upp dem i högar med 5 äpplen i varje hög, hur många högar får man?" Det är säkert ingen svårighet att få svaret "40 gånger" på den första frågan och på den andra: "Antalet högar blir 40."

Vi finner också lätt, att vi får precis samma resultat, om vi byter ut äpplena mot något annat vad som helst. *Resultatet blir lika med kvoten mellan mätetalen helt oberoende av sorten.* Man kunde lika gärna fråga: Hur många gånger innehålles 5 i 200?

Denna tankegång använder vi oss av för att klargöra, hur man skall bära sig åt för att utföra en division, då både dividend och divisor är decimalbråk. Som exempel väljer vi 0,217 : 0,0007. Med tanke på frågan om äpplena ovan ändrar vi vår uppgift och säger 2170 tiotusendelar: 7 tiotusendelar eller: Hur många gånger innehålles 7 tiotusendelar i 2170 tiotusendelar? Eftersom nu både dividend och divisor är uttryckta i samma sort, blir vårt resultat 2170 : 7 = 310.

När vi har utfört denna räkning i några fall, blir det tid att lära regeln: Vi förlänger bråket med tio, hundra, tusen osv., så att divisorn blir ett helt tal, eller lite mera "kokboksmässigt": Vi flyttar decimalkommat så många steg åt höger i både dividend och divisor, att divisorn blir ett helt tal. Ett sådant utanläsningsförfarande kan här liksom på andra håll leda till misstag. Den som utan eftertanke inlärt regeln, skulle kanske, om han t. ex. blev ställd inför uppgiften att dela upp 2500 sekunder i minuter och sekunder, skriva så här:

```
2500 | 60
24     41
 10
  6
  4
```

och till resultat få 41 min 4 sek i stället för 41 min 40 sek.

Det står oss naturligtvis fritt att, sedan vi kommit till 2170 : 7, i stället för 2170 ental dividerat med 7 säga: 21700 tiondelar dividerat med 7 eller 217000 hundradelar dividerat med 7. Då divisionen i detta fall går jämnt upp, får vi endast övning i att förvandla från en talsort till en annan. Men om divisionen inte går jämnt upp, blir det nödvändigt att förvandla till allt mindre sorter. Om vi exempelvis dividerar 0,3 med 0,07, börjar vi med att flytta decimalkommat två steg och får 30 enheter dividerat med 7. Men det står oss fritt att i stället skriva 300 tiondelar dividerat med 7 eller 3000 hundradelar dividerat med 7.

```
3000 | 7
28     428
 20
 14
  60
  56
   4
```

Vi får som resultat 428 hundradelar och lite till. 428 hundradelar skrives 4,28.

Ofta brukar vi nog också resonera ungefär så här: 30 : 7 ger 4 hela (enheter), och så får vi 2 enheter kvar. Dessa 2 enheter gör vi till tiondelar genom att sätta till en nolla och får då 20 : 7 och till resultat 2 tiondelar med 6 tiondelar som rest. Dessa 6 tiondelar gör vi till hundradelar och får 60 hundradelar dividerat med 7, vilket till kvot ger 8 hundradelar och 4 hundradelar som rest. — Det räcker nog att en gång gå igenom detta och sedan öva, varvid man endast behöver komma ihåg att sätta ut decimalkomma, då det är slut med enheterna ("de hela") i dividenden, och att för varje gång sätta till en nolla.

Huvudräkningsuppgifter av typen 0,0273 : 0,007 kan eleverna utan svårighet tillverka, men värre blir det, om divisorn skall innehålla två eller flera värdesiffror. Har vi något så när gott om tid, går det bra att låta varannan elev på en rad genom att multiplicera två decimalbråk skaffa fram uppgifter (med produkten som dividend och ena faktorn som divisor) och låta de återstående utföra divisionerna. Är det ont om tid, får vi ta till lärobokens uppgifter, om det finns så många, att de räcker både till övning i skolan och till hemuppgifter.

Här kommer vi nu också till *avkortningen*, som inte sällan ställer till trassel långt upp i skolan. Uppgifter med en värdesiffra i divisorn kan man skriva upp utan någon som helst förberedelse. Hur räkningen utföres, bör sägas tydligt, steg för steg, i åtskilliga exempel, innan eleverna får sätta i gång att räkna. Det passar inte att sitta och räkna i böckerna då. Här är "radräkningen" alldeles särskilt att föredraga. Ex. 2,7 : 7 = 0,3857. Den räkning, som bör *sägas* ut, blir: 7 i 2 går 0 ggr; 7 i 27 går 3 ggr; 7 i 60 går 8 ggr; 7 i 40 går 5 ggr; 7 i 50 går 7 ggr.

Har vi nu kommit överens om att lämna svaret med 4 decimaler, blir nästa tanke så: 7 · 7 är 49, men 7 · 8 är 56. 49 ligger närmare 50 än 56. Alltså bör fjärde siffran vara 7.

Som omväxling i det här arbetet kan vi låta (helst) 8 st elever på tavlan räkna ut 3,1 : 2; 3,1 : 3, . . . ända till 3,1 : 9 eller något liknande. Det gäller då att undersöka, när divisionen går jämnt upp, när man får ett periodiskt decimalbråk och hur många siffror man får i perioden.

Uträkning visar genast, att divisionen går jämnt upp, då divisorn endast innehåller tvåor eller femmor eller bådadera som faktorer. Vid division med 3, 6 och 9 får man snabbt ett periodiskt decimalbråk med ensiffrig period. Endast vid division med 7 får man en lång (sexsiffrig) period.

Den lärare, som finner, att tiden räcker, och som vill öva sina elever samtidigt på multiplikation och division i decimalbråk, på metersystemet och på att uttrycka sina tankar, kan använda exempel av nedanstående art.

*Ex. 1.* Uttryck i kvadratmeter 0,25 m · 0,25 dm. Därvid tänker vi på en rektangel med sidorna 200 mm och 25 mm. Ytan blir 5000 mm² eller 50 cm² eller 0,005 m².

*Ex. 2.* 0,3 m · 0,4 dm · 0,5 cm. Här tänker vi på en låda med kantlinjerna t. ex. 3 dm, 0,4 dm och 0,05 dm. Räkningen blir: 4 ggr 5 är 20 och 3 ggr 20 är 60. Antalet decimaler är 3, varför volymen blir 0,060 dm³ eller 0,000 06 m³.

*Ex. 3.* $\frac{0{,}0276\ \text{m}^3}{0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}3\ \text{dm}} = \frac{27\,600\ \text{cm}^3}{20\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm}} = \frac{27\,600\ \text{cm}^3}{60\ \text{cm}^2}.$

Vår fråga blir i detta fall: Hur stor är höjden i en låda, vars basyta är 60 cm² och vars volym är 27 600 cm³? Vi får lätt, att höjden är 460 cm.

*Ex. 4.* $\frac{0{,}0276\ \text{m}^3}{0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}3\ \text{dm} \cdot 0{,}2\ \text{cm}} + \frac{1{,}95\ \text{kp}}{0{,}015\ \text{hp}}$

$$\frac{27\,600\ \text{cm}^3}{20\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm} \cdot 0{,}2\ \text{cm}} + \frac{19\,500\ \text{dp}}{15\ \text{dp}} = \frac{27\,600}{12} \cdot \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^3}$$

$$\frac{19\,500}{15} = 2\,300 + 1\,300 = 3\,600$$

Sista uppgiften har medtagits för att belysa, att kvoten mellan två storheter, som är uttryckta i samma sort, är lika med kvoten mellan deras mätetal, och samtliga uppgifter dessutom med tanke på det värde, som arbete med sorter har vid fysikstudierna hela skolan igenom.

## ALLMÄNNA BRÅK

### Förlängning och förkortning

Som väl varje lärare med någon erfarenhet vet hör begreppen *förkortning* och *förlängning* till de svåra i räkningen. Det är därför skäl att lite då och då i realskolans alla klasser repetera deras innebörd. För att inskärpa den viktiga regeln, att *samma faktor måste* finnas i både täljare och nämnare, om det skall vara möjligt att förkorta, kan man t. ex. skriva:

$$\frac{54}{99} = \frac{9 \cdot 6}{9 \cdot 11} = \frac{6}{11} \text{ i stället för } \frac{\overset{\text{6}}{\cancel{18}}\ \text{[illegible]}}{\underset{\text{11}}{\cancel{33}}}$$

$$\frac{\overset{6}{\text{[illegible]}}}{\underset{11}{\cancel{99}}} = \frac{\text{[illegible]}}{11} \text{ eller kanske rentav}$$

Man skulle då åtminstone slippa något av det otrevliga kludd, som ofta förekommer i detta sammanhang. Själv tillåter jag inte ”kluddförkortning”. Det får inte bli några mer eller mindre — oftast mer — oläsliga sifferpyramider. Det tycks mig inte vara något som hindrar att man omedelbart skriver

$$\frac{54}{99} = \frac{\text{[illegible]}}{11} \text{ (utan kludd).}$$

I regel är det ju så, att sedan det i läroboken omtalats, hur ett visst slags uppgifter skall behandlas, lämnas det ett stort antal exempel av samma slag till övning. Det kan då tänkas, att eleverna sättes att för sig själva räkna igenom hela raden av dessa uppgifter.

Att på så sätt kanske på en gång förbruka övningsmaterialet kan inte gärna vara lämpligt. I stället kan vi använda större delen av lärobokens uppgifter till hemläxor *men* på varje avdelning lämna ett så stort antal, att vi då och då skall kunna stoppa in en uppgift från ett för länge sedan behandlat område i hemläxan. Det brukar vara mycket vanligt mot vårterminens slut, att vi i klassen undersöker, om det på det ena eller andra området finns någon uppgift kvar, som inte varit given som hemläxa. När läsåret är slut, brukar vi något så när ha hunnit igenom de uppgifter, som ingår i kursen.

Men om man nu i en klass sysslar med t. ex. förkortning och läroboken har en hel lång rad sådana uppgifter, så kan det vara skäl att *lägga till något nytt* till det moment, som just övas. Nu vill ju jag gärna som ovan sagts ha huvudparten av bokens uppgifter till hemläxor. Övningsuppgifter kan vi så göra själva, och i denna tillverkning kan man få in flera lustbetonade moment.

*För det första:*

Om eleverna själva får tillverka sådana uppgifter, måste läraren först tala om, hur det skall gå till, t. ex. så här: Ni kan bestämma er för att bråket skall kunna förkortas med 6. Då skriver Ni först upp ett bråk alldeles på måfå, låt oss säga $\frac{236}{377}$. Om det nu skall gå att förkorta med två, måste vi ha jämna tal både i täljare och nämnare. Vi ändrar därför nämnaren till 376. Men så måste siffersumman i täljaren liksom också i nämnaren vara en multipel av 3. I täljaren får vi siffersumman till 11. Då ändrar vi trean till en fyra. I nämnaren blir siffersumman 16, och där få vi t. ex. skriva 276. Vår uppgift blir då $\frac{246}{276}$. Den som skall förkorta, tänker på sina regler och skriver t. ex.:

$$\frac{246}{276} = \frac{6 \cdot 41}{6 \cdot 46} = \frac{41}{46} \text{ eller endast } \frac{246}{276} = \frac{41}{46}$$

*För det andra* kunde det vara roligt att låta barnen på en bänkrad få skriva bråk utan att tänka sig för alls och då med minst tresiffriga tal i både täljare och nämnare. Om det t. ex. är 6 elever, som skriver uppgifter, kan det ju hända, att det i något fall blir en uppgift, som kan klaras med hjälp av delningsreglerna, men de flesta blir nog av typen $\frac{418}{1235}$. De flesta eleverna blir antagligen ställda, och det är troligt, att klassen undrar, hur man skall reda upp den här frågan. Det är inte gärna möjligt, att barnen skall kunna klara det utan någon hjälp; läraren måste nog själv träda till.

Skall vi kunna förkorta $\frac{418}{1235}$, måste man också kunna förkorta $\frac{1235}{418}$, men det är ett oegentligt bråk, och det kan vi skriva om till $2\frac{399}{418}$. (Har man lite övning ser man, att 19 är den enda möjliga divisorn.) Här kan vi återigen säga: Skall det gå att förkorta $\frac{399}{418}$, då måste man kunna förkorta $\frac{418}{399}$ som återigen kan skrivas som ett blandat tal, nämligen $1\frac{19}{399}$ och nu måste var och en förstå, att 19 är det enda tal man kan tänka på. Genom division finner vi, att $418 = 22 \cdot 19 = 2 \cdot 11 \cdot 19$ och att $1235 = 65 \cdot 19 = 5 \cdot 13 \cdot 19$ och alltså

$$\frac{418}{1235} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 19}{5 \cdot 13 \cdot 19} = \frac{22}{65}$$

Läraren får naturligtvis tala om för barnen, att man för att få en sådan uppgift endast har att skriva ett bråk med jämförelsevis stora primtalsfaktorer i både täljare och nämnare och med åtminstone en faktor gemensam. Den som är i tur att skriva en sådan uppgift på tavlan, kan ju i förväg få sätta ihop den.

$$Ex.\ \frac{19 \cdot 73}{23 \cdot 73}, \quad \frac{13 \cdot 43}{29 \cdot 43}; \quad \frac{29 \cdot 97}{53 \cdot 97}, \quad \frac{11 \cdot 101}{17 \cdot 101}$$

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 73}{3 \cdot 4 \cdot 73}, \quad \frac{2 \cdot 3 \cdot 43}{5 \cdot 5 \cdot 43}, \quad \frac{2 \cdot 9 \cdot 97}{6 \cdot 9 \cdot 97}, \quad \frac{3 \cdot 6 \cdot 101}{4 \cdot 5 \cdot 101}$$

Om inte läraren tror på barnens förmåga att tillverka sådana uppgifter, kan han själv i förväg utan svårighet (ev. med hjälp av Eratostenes' såll eller tabeller över uddatals upplösning i primfaktorer i Hedström—Rendahls tabeller) åstadkomma hur många som helst.

Denna metod att söka en gemensam faktor till två tal (Euklides' algoritm) ger ju en god övning på övergång från oegentliga bråk till blandade tal, men det är naturligt, att detta övas endast om man har gott om tid eller vid något tillfälle, då det kan vara lämpligt med omväxling i arbetet.

## Allmänt om addition

Även vid behandling av *addition i bråk* bidrar säkert en viss åskådlighet vid genomgången till att lättare ge eleverna en riktig uppfattning och ett snabbare inlärande. Förslagsvis skulle vi kunna tänka oss genomgången på följande sätt:

Nu skall vi ställa oss som uppgift att räkna ut

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \text{ eller en tredjedel plus en fjärdedel,}$$

men vi börjar väl med en varg och ett lamm. Vad får vi, om vi lägger ihop dem? Ur de många svaren: "Två djur, två däggdjur, två fyrfotadjur", kan vi konstatera, att det går att utföra additionen, så snart vargen och lammet blivit "uttryckta i samma sort".

Vi måste alltså nu uttrycka tredjedelen och fjärdedelen i samma sort. Men vi skulle kanske göra klart för oss, vad det är för en tredjedel, ty en tredjedel måste ju alltid vara en tredjedel av någonting. Kom med några förslag!

Slutet på denna terminologiska diskussion får väl bli, att läraren säger något i den här stilen: Skriver vi endast $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ så får vi nog tänka oss en tredjedels enhet och en fjärdedels enhet, men vill vi ha något att se på, så får vi väl ta ett tredjedels ark plus ett fjärdedels ark.

Med hjälp av två lika stora ark, som inför eleverna vikes och rives, det ena i tre delar och det andra i fyra delar, illustreras problemet ytterligare. Om vi nu försöker lägga ihop dem,

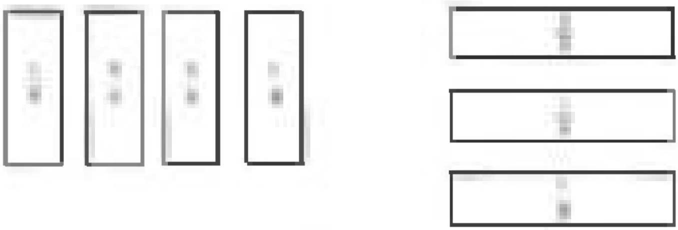


Fig. 5a.

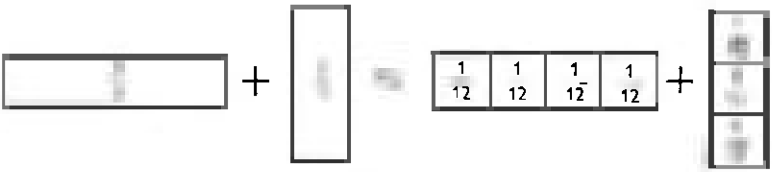



Fig. 5b.

t. ex. hålla dem bredvid varandra på tavlan, så kan vi väl säga, att vi inte kan göra det, men om vi klipper sönder tredjedelsarket i fyra lika delar och fjärdedelsarket i 3 lika delar, så blir alla delarna lika, och det är lätt att räkna ihop dem till sju tolftedels ark. Man kan vidare fästa arkdelarna med häftstift på svarta tavlan eller på en medförd pappskiva.

Så får läraren ge flera enkla exempel, tala om förlängning och M.G.D.[1] m. m., tills det kan bli tid att låta barnen själva tillverka enkla uppgifter och räkna ut dem.

## Addition och subtraktion

I $2^5$ skall ju nu för tiden additionen i bråk börja. Det viktiga, som här är att lägga märke till, kommer nog bäst fram i ett exempel:

$$\frac{[illegible]}{30} + [illegible]\frac{[illegible]}{35} - [illegible]\frac{[illegible]}{42} + \frac{[illegible]}{21} = \frac{[illegible]}{105}$$

Det tycks vara en utbredd föreställning, att uppgiften bör behandlas så, att man först gör varje term till oegentligt bråk och därefter gör termerna liknämniga, således på följande sätt:

$$[illegible]\frac{17}{30} + 3\frac{18}{35} - [illegible]\frac{19}{42} + \frac{20}{21} = \frac{101}{105} = \frac{77}{30} + \frac{123}{35} - \frac{187}{42} + \frac{20}{21} = \frac{101}{105}$$

Metoden att finna M.G.D. *till nämnarna* varierar nog, men låt oss hålla oss till följande:

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 35 &= 5 \cdot 7 \\ 42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 21 &= 3 \cdot 7 \\ 105 &= 3 \cdot 5 \cdot 7, \text{varav M. G. D.} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 \end{aligned}$$

Så kommer frågan, hur man skall få reda på de tal, med vilka varje bråk skall förlängas. Det är icke ovanligt, att arbetet utföres så här:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 30 \\ \cline{2-2} 210 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 35 \\ \cline{2-2} 210 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 42 \\ \cline{2-2} 210 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 21 \\ \cline{2-2} 210 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 105 \\ \cline{2-2} 210 & 2 \end{array}$$

kanske med den överdriften, att någon av de enklaste divisionerna inte skulle ha skrivits ut.

[1] M.G.D. betyder minsta gemensamma dividenden (till några tal). Minsta gemensamma dividenden till nämnarna förkortas *icke* till M.G.N.

Det är alltså två saker att ta avstånd ifrån: omvandlingen till oegentliga bråk och den bakvända metoden att ta reda på ”förlängningstalen”.

Nej, så här utför vi arbetet:

$$2\frac{17}{30} + 3\frac{18}{35} - 4\frac{19}{42} + \frac{20}{21} - \frac{101}{105} =$$

(Vi räknar först med de ”hela”):

$$= 1 + \frac{17}{30} + \frac{18}{35} + \frac{20}{21} - \frac{19}{42} - \frac{101}{105} =$$

Så söker vi som förut M.G.D. till nämnarna, *men* vi multiplicerar inte faktorerna; det är onödigt, åtminstone ännu så länge. Vi har alltså M.G.D. framför oss: M.G.D. $= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 35 &= 5 \cdot 7 \\ 21 &= 3 \cdot 7 \\ 42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 105 &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Redan i klass 6 får barnen själva säga (upprepad övning): Om jag betraktar första nämnaren $(2 \cdot 3 \cdot 5)$ och jämför den med M.G.D., ser jag, att faktorn 7 finns i M.G.D. men inte i nämnaren; alltså måste jag förlänga bråket med 7, etc. Vi kommer då till

$$= 1 + \frac{119 + 108 + 200 - 95 - 202}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = 1 + \frac{427 - 297}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} =$$

$$= 1\frac{130}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = 1\frac{10 \cdot 13}{10 \cdot 21} = 1\frac{13}{21}$$

Det var tydligen onödigt att multiplicera ihop faktorerna i M.G.D. Vi behövde aldrig ha reda på dess värde.

För att belysa olämpligheten av att först göra alla termer till oegentligt bråk kan man måhända vid något tillfälle låta den elev, som har den ovanan, räkna ut ett exempel av typen:

[illegible]

$$= \frac{20}{186} = \frac{10}{93}$$

Alla här nämnda operationer måste slutligen flitigt övas, på lektioner och provräkningar, *hela skolan igenom.*

## Multiplikation och division

Från figurerna till det lilla, som är sagt om addition i bråk, får vi fram, att $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{4}$ är $\frac{1}{12}$ och att $\frac{1}{4}$ av $\frac{1}{3}$ också är $\frac{1}{12}$. I övrigt är R.W.F:s framställning så klar och tydlig, att jag endast vill framhålla vikten av att eleverna lite då och då (vid huvudräkningsövningar i hela skolan) får med egna ord säga ut innehållet i regeln: Produkten av ett antal bråk är ett nytt bråk, vars täljare är produkten av de givna bråkens täljare och vars nämnare är produkten av de givna bråkens nämnare.

I god tid, innan vi har för avsikt börja genomgången av division, bör man icke endast gå igenom utan även öva begreppet ”inverterat värde” av hela tal, blandade tal, decimalbråk osv.

Inledning till division mellan två bråk kan sedan ske ungefär så här: Vi skriver på svarta tavlan:

20 äpplen : 4 äpplen | 20 äpplen : 4 pojkar

och ställer till klassen frågan: Nu skall vi hitta på texter till dessa två uppgifter, och de skall vara sådana, att vi skulle kunna teckna lösningarna just så, som det står skrivet på tavlan. Kom med förslag! Efter (som man får hoppas) livligt deltagande från elevernas sida kommer vi fram till exempelvis:

20 äpplen skall delas upp i högar med 4 äpplen i varje. Hur stort blir antalet högar?

20 äpplen skall delas lika mellan 4 pojkar. Hur många äpplen får varje pojke?

Svaret på första frågan blir: Man får 5 högar (burkar, fat etc.), eller bättre: Antalet högar (burkar, fat) blir 5, och på den andra: Varje pojke får 5 äpplen eller ev.: Det blir 5 äpplen per pojke.

Men nu skall vi byta ut sorterna! Eleverna får komma med förslag, och på tavlan får vi kanske något i den här stilen:

$20 \text{ äpplen} : 4 \text{ äpplen} = 5;$ $\quad 20 \text{ äpplen} : 4 \text{ pojkar} = 5\,\frac{\text{äpplen}}{\text{pojke}}$

$20 \text{ päron} : 4 \text{ päron} = 5;$ $\quad 20 \text{ päron} : 4 \text{ flickor} = 5\,\frac{\text{päron}}{\text{flicka}}$

$20 \text{ fåglar} : 4 \text{ fåglar} = 5;$ $\quad 20 \text{ fåglar} : 4 \text{ burar} = 5\,\frac{\text{fåglar}}{\text{burar}}$

etc. etc.

Nu skall vi försöka få fram tankegången, som ligger bakom det vi har skrivit. Till vänster får vi: Hur många *gånger innehålles* 4 äpplen i 20 äpplen? Svaret blir oföränderligen 5 (gånger), alltså ett tal, fullkomligt oberoende av sorten.

Till höger frågar vi: Om 20 äpplen *delas* i 4 lika delar, hur många äpplen får vi i varje del? Sorten i svaret (5 äpplen) ändras med sorten i uppgiften.

Frågan i första fallet kan bytas ut mot: Vilket är förhållandet mellan 20 äpplen och 4 äpplen? och svaret, d. v. s. det sökta förhållandet, är just kvoten (rationen) vid vår innehållsdivision. — Någon förvånar sig kanske över att jag tagit med ordet ration (jfr Möllers algebra senare delen, definition på geometriska serier), men har man i många år i andra, tredje och fjärde ringen på realgymnasiet på frågan, vad ett rationellt tal är för någonting, sällan eller aldrig fått ett korrekt svar, är det naturligt, att man vill införa ordet på ett tidigt stadium.

Ytterligare diskussion måste här följa, t. ex.:

Ett förhållande säger, hur många gånger en viss storhet är större än en annan storhet av samma slag. Det blir då gärna resonemang om uttrycket ”större än” jämfört med ”så stor som”. Det är ju inte absolut säkert, att alla människor anser, att ”två gånger så stor som” betyder detsamma som ”två gånger större än”.

Så kommer vi då till vår division i bråk. Vi tar som exempel:

$$\frac{4}{5} : \frac{7}{9}$$

Att det här måste bli fråga om en innehållsdivision, är nog klart för en och var. Båda storheterna kan ju sägas vara uttryckta i enheter. Men vi kan också ordna så, att vi får olika sorter sålunda:

4 femtedelar : 7 niondelar.

Nu förstår varje elev, att sorterna är femtedelar och niondelar, men det brukar inte vara någon svårighet att få dem till att komma med förslaget, att vi skall förvandla storheterna till en och samma sort och få:

36 fyrtiofemtedelar : 35 fyrtiofemtedelar.

Men nu skall vi nog inte fråga: ”Hur många gånger, etc.” utan: ”Vilket är förhållandet (kvoten, rationen) mellan 36 fyrtiofemtedelar och 35 fyrtiofemtedelar” och resonera lite om att vi nyss har funnit, att kvoten mellan två storheter som är uttryckta i samma sort är lika med kvoten mellan deras mätetal (så får vi orsak att tala om mätetal också).

När vi så finner:

$\frac{4}{5} : \frac{7}{9} = \frac{36}{35}$, bör vi ändra om det till

$\frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{7}$, varmed regeln för division i bråk är verifierad och bör uttryckas på svenska av eleverna själva: Om man vill dividera ett bråk (helt tal) med ett annat bråk (helt tal, decimalbråk), får man resultatet genom att multiplicera dividenden med den inverterade divisorn (divisorns inverterade värde).

Om nyttan av att använda begreppen *delningsdivision* och *innehållsdivision* är nog meningarna delade. För egen del har jag funnit det vara en fördel att på det stadium det här är fråga om använda dem och då alldeles särskilt innehållsdivisionen — så som ovan skett — då det gäller att klargöra, hur division i decimalbråk och allmänna bråk går till.

## Några speciella uppgifter i bråk

Bland övningarna på division i allmänna bråk kan man ta upp följande: Vi skriver:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

och frågar klassen, hur mycket det kan bli. Åtminstone några i klassen listar nog ut, att det är meningslöst att skriva så. Uttrycket tycks ju föreställa ett bråk, men man kan inte avgöra, vad som skall vara täljare och nämnare. Vi låter eleverna komma med sina förslag, hur svårigheten skall lösas.

Om nu någon skriver $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$, så förstår vi, att $\frac{2}{3}$ är täljare och $\frac{4}{5}$ nämnare. (Öva med $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$!)

Men är det någon, som skriver så här: $\begin{array}{c}2\\ \hline 3\\ \hline 4\\ \hline 5\end{array}$

så är det i alla fall inte möjligt att räkna uppgiften. Vi måste göra ett av de små bråkstrecken större, och får antingen

$$\dfrac{2}{\dfrac{3}{\dfrac{4}{5}}} \quad \text{eller} \quad \dfrac{2}{\dfrac{\dfrac{3}{4}}{5}}$$

eller skrivet på annat sätt $2 : \left(3 : \dfrac{4}{5}\right)$ och $2 : \left(\dfrac{3}{4} : 5\right)$

Tydligen kan det givna (meningslösa) uttrycket ge upphov till 5 uppgifter:

$$\dfrac{2}{\dfrac{3}{\dfrac{4}{5}}} \qquad \dfrac{2}{\dfrac{\dfrac{3}{4}}{5}} \qquad \dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{4}{5}} \qquad \dfrac{\dfrac{2}{\dfrac{3}{4}}}{5} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{2}{3}}{4}}{5}$$

Har vi fått fram dessa 5 möjligheter, låter vi 5 elever räkna på tavlan. Då får vi:

$$\frac{8}{15} \qquad \frac{40}{3} \qquad \frac{10}{12} \qquad \frac{8}{15} \qquad \frac{2}{60}$$

När vi så klarat det hela, bör det vara ett lämpligt tillfälle att framhålla för eleverna, hur viktigt det är att skriva ordentligt, att skriva (huvud)bråkstrecket mitt på raden etc.

Att tillverka sådana uppgifter kan inte vara någon svårighet, varför en stunds övning genom t. ex. radräkning kan vara befogad både i klass 6 och sedermera i klasserna 7, 8 och 9.

En uppgift av följande utseende är ytterst enkel att så sätt utförda arbetet blir normalt mera omfattande, än om man arbetar så, som ovan skett i det anförda exemplet, och därtill kommer ett merarbete för läraren att söka reda på alla småräkningarna. Vilket man väljer, är kanske en smaksak, men det kan också bero på att läraren från sin egen skoltid blivit van att gå den ena vägen (och då väl i regel den med delräkningar). Jag vill emellertid livligt rekommendera den i exemplet angivna vägen.

Som ytterligare övning på division i bråk eller om man så vill på bråks förlängning utöver förut angivna kan vi använda följande:

$$\frac{2}{3} \text{ kan skrivas } \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{\frac{2 \cdot 7}{3}}{7} = \frac{\frac{14}{3}}{7} = \frac{4\frac{2}{3}}{7}$$

eller på vanlig svenska: $\frac{2}{3}$ är $4\,\frac{2}{3}$ sjundedelar. På så sätt kan vi förvandla ett givet tal till en godtycklig sorts delar. De enda delar, som vi senare kan få användning för, är hundradelar vid procenträkning, och därför övar vi mest med det. Låt oss ta några exempel:

$$\frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{\frac{300}{4}}{100} = \frac{300}{4} \text{ hundradelar} = 75 \text{ hundradelar} = 75\,\%.$$

$$\frac{5}{7} = \frac{500}{7} \text{ hundradelar} = 71\frac{3}{7}\,\%.$$

Detta kan vara både roligt och av ett visst värde, men nyttigare är säkert övningen att förvandla ett givet procenttal till allmänt bråk, t. ex. $2\frac{1}{3}\,\% = \frac{7}{300}$, som flitigt måste övas, lämpligen som huvudräkning.

## REGULA DE TRI

Hör du Anders, vet du på ett ungefär, vad man får ge för kaffet nu för tiden? frågar vi en elev, och Anders svarar kanske: 12 kr. Vi får hoppas, att många av Anders' kamrater viftar och vill säga, väl inte att kaffet kostar 7 kr, men att man måste tala om, hur mycket man får för 12 kr, att det är meningen, att man får 1 kg för 12 kr. Så småningom ordnar vi det hela så, att vi får uppgiften:

$$12 \frac{\text{kr}}{\text{kg}}$$

skriven på tavlan och låter eleverna försöka tala om, vad de får ut av detta.

Om vi, innan eleverna får komma till tals, skriver:

$$12 \frac{\text{kr}}{\text{kg}} = \frac{12 \text{ kr}}{1 \text{ kg}}$$

blir det kanske lättare att få fram, vad vi vill.

Om vi läser nämnaren först och täljaren sedan, så får vi:

1 kg kaffe kostar 12 kr och tvärtom
för 12 kr får vi 1 kg kaffe.

Men vi kan också förlänga vårt bråk och få t. ex.:

$$\frac{12 \text{ kr}}{1 \text{ kg}} = \frac{36 \text{ kr}}{3 \text{ kg}} = \frac{1{,}32 \cdot 12 \text{ kr}}{1{,}32 \text{ kg}} = \frac{15{,}84 \text{ kr}}{1{,}32 \text{ kg}}$$

Om vi nu skall göra oss en liten räkneuppgift, räcker det inte bara med t. ex. uppgiften $\frac{36 \text{ kr}}{3 \text{ kg}}$; vi måste ha något mera, och nu får eleverna åter komma med förslag. Bengt föreslår kanske, att vi skall fråga, hur mycket 7 kg kaffe kostar, och Carin hur mycket kaffe man får för 15 kr.

Vi antecknar de två förslagen t. ex. så här:

a) $\frac{36 \text{ kr}}{3 \text{ kg}}$, 7 kg b) $\frac{36 \text{ kr}}{3 \text{ kg}}$, 15 kr.

Så får Dagmar och Eva sätta text till de två uppgifterna så här:

a) Om 3 kg kaffe kostar 36 kr, hur mycket kostar 7 kg?

b) Om 3 kg kaffe kostar 36 kr, hur mycket kaffe får man för 15 kr?

Nu finns det i båda fallen 3 uppgifter, och vi ber Folke tala om, vad det är för uppgifter.

Jo! I a) har vi 2 uppgifter om kg (3 kg, 7 kg) och en om kr (24 kr) och i b) har vi 2 uppgifter om kr (24 kr, 15 kr) och en om kg (3 kg). I bägge fallen är alltså 3 uppgifter givna, och vi söker en fjärde. För att få reda på denna fjärde storhet, använde man förr ofta en mekanisk räkneregel, som går under namnet "Regeln om de tre" eller *Regula de tri*, d. v. s. den regel, som anger, hur man av de tre givna storheterna skall få reda på den fjärde.

Den i vår uppgift a) efterfrågade storheten skall uttryckas i kronor, och därför måste vårt arbete så att säga sluta med kronor, och när vi skriver vår givna uppgift, skall vi börja med kg. Nu skall vi se, om Gunnel har förstått, och så får Gunnel skriva på tavlan:

3 kg kaffe kostar 36 kr
1 kg kaffe kostar 12 kr
7 kg kaffe kostar 84 kr

När Gunnel skrivit första raden, får vi fråga, om hon förstår, vad vi skall skriva i andra raden. Vi tror, att hon är med, och så får vi andra raden.

Det är möjligt, att Gunnel klarar tredje raden själv; annars får någon kamrat hjälpa henne.

Så kommer b), och här efterfrågas kg, och nog kan man åtminstone försöka fråga klassen, hur man denna gång lämpligen skall skriva. Det är troligt, att någon, låt oss säga Hans, viftar och vill skriva, och det kan hända, att vi omedelbart får:

För 36 kr får vi 3 kg kaffe

för 1 kr får vi $\frac{3}{36}$ kg kaffe

för 15 kr får vi $\frac{1 \cdot 15}{12}$ kg kaffe $= \frac{15}{12}$ kg kaffe.

*Blir det så, ja, då har Hans förstått, att vi börjar med den sort, om vilken det finns två uppgifter, och att man alltid måste, som det ofta uttryckes, först gå till enheten.*

Men här har vi nu haft mycket enkla tal, och för den skull gör vi några uppgifter till, men här får det på detta avsnitt räcka med en, som är förberedd ovan.

Vi säger t. ex.: Om 1,32 kg kaffe kostar 15 kr 84 öre, hur mycket kaffe får vi för 7,20 kr? Om vi låter Inga skriva, så får vi kanske:

För 15,84 kr får man 1,32 kg kaffe.

Men när det sedan på nästa rad blir fråga om hur mycket man får för 1 kr, då kanske inte Inga kommer längre, och då får vi nog hjälpa till: Om det är svårt med talet 15,84, så tänk dig i stället 2 kr. Hur låter frågan då? — Det vore underligt om inte Inga begriper, att hon skall dividera 1,32 kg med 2, och att hon denna gång skall dividera 1,32 kg med 15,84.

Alltså: För 1 kr får man $\frac{1{,}32}{15{,}84}$ kg kaffe.

Om Inga har svårigheter med tredje raden, får hon återigen tänka sig, att 7,2 bytes ut mot 2, och då bör hon kunna lista ut, att tredje raden blir:

För 7,2 kr får man $\frac{7{,}2 \cdot 1{,}32}{15{,}84}$ kg kaffe.

Förenkling av uttrycket $\frac{7,2 \cdot 1,32}{15,84}$ ger $\frac{0,6 \cdot 1,32}{1,32} = 0,6$, varefter svaret blir: För 7,2 kr får man 0,6 kg kaffe.

Denna tanke — att byta ut besvärliga tal mot enkla hela tal (jag brukar använda 2) — återfinnes i *Metodiska anvisningar* III 1[5]. 6; man vill också livligt instämma i det, som där säges om nyttan av detta utbyte längre fram i skolan.

Så låter vi en hel rad i klassen läsa igenom en uppgift var av dem som läroboken har, så att varje problem läses på två sätt. Vi börjar med några uppgifter i R.W.F: I:

| | |
|---|---|
| A 910, B 510 | 5 kg ost kostar 16,25 kr eller<br>För 16,25 kr får man 5 kg ost. |
| A 911, B 511 | På 9 timmar förbrukas 72 l bensin eller<br>72 l bensin räcker 9 timmar. |
| A 912, B 512 | För 852 m² betalas en tomthyra av 298,20 kr<br>eller För 298,20 kr får man hyra 852 m² mark. |

Att finna text till dessa uppgifter är en god övning i svenska, som man inte gärna bör undvara.

När man hållit på en liten stund och hunnit med låt oss säga 6 elever, kan vi låta 5—6 på en gång gå fram till tavlan och skriva de följande uppgifterna.

Sedan man övat detta tillräckligt för att våga tro, att klassen är med, är det nog bäst att låta eleverna fullständigt behandla några uppgifter och därvid kräva, att det blir så god svenska som möjligt. Vi tar t. ex.:

R.W.F.: IA 915, IB 515.

För tillverkning av 35 termometrar användes 238 g kvicksilver. a) Hur mycket kvicksilver behövs till 50 sådana termometrar? b) Till hur många termometrar räcker $\frac{1}{2}$ kg?

Det är inte omöjligt, att vi kan få två elever, som utan vidare kan skriva behandlingen av dessa uppgifter.

a) För 35 termometrar erfordras 238 g kvicksilver

,, 1 termometer ,, $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ ,, ,, $= \frac{[illegible]}{[illegible]}$ g kv. s.

,, 50 termometrar ,, $\frac{34 \cdot 50}{5}$ g ,, $= 340$ g ,, ,,

*Svar:* Till 50 termometrar behöver man 340 g kvicksilver.

b) 238 g kvicksilver räcker till 35 termometrar

1 ,, ,, ,, ,, $\frac{35}{238}$

500 ,, ,, ,, ,, $\frac{500 \cdot 35}{238}$ ,,

Uträkning av uttrycket ger $\frac{500 \cdot 5}{[illegible]} = 73\frac{9}{[illegible]}$

**Uppgiften b) ger anledning till** diskussion av två frågor:

1) Det verkar ju något underligt att tala om $\frac{35}{[illegible]}$ termometrar, men då får vi tala om för eleverna, att om vi får något dylikt i ett mellanled, så får vi ta det med ro.

2) En hel del av barnen, för att inte säga allihopa, blir nog förvånade, när de får resultatet $73\frac{9}{17}$ termometrar. Det är säkert nyttigt, att en och annan uppgift av denna art kommer med, så att inte eleverna tror, att en uppgift är felaktigt löst, om man inte får ett heltaligt svar.

Man bör nog inte underlåta att i ett sådant fall som detta fråga, hur mycket kvicksilver som blir över och hur man får reda på det.

Åtskilliga av dessa uppgifter kan behandlas utan användning av någon reguladetrimetod. Även om denna metod är av stor vikt för eleverna i framtiden, t. ex. vid formelhärledningar, godtar vi utan vidare andra metoder.

Låt oss som exempel ta R.W.F.: A 938, B 538. Ett rör, som lämnar 250 l vatten i minuten, fyller en badbassäng på 3 tim 30 min. a) På hur lång tid fylles den av ett rör, som lämnar 300 l i minuten? b) Hur många liter i minuten bör ett rör, som skall fylla bassängen på $2\frac{1}{2}$ tim, lämna?

Den naturligaste vägen torde här vara att först räkna ut, hur mycket bassängen rymmer. Vi finner lätt, att rymden är $250 \cdot 210$ l (= 52500 l) och den sökta tiden i minuter i a) är $\frac{250 \cdot 210}{300} = 175$ samt att den i b) begärda "hastigheten" i l/min är $\frac{250 \cdot 210}{150} = 5 \cdot 70 = 350$.

Om vi räknar uppgiften med reguladetrimetoden, tar den sig ut så här:

I a) efterfrågas tiden, och därför börjar vi med l/min och slutar med minuter.

Om röret lämnar 250 l i min, fylles bassängen på 210 min
" " " 1 l i " " " " $210 \cdot 250$ min
" " " 300 l i " " " " $\frac{210 \cdot 250}{300}$ " =
$= 7 \cdot 25$ min $= 175$ min.

*Svar:* Med ett rör, som lämnar 300 l i min, fylles bassängen på 175 min eller 2 tim 55 min.

I b) efterfrågas "strömningshastigheten" i l/min, och därför börjar vi med tiden.

Om en viss badbassäng skall fyllas på 210 min, måste röret ge 250 l i min.

Om samma badbassäng skall fyllas på 1 min, måste röret ge $250 \cdot 210$ l i min.

Om samma badbassäng skall fyllas på 150 min, måste röret ge $\frac{250 \cdot 210}{150}$ l i min $= 50 \cdot 7$ l i min $= 350$ l i min.

***Svar:*** **Om bassängen skall fyllas på $2\frac{1}{2}$ tim. med ett rör, måste detta lämna 350 l i min.**

## BOLAGSRÄKNING

Med tanke på att åtskilliga av de begrepp vi sysslar med i matematiken berör samhällsfunktioner, som många elever ännu ej känner till, är det här liksom vid genomgång av andra avsnitt lämpligt att ge eleverna det verklighetsunderlag, som är nödvändigt för att matematiken verkligen skall bli en levande kunskap för dem. Exempel ur livet behöver inte saknas.

För att komma in på bolagsräkning frågar vi t. ex. klassen: Vet ni vad ett bolag är för någonting? Det blir säkert många, som vill svara. En säger kanske så här: Jo, det kan ju tänkas, att det är någon som går ute i skogen på sina ägor och finner en sten, som ser ovanlig ut. Han börjar misstänka, att det kan vara något värdefullt och ser efter i bergen däromkring, om han kan hitta mer. Det kanske finns massor, och då skickar han stenen till undersökning, och så får han veta, att det skulle bära sig att bryta malm i berget. Då måste han kanske ha mera pengar, än han själv har tillgängliga, och så måste han skaffa sig kompanjoner. Då blir det ett bolag.

En annan, vars pappa är husägare, föreslår, att några personer satsar pengar för att köpa hus och bilda ett hyresbolag, medan en tredje tänker sig ett bolag för att köpa lotter i ett penninglotteri etc., etc.

Vi kommer överens om att vi nöjer oss med tre bolagsmän A, B och C, som bildar ett hyresbolag.

Så får vi en stunds resonemang om att de tre herrarna måste ha någon, som sköter om husen, som ordnar med reparationer och tar upp hyror m. m. För den uppgiften anställer vi A.

Varför bildar då A, B och C bolaget? Det är säkert inte svårt att få fram, att det är för förtjänstens (vinstens) skull.

När vi funnit en lämplig beteckning på de summor, som bolagsmännen lämnat till bolagskapitalet, får en elev föreslå värden på dessa summor, och vi får på tavlan (de tre första kolumnerna):

| | Tillskott 1) | | Vinst 2) | |
|---|---|---|---|---|
| | i kr | i (bråk)delar | i (bråk)delar | i kr |
| A | 150 000 | $\frac{15}{60} = \frac{3}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | 3 · 3 500 |
| B | 200 000 | $\frac{20}{60} = \frac{4}{12}$ | $\frac{4}{12}$ | 4 · 3 500 |
| C | 250 000 | $\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | 5 · 3 500 |
| Bolags-kapital | 600 000 | $\frac{12}{12}$ | $\frac{12}{12}$ | 3) 42 000 |

Tabellen bör färdigställas successivt, kolumn efter kolumn, allteftersom behovet inställer sig. (Givetvis är en tabell inte nödvändig, men arbetet går säkert lättare med dess hjälp.)

Men om de tre herrarna vill jämföra sina insatser, går det bäst genom att ange, hur stor bråkdel av bolagskapitalet var och en har tillskjutit, och det möter nog inga svårigheter att få barnen att förstå kolumnen med överskriften "i (bråk)-delar".

Så får vi återigen en stunds resonemang, och den gången blir frågan, vad hyresinkomsterna (bruttoinkomsterna) skall användas till. Säkert klarar barnen upp att man med dem måste betala reparationer, skatter, belysning i trappor, vatten och renhållning och så herr A, som har ansvaret inför bolagskamraterna. Sedan man minskat bruttoinkomsten med summan av dessa utgifter, får man reda på nettoinkomsten (nettovinsten), som bolagsmännen får dela allt efter sina tillskott.

Om vi nu fortsätter vår tabell och tillfogar ”vinst” och ”i bråkdelar”, bör klassen kunna säga, att i den kolumnen skall stå detsamma som i den föregående. Nu har vi endast sista kolumnen kvar. Vi sätter som överskrift kr (d. v. s. vinst i kr), och vi kan säkert omedelbart be en elev fylla i den kolumnen, men då måste vi först komma ihåg att låta eleverna bestämma, hur stor nettovinsten skall vara och skriva den under strecket.

Även om det är lite med 7 % vinst, godtar vi ett förslag om en vinst på 42 000 kr. Med nettovinsten menar vi då återstoden av inkomsten, sedan alla utgifter gäldats, även ersättningen till A. Det måste naturligtvis också resoneras om huruvida denna ersättning till A skall utgå med en viss summa eller med en viss procent av bruttovinsten eller av den vinst, som återstår, sedan alla utgifter betalats utom lönen till A.

Därtill kommer också arbete med att sätta text till uppgiften.

Här ifråga om bolagsräkningen kommer tydligt fram, vad som förut sagts (sid. 57), att man måste variera uppställningen efter uppgiftens art. Vi tar t. ex. uppgiften R.W.F.: A Ex. 961, B 561:

A och B utför ett arbete. A arbetar därvid 28 timmar och B 22 timmar. Hur mycket skall var och en ha, om betalningen är 100 kr och de ha samma timpenning?

Här gäller det att finna nya överskrifter, t. ex.:

| | Utfört arbete | | Avlöning |
|---|---|---|---|
| | i ”timverken” | i bråkdelar | i kr |
| **A** | 1) 28 | 4) $\frac{28}{50}$ | 7) $\frac{28 \cdot 100}{50} = 56$ |
| **B** | 2) 22 | 5) $\frac{22}{50}$ | 8) $\frac{22 \cdot 100}{50} = 44$ |
| A och B | 3) 50 | 1 | 6) 100 |

Räkningarna utföres i den ordning siffrorna 1), 2) etc. anger.

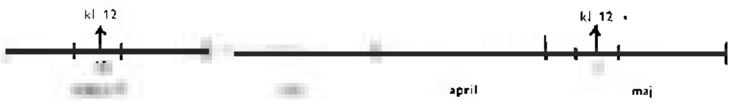
Slutligen är det väl endast att tillägga, att man inte nödvändigt måste lösa dessa uppgifter med tabellarisk uppställning. De kan naturligtvis lika gärna lösas med ett vanligt logiskt, rad för rad utskrivet, resonemang, som i sak ändå inte innehåller annat än tabellerna ovan. Vad man bestämt måste avråda från, är varje slag av lösning, som inte ordentligt klarlägger problemet.

## RÄNTERÄKNING

Ränteräkningen behandlas nog i läroböckerna i regel — åtminstone i R.W.F. — så ingående, att föga mer är att säga därom.

När det gäller dylika problem, hör man ofta sägas, att man skall komma ihåg, att banken inte ger ränta insättningsdagen men väl uttagningsdagen. Som man väl i allmänhet inte vill ge eleverna en regel utan att ge något skäl, kan följande resonemang ha sitt värde.

Vi låter insättningsdagen vara den 15 februari och uttagningsdagen den 7 maj och vill räkna ut antalet räntedagar. Då ritar vi en tidslinje, innehållande månaderna febr.—maj, och tar särskilt stort utrymme för insättnings- och uttagningsdagarna. (Obs. att datum- och månadsbeteckningarna sättes *mellan* strecken på tidslinjen.)




Så frågar vi klassen: ”Vilka tider är det öppet på banken?” Svaret kan uttryckas så, att banken är öppen 2—3 timmar före 12 och likaså efter 12. Om vi sätter in pengar i banken, måste det ske ungefär kl. 12, och det borde vara rättvist, att vi får ränta fr. o. m. kl. 12 den 15 februari till kl. 12 den 7 maj. Men det är ju onödigt besvärligt att räkna så. Det blir enklare. om man flyttar eftermiddagen den 15 februari till eftermiddagen den 7 maj. Med den tankegången får vi ingen ränta insättningsdagen men däremot hela uttagningsdagen.

Nu är det ju så, att bankerna räknar med en valutadag (dagen efter insättningen), under vilken banken inte ger ränta, varför antalet räntedagar, då i räkneuppgifter pengar tänkas insatta i bank, egentligen blir ett mindre, än vi räknar med. Även om skolans beräkningssätt inte överensstämmer med praktikens, är ju det viktiga, att man alltid vid undervisningen räknar på samma sätt, och det torde inte heller finnas någon lärobok, där man tar hänsyn till valutadagen. För den elev, som får anställning i bank, kan det ingenting betyda, dels därför att ändringen är så enkel, dels därför att man väl numera i bankerna använder tabeller (eller maskiner). (Jfr Otto Eneroth: Procent- och ränteräkning i skolan och praktiken, Elementa årg. 9 sid. 193.)

Det kan vara nyttigt att vänja eleverna att alltid anteckna de förekommande storheterna, t. ex. så här:

Kapital i kr = 528
Räntefot i procent = $3\frac{1}{2}$
Insättningsdag: 23 jan.
Uttagningsdag: 8 nov.
Tid i dagar = 285

$$\text{Ränta i kr} = \frac{528 \cdot 7 \cdot 285}{200 \cdot 360} = \frac{264 \cdot 7 \cdot 57}{100 \cdot 72} = \frac{264 \cdot 7 \cdot 19}{100 \cdot 24} =$$
$$= \frac{11 \cdot 133}{100} = \frac{1463}{100} = 14{,}63.$$

Tillgodohavande i kronor = 528 + 14,63 = 542,63.

Innan man börjar att räkna, måste man även tala om, vad som sker, då man sätter in pengar i banken. Det måste stå klart, att insättarna lånar ut pengar till banken. Banken måste för denna ”inlåning” betala en ersättning, som vi kallar ränta. I stället får banken använda pengarna till att själv driva lönande affärer eller till att låna *ut* pengar till andra personer, som vill starta affärer och då naturligtvis mot högre ränta, än banken själv betalar till insättarna vid inlåningen. (Jfr Ebberöds bank.)

Vi måste några gånger högt upprepa tanken (både lärare och elever), att *uppgiften om t. ex. 3 % ränta säger oss, att om pengarna står inne ett helt år, får utlånaren som ersättning 3 % av det utlånade kapitalet. Den summan kallar vi årsräntan.* Eftersom vi i varje månad räknar med 30 räntedagar och alltså på ett år 360 räntedagar, får vi dagsräntan genom att dividera årsräntan med 360 och den aktuella räntan genom att multiplicera dagsräntan med antalet räntedagar.

På en fråga, hur stor ränta man får, om räntefoten är 3 %, kunde till omväxling också svaras: 3 öre per år och krona eller $\frac{3}{360}$ öre per dag och krona, vilket också kan skrivas

$$\frac{3}{360} \; \frac{\text{öre}}{\text{dag och krona}}.$$

Av förekommande uppgifter är det några, som särskilt brukar åstadkomma svårigheter. Det är sådana, där flera insättningar eller uttagningar förekommer under samma år. Ex. En person insätter den 8 januari i en bank, som lämnar 3 % ränta 540 kr; den 28 juli tar han ut 180 kr, men den 12 sept. sätter han in 120 kr. Hur stort är hans tillgodohavande i banken vid årets slut?

Vid behandlingen kan vi gå två vägar. Antingen ritar vi på tavlan något, som får föreställa en sparbanksbok, och det bör under alla omständigheter ske åtminstone ett par gånger under arbetet med ränteräkningen, eller också går vi den vanliga vägen.

I en bankbok ser arbetet ut så här:

| År och mån. | Dag | Uttaget | | Insatt | | Innestående | | Noterat av 2 bankens tjänstemän |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Kr. | öre | Kr. | öre | Kr. | öre | |
| 1950 | | | | | | | | |
| Jan. | 8 | | | 540 | — | 540 | — | [illegible] |
| Juli | 28 | 180 | — | | | 360 | — | [illegible] |
| Sept. | 12 | | | 120 | — | 480 | — | [illegible] |
| Ränta för 1950 Dec. | 31 | | | 14 | 64 | 494 | 64 | [illegible] |

**Vi får ränta på 540 kr under 200 dagar** $\left(\frac{28}{[illegible]} - \frac{8}{[illegible]}\right)$, **på 360 kr** [illegible] $\left(\frac{12}{[illegible]} - \frac{28}{[illegible]} = \frac{42}{[illegible]} - \frac{28}{[illegible]}\right)$ och på 480 kr under [illegible] $\left(\frac{30}{[illegible]} - \frac{12}{[illegible]}\right)$. Hela räntan blir då i kronor

$$\frac{540 \cdot 200 \cdot 3}{360 \cdot 100} + \frac{360 \cdot 44 \cdot 3}{360 \cdot 100} + \frac{480 \cdot 108 \cdot 3}{360 \cdot 100} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2} + 1{,}32$$

$$+ \frac{48 \cdot 3 \cdot 3}{100} = 9 + 1{,}32 + 4{,}32 = 14{,}64.$$

Räntan kan naturligtvis också beräknas så, att man räknar [illegible] $\left(\frac{30}{[illegible]} - \frac{8}{[illegible]} = 352\right.$ dag.), lägger till räntan på 120 kr under tiden 12 sept.—30 dec. $\left(\frac{30}{12} - \frac{12}{9} = \frac{18}{3} = 108 \text{ dag.}\right)$ och drar ifrån räntan på 180 kr tiden [illegible] $\frac{[illegible]}{2} - \frac{[illegible]}{7} = \frac{[illegible]}{[illegible]} = 152$ dag.). Uttrycket för räntans storlek i kronor blir då:

$$\frac{540 \cdot 352 \cdot 3}{360 \cdot 100} + \frac{120 \cdot 108 \cdot 3}{360 \cdot 100} - \frac{180 \cdot 152 \cdot 3}{360 \cdot 100} =$$

$$= \frac{3 \cdot 352 \cdot 3}{2 \cdot 100} + \frac{12 \cdot 3 \cdot 3}{100} - \frac{76 \cdot 3}{100} = 9 \cdot 1{,}76 + 1{,}08 - 2{,}28 =$$

$$= 15{,}84 + 1{,}08 - 2{,}28 = 16{,}92 - 2{,}28 = 14{,}64.$$

Det vanligaste och mycket ofta förekommande felet är att vid varje insättning eller uttagning ränta beräknas på den summa, som fanns på sparbanksboken före förändringen, denna ränta lägges till kapitalet, och att i fortsättningen ränta räknas på hela denna summa.

För att undvika sådant är det säkert lämpligt att i samband med resonemang om vad som skall skrivas i en sparbanksbok, framhålla, att *den sista december kl. 24 inga räntor existerar.* Då sätter banken in den upplupna räntan, som därvid förvandlas till kapital, men så snart det nya året ingått, börjar också nya räntor att växa.

*Kapitalisering*, d. v. s. förvandling av ränta till kapital, sker, om inget annat säges (kapitalräkning), aldrig vid något annat tillfälle än vid årsskiften.

Den andra vägen, som vi kunde följa vid behandlingen av vår uppgift, är den ”vanliga”.

| Fall | I | II | III |
|---|---|---|---|
| Kapital i kronor | 540 | 360 | 480 |
| Räntefot i procent | 3 | 3 | 3 |
| Insättningsdag | 8/1 | 28/7 | 12/9 |
| Ränteberäkningsdag | 28/7 | 12/9 | 30/12 |
| Tid i dagar | 200 | $\left(\frac{[illegible]}{8} - \frac{[illegible]}{7}\right) = 44$ | 30/12 — 12/9 = 108 |
| Ränta i kronor | 9 | 1,32 | 4,32 |
| Tillgodohavande i kronor | 549 | 370,32 | 494,64 |

*Ex. 2.* En person insatte den 3 januari 720 kr på sparkasseräkning efter 4 %. Emellertid höjdes räntefoten från och med

den 1 juni till 4,5 % och från och med den 16 sept. till 5 %. Hur mycket hade personen att fordra i banken den 31 dec. samma år?

Den svårighet, som yppar sig i en uppgift av detta slag, är att man inte ordentligt håller reda på insättningsdagen utan t. ex. i ovanstående problem räknar ränta under tiderna 3/1—30/5 och 1/6—15/9 och 16/9—30/12 (eller ev. 31/12) i stället för 3/1—30/5 och 30/5—15/9 samt 15/9—30/12 och på så sätt förlorar 2 dagar.

Om vi — för att spara utrymme — endast tecknar räntan, får vi räntan i kronor lika med:

$$\frac{720 \cdot 4 \cdot 147}{360 \cdot 100} + \frac{720 \cdot 105 \cdot 9}{360 \cdot 200} + \frac{720 \cdot 105 \cdot 5}{360 \cdot 100} = 8 \cdot 1{,}47 +$$

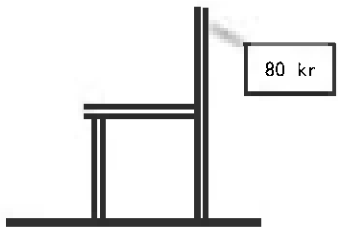
$$+ 9 \cdot 1{,}05 + 10 \cdot 1{,}05 = 11{,}76 + 9{,}45 + 10{,}50 = 31{,}71.$$

Personens fordran blir alltså 751,71 kr.

*Om man sysslar med uppgifter, där pengar får stå inne i bank över ett årsskifte, är det nog lämpligt att kapitalisera räntan den sista december och inte, som man ibland kan finna, godtaga ränteräkning utan avbrott vid årsskiftet.*

## RABATTRÄKNING

Även här låter man teorien lämpligen få en verklighetsbakgrund. När det första gången blir tal om rabatträkning, kan man därför börja sitt arbete med att på tavlan rita nedanstående teckning.




Så får eleverna gissa, vad teckningen skall föreställa. Att det skall vara en stol, brukar de flesta förstå, och nog brukar det vara några, som inser, att rektangeln t. h. skall föreställa en prislapp. Det kommer fram så smått genom läraren eller eleverna, att man tänker sig, att vi har gått in i en möbelaffär för att köpa en stol. Där kan vi själva gå runt och läsa på prislapparna, vad stolarna kostar. Barnen får föreslå namn på den summa (80 kr), som står på prislappen. Det närmast till hands liggande namnet är ”prislappspriset” och det är ett bra namn, men läraren måste ju i alla fall tala om, att vi i regel använder benämningen *bruttopris*, och det kan lämpligen göras i anslutning till funderingar om anordning av en fest eller basar. Där kallar man summan av de pengar, som arrangörerna får in för inträde, servering eller förlustelser av olika slag för *bruttoinkomster*. Varje elev förstår, att arrangörerna måste betala för lokal, kaffe, bröd och läskedrycker liksom för musik och vakthållning, men läraren måste tala om, att det som blir kvar av inkomsterna kallas för *nettoinkomster*. Det kan också här vara lämpligt att tala om t. ex. en låda apelsiner, där vikten av apelsiner + emballage kallas för *bruttovikt*, emballaget för *tara* och apelsinernas vikt för *nettovikten*.

Eleverna brukar veta något om att en kund, som lämnar betalning omedelbart, ofta inte behöver betala hela bruttopriset, därför att affärsmannen drar av en summa, som kallas för rabatten. Efter resonemang om hur man skall bestämma de grunder, efter vilka rabatten skall beräknas, kommer vi överens om att det är lämpligt att ange, hur många procent av bruttopriset som affärsbiträdena får dra bort från bruttopriset.

Efter detta kan man på tavlan skriva:

Bruttopris i kr = 80
Rabattprocent = 5
Rabatt i kr = $\frac{80 \cdot 5}{100} = 4$
Nettopris i kr = 76.

Men så skall vi också sätta text till uppgiften, och det är en mycket viktig del av arbetet. Det tar alltid en stund, innan eleverna lyckas få fram en godtagbar formulering, men när vi kommit dit, låter vi först några elever upprepa den, och sedan får en elev i klassen skriva på tavlan t. ex.: En person köper en stol, för vilken handelsmannen begär 80 kr. Emedan kunden betalar kontant, får han 4 % rabatt. Hur mycket skall han betala?

Oftast brukar elevernas egna förslag låta ungefär så här: Om bruttopriset är 80 kr och rabattprocenten 5, hur stort blir nettopriset? Och det får väl duga det med.

Lite längre fram, när man i klass 6 börjat räkna med ekvationer, kan man ta upp rabatträkningen igen ungefär så här. Vi repeterar vårt gamla problem:

1) Bruttopris i kr = 80
2) Rabattprocent = 5
3) Rabatt i kr = $\frac{5 \cdot 80}{100} = 4$
4) Nettopris i kr = 76.

Så numrerar vi storheterna med 1) till 4) såsom gjorts ovan och gör klart för oss, att om man känner två av dessa storheter, går det alltid att räkna ut de två återstående. Nu kan vi på 6 olika sätt plocka ihop två av storheterna, nämligen:

| | | |
|---|---|---|
| 1 och 2 | 1 och 4 | 2 och 4 |
| 1 och 3 | 2 och 3 | 3 och 4 |

Så kan vi t. ex. låta 6 st elever skriva:

1 och 2.

1) Bruttopris i kr = 80
2) Rabattprocent = 5
3) Rabatt i kr = $x$
4) Nettopris i kr =

I samtliga fall fyller vi i de uppgifter, som skulle vara bekanta, och betecknar den storhet, som vi vill fråga efter, med $x$.

1 och 3.

1) Bruttopris i kr = 80
2) Rabattprocent = $x$
3) Rabatt i kr = 4
4) Nettopris i kr =

För varje gång uttrycker vi frågan på svenska, skriver den eventuellt på tavlan eller låter flera elever efter varandra upprepa frågan.

Räkningen sker alltid med användning av *de två sambanden*, som finns mellan våra fyra storheter, nämligen *samband 1:* Rabatten är lika med rabattprocenten gånger bruttopriset genom hundra, och *samband 2:* Bruttopriset minus rabatten är lika med nettopriset. (”Rabattprocenten” borde kanske här utbytts mot rabattprocenttalet. På grund av uttryckets tyngd har så ej skett.)

1 och 2 ger omedelbart $\frac{80}{100} = x$;

*Svar:* Rabatten är 4 kr och nettopriset 76 kr.

1 och 3 ger: $\frac{x \cdot 80}{100}$ $x - 5.$

*Svar:* Rabatten beräknas efter 5

1 och 4.

| | |
|---|---|
| Bruttopris i kr = 80 | Här räknar vi först ut rabatten i kr, varefter räkningen fortsätter alldeles som i förra fallet. |
| Rabattprocent = $x$ | |
| Rabatt i kr = | |
| Nettopris i kr = 76 | |

2 och 3.

| | |
|---|---|
| Bruttopris i kr = $x$ | Samband nr 1 ger |
| Rabattprocent = 5 | $\frac{5 \cdot x}{100}$ |
| Rabatt i kr = 4 | $x = 80$ |
| Nettopris i kr = | |

*Svar:* Bruttopriset var 80 kr.

I detta fall blir texten på svenska: En handelsman säljer en stol och lämnar vid kontant köp 5 % rabatt. Om rabatten uppgick till 4 kr, hur stort är bruttopriset? Även om man i detta fall skulle fråga efter nettopriset, betecknar vi bruttopriset i kr med $x$ och räknar ut det först.

2 och 4.

| | |
|---|---|
| Bruttopris i kr = $x$ | Om en stol med 5 % rabatt såldes för 76 kr, hur mycket begärde handelsmannen för stolen? |
| Rabattprocent = 5 | |
| Rabatt i kr = | |
| Nettopris i kr = 76 | |

Här får vi först teckna rabatten i kronor enligt *första sambandet*, varvid uttrycket för rabatten blir $\frac{}{100}$ eller $0{,}05x$ eller $\frac{}{20}$.

Det *andra sambandet* ger sedan:

$$x - \frac{x}{20} = 76$$

$$\frac{19\,x}{20} = 76$$

$$x = 80$$

*Svar:* Handelsmannen begärde 80 kr.

3 och 4.

Bruttopris i kr =
Rabattprocent = $x$
Rabatt i kr = 4
Nettopris i kr = 76

Texten: Om en person köper en stol för 76 kr, sedan möbelhandlaren beviljat 4 kr i rabatt, hur många procents rabatt lämnade handelsmannen?

Vi har att först fylla i bruttopris i kr = 80 kr. Därefter är problemet identiskt med fallen 1 och 3.

## DEN FÖRBEREDANDE GEOMETRIKURSEN I KLASS 6

Den förberedande geometrikursen i klass 6 bör lämpligen startas omedelbart vid höstterminens början och håller sedan på en timme varje vecka under denna termin. På den tiden torde man hinna med en något så när lagom kurs.

För geometristudierna är det lämpligt, att barnen använder en räknebok *utan linjer eller rutor*. Om sådana böcker inte finns tillgängliga, är det bättre med en linjerad skrivbok än en rutad bok. Skall något antecknas i den olinjerade boken, får eleverna vänja sig vid att först draga en rät linje efter linjalen.

Förutom de vanliga hjälpmedlen, linjal, passare och gradskiva kan eleverna lämpligen också vara försedda med en liten "parallell-(vinkel-)linjal", som var och en lätt kan tillverka. En skiva av 0,8 mm celluloid av t. ex. storleken 6 cm ggr 10 cm lägges med den konvexa sidan nedåt på ett centimeterrutat papper ovanpå lämpligt underlag (en träskiva) och hålles fast med häftstift intill kanterna. Man har sedan endast att med en synål eller stoppnål löst ritsa över linjerna. Har inte skivan från början lämpliga dimensioner, ritsar man hårdare efter ytterlinjerna och kan därefter bryta skivan efter dessa linjer. Det är fördelaktigt att på skrivbordet alltid ha till hands en skiva av dubbla formatet.

De metodiska anvisningarna anger under III: Geometri sid. 79 att man bör följa en genomförd lärogång, varvid man lämpligen kan använda densamma som vid den systematiska geometriundervisningen följande år. Planen är närmare utförd på sidorna 47—50 i Geometri och geometriundervisning av undervisningsrådet C. E. Sjöstedt.

Man får dock i så fall se upp, så att det inte blir en förtäckt geometrikurs av samma art, som skall komma året därpå. I huvudsak kan man följa R.W.F. A:I sid. 99—104 och BI sid. 74—79.

En uppfattning om hur jag tänker mig dessa lektioner kan möjligen följande framställning ge:

Nu skall vi tala om någonting, som heter geometri. Vad kan det ordet betyda? Har ni hört några andra ord, som innehåller den första sammansättningsdelen geo eller den andra metri? Eleverna svarar naturligtvis med geografi och kanske geologi samt termometer och barometer. Samtliga dessa ord kan så bli föremål för samtal, vilket lämpligen kan upprepas nästa lektion, då intresserade elever haft tillfälle att studera i en uppslagsbok i hemmet eller i skolan eller ifråga om geografi i läroboken.

Så ska vi tala lite om linjer. Känner Ni några olika slag av linjer? Det brukar bli fullt upp med svar: Räta linjer, krokiga linjer, smala, tjocka, breda och tunna linjer, vågräta, sneda och lodräta linjer, kanske också horisontella och vertikala linjer och lodlinjer, brutna linjer, obegränsade och begränsade linjer.

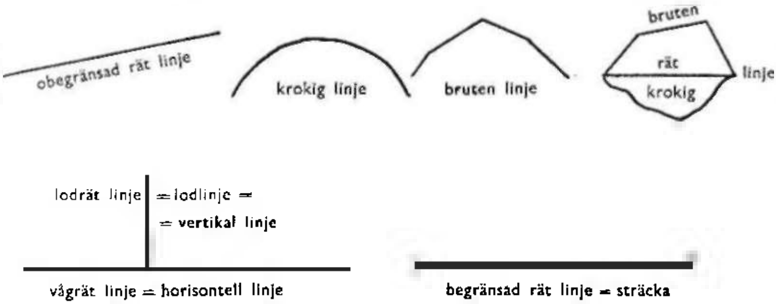



Fig. 6.

Varje elev får på svarta tavlan illustrera sitt förslag och skriva beteckningen därunder. När ingen har något mer att komma med, diskuteras de olika förslagen, en del utmönstras och resten redigeras, så att vi till slut har någonting i stil med figuren på föregående sida.

Detta låter vi eleverna föra in i sina böcker. Det är något, som de själva i huvudsak har åstadkommit.

När vi skall införa vinklar, gör läraren själv eller någon elev höger om och vänster om, helt om och kanske halvt höger om eller snurrar ett helt varv. Begreppet varv känner varje elev till, och det möter ingen svårighet att få de utförda vändningarna uttryckta som ett fjärdedels varv, ett halvt resp. ett åttondels varv. Vi tar lämpligen också fram en passare, håller det ena benet fast och vrider det andra och talar om, att avvikningen mellan passarens båda ben kallas en vinkel, att passarens ben också kan anses vara vinkelns ben. Denna gång kan vi inte tänka oss, att eleverna skall kunna bidraga med namnen. Det är nog bäst, att läraren ritar på tavlan och eleverna i sina böcker. Fig. 10 a.

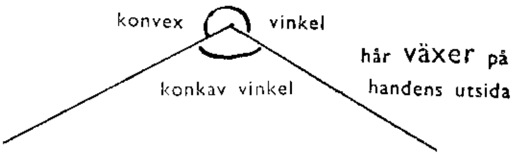



Fig. 7.

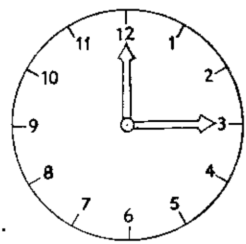



Fig. 8.

Redan från första början betecknar vi punkter med stora bokstäver, sträckor med små och vinklar med små grekiska bokstäver, jämför skolöverstyrelsens cirkulär.

a = alfa = $\alpha$, b = beta = $\beta$, g = gamma = $\gamma$, d = delta = $\delta$, e = epsilon = $\varepsilon$, p = pi = $\pi$, f = fi = $\varphi$, o = omega = $\omega$.

Från 12 till 3 på klockan är det ett kvarts varv, från 1 till 5 är det 4 tolftedels = ett tredjedels varv etc.

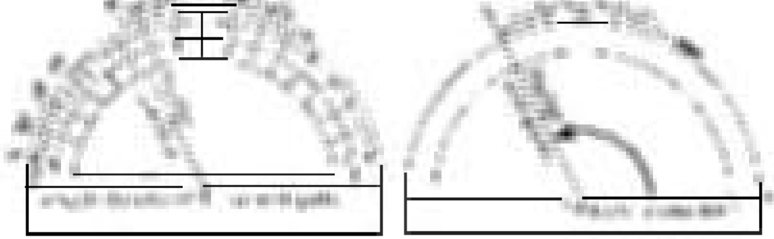
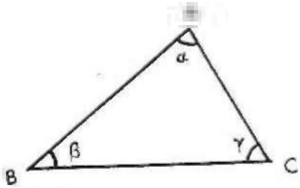


Fig. 9.

Då läraren talar om begreppen *konvex* vinkel och *konkav* vinkel, kan han lämpligen som minneshjälp t. ex. fästa uppmärksamheten på likheten med handen och på att hår *växer* utanpå handen men inte inuti, eller någon annan minnesregel. Överhuvudtaget gäller om alla dessa nya begrepp, att man ger sig god tid och pratar med eleverna om dem, utan att man fördenskull "håller föredrag" för dem. Vi låter i stället så långt det är möjligt eleverna själva komma till tals och försöker så dra nytta av deras egna erfarenheter.

Vid tal om komplementvinklar och supplementvinklar kan det vara lämpligt att flytta den ena vinkeln (på tavlan och




Vi kommer från början överens om att om en vinkelspets i en triangel heter $A$, så heter vinkeln $\alpha$ och motstående sida $a$. Längre fram betecknar $h_a$ höjden mot $a$, $m_a$ medianen mot $a$ etc.

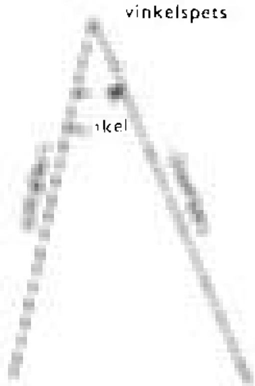



Fig. 10 a. Området mellan vinkelbenen kallas vinkelfält.

i ritboken), så att inte eleverna bibringas den felaktiga uppfattningen, att en komplementvinkel (supplementvinkel) nödvändigtvis skall vara placerad *intill* den vinkel, tillsammans med vilken den bildar 90° (180°).

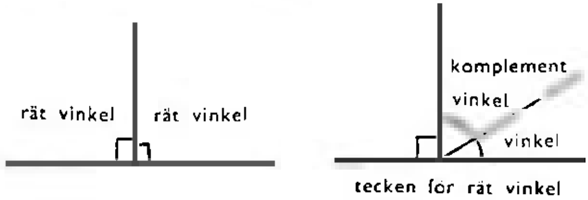



Fig. 10 b.[1]

**En vinkel är rät när den är lika med sin sidovinkel.**

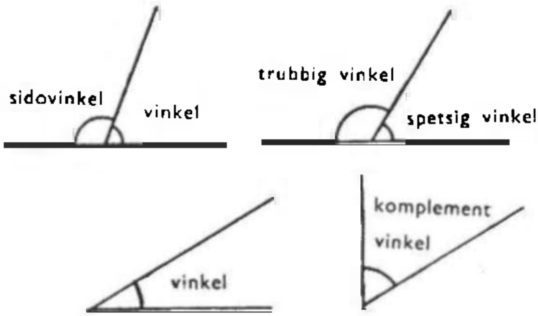



Fig. 10 c.

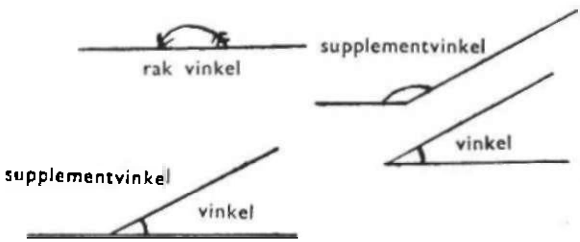



Fig. 10 d.

[1] I teckningen t. h. i fig. 10 b saknas en pil från underskriften till vänstra vinkeltecknet.

Som vinkelhake (för konstruktion av räta vinklar) kan man använda den förut omtalade parallell-linjalen, eller en vanlig skrivbok, klassboken eller vika ett papper så, som nedanstående figur avser att visa.

När vi har talat om grader, minuter och sekunder, brukar vi rita en cirkel, som skall föreställa en jordmeridian och i samband därmed tala om nordpolen och sydpolen, meridianer och ekvatorn och jordaxeln. (Jorden runt på 80 dagar.)

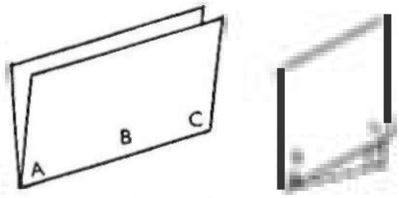


Fig. 10 e.

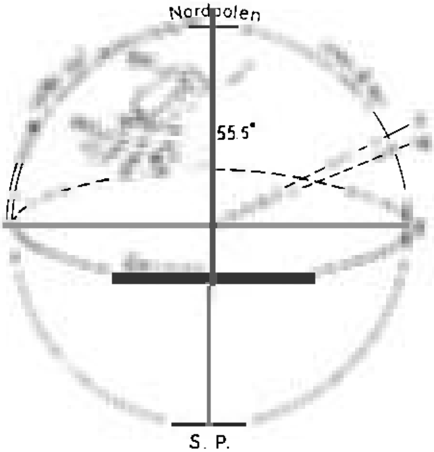


Fig. 10 f.

Hur kan det hänga ihop, att avståndet från ekvatorn till polen är just 1000 mil? Det är lätt att här få till stånd ett trevligt och nyttigt samtal med eleverna, hur man kan mäta avståndet från polen till ekvatorn eller kanske snarare, att detta inte kan gå till på det sättet, att några personer reser från ekvatorn till polen och mäter med en kedja.

Så tänker vi oss, att vi utefter en meridian slår ned 91 stolpar, den första vid ekvatorn och den sista i nordpolen, så att vi får avståndet delat i 90 lika delar. Avståndet vid jordytan mellan två stolpar blir $11\frac{1}{9}$ mil. Sätter vi mellan två av dem A och B upp 59 nya stolpar med lika mellanrum, blir avståndet denna gång $\frac{10\,000}{90 \cdot 60}$ km $= 1{,}852$ km. Det talet brukar alltid några elever känna igen. Någon vet kanske, att detta avstånd kallas en *nautisk mil* och att ett fartyg, som tillryggalägger den vägen på en timme, har en hastighet av en *knop*. Sätter vi än en gång ned 59 nya stolpar i alla de nya mellanrummen, får vi endast 31 m mellan dem, d. v. s. ungefär längden av fyra ordinära klassrum.

För varje gång tänker vi oss stolparna utdragna till jordens medelpunkt, där de med varandra bildar $1°$, resp. $1'$ och $1''$. Man förstår, att $1''$ måste vara en mycket liten vinkel, då "stolplängden" är 6370 km och avståndet vid övre änden endast 31 m.

Det kan vara trevligt att i detta sammanhang låta eleverna ta fram sina kartor och se efter, på vilken breddgrad Stockholm ligger, likaså Sveriges nordligaste och sydligaste punkt, eller kontrollera, att Rom och New York ligger på samma breddgrad eller räkna ut avståndet mellan två orter, som ligger på samma meridian (middagslinje).

För att befästa de viktiga begreppen *vinkelrät* och *normal* låter vi eleverna i sina böcker rita och skriva:

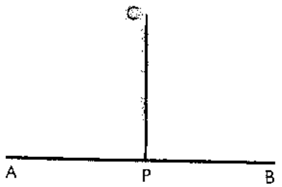



Fig. 10 g.

CP är vinkelrät mot AB
CP är normal mot AB
CP är en normal till AB eller
CP $\perp$ AB, vilket läses: CP är vinkelrät mot AB.

Den som så önskar kan nu låta eleverna rita vinklar i sina böcker och mäta dem med gradskivan, men man kan lämpligen i huvudsak uppskjuta övningen, till dess att man hunnit fram till triangelstudiet.

Räkneövningarna på grader, minuter och sekunder kan nog i regel inte tagas med på dessa för geometri avsedda lektioner utan måste förläggas till andra matematiktimmar.

R.W.F. har i sista upplagan namn och beteckningar på cirkeln före de egentliga mätningarna. Arbetet härmed kan ske på många sätt. Man kan rita en punkt O på tavlan och sätta ut en punkt $P_1$ och så låta några elever söka flera punkter $P_1$ och $P_2$ och $P_3$ etc., så att $OP = OP_1 = OP_2 = \ldots$ Det kan ju ske med hjälp av ett snöre (som läraren i regel bör ha i fickan eller handväskan), linjalen eller ett papper. Av detta bör barnen få klart för sig, att alla punkter på cirkeln ligger lika långt från medelpunkten.

En annan gång börjar vi vår lektion med att sätta ut en punkt på tavlan och så rita några räta linjer, som går ut ifrån punkten. Om vi frågar, vad vi lämpligen skall kalla dessa linjer för, och inte lyckas få "strålar" som svar, så kan

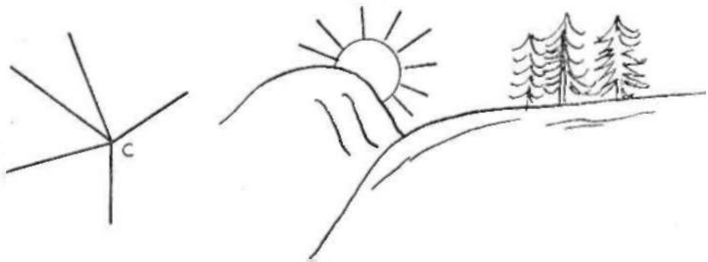



Fig. 10 h.

vi ju rita något i stil med teckningen ovan. Det är så gott som säkert, att vartenda barn i klassen förstår, vad man menar, och svaren strålar in från alla håll. Så skall vi sätta namn på punkten och ber eleverna om förslag. Det kan nog hända, att man kan få centrum till svar, om man t. ex. talar om en stad och gator, som går utåt från de innersta delarna. När frågan tages upp på ett senare stadium, t. ex. i $4^5$ eller $3^4$, kan det ha sitt intresse att tala med barnen om att av en mästares tavla blir det ofta många reproduktioner utförda, så att den första liksom kan anses vara utgångspunkt för avbildningarna. Ja, vad brukar man i så fall kalla den första tavlan? I $4^5$ och $3^4$ och kanske möjligen redan i $2^5$ kan man fråga, vad ursprung heter på engelska, och där kan en elev som inte är särskilt framstående i matematik visa, att han eller hon har möjligheter på andra områden. Ja, det är ordet *original*, som vi söker, och det ger oss beteckningen *origo* på utgångspunkten. Då har vi kommit så långt, att vi kan säga, att här har vi punkten C och en samling strålar, som utgår från den. Nu sätter vi på en av strålarna ut en punkt, kallar den för $P_1$ och ställer som uppgift att även på övriga strålar finna punkter, som ligger på avståndet CP från C. Vi ger ett barn som uppgift att sätta ut en ny punkt på en stråle. Det tar kanske (den graderade) linjalen och mäter med dess hjälp av ett stycke $= CP_1$ på en annan stråle. Så kan nästa elev få använda ett papper och en tredje ett snöre. Beroende på hur länge vi vill hålla på, kommer vi att få en massa punkter $P_1$, $P_2$, $P_3$ etc., och det ger sig nästan självt, att rätt vad det är, skall den här frågan uppstå: Om vi nu höll på länge på detta sätt, skulle punkterna komma att ligga så nära varandra, att de skulle komma att bilda en sammanhängande kontur. Är det någon, som kan skaffa fram den konturen? Ni får använda linjalen, snöret eller papperet.

Med hjälp av ”pappersmetoden” kan en elev alltid rita fina cirklar, även om passaren är glömd.

Efter detta får väl passaren komma fram och användas.

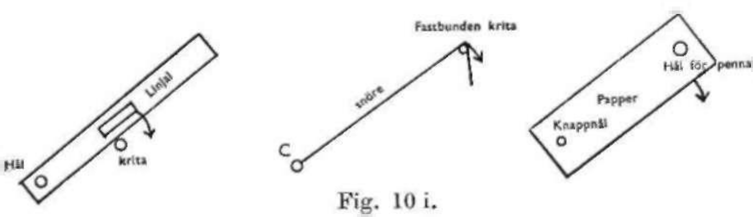



Fig. 10 i.

Det är också tid att låta eleverna försöka tala om, vad en *cirkel* (*cirkellinje*) är. Härigenom har man också obemärkt och på ett naturligt sätt fått med begreppet *geometrisk ort* (sammanfattningen av alla punkter, som uppfyller ett visst geometriskt villkor), även om namnet icke införes på detta stadium.

Så återgår vi till strålarna. Det är säkert nyttigt med en liten stunds resonemang om solen och strålarna, som går ut från den, om något annat eleverna vet, som kan sägas stråla ut. Det är meningen, att det lilla samtalet skall ge till resultat en teckning på tavlan ungefär som nedanstående.

radio
radium
radar
radius =
= stråle


Fig. 10 j.

Vi hinner kanske inte mera på en lektion om cirkeln. För egen del har jag ofta börjat andra omgången så här:

Jag ritar på tavlan en cirkelbåge (1), fyller ut, så att jag får liksom ett stativ (2), och drar några parallella linjer (3), och

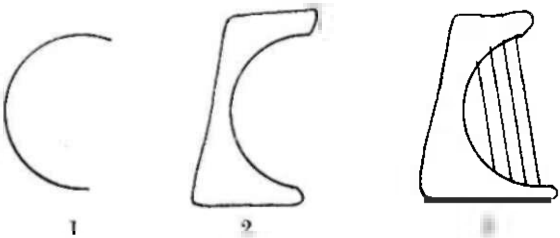


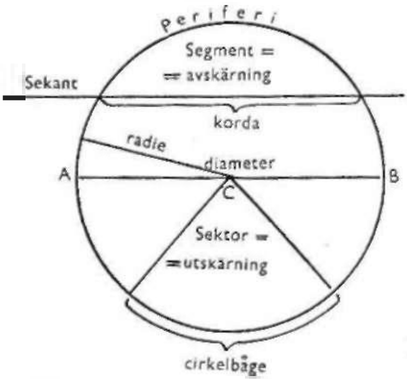

Fig. 11.

så frågar jag, om klassen har förstått, vad teckningen skall föreställa, och när det blivit klart, att det skall vara en harpa och att de parallella linjerna skall föreställa strängar, så blir det fråga om vad man kan kalla det som hörs, om man anslår strängarna (plektron). Det blir nog alltid någon, som kommer med förslaget ackord, och så talar vi om, att sträng på grekiska heter *korda* och på engelska cord.

*Sektris, sekant, sektor, segment*

För att sätta namn på en rät linje, som delar en vinkel eller skär en cirkel, och på delar av en cirkel användes ord, härledda av det latinska verbet secare, vilket betyder skära. En rät linje, som går genom en vinkels spets och dess fält, kallas en sektris, och delar den vinkeln mitt itu, kallas den bisektris, etc.

Efter dessa förberedelser kan vi nog rita på tavlan och låta barnen rita av i sina böcker.




C = centr[illegible] punkt (M).

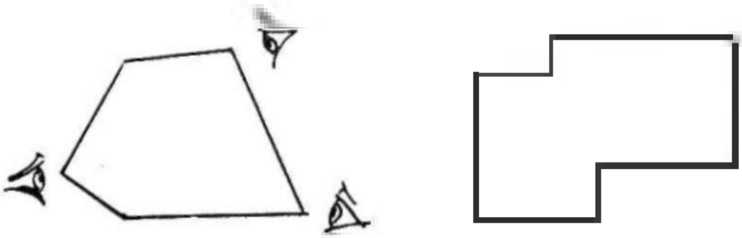
Fig. 12.

På detta kan vi öva dels så, att vi ritar upp en figur (på fri hand t. ex. då några minuter återstår av en lektion) och låter eleverna tala om namnen på de olika storheterna och med egna ord beskriva dem (exempelvis: en korda är en rät linje, som sammanbinder två punkter på perifierien), dels så, att eleverna själva på tavlan får illustrera uppgivna storheter.

*Rätlinjiga figurer.*

Namn på dessa figurer får vi antingen genom att ange antalet sidor eller antalet hörn eller vinklar. Om vi talar om för eleverna, att vinkel (hörn) på latin heter angulus, kan vi nog med deras hjälp få fram: triangel = trevinkling och rektangel = rätvinkling.

Så ber vi en elev rita en figur, som innehåller endast räta vinklar. Om resultatet tar sig ut som fig. b) nedan,



a Fig. 13. b

så får vi tala om, att de räta vinklarna måste vara inuti figuren och att figuren utifrån sedd måste vara konvex, och då finner snart eleverna, vad det är, som är utmärkande för en rektangel.

Nu kan den mera manuella delen av arbetet börja. Den lärare, som finner det bekvämast, kan följa R.W.F. del I sid. 100—104. Det är heller ingen konst att författa hur många uppgifter som helst. Sök övriga sidor och vinklar och sök vinkelsumman i

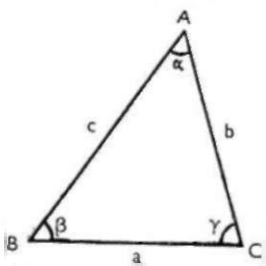



Fig. 14 a.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $a = 4$ cm | 2) $a = 4$ cm | 3) $a = 6$ cm | 4) $a = 4$ cm |
| $b = 5$ cm | $b = 5$ cm | $\alpha = 50°$ | $b = 5$ cm |
| $\gamma = 70°$ | $c = 6$ cm | $\beta = 60°$ | $c = 7$ cm |

| | |
|---|---|
| 2) $a = 4$ cm | $\alpha =$ |
| $b = 5$ cm | $\beta =$ |
| $c = 6$ cm | $\gamma =$ |
| omkrets = | S:a |

Vi låter en elev rita på tavlan, de övriga i sina böcker. Det är ingen svårighet att få fram satsen om vinkelsumman i en triangel och, om man så vill, att mot en större sida står en större vinkel i en triangel.

Rita ut höjderna i Ex. 2 och Ex. 4, mät dem på en halv millimeter när och räkna ut ytan.

*Ex. 2*

| | | |
|---|---|---|
| $a = 4{,}0$ cm | $b = 5{,}0$ cm | [illegible] $= 6{,}0$ cm |
| $h_a = \ldots.$ cm | $h_b = \ldots.$ cm | $h_c = 3{,}3$ cm |
| $T = \ldots.$ cm² | $T = \ldots.$ cm² | $T = 9{,}90$ cm² |

*Ex. 4*

| | | |
|---|---|---|
| $a = 4{,}00$ cm | $b = 5{,}00$ cm | $c = 7{,}00$ cm |
| $h_a = 4{,}90$ cm | $h_b = 3{,}95$ cm | $h_c = 2{,}75$ cm |
| $T = 9{,}80$ cm² | $T = 9{,}88$ cm² | $T = 9{,}63$ cm² |

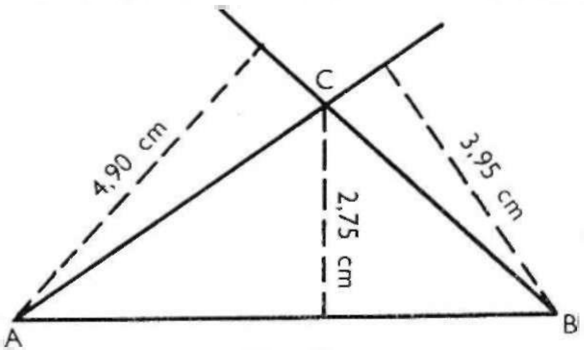



Fig. 14 b.



Detta arbete ger åtskilligt:

a) Övning i att rita ut höjden i en triangel, vilket i vissa fall bereder en hel del svårigheter och fordrar mycken träning.

b) Diskussioner om noggrannheten i ett resultat. Om tre elever arbetar vid tavlan och övriga ritar i sina böcker, får man många värden; man kan söka medeltal och se efter, hur många riktiga siffror, som kan förväntas, vilket kommer till nytta vid laborationerna på vårterminen. Ännu mera går det att få ut av detta, om man låter sidorna vara givna i delar av centimeter eller millimeter, t. ex.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a = 4{,}6$ cm | $a = 4{,}6$ cm | $b = 3{,}7$ cm | $c = 5{,}2$ cm |
| $b = 3{,}60$ cm | $h_a = 3{,}60$ cm | $h_b = 4{,}50$ cm | $h_c = 3{,}25$ cm |
| $c = 5{,}2$ cm | $T = 8{,}280$ cm² | $T = 8{,}360$ cm² | $T = 8{,}450$ cm² |

Vårt värde på ytan blir $8{,}36$ cm² med en avvikelse uppåt eller nedåt av $0{,}10$ cm² eller om man så vill $(8{,}36 \pm 0{,}10)$ cm².

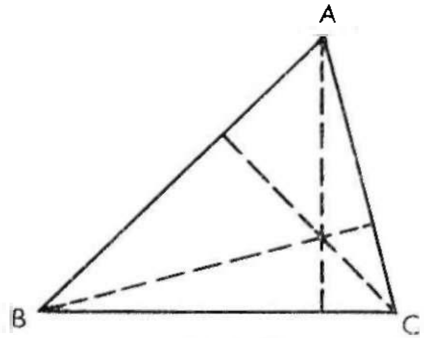



Fig. 14 c.

c) Man kan passa på att lägga märke till att höjderna i en triangel skär varandra i samma punkt.

Sedan man övat eleverna att dela en sträcka och en vinkel mitt itu (R.W.F. Ex. 29 och 30), kan man låta dem i en triangel med uppgivna element draga medianerna, mäta dem och deras delar och göra jämförelser eller dela vinklarna mitt itu och mäta bisektriserna etc., etc.

Då ex. 31 behandlats, passar det bra att rita en parallellogram och mäta sidor och vinklar, diagonalernas delar, ytan på olika sätt etc.

Utöver uppgifterna 14—19 kan man möjligen hinna med en uppgift som följande: Upprita en fyrsiding $ABCD$, där $AB = 4{,}0$ cm, $BC = 5{,}4$ cm, $CD = 3{,}0$ cm, $\wedge\ ABC = 60°$ och $\wedge\ BCD = 70°$. Mät vinklarna och diagonalerna, sök vinkelsumman och ytan!

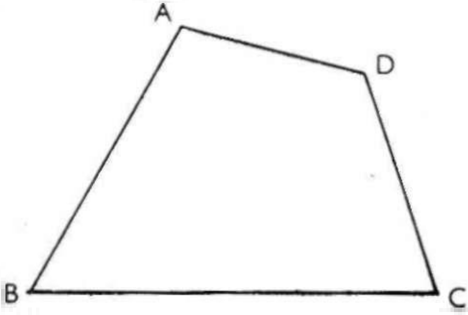



Fig. 14 d.

Vi låter två elever arbeta vid tavlan; den ene får dra diagonalen $AC$ och mäta höjderna mot $AC$ från $B$ och $D$, den andre får dra diagonalen $BD$ och mäta höjderna från $A$ och $C$.

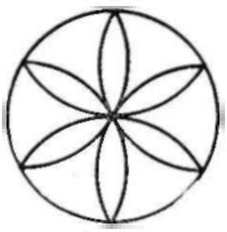


Fig. 14 e.

Vi måste försöka hinna med att inskriva en liksidig triangel, en kvadrat och en reguljär sexhörning i en cirkel. De flesta brukar tycka, att det är roligt att rita figurer som vidstående.

Man kan passa på att lägga märke till att cirkelns omkrets är mer än 3 gånger men mindre än 4 gånger diameterns längd. (Ex. 26—28)

Någon lärare kanske vill pigga upp en lektion med frågan: ”Är det någon, som kan dela en sträcka mitt itu med användning endast av en vanlig linjal?” (Jfr Elementa årg. 19, E. Lunell.)

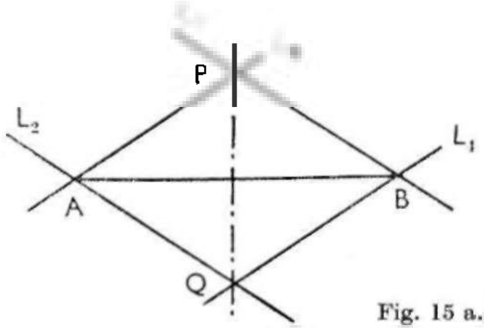



Fig. 15 a.

Man lägger linjalen så, att den ena kanten går genom $A$ och den andra genom $B$, och får då ena gången $L_1$ och $L_2$, andra gången $L_3$ och $L_4$. Man får punkterna $P$ och $Q$. $PQ$ delar $AB$ mitt itu och är mittpunktsnormal till $AB$.

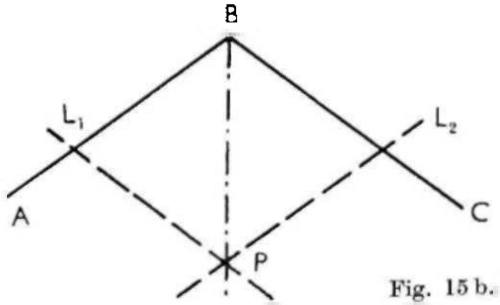



Fig. 15 b.

Det går lika lätt att dela en vinkel $ABC$ mitt itu. Man lägger linjalens ena kant utefter $AB$ och drar $L_2$ och så ena kanten utefter $BC$ och drar $L_1$ efter den andra. $PB$ är bisektrisen.

Uppgiften att genom punkten $A$ på $L$ draga en normal mot $L$ kan nog en och annan elev klara. Man drar $L_1$, $L_2$ och $L_3$ med hjälp av den jämnbreda linjalen och sedan $L_4$ utefter ena kanten av linjalen, som lägges så, att ena kanten går

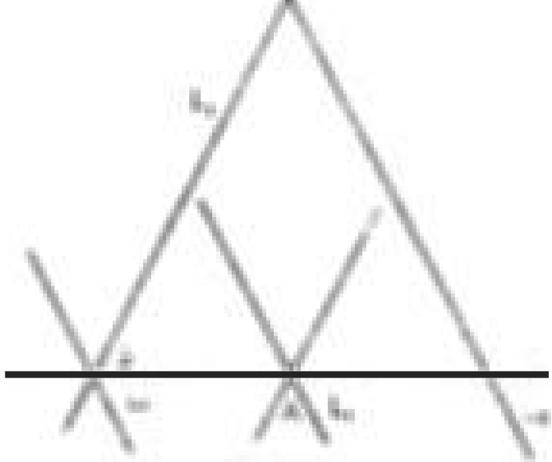


Fig. 15 c.

genom $A$ och den andra genom $B$. Normalen erhålles genom att sammanbinda skärningspunkten mellan $L_3$ och $L_4$ med $A$.

För att kunna dra en rät linje genom $A$ parallell med $L$ måste man använda sig av kunskapen om att diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu, och uppgiften passar kanske därför bättre på ett senare stadium.

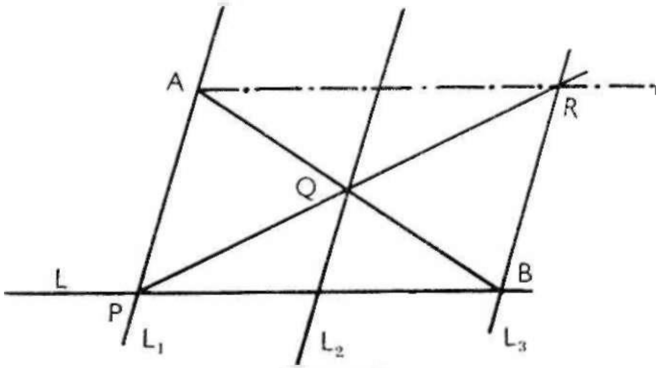



Fig. 15 d.

Man drar $L_1$ och $L_2$ efter linjalens båda kanter och flyttar linjalen, så att ena kanten ligger utefter $L_2$, och drar $L_3$ utefter den andra. $AB$ skär $L_2$ i $Q$ och $PQ$:s förlängning skär $L_3$ i $R$. $AR$ är parallell med $L$.

För arbetet i matematiken överhuvudtaget är det nyttigt, om man kan hinna med att rita någon uppgift med användning av skala (jfr Hedströms bok ex. 55 eller 56).

Om man använder en friluftsdag för att bestämma något avstånd, måste man nödvändigtvis utföra en avbildning i bestämd skala. I Gävle, där jag tjänstgjorde på 1930-talet, brukade vi på friluftsdagar i september månad med $3^5$-orna vandra ut på Sätraåsen utanför staden men med god utsikt över den. Där stakade vi ut en 100 m (eller 50 m) lång sträcka, så att tornet av stadens ena kyrka låg ”mittför”. Med hjälp av en gradskiva tog vi så i baslinjens båda ändpunkter reda på vinkeln mellan baslinjen och synlinjen till kyrktornet, som figuren visar.

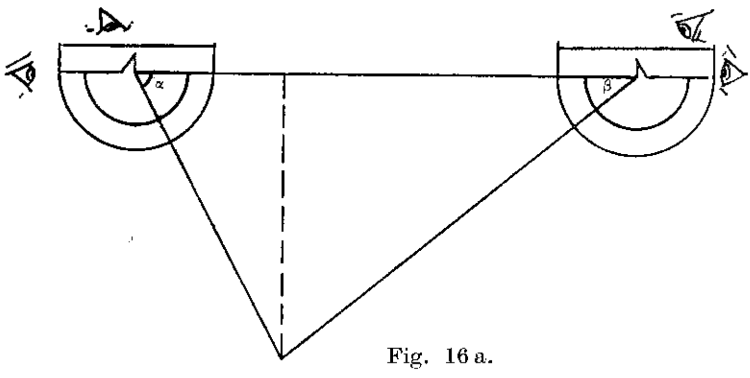



Fig. 16 a.

Vi ritar en figur i skalan 1 : 1000 eller 2 : 1000 eller 3 : 1000. Vinklarna $\alpha$ och $\beta$ är ju i regel ganska nära 90°, så att figuren nedan t. v. snarare svarar mot verkliga förhållandet.

Här passar det bra att också söka höjden av ett träd genom att bestämma $a$, $b$, $l$ och $\alpha$.

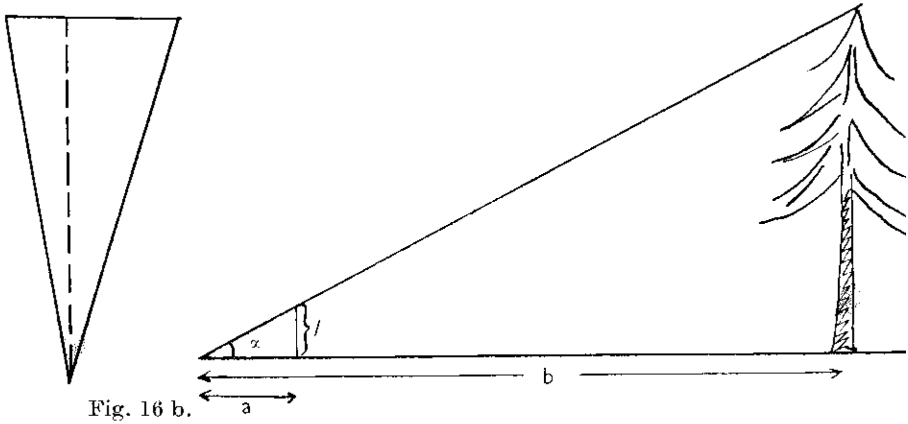



Fig. 16 b.

Det brukar vara givande att ”låna ihop” flera för teckning på svarta tavlan avsedda passare, linjaler och gradskivor och låta flera elever, en från varje rad, samtidigt rita på tavlan. Det är som förut sagts ytterst lätt att åstadkomma uppgifter. Ena gången föredrager man kanske att låta allihop rita samma uppgift, så att man kan jämföra deras resultat, andra gången lämnas olika uppgifter, och radens övriga elever får se till, att arbetet utföres riktigt.

Härvid kan då i arbetet också komma med ett kontrollmoment, fastän det väl knappast uppfattas så från barnens sida. Det blir en tävlan och därtill en mycket trevlig tävlan.

Den som tycker att det är besvärligt att själv författa uppgifter kan finna sådana i det lilla häfte, som rektor J. S. Hedström på sin tid gav ut och som någon tid användes i $2^5$. Det var inte alls ovanligt, att några elever i klassen hann med att behandla samtliga uppgifter i den boken. Då måste naturligtvis en hel del uppgifter lämnas till hemarbete och läraren måste oftare än vad nu blir fallet ta hem ”rit-” böckerna och kontrollera arbetet. Man kan också få uppslag i de planimetriska uppgifter, som givits både i realexamen och studentexamen och då i synnerhet på latinlinjen. Detta att låt vara grafiskt redan i klass 6 lösa uppgifter givna i en examen måste, tycks det mig, göra arbetet lustbetonat för barnen. Det kan därvid också bli tillfälle att tala något om ungefärlig (ja, varför inte approximativ) lösning av uppgifter. Det är klart att behandling av sådana uppgifter icke nödvändigtvis är begränsad till klass 6. Det kan vara roligt att någon gång i följande klasser till omväxling ta med någon uppgift av detta slag i skolan eller som hemuppgift. — En sådan behandlingsmetod, där man alltså med passare och linjal i en viss skala ritar upp en figur, kan i framtiden vara av mycket stor nytta för eleverna som kontroll (t. ex. då en planimetrisk uppgift leder till flera fall).

Mot slutet av denna kurs kan det vara roligt att grafiskt lösa några planimetriska uppgifter från den skriftliga prövningen i real- eller studentexamen.

Ex. 8 från provräkningen i realexamen vt 1951. Två vinkelhakar för linearritning, den ena i form av en likbent rätvinklig triangel och den andra med vinklarna 30°, 90° och 60°, ha lika långa hypotenusor av längden 2 dm. De läggas på ett bord, så att hypotenusorna sammanfalla och vinkelhakarna vändas åt olika håll. Hur stort är avståndet mellan de räta vinklarnas spetsar?

Skala 1 : 4

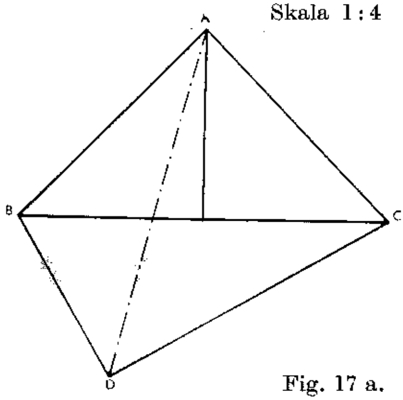



Fig. 17 a.

Mätning ger, att det sökta avståndet $AD$ är $4 \cdot 48$ mm $=$ $= 192$ mm. Exakt uträknad blir $AD = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = 1{,}93$ dm.

Ex. 7 från studentexamen på latinlinjen vt 1951. I en triangel $ABC$ är sidan $b = 3$ dm, sidan $a = 8$ dm och $\gamma = 60°$. Bisektrisen ($CF$) till $\gamma$ och mittpunktsnormalen ($DE$) till $AB$ skära varandra i $P$. Bestäm avståndet $PC$!

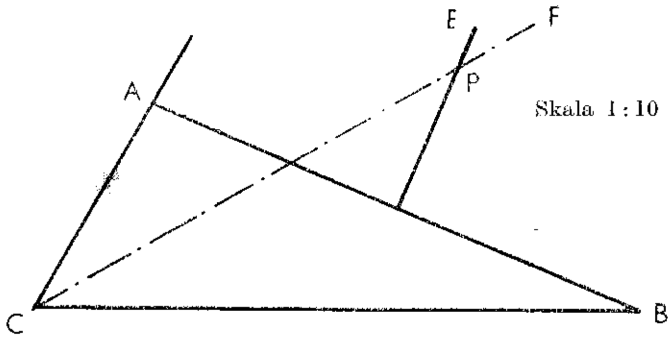



Fig. 17 b.[1]

På teckningen blir $PC = 63{,}5$ mm och alltså i verkligheten 63,5 cm. Uträknat med tabeller blir svaret 63,51 cm.

I real- och studentexamen kan en sådan behandling naturligtvis endast användas som kontroll och får icke anses som en godtagbar lösning av uppgiften.

I denna förberedande geometrikurs är eleverna mer än i någon annan del av hela matematikkursen individuellt sysselsatta med att i sina häften rita, mäta, skriva och räkna och läraren mer än eljest med att gå runt i klassen och hjälpa till, där det behövs.

[1] $D$ som beteckning på $AB$:s mittpunkt är uteglömt i figuren.

# EKVATIONER OCH EKVATIONSSYSTEM

## Ekvationslösning medelst aritmetiska resonemang

Någon gång i mars månad i klass 6, kanske ibland t. o. m. tidigare, torde det vara möjligt att sätta i gång med ekvationer.

Enligt Metodiska anvisningar bör man först börja med aritmetiska resonemang vid lösningen. Det gäller ju i detta sammanhang ekvationer, där $x$ förekommer endast på ett ställe i ekvationen, och denna metod tycks mig närmast vara berättigad, emedan man därvid får tillfälle att repetera begreppen summa, skillnad etc.

Vi kan tänka oss behandlingen börja så här. Vi skriver på tavlan:

$$2x + 3 = 7$$

och övar en tid eller kanske snarare en stund med att sätta text till denna likhet: Om ett visst tal (det är $x$) multipliceras med 2 och produkten ökas med 3, blir summan 7. Vilket är talet?

Redan från början bör man starkt understryka, att $x$ står som symbol för ett obekant tal och att man givetvis lika gärna kan välja någon annan symbol. Huvudsaken är dock, att man från början bestämmer sig för en symbol och vet, vad man menar med denna: ett obekant tal, den sökta vikten osv.

Lösningen blir följande: Om en viss produkt ($2x$) ökas med 3, blir summan 7. Då måste produkten vara 4.

$$2x = 4$$

Om ett visst tal multipliceras med 2, blir produkten 4. Då måste talet vara 2.

Om det visar sig svårt att få eleverna att förstå första frågan om produkten, kan det ibland hjälpa, om läraren t. ex. lägger handen över termen $2x$ och säger: Om man ökar någonting med 3, så får man 7. Vad är det, som ökas med 3?

Så vänder vi på det hela. En elev får gå fram till tavlan för att skriva, och läraren dikterar.

| Läraren säger: | Eleven skriver: |
|---|---|
| Om ett visst tal | $x$ |
| multipliceras med 3 | $3x$ |
| och produkten minskas med 1, | $3x - 1$ |
| skillnaden divideras med 4 | $\frac{3x - 1}{4}$ |
| och kvoten ökas med 3, | $\frac{3x - 1}{4} + 3$ |
| så blir summan . . . | |

Om vi nu från början har bestämt oss för att $x$ skall ha värdet 7, vad blir värdet av vår summa? De flesta av eleverna är nog med och kan svara, att summan blir 8.

För säkerhets skull är det nog bäst, att läraren kontrollerar genom att peka på och fråga, hur mycket $3x$ blir och $3x - 1$, $\frac{3x - 1}{4}$ och $\frac{3x - 1}{4} + 3$.

Det är naturligtvis inte meningen, att eleven såsom ovan skall börja från början varje gång; han skall endast tillfoga det nya, alltså framför första radens $x$ skriva en trea, sedan efter detta $- 1$ o. s. v.

Vi har nu fått ekvationen $\frac{3x - 1}{4} + 3 = 8$.

Om V.L. (vänstra ledet) innehåller många förändringar, kan man lämpligen ordna arbetet på följande sätt. Det första vi träffar på i uppgiften, är det obekanta talet ($x$), det andra en produkt ($3x$), det tredje en skillnad ($3x - 1$), det fjärde en kvot $\frac{3x - 1}{4}$ och det femte en summa $\frac{3x - 1}{4} + 3$.

Så skriver vi upp detta.

$$\frac{3x - 1}{4} + 3 = 8$$

| | |
|---|---|
| summan = 8 | |
| kvoten = 5 | $\frac{3x - 1}{4} = 5$ |
| resten = 20 | $3x - 1 = 20$ |
| produkten = 21 | $3x = 21$ |
| talet = 7 | $x = 7$ |

Det är klart, att så länge det i övningen ingår muntlig framställning, måste hela klassen vara med om den.

Men sådana uppgifter, som kan komma till användning, kan också författas av eleverna själva. Vi kan ju låta dem allihop i sina böcker sätta ihop en uppgift. Om sedan en elev läser upp den text, som svarar mot den ekvation han skrivit, kan en annan få skriva ekvationen, och på det sättet (en författare och en sekreterare från varje rad) kan vi få 5 à 6 uppgifter på tavlan, och så låter vi en tredje på varje rad lösa uppgiften enligt ovanstående. Som förut sagts, bör man på detta sätt ha möjlighet att ganska snart få reda på vilka elever som haft svårt att förstå det grundläggande i fråga om ekvationer.

En kort repetition: Vi väljer ett tal, vilket som helst, men i regel håller vi oss till ensiffriga tal, och utför den ena ”godtyckliga” räkningen efter den andra med de fyra enkla räknesätten samt räknar för varje gång ut värdet, så att vi lätt kan se, vilka nya siffervärden vi bör välja, för att vi hela tiden skall få arbeta med hela tal.

Vi väljer $y = 8$ och

$$\frac{4\left(\frac{3y + 1}{5} + 2\right)}{7} - 3 = 1.$$

Vi ökar $3y$, d. v. s. 24, med 1, så går det bra att dividera med 5, och när vi har lagt till 2, lämpar det sig att efter multiplikation med t. ex. 4 dividera med 7.

De få gånger, som det kan bli tillfälle att ge läxa på detta område, kan hemarbetet bli att författa t. ex. 2 st uppgifter av ovan angivna art. Eleverna skulle då ha att:

1. bestämma sig för ett värde på det sökta talet $y$, t. ex. 7.
2. sätta ihop en ekvation, t. ex. $\left[\frac{3y - 1}{5} + 2 = 6.\right]$
3. skriva text till den: Om ett visst tal multipliceras med 3, produkten minskas med 1, den erhållna resten divideras med 5 och denna kvot ökas med 2, så blir summan 6.
4. lösa denna ekvation såsom ovan angivits.
5. lämna svar: Ekvationens rot är 7.

Det går bra att kontrollera arbetet genom att låta eleverna två och två byta böcker och kritisera varandras arbete och meddela iakttagelser till läraren.

Lärobokens uppgifter (åtminstone i R.W.F.) innehåller ofta endast en förändring (addition, subtraktion, multiplikation eller division) och kan därför i sådana fall användas som huvudräkningsuppgifter. Man vinner alltid lite tid därigenom, att man slipper skriva på tavlan. Andra uppgifter, t. ex. av typen $\frac{5{,}5x}{\text{[illegible]}} = 0{,}66$, där man även får med övning på förkortning, kan lämpligen användas vid radräkning och till hemuppgifter.

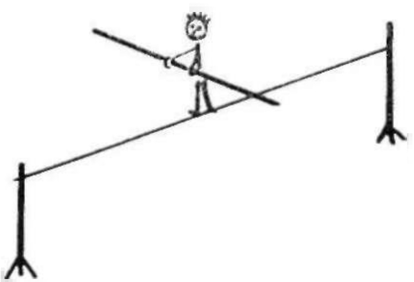
## Ekvationslösning med allmänna metoder

Men även om den nyss behandlade aritmetiska metoden för ekvationslösning kan ha sitt berättigande med tanke på den övning den ger i svenska (författande av text) och i användning av riktiga matematiska uttryck, måste man efter kort tid lämna den och övergå till allmännare metoder.

Med tanke på att vi nu endast har kort tid till förfogande i klass 7, är det ännu viktigare än förut att början härmed göres i klass 6.

Härvid behövs det inga läroböcker. Det är så enkelt att författa enkla ekvationer, att varje elev har möjlighet till det.

Men vi kan väl börja med att tala lite om vad en ekvation är. Det är mycket vanligt, att elever, som i flera år arbetat med ekvationer, inte vet, att ekvation på svenska betyder likhet (lat. *aequus* = lika). Det brukar vara trevligt att i detta sammanhang t. ex. påminna om *ekva*torn (som delar jordytan i två lika delar) och om en *ekvi*librist, som med hjälp av en stång söker "fördela tyngden" lika på bägge sidor om linan.



Det måste bestämt vara så, att elevens känslor gentemot uppgifterna (i detta fall ekvationerna) blir helt andra, om han blir van att själv tillverka dem, än om de skall hämtas ur en uppgiftssamling och han varje gång skall se efter i facit, om han har fått rätt svar. (Det blir nog tillfälle till det ändå.)

Vi bestämmer oss alltså för ett visst värde på $x$, t. ex. 2. Om sedan läraren skriver:

$$3x - 2 = 5x -$$

och så frågar klassen efter värdet av V.L. och första termen i H.L. och därpå för in resultaten på tavlan ovanför det nyss skrivna så här:

$$\begin{array}{c} \phantom{3x - } 4 \phantom{ = 5} 10 \\ 3x - 2 = 5x - \end{array}$$

blir helt naturligt nästa fråga: Vad skall vi nu dra bort från $5x$, för att högra ledet skall bli lika med det vänstra? Det blir säkert inte svårt att få svaret 6.

Så har vi då vår ekvation:

$$3x - 2 = 5x - 6$$

och kan börja tänka på lösningen.

Sedan vi talat om, att det som står till vänster om likhetstecknet ($3x - 2$) kallas *vänstra ledet* och *tecknas V.L.* och det som står till höger om likhetstecknet kallas *ekvationens högra led* och *betecknas H.L.*, har vi att öva med de fyra enkla räknereglerna:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Jag | får | öka | ekvationens båda led med samma tal, |
| ,, | ,, | minska | ,, ,, ,, ,, ,, ,, |
| ,, | ,, | multiplicera | ,, ,, ,, ,, ,, ,, |
| ,, | ,, | dividera | ,, ,, ,, ,, ,, ,, |

Men först av allt bör vi visa klassen, att dessa förändringar är tillåtna. Man kan t. ex. skriva:

$$5 = 5.$$

Det förstår var och en, och lika lätt är det att visa, att om varje femma ökas med t. ex. 3, får man sanningen:

$$5 + 3 = 5 + 3.$$

Vi övar lämpligen att uttala denna sanning på gammalt och vanligt sätt: Om lika stora ökas med lika stora (eller med samma tal), så blir summorna lika.

Till omväxling ritar man kanske två sträckor $a$ och $b$, som är lika långa, lägger till lika lång sträcka till var och en ($c$) och läser sedan axiomet ovan: Om $a$ är lika med $b$ och båda ökas med $c$, så blir $a + c = b + c$.

På liknande sätt kan vi behandla de tre återstående reglerna (axiomen). Enligt vad här föreslagits, skulle dessa övningar komma i slutet av klass 6 eller möjligen i början av klass 7, alltså tidigare än de kan komma till användning i geometrien, vilket eventuellt kan vara en fördel.

Så återvänder vi då till vår ekvation:

$$3x - 2 = 5x - 6.$$

Genom *hyfsning* (reduktion av likformiga termer) kan varje ekvation av första graden bringas att antaga detta utseende.

I ena ledet måste ju alltid finnas större tillgång på $x$ än i det andra. Har den ena $x$-termen minustecken, representerar den en brist och har båda minustecken, är bristen minst (tillgången störst) i termen med minsta siffertalet (minsta talvärdet). Vi ökar eller minskar alltid så, att vi får $x$:en i ledet med den största tillgången (minsta bristen). I vårt fall skriver vi ut ordentligt under ekvationen:

Jag minskar ekvationens båda led med $3x$ och får

$$-2 = 2x - 6.$$

Eftersom det nu i högra ledet finns en brist på 6 enheter, ökar vi bägge leden med 6 och skriver:

Jag ökar ekvationens bägge led med 6.

$$4 = 2x.$$

Nästa förändring är självklar.

Jag dividerar ekvationens båda led med 2:

$$2 = x.$$

I regel går inte arbetet så fort framåt, som här angivits. När vi talat om, att man har rättighet att öka eller minska bägge leden med samma tal, brukar barnen få föreslå tal, som de tycker kan vara lämpliga. Även om någon skulle föreslå, att vi i vår ekvation

$$3x - 2 = 5x - 6$$

skulle öka bägge leden med 4, så utför vi den räkningen

$$3x + 2 = 5x - 2$$

och frågar sedan: Kan man säga, att ekvationen är enklare nu än förut? De flesta inser, att ekvationen inte har blivit enklare, och så får eleverna komma med nya förslag, tills det gått upp för klassen, att vi bör öka eller minska med ett tal, så att vi får endast en sifferterm i ena ledet och ingen i det andra.

I många läroböcker (uppgiftssamlingar) finns det stora mängder av uppgifter av typen

$$3x - 2 + 5x + 8 - 7 = 7x + 15 - 3x - 4.$$

Men fråga är, huruvida man inte slösar med den dyrbara tiden, om man låter eleverna lösa en stor mängd sådana uppgifter. Man kan lika gärna på ett tidigt stadium (april—maj i klass 6) införa parenteser, så får man samtidigt övning på parentesborttagning och termreduktioner. Man får naturligtvis inte glömma övningen i bråkräkning för strävan att i början få enkla uppgifter med hela tal. Övningen kan ju fås så, att man i en annars enkel ekvation använder bråktal i stället för hela tal *men* lika bra eller bättre är nog att ibland låta $x$ vara ett blandat tal och att alltid i början pröva ekvationerna. Det är en ständigt återkommande erfarenhet, att eleverna nog kan lösa en ekvation, men att pröva den, och då alldeles särskilt, om roten är ett bråktal, det brukar vara besvärligt, inte bara därför att prövning sällan tycks övas utan också därför att nog bråkräkning ofta överges efter klass 6.

## Ekvationer med parenteser

Sedan eleverna några gånger i skolan (radräkning) fått tillverka, lösa och *pröva* ekvationer av nyss nämnda typ och i hemuppgifter antingen räknat uppgifter av egen tillverkning eller ur läroboken, börjar vi lösa ekvationer med parenteser.

Vi sätter $x = 5$ (skrives på tavlan) och låter sedan fantasien löpa ungefär hur som helst men får i början tänka på att inte få V.L. mindre än noll.

$$\overset{12}{\overset{18}{3(2x - 4)} - \overset{6}{2(8 - x)}} = \overset{21}{7(3x - 12)} -$$

Vi låter naturligtvis eleverna själva räkna ut värdet av varje term, och när vi nu alltså i V.L. har 12 och i högra 21, blir frågan, vad vi skall dra bort i H.L.

När det blivit klart, att vi i H.L. måste minska med 9, kan vi ju fråga, om det är nödvändigt att skriva *9* eller om vi kan hitta på något annat. Det behövs inte mycken fantasi för att finna t. ex. $(2x - 1), 3(x - 2), 3(8 - x), (x + 4)$. Vi väljer det andra och får:

$$3(2x - 4) - 2(8 - x) = 7(3x - 12) - 3(x - 2).$$

Till en början är det nog klokt att "ge order" om att faktorerna framför parenteserna multipliceras in i parenteserna (se sid. 160 och följande).

*Lösning:* Jag multiplicerar in faktorerna i parenteserna.

$$(6x - 12) - (16 - 2x) = (21x - 84) - (3x - 6).$$

Jag tar bort parenteserna.

$$6x - 12 - 16 + 2x = 21x - 84 - 3x + 6.$$

Jag reducerar likformiga termer:

$$(6x - 12 - 16 + 2x = 21x - 84 - 3x + 6)$$

$$8x - 28 = 18x - 78.$$

Allteftersom vi tar med termerna, stryker vi under dem.

Jag minskar ekvationens båda led med $8x$.

$$-28 = 10x - 78.$$

Jag ökar ekvationens båda led med 78.

$$50 = 10x.$$

Jag dividerar ekvationens båda led med 10.

$$x = 5.$$

**När lösningen är klar**, suddar vi ut hela lösningen och låter endast den givna ekvationen och $x$-värdet vara kvar. Detta för att hos eleverna *inpränta, att prövningen sker i den givna ekvationen* och inte i någon ekvation, som kommit fram under arbetets gång. Vi har alltså:

$$3(2x - 4) - 2(8 - x) = 7\,(3x - 12) - 3(x - 2)$$
$$x = 5.$$

*Prövning:*

V.L. $= 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 18 - 6 = 12$
H.L. $= 7 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 21 - 9 = 12.$

*Svar:* Ekvationens rot är 5.

Det möter inga svårigheter att på detta område öva med **radräkning**. En elev författar, en löser, en prövar. Alla, som sitter kvar i bänkarna, kritiserar (varje rad sin representant).

När övningen pågått någon tid med hemuppgifter av egen tillverkning eller ur boken, kan den som finner det vara lämpligt övergå till att multiplicera in faktorerna och ta bort parenteserna samtidigt, men då får man nog först öva ungefär så här:

*Ekv.:* $3(2x - 4) - 2(8 - x) = 7(3x - 12) - 3(x - 2)$

*Lösning:* Plus 3 ggr plus $2x$ är $+ 6x$; plus 3 ggr minus 4 är minus 12; minus 2 ggr plus 8 är minus 16; minus 2 ggr minus $x$ är plus $2x$ etc.

Vi bör också öva med att låta $x$ vara ett decimalbråk, men som det säkert är lite besvärligare att författa sådana uppgifter, kan vi ju ta exempel ur läroboken.

## Ekvationer författade på måfå

Men det kan också vara roligt att låta några elever skriva upp ekvationer utan att på förhand bestämma något värde på $x$. Det inträffar alltid vid sådana tillfällen, att i något eller snarare några fall den "lösande" eleven blir ställd inför oväntade uppgifter.

En författare—elev skriver t. ex. *identiteten*

$$2(x + 3) - 3(2x + 1) = 7 - 4(x + 1).$$

Om vi nu här utelämnar texten, har vi att av "näste man" vänta oss:

$$2x + 6 - 6x - 3 = 7 - 4x - 4$$
$$- 4x + 3 = 3 - 4x.$$

Men här blir det nog stopp, och blir det inte här, så tar det emot nästa gång, vare sig "sekreteraren" skriver

$$- 4x = - 4x \text{ eller}$$
$$+ 3 = 3.$$

Vi har kommit till ett sådant ställe i arbetet, där alla måste sitta ner och läraren måste ta vid med förklaringar.

Vi söker ju det värde på $x$, som *satisfierar* (tillfredsställer de fordringar, som finns i) ekvationen. Vad skall vi kunna svara ? Alltid blir det någon i klassen, som räcker upp handen och föreslår, att $x = 0$. Det är lätt att pröva, och vi finner, att det stämmer. Så kommer kanske en annan med förslaget, att $x = 1$. Prövning visar, att det också duger. Hjälper så läraren till med 2 och 3, så har vi nog snart alla i klassen med, och vi kontrollerar, att vad man än föreslår som värde på $x$, så duger det.

Om man så tittar på sista raden av lösningen, är det lätt att förstå, att:

3 alltid är lika med 3, oberoende av värdet på $x$ och på samma sätt att

$$-4x = -4x$$

för alla möjliga värden på $x$.

Man ser lätt, att de båda leden efter hyfsning blev alldeles lika, nämligen $3 - 4x$ och att detta uttryck $3 - 4x$ från början hade skrivits på två olika sätt.

En sådan ekvation kan ha kommit fram, även om ”kompomisten” från början tänkt sig ett bestämt värde (t. ex. 6) på $x$. Vanligen blir han förvånad, då kamraten inte får fram detta värde på $x$.

Om detta kommit fram på ett tidigt stadium (början av klass 7), får vi räkna med att försöka komma igen senare, när vi börjat med kvadratregeln.

*Ex.:* $2(x - 1)^2 = 2x^2 - 4x + 2.$

Då är det lättare att kalla likheten för en formel, och då bör vi också tala om, att likheter, som gäller för alla möjliga värden på ingående bokstavsbeteckningar, kallas för *identiteter* (identitetskort brukar vara bekant). Uppgiften avslutas således lämpligen med att läraren något uppehåller sig vid och förklarar vad som menas med en identitet.

Vi bör gärna visa, att slutet på vår lösning kan skrivas:

$$-4x + 3 = 3 - 4x$$
$$0x + 3 = 3$$
$$0x = 0$$

eller i ord: Om ett visst tal multipliceras med 0, blir produkten $= 0$. Vilket är talet? Även om skrivsättet förefaller eleverna lite ovanligt, kan vi nog räkna med att någon i klassen är med på noterna och förstår, att $x$ kan vara vilket tal som helst.

## Ekvationer med roten 0

Under arbetets gång får man säkert också någon gång en ekvation i stil med följande:

$$3(5x + 1) - 2(x + 3) - 5(x + 2) = x - 13.$$

(Texten utelämnas här.)

$$\begin{aligned} 15x + 3 - 2x - 6 - 5x - 10 &= x - 13 \\ 8x - 13 &= x - 13 \\ 7x - 13 &= -13 \end{aligned}$$

De flesta elever brukar nog stanna här eller vid nästa steg

$$7x = 0.$$

Det är så pass ovanligt med roten 0, både när man själv tillverkar uppgifter och i läroböckerna, att det brukar verka som något nytt för eleverna.

Ja, här är ju endast att konstatera att $x = 0$ och pröva med detta $x$-värde.

## Ekvationer med negativa rötter

Med säkerhet kommer vi också att av någon elev få en ekvation som följande:

$$\begin{aligned} 3(4x + 1) - 2(3 - x) &= 4(2x - 5) + 5 \\ 12x + 3 - 6 + 2x &= 8x - 20 + 5 \\ 14x - 3 &= 8x - 15 \\ 6x &= -12 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

När vi bara en gång har sett, att tal med minustecken också kan vara rötter till ekvationer, kan vi i fortsättningen lite då och då vid tillverkning av ekvationer bestämma oss för en rot, som är ett tal med minustecken.

Det är alldeles särskilt nyttigt med dessa uppgifter på grund av den ”teckenövning”, som erhålles vid prövningen. I vårt fall får vi vid prövningen:

$$\text{V.L.} = 3(-7) - 2 \cdot 5 = -21 - 10 = -31$$
$$\text{H.L.} = 4(-9) + 5 = -36 + 5 = -31$$

*Svar:* Ekvationens rot är $-2$.

## Ekvationer med bråktal till rot

När man skriver upp ekvationer ”på rak arm”, måste det med nödvändighet också komma med ekvationer, vilkas rötter blir bråktal.

*Ex.:*
$$4(2x - 1) - 7(1 + 3x) = 2(x - 10)$$
$$x = \frac{3}{5}$$
$$x = 0{,}6.$$

*Ex.:*
$$4(2x - 1) - 7(1 + 3x) = 0$$
$$x = -\frac{11}{13}$$

I dessa fall är det prövningen, som ger den viktigaste träningen, nämligen på räkning med allmänna bråk.

## Orimliga ekvationer

Skulle vid elevernas författarskap inte alla önskvärda ekvationsformer komma med, måste läraren träda till och författa en uppgift också. I den nyss givna framställningen t. ex. saknar vi en ekvation sådan som följande:

$$8 - 7(3x - 2) = 19 - 3(5x + 1) - 2(7 + 3x)$$
$$8 - 21x + 14 = 19 - 15x - 3 - 14 - 6x$$
$$22 - 21x = 2 - 21x.$$

Okar vi här båda leden med $21x$, får vi:

$$22 = 2.$$

Vår fråga blir alltså nu: För vilka värden på $x$ är $22 = 2$? Det är klart, att det inte existerar några sådana värden på $x$. Svaret blir alltså, att ekvationen inte har någon rot eller, om man så vill, att den är orimlig.

Det kan vara lärorikt att skriva fortsättningen på lösningen ovan på detta sätt:

$$\begin{aligned} 22 - 21x &= 2 - 21x \\ 22 &= 2 + 0x \\ 20 &= 0x. \end{aligned}$$

Om vi skulle följa våra vanliga regler, skulle vi här säga: Jag dividerar ekvationens båda led med 0, och vi får

$$\frac{22}{0} = x.$$

Här passar det bra att fråga eleverna, när och i vilket sammanhang de fick lära sig att dividera med 0. Vi får hoppas, att svaret blir, att de aldrig har fått lära sig det, och läraren bör tillfoga, att det kommer de heller aldrig att få lära sig. Man förstår av ekvationslösningen, att det inte finns något värde på $x$, som satisfierar ekvationen, och därför kan inte heller division med 0 utföras.

## Ekvationer med heltalsnämnare

Den övning, som vi här strävar efter, nämligen att reducera likformiga termer och att ta bort parenteser, den får vi även, om vi övar med ekvationer med hela tal till nämnare, och därför kan man nog ganska snart fortsätta och arbeta med sådana uppgifter (november i klass 7).

Vi kan t. ex. börja vårt arbete så här: Vi bestämmer oss för några enkla tal till nämnare, t. ex. 3, 4 och 6, och väljer talet 7 till rot.

$$\frac{\quad}{3} - \frac{\quad}{4} = - \frac{\quad}{6}$$

I täljarna skriver vi så godtyckliga men enkla multipler av $x$, t. ex.:

$$\frac{2x + \quad}{3} - \frac{\quad - 3x}{4} = \quad - \frac{5x \quad}{6}$$

Så ber vi klassen om förslag till tal att skriva i täljaren, så att värdet av täljaren blir en jämn multipel av nämnaren. Här brukar det inte vara någon svårighet att få klassen med. I första täljaren passar det bra med $2x + 1$. Då blir täljarens värde 15 och bråkets 5. I andra täljaren kan vi t. ex. skriva $25 - 3x$. Andra bråkets värde blir då 1 och vänstra ledets värde 4. I bråket i H.L. kan vi t. ex. skriva $5x - 17$, så att bråkets värde blir 3. Nästa fråga blir då, vad vi skall skriva i H.L. mellan likhetstecknet och minustecknet. Om vi skriver så här:

$$\overset{5}{\frac{2x + 1}{3}} \overset{-}{-} \overset{1}{\frac{25 - 3x}{4}} = \quad - \overset{3}{\frac{5x - 17}{6}}$$

så blir det säkert lätt att få svar på frågan. Vi måste skriva 7 där eller också $x$, vilketdera vi tycker är trevligast. Vi väljer kanske $x$ och har så fått vår ekvation:

$$\frac{2x + 1}{3} - \frac{25 - 3x}{4} = x - \frac{5x - 17}{6}$$

som det gäller att lösa.

Vi kan tänka oss ett resonemang ungefär så här:

*Läraren:* Vad skall vi nu företa oss med den här ekvationen? Skall vi öka bägge leden med någonting, eller skall vi minska, multiplicera eller dividera bägge leden?

*Eleven:* Jag tycker, att vi skall multiplicera bägge leden med 3.

*Läraren:* Varför det då?

*Eleven:* Jo, då kan man förkorta med 3.

*Läraren:* Skriv på tavlan, hur du menar.

Eleven skriver i bästa fall $\frac{3(2x + 1)}{3}$

Kommer inte parentesen med, får läraren ingripa.

*Läraren:* Men man kunde kanske hitta på något tal, som är roligare att använda.

*En elev:* 12 är mycket bättre, för då kan man förkorta i alla tre bråken.

Nu är det nog bäst, att läraren själv skriver:

$$12\left(\frac{2x+1}{3} - \frac{25-3x}{4}\right) = 12\left(x - \frac{5x-17}{6}\right)$$

Vi ser, att när vi multiplicerar in faktorerna 12 i parenteserna, så blir *varje term* multiplicerad med 12, och därför säger vi i fortsättningen: Jag multiplicerar ekvationens *alla termer* med 12.

Varifrån fick vi då talet 12? Jo, det är minsta gemensamma dividenden till nämnarna i våra bråk, och vi vänjer oss så småningom att här, på samma sätt som vid addition och subtraktion av allmänna bråk, skriva M.G.D. $= (2 \cdot 2 \cdot 3$ i vårt fall), så att vi har det för ögonen vid arbetet.

Vi får alltså:

$$\frac{12(2x+1)}{3} - \frac{12(25-3x)}{4} = 12x - \frac{12(5x-17)}{6}$$

varav

$$4(2x + 1) - 3(25 - 3x) = 12x - 2(5x - 17).$$

Ganska snart kan eleverna nog också lära sig att skriva sista raden *utan att* först skriva den föregående. Efter detta arbetar vi på gammalt känt sätt.

Nu behandlar vi uppgiften i ett sammanhang:

Lösning:
$$\frac{2x+1}{3} - \frac{25-3x}{4} = x - \frac{5x-17}{6}$$

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{25-3x}{2 \cdot 2} = x - \frac{5x-17}{2 \cdot 3}$$

M.G.D. = $2 \cdot 2 \cdot 3$.

Jag multiplicerar ekvationens *alla termer* med M.G.D. och får:

$$4(2x + 1) - 3(25 - 3x) = 12x - 2(5x - 17).$$

Jag multiplicerar in faktorerna i parenteserna.

$$8x + 4 - 75 + 9x = 12x - 10x + 34.$$

Jag reducerar likformiga termer:

$$17x - 71 = 2x + 34.$$

**Jag minskar ekvationens båda led med $2x$ och ökar dem med 71:**

$$15x = 105.$$

Jag dividerar ekvationens båda led med 15.

$$x = 7.$$

*Prövning:* $\quad$ V.L. $= \frac{15}{3} - \frac{4}{4} = 5 - 1 = 4$

$$\text{H.L} = 7 - \frac{18}{6} = 7 - 3 = 4.$$

*Svar:* **Ekvationens rot är 7.**

Eleverna har i regel ingen svårighet att tillverka uppgifter av detta slag både vid radräkning och till hemuppgifter, men i allmänhet får nog lärobokens uppgifter användas härtill.

## Ekvationer med bråktal i nämnaren

**Med alldeles samma motivering som två gånger förut kan vi ganska snart (nov.—dec. i klass 7) gå ännu ett steg framåt. Vi bildar på samma sätt som nyss en ekvation med $x = -2$!**

$$\begin{array}{ccccc} 5 & - & 1{,}5 & 7 & - \; 3\tfrac{1}{2} \\ \dfrac{5(10 - 7x)}{24} & - & \dfrac{3(2 - 9x)}{40} & = & \dfrac{7(x + 17)}{30} \end{array}$$

Men vi löser nu inte ekvationen i detta skick utan förkortar inför klassen varje bråk med den faktor, som står i täljaren framför parentesen. Helst bör någon elev utföra förkortningen, medan läraren tjänstgör som sekreterare. Vi får:

$$\frac{10-7x}{\text{[illegible]}} - \frac{2-9x}{\text{[illegible]}} = 7 - \frac{x+17}{\text{[illegible]}}$$

Uppgifter av denna art, som ju är mycket lätta att tillverka, förekommer sparsamt i läroböckerna (R.W.F. har två enkla ex. i blandade uppgifter).

Vid lösningen kan vi gå fram på två vägar. *Antingen* säger vi: Här har vi tre bråk. Vad är det man får göra med ett bråk utan att dess värde förändras? Det fortsatta resonemanget ger, att bråken i tur och ordning bör förlängas med 5, 3 och 7, d. v. s. med nämnarnas nämnare. På det viset kommer vi till den ekvation, som vi hade från början, och den har vi förut lärt oss lösa.

Skulle bråk förekomma i både täljare och nämnare, såsom i t. ex.:

$$\frac{3\frac{1}{\text{[illegible]}}x - 2\frac{3}{4}}{2{,}4} - \frac{2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2}}{4{,}5} = \frac{5x}{6} - 2\frac{5}{6} : 9 \text{ eller}$$

$$\frac{\frac{7}{2}x - \frac{11}{4}}{\frac{12}{5}} - \frac{\frac{7}{3}x - \frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{5x}{6} - \frac{17}{6 \cdot 9}$$

förlänger vi vart och ett av de stora bråken med M.G.D. till dess "små nämnare". Första bråket förlänges alltså med $2 \cdot 2 \cdot 5$ och det andra med $2 \cdot 3$, och man får:

$$\frac{70x-55}{48} - \frac{14x-21}{27} = \frac{5x}{6} - \frac{17}{54}$$

*Eller också* går vi den andra vägen och påminner då först eleverna om att bråkstreck är likvärdigt med divisionstecken och att i vår uppgift [illegible] 3 [illegible] 7

täljaren $10 - 7x$ skall divideras med 4,8 eller $4\frac{4}{5}$ eller $\frac{24}{5}$ och **att det utföres enligt regeln för division med bråk så, att** $(10 - 7x)$ multipliceras med $\frac{5}{\text{[illegible]}}$ På samma sätt förfares med de återstående bråken.

## Ekvationer med x i nämnaren

Vid de hittills behandlade typerna av ekvationer har vi räknat med att eleverna själva åtminstone i viss mån skulle författa uppgifterna. När vi kommer till ekvationer med bråk, vilkas nämnare t. ex. är $x - 2$ och $2x - 1$, blir det flera saker att tänka på, och vi kan därför inte gärna ha elever som författare. Vi bestämmer oss för roten 5 och skriver:

$$\frac{2x +}{x - 2} \quad \frac{3x + 3}{2x - 1} =$$

Tänker vi oss ett siffertal i H.L., måste detta vara sådant, att $x^2$-termerna försvinner. Om vi fyller ut vår ekvation så här:

$$\frac{2x + a}{x - 2} - \frac{3x + 3}{2x - 1} = \text{[illegible]}$$

och sätter igång lösningen genom att multiplicera *alla* termer i ekvationen med M.G.D. till nämnarna, nämligen

$(x - 2)(2x - 1)$, får vi:

$$(2x + a)(2x - 1) - (x - 2)(3x + 3) = (bx - 2b)(2x - 1)$$
$$4x^2 - 2x + 2ax - a - (3x^2 - 3x - 6) = 2bx^2 - 5bx + 2b$$
$$x^2(4 - 3 - 2b) + x(3 - 2 + 2a + 5b) = 2b - 6 + a.$$

Om nu $x^2$-termen skall försvinna, måste $1 - 2b = 0$ eller $b = 0{,}5$.

$$[\text{illegible}]\;\frac{[\text{illegible}]}{3{,}5 + 2a} = \frac{[\text{illegible}]}{2a + 3{,}5} = \frac{[\text{illegible}]}{2a + 3{,}5}.$$

Här kan vi nu sätta in ett värde vilket som helst på $a$. Vi finner t. ex.:

| $a$ | $x$ |
|---|---|
| 2 | $-0{,}4$ |
| $-2{,}5$ | 5 |
| $-3$ | $3{,}2$ |
| $-4$ | 2 |

Hittills har vi brukat räkna uppgifter av detta slag i klass 7 (mars—april). Hur det kan gå efter den nya kursplanen är väl oklart. Att vi inte gärna kan tänka oss ovanstående arbete utfört i klassen och ännu mindre av en elev är väl självklart, men för den lärare, som vill författa sina provräkningsuppgifter själv, har det måhända sitt intresse. Ett sådant arbete kan ju ge uppgifter för en längre tid.

Vi ville ha roten 5 och har därför att skriva:

$$\frac{2x - 2{,}5}{x - 2} - \frac{3x + 3}{2x - 1} = 0{,}5$$

$$(2x - 2{,}5)(2x - 1) - (3x + 3)(x - 2) = 0{,}5(x - 2)(2x - 1)$$

$$4x^2 - 7x + 2{,}5 - 3x^2 + 3x + 6 = x^2 - 2{,}5x + 1$$

$$7{,}5 = 1{,}5x$$

$$x = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 5.$$

Å andra sidan kan vi bestämma ett godtyckligt värde på $x$ och räkna ut motsvarande värde på $a$.

Vill vi nu få fram ännu mer övning i vår uppgift, kan vi lämpligen förkorta det första bråket med t. ex. 5 och det andra med 3 och som uppgift lämna:

$$\frac{0{,}4x - 0{,}5}{0{,}2x - 0{,}4} - \frac{x + 1}{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} = 0{,}5.$$

Avslutningsvis kan även beträffande behandling av ekvationer framhållas värdet av att eleverna får vänja sig vid att i en lösning skriva de olika ekvationerna så, att likhetstecknen kommer mitt under varandra, då detta är möjligt. Förutom att en sådan lösning bidrar till klarheten och redan, ökar den också elevernas möjlighet att kontrollera och finna eventuella fel.

## Iakttagelser vid behandling och rättning av ekvationer

I fortsättningen lämnas exempel på några ekvationer, vilkas lösning uppvisar vissa detaljer av särskilt intresse.

På första matematikskrivningen i en första realring av fyraårigt gymnasium gavs följande uppgift:

$$\frac{1}{\text{[illegible]}}\left[2-\frac{1}{3}\left(3-\frac{1}{4}x\right)\right]+2\frac{6}{42}\ \text{[illegible]}$$

Uppgiften hade givits i avsikt att få veta, om eleverna från realskolan mindes, att man före lösandet bör ägna någon minut åt att titta på ekvationen för att se, om där finns något särskilt att iakttaga. I detta fall gällde att först se, att $\frac{\text{[illegible]}}{42}$ och $\frac{\text{[illegible]}}{35}$ kunde förkortas till $\frac{\text{[illegible]}}{7}$ resp. $\frac{\text{[illegible]}}{7}$ och att värdet av sista termen i V.L. är $\frac{\text{[illegible]}}{6}$.

Vi har då fått:

$$\text{[illegible]}$$

Nu är att lägga märke till att båda leden lämpligen minskas med $\frac{1}{6}$, men de flesta eleverna tänkte nog ungefär så här: M.G.D. = 12. Därför multiplicerar jag med 12.

I flera fall hade resultatet följande utseende:

$$6[24 - 4(36 - 3x)] + 2 = 12.$$

Det är tydligt, att de elever, som arbetade på detta sätt, *inte* hade klart för sig, att texten borde ha varit:

Jag multiplicerar ekv:s *alla termer* med 12. I klass 7 får eleverna order att varje gång skriva text och stryka under *alla* med tre steck och *termer* med två streck.

De elever det här var fråga om, hade tydligen inte gjort klart för sig, att ekvationen innehöll endast 3 termer. De måste i hastigheten ha multiplicerat alla tal, som finns i ekvationen, med 12.

I fortsättningen medtages endast en felaktig lösning:

$$\frac{1}{2}\left[2 - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{4}x\right)\right] + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{6}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1} - \frac{1}{4}x\right)\right] + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{5}{3}\left(\frac{3}{1} - \frac{1}{4}x\right)\right] + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{15}{3} - \frac{5}{12}x\right] + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{15}{6} - \frac{5}{24}x + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{60}{24} - \frac{5x}{24} + \frac{4}{24} = \frac{24}{24}$$

$$64 - 5x = 24$$

$$40 = 5x$$

$$x = 8.$$

***Prövning:***

$$\text{V.L.} = \frac{1}{2}\left[2 - \frac{1}{3}\left(3 - 2\right)\right] + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \left[2 - \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

H.L. $= 1$.

*Svar:* Ekvationens rot är 8.

Det är inte uteslutet, att någon lärare efter denna behandling skulle skriva Nöjaktigt, då ju resultatet tydligen är riktigt. Men det är mer än en gång så, att *det som i första hand skall bedömas, är behandlingen, icke resultatet,* och där blir den riktiga bedömningen:

Rätt resultat. Icke nöjaktigt.

Som läsaren lätt ser, förekommer vid övergången från rad 2 till rad 3 ovan ett mycket fult fel. Eleven har arbetat, som om $\frac{6}{3} - \frac{1}{3}$ stått inom parentes och ekvationen haft utseendet:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{6}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{1} - \frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{6} = 1.$$

Man frapperas också av att eleven gång på gång skrivit om $\frac{1}{6}$ i V.L. och 1 i H.L. utan att minska båda leden med $\frac{1}{6}$.

Ekvationen kan t. o. m. lösas med rent aritmetiskt resonemang:

$$\frac{1}{2}\left[2 - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{4}x\right)\right] = \frac{5}{6}$$

$$2 - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{4}x\right) = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{4}x\right)$$

$$1 = 3 - \frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{4}x = 2$$

$$x = 8.$$

När man får rätt svar på en uppgift, trots att man gjort fel, brukar det finnas två fel, som tar ut varandra. Men här har det endast förekommit ett fel. Hur kan nu detta komma sig?

Vi har då att undersöka, vilket värde på $x$ som satisfierar

[illegible]

Lösning av denna ekvation ger:

$$2 = 2\left(3 - \frac{1}{4}x\right)$$

$$1 = 3 - \frac{1}{4}x$$

[illegible]

$$x = 8.$$

Det är alltså inte så underligt, att resultatet blev riktigt, trots ett grovt fel.

Det må tillåtas, att ännu ett par exempel av liknande art medtages. På en provräkning i början av ht i klass 8 förekom följande:

En elev skrev: $3(2x - 1) - 2(4x - 5) = 7 - 4(x - 1)$

$$6x - 1(!) - 8x + 5(!) = 7 - 4x + 1(!)$$
$$6x + 4 - 8x = 7 - 4x + 1$$
$$6x + 4 = 7 + 4x + 1$$
$$6x = 3 + 4x + 1$$
$$2x = 4$$
$$x = 2.$$

*Prövning:* V.L. $= 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$

H.L. $= 7 - 4 \cdot 1 = 7 - 4 = 3.$

*Svar:* $x = 2.$

Man ser lätt, att det i andra raden ovan förekommer tre fel. Där borde nämligen ha stått:

$$\begin{aligned}
&6x - 3 - 8x + 10 = 7 - 4x + 4\\
&-2x + 7 = 11 - 4x\\
&2x = 4\\
&x = 2.
\end{aligned}$$

Här gäller det för läraren att icke endast se på svaret utan även gå igenom varje rad i lösningen. I annat fall måste eleven tro, att han räknat rätt, och fortsätter på samma sätt, och varför skulle han inte göra det?

I maj månad gavs i samma klass ekvationen:

$$(2x - 3)^2 - 2(x + 1)(2x - 1) = 15 - 16x,$$

som av en elev löstes sålunda:

$$\begin{aligned}
&(2x - 3)(2x - 3) - 2(x + 1)(2x - 1) = 15 - 16x\\
&4x^2 + 9 - 2x(!) - 2(!) - 4x^2 - 1(!) = 15 - 16x\\
&4x^2 + 6 - 2x - 4x^2 = 15 - 16x\\
&6 - 2x = 15 - 16x\\
&-2x = 9 - 16x\\
&x = 2.
\end{aligned}$$

*Prövning:* $\text{V.L.} = 1 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 1 - 18 = -17$
$\text{H.L.} = 15 - 32 = -17.$

Vid jämförelse med den riktiga lösningen:

$$\begin{aligned}
&4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 - 2x + 2 = 15 - 16x\\
&11 - 14x = 15 - 16x\\
&2x = 4\\
&x = 2
\end{aligned}$$

finner man, att eleven begått 4 eller 5 fel, och elevens lösning bör alltså bedömas med "Ej nöjaktigt".

Nu en lösning av uppgiften i realexamen vt 1936:

$$\frac{2x + 1{,}5}{1\frac{1}{7}x - 2} - \frac{7(x - 0{,}5)}{4x - 7} = \frac{3}{4}.$$

Här gäller det återigen att *icke* omedelbart söka minsta gemensamma dividenden till nämnarna och att utan vidare sätta den till $4(1\frac{1}{7}x - 2)(4x - 7)$. Den som gör så, får stå sitt kast. I så fall får man:

$$4(2x + 1{,}5)(4x - 7) - 28(\frac{8}{7}x - 2)(x - 0{,}5) = 3(4x - 7)(\frac{8}{7}x - 2)$$

$$(8x + 6)(4x - 7) - (16x - 28)(2x - 1) = (12x - 21)(\frac{8}{7}x - 2).$$

Efter hyfsning erhålles:

$$x^2 - \frac{77}{12}x = -\frac{98}{12}$$

$$x = \frac{77}{24} \pm \sqrt{\frac{5929 - 4704}{24^2}}$$

$$x = \frac{77}{24} \pm \frac{35}{24}$$

$$x_1 = 4\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{7}{4}.$$

Nu bör man alltid, efter det att en ekvation med $x$ i nämnaren lösts, se efter, om någon nämnare blir 0 för detta $x$-värde. En sådan rot måste förkastas, då division med 0, såsom eleverna tidigare lärt sig, är omöjlig. Den har i detta fall kommit med på grund av en olämplig operation.

I vårt fall blir båda nämnarna 0 för $x = \frac{7}{4}$, och denna rot har kommit med därför, att man till M.G.D. tagit $\frac{4 \cdot 8}{7}(4x - 7)^2$ i stället för $4(4x - 7)$ och på så sätt fått $(4x - 7)$ som faktor i alla ekvationens termer.

Ser man däremot några ögonblick på ekvationen, så finner man, att första bråket till att börja med lämpligen förlänges med 7.

$$\frac{7(2x + 1{,}5)}{8x - 14} - \frac{7(x - 0{,}5)}{4x - 7} = \frac{3}{4}; \quad \text{M.G.D.} = 4(4x - 7).$$

$$14(2x + 1{,}5) - 28(x - 0{,}5) = 3(4x - 7)$$

$$21 + 14 = 12x - 21$$

$$56 = 12x$$

$$x = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Ännu ett ex. av liknande art:

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{3x + 6}} = \frac{4}{x} - 1$$

Första bråket förlänges med $12x(x + 2)$:

$$\frac{12(x + 2) - 12x}{x(x + 2) + 4x} = \frac{4 - x}{x}, \text{ vilket hyfsas till}$$

$$\frac{24}{x(x + 6)} = \frac{4 - x}{x}$$

Eleven tänkte sig nu inte för. Han multiplicerade korsvis, som man ibland säger, och fick:

$$24x = x(4 - x)(x + 6)$$
$$24x = 24x + 4x^2 - 6x^2 - x^3$$
$$x^3 + 2x^2 = 0$$
$$x^2(x + 2) = 0, \text{ vilket ger:}$$
$$x = 0 \mid x = 0 \mid x = -2.$$

$x = 0$ gör två nämnare och $x = -2$ likaså två nämnare i den givna ekvationen lika med 0. Den har alltså ingen rot.

Innan vi lämnar ekvationerna, skall vi diskutera prövningen till en enkel uppgift.

$$\frac{5x}{3x+21} + \frac{9-2x}{x+7} = 1 - \frac{3x+5}{7x+49}; \text{ M.G.D.} = 3 \cdot 7(x+7).$$

$$35x + 21(9 - 2x) = 21(x + 7) - 3(3x + 5)$$
$$35x + 189 - 42x = 21x + 147 - 9x - 15$$
$$189 - 7x = 12x + 132$$
$$57 = 19x$$
$$x = 3.$$

Det är mycket vanligt, att prövningen till en sådan uppgift tar sig ut så här:

$$\text{V.L.} = \frac{15}{30} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = 5 + 3 = 8$$

$$\text{H.L.} = 1 - \frac{14}{70} = 1 - \frac{2}{10} = 10 - 2 = 8,$$

där $\frac{1}{2} + \frac{3}{10}$ blir $5 + 3$ i st. för $\frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}$

och $1 - \frac{2}{10}$ blir $10 - 2$ i st. för $\frac{10}{10} - \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$, en prövning,

som således innehåller ett allvarligt fel.

## Ekvationssystem

De ekvationssystem, som blir föremål för behandling på realskolestadiet, löses nog så gott som alltid med additionsmetoden. Efter hyfsning får man alltid ett system av följande typ:

$$7x - 2y = 11$$
$$5x + 3y = 30$$

Ofta förekommer det, att man får se lösningen utförd på ungefär följande sätt:

$$\begin{cases} 21x - 6y = 33^{1} \\ 10x + 6y = 60 \end{cases}$$

Nu är det ju tyvärr så, att överstrykningar är mycket omtyckta (bl. a. förkortningar i pyramidform), men i detta fall har man begått en direkt felaktighet. Om man vid förkortning stryker över ett tal, så skriver man ju något annat i stället, men det blir det inte fråga om här. Man har helt enkelt ändrat systemet till en orimlighet.

$$\begin{cases} 21x = 33 \\ 10x = 60. \end{cases}$$

Nej, överstrykningar är i regel onödiga och olämpliga. Låt oss i stället skriva:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 11 \\ 5x + 3y = 30 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{cases} 21x - 6y = 33 \\ 10x + 6y = 60 \end{cases}$$

där siffrorna mellan de vertikala strecken får ange de faktorer, varmed resp. ekvation skall multipliceras led för led.

Nu använder vi axiomet: Om lika stora (V.L. och H.L. i översta ekvationen) ökas med lika stora (V.L. och H.L. i undre ekvationen), så blir summorna lika, eller: Om det första ($21x - 6y$) är lika med det andra (33) och det tredje ($10x + 6y$) är lika med det fjärde (60), så är det första plus det tredje lika med det andra plus det fjärde eller

$$31x = 93; \; x = 3.$$

Det behövs inte mycken övning för att man skall samtidigt kunna utföra både multiplikation och addition så här:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 11 \\ 5x + 3y = 30 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}, \text{ varav } \begin{aligned} 31x &= 93 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

[1] Läsaren får här tänka, att var och en av de båda termerna $6y$ är överstruken med ett snett streck (eller helst själv skriva dit det).

I regel sätter man naturligtvis in $x = 3$ t. ex. i den undre ekvationen och löser ut $y$ ur $15 + 3y = 30$, varav $y = 5$.

Man kan ju också börja med att eliminera (skaffa bort) $x$. Lösningen ser då ut på följande sätt:

$$\left\{\begin{array}{l} 7x - 2y = 11 \\ 5x + 3y = 30 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} -5 \\ +7 \end{array}\right|$$

$$\mathbf{31y = 210 - 55 = 155}$$

$$y = 5.$$

Att den övre ekvationens båda led bör multipliceras med 5 och den undre med 7 är självklart. Vi måste ha minustecken i ena fallet. Vi sätter det framför 5, därför att vi naturligtvis vill ha plustecken framför $y$-termerna.

I regel är det emellertid så, att det är mindre lämpligt, för att inte säga olämpligt, att utan vidare endast tala om för eleverna, hur ett nytt slag av uppgifter skall behandlas. I föreliggande fall skulle man ju med viss framgång kunna tala om ungefär det, som sagts härovan, och så sätta eleverna till att räkna. Men säkert vinner vi på att resonera med dem en stund om vad ett ekvationssystem är och vad man strävar efter, t. ex. så här:

Läraren skriver på tavlan:

$$7x - 2y = 11$$

och frågar, vad man skall kalla detta för. Så småningom bör det komma fram, att man bör kalla det, som skrivits, för en *ekvation*, dvs. ett samband mellan vissa obekanta storheter och bekanta storheter, som här är siffertal. Förut har det emellertid endast funnits en obekant storhet i våra ekvationer, och det har gällt att finna det värde (eller de värden), som satisfierar ekvationen, dvs. tillfredsställer de fordringar, som sambandet ställer på den obekanta storheten. Här är det helt olika. Vad skall vi göra här? Kan vi lösa ekvationen?

Så smått bör vi komma till att man kan ge $x$ ett godtyckligt värde och räkna ut det motsvarande värdet på $y$ och tvärtom. Sådana storheter, som kan antaga olika värden, brukar vi kalla för *variabler*. Det är tydligt, att om man ger $x$ olika värden, så får också $y$ olika värden, och i så fall kallar vi $x$ för den *oberoende* variabeln och $y$ för den *beroende*. Det är klart, att vi också kan göra tvärtom.

Till slut bör vi vara överens med klassen, att man kan finna hur många samhörande värdepar på $x$ och $y$ som helst eller, om vi så vill, hur många lösningssystem som helst till vår ekvation.

Vi låter en samling elever vid tavlan söka sådana samhörande värdepar:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x = 5$ ger | $\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$ | $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ | $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ | $\begin{cases} x = 7 \\ y = 19 \end{cases}$ |
| $35 - 2y = 11$ | | | | |
| $2y = 24$ | | | | |
| $y = 12$ | | | | |

Så lägger vi till vår andra ekvation:

$$5x + 3y = 30.$$

Om denna ekvation gäller alldeles detsamma, som vi förut sagt om ekvationen $7x - 2y = 11$. Vi kan låta några andra elever söka några lösningssystem, och då får vi kanske:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4{,}8 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 15. \end{cases}$$

Vad kan då vara meningen, om vi förenar de båda ekvationerna med en klammer?

$$\begin{cases} 7x - 2y = 11 \\ 5x + 3y = 30. \end{cases}$$

Jo, vi måste söka ett (eller flera) lösningssystem, som samtidigt satisfierar båda ekvationerna. I vårt fall finns det endast ett sådant system.

Ett ekvationssystem (av första graden) har *ett* lösningssystem, som i vårt fall är:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

Det är lätt att tillverka uppgifter av den enkla typen ovan. Man kan gärna, om man anser sig ha tid att öva radräkning, från början bestämma sig för lösningssystem med negativa tal och blandade tal.

## Grafisk framställning

Ännu bättre föreställning om innebörden av ett ekvationssystem får man med hjälp av grafisk framställning.

Vi kan t. ex. sätta i gång på följande sätt. Läraren ritar på en rutad del av tavlan två mot varandra vinkelräta linjer:

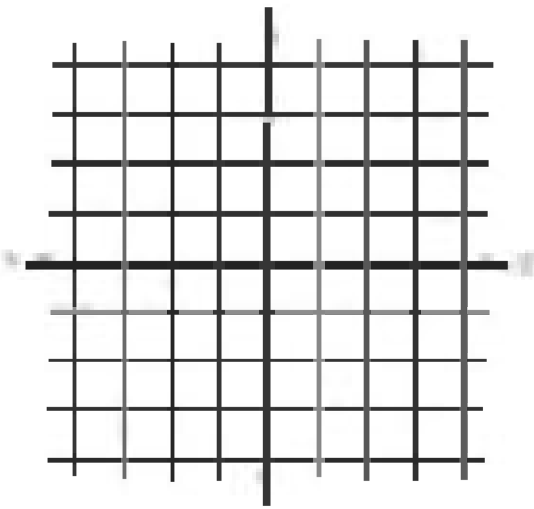



Fig. 18.

Skulle inte tavlan vara försedd med rutad del, kan man med hjälp av en linjal (den brukar vara 6 cm bred) rita vågräta och lodräta linjer, så att linjeavståndet blir lika med linjalens bredd.

De grova linjerna kallar vi för axlar och tänker oss, att hela rutsystemet är målat på en skolgård med axlarna i norr—söder och öster—väster och med 1 meters linjeavstånd.

Nu tänker vi oss, att en person skall ställa sig 2 m från N—S-axeln och 3 m från Ö—V-axeln, och ber en elev rita ut, var personen i så fall skall ställa sig.

Eleven funderar och säger troligen sedan, att det kan man inte veta. Det finns 4 punkter att välja på.

Vi måste alltså närmare precisera vår uppgift, t. ex. Ö2, N3, d. v. s. två meter öster om nord—syd-linjen och 3 m norr om öst—väst-linjen. I så fall är punkten fullt bestämd.

Efter en stunds övning att på detta sätt märka ut punkter får vi göra följande klart för klassen. Första uppgiften anger avståndet i vågrät led från mittlinjen, och den andra uppgiften, som ofta skiljes från den första med ett semikolon eller ett snedstreck, anger avstånd i lodrätt led från den vågräta mittaxeln. Men det räcker inte att endast ange avståndet; man måste också veta, åt vilket håll från axeln avståndet skall mätas av, om det skall vara åt öster eller väster i första uppgiften och norr eller söder i den andra. Nu är det så, att vi i matematiken brukar ersätta Ö och N med + samt V och S med — (minustecken). I regel kallas den vågräta axeln $x$-axel och den lodräta $y$-axeln. Beteckningen (2; 3) eller 2/3 anger en punkt, som ligger på plussidan (öster, till höger) om den lodräta ($y$-)axeln på ett avstånd av 2 längdenheter och på plussidan om (norr om, över) den vågräta ($x$-)axeln. (— 1; — 4) betecknar en punkt, som ligger på minussidan (väster, till vänster) om $y$-axeln en längdenhet från $y$-axeln och på minussidan om (söder om, under) $x$-axeln och 4 längdenheter därifrån.



De tal, i sista uppgiften — 1 och — 4, som användes för att ange punktens läge, består alltså dels av ett tecken, som anger, på vilken sida om $y$- resp. $x$-axeln punkten ligger, dels en måttsuppgift (ett talvärde), som anger, hur långt ifrån axeln (räknat efter en normal och uttryckt i längdenheter) punkten ligger. Sådana tal, som har både tecken och talvärde, kallas *algebraiska tal*, och om de användes på detta sätt för att ange en punkts läge i ett koordinatsystem, kallas de *koordinater*. I vår sista uppgift är — 1 punktens $x$-koordinat och — 4 dess $y$-koordinat. Man bör inte heller försumma att påpeka betydelsen av ordet *koordinera* = samordna. Genom att samordna två algebraiska tal kan man bestämma en punkts läge i planet.

Återgår vi nu till vårt ekvationssystem

$$\begin{cases} 7x - 2y = 11 \\ 5x + 3y = 30 \end{cases}$$

och börjar med ekvationen $7x - 2y = 11$, blir vår närmaste uppgift att med hjälp av det nyss införda koordinatsystemet grafiskt framställa denna ekvation. På alldeles samma sätt som förut skaffar vi oss ett antal samhörande värdepar på $x$ och $y$, som satisfierar ekvationen, t. ex.:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 19 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1{,}5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -5{,}5 \end{cases}$$

Nu räknar vi med att $x$- och $y$-värdena är koordinater och sätter ut dessa punkter i ett koordinatsystem (fig. 19). Vi ser lätt, att punkterna befinner sig på en rät linje. och då ligger det nära till hands att alla de lösningssystem, som man kan finna till ekv. $7x - 2y = 11$, representerar de samhörande koordinaterna till punkter på denna räta linje $L_1$ och tvärtom *att $L_1$ är sammanfattningen av (geometriska orten för) alla de punkter, vilkas koordinater satisfierar ekvationen.*

Det är lätt att låta en grupp elever dels ur ekvationen räkna ut flera lösningssystem och kontrollera, att de nya punkterna ligger på linjen, dels läsa av koordinaterna för några punkter på linjen och kontrollera, att koordinaterna satisfierar linjens ekvation.

Representerar vi på samma sätt den andra ekvationen $5x + 3y = 30$, får vi en annan rät linje $L_2$.

Då har vi: $L_1$ är geometriska orten för alla de punkter, vilkas koordinater satisfierar ekvationen $7x - 2y = 11$, och $L_2$ är geometriska orten för alla de punkter, vilkas koordinater satisfierar ekvationen $5x + 3y = 30$.

Då måste $\begin{cases} 7x - 2y = 11 \\ 5x + 3y = 30 \end{cases}$

vara sammanfattningen av alla de punkter, vilkas koordinater satisfierar båda ekvationerna. De elever, som eventuellt inte begrep det tidigare resonemanget för lösande av ekvationssystem, bör nu betydligt lättare kunna förstå, att denna ”sammanfattning” inte kan vara något annat än linjernas skärningspunkt. Ekvationssystemet har alltså ett enda lösningssystem, nämligen skärningspunktens koordinater.

När man i fortsättningen grafiskt löser ekvationssystem (med två obekanta), använder man naturligtvis för uppritning av en rät linje endast två punkter.

$L_1$: $7x - 2y = 11$.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | $-5{,}5$ |
| 1 | $-2$ |
| 2 | $1{,}5$ |
| 3 | 5 |
| 4 | $8{,}5$ |
| 5 | 12 |

$L_2$: $5x + 3y = 30$.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-3$ | 15 |
| 0 | 10 |
| 3 | 5 |
| 6 | 0 |
| 7 | $-1\frac{2}{3}$ |
| 9 | $-5$ |

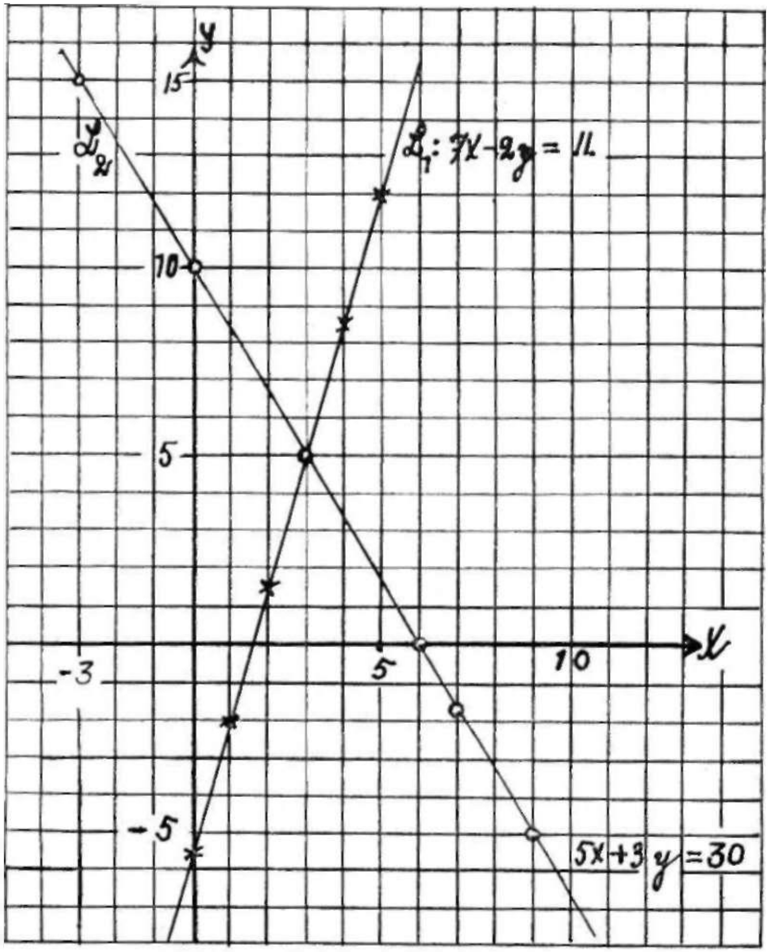



Fig. 19.

## AFFÄRSPROBLEM

Detta är ett jämförelsevis nytt slag av problem. Förut, då vi endast talade om inköpssumma, vinst och försäljningssumma, var det inte möjligt att ge eleverna någon tillnärmelsevis riktig uppfattning om de verkliga förhållanden, som råder i affärslivet. Möjligheten härtill har i hög grad ökats genom det nya, som kommit till de senaste åren. Detta medför också den fördelen, att man lättare kan variera uppgifterna.

Första gången behandlas sådana uppgifter i samband med procenträkningen i klass 6, men sedermera, då även rabatten kommit med och ekvationer införts, kan det nog vara lämpligt med en repetition eller flera, om tiden tillåter, kanske både i klasserna (7), 8 och 9, t. ex. någonting i den här stilen.

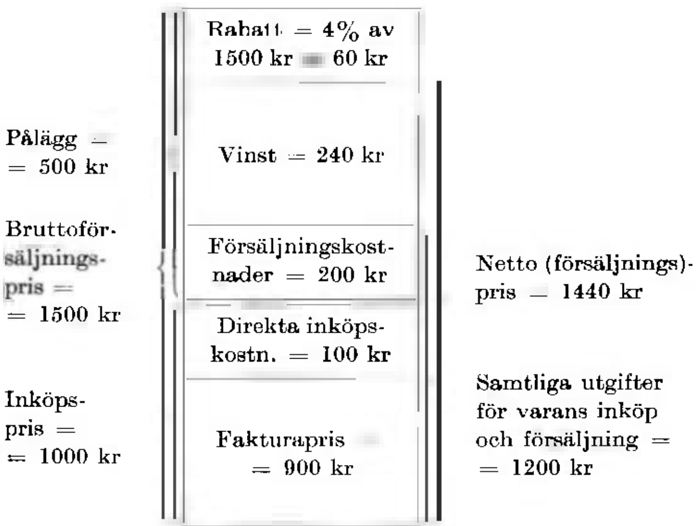
Vi tänker oss, att vi är kaffehandlare och köper ett större parti kaffe från Brasilien. (Nyttigt, att dagen förut i geografien repetera odlingsplatser och utskeppningshamnar.) Då får vi från ranchägaren, som vi tänker oss samtidigt vara affärsman, en faktura, där det står, hur mycket han skall ha för kaffet fritt ombord på en ångare i t. ex. Sao Paulos hamn. Detta är *fakturapriset.* Sedan får eleverna komma med förslag till utgifter, som köpmannen måste vidkännas, innan kaffet kommer in i hans lager, t. ex. i Stockholm. Det är ingen som helst svårighet att sätta fantasien i gång. Det blir kostnad för transporten till Göteborg och sedan per tåg eller bil till Stockholm, utgifter för omlastningar och ev. lagring i tullhus, försäkringar under alla transporter och tull. Alla dessa utgifter, som är förenade med inköpet, kallas *inköpskostnader.*

Så fastslår vi, att alla kostnaderna. innan varan kommer in i lagret, nämligen fakturapriset och inköpskostnaderna, tillsammans utgör *inköpssumman.*

När vi s. a. s. har fått kaffet in i lagret, blir det fråga om nya utgifter. Eleverna får komma med sina förslag, och snart har vi en hel samling: hyra för lagerlokalen, lön åt magasinsskötare, som skall se till, att inte kaffet fördärvas m. m., lön åt försäljare, både kringresande och sådana, som sköter minutförsäljningen, hyra för affär och försäkringar.

För att kunna täcka alla dessa utgifter och för att själv få något att leva på måste affärsmannen bestämma *försäljningspriset* (bruttoförsäljningspriset) till mycket större belopp än inköpspriset; han måste för att få försäljningspriset öka inköpspriset med ett visst belopp, som vi kallar *pålägg.*

Under hela detta resonemang arbetar vi på en teckning (en grafisk framställning över alla dessa utgifter), och till slut får den ungefär detta utseende:




Det är klart, att varje lärare kan ha sin egen åsikt om hur detta diagram bör utformas. Så finns i Elementas marshäfte för 1950 ett schema av adjunkt Sven Forsman. Jag föredrar det nedanstående, som nog är lättare att åstadkomma på en provräkning och där vederbörliga summor skrives in på sina platser.

Med detta ”diagram” på tavlan har läraren rika möjligheter att öva klassen på de olika begreppen. Det borde gå bra att så småningom sudda ut texten och endast låta siffervärdena stå kvar. Några exempel på frågor: Hur många procent utgör vinsten av

a) bruttopriset?
b) samtliga handelsmannens utgifter?
c) inköpspriset?

Hur många procent utgör försäljningskostnaderna av samma storheter som förut? o. s. v.

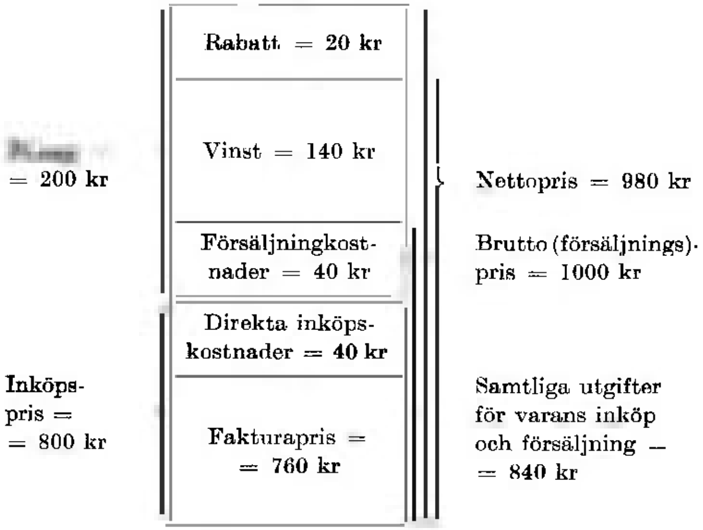
Här har vi också ett bra tillfälle att öva på begreppet *förhållande*. Om vi t. ex. frågar: Hur förhåller sig vinsten till övriga förekommande storheter?, blir svaren följande:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Vinsten | förhåller | sig till | fakturapriset | som | 240:900 |
| ,, | ,, | ,, ,, | direkta inköpskostnader | ,, | 240:100 |
| ,, | ,, | ,, ,, | inköpspriset | ,, | 240:1000 |
| ,, | ,, | ,, ,, | försäljningskostnaderna | ,, | 240:200 |
| ,, | ,, | ,, ,, | rabatten | ,, | 240:60 |
| ,, | ,, | ,, ,, | nettopriset | ,, | 240:1440 |
| ,, | ,, | ,, ,, | bruttopriset | ,, | 240:1500 |
| ,, | ,, | ,, ,, | pålägget | ,, | 240:500 |
| ,, | ,, | ,, ,, | samtliga utgifter | ,, | 240:1200 |

Om man byter ut ordet vinst mot något av de andra förekommande uttrycken, kan vi tydligen få 90 sådana möjligheter. Att man sedan genom lämplig förkortning kan få en direkt övergång till hundradelar, dvs. procent, bör givetvis även utnyttjas.

Självklart är väl, att det hela är värdelöst, om inte eleverna *verkligen* lär sig att rita och redogöra för diagrammet.

Låt oss nu också tillverka några uppgifter på området och därvid utgå från följande diagram:



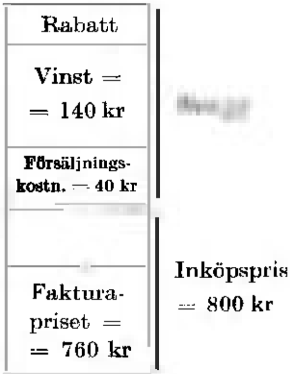

Vi börjar med en enkel uppgift för klass 6 t. ex.:

En varas fakturapris är 760 kr. För tull, frakt och emballage måste affärsmannen betala 40 kr. Sedan lägger han på 25 % av inköpspriset. Om han i försäljningsutgifter betalar 5 % av inköpspriset, hur stor blir hans vinst? (Vi utesluter rabatten, som kanske inte behandlats vid den tiden, och får vinsten till 160 kr.)

Lite längre fram tar vi med rabatten genom att t. ex. ändra sista meningen: Om han i försäljningskostnader måste betala 5 % av inköpspriset och så lämnar 2 % rabatt, hur stor blir då hans förtjänst?

Senare, kanske i början av klass 7, kan vi nog ändra meningen så här: Om hans omkostnader i samband med försäljningen uppgår till 5 % av inköpspriset, vinner han i alla fall 140 kr (130 kr), även om han lämnar kunden rabatt. **Hur många procents rabatt lämnade han?** (2 % resp. 3 %.)

I slutet av klass 8 eller början av klass 9 kan vi gå lite längre, t. ex. så här: I direkta inköpskostnader för en vara, vars fakturapris är 760 kr, får en affärsman betala 5 % av inköpspriset. Om han lämnar 2 % (3 %) rabatt och i försäljningsomkostnader måste betala 40 kr, förtjänar han ändå 140 (130) kr. **Hur många procent av inköpspriset utgjorde pålägget?**




Här måste vi först räkna ut inköpspriset. Om vi betecknar detta med $x$ kr, får vi först:

$$x - 0{,}05x = 760$$
$$0{,}95x = 760$$
$$x = 800.$$

Om vi antar, att påläggsprocenten är $y$, blir pålägget $8y$ kr och rabatten $0{,}02\,(800 + 8y)$ kr, och vi får ekvationen:

$$0{,}02(800 + 8y) + 140 + 40 = 8y$$
$$16 + 0{,}16y + 180 = 8y$$
$$7{,}84y = 196$$
$$y = 25.$$

Om vi ändrar första meningen så: I direkta inköpskostnader för en vara, vars fakturapris är 760 kr, får en affärsman betala 40 kr . . ., kan vi nog ge uppgiften i klass 7 eller början av klass 8. Då får vi omedelbart den sista ekvationen ovan!

Ännu en variation för detta stadium må anföras:

För en vara, vars fakturapris är 760 kr, uppgår de direkta inköpskostnaderna till 5 % av inköpspriset. Om handelsmannens pålägg utgör 25 % av inköpspriset och han i utgifter för försäljningen får betala 40 kr samt dessutom lämnar 2 % (3 %) rabatt, hur många procents vinst får han, om man räknar vinsten i procent av a) bruttopriset?

En annan gång begär man vinsten i procent av b) nettopriset eller c) av samtliga utgifter för varans inköp och försäljning.

Här måste vi först räkna ut inköpspriset liksom förut. Sedan vi fått detta till 800 kr, får vi lätt rabatten till 20 kr, resp. 30 kr och vinsten till 140 kr, resp. 130 kr.

Betecknar vi vinstprocenten med $x$, resp. $y$ och $z$, får vi

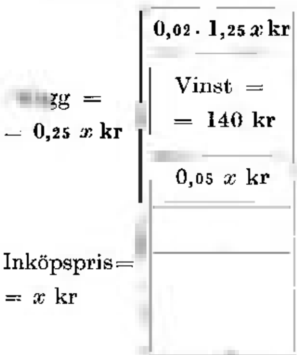
a) $10x = 140$ (130) $\quad$ b) $\frac{980y}{100} = 140$ $\quad$ c) $\frac{840x}{100} = 140$

$x = 14$ (13) $\quad$ $y = \frac{1400}{98}$ $\quad$ $x = \frac{1400}{84} = \frac{100}{6}$

$y = \frac{100}{\cdot}$

Som uppgift i klass 9 tänker vi oss följande:

En handelsman, som inköpt en vara, lägger på 25 % av inköpspriset men lämnar vid försäljningen 2 % rabatt. För omkostnader i samband med lagring och försäljning får han vidkännas utgifter till ett belopp av 5 % av inköpspriset. Trots detta vinner han 140 kr. Om utgifterna för frakt, tull och emballage likaså uppgår till 5 % av inköpspriset, på vilken summa lydde fakturan?



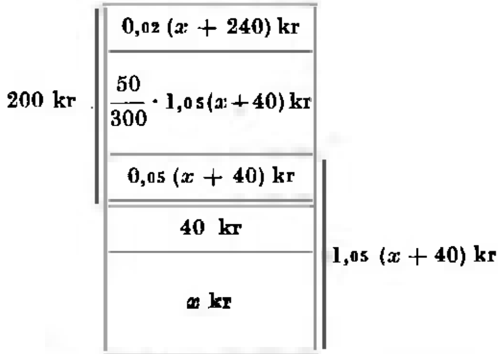

Teckningen ger omedelbart:

$$0,25x - 0,05x - 0,02 \cdot 1,25x = 140$$
$$0,20x - 0,0250x = 140$$
$$0,175x = 140$$
$$0,025x = 20$$
$$x = \frac{20000}{25} = 800.$$

Inköpspriset är alltså 800 kr och fakturapriset i kr $= 0,95 \cdot 800 =$ $= 95 \cdot 8 - 760$.

Till slut en något svårare uppgift.

En handelsman, som inköpt en vara (till ett visst fakturapris), måste i direkta inköpskostnader betala 40 kr. Sedan gjorde han ett pålägg av 200 kr, men dels fick han i samband med försäljningen betala ut 5 % av inköpspriset, dels lämnade han vid försäljningen 2 % rabatt. Hans vinst uppgick till 16 $^2/_3$ % av alla hans utgifter i samband med inköp och försäljning av varan. Sök fakturapriset!




Om avdelningarna på teckningen betyder samma storheter som förut, får man:

$$\frac{50}{300} \cdot 1{,}05(x + 40) = 200 - 0{,}05(x + 40) - 0{,}02(x + 240)$$

$$0{,}175(x + 40) + 0{,}05(x + 40) = 200 - 0{,}02x - 4{,}80$$

$$0{,}225x + 9 = 195{,}2 - 0{,}02x$$

$$0{,}245\,x = 186{,}2$$

$$x = 760.$$

*Svar:* Fakturapriset var **760 kr.**

Har läraren gjort sig en sådan här stomme vid början av ett läsår, så kan han kanske klara sig hela läsåret genom att variera den, även om han har flera klasser, men har han bara börjat med att tillverka uppgifter för provräkningarna, så nöjer han sig nog inte med en. För den lärare, som själv vill komponera sina uppgifter, torde den föregående framställningen kunna tjäna som vägledning.

## HASTIGHETSPROBLEM

Vår första lektion på det här området kan vi kanske börja med att rita en teckning på tavlan,

A Fig. 20 a. B

och så börjar samtalet med eleverna.

Den räta linjen mellan $A$ och $B$ föreställer en landsväg. I stugan vid vägen bor en liten pojke med sin far och mor. Pojken tycker, att han springer bra, och har fått för sig, att han skall kunna bli en bra löpare, men han förstår också, att om han skall lyckas med det, så måste han börja träna i tid. Men han klarar det inte själv. Han måste ha hjälp av far och mor, och det får han på lördagskvällarna och söndagseftermiddagarna. Det räcker ju inte med att bara springa. Han måste ha vissa uppgifter.

Vad kan då det vara för uppgifter? Samtalet med eleverna ger säkert efter en stund att pojken måste ha reda på hur lång vägen $AB$ är, och att mamman och pappan måste vara försedda med en klocka var och att dessa klockor måste gå alldeles lika.

Vad är det då, som han kan räkna ut, när han vet, hur lång vägen är och hur lång tid han behövde för att springa den vägen?

En del elever kommer väl att säga, att han får reda på hur lång tid han behöver för att springa 100 m eller 200 m eller liknande, medan andra, som tänker sig, att pojken inte alls har mätt upp ett jämnt hundratal meter, svarar, att man får reda på hans fart eller hur fort han springer, eller kanske någon säger, att man får reda på hans hastighet.

Det är tydligen de tre storheterna *väg*, *tid* och *hastighet*, som vi har att syssla med här. Det är nog bäst att läraren genast talar om för eleverna, att vi som tecken för vägen använder bokstaven $s$ (av det latinska ordet *spatium* = = sträcka, väg), för tiden bokstaven $t$ (inte bara som förkortning av vårt svenska ord tid utan snarare av det latinska *tempus* = tidrymd, tid) och för hastighet $v$ (av latinets *velocitas* = snabbhet, eng. *velocity*, fr. *velocité*).

Det ställer bara till trassel, om man betecknar vägen med $v$ och hastigheten med $h$. De elever, som ämnar gå vidare till gymnasium eller fackskolor, måste ju ändå senare övergå till beteckningarna $s$ och $v$ på väg och hastighet.

Om det nu skulle ha inträffat, att pojken på teckningen hade mätt upp 1500 m och att han sprungit den sträckan på precis 5 min, kan detta antecknas så:

På 5 min. springer han 1500 m;
på 1 min. springer han 300 m;
hans hastighet är då 300 m/min.

För att öva in sambandet mellan vägen, tiden och hastigheten kan vi t. ex. skriva:

$$v = 300 \text{ m/min} = \frac{300 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \frac{600 \text{ m}}{2 \text{ min}} = \frac{900 \text{ m}}{3 \text{ min}} = \frac{18\,000 \text{ m}}{60 \text{ min}} =$$

$$= \frac{18 \text{ km}}{1 \text{ tim}} = \frac{5 \text{ m}}{\frac{1}{60}\text{min}} = \frac{5 \text{ m}}{1 \text{ sek}} = \frac{150 \text{ m}}{30 \text{ sek}}.$$

vilka uttryck man lämpligen läser: Hastigheten är 300 meter i minuten, eller pojken springer 300 meter på en minut eller 900 meter på 3 minuter eller 18 000 meter på 60 minuter eller 5 meter på en sekund och icke: Hastigheten är $\frac{900}{3}$ meter/min.

I alla bråken har vi en väg i täljaren och den motsvarande tiden i nämnaren. Därför är det tydligen så, att hastigheten = $\frac{\text{vägen}}{\text{tiden}}$.

Det är nog inte så ovanligt, att eleverna försöker lära sig detta samband liksom också $s = v \cdot t$ eller $t = \frac{s}{v}$ utantill.

En och annan lyckas kanske därmed, men det är säkert lättare att hålla ihop sambandet, om man tillhåller eleverna att tänka på att $v$ uttryckes i $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$ eller $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ och att m kan ersättas med $s$ och min eller sek med $t$.

Sambandet erhålles också lätt sålunda:

På 1 min rör sig kroppen $v$ m.

På $t$ min rör sig kroppen $vt$ m.

Men denna sträcka är just den väg, som kroppen tillryggalagt på $t$ sek, och man får $s = vt$.

En annan gång ritar vi till omväxling en bil eller en cykel och utför arbetet med hjälp av den för att kunna väga hoppas, att eleverna i någon mån skall kunna känna sig som medagerande.

Nu är det tid att tillverka några uppgifter och tala om olika sätt att behandla dem. Eleverna bör kunna hjälpa till med att författa.

$C \to v = 100 \frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{5000 \text{ m}}{50 \text{ min}}$ $\qquad v = \frac{4000 \text{ m}}{50 \text{ min}} = 80 \frac{\text{m}}{\text{min}}$

$A$

kl. 8 P kl. 8

Har vi ritat en sådan här figur, så blir väl svårigheten snarast att hejda fantasien. Men vi måste ju börja med något enkelt. Om vi säger, att de båda vandrarna träffas efter 50 min i $P$, så blir vägen $AP = 50 \cdot 100$ m $= 5000$ m och vägen $BP$ blir $50 \cdot 80$ m $= 4000$ m. Hela vägen blir alltså 9 km.

Så skall vi, d. v. s. läraren och eleverna eller helst enbart eleverna, sätta text till uppgiften. En version kan då bli: Två personer C och D, som bor i $A$ och $B$ resp. vid samma landsväg, börjar en dag kl. 0800 att gå emot varandra. C, som är yngre, går 100 m/min, och D går 80 m/min. Om de möts kl. 0850, hur lång är vägen $AB$?

En annan: Två personer C och D, som bor i $A$ och $B$ resp. vid samma landsväg, börjar en dag kl. 0800 att gå emot varandra. C är yngre och går 100 m/min, men D behöver 1 min 15 sek. för att gå 100 m. Om vägen $AB$ är 9 km, hur mycket är klockan, då de möts?

När vi skall lösa uppgiften, ritar vi en rät linje, som får föreställa vägen $AB$:

C$\rightarrow$ $100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ $\qquad\qquad$ $80 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ $\leftarrow$D

A $\qquad$ 9000 m $\qquad$ B

kl. 8$\rightarrow$ $\quad$ $100x$ m $\quad$ P $\quad$ $80x$ m $\quad$ $\leftarrow$ kl. 8

På ett eller annat sätt får vi räkna ut att B:s hastighet är 80 m/min. På vanligt sätt skriver vi: Antag, att de möts $x$ min efter kl. 8. Då har A gått $100x$ m och B $80x$ m. Detta skriver vi ut på teckningen och får med dess hjälp omedelbart ekvationen

$$100x + 80x = 9000$$
$$x = 50,$$

Det brukar vara mycket vanligt, att man vid dessa uppgifter använder sig av en tabell, som i vårt fall skulle ta sig ut så här:

| | tid i min | hastighet i m/min | väg i m |
|---|---|---|---|
| C | $x$ | 100 | $100x$ |
| D | $x$ | 80 | $80x$: |

Observera att sorterna bör skrivas ut.

Även om man gör sig en sådan tabell, bör man *icke* underlåta att rita och på teckningen skriva ut åtminstone vägarna. Det är dock så fördelaktigt att ha både givna och betecknade uppgifter överskådligt uppskrivna framför sig, att man gärna kan angiva tider och hastigheter, ja, även klockslag. Vid $P$ kan man naturligtvis skriva kl. (8 tim $+ x$ min).

Med en teckning sådan som ovanstående framför oss kan vi (om tiden räcker) författa många uppgifter, men här får vi nog nöja oss med att säga några ord om ett par andra variationer av hastighetsuppgifter.

Både vid hastighets- och arbetsproblem (där ju ibland *arbetsförmågan* brukar kallas *arbetshastighet*) förekommer fall, där man får veta, hur lång tid de agerande personerna (maskinerna) behöver för att tillryggalägga en viss väg eller utföra ett visst arbete.

I båda fallen har vi att börja vårt arbete med att ta reda på hur stor del av vägen eller arbetet som avverkas på en tidsenhet.

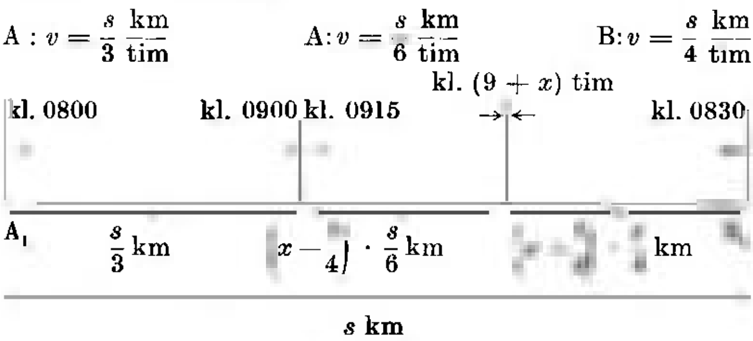
Men låt oss sätta ihop en liten uppgift.

Av två personer A och B, som bor i gårdarna $A_1$ och $B_1$ vid en landsväg, kan A normalt cykla vägen $A_1B_1$ på 3 tim, under det att B behöver 4 timmar. En dag kl. 0800 startar A mot $B_1$, men kl. 0900 blir det något fel på cykeln. När han efter precis 15 min sätter i gång igen, kan han endast hålla hälften så stor fart som vanligt. Hur mycket är klockan, när han möter B, som kl. 0830 startade från $B_1$ för att möta A och som utan uppehåll cyklade med sin vanliga hastighet?

Om hela vägen betecknas med $s$ km blir A:s hastighet =

= [illegible] km/tim och B:s [illegible] km/tim. Vi antar dessutom, att de möts $x$ tim efter kl. 9.

En tydlig teckning ger:




Teckningen ger omedelbart ekvationen:

[illegible]

[illegible]

$$4x - 1 + 6x + 3 = 16$$

$$10x = 14$$

$$x = 1{,}4.$$

*Svar:* De möttes kl. 10.24.

Det är givande att grafiskt framställa förflyttningarna med tiden, och det hjälper säkert till att stimulera undervisningen.

Om vi i vår sista uppgift för att underlätta uppritningen sätter vägen lika med 72 km ($s = 72$), så reser A i början med en hastighet av 72 km på 3 tim eller 2 km på 5 min och efter pausen 2 km på 10 min. B reser med en hastighet av 72 km på 4 timmar eller 6 km på 20 min. Avsätter vi sedan tiden efter en vågrät axel och vägen efter en lodrät axel, så tar sig den grafiska framställningen ut så här. Man finner, att A och B mötes ungefär kl 10.24 i det närmaste 38 km från $A_1$ och 34 km från $B_1$.

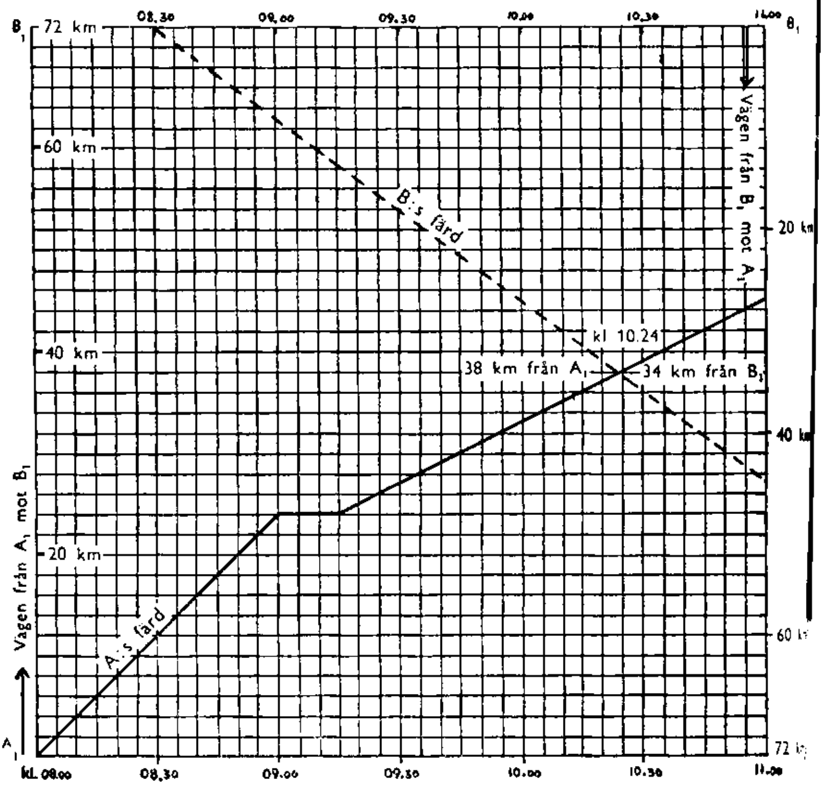



Fig. 20 b.

Hastighetsuppgifter, där kroppar rör sig efter varandra i en sluten bana, brukar vara besvärliga. Här spelar ordet ”varva” stor roll. Har man några minuter diskuterat, vad det ordet bör betyda (och det vet många elever på förhand), så brukar svårigheten vara övervunnen. För varje gång, som kroppen med den större hastigheten passerar den andra kroppen, har den rört sig ett varv mer än den langsammare eller med andra ord varvat den.

Låt oss räkna en uppgift: Två kroppar med hastigheterna 35 m/sek och 50 m/sek rör sig i samma riktning i en sluten bana av 120 m längd. Hur lång tid förflyter mellan två tillfällen, då den ena passerar den andra?

Vid lösningen av uppgiften låter vi rörelsen börja i ett ögonblick, då kropparna befinner sig i samma punkt av banan, och antager, att de träffas efter $x$ sekunder. Då har kropparna tillryggalagt $35x$ m resp. $50x$ m, d. v. s. att kroppen med den större hastigheten har rört sig $15x$ m längre än den andra eller ett varv mer, vilket ger ekvationen:

$$15x = 120$$
$$x = 8.$$

Då har kropparna tillryggalagt $2\frac{1}{3}$, resp. $3\frac{1}{3}$ varv.

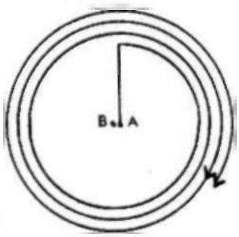



Fig. 20 c.

Att rita en teckning till detta slag av uppgifter går nog, men det är inte lätt att göra den snygg och tydlig. I regel får man väl, åtminstone när tiden är knapp, nöja sig med en skriftlig framställning i stil med den ovan givna och en ritning med en enkel sluten kurva med startpunkt och mötespunkt, tider och hastigheter.

Men det kan vara skäl att behandla åtminstone någon uppgift grafiskt på en lektion och ev. ge en sådan uppgift till hemläxa.

Om vi på ett 5-mm-rutat papper avsätter vägen 120 m på en vågrät axel, så passar det i vanliga räkneböcker bra med 5 m per ruta. I vardera ändpunkten ($A$ och $B$) av denna 24 rutor långa sträcka drar vi en emot sträckan vinkelrät linje ($AA_1$ och $BB_1$, se fig. 27) och låter två rutor på dessa linjer representera 1 sekund. Vi tänker oss, att vi lägger vårt papper omkring en lodrät cylinder, så att $AA_1$ faller på $BB_1$, och på vanligt sätt sätter ut punkter, där tiden räknas från $A$ ($B$) uppåt och vägen från $AA_1$ ($BB_1$) runt cylindern hur många gånger som helst. Vi får då kurvor (skruvlinjer), som anger de båda kropparnas lägen i varje ögonblick.

Det är lättare att arbeta, om vi åter vecklar ut papperet, bara vi kommer ihåg, att varje punkt på $BB_1$ skall vara identisk med den lika långt från AB belägna punkten på $AA_1$.

Om vi t. ex. vill rita den kurva, som representerar den snabba kroppens rörelse, så gör vi så här. Vid början är kroppen i $A$. Efter en sekund är den 50 m (10 rutor) från $A$. Det ger oss punkt $C_1$. Efter 2 min är den 100 m från $A$. Vi får punkten $C_2$. Efter 3 min är den 150 m från $A$, d. v. s. 2 rutor in på andra varvet i punkten $C_3$ etc.

På teckningen ser vi, att kropparna träffas första gången efter 8 sek, 40 m in på det 3:e varvet för den snabba kroppen och på det 4:e varvet för den långsamma.

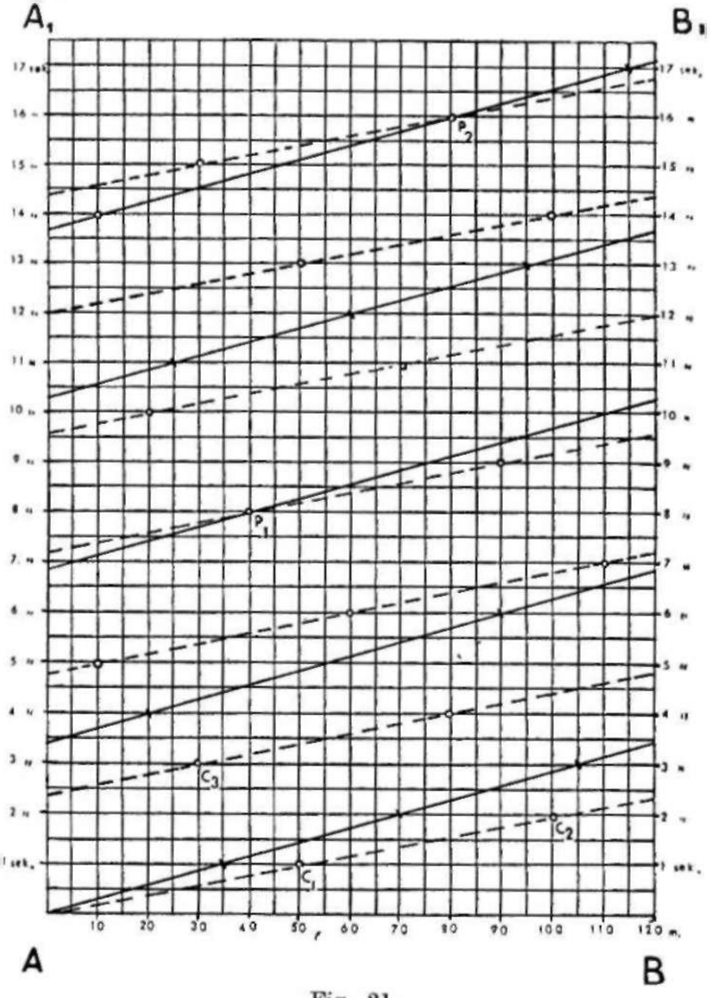

A₁
B₁
17 sek.
16 "
15 "
14 "
13 "
12 "
11 "
10 "
9 "
8 "
7 "
6 "
5 "
4 "
3 "
2 "
1 sek.
P₂
P₁
C₃
C₂
C₁
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120 m.
A
B

Fig. 21.

## TALPROBLEM

Om det finns möjlighet att någon gång få tid att tala om vårt talsystem, bör man inte underlåta det, både därför att det är roligt och uppskattas av eleverna och därför att de någon gång bör ha hört talas därom.

Behandlingen kan gå till ungefär så här:

”Kommer ni ihåg någonting om Ura-Kaipa och hans stenyxor?” Skulle eleverna ha berättelsen något så när aktuell, försöker vi att få fram det, som för oss är viktigt i den; i annat fall får läraren tala om huvuddragen.

Ura-Kaipa-folket kunde visserligen räkna, men inte längre än till nio. Man räknade på fingrarna och glömde alltid att ta med tummen, som användes vid räkningen. Hövdingen, Ura-Kaipa, har en gång i skogen träffat en ung man från en närboende stam, de gulskinandes, och tagit honom med sig hem, och de båda har blivit mycket goda vänner. Emellertid blir vännen Karilas genom eget förvållande Ura-Kaipas slav och sättes till att arbeta med en stenyxa. Han duger inte mycket till, och de ”gamle” fordrar, att han för att få leva skall undergå ”det stora provet”. Hövdingen säger då till Karilas: ”Ura-Kaipas stenyxor har alltid ansetts oräkneliga. Kan du räkna dem, så får du behålla livet”. Karilas tar då nio yxor och lägger dem i en hög, sedan nio i en annan hög och har till slut nio sådana högar och två yxor över. Så säger han: ”Du har nio gånger nio yxor och två därtill”. Alla förvånas, och Ura-Kaipas dom blir: ”Skada vore att ta en sådan träls liv.”

Om vi nu anser, att vi kan räkna inte till 9 utan till 5 och därefter på tavlan ritar inte en samling stenyxor utan några streck, så får vi t. ex:

llllllllllllllllllllllllllllllllllllll

Sedan gör vi på samma sätt som Karilas med stenyxorna. Vi tar bort 5 streck i taget:

lllll lllll lllll lllll lllll lllll lllll lll

och betecknar lllll med △ och då kan vi i stället skriva

△△△△△△△lll.

Nu förfar vi på samma sätt med trianglarna; vi tar bort 5 i taget och ersätter ett femtal △ med □, och då kan vi skriva vårt antal:

□△△lll

där strecken betyder ental, trianglarna femtal och kvadraten 5 stycken femtal eller ett tjugofemtal.

Vi hade alltså ett tjugofemtal, 2 femtal och 3 ental streck.

Innan vi går vidare, undersöker vi, hur vi skulle ha burit oss åt, om vi endast hade kunnat räkna till 2. Den gången får vi bara ta 2 streck i taget och betecknar ett tvåtal med t. ex. Λ.

ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll ll

Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ

Sedan betecknar vi ett tvåtal Λ med V och får:

V V V V V V V V V Λ

Nu betecknar vi ett tvåtal V med ∞ och får

∞ ∞ ∞ ∞ V Λ.

Om nu ∞ ∞ ersättes med Ⱥ, kan antalet streck skrivas ≈ V Λ, om ett tvåtal Ⱥ ersättes med ≈.

Nu betyder alltså Λ ett tvåtal, V två stycken tvåtal eller ett fyrtal (= $2^2$ ental), ∞ två stycken fyrtal ($2 \cdot 2 \cdot 2$ ental = $2^3$ ental) eller ett åttatal, ⩜ betyder 2 st åttatal eller ett sextontal (= $2^4$ ental) och ≈ betyder 2 st sextontal eller ett trettiotvåtal (= $2^5$ ental).

Vi har alltså fått ett trettiotvåtal ($2^5$), inget sextontal ($2^4$), inget åttatal ($2^3$), ett fyrtal ($2^2$), ett tvåtal men inget ental, och vi kan teckna antalet streck:

1 ≈ 0 ⩜ 0 ∞ 1 ∨ 1 ∧ 0 1 eller ≈ ∨ ∧.

I stället för att skriva ut alla krumelurerna kan vi nöja oss med att skriva antalet av varje sort, om vi bara håller reda på ordningen 1 = ental, ∧ = tvåtal, ∨ = fyrtal, ∞ = = åttatal, ⩜ = sextontal och ≈ = trettiotvåtal; och då får vi:

1 0 0 1 1 0.

Varje siffra har då ett visst värde på grund av sin position eller sin plats i sifferraden. Vi har skrivit vårt tal i ett positionssystem med 2 som bas, och vi säger, att det tal, som anger alla våra ursprungliga (38) streck i 2-systemet, tecknas 1 0 0 1 1 0.

I *femsystemet*, som vi började med, skrives talet:

1 2 3,

d. v. s. ett $5^2$-tal, två 5-tal och 3 ental.

I sista fallet har vi tre talsorter, nämligen ental, femtal och tjugofemtal ($5^2$-tal).

I det talsystem, vars bas är 3, får vi talsorterna: ental, tretal, niotal, tjugosjutal, åttioental etc., eller 1-tal, 3-tal, $3^2$-tal, $3^3$-tal etc. Vårt förut använda tal skrives då i tresystemet

1 1 0 2

d. v. s. ett tjugosjutal, ett niotal och 2 enheter = 38.

Efter detta bör det inte vara svårt för någon att förstå, att i vårt vanliga tiosystem talsorterna måste vara: ental, tiotal, (tio gånger tiotal =) hundratal, (10 ggr hundratal =) tusental etc.

Nu vet vi alltså, att 38 ental (i tiosystemet) skrives 100110 i tvåsystemet, 1102 i tresystemet, 123 i femsystemet.

På några minuter kan vi undersöka, om eleverna förstått det nu genomgångna, genom att fråga, hur talet skrives i 4-systemet, 6-, 7-, 8- och 9-systemet.

*Ex. 1.*

Vi kan också i några mycket enkla fall ställa den rakt motsatta frågan efter talsystemet, t. ex.:

I vilket talsystem skrives 38 enheter som 53?

Om vi antar, att basen i det sökta talsystemet är $x$, blir talsorterna i detta system ental, $x$-tal, $x^2$-tal, $x^3$-tal etc. ($x > 5$).

Vår ekvation blir
$$\begin{aligned} 5x + 3 &= 38 \\ 5x &= 35 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

*Svar:* I sjusystemet skrives 38 enheter som 53.

*Ex. 2.*

I vilket talsystem skrives 111 enheter som 303?

Om talsystemets bas betecknas med $x$, blir talsorterna ental, $x$-tal, $x^2$-tal etc. och vår ekvation:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3 &= 111 \\ 3x^2 &= 108 \\ x^2 &= 36 \\ x &= \overset{+}{(-)}\, 6. \end{aligned}$$

*Svar:* I 6-systemet skrives 111 som 303.

*Ex. 3.*

Hur tecknas i 8-systemet 3333 enheter?

Talsorterna blir: ental, 8-tal, 64-tal, 512-tal. Högre talsorter kan inte förekomma. Om vi skriver upp räkningarna, får vi:

$$\begin{array}{r|l} 3333 & 512 \\ \cline{2-2} \underline{3072} & 6 \\ 261 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 261 & 64 \\ \cline{2-2} \underline{256} & 4 \\ 5 & \end{array}$$

Vi fick alltså sex $8^3$-tal, fyra $8^2$-tal, 5 enheter. 3333 enheter skrives i 8-systemet 6405.

Det är tydligen ytterst enkelt att komponera uppgifter på detta område, och har man tid, bör det gå lätt att låta eleverna både tillverka uppgifterna och lösa dem.

Med det föregående som grund bör ”talproblem” av den i läroböckerna förekommande vanliga typen inte bereda några större svårigheter.

Vi ber en elev skriva t. ex. ett tresiffrigt tal. Vi får kanske 357.

Eleverna får så komma med några förslag om samband mellan siffrorna, t. ex.:

I ett tresiffrigt tal är

1) hundratalssiffran två enheter mindre än tiotalssiffran men entalssiffran två enheter större än tiotalssiffran,
2) tiotalssiffran en enhet mindre än dubbla hundratalssiffran men enhetssiffran en enhet mer än dubbla hundratalssiffran,
3) tiotalssiffran fyra enheter och entalssiffran två enheter mindre än tredje multipeln av hundratalssiffran.

Så måste vi företaga oss någon ändring med det uppskrivna talet för att få en uppgift. Mycket vanligt är att läsa talet bakfram, så att entals- och hundratalssiffrorna byter plats. Gör vi det här, får vi talet 753, och då kan vi t. ex. lägga märke till att 753 är 39 enheter mer än dubbla det sökta talet.

Efter detta kan vi formulera vår uppgift.

I ett tresiffrigt tal är tiotalssiffran en enhet mindre men entalssiffran 1 enhet mer än dubbla hundratalssiffran. Om hundratalssiffran och entalssiffran byter plats får man ett tal, som är 39 enheter mer än dubbla det sökta talet. Vilket är detta?

Vid behandling av detta slags uppgifter gäller det endast att hålla i minnet, att varje siffra i talet representerar 10 ggr så många enheter som den närmaste till höger, att om man flyttar ett decimalkomma ett steg åt höger, gör man talet

10 ggr så stort, d. v. s. att varje siffra kommer att beteckna en 10 ggr så stor talsort som förut, och att man alltid måste ha reda på det antal enheter, som talet betecknar.

Här skriver vi t. ex.:

Om vi betecknar hundratalssiffran med $x$, blir tiotalssiffran $(2x - 1)$ och entalssiffran $(2x + 1)$. Till talet bidrager hundratalssiffran med $100x$ enheter, tiotalssiffran med $10(2x - 1)$ enheter och entalssiffran med $2x + 1$ enheter. Hela talet innehåller alltså $100x + 10(2x - 1) + 2x + 1$ enheter $=$ $= (122x - 9)$ enheter. Om vi låter första och sista siffran byta plats, blir hundratalssiffran $(2x + 1)$ och entalssiffran $x$, under det att tiotalssiffran blir oförändrad.

Det nya talet betecknar:

$100(2x + 1) + 10(2x - 1) + x$ enheter $= (221x + 90)$ enheter.

Emedan detta sista tal innehöll 39 enheter mer än dubbla det ursprungliga, erhålles ekvationen:

$$\begin{aligned} 221x + 90 &= 2(122x - 9) + 39 \\ 221x + 51 &= 244x - 18 \\ 69 &= 23x \\ x &= 3. \end{aligned}$$

*Svar:* Det sökta talet är 357.

Man bör inte underlåta att konstatera, att 753 är lika med $2 \cdot 357 + 39$.

Att tillverka uppgifter av denna art bereder vanligen inga svårigheter. Man skriver ett tal, tittar på det och låter fantasien spela.

Låt oss t. ex. skriva:

23 456

och anse, att vi vet, att sista siffran är 6. Nu skulle det kunna vara nyttigt att öva eleverna att på olika sätt läsa ut det givna talet. Man kan t. ex. läsa 2 tiotusental, 345 tiotal och 6 enheter eller 23 tusental, 4 hundratal och 56 enheter.

För att vi skall få ett problem, måste vi hitta på något villkor och stryker t. ex. ut sexan. Sedan kan vi bilda ett nytt tal genom att sätta sexan längst t. v. och se efter hur många gånger 2345 går i 62345 och hur stor resten blir. Vi finner, att kvoten blir 26 och resten 1375, och då kan vi formulera vår uppgift:

I ett femsiffrigt tal är sista siffran 6. Man bildar ett nytt tal genom att sätta sexan t. v. om de övriga 4 siffrorna. Om detta tal divideras med det tal, som erhålles, om sexan strykes ut, får man 26 till kvot och 1375 till rest. Sök det femsiffriga talet!

Antag, att de fyra första siffrorna bildar talet $x$.

Om sexan sättes först, blir den tiotusentalssiffra och talet $x$ blir enheter. Villkoret ovan ger:

$$\begin{aligned} 60\,000 + x &= 26x + 1375 \\ 58\,625 &= 25x \\ x &= 2345. \end{aligned}$$

*Svar:* Det sökta talet är 23456.

*Ex. 4.*

Om vi räknar med, att vi i talet

23456

känner den mellersta siffran, och jämför 56234 med $2 \cdot 23456$ samt 45623 med $2 \cdot 23456$, finner vi att 56234 är 9322 enheter mer än 2 gånger talet och att 2 gånger talet är 1289 enheter större än 45 623. Därav uppgiften:

I ett femsiffrigt tal är mellersta siffran 4. Om man sätter det tal, som bildas av de två sista siffrorna, framför de tre återstående, så blir detta nya tal 9322 enheter mer än dubbla det ursprungliga, men om det tal, som bildas av de två första siffrorna, sättes efter övriga siffror, blir det så erhållna talet 1289 enheter mindre än dubbla det ursprungliga. Sök detta!

Om vi betecknar det tvåsiffriga tal, som bildas av de två första siffrorna, med $x$ och det, som bildas av de två sista siffrorna, med $y$, får vi omedelbart:

$$\begin{cases} 1000y + 10x + 4 = 2(1000x + 400 + y) + 9322 \\ 40\,000 + 100y + x = 2(1000x + 400 + y) - 1289 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} 1990x - 998y = -10118 & -1 \\ 1999x - 98y = 40489 & +1 \\ \hline \end{array}$$

$$9x + 900y = 50\,607$$
$$x + 100y = 5623$$

Därav ser man, att $x = 23$ och $y = 56$.

*Svar:* Talet är 23456.

*Ex. 5.*

**Om vi ser på talet 56, kan vi t. ex. finna, att $2{,}56 + 5{,}62 = 8{,}18$. Därav problemet.**

Om man skriver en tvåa framför ett visst tvåsiffrigt tal och ett decimalkomma efter tvåan, blir summan av detta decimalbråk och det, som erhålles, då tvåan skrives efter det tvåsiffriga talet men decimalkommat mellan dess två siffror, 8,18. Sök det tvåsiffriga talet!

**Betecknar vi det sökta talet med $x$, blir det första decimalbråket $2 + \frac{x}{100}$ och det andra $\frac{x}{10} + \frac{2}{100}$.**

Vår ekvation blir $2{,}02 + \frac{x}{100} + \frac{x}{10} = 8{,}18$

$$\frac{11x}{100} = 6{,}16$$

$$11x = 616$$

$$x = 56.$$

***Svar:* Det sökta talet är 56.**

# ALGEBRA

Här är det två tankar, som omedelbart tränger sig på. Den ena är denna: Algebra är ett område, där man måste gå långsamt fram. Därför kan man börja så smått ganska tidigt. Den andra: Bokstavsbeteckningar införes i fysiken lämpligen, även om i ringa omfattning, i klass 7. Därför bör så långt det är möjligt i varje klass samme lärare undervisa i matematik och fysik och detta helst hela skolan igenom.

När kan man då börja med algebrans grunder? Enligt min uppfattning passar det utmärkt i klass 6, givetvis under förutsättning att man, som nyss sagts, går långsamt fram och undviker alla formler. Man kan ta en liten stund en gång i veckan och tala om digniteter ungefär så här. Vi skriver på tavlan:

$$a + a + a \qquad\qquad a \cdot a \cdot a$$

och frågar vad det är, som står till vänster, och får så småningom svaret: Det är en summa av tre lika termer $a$, medan det till höger står en produkt av tre lika faktorer $a$. När eleverna upprepat detta några gånger, naturligtvis med variation av antalet termer och faktorer, kan det bli tid att tala om, hur man kortare skall skriva produkten. Hur man skriver summan är ju förut bekant. Det brukar vara givande att låta eleverna komma med förslag. En och annan kanske anser, att det går att skriva faktorerna med multiplikationstecken emellan, men om förslagsställaren får till uppgift att skriva en produkt av 1000 faktorer, förstår alla, att man måste hitta på något kortare skrivsätt. Det brukar bli många, som vill försöka, och snart har vi kanske på tavlan en hel rad med förslag:

$$a3,\ {}^{3}a,\ a^{3},\ {}_{3}a,\ a_{3},\ \boxed{\begin{matrix}3\\ a\end{matrix}}\ \ \mathbf{3/a}\ \text{o. s. v.}$$

Vi får först diskutera $a3$ och $a_3$. Vi kan inte använda $a3$, eftersom det är likvärdigt med $3a$. $a_3$ är vedertagen beteckning för "$a$ nummer 3" och läses "$a$ index 3". Övriga förslag är tänkbara, men man har stannat för $a^3$.

Det är av vikt, att eleverna får klart för sig, att detta sätt att skriva inte är på något sätt självklart utan att det med tiden har blivit vanligt att skriva så.

Så övar vi några veckor med enkla exempel $a^3 \cdot a^2$ etc. men *alltid* så, att eleverna får säga: I den här produkten finns det 3 faktorer $a$, som skall multipliceras med 2 faktorer $a$. Produkten består alltså av 5 faktorer $a$, och detta tecknas $a^5$.

Men vi måste lägga till lite nytt, om inte varje gång så varannan. Nu blir det tal om namn på en sådan produkt av lika faktorer. Om vi skriver $d^3$, $d^{10}$, $d^{20}$, $d^{100}$. kan man kanske framkalla en känsla av att $d$:et "dignar" under bördan, vilket i sin tur kanske kan hjälpa eleverna att komma ihåg ordet *dignitet* (fastän orden naturligtvis inte alls är besläktade). Man kan också tala om, att ju flera faktorer det kommer med i produkten, desto större värde (värdighet) får den, och herrar med hög värdighet kallas för dignitärer. Det är ju också möjligt, att barnen känner till det engelska ordet *dignity*, om inte, så kan de ju få till uppgift att se efter i lexikon till påföljande gång.

Sedan kan vi jämföra digniteten med t. ex. en staty, som står uppe på ett underlag (postament, bas) och exponeras, och så kan vi få skäl att kalla $a$ i $a^3$ för *bas* och 3:an för *exponent*. Har vi infört dessa tre namn

$$\left.\begin{matrix} & 3 \rightarrow \text{exponent} \\ \text{bas} \rightarrow a & \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{dignitet},$$

så kan vi åtskilliga veckor framåt på vår lilla stund öva med att låta eleverna skriva en dignitet med basen 6 och exponenten 4, med basen 3 och exponenten 3 etc., etc. Man kan öva med multiplikation och division av enkla digniteter men *utan* att införa några regler. Vi använder alltid definitionen. Ja, vi kan naturligtvis också syssla med digniteter av digniteter, t. ex. $(a^3)^2$. Så passar vi också på att öva med $\left(2\frac{1}{3}\right)^{[illegible]}$ och $\left(1\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)^3$ etc., göra jämförelse med $m^2$ och $m^3$ och tala om olika namn på $a^2$ och $a^3$, t. ex. $a$-två, $a$ upphöjt till två, $a$ i kvadrat, $a$ i kub.

## Parenteser

### *Produkter med en parentes*

I början av vårterminen i klass 6 bör man kunna gå något lite vidare och börja en smula med parenteser. Vi skriver t. ex. på tavlan:

$$3(2a + 3b)$$

och läser detta: tre stycken påsar med 2 $a$(pelsiner) och 3 $b$(ananer) i varje. Plockar vi upp apelsinerna och bananerna ur påsarna och lägger dem på ett fat, får vi 6 apelsiner och 9 bananer på fatet eller

$$3(2a + 3b) = 6a + 9b.$$

En tid kan man öva med förenkling av uppgifter av typen $3(2a + 3b) + 2(5a + b)$, men ganska snart måste minustecknen komma med, både inuti parentesen och utanför, och det är enkelt att gå den vägen att man endast räknar med siffertal och kontrollerar sina räkningar så som R.W.F gör under överskriften 'Parenteser' strax i början av del II (sidorna 15—19), men för omväxlings skull kan man ju också tänka sig andra vägar.

För att få ett exempel med minustecken inom parentesen kan vi t. ex. tänka oss en person, som har ett litet lager päron, som inte tål att ligga. Frampå hösten köper han dagligen 6 st vinteräpplen ($\ddot{a}$) och äter upp 3 av sina päron ($p$). Ändringen av hans fruktlager efter 5 dagar kan skrivas antingen $5(6\ddot{a} - 3p)$ eller $30\ddot{a} - 15p$, eftersom han på 5 dagar har köpt 30 äpplen och ätit upp 15 päron. Låter vi mannen i stället ha lager av både äpplen och päron och antar, att han dagligen äter upp 2 äpplen och 3 päron, har han efter en dag kvar: Lagret $- 2\ddot{a} - 3p$ eller Lagret $- (2\ddot{a} + 3p)$ och efter 5 dagar Lagret $- 5(2\ddot{a} + 3p)$ eller Lagret $- (10\ddot{a} + 15p)$ eller om vi tar äpplena för sig och päronen för sig Lagret $- 10\ddot{a} - 15p$. Detta visar, dels att man kan multiplicera in faktorn 5 i parentesen och låta minustecknet och parentesen stå kvar för att sedan ta bort parentesen med ihågkommande av att tecknet skall ändras för *varje* term inom parentesen, dels att man kan utföra båda dessa operationer samtidigt. Dessa regler brukar åtminstone några av de duktigare i varje klass själva kunna formulera.

När det gäller en parentes med minustecken framför och olika tecken inuti parentesen, kan vi vända oss till ett annat område. Vi betecknar t. ex. enkronor med $k$, tiokronor med $t$ och hundrakronor med $h$. En person har på sitt bankkonto 1000 kronor och i sin plånbok 8 $t$ men köper på kredit varor för (eller lånar) $2h$ och $7k$. Även om han betalar av en del av skulden $(2h + 7k)$ med de 8 $t$ han har i plånboken, måste han ändå anlita sitt bankkonto för att täcka bristen $(2h + 7k - 8t)$, och av alla sina tillgångar har han kvar $1000\,k - (2h + 7k - 8t)$.

Det är klart, att man får samma resultat, om man först lägger ihop 1000 $k$ och 8 $t$ och sedan minskar med $2h$ och med $7k$. d. v. s. att

$$1000k - (2h + 7k - 8t) = 1000k - 2h - 7k + 8t,$$

vilket återigen visar, att en parentes med minustecken får tas bort, om man blott ändrar tecken framför varje term inom parentesen. Det är av vikt att framhålla, att man skriver första termen $2h$ i stället för $+ 2h$, som det egentligen borde vara.

Har man nu en eller två gånger visat ovanstående resultat, nöjer vi oss med det och använder oss av de regler, som eleverna själva (ev. med någon hjälp av läraren) kommit fram till.

Här har vi ett område, där det är ytterst enkelt att tillverka uppgifter, där läraren hastigt kan se, om en uppgift är rätt räknad, och som därför väl lämpar sig för ”radräkning”. I början är det säkert lämpligt att vid räkning på svarta tavlan och i räkneböckerna hålla på att *först* faktorerna framför parenteserna skall multipliceras in i parenteserna och att *därefter* parenteserna tas bort.

*Ex.* $$5(3a + 2b - 4c) - 2(7a - 3b - 2c) =$$

Jag multiplicerar in faktorerna i parenteserna!

$$= (15a + 10b - 20c) - (14a - 6b - 4c) =$$

Jag tar bort parenteserna!

$$= 15a + 10b - 20c - 14a + 6b + 4c =$$

Jag reducerar likformiga termer!

$$= a + 16b - 16c.$$

Dessa uppgifter lämpar sig också utmärkt för huvudräkning, varför eleven bör vänjas vid att säga ut, vad det är, som han gör. Till föregående exempel kan vi t. ex. tänka oss följande text: Ur första parentesen får jag $15a$ med plustecken och ur den andra $14a$ med minustecken, d. v. s. $a$. På samma sätt får jag ur första parentesen $10b$ med plustecken och ur den andra $6b$ med plustecken, d. v. s. $16b$. Av $c$-termer ger första parentesen $20c$ med minustecken och den andra $4c$ med plustecken, d. v. s. $16c$ med minustecken. Resultatet blir alltså $a + 16b - 16c$.

Det är lämpligt att ganska snart övergå till att låta eleverna säga $+ 15a$ i stället för $15a$ med plustecken och $- 14a$ i stället för $14a$ med minustecken. De blir därigenom vana vid att ta med tecknet i talet, och har man övat med det en tid, kan man nog snart (någon gång strax i början av klass 7) övergå till att behandla vår uppgift:

$$5(3a + 2b - 4c) - 2(7a - 3b - 2c)$$

så här:

$+ 5$ gånger $(+ 3a) = + 15a$; $+ 5$ gånger $(+ 2b) = + 10b$; $+ 5$ gånger $(- 4c) = - 20c$; $- 2$ gånger $(+ 7a) = - 14a$; $- 2$ gånger $(- 3b) = + 6b$; $- 2$ gånger $(- 2c) = + 4c$.

Efter varje multiplikation skriver eleven upp resultat, så att när han har *sagt* färdigt ovanstående, har han fått:

$$15a + 10b - 20c - 14a + 6b + 4c.$$

På den följande operationen sätter man antingen namnet *hyfsning* eller *reduktion av likformiga termer*, d. v. s. termer, som är lika, vad bokstavsuttrycken beträffar (som endast skiljer sig från varandra ifråga om sifferfaktorn, den s. k. *koefficienten*). Vid hyfsning är det en god vana att stryka under de termer, som behandlats, så att inte någon blir bortglömd.

Det är av *stor* vikt, att eleverna får vänja sig vid att säga ut, vad de gör, och i räkneböckerna skriva ut detta, naturligtvis inte alltid men till en början, tills läraren förvissat sig om, att det inte behövs längre.

## *Teckenregler*

Ovanstående regler om multiplikation av tal med tecken får man direkt ur reglerna för borttagande av parenteser. Det skadar inte, att eleverna också någon gång får skriva upp dem på det gamla vanliga sättet:

$$(+)\cdot(+) = +;\ (+)\cdot(-) = -;\ (-)\cdot(+) = -;$$
$$(-)\cdot(-) = +$$

eller att läsa det ännu enklare: Lika tecken ger (vid både multiplikation och division) plus, och olika tecken ger minus.

När man har kommit så långt, har man nog i ekvationsläran hunnit med så pass mycket, att det är bäst att i de flesta övningsexemplen syssla med ekvationer.

## *Produkter med två parenteser*

Det blir säkert ont om tid i klass 7 med den nya anordningen (3 timmar matematik i veckan), och skall vi hinna något mera i algebran, får nog också fortsättningen bli på en ”förströelsestund” någon gång då och då. Närmast kommer nu multiplikation av två parenteser.

Vi väljer t. ex. $(a + b)(c - d)$ och betecknar den ena parentesen med ett $p$ och läser ”parentes ggr $(c - d)$”. Vi får då:

$$(a + b)(c - d) = p(c - d) = pc - pd = cp - dp.$$

Så sätter vi in $(a + b)$ i stället för $p$ i sista ledet, vilket ger:

$$(a + b)(c - d) = c(a + b) - d(a + b) =$$
$$= ac + bc - ad - bd \text{ eller}$$
$$ac - ad + bc - bd.$$

Man kan lika gärna (eller hellre) skriva $(a + b)$ ggr parentes = $= (a + b) \cdot p$.

Vi skriver om det hela:

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

och läser:

$$+\, a \text{ ggr } (+\, c) = +\, ac;\quad +\, a \text{ ggr } (-\, d) = -\, ad;$$

$$+\, b \text{ ggr } (+\, c) = +\, bc;\quad +\, b \text{ ggr } (-\, d) = -\, bd;$$

Två parenteser (två polynom) multipliceras med varandra på så sätt, att varje term (med sitt tecken) multipliceras med varje term (med tecken) i den andra parentesen.

Området passar utmärkt både till radräkning och huvudräkning.

I detta sammanhang bör man också tala om benämningarna *monom* = entermigt uttryck, *binom* = tvåtermigt, *trinom* = = tretermigt och *polynom* = flertermigt uttryck. Även om eleverna nu för tiden inte känner till klasserna i Linnés sexualsystem, Monandria etc., brukar de ha reda på monoplan (monoteism, monolog), biplan (bisektris, bigami), triangel (triplett, triumvirat), polyfoto (polyteism, Polynesien), så man kan alltid få lite hjälp av dessa, när det gäller att finna lämpliga namn.

Någon gång bör man också repetera utläsning av stora tal, och det kan lämpligen ske bl. a. här. Det kan hända, att det finns barn i klassen, som aldrig har hört talas om att man (här i Sverige) alltid använder ”illion” för att beteckna sexsiffriga talgrupper på följande sätt:

2 000 000 = 2 millioner (monom),
2 000 000 000 000 = 2 billioner (binom),
2 000 000 000 000 000 000 = 2 trillioner (trinom).

Därefter följer kvadrillioner, kvintillioner, sextillioner, heptillioner etc.

I framtiden blir det nog svårt att i klass 7 hinna längre, men går det inte att börja med kvadreringsreglerna och konjugatregeln där, så bör det bli i början av klass 8.

Vi skriver $(t_1 + t_2)^2 = (t_1 + t_2)(t_1 + t_2)$ och utför multiplikationen, som ger $t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2$. Sedan man en stund pratat med (och icke enbart till) eleverna om att ''$t$ index ett'' egentligen endast är ett kortare sätt att beteckna ''det första talet'', brukar de efter något prövande, ev. med lärarens hjälp, själva kunna formulera regeln: Det första talet plus det andra talet i kvadrat är lika med det första talet i kvadrat plus det andra talet i kvadrat plus dubbla produkten av det första talet och det andra talet.

Alldeles på samma sätt gör vi med $(t_1 - t_2)^2$ och, när den tiden kommer, med $(t_1 + t_2)(t_1 - t_2)$. Konjugatregeln kan lämpligen läsas: Det första talet plus det andra talet, gånger det första talet minus det andra talet, är lika med kvadraten på det första talet minus kvadraten på det andra talet.

Beteckningarna ''det första talet'' och ''det andra talet'' är av värde, då läraren behöver ingripa för att hjälpa till. Skall vi t. ex. utveckla $(2a^3 - 3b^2)^2$ blir frågorna: Vad heter första talet? ($2a^3$) Vad heter andra talet? ($3b^2$) Vad blir kvadraten på första talet? ($4a^6$). Vad blir kvadraten på andra talet? ($9b^4$). Vad blir produkten av första talet och andra talet? ($6a^3b^2$). Vad blir dubbla produkten av de båda talen? ($12a^3b^2$).

*Resultat:* $(2a^3 - 3b^2)^2 = 4a^6 + 9b^4 - 12a^3b^2$.

Här är det lätt för eleverna att tillverka uppgifter och likaså för läraren att kontrollera, varför området inövas genom radräkning och huvudräkning.

Vid huvudräkning bör man öva med uppgifter sådana som $\left(2\frac{1}{7}\right)^2$, $99^2$, $101^2$. | $2\frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{7}$. $52 \cdot 48 = (50 + 2)(50 - 2)$

$$= 2500 - 4 = 2496 \text{ osv.}\Big].$$

I $99^2 = (100 - 1)^2$ är första talet 100 och andra talet $= 1$. Kvadraten på första talet är 10000 och kvadraten på andra talet 1. Dubbla produkten är 200. Resultatet blir alltså $10000 - 200 + 1 = 9801$.

## Uppdelning i faktorer av polynom

Utbrytningsregeln är en enkel regel, som vanligen inte ställer till något trassel. Det är lätt att förstå, att om man har 10 $a$(pelsiner), 15 $b$(ananer) och 20 $c$(itroner), så kan man dela upp dessa i 5 st påsar, så att man i varje påse får 2 apelsiner, 3 bananer och 4 citroner eller i formel:

$$10a + 15b + 20c = 5(2a + 3b + 4c).$$

Det är ju också lätt att kontrollera genom att åter multiplicera in faktorn 5 i parentesen. Och detta är en *god regel:* Efter en utbrytning, kontrollera *alltid* räkningen genom inmultiplikation!

Första tiden i klass 7 betyder den inte så mycket, men lite senare, när minustecknet kommer med, är regeln så mycket viktigare.

*Ex.:*
$$(a - 3b + c)(a + 3b - c) =$$
$$= [a - (3b - c)][a + (3b - c)].$$

Ifråga om kvadratregeln (reglerna) kan den första övningen bedrivas t. ex. så här: Kan $m^2 + 4n^2$ vara en jämn kvadrat, d. v. s. kvadrat på en binom? Vad borde i så fall första talet heta ($m$) och vad det andra? ($2n$) Vi låter eleven själv ta reda på att det är en term, som saknas, nämligen dubbla produkten 4 $mn$.

En annan gång: Vad är det som fattas, om $9m^2 + 6mn$ är början till ett exempel på kvadratregeln? Då måste $9m^2$ vara kvadraten på första talet, vilket blir $3m$. $6mn$ måste vara den dubbla produkten. Då är enkla produkten $3mn$, och eftersom första talet är $3m$, så blir andra talet $n$ och det som fattas i det givna uttrycket är kvadraten på andra talet, d. v. s. $n^2$.

Till omväxling blir en annan gång frågan: Kan $m^2 - 10mn + 16n^2$ vara kvadraten på en binom? I så fall borde första termen vara $m$ och den andra $4n$, och uttrycket skulle vara lika med $(m - 4n)^2$. Men så enkelt är det inte. Vi måste också kontrollera, att dubbla produkten stämmer. Den skulle bli $8\ mn$ med minustecken. Alltså är $m^2 - 10mn + 16n^2$ icke kvadraten på en binom. Men $m^2 - 10mn + 16n^2 = (m - 2n)(m - 8n)$, vilket inte är så lätt för eleverna att se på detta stadium.

När man sysslar med uppdelning av polynom i faktorer, måste man ofta ställa sig de tre frågorna:

1. Kan jag använda utbrytningsregeln?
2. Kan jag använda någon kvadratregel?
3. Kan jag använda konjugatregeln?

Därför måste vi i klassen behandla frågan: Hur kan man på ett givet algebraiskt uttryck se, om man kan använda någon av dessa regler? Så småningom bör vi kunna få eleverna att säga någonting sådant här: Utbrytningsregeln kan användas, om samma faktor finns i alla termer i en algebraisk summa (om samma storhet ingår som faktor i varje term i en polynom). Denna faktor skriver vi framför en parentes, och innanför parentesen får vi för varje term i polynomen en term sådan, att om den multipliceras med den utbrutna faktorn, får vi tillbaka den ursprungliga termen.

Om vi skall kunna använda kvadratregeln, måste vi ha att göra med ett *tretermigt* uttryck, i vilket två av termerna är jämna kvadrater och den tredje termen dubbla produkten av två tal, vilkas kvadrater just är de två andra termerna.

Konjugatregeln kan användas på ett *tvåtermigt* uttryck med en plusterm och en minusterm, där båda termerna är jämna kvadrater (på skillnaden mellan två jämna kvadrater).

Ja, det är inte så lätt att uttrycka dessa tankegångar riktigt klart och tydligt, och vi får nog inte ha alltför stora fordringar på formuleringen. Säkert är, att vi får känna oss ganska nöjda, om vi i klass 8 kan få en genomsnittselev att lämna en redogörelse så här: "Utbrytningsregeln kan användas på ett uttryck med flera termer, t. ex.:

$$8a^3b + 12ab^2 - 16a^2b,$$

om samma faktor finns i alla termerna. I detta exempel finns $4ab$ som faktor överallt. Då kan jag skriva polynomen lika med en produkt, vars första faktor är $4ab$ och vars andra faktor är en parentes. Inom den parentesen får jag tre termer, som jag finner, om jag dividerar var och en av de givna termerna med $4ab$, d. v. s.:

$$8a^3b + 12ab^2 - 16a^2b = 4ab(2a^2 + 3b - 4a).$$

## Algebraiska räkningar

I allmänhet är det nog inte så mycket man kan hinna med av algebraräkning. Med tanke på förekommande ekvationstyper, bör man nog försöka hinna med några uppgifter på förkortning, addition av bråk och på dubbelbråk.

Här behövs inga nya regler. Har man ordentligt läst in definitioner på förkortning och förlängning och regler för de fyra räknesätten i bråk med siffertal, kan man också klara dessa algebraräkningar.

Men det hindrar inte, att förkortningen (och förlängningen) av algebraiska bråk ställer till mera trassel än kanske någonting annat i matematikkursen. Att förkortning innebär, att man dividerar täljare och nämnare med samma tal och att

**man vid förlängning multiplicerar täljare och nämnare med samma tal, det är något, som måste upprepas mycket ofta.**

Man har kanske något hopp att undvika ideliga fel vid ”förkortning”, om man fastslår såsom regel, att i ett bråk, där förkortning skall företagas, först både täljare och nämnare skall vara uppdelade i faktorer, innan man sätter i gång att förkorta. Man kan gärna låta eleverna vänja sig vid att överstrykningar som regel icke bör förekomma.

**Ex.**
$$\frac{2ab - 2b^2}{a^2 - b^2} = \frac{2b(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{2b}{a + b}$$

N.F.: **II** ex. 671 c.
$$\frac{75x^3y^2 + 12xy^4 + 60x^2y^3}{150x^4y - 24x^2y^3} =$$
$$= \frac{3xy^2(25x^2 + 4y^2 + 20xy)}{6x^2y(25x^2 - 4y^2)} = \frac{y(5x + 2y)^2}{2x(5x + 2y)(5x - 2y)}$$
$$= \frac{y(5x + 2y)}{2x(5x - 2y)}$$

Vi repeterar additionen och subtraktionen med ett par exempel:

*Ex. 1:*
$$\frac{1}{ab} - \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} = \frac{c}{abc} - \frac{2b}{abc} + \frac{3a}{abc} = \frac{c - 2b + 3a}{abc}$$

Tankegången framställes sålunda. Minsta gemensamma dividenden till nämnarna är *abc*. Man ser, att första nämnaren måste multipliceras med *c*. Därför måste också täljaren i första bråket multipliceras med *c*. I andra bråkets nämnare fattas faktorn *b*. Därför måste andra bråket förlängas med *b*. Tredje bråket förlänges med *a*.

*Ex. 2:*
$$\frac{8y}{x^2 - y^2} - \frac{x + y}{x^2 - xy} + \frac{2x - 2y}{x^2 + xy} = \frac{8y}{(x + y)(x - y)} -$$
$$- \frac{x + y}{x(x - y)} + \frac{2(x - y)}{x(x + y)} = \frac{8xy - (x + y)^2 + 2(x - y)^2}{x(x + y)(x - y)} =$$

$$= \frac{8xy - (x^2 + y^2 + 2xy) + 2(x^2 + y^2 - 2xy)}{x(x + y)(x - y)} =$$

$$= \frac{2xy + x^2 + y^2}{x(x + y)(x - y)} = \frac{(x + y)^2}{x(x + y)(x - y)} = \frac{x + y}{x(x - y)}.$$

Även om man får vara nöjd, om eleverna kan utföra räkningen på detta sätt, får man försöka att, så ofta det nu kan vara möjligt, öva klassen att på svenska redogöra för arbetet och kanske någon gång lämna en sådan uppgift med redogörelse för behandlingen till hemarbete.

Eleverna skriver då små uppsatser ungefär så här: Först delar jag upp nämnarna i faktorer med hjälp av konjugatregeln och utbrytningsregeln (led 2). Sedan söker jag M.G.D. till nämnarna och skriver den under bråkstrecket i led 3. Jämför jag nu första bråkets nämnare med M.G.D., finner jag, att första bråket måste förlängas med $x$. På samma sätt får jag, att andra bråket måste förlängas med $(x + y)$ och tredje bråket med $(x - y)$. Jag utvecklar sedan de två kvadraterna, som jag fått i täljaren, och får led 4. När jag har tagit bort parenteserna (led 5)[1] och hyfsat (led 6), ser jag, att täljaren är en jämn kvadrat (led 7). Efter förkortning med $(x + y)$ får jag resultatet (led 8).

Som exempel på division behandlar vi ett par enkla dubbelbråk.

*Ex. 1.*

$$\frac{2\frac{1}{3}x - 4\frac{1}{2}}{2\frac{1}{7}}$$

Frågar vi i klassen, vad man kan göra med detta bråk, bör vi rimligtvis kunna få till svar, att man kan förlänga det. Frågar vi sedan, varmed man lämpligen bör förlänga — det står ju var och en fritt att förlänga med vad han eller hon

[1] Led 5 har här ej medtagits.

tycker kan vara trevligt — får vi en hel mängd förslag: 3, 2, 6, 7, 14, 21, 42. Resonerar vi så en stund om vilket som kan vara roligast, kommer vi naturligtvis fram till att om man väljer 42, slipper man alla (allt) bråk, och vi får endast hela tal att arbeta med.

Under samtalets gång kommer säkert någon elev att säga, att man förlänger med M.G.D. till alla smånämnare, som förekommer i (dubbel)bråket.

*Ex. 2.*

$$\frac{\frac{2a}{b}-\frac{b}{2a}}{\frac{2a}{b}+\frac{b}{2a}-2} = \frac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2-4ab} = \frac{(2a+b)(2a-b)}{(2a-b)^2} = \frac{2a+b}{2a-b}$$

Texten: Jag förlänger det givna dubbelbråket med $2ab$ (M.G.D. till smånämnarna) och får led 2. Där kan jag dela upp täljaren och nämnaren i faktorer med hjälp av konjugat- resp. kvadratregeln (led 3). Efter förkortning med $(2a-b)$ får jag led 4.

För den lärare, som själv vill komponera uppgifter i algebra, må lämnas ett exempel på hur man kan arbeta för att tillverka en uppgift, utgående från det man vill ha till resultat.

$$\frac{a^2}{2a-3b} = \frac{\frac{a^2}{(a-b)a}}{\frac{2a}{a(a-b)}-\frac{3b}{a(a-b)}} = \frac{\frac{a}{a-b}}{\frac{2}{a-b}-\frac{3b}{a(a-b)}} =$$

$$\frac{\frac{a-b+b}{a-b}}{\frac{\frac{2}{a}}{1-\frac{b}{a}}-\frac{3}{a}:\left(\frac{a}{b}-1\right)} \qquad \frac{1+\frac{1}{\frac{a}{b}-1}}{\frac{\frac{2}{a}}{1-\frac{b}{a}}-\frac{3}{a}:\left(\frac{a}{b}-1\right)}$$

Vid övergången från led 1 till led 2 har bråkets täljare och nämnare dividerats med $a(a - b)$, från led 2 till led 3 har två bråk förkortats med $a$, från 3 till 4 har dividendbråkets täljare ändrats från $a$ till $a - b + b$, första bråket i nämnaren har förkortats med $a$ och andra termen skrivits som kvoten $\frac{b}{a} : \frac{a-b}{b}$, varefter kvoten i detta uttryck förkortats med $b$.

# KVADRATRÖTTER

## Några begreppsbestämningar

När något nytt införes, kan det vara bra att först ge en liten översikt över förut behandlade områden. Det blir inte tillfälle därtill på så många ställen i skolkursen. Men just här kan det nog passa att försöka sammanställa vad vi lärt oss om tal.

### *Positiva tal*

Om vi skriver $5 + 3 = ?$, så kan säkert var och en i klassen svara, att summan blir 8. Det lär man sig på ett mycket tidigt stadium.

Ger man i stället endast den ena termen och summan, alltså $5 + ? = 8$, så kan alla klara det nu också, även om man inte får lära sig det så tidigt i skolan.

### *Negativa tal*

Går vi ett steg till och skriver så här: $5 + ? = 2$, så har vi kommit till något alldeles olika det föregående. På frågetecknets plats skall vi sätta det negativa talet $-3$. Denna operation, då vi ger en term och summan, är tydligen en sorts omvändning till det första enkla fallet, då termerna var bekanta och man sökte summan.

## *Hela tal*

Om vi skriver $5 \cdot 3 = ?$, så är det också en enkel fråga, som man får lära sig besvara jämförelsevis tidigt i skolan. Inte så värst mycket svårare blir det, om man endast ger den ena faktorn och produkten, d. v. s. frågan $3 \cdot ? = 15$, men detta räknesätt — divisionen — kommer in på skolschemat senare.

## *Bråk*

Ännu längre fram under skoltiden kommer uppgiften $3 \cdot ? = 7$. Vid denna fråga klarar vi oss inte längre med de hela talen. Vi måste införa ett nytt slags tal, nämligen bråken. På frågetecknets plats måste vi skriva bråket $\frac{7}{3}$.

## *Rationella tal*

Om vi multiplicerar två lika tal med varandra, t. ex. $3 \cdot 3 = ?$, är det ingen konst att finna produkten, inte ens, om man i stället skulle välja $3{,}14 \cdot 3{,}14$ eller $2\frac{3}{7} \cdot 2\frac{3}{7}$. Vänder vi på frågan och ger produkten (kvadraten) men frågar efter faktorerna, kan man nog i nionde klassen vid den här tiden, då detta skall behandlas, klara en enkel fråga som t. ex. $? \cdot ? = 25$ eller i ekvation $x^2 = 25$.

## *Irrationella tal*

Men det behövs endast, att vi ändrar produkten en smula och skriver $? \cdot ? = 2$ eller $x^2 = 2$, för att man skall finna, att det inte bland de hittills bekanta talen finns något, som multiplicerat med sig självt ger till resultat 2.

*Fortsatt diskussion om de nya begreppen*

Innan vi går vidare, är det nog bäst att något lite beröra ordet "rationell" och begreppet "rationellt tal".

*Ordet rationell*

I Metodiska anvisningar säges under överskriften "Ämnets olika grenar" i momentet om $2^5$, att man i samband med införandet av $\pi$ kan få tillfälle att tala om förhållandet mellan storheter såsom kvoten mellan deras mätetal. Vidare har överstyrelsen i ett cirkulär från de senaste åren äntligen uttalat som sin mening, att varje lärare efter fattig förmåga bör vara lärare i svenska, och slutligen är det för varje människa lättare att förstå något, som sättes i samband med sådant, som är bekant från andra områden.

Vi kan alltså anse oss ha flera skäl till att stanna en stund inför orden *ratio*, *ration*, *rationalism* och *rationell* för att slutligen komma fram till uttrycket *rationellt tal*.

På sid. 46 om bråk liksom också vid laborationen för bestämmande av $\pi$ framhålles, att man bör öva med orden *förhållande*, *ration* och *kvot* (med framhållande av att förhållandet eller rationen mellan två storheter uttryckta i samma sort) är kvoten mellan deras mätetal.

Vi kan alltså förbereda detta, som skall studeras i realskolans avslutningsklass och i gymnasiets första ring i de tre föregående klasserna lite då och då.

De flesta elever känner nog till ordet rationell. De vet säkert, vad som menas med rationellt jordbruk, rationell drift av en fabrik, att över huvud taget sköta ett arbete rationellt, att planera sitt skolarbete, d. v. s. arbeta med hemuppgifterna rationellt.

När det gäller hemarbetet i matematik (och fysik), skulle det betyda, att man inte "kluddar och kladdar" alltför mycket, att man försöker att själv på svenska uttrycka de tankar, som leder till lösningen av ett problem, att man alltid strävar efter överskådlighet (trots att det medför slöseri med papper), att man så långt det finns någon möjlighet försöker att med tydliga figurer i ev. givna proportioner illustrera det man studerar o. s. v.

Eleverna bör nog snart förstå, att detta har att göra med grundbetydelsen av ordet *ratio*, d. v. s. förstånd, men att ration inom matematiken kommit att få betydelsen bråk, kvot.

Det är naturligtvis lämpligt att innan "den stora diskussionen" går av stapeln uppmana de elever, som har tillgång till en uppslagsbok (skolans bibliotek), att undersöka betydelsen hos de ifrågavarande orden.

### *Rationalism*

Vad som blir sagt om rationalismen beror väl på lärarens läggning och elevernas eventuella självstudier. En lärare, som är latinare eller som med nöje läst t. ex. Bell, "Matematikens män", säger med Cartesius: "Cogito, ergo sum" (Jag tänker, alltså är jag till). En annan, som är mera fysikaliskt inriktad, talar kanske om, att man kan gradera instrument rationellt och empiriskt och ger exempel därpå. Resultatet bör till slut bli, att en rationalist anser, att han kan få veta något genom att tänka, en empiriker genom att iakttaga.

### *Rationella tal*

Så kommer vi till slut till rationella tal. Ordet ration har tidigare förekommit i en svensk lärobok i matematik. I andra delen av den av Möller utgivna och av Balke omarbetade Algebra (femte upplagan) skrevs om geometriska serier: "Denna konstanta kvot kallas seriens *kvot* eller *ration*."

Nu bör ju också eleverna förstå, att när man endast sysslar med tal, begreppen förhållande, ration och kvot är identiska. Det bör då ligga nära till hands att kalla *ett tal, som kan skrivas såsom en kvot mellan hela tal, för ett kvottal eller förhållandetal eller rationellt tal.* Att man bland dessa väljer det internationella ordet *rationellt*, borde vara självklart.

### *Mera om irrationella tal*

Om det finns sådana tal, som icke kan skrivas som kvoten mellan två hela tal, så bör de helt naturligt kallas, ja, det kan vi nog låta eleverna själva hitta på: "icke rationella tal". Några skulle t. o. m. kunna komma på den nekande sammansättningsdelen *in-* (som blir till *ir-* framför följande *-r*) såsom ersättning för "icke". "Irreguljär" är nog bekant för åtskilliga. (Ett studium av några ord, som börjar på *in-*, *ir-*, kan inte skada.) Vad ordet *irrationell* betyder, bör kunna fastna och verkligen äga en mening, om det varit möjligt att anslå en stund till sådant samtal, som ovan skisserats.

Att $\sqrt{2}$ eller $\sqrt{3}$ är ett sådant tal, visas naturligtvis i varje lärobok, men likväl talar vi något därom. Om vi bland de tal, som vi känner, skulle försöka få reda på ett tal, vars kvadrat är 2, så måste vi söka bland bråken. Vi låter eleverna söka en liten stund. Sådant brukar vara roligt. Man kan ju hålla sig till decimalbråk och stänga inne $\sqrt{2}$ mellan allt snävare gränser.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | är för stort, | 1 | är för litet, ty | $2^2 = 4$ | och |
| | | | | $1^2 = 1$ | |
| 1,5 | ,, ,, ,, | 1,4 | ,, ,, ,, ,, | $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ | ,, |
| | | | | $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ | |
| 1,42 | ,, ,, ,, | 1,41 | ,, ,, ,, ,, | $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$ | ,, |
| | | | | $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ | |
| 1,415 | ,, ,, ,, | 1,414 | ,, ,, ,, ,, | $(1{,}415)^2 = 2{,}002225$ | ,, |
| | | | | $(1{,}414)^2 = 1{,}999396.$ | |

Räcker tiden, låter vi en elev föreslå ett godtyckligt tal till nämnare i ett bråk. Låt oss t. ex. välja 57! Då gäller det att söka reda på en täljare, sådan att bråkets kvadrat blir 2. I det sökandet kan hela klassen deltaga genom att var och en räknar i sin bok, eller också kan man låta en 5—6 elever arbeta vid tavlan. På så vis finner vi t. ex.:

$$\left(\frac{70}{57}\right)^2 = \frac{4\,900}{3\,249}, \quad \left(\frac{80}{57}\right)^2 = \frac{6\,400}{3\,249} = 2 - \frac{98}{3\,249}$$

$$\left(\frac{81}{57}\right)^2 = \left(\frac{27}{19}\right)^2 = \frac{729}{361} = 2\frac{7}{361}$$

Snart finner vi nog, att man såvitt möjligt förkortar *före* kvadreringen och att det således inte är möjligt att förkorta efter räkningens utförande.

Så kan tiden väl vara inne att visa, att hur vi än söker efter nämnare och täljare i bråk, kan vi aldrig någonsin hitta ett bråk, som multiplicerat med sig självt ger till resultat 2. $\sqrt{2}$ måste alltså vara ett nytt slags tal, som inte kan skrivas som ett bråk. Det måste vara ett *irrationellt tal.*

# GEOMETRI

## Inledning till kongruensläran

Det viktigaste av allt i geometriundervisningen är, att man i början går *mycket* långsamt fram. Det är ju inte helt otänkbart, att en oerfaren lärare skulle kunna frestas att i klass 7 redan från början ge eleverna t. ex. axiomen som utantill-läxa eller en sats eller två i läxa utan tillräcklig genomgång. Dylikt vore ytterligt olämpligt. Ty här är att märka, att tillräcklig genomgång betyder arbete under lång tid om och om igen med de grundläggande begreppen och de första satserna, hela tiden under elevernas livliga medverkan. Den första geometriläxan, där det gäller bevis, brukar nog komma i början av november eller möjligen i slutet av oktober i klass 7, förutsatt att man åtminstone en gång i veckan arbetat med förberedelserna under hela höstterminen. Dessförinnan bör man, som tidigare framhållits, ha arbetat med den förberedande geometrikursen ordentligt hela höstterminen i föregående klass.

Under sådana förhållanden behöver vi alltså inte tala om förekommande storheters namn och enklare egenskaper. Vi kan omedelbart sätta igång med ”tankegeometrien”, och det kan bli ungefär så här:

Av papp har jag skurit ut en oliksidig triangel (med sidorna 45 cm, 50 cm och 55 cm) och i ett av hörnen satt fast en ögla, t. ex. ett hålförsett mässingsbleck, som spikats fast eller på annat sätt fästs vid pappskivan. För att hålla skivan snygg kan man behandla den med schellackfernissa.

Läraren börjar med att på 4—5 ställen på tavlan före lektionens början rita av denna skiva och vänder då ibland den ena, ibland den andra sidan av pappskivan mot tavlan.

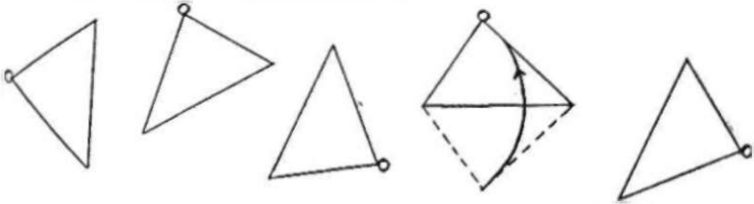


Fig. 22.

Om vi så lämnar skivan till en elev och ber honom (eller henne) att visa, att den kan täcka de uppritade trianglarna, så bör alltid några elever i klassen kunna lägga märke till att man ibland endast genom att föra skivan utefter tavlan kan få den att täcka den ena triangeln efter den andra men att man i andra fall nödvändigtvis också måste vända på skivan. Man kan då t. ex. förskjuta skivan så, att en sida sammanfaller med den lika långa sidan på avbildningen, och sedan vrida skivan 180° omkring denna sida som axel. Sedan några elever fått övertyga både sig och klassen om detta, bör tiden vara inne för läraren att tala om, att vi brukar säga, att figurer — vi tänker endast på plana figurer — som är så beskaffade, att man kan flytta (eller tänka sig flytta) den ena på den andra, så att den ena fullständigt täcker den andra, är *kongruenta*.

Ett par gummihandskar skulle t. ex. kunna vara gjorda över en och samma modell av en hand och således från början vara lika i alla detaljer. Skall man kunna använda paret på vanligt sätt, måste man vända ut och in på den ena handsken. Handskarna är naturligtvis ändå på sätt och viss lika i detaljerna, men vi kan inte utan vidare säga, att de är kongruenta.

Vi säger att två handskar äro *rakt kongruenta*, om båda passar till samma hand. När vi har vänt på den ena, så att vi kan använda handskarna på vanligt sätt, får vi ta till beteckningen *omvänt kongruenta*.

På samma sätt är det med våra trianglar, som vi har ritat på tavlan.

Från geometrikursen i klass 6 bör eleverna känna till begreppet *element* och att i en triangel elementen äro sidor och vinklar. Sedan vi påmint därom eller, om saken förut inte är bekant, arbetat in begreppen, vågar vi oss nog på att fråga, vilka element i en triangel det kan vara, som bestämmer formen, och vilka det är, som bestämmer storleken.


Fig. 23.[1]

Om vi ritar av vår pappskiva *ABC* i dess verkliga storlek a) och sedan med dess hjälp ritar en mindre eller större triangel med bibehållande av vinklarna (skivan användes som vinkeltransportör), så är det ingen konst att få barnen att förstå, att de båda trianglarna har samma form eller med andra ord: Det är vinklarna, som bestämmer formen.

Nu är det så, att om $\triangle\ ABC$ och $\triangle\ A_1B_1C_1$ har samma form, brukar man teckna det:

$$\triangle\ ABC \sim \triangle\ A_1B_1C_1.$$

(Observera att vardera halvan av tecknet har samma form som den andra.)

Att trianglarna är lika stora, tecknar vi naturligtvis:

$$\triangle\ ABC = \triangle\ A_1B_1C_1$$

(och då tänker vi nog i allmänhet på att ytorna är lika).

De trianglar, som vi ville tala om, har både samma form

[1] I b) skall stå $B_1$ ej B.

och samma storlek. För att beteckna detta slår vi samman båda tecknen och får:


Fig. 24.

$$\triangle\ ABC \simeq \triangle\ A_2B_2C_2,$$

vilket utläses: $\triangle\ ABC$ har samma form och storlek som $\triangle\ A_2B_2C_2$.

Nu skall vi så smått försöka bevisa, att om man har två trianglar, som är lika till form och storlek, kan man tänka sig, att man flyttar den ena så, att den fullständigt täcker den andra, och då kan vi också läsa: $\triangle\ ABC$ är kongruent med $\triangle\ A_2B_2C_2$.

Men innan vi kommer så långt, brukar det ta åtskillig tid. Vi undersöker först:

*Hur många element behöver man känna för att kunna rita en triangel?*

Vi ritar av vår triangel:

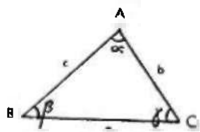



Fig. 25.

och erinrar oss, att vi alltid betecknar vinkeln vid en vinkelspets med motsvarande grekiska bokstav och den motstående sidan med motsvarande lilla bokstav.

Så kommer barnen med in i arbetet genom att vi framställer frågan i överskriften. Det blir nog snart majoritet för 3 stycken, och då börjar vi samla 3 element på olika sätt. Vi skriver upp förslagen på tavlan och har om en stund:

tre sidor
tre vinklar
två sidor och en vinkel
två vinklar och en sida.

När vi så närmare skärskådar förslagen, går det nog lätt att med exemplifierande figurer få förslaget om tre vinklar utmönstrat. Vi har nyss talat om att vinklarna bestämmer formen. Om storleken skall vara bestämd, måste åtminstone en sida vara med.

För behandling av de två sista förslagen kan vi lämpligen rita:

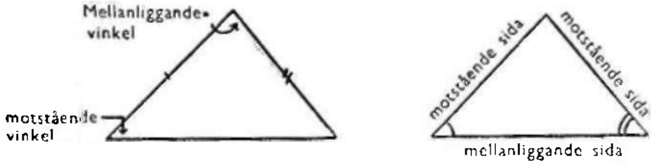



Fig. 26.

Det är säkert inte svårt att efter detta av eleverna få de två sista förslagen ändrade till fyra:

två sidor och mellanliggande vinkel
två sidor och en motstående vinkel
två vinklar och mellanliggande sida
två vinklar och en motstående sida.

Ifråga om de två första av dessa fyra förslag måste naturligtvis läraren tala om, att det andra är så pass besvärligt, att vi avstår från det och nöjer oss med det första.

Redan i klass 6 skall eleverna med hjälp av gradskiva ha mätt vinklarna i trianglar och funnit, att summan är 180°. Det bör därför inte vara svårt att göra klart för dem, att de två sista förslagen är likvärda. Om man känner två vinklar i en triangel, känner man också den tredje.

Det räcker således med:
Två vinklar och en sida.
Vi har alltså nu fått följande möjligheter:

två sidor och mellanliggande vinkel
tre sidor
två vinklar och en (mellanliggande) sida.

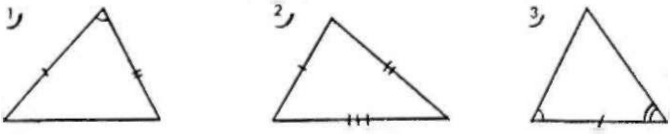



Fig. 27.

För att eleverna nu skall få klart för sig, att det verkligen räcker med 3 element, låter vi dem försöka att rita av tre trianglar i stil med de tre, som synes härovan. Eftersom eleverna ännu inte har lärt sig att flytta en vinkel, använder vi ett papper, som vi viker eller klipper, så att man får den vinkel man vill ha.

Sedan detta är klart, har vi på tavlan 6 figurer.

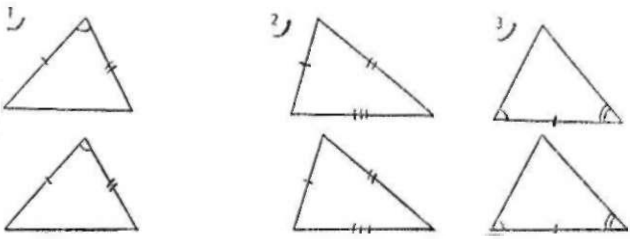



Fig. 28.

Om de två trianglarna under varandra vill vi nu bevisa, att de är kongruenta, men innan vi börjar med det, läser vi gång på gång, d. v. s. eleverna får själva formulera:

1) Om två sidor och mellanliggande vinkel i *en* triangel är lika med motsvarande element i *en annan* triangel, är trianglarna kongruenta.

2) Om alla tre sidorna i *en* triangel är lika med motsvarande element i *en annan* triangel, är trianglarna kongruenta.
3) Om två vinklar och en sida i *en* triangel är lika med motsvarande element i *en annan* triangel, är trianglarna kongruenta.

Det är klart, att varje gång en elev redogör för innehållet i en sats, han inte endast läser upp satsen utan också på en figur illustrerar det han talar om.

Sedan detta lästs och ritats upprepade gånger, sätter vi så småningom i gång med tankebeviset för första kongruensfallet och ritar därför än en gång våra trianglar:

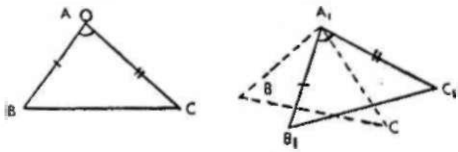



Fig. 29.

Det är av stor vikt att eleverna från början får lära sig att uttrycka sig på ordentlig svenska, även när det är fråga om geometri.

Vad är det vi nu känner till om dessa trianglar? Jo:

*Förutsättning:*

I trianglarna $ABC$ och $A_1B_1C_1$ är sidan $AB$ = sidan $A_1B_1$, sidan $AC$ = sidan $A_1C_1$ och $\wedge\ BAC = \wedge\ B_1A_1C_1$.

Därvid pekas på varje sida, t. ex. $AB$ så, att pekpinnens spets föres från $A$ till $B$ och på vinkeln utefter en båge från det ena vinkelbenet till det andra.

Vad är det vi misstänker om dessa trianglar? Jo:

*Påstående:*

$$\triangle\ ABC \cong \triangle\ A_1B_1C_1,$$ som läses:

Triangeln $ABC$ är kongruent med triangeln $A_1B_1C_1$.

Men detta påstående måste bevisas.

*Bevis:*

Då tar vi vår pappskiva, försedd med bokstäverna $A$, $B$ och $C$ i hörnen, och lägger den över triangeln $ABC$ på tavlan. Så säger vi: Jag tänker mig, att jag tar triangeln $ABC$ och lägger den på triangeln $A_1B_1C_1$ så, att punkten $A$ faller *på* punkten $A_1$. Om vi då ordnar så, att $A$ är den översta punkten, kan vi hänga vår pappskiva i öglan på spetsen av pekpinnen, som vi stöder mot tavlan. Skivan kommer då att inta ett läge som den streckade triangeln.

Det ligger då nära till hands att fortsätta: Sedan vrider jag triangeln så, att sidan $AB$ faller *utefter* $A_1B_1$. Då måste punkten $B$ falla på punkten $B_1$, emedan $AB$ är lika med $A_1B_1$ enligt förutsättningen. (Även en så enkel sak som denna, att $B$ måste falla i $B_1$, måste ibland närmare förklaras, t. ex. med hjälp av pekpinnen eller en linjal.)

Då måste sidan $AC$ falla *utefter* (lämpliga ord diskuteras) sidan $A_1C_1$, emedan $\wedge\ BAC = \wedge\ B_1A_1C_1$. Punkten $C$ faller då på punkten $C_1$, emedan sidan $BC$ är lika med sidan $B_1C_1$. Om sidan $BC$ vet man nu, att ändpunkten $B$ faller i $B_1$ och ändpunkten $C$ i $C_1$ eller med andra ord att $BC$ sammanfaller med $B_1C_1$.

Då nu sidan $AB$ sammanfaller med $A_1B_1$, $BC$ med $B_1C_1$ och $CA$ med $C_1A_1$, måste $\triangle\ ABC$ täcka $\triangle\ A_1B_1C_1$, d. v. s. $\triangle\ ABC \simeq A_1B_1C_1$.

*V.S.B.* (Vilket skulle bevisas.)

Sedan satsen flera gånger (4—5—6) med elevernas hjälp behandlats av läraren eller vice versa, är väl tiden kommen, *inte* att ge den till hemläxa men att låta någon elev på egen hand försöka sig på att "dra" beviset i dess helhet.

Det är nog ganska tråkigt, i synnerhet för eleven, men väl också för läraren, om det blir en vana, att läraren lite då och då, kanske rent av ideligen, lägger sig i elevens framställning med "hjälpfrågor" eller anmärkningar. Nej, vi låter eleven efter bästa förmåga själv gå igenom satsen med förutsättning, påstående och bevis. Det händer mycket ofta, att eleven säger något felaktigt men rättar sig själv efter en stund, om ingen stör honom (eller henne).

Efter det att behandlingen slutförts, kommer omedelbart kritik, inte i första hand från läraren utan från kamraterna i klassen. Är det fråga om en längre sats, är det inget som hindrar, att eleverna har ett papper och en penna framme för att anteckna felaktigheter, som de lägger märke till. Normalt bör eljest alla skrivdon vara bortlagda.

Då får läraren se, om eleverna uppmärksamt följt framställningen på tavlan och om de varit så hemma i uppgiften, att de reagerat för felaktigheter.

Det kan därvid också bli tillfälle för eleverna att få försvara sina ståndpunkter. Först sedan eleverna inte har något mer att säga, kommer läraren med "slutpåminnelserna".

Att detta inte går utan vidare första gången är klart, men länge behöver det inte dröja, innan det går hjälpligt.

Att läsa axiomen har vi ingen tid till. De får tas upp, när det behövs, och kanske kan man då och då komma in på att någonting måste man alltid utgå ifrån som påtagligt sant. (Sjöstedt, sid. 12.)

Det är också klart, att eleven måste känna sig mera tillfredsställd, om han kan och får genomföra arbetet på egen hand. Säkert blir också läraren mer nöjd.

Först när några elever (2—3—4) på ett par skilda lektioner lyckats något så när tillfredsställande klara uppgiften, kan vi ge första kongruensfallet i läxa.

För egen del låter jag alltid eleverna i ett vanligt räknehäfte skriva läxan eller del därav (ordentligt — med måtta). De får därigenom ständig övning i att använda vanliga geometriska beteckningar, och jag vill varmt rekommendera metoden. *Det är bättre, att en kort läxa blir ordentligt utförd, än att en längre blir slarvigt behandlad.*

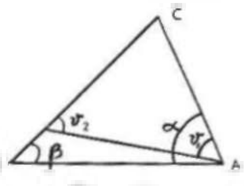
Man finner nog snart, att om man i början gått långsamt och grundligt fram, går det så mycket fortare i fortsättningen.

Det blir säkert en glädje för både elever och lärare, om en elev utan någon som helst förberedelse kan klara t. ex. tredje kongruensfallet, och det är inte så ovanligt.

## Kursen i klass 7

Så ingående behandling, som den man bestått första kongruensfallet, kan inte komma någon annan sats till del, men det torde inte heller behövas. Med tre timmar i veckan blir det säkert mycket svårt att hinna med kursen. För att ha någon utsikt att lyckas får man strängt ransonera de fullständiga behandlingarna. Det räcker nog, om man i klasserna 7 och 8 sammanlagt läser 25 satser grundligt. Under många år har jag arbetat i enlighet med följande översikt, som hänför sig till Sjöstedts lärobok i geometri.

Axiomen läser vi inte särskilt. Vi "tillverkar" dem, när de behövs, och läser sällan eller aldrig upp dem utan att samtidigt peka. När man t. ex. i satsen, att i en triangel mot en större sida står en större vinkel (fig. 30), först har sagt, att $\alpha > v_1$ (emedan det hela är större än var och en av sina delar), att $v_1 = v_2$ (satsen om den likbenta triangeln) och att $v_2 > \beta$ (satsen om yttervinkeln), brukar vi peka på vinklarna $\alpha$, $v_1$, $v_2$ och $\beta$ och läsa: Om det första ($\alpha$) är större än det andra ($v_1$) och det andra är lika med det tredje ($v_2$) och det tredje är större än det fjärde ($\beta$), så är det första ($\alpha$) större än det fjärde ($\beta$).




Om man håller på att axiomets innehåll alltid skall läsas upp (samtidigt som ifrågakommande storheter pekas ut), kan man säkert klara av axiomen utan att de ges som särskild hemläxa.

De ofta i början av läroböcker i geometri förekommande satserna om sidovinklar, komplement- och supplementvinklar samt vertikalvinklar läser vi inte heller. De tre första har behandlats i klass 6, och när vi träffar på vertikalvinklarna första gången, ritar vi figur 31, räknar algebraiskt ut vinkeln mitt emot $\alpha$ och får, att den också är $\alpha$. Dessa satser förekommer så ofta i fortsättningen, att det inte finns någon risk, att de skulle kunna glömmas.

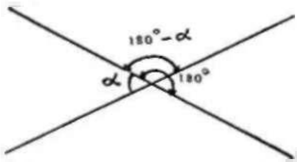



Fig. 31.

Definition på kongruens, första kongruensfallet och problemen att rita trianglar med tre givna element är förut behandlade.

Satsen om den likbenta triangeln och dess omvändning bevisas på alldeles samma sätt som första kongruensfallet och behandlas fullständigt med förutsättning, påstående och bevis.

Andra kongruensfallet och satsen om den öppna kongruensen måste läsas grundligt (efter boken).

De fem konstruktionsuppgifterna att dela en sträcka och en vinkel mitt itu, att draga en normal till en given rät linje från en punkt på linjen och en punkt utanför linjen samt att flytta en vinkel är dels så viktiga, dels så utmärkta övningsexempel på kongruensfallen, att de bör läsas mycket ingående (och helst utan bokens hjälp).

Den grundläggande satsen i läran om parallella linjer, d. v. s.: "Om två räta linjer skäras av en tredje och ett par alternatvinklar är lika stora, så är linjerna parallella", får vi arbeta igenom noggrant, dels därför att bekantskapen med parallella linjer grundlägges här, dels därför att man här gör bekantskap med det indirekta beviset. Här bör man passa på att en stund behandla följande: Därför att två parallella linjer aldrig råkas, hur långt de än dragas ut, får man inte förledas att vända på satsen och tro, att om två räta linjer aldrig råkas, hur långt de än dragas ut, så är linjerna parallella. De kanske inte ligger i samma plan. Man kan t. ex. tänka på kanten till svarta tavlans krithylla och kanten mellan fönsterväggen och taket. Dessa linjer är inte parallella, emedan de inte ligger i samma plan.

Tankegången: Om det inte är så, som det påstås i satsen (att linjerna är parallella), så finns det den eller de möjligheterna, att . . ., är ju här ny och tarvar därför särskild uppmärksamhet vid genomgången.

Vid beviset för omvändningen: ''Om två parallella räta linjer skäres av en tredje rät linje, så är alternatvinklar lika stora'', träffar vi också på det indirekta beviset, men dessutom för första gången parallellaxiomet och får därför även här räkna med en grundlig genomgång.

Återstående satser om parallella linjer behöver vi inte göra mycket väsen av. Vi begär, att eleverna skall kunna innehållet i satsen och illustrera med en teckning, t. ex. så här:

Om två räta linjer skäres av en tredje och två likbelägna vinklar är lika, är linjerna parallella.


Fig. 32.

När vi kommit så långt i kursen, bör eleverna veta, att de skall tala om förutsättning, påstående och bevis och bör med ledning av teckningen ovan kunna klara satsen på egen hand, varför man, om det blir ont om tid, kan ta bevisen som övning under lektionerna.

Vi slutar avdelningen med en teckning:

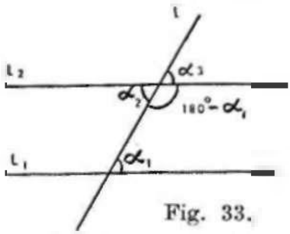



Fig. 33.

och övar så här: Om två räta linjer ($L_1$ och $L_2$) är parallella och skäres av en tredje ($L_3$), så är *alternatvinklarna* ($\alpha_1$ och $\alpha_2$) lika, *likbelägna vinklar* ($\alpha_1$ och $\alpha_3$) lika, och motställda vinklar ($\alpha_1$ och $180° - \alpha_1$) *supplementvinklar* (omvändning).

Därvid har vi kommit överens om att vinklar, som är betecknade med samma bokstav, är lika (indices skiljer vinklarna åt). Jfr sid. 159.

Satsen om yttervinkeln och om vinkelsumman i en triangel brukar vi endast behandla så här:

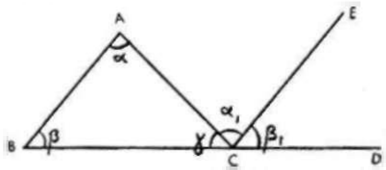



Fig. 34.

Vi drar $CE \parallel AB$ genom att göra $\alpha_1 = \alpha$. Då blir $\beta_1 = \beta$ (likabelägna vinklar vid parallella linjer). Så läser vi ur figuren: Yttervinkeln $(\alpha_1 + \beta_1)$ = summan av de inre motstående vinklarna $(\alpha + \beta)$ och vinkelsumman $= \alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180°$, varpå någon elev kan formulera slutsatsen.

Satsen "Mot en större sida i en triangel står en större vinkel" och dess omvändning (med indirekt bevis) får vi behandla ordentligt.

Satsen om att två sidors summa i en triangel är större än den tredje, har vi inte tid med. Det får räcka med lite tal om att räta linjen är kortaste avståndet mellan två punkter.

Något bevis består vi inte heller den sats, där man jämför avstånden från en punkt $A$ utanför en rät linje $L$ till olika punkter på linjen, men eleverna bör kunna redogöra för innehållet i satsen, och eftersom den ju är ganska lång, kan det säkert vara lämpligt att ägna en liten stund åt den.

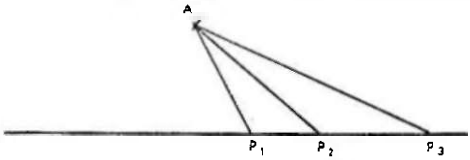



Fig. 35.

Vi sätter ut punkter $P_1$, $P_2$, $P_3$ etc. och låter eleverna försöka att på svenska tala om, vad man ju genast kan iakttaga, d. v. s. att avståndet ökar, då $P$ rör sig utåt på $L$. Det ligger nu nära till hands att fråga: Finns det något minsta avstånd och kanske något största? I samband med det förra blir det tal om normalens fotpunkt $P_0$.

Att det inte finns något största avstånd inser nog eleverna omedelbart. Någon tar kanske tillfället i akt och säger, att hur långt bort man än väljer en punkt, så kan man i alla fall välja en punkt längre bort. Punkterna $(P_n)$ försvinner i oändligheten, och avståndet $AP_n$ växer över varje gräns.

Att man kan välja punkter på andra sidan om $P_0$ får väl konstateras utan bevis och likaså, hur man skall bära sig åt för att finna två punkter, som ligger lika långt från $A$.

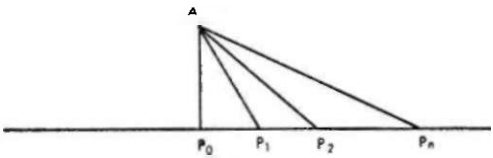



Fig. 36.

Efter en stunds resonemang torde eleverna vara mogna att försöka formulera satsen (under samtidig hänvisning till figuren).

Satsen om mittpunktsnormalen är så pass användbar, att man gärna kan ta med den, om det inte är alltför brått-om.

Däremot låtsas vi inte alls om omvändningarna till första och andra kongruensfallen, d. v. s. följande två satser:

1) Om två sidor i en triangel är lika med var sin sida i en annan triangel men de mellanliggande vinklarna olika, så är den sidan, som står emot den större vinkeln, större än den, som står emot den mindre.

2) Om två sidor i en triangel är lika med var sin sida i en annan triangel men de tredje sidorna är olika, så är den vinkeln, som står emot den större sidan, större än den, som står emot den mindre.

Att fjärde kongruensfallet (med två rätvinkliga trianglar) hör till de nödvändiga satserna är självklart.

Satserna om parallellogrammer, som väl i framtiden får avsluta geometrikursen i klass 7, hör till de trevligaste i kursen, både därför att de är lätta att hålla ihop och så lätta att bevisa, att en genomsnittselev i regel bör kunna klara dem på egen hand. Själva begreppet parallellogram brukar däremot ställa till trassel. Frågar man, vad en parallellogram är, får man i alltför många fall till svar, att det är en fyrsidig figur, där motstående sidor är lika stora, och detta, även om det många gånger blivit sagt, att figuren i så fall ju borde heta "ekvigram" eller "likogram" eller något dylikt (ordet romboid får väl anses vara utmönstrat).

Ofta händer det också, att man får höra:

Om motstående sidor i en fyrsidig figur är parallella, så är fyrsidingen en parallellogram, alldeles som om detta vore en sats. Det inträffar nog i regel, då man bevisat, att motstående sidor i en fyrsidig figur är parallella, och man borde säga: Då är figuren en parallellogram enligt definitionen eller: En sådan figur kallas en parallellogram.

Vi brukar läsa satserna så här:

a. I en parallellogram är motstående sidor lika.

b. Om i en fyrsiding motstående sidor är lika, så är figuren en parallellogram.

c. I en parallellogram är motstående vinklar lika.

d. Om i en fyrsiding motstående vinklar är lika, så är figuren en parallellogram.

e. I en parallellogram delar diagonalerna varandra mitt itu.

f. Om diagonalerna i en fyrsidig figur delar varandra mitt itu, så är fyrsidingen en parallellogram.

g. Om i en fyrsidig figur ett par motstående sidor är både parallella och lika, så är fyrsidingen en parallellogram.

Alla dessa sju satser brukar icke vara bevisade i läroböckerna. Det blir därför alltid någon liten övning att på egen hand skriva ett bevis, om vi tar med dem alla.

Så måste eleverna övas att dra en rät linje parallell med en given linje genom att

göra två alternatvinklar lika
göra två likbelägna vinklar lika
göra motstående sidor i en fyrsiding lika
på två varandra skärande räta linjer från skärningspunkten avsätta parvis lika sträckor,
göra två motstående sidor i en fyrsiding både parallella och lika.

Det brukar vara roligt att någon gång då och då plocka med sig en fyra, fem passare och dito linjaler och låta flera elever samtidigt utföra konstruktioner på svarta tavlan, t. ex. vinklar på 90°, 75°, 60°, 45°, 30°, 22,5°, 15°, kvadrater, rektanglar, romber, liksidiga och likbenta trianglar, bisektriser och mittpunktsnormaler.

## Kursen i klass 8

Sedan parallellogrammerna behandlats i slutet av klass 7, går man nog i regel över till att behandla cirkeln. Åtskilligt ifråga om definition och benämningar bör redan vara behandlat under geometrilektionerna i klass 6. Vi tänker därför nu närmast på de satser, som man bör läsa i klass 8.

Den första sats, som vi behandlar, är följande:

En medelpunktsvinkel är dubbelt så stor som en periferivinkel på samma båge i en cirkel. Har vi ont om tid, så låt oss rita så här:

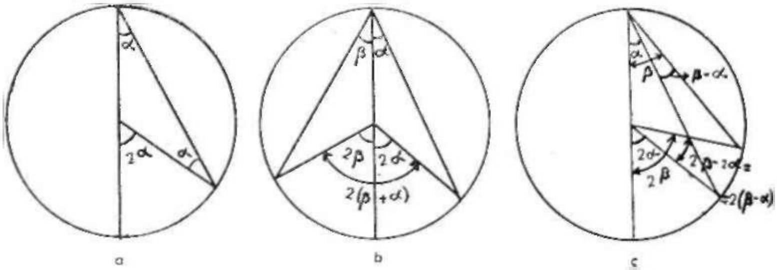



Fig. 37.

Vid *genomgång* av satsen ritar vi fig. a, kallar kordans vinkel med diametern för $\alpha$ och låter eleverna lista ut, att kordans vinkel med radien också är $\alpha$ (satsen om den likbenta triangeln) och att vinkeln mellan radien och diametern vid medelpunkten är $2\alpha$ (enligt satsen om yttervinkeln). Så får eleverna i klassen försöka sig på att i ord uttrycka satsen.

Utökningarna i b och c framgår så tydligt av figurerna, att de väl kan få tala för sig själva. Utbrytningen bör vid denna tidpunkt inte vålla något besvär.

Efter denna viktiga sats följer de många satserna om bågar, medelpunktsvinklar, kordor och kordornas avstånd till medelpunkten.

Vi ritar en figur som fig. 38 och försöker få eleverna att läsa: Lika bågar (i en cirkel) upptar lika kordor; lika kordor upptar lika bågar. Lika bågar upptar lika medelpunktsvinklar; lika medelpunktsvinklar upptar lika bågar. Lika kordor upptar lika medelpunktsvinklar; lika medelpunktsvinklar upptar lika kordor.

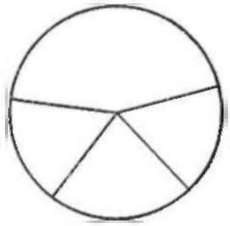


Fig. 38.

Ur denna figur får vi: En större båge upptar en större korda, med omvändning, alldeles som ovan, endast med den skillnaden, att *lika* utbytes mot *större*.

Fig. 39.

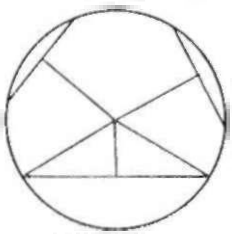


Fig. 40.

Nästa gång läser vi: Lika kordor ligger lika långt från medelpunkten; kordor, som ligger lika långt från medelpunkten, är lika stora. En större korda ligger närmare medelpunkten än en mindre. En korda, som ligger närmare medelpunkten än en annan, är längre än denna.

Till dessa satser behövs ingen lärobok. Eventuellt kan vi ta till läxa att rita teckningar och skriva satserna i geometrihäftet. Bevis har vi säkert inte tid att tänka på.

Däremot bevisar vi, att sammanbindningslinjen mellan medelpunkten och kordans mittpunkt är normal mot kordan och att normalen mot kordan från medelpunkten delar kordan mitt itu.

Satsen om avstånden från en punkt till punkter på en cirkels periferi har sin trevnad, dels därför att man här i motsats till vad fallet är vid en rät linje har både ett minsta och ett största avstånd, dels därför att den ger en viss övning att på svenska uttrycka ett längre tankeinnehåll.

(Inga bevis däremot.)

Alla satser, som handlar om samband mellan centrallinje och radier, hoppar vi över, likaså satsen, där det talas om att en tangent endast har en punkt gemensam med cirkelns periferi.

Vi definierar en tangent såsom en rät linje, som går genom en punkt på en cirkels periferi och är vinkelrät mot radien, och övar oss att draga en tangent genom en punkt på periferien och från en punkt utanför.

Det blir inte många satser vi behöver behandla grundligt, men så kan vi i stället få möjlighet att behandla dessa så mycket bättre.

Det räcker nog med följande uppgifter och satser:

1) Att draga en tangent till en cirkel genom en punkt på perifierien.
2) Att draga en tangent till en cirkel från en punkt utanför cirkeln.
3) Tangenter från en punkt till en cirkel är lika långa.
4) Centrallinjen är bisektris till tangentvinkeln och mittpunktsnormal till tangentkordan.
5) Satsen om vinkeln mellan tangent och korda (ev. endast med teckning).

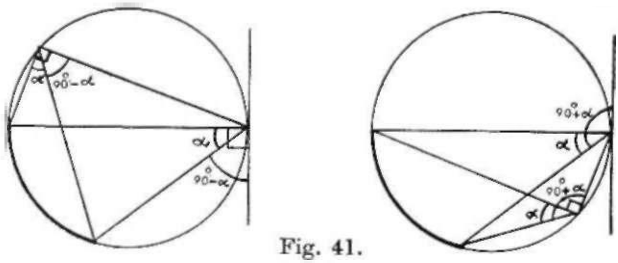
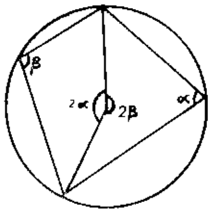


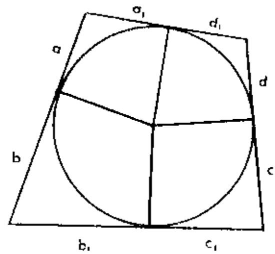

Fig. 41.

6) Att omskriva en cirkel kring en given triangel.
7) Att inskriva en cirkel i en given triangel.
8) Satsen om vinklarna i ett cirkeltrapets.
9) Satsen om sidorna i en omskriven fyrhörning.




$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Fig. 42.




$$a + b + c + d =$$
$$= a_1 + b_1 + c_1 + d_1.$$

Fig. 43.

Att de satser, som vi här ovan betecknat med 3, 5, 8 och 9, liksom också satserna om medelpunktsvinkel och periferivinkel i någon mån blivit lärjungarnas andliga egendom, kan vi ju också kontrollera planimetriskt. Det är mycket enkelt att rita en cirkel, skriva in en fyrhörning och dra diagonaler och en tangent i en hörnpunkt (eller i flera).

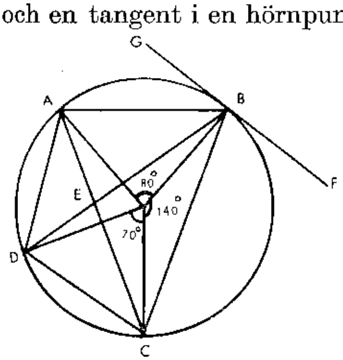



Fig. 44.

Om man låter en elev mäta upp några vinklar vid medelpunkten, t. ex. såsom i vidstående figur, så får vi samtidigt övning i att använda gradskiva, vilket ju alltid behövs. Ritar man en stor figur, kan man skriva vinklarna direkt på figuren.

Här finns 3 vinklar vid var och en av punkterna $A$, $C$ och $D$, 4 vid $E$ och snarast 7 vid $B$ att räkna ut.

Lika lite som man kan kontrollera, att en elev verkligen har *tillägnat* sig ytmåtten genom att låta honom skriva eller gång på gång läsa en lång ramsa: 1 mil = 10 km, 1 km = = 10 hm etc., lika lite kan man få en uppfattning, om eleven har förstått geometrisatser, om han endast övas att läsa upp dem utantill, kanske rent av utan teckning att hänvisa till.

Nej, kan en elev t. ex. dela upp 200300400500,6789 dtum² i olika sorter, så har han nog begripit måttsystemets uppbyggnad, och kan han vara med och hjälpa till att använda förut genomgångna satser vid geometriska bevis eller planimetriska beräkningar, så har han säkert fattat de geometriska satser, som blivit behandlade.

Det finns massor av uppgifter att hämta i böcker, men något lite friskare blir väl arbetet, om uppgifterna tillverkas under samarbete i klassen. Nu måste det ju vara så, att läraren kvällen före lektionen tänker efter, vad som skall göras, icke så att lektionens gång bestämmes i detalj (det blir sällan eller aldrig bra). Men ändå: läraren måste tänka igenom, vad som skall behandlas och hur det skall göras, och kan ju då vid lektionen ha uppgiftsförslag på lager.

Ett par ex.:

*Ex. 1.* Vi ritar en cirkel, drar en lodrät diameter och tangenter i diameterns ändpunkter och två godtyckliga tangenter till, så att vi får ett omskrivet parallelltrapets $ABCD$. Det kan också vara nyttigt att rita efter ögonmått utan konstruktion, så att vår teckning ser ut som fig. 45. Att tänka sig, att man skulle kunna lära eleverna att alltid rita så ordentligt, att de konstruerar med passare och linjal eller med vinkelhake (den ritsade celluloidskivan är här ovärderlig vid ritning i häften), är nog inte värt att hoppas.

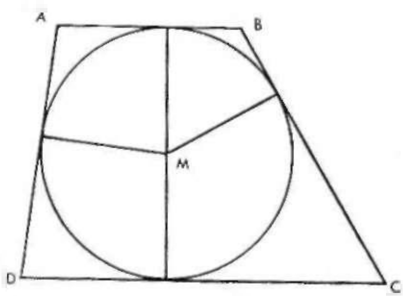



Fig. 45.

Om nu endast cirkeln och parallelltrapetsets sidor är dragna, får vi tillfälle att fråga: "Nu är det några linjer, som vi med nödvändighet måste dra, för att vi skall få ut någonting av figuren. Föreslå några!" Vi kan inte komma någonstans, om vi inte använder oss av att en tangent är en rät linje, som går genom en punkt på en cirkels periferi och är vinkelrät mot radien. Vi måste alltså sammanbinda medelpunkten $M$ med de fyra tangeringspunkterna eller dra normaler från $M$ mot sidorna, vilket man nu vill säga.

Skall vi få nytta av satsen om tangenter, så drar vi också centrallinjerna från hörnen och får så fig. 46.

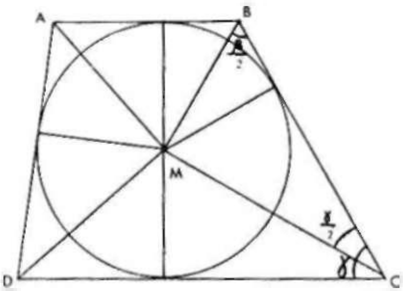



Fig. 46.

Av satsen, att centrallinjen är bisektris till tangentvinkeln, följer, att $\wedge\ MBC = \frac{\beta}{2}$ och $\wedge\ MCB = \frac{\gamma}{2}$.

Emedan $AB \parallel DC$, är $\wedge\ ABC\ (\beta) + \wedge\ DCB\ (\gamma) = 180°$ och således $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$.

Då måste $\wedge\ BMC = 90°$, en egenskap hos det omskrivna parallelltrapetset, som kan vara väl värd att lägga på minnet.

*Ex. 2.* Låt oss rita en cirkel, omskriva en parallellogram och se, om vi kan finna någon intressant egenskap hos den parallellogrammen.

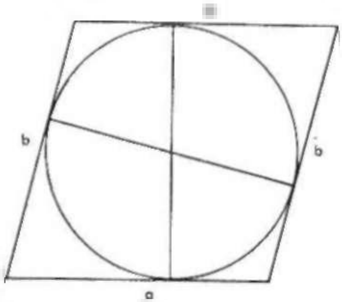



Fig. 47.

För den skull ritar man två diametrar och drar tangenter i deras ändpunkter. I en så symmetrisk figur som denna finns det en hel del iakttagelser att göra (i synnerhet om man också drar ut diagonalerna), men vi får här nöja oss med en enda iakttagelse. Betecknar vi sidorna såsom i fig. 47 med $a$ och $b$ och använder satsen om den omskrivna fyrhörningen, så får vi omedelbart: $2a = 2b$ eller med andra ord: Denna parallellogram måste vara en romb.

*Ex. 3.* Vi ritar en cirkel och vill i den skriva in en triangel med vinklarna 50°, 60° och 70°. (Sådana uppgifter ges ju inte så sällan, och om eleverna har möjlighet att rita riktiga figurer, underlättar det alltid arbetet. Det kan därför vara skäl att något behandla en sådan fråga.)

Vi tänker oss alltså uppgiften löst och ser efter, om vi kan finna någon egenskap hos figuren, så att vi kan utföra teckningen. Sammanbinder vi spetsarna med medelpunkten, så ser vi, att vinklarna vid medelpunkten blir 140°, 120° och 100°. Om vi då med hjälp av gradskivan drar tre radier, som bildar vinklarna 140°, 120° och 100°, så finner vi triangelns spetsar.

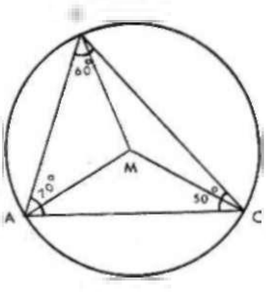



Fig. 48.

Låt oss sedan dra tangenter genom vinkelspetsarna och söka vinklarna i den av tangenterna bildade triangeln.

Om nu eleverna skulle finna, att man lätt kommer fram genom att använda satsen om vinkeln mellan tangent och korda (ev. också satserna om tangentlängden och den likbenta triangeln) och vinkelsumman i en triangel, så låt oss, om tiden räcker, inte nöja oss med det. Det kan ju ofta vara en stor glädje att inte endast lösa en uppgift utan också söka efter andra lösningar och då speciellt enkla lösningar.

Vi bör nämligen göra klart för ungdomarna, att man mången gång kan vinna mycken tid på att inte omedelbart sätta i gång att behandla ett problem efter den linje, som man först kommit att tänka på. Det medför ofta tidsvinst och ökad säkerhet, om man tar för vana att tänka efter, och detta gäller inte minst geometrien.

Utan att vilja påstå, att man i detta fall kan vinna så särskilt mycket, kan det dock vara värt att uppmana eleverna att tänka på den fyrhörning, som bildas av tangenterna (i $B$ och $C$ t. ex.) och dessas radier. Man ser därvid omedelbart, att fyrhörningen är symmetrisk med centrallinjen som symmetrilinje, att två (motstående) vinklar är räta, att vinkeln mellan radierna är $2\alpha$ och således vinkeln mellan tangenterna $180° - 2\alpha$. Utan vidare får man då, att de två andra vinklarna är $180° - 2\beta$ och $180° - 2\gamma$.

Av detta torde framgå, att vi bör söka få tid att något öva på de satser, som lästs, så att eleverna möjligen kan förstå, att det kan vara någon mening med att läsa dem, och så att inte satserna kommer vid *en* tidpunkt och den planimetriska användningen vid en *annan* utan någon förmedlande länk.

Enligt den nya undervisningsplanen av år 1950 skall behandlingen av Pythagoras' sats uppskjutas till klass 9. Det betyder, att vi i fortsättningen inte behöver först bevisa denna sats med ytjämförelser och sedan med hjälp av likformighet. Men det betyder också, att den övning på de tre satser om rätvinkliga triangeln, som vi förut kunnat läsa i klass 8, nu går förlorad på vårterminen i den klassen och början av höstterminen i klass 9.

Även om det endast blir i undantagsfall, som man kan hinna att syssla något med Pythagoras' sats och närstående satser i klass 8, så låt oss i alla fall tänka lite på vad man skulle kunna ta med här. Om tiden inte räcker, får det naturligtvis bli i avslutningsklassen, resp. RI, AI och LI. Jfr Metodiska anvisningar III, Geometri: 5[5] och 4[4].

En rätvinklig triangel kan ritas antingen så, att man sammanbinder två punkter $A$ och $B$ på en rät vinkels ben eller att man på sträckan $A_1B_1$ som diameter slår upp en halvcirkel och sammanbinder en godtycklig punkt $C_1$ på periferien med $A_1$ och $B_1$.

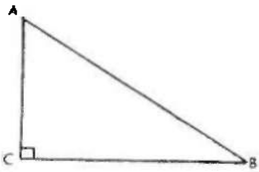



Fig. 49.

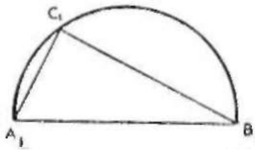
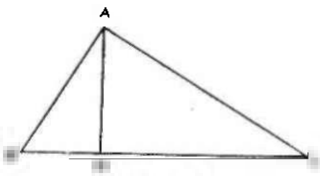



Fig. 50.

I regel är det nog trevligast att rita triangeln med hypotenusan vågrät. Så måste vi också dra höjden mot hypotenusan. så att vi får figuren (fig. 51) nedan.




För den fortsatta behandlingen måste vi införa begreppet projektion. I många klassrum finns en stång, som hänger i två snören i taket och som användes att hänga kartor på. Man kan ordna litet med snörena så, att stången inte kommer att hänga vågrätt utan något lutande, och så tänker vi oss, att det på dess undersida finns fullt med krokar, på vilka vi hängt snören med en tyngd i nedre änden och så långa, att de nätt och jämnt berör golvet. Alla de nedre ändarna berör golvet utefter en rät linje, som man kallar stångens projektion på golvet. Vill man i fig. 52 ha $AB$:s projektion på projektionsaxeln, har vi att från $A$ och $B$ fälla normaler mot axeln. $A_1B_1$ blir projektionen. Om den ena punkten ligger på axeln, behöver vi endast dra normalen från den andra punkten mot axeln.

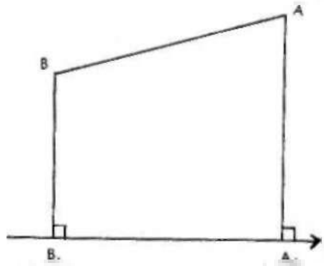



**Fig. 52.**

I vår rätvinkliga triangel $ABC$ (fig. 51) kan vi därför kalla $BH$ för $c$:s ($AB$:s) projektion på hypotenusan och i enlighet därmed beteckna den med $p_c$ (kateten $c$:s projektion på hypotenusan). På samma sätt betecknar vi $CH$ med $p_b$ ($p$ index $b$). Höjden betecknas $h$.

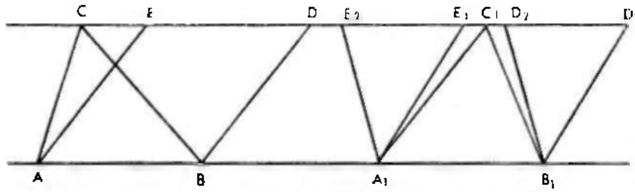



**Fig. 53.**

Om vi på svarta tavlan ritar en figur som ovanstående, kan vi öva klassen med att på svenska uttrycka en hel del satser om ytorna av de figurer, som finns där. Vi får t. ex.:

Om två trianglar står på samma bas och mellan samma parallella linjer (har lika höjder), så är de ytlika. Om två trianglar har lika ytor och står på samma bas, så har de lika höjder eller står, om man så vill, mellan samma parallella linjer.

Utan att ge uppgiften till hemläxa kan vi på en lektion på vanligt sätt visa, att (fig. 54) kvadraten $ABDE$ = rektangeln $BFGH$, d. v. s. att $c^2 = a \cdot p_c$ eller kvadraten på en katet i en rätvinklig triangel är lika med rektangeln av hypotenusan och katetens projektion på hypotenusan.

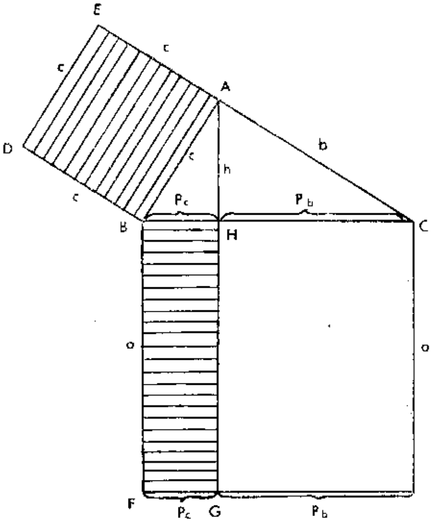



Fig. 54.

Vi har alltså nu $c^2 = a \cdot p_c$. Byter vi ut $c$ mot $b$, får vi $b^2 =$ $= a \cdot p_b$.

Addition led för led ger

$$b^2 + c^2 = a(p_b + p_c)$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot a = a^2.$$

Att dubbla triangelytan kan erhållas på två sätt ger $2T =$ $= a \cdot h = b \cdot c$.

När vi kan dessa tre satser, hjälpsatsen till Pythagoras' sats ($b^2 = ap_b$), Pythagoras' sats och satsen om dubbla triangelytan, kan vi redan i slutet av klass 8 börja öva huvudräkning i planimetri.

Därvid använder vi naturligtvis i första hand uppgifter med egyptiska trianglar och i andra hand andra enkla pythagoreiska trianglar, som läraren på t. ex. följande sätt kan "tillverka".

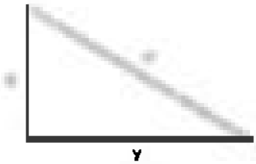


Fig. 55.

$z^2 - x^2 = y^2$ ger (konjugatregeln):

$$\begin{cases} z + x = k \cdot y & \Big| +1 & \Big| +1 \\ z - x = \dfrac{1}{k} \cdot y & \Big| +1 & \Big| -1 \end{cases} \quad \text{och}$$

$$2z = \frac{y}{k}(k^2 + 1)$$

$$2x = \frac{y}{k}(k^2 - 1) \text{ eller}$$

$$x = \frac{y}{2k}(k^2 - 1)$$

$$z = \frac{y}{2k}(k^2 + 1)$$

Härur får vi för olika insatta värden på $k$ och $y$ följande tabell, som ger de fyra enklaste pythagoreiska trianglarna, vilkas sidor $x$, $y$, $z$ är:

1) $4a$, $3a$, $5a$ ($k = 2$, $y = 4a$)
2) $8a$, $15a$, $17a$ ($k = 4$, $y = 8a$)
3) $5a$, $12a$, $13a$ ($k = 5$, $y = 5a$)
4) $12a$, $35a$, $37a$ ($k = 6$, $y = 12a$)

| $k$ | $x$ | $z$ |
|---|---|---|
| 2 | $\frac{3}{4}\,y$ | $\frac{5}{4}\,y$ |
| 3 | $\frac{4}{3}\,y$ | $\frac{5}{3}\,y$ |
| 4 | $\frac{15}{8}\,y$ | $\frac{17}{8}\,y$ |
| 5 | $\frac{12}{5}\,y$ | $\frac{13}{5}\,y$ |
| 6 | $\frac{35}{12}\,y$ | $\frac{37}{12}\,y$ |

Huvudräkning bör ju övas hela skolan igenom, och här bör man genom några minuters övning då och då kunna få de flesta elever så långt, att de kan så gott som omedelbart i t. ex. följande figur $ABC$ skriva ut längderna på sträckorna $BH$, $HC$, $BC$ och $AH$.

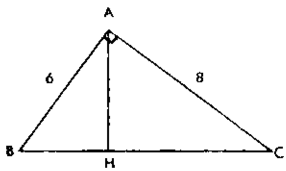


Fig. 56.

Vi råder eleverna att göra så här: De tänker sig en kvadrat utritad på kateten $AB$, och i den kvadraten står skrivet 36. På samma sätt ser vi ”för vårt inre öga” en kvadrat på kateten $AC$ med talet 64 i och på hypotenusan $BC$ en kvadrat, i vilken det står skrivet $36 + 64 = 100$. Kan eleven se detta, så kan han nog också på figuren skriva, att $BC = 10$.

Sedan tänker de sig åter kvadraten uppritad på $AB$ med 36 skrivet däri, men också en rektangel nedåt från $BH$ med den långa ”lodräta” sidan = 10 cm. Då är produkten av $BH$ och 10 lika med 36 och $BH = 3{,}6$.

Samma tankegång ger $CH = 6{,}4$, vilket ju också kunde erhållits som skillnad mellan 10 och 3,6.

På ett ögonblick kan man också räkna ut, att $AH = \frac{6 \cdot 8}{10}$ cm $= 4{,}8$ cm, vare sig man lärt sig utantill, att dubbla triangelytan kan fås på två sätt, eller man övat sig att se figuren så här:

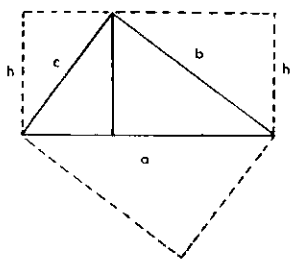


Fig. 57.

Om vi sedan från $H$ drar normalerna $HC'$ och $HB'$ mot $AB$ och $AC$ resp., kan vi med hjälp av samma satser räkna ut $AC'$ $\left(4{,}8 \cdot \frac{4{,}8}{6} = 3{,}84\right)$, $C'B = 2{,}16$,

$AB'(4{,}8 \cdot \frac{4{,}8}{8} = 2{,}88)$, $B'C = 5{,}12$, $HB'(6{,}4 \cdot \frac{4{,}8}{8} = 3{,}84) =$ $AC'$, räknat på annat sätt.

Här yppar sig många tillfällen att påminna eleverna om vikten av att se sig för, innan de sätter i gång med att utföra sifferräkningar. Vid uträkning av $AC'$ t. ex. hade säkert många först räknat ut $4{,}8 \cdot 4{,}8 = (5 - 0{,}2)^2 = 25{,}04 - 2 = 23{,}04$ i stället för att först utföra divisionen med 6.

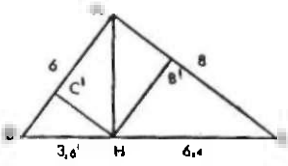



Fig. 58.

Huvudräkning på detta område ger god valuta i form av ökad säkerhet vid grundläggande planimetriska beräkningar. Vill man ha ännu enklare tal än i föregående fall, kan man till höjd välja ett ”tal”, som innehåller 3 och 4 som faktorer, t. ex. 24. Vid övningen kan vi då t. ex. börja med att ge

$$b = 30 \text{ cm och } h_a = 24 \text{ cm}.$$

Beräkna $c$, $a$, $p_b$[1] och $p_c$[1] etc.

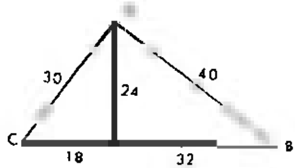



Fig. 59.

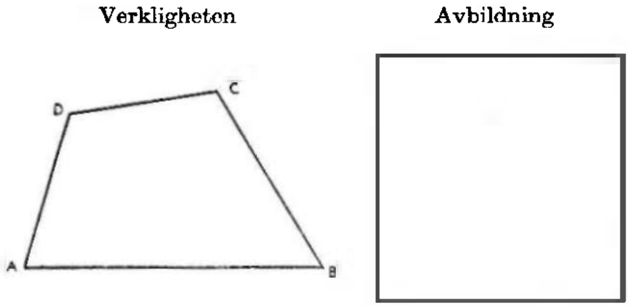
[1] Projektionen av $b$ resp. $c$ på hypotenusan.

## Kursen i klass 9

### *Likformighet*

Något om figurer, som har samma form, har sagts redan i förberedelserna till kongruensen och då närmast i fråga om trianglar. Litet om begreppet skala vid kartritning känner också alla till. Det brukar därför gå bra att till en början tala lite om en tomt och en karta över tomten eller om kartorna i kartboken, så att begreppen "verkligheten" och "avbildningen" blir välbekanta för eleverna.

Om vi vill rita både verkligheten och avbildningen på svarta tavlan, måste vi välja en liten skala. Vi brukar göra så här: Läraren ritar på tavlan denna figur (utan några som helst mätningar):




Karta: Skala 1 : 2

Fig. 60.

Så ber vi utan någon vidare förberedelse en medelgod elev gå fram till tavlan och i fyrkanten till höger rita av fyrhörningen $ABCD$ i skalan 1 : 2.

Vi får väl hoppas, att han samtidigt kan säga några ord om vad han företager sig: "Först delar jag alla sidorna i $ABCD$ mitt itu." Det händer ibland, att eleven fortsätter och delar vinklarna mitt itu också. Har man vant klassen vid att göra anteckningar för den följande diskussionen, kommer "arbetaren" vid tavlan inte att bli störd. Någon större tidsförlust blir det inte, men det blir tillfälle för eleverna i bänkarna att i lugn och ro göra sina anteckningar.

Det kan hända, att efter en liten stund teckningen då tar sig ut så här:

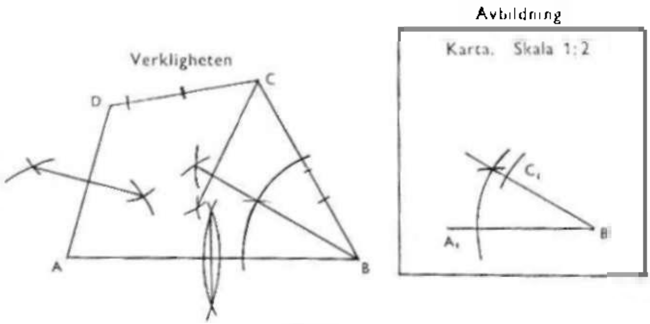



Fig.

Redan innan eleven vid tavlan har hunnit så långt, som denna figur visar, har han naturligtvis, innan någon fått tillfälle att kritisera det, märkt, att han är på fel väg. I de allra flesta fall kommer efter detta misslyckande eleven själv på att vinklarna inte förändras, och det kommer säkert att sitta både hos honom och hos kamraterna.

Han stryker alltså ut, vad han ritat, och behåller endast $A_1B_1$ kvar. Sedan avsätter han t. ex. $\beta_1 = \beta$, $B_1C_1 = \frac{BC}{2}$, $\gamma_1 = \gamma$, $C_1D_1 = \frac{CD}{2}$ och drager till slut $A_1D_1$[1].

Nu blir det diskussion. En elev säger kanske, att man lika gärna kunde ha mätt sidorna med metermått och vinklarna med gradskiva, och det kunde ju varit god övning det med. En annan menar, att det var onödigt att dela $AD$ och $DC$ mitt itu. Man kunde ha avsatt $\alpha_1 = \alpha$ och fått $D$ på så sätt. Nästa vill kanske tvärtom använda längderna på $D_1C_1$ och $D_1A_1$ och underlåta att avsätta $\gamma_1 = \gamma$.

När vi så småningom slutat att diskutera det på tavlan utförda arbetet, får vi (det blir kanske nästa lektion) övergå till att tala om metoden i allmänhet.

Vad menar man, när man säger, att två rätlinjiga figurer

[1] Läsaren må själv fortsätta teckningen

är likformiga? När vi ritade på tavlan, tyckte vi nog alla, att det var rimligt att rita så. Vad är det då som gör, att vi skall säga, att dessa två figurer är likformiga?

Vi frågar väl alltså klassen: *När är då två rätlinjiga figurer likformiga?* Vad tycker ni?

Alltid blir det någon elev, som svarar, att figurerna är likformiga, om vinklarna är lika, och då måste det ju bli resonemang om detta uttryckssätt, ett resonemang, som väl får sluta i det vanliga: ..., om vinklarna *i ordning* tagna är lika stora.

Om det vore på det sättet, skulle två rätlinjiga figurer kunna vara likformiga, utan att man visste något samband mellan motsvarande sidor.

Vi ger då någon elev i uppdrag att på tavlan rita av $ABCD$ med bibehållande av vinklarna, men i fråga om sidorna får hans fantasi skena iväg hur som helst.

Vi kanske då får en teckning i den här stilen.

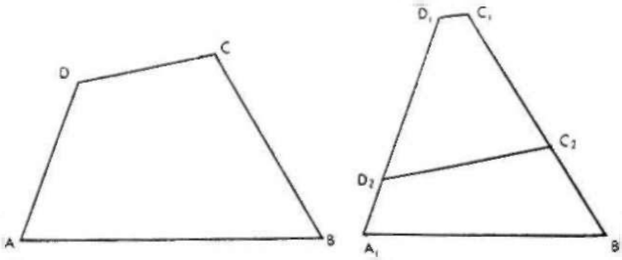



Fig. 62.

Drar vi dessutom i den nya figuren $A_1B_1C_1D_1$ t. ex. $C_2D_2$ parallell med $C_1D_1$, så har alla de tre figurerna $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ och $A_1B_1C_2D_2$ vinklarna i ordning tagna lika stora. Att figurerna inte kan sägas ha samma form är uppenbart.

Sidorna i figuren måste alltså på något sätt vara med, åtminstone i fråga om fyrhörningar.

Vilket samband är det då, som måste finnas mellan motsvarande sidor i de båda figurerna, för att de skall vara likformiga?

På något sätt bör eleverna själva kunna få fram, att varje sida på avbildningen skall vara lika stor del av motsvarande sida i verkligheten.

Då är nog tiden inne att sätta bokstavsbeteckningar på sidorna, så här t. ex.:

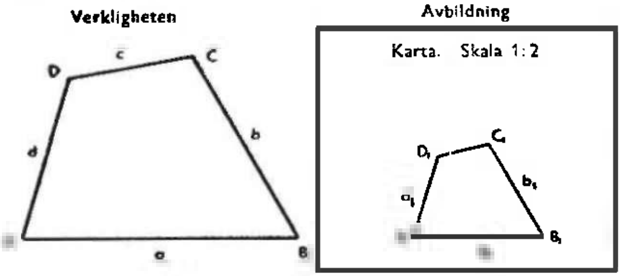



Fig. 63[1].

Om vi vill ta reda på hur stor del 5 är av 6, så bildar vi kvoten $\frac{5}{6}$. För att finna. hur stor del $a_1$ är av $a$, bildar vi kvoten $\frac{a_1}{a}$ etc. Om nu varje sida i avbildningen skall vara samma del av motsvarande sida i verkligheten, får vi

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{d_1}{d} = s = \text{skalan.}$$

Naturligtvis kan man låta verklighet och avbildning byta plats, men i bägge fallen gäller, att vinklarna i ordning tagna är lika och kvoterna (förhållandena) mellan motsvarande sidor(s mätetal) är lika.

Men riktigt framme är vi inte ännu. Vi bör nog också göra klart för oss, vad vi vet om två figurer, som är likformiga. Kan vi säga något om andra motsvarande sträckor eller,

[1] Beteckningen $c_1$ på $C_1 D_1$ fattas i teckningen.

ännu bättre, motsvarande vägar i de båda figurerna eller om motsvarande ytor?

Även om det är ont om tid, får vi nog försöka hinna med att öka ut figurerna t. ex. så här:

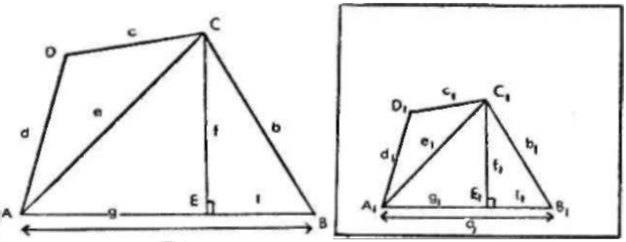



Fig. 64.

Nu får vi nog satsa på elevernas intuition. De flesta elever är säkert efter denna förberedelse med på att

$$\frac{e_1}{e} = \frac{f_1}{f} = \frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a} = \frac{g_1 + l_1}{g + l} = \frac{g_1}{g} = \frac{l_1}{l} = \frac{b_1 + c_1 + d_1}{b + c + d}$$

Det skulle föra alltför långt att i detalj behandla alla frågor, som här kunde dyka upp.

Med nödvändighet måste nu den frågan komma: Skall vi nu utan vidare vara nöjda med detta? Är det inte några frågor att ställa?

Förslagen kan bli många: Varför är $\frac{f_1}{f} = \frac{b_1}{b}$ och $\frac{l_1}{l} = \frac{b_1}{b}$.
Varför är $\frac{a_1}{a} = s$? Är $\triangle\ B_1C_1E_1 \sim \triangle BCE$?

Här finns nu många möjligheter. I $\triangle\ BCE$ och $\triangle\ B_1C_1E_1$ är motsvarande vinklar lika, i $\triangle\ ABC$ och $\triangle\ A_1B_1C_1$ är $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$ och $\beta_1 = \beta$ och i $\triangle\ ACD$ och $\triangle\ A_1C_1D_1$ är (som följd av föregående) $\frac{c_1}{c} = \frac{d_1}{d} = \frac{e_1}{e}$. och vi får alltså orsak att bevisa alla tre likformighetsfallen.

I realskolan får vi väl nöja oss med tredje likformighetsfallet, och då använder vi naturligtvis vår lärobok (C. E. Sjöstedt.)

Har vi så kommit igenom de vanliga satserna, som behandlas i samband med likformighetsläran, kan vi gärna än en gång rita vår figur, men denna gång något ändrad:

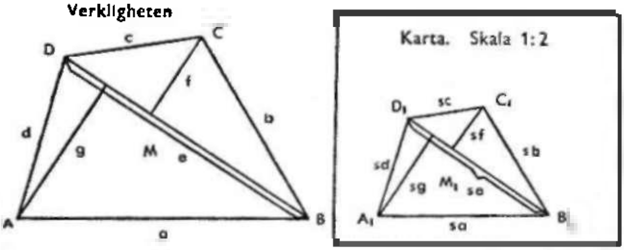



Fig. 65.

Här kan vi nu t. ex. skriva:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = s = \frac{s(AB + BC)}{AB + BC} = \frac{A_1B_1 + B_1C_1}{AB + BC}$$

och får så till skänks den *korresponderande additionen.*

Det är också lätt att se, att om fyrhörningarnas ytor kallas $M$ och $M_1$, så måste

$$2M = eg + ef$$

$$2M_1 = s^2eg + s^2ef = s^2(eg + ef) = s^2 \cdot 2M, \text{ eller}$$

$$M_1 = s^2 \cdot M \text{ eller } \frac{M_1}{M} = s^2.$$

Då nu helt naturligt förhållandet mellan en viss yta på avbildningen och motsvarande yta i verkligheten bör kallas för ytskalan, får vi satsen: Ytskalan är kvadraten på längdskalan.

Innan vi lämnar detta område, tar vi med några användningar.

1. **Fyra satser om rätvinkliga triangeln.**

Om vi betraktar den lilla deltriangeln i fig. 66, som en avbildning av den stora triangeln (en rät vinkel och $\beta$ gemensam), kan vi lätt få två uttryck på skalan (som alltid betyder längdskala, då ingenting annat säges till).

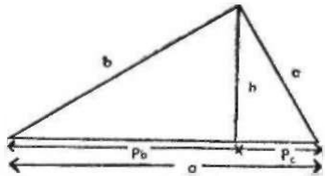



**Fig. 66.**

$$\text{[illegible]} = \frac{\text{hyp. i lilla } \triangle}{\text{hyp. i stora } \triangle} = \frac{c}{a} = \frac{\text{lilla kat. i lilla } \triangle}{\text{lilla kat. i stora } \triangle} = \text{[illegible]}$$

[illegible] eller [illegible] $=$ [illegible] eller $c^2 = a \cdot p_c$, en sats, som förut härletts på sid. 206, där också fortsättningen fram till Pythagoras' sats blivit behandlad.

Jämför vi de två deltrianglarna i fig. 66 (obs. att man lämpligen ritar figuren så, att man tydligt kan skilja mellan stora deltriangeln och den lilla), så får vi:

$$\text{[illegible]} = \frac{\text{lilla kat. i lilla } \triangle}{\text{lilla kat. i stora } \triangle} = \frac{p_c}{h} = \frac{\text{stora kat. i lilla } \triangle}{\text{stora kat. i stora } \triangle} = \text{[illegible]}$$

$= \frac{\text{[illegible]}}{p_b}$ eller $\frac{\text{[illegible]}}{h} = \frac{\text{[illegible]}}{p_b}$, varav $h^2 = p_c \cdot p_b$.

Satsen läser vi: Kvadraten på höjden i en rätvinklig triangel är lika med rektangeln (produkten) av kateternas projektioner på hypotenusan.

Den fjärde satsen: "Dubbla triangelytan kan erhållas på två sätt" har förut behandlats sid. 206.

2. I en triangel $ABC$ fig. 67 tar man på sidan $AB$ en punkt

$D$ sådan att $AD : DB = 5 : 4$. Från $D$ drages parallellt med $AC$ en rät linje (parallelltransversal). Den skär $BC$ i $E$. Från $E$ drages parallellt med $AB$ en rät linje, som skär $AC$ i $F$. Hur stor del av $\triangle ABC$ är pgrmen $ADEF$?

I vår rutade bok låter vi naturligtvis $AB$ vara 9 rutor. Ritar vi på tavlan, avsätter vi på en rät linje 9 lika delar. Med figurens beteckningar får vi omedelbart $\triangle ABC = \frac{9l \cdot 9n}{2}$ och pgrmen $ADEF = 5l \cdot 4n$ och därav

$$\frac{\text{pgrmen } ADEF}{\triangle ABC} = \frac{20ln \cdot 2}{81\,ln} = \frac{40}{81}.$$

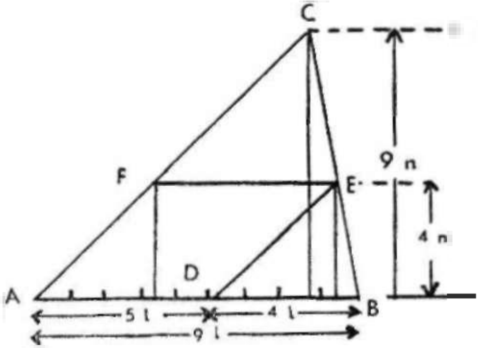



Fig. 67.

## STEREOMETRI

(*Rymdgeometri*)

Innan vi övergår till att lösa stereometriska problem, måste någon tid användas till att öva det stereometriska seendet. Även om eleverna på lektionerna i teckning fått rita kroppar av den art, som här kommer ifråga, är det nödvändigt att läraren ger en liten kurs i ritandet av enkla stereometriska figurer. Detta är så mycket nödvändigare, som de stereometriska problemen vanligen är till hälften lösta, om eleven ritat en god figur.

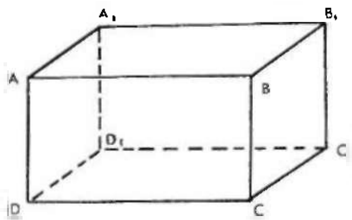



Fig. 68.

Vi håller oss därvid till den räta parallellprojektionen. Om vi ritar ovanstående teckning, som föreställer en vanlig låda, så kan vi med dess hjälp klargöra för eleverna, att linjerna $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ och $DD_1$ är att betrakta som linjer från en avlägsen iakttagares öga och att övriga linjer $A_1B_1$ etc. är vinkelräta mot dessa synlinjer (synstrålar). Om $A_1B_1C_1D_1$ är en rektangel på svarta tavlan, så får man tänka sig $A_1A$, $B_1B$, $C_1C$ och $D_1D$ stående vinkelrätt ut från tavlan.

Men vi kan inte alltid reda oss med räta linjer, som antingen är parallella med tavlan (eller papperet) eller vinkelräta däremot. Ibland kan det t. ex. ha sitt värde, att vi kan rita en låda så, att diagonalplanet $A_1BCD_1$ kommer att ligga i tavlans plan med $B_1C_1$ innanför och $AD$ utanför tavlan.

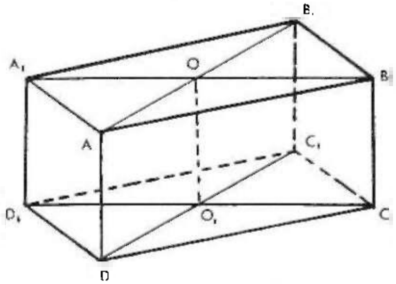


Fig. 69.

Då ritar vi först rektangeln $A_1BCD_1$, drar genom mittpunkterna på $A_1B$ och $D_1C$ $AB_1$ och $DC_1$ parallella och lika långa, och så, att de delas mitt itu av $A_1B$ och $D_1C$. Vinkeln mellan diagonalerna kan vi i detta fall välja efter behag, men som senare kommer att visa sig, måste man ibland ta viss hänsyn.

Medan vi har dessa två figurer på tavlan, kan det vara lämpligt att öva en smula huvudräkning.

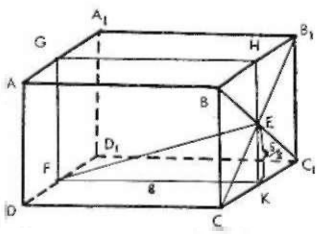


Fig. 70.

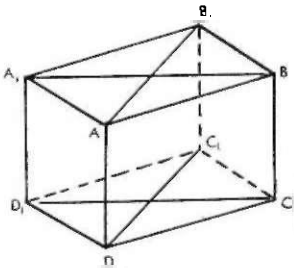


Fig. 71.

Samtidigt får vi då tillfälle att visa, hur viktigt det är, att man ritar stora (med måtta), tydliga figurer i lämplig skala, sätter ut bokstäver och sedan med bibehållande av dessa beteckningar ritar av de plana snitt, som kommer i fråga vid arbetet.

Skall vi t. ex. beräkna sträckorna $A_1C$ och $A_1O_1$, ritar vi av rektangeln $A_1BCD_1$ (fig. 73) och ritar in $A_1C$ och $A_1O_1$. Vill man vara riktigt noggrann vid genomgången, ritar man kanske först rektangeln $A_1B_1BA$ (fig. 72). Så här vid en första genomgång sätter vi lämpligen $AB = 8$ cm och $AA_1 = 6$ cm och tar t. ex. $AD = 5$ cm. Våra figurer blir då:

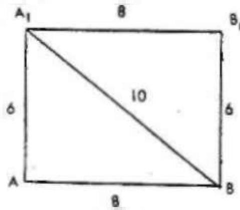


Fig. 72.

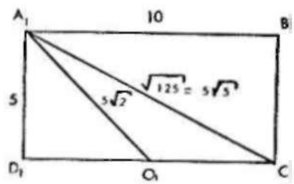


Fig. 73.

Vi lägger märke till att det i denna uppgift hade varit lämpligt att rita figuren med diagonalsnittet $A_1BCD_1$ i papperets plan.

Vill vi i stället räkna ut sträckan $EF$, ritar vi ett vertikalsnitt genom $E$ och $F$. (Fig. 70)

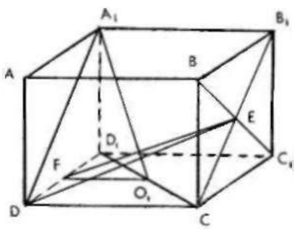


Fig. 74.

Här kan vi nog anse, att det är överflödigt att rita om snittet $FGHEK$. Mätt i kvadratcentimeter blir $EF^2 = 64 + \frac{25}{4} = \frac{281}{4}$

och $EF = \frac{1}{2}\sqrt{281}$ cm.

Ställer vi som uppgift att söka $ED$, är det nog bäst att tänka sig, att man ställer lådan på ytan $BB_1C_1C$. Det syns kanske då lättare, att $CD$ är vinkelrät mot basytan $BB_1C_1C$.

Så ritar vi snittet $A_1B_1CD$, och vill vi nu vara riktigt noggranna, avbildar vi först $BB_1C_1C$, så att vi får den verkliga längden på $B_1C$ i den skala vi hela tiden har använt. — Det kan vara lämpligt att i räkneboken rita i skalan 1 : 2 (1 ruta = = 1 cm).

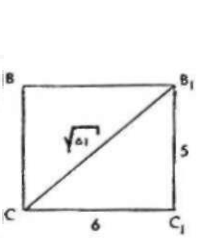



Fig. 75.

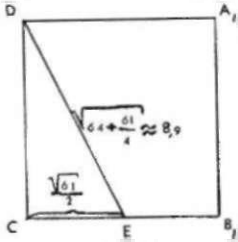



Fig. 76.

Har vi gjort vårt arbete riktigt noggrant, kan vi genom att mäta $DE$, övertyga oss om att vårt resultat är riktigt. $DE = \sqrt{\frac{317}{4}} = \frac{17,804}{2} = 8,902$. Det stämmer utmärkt med teckningen.

Det är ingen som helst konst att fortsätta, så lång tid man kan avsätta därtill, att finna nya sträckor, ytor och volymer att beräkna på dessa figurer.

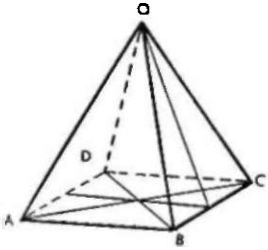



Fig. 77.

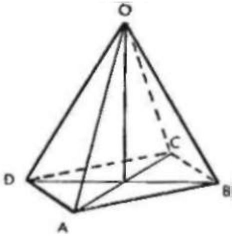



Fig. 78.

Om vi skall rita en rak reguljär fyrsidig pyramid, börjar vi med basen, alldeles som vid lådan förra gången, men nu ritar vi också diagonalerna och drar från deras skärningspunkt höjden vinkelrätt mot de båda vågräta sidorna i bottenkvadraten.

Den raka, reguljära, tresidiga pyramiden brukar ofta ritas så, att icke höjden, utan en mot synlinjen vinkelrät kantlinje i bastriangeln ligger i papperets plan och den motstående vinkelspetsen framför eller bakom papperets plan.

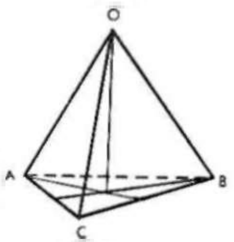



Fig. 79.

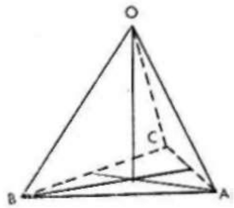
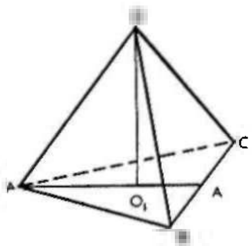



Fig. 80.




Mången gång är det dock av stort värde att låta höjden ligga i papperets plan. Då ritar vi först en vågrät linje $AA_1$ (6 rutor t. ex.) fig. 81 och drar genom punkten $O_1$ höjden, som delar $AA_1$, så att $AO_1 = 2O_1A_1$ och genom $A_1$ kantlinjen $BC$ "vinkelrät" mot [illegible] men ser efter, att $OB$ tydligt skiljer sig från $OO_1$.

Utrymmet tillåter icke några övningsexempel på pyramiden $O(ABC)$ (parentes om bokstäverna, som betecknar basytan). Vi avslutar den lilla "teckningslektionen" med en teckning över en rak reguljär sexsidig pyramid.

Vi drar då först den vågräta diagonalen och delar den i 4 lika

[1] BC:s mittpunkt är $A_1$.

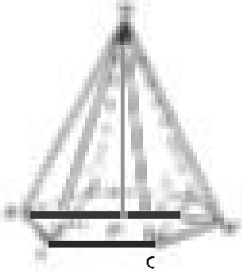



Fig. 82.

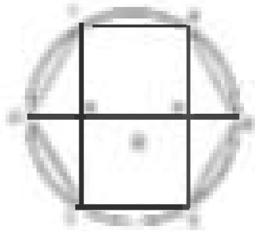


Fig. 83.

delar $AG$, $GO_1$, $O_1H$ och $HD$. Så ritar vi rektangeln $BCHEFG$ och drar genom $O_1$ höjden $OO_1$ som vi gör så lång, att $OE$, $ED$ och $OD$ tydligt blir åtskilda.

Vid stereometriundervisningen bör nog läraren mer än någonsin noggrant förbereda sina lektioner, rita figurer i olika lägen och tänka efter, hur genomgången bäst skall ske.

Vi bör emellertid inte endast rita och räkna utan också tillverka några enkla stereometriska kroppar, och då kan vi lämpligen välja följande.

För att i minnet fästa, att en pyramids volym är lika med basytan gånger höjden dividerat med tre, kan vi låta eleverna klippa och klistra ihop pappmönster till en kub och tre pyramider, som fullständigt fyller kuben.

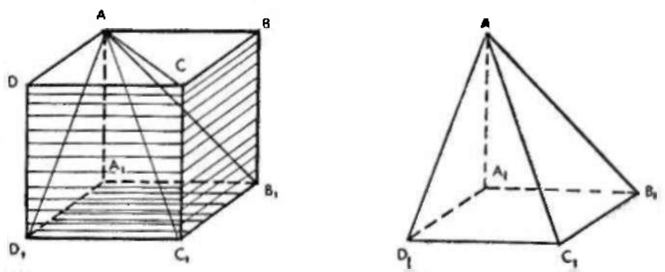



Fig. 84. De två övriga pyramiderna är $A(BB_1C_1C)$ och $A(DD_1C_1C)$.

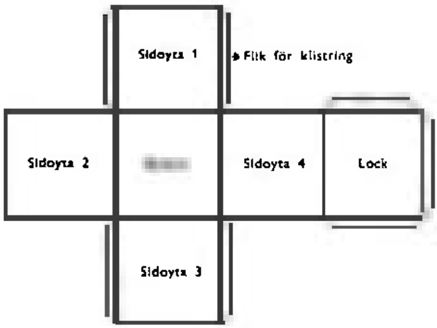



Fig. 85. Mönster för tillverkning av kuben.

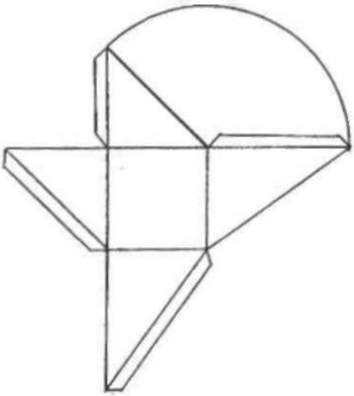


Fig. 86. Mönster för tillverkningen av en av de tre pyramiderna med kvadratisk bottenyta och höjden genom ett av basytans hörn.

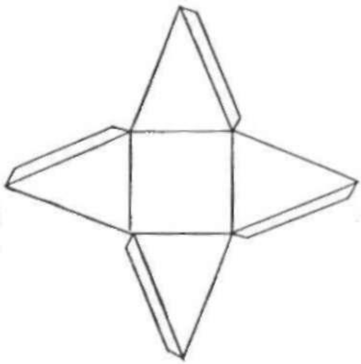


Fig. 87. Mönster för tillverkning av en rak, kvadratisk pyramid.

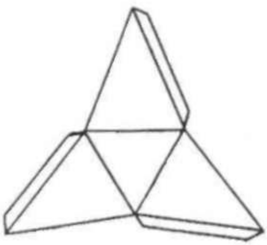


Fig. 88. Mönster för tillverkning av en rak, reguljär, tresidig pyramid.

Om baskanten i pyramiden göres något lite mindre än kubens kant, är det inte svårt att få de tre pyramiderna, som ju sinsemellan är lika stora, att helt utfylla kuben.

Det är emellertid inte alls meningen, att vi skall ålägga var och en av eleverna att tillverka alla dessa kroppar. Man kan dela upp det så, att en rad i klassen förfärdigar den tresidiga och en rad den fyrsidiga pyramiden. Med kuben och delpyramiderna är det lite värre, men ofta brukar ju elever arbeta ihop, och då kan några tillsammans få åtaga sig det arbetet. Händigheten och intresset är ju olika, så inte blir det svårt att få några elever, som åtar sig att tillverka alla fyra kropparna.

Numera, då tunn celluloid och tape blivit tillgängliga, kan intresserade elever medelst trådar utmärka höjder, rymddiagonaler och eventuellt andra sträckor i de tillverkade figurerna.

# MATEMATIKLABORATIONERNA I KLASS 6

Enligt kursplanen skall varje elev laborera en timme varannan vecka under vårterminen, alltså sammanlagt högst 10 lektionstimmar men sannolikt endast 8 eller 9.

Det gäller tydligen att spara tid, att noggrant förbereda laborationen och att endast ta med det allra viktigaste. Man kan numera inte gärna hinna med att rita ett kalibermått eller en mikrometerskruv i detalj.

Vi kan t. ex. tänka oss följande laborationer:

1. *Längdmätning:* (Svarta tavlan, klassrummet, laborationsbordet.) Flera mätningar av samma sträcka. Medelvärden beräknas. Tabell på tavlan över olika gruppers resultat.
2. *Avbildning* i bestämd skala: Värden från lab. 1 användes. Uppmätning av någon godtycklig sträcka i fig. från lab. 1, beräkning och kontrollmätning.
3. *Skjutmåttet:* Genomgång och mätningar. (Fig. av nonie.)
4. *Mikrometerskruven:* Genomgång och mätningar. (Fig. kan näppeligen medhinnas.)
5. *Bestämning av $\pi$* med hjälp av trissa, pappersremsa och knappnål eller trissa och sytråd.
6. *Bestämning av $\pi$.* Cirkelkvadrant på rutat papper (5-mm-rutad räknebok). Hela cirkelns yta jämföres med ytan av kvadraten på radien.

   Resultaten av laborationerna 5 och 6 kan lämpligen sammanföras, och medeltal beräknas under en vanlig matematiklektion, sedan laborationerna slutförts.

7. *Bestämning av en cylinders mantelyta* med hjälp av papper. Rektangelns sidor mätes och ytan beräknas.
   Diameter och höjd hos cylindern mätes och ytan beräknas även med dessa värden.
8. *Bestämning av volymen av en liten metallcylinder* (metalltråd) eller glasrör med hjälp av mikrometerskruv och skjutmått.
9. *Volymbestämning med mätglas* (och volymbägare).

10 a. *Bestämning av volymen av godset i ett glasrör.*
b. *Bestämning av volymen av en metalltråd.*

Vid laborationerna kan eleverna göra sina anteckningar i vanliga räkneböcker, rutade med femmillimeters rutor.

## Erforderliga apparater

Till laborationerna erfordras:

1. *Enmeters linjaler*, graderade i millimeter med mässingsskoningar (10 st).
2. *30-cm linjaler* med millimeterindelning, avsedda för utlåning till de elever, som inte är försedda med mätstickor (t. ex. 10 st).
3. *Skjutmått* (10 st).
4. *Mikrometerskruvar* (10 st).
5. *Trissor* av björk (bok, ek), korslimmade, 2 cm tjocka och med diametrar 65 mm, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105 och 110 mm.
6. *Träklossar* av björk eller annat hårt träslag med t. ex. dimensionerna 3 cm · 4 cm · 7,5 cm (10 st).
7. *Träcylindrar och aluminiumcylindrar* med diameter 30 mm och höjd 75 mm (10 st av vardera).
8. *Mätglas* 100 $cm^3$ (vid modell).
9. *Volymbägare* (10 st).
10. *Kryddburkar* (ju fler dess bättre).

Av vikt är, att apparaterna inte lägges i vanliga enkla lådor. Dels kan ju materielen taga skada, dels är det inte möjligt att hastigt se, om alla apparater finns.

Linjalerna förses fördenskull med ett hål i ena änden och hänges på spikar på sidan av t. ex. ett skåp eller en hylla. Det är klart att man lättast kontrollerar, att alla linjaler är på sin plats, om man har endast en linjal på varje spik.

Skjutmåtten förvaras lämpligen i en låda med t. ex. inre dimensionerna 20 cm × 18 cm × (6 eller 7 cm), på längden försedd med en plint enl. teckning fig. 89 och med plinten insatt 45 mm från ena långsidan (och 50 mm från den andra).

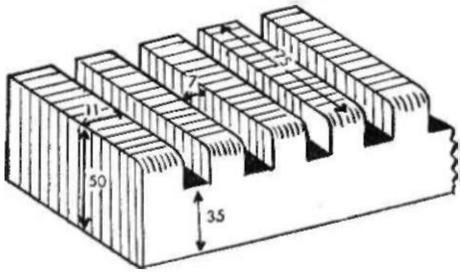



Fig. 89. Plint till låda för förvaring av skjutmått.

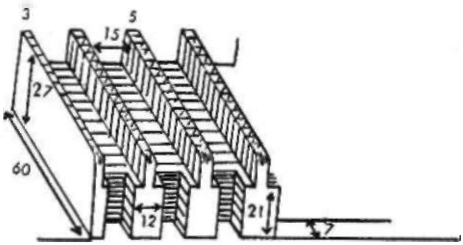



Fig. 90. Plint till låda för förvaring av mikrometerskruvar.

En låda för mikrometerskruvarna kan t. ex. ha inre dimensionerna 20 cm × 11 cm × 4 cm. Även den förses med en plint enl. fig. 90. Den insattes 40 mm från ena långsidan för att där bereda plats för byglarna. Trummorna vilar på själva plinten.

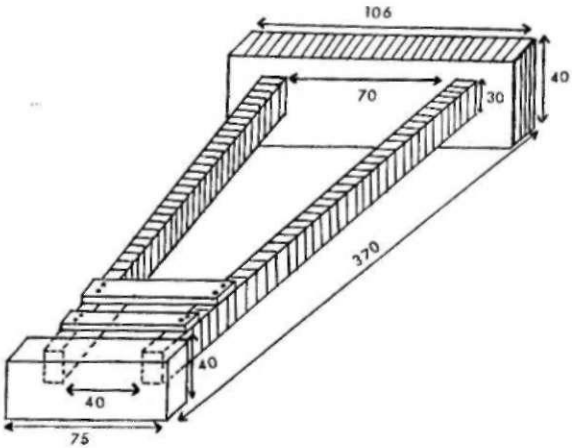



Fig. 91. Ställ för trissor för bestämning av $\pi$. Tvärlisternas bredd = 15 mm, ungefär lika med trissornas tjocklek.

För trissornas förvarande tillverkas t. ex. en träställning enligt figur 91. Trissorna nedsättes vertikalt mellan träribborna.

Man bör också skaffa plintar med lagom stora urtagningar för träklossarna samt lådor med fack för bägare och lister

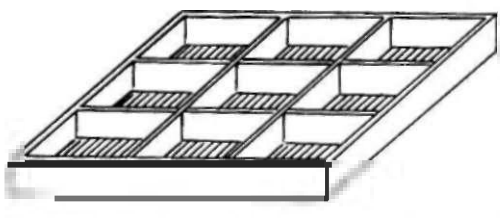


Fig. 92. Låda för t. ex. bägare. Botten av hård masonit, sidor och mellanväggar av planhyvlade lister.

med urtagningar för liggande mätglas, vartannat med mynningen åt ena hållet, vartannat åt det andra.

Om man ordnar på så satt, kan läraren med ett ögonkast se, om all materiel finnes, både vid laborationens början och vid dess slut, vilket i hög grad underlättar arbetet.

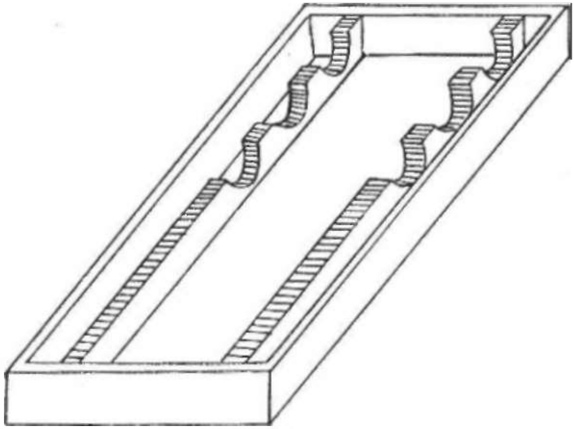


Fig. 93. Låda för mätglas. Botten av hård masonit. Sidor av planhyvlade lister.

## LABORATION NR 1 den ___ januari

*Uppmätning av svarta tavlans dimensioner*
(innanför ramen)

De blivande resultaten antecknas i en tabell, t. ex.:

| Mätning nr | längd i mm | bredd i mm |
|---|---|---|
| 1 | 5978 | 1200 |
| 2 | 5985 | 1203 |
| 3 | 5987 | 1204 |
| Summa | 17950 | 3607 |
| Medeltal | 5983 | 1202 |

Till mätningarna bör användas meterstavar med metallskoningar, så att hela linjalen är precis en meter.

Så fort läraren talat om, vad uppgiften gäller, kan han t. ex. låta två elever sätta i gång med att mäta tavlans längd och två stycken med att mäta bredden (höjden). Det kan vara roligt, om man tycker, att tiden räcker, att låta eleverna mäta utan några råd och anvisningar. Det kan hända, att den ene eleven mäter ut linjalens ändpunkt med fingret, medan den andre flyttar linjalen eller använder en krita, som inte vässats eggformigt.

Medan den första mätningen pågår, kan övriga elever rita tabellen i sina böcker. De som är sysselsatta, får rita, när de blivit lediga.

Så låter vi fyra nya elever byta med dem, som utfört första mätningen. Om eleverna får åtminstone en linjal var, behövs det inga kritmärken på tavlan, man kan lägga linjalerna intill varandra och läsa av.

Om tavlan är 5—6 meter lång och man har tillräckligt många linjaler, kan man låta eleverna lägga linjalerna intill varandra. Då kan det inte bli fråga om någon förskjutning, vilken ju kan inträffa vid användning av två linjaler, som växelvis flyttas.

En viss variation och även tidsvinst kan åstadkommas, om en grupp elever mäter nederkanten, en överkanten, en högra bredden och en bredden till vänster.

Tiden torde inte räcka till mer än tre mätningar. För fortsättningen nästa laboration enligt förslaget bör vi nämligen sätta ut en punkt på tavlans övre kant och en på dess nedre (den ena något t. v. om mitten, den andra något till höger om mitten), och vi skall också mäta dessa punkters avstånd från övre och nedre begränsningslinjernas ändpunkter.

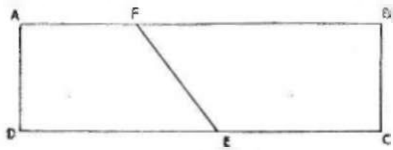



Fig. 94.

Om tiden räcker, kan det här bli en hel del mätningar.

Det är troligast, att man inte kan hinna med att utföra dessa sista mätningar mer än en gång. Alla 16—18 eleverna bör dock ha fått tillfälle att vara med om mätningarna.

Egentligen är det nog roligast att inte nu mäta $EF$ i fig. 94. Det blir mera spänning, om man först i lab. 2 ritar av tavlan i lämplig skala, på denna teckning mäter $EF$:s avbildning och sedan med hjälp av skalan tar reda på hur stor $EF$ bör vara i verkligheten. Men om man kontrollerar vid slutet av

| | AF i mm | BF i mm | CE i mm | ED i mm | EF i mm |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1885 | | 2597 | | |
| S:a | | | | | |
| Medeltal | | | | | |

andra laborationen, måste punkterna sättas ut på nytt, och till det räcker kanske inte tiden. Man kan då ta några minuter på en gemensam lektion till det arbetet.

Skulle man mot förmodan ha tid kvar, sedan dessa mätningar utförts, kan det vara lämpligt att diskutera de fel, som kan tänkas uppkomma vid mätningarna. Om linjalerna skulle vara felaktiga, får man fel (systematiska) som experimentatorn inte kan göra något åt; sätter man ut kritstreck, kan man få fel (tillfälliga) beroende på den som utför försöket.

Vid vårt försök har vi räknat med att metermåtten är riktiga. För att försöka få så gott resultat som möjligt, räknade vi ut medeltalet.

När man skall dra och mäta sträckor längre än en meter, lägger man flera linjaler intill varandra.

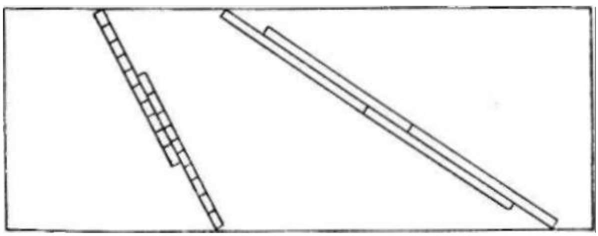


Fig. 95.

Den första mätningstabellen kan man lämpligen öka ut med en kolumn, som får till överskrift: yta i mm². Man kan visserligen inte på laborationstimmen hinna med att räkna ut svarta tavlans yta, men sedan hela klassen utfört laborationen, kan det ha sitt värde att på en vanlig matematiklektion låta eleverna räkna ut den. Med de ovan i tabellen angivna värdena på längd och bredd får man som värden på ytan 7 173 600 mm², 7 199 955 mm², 7 208 348 mm² och i medeltal 7 193 968 mm². Det är lätt att inse, att man inte kan ta med mer än tre siffror i svaret och knappt det. Ytan bör anges till till 7,19 m². De olika värdena på tavlans längd, resp. bredd skiljer sig inte mycket från varandra. Där finns dock olikheter i fjärde siffran. Vi kan tydligen i produkten inte ta med fler siffror, än det finns (något så när säkra) i vardera faktorn, och i regel inte ens så mycket. Den lilla förändringen på en enda enhet i sista siffran beträffande bredden åstadkommer en skillnad på ungefär 6000 mm² i resultatet. Om vi t. ex. tänker på andra mätningen, där värdet av längden skiljer sig från medeltalet med 2 mm och breddens avvikelse från medelvärdet endast är 1 mm, kommer ytan att skilja sig från slutresultatet med ungefär $(2 \cdot 1\,200 + 1 \cdot 6000$ mm² $=)$ 8400 mm², vilket nästan betyder ett fel på en etta i tredje siffran i medelvärdet på tavlans yta.

## Laboration nr 2 den ....

*Avbildning av svarta tavlan i skalan 1 : 50*

Det är naturligtvis givande att, om tiden räcker till, med klassen diskutera, i vilken skala avritningen skall göras. Har vi t. ex. funnit, att skala 1 : 50 (0,02 : 1) är lämplig, skriver vi på tavlan överskriften ovan och sedan:

1 m i verkligheten = 20 mm i boken
100 cm i verkligheten = 2 cm i boken
Skala 2 : 100.

*Tavlans mått på avbildningen (kartan)*

$AB = 0{,}02 \times 5983$ mm $= 119{,}66$ mm $\approx 119{,}5$ mm (ev. 120 mm)
$BC = 0{,}02 \times 1202$ mm $= 24{,}04$ mm $\approx 24{,}0$ mm
$AF = 0{,}02 \times 1885$ mm $= 37{,}70$ mm $\approx 37{,}5$ mm (ev. 38 mm)
$CE = 0{,}02 \times 2597$ mm $= 51{,}94$ mm $\approx 52{,}0$ mm

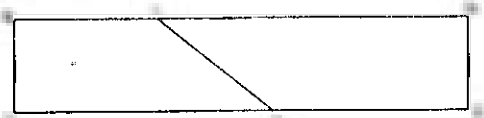


Fig. 96. Här skala 1:100.

Därefter får eleverna på kartan (i sina böcker) mäta avståndet *EF*.

Man erhåller: *EF* på kartan = 39 mm.
*EF* i verkligheten = 50 × 39 mm = 1950 mm.
Kontrollmätning på svarta tavlan gav ____

## Laboration nr 3 den ....

*Skjutmåttet eller kalibermåttet*

Det är nog bäst att från början avstå från tanken, att eleverna skulle hinna med att rita av ett skjutmått efter lärarens teckning på svarta tavlan. Det tar för lång tid. Skall det bli ett någorlunda gott resultat, måste man nämligen ge noggranna anvisningar för teckningens utförande, med angivande av t. ex. antalet rutor för varje del av apparaten.

En teckning över *skjutmåttet* finns i de flesta läroböcker, churu de ”övre” skänklarna för mätning av inre diametern (kalibern) hos t. ex. ett glasrör inte alltid brukar vara med.

Vissa benämningar är nödvändiga. Den längre, fasta delen av millimetergraderingen och fasta skänklar t. v., om graderingen ökar från vänster till höger, brukar vi kalla för ”den fasta linjalen” eller endast ”linjalen”. Den rörliga delen får heta ”löparen” eller ”nonien” med skänklar och ett fönster, på vars nedre kant finns en gradering med delstreck från 0 till 10, så att hela avståndet 0—10 är 9 mm och avståndet mellan två noniedelstreck således 0,9 mm.

Hur avläsningen går till, omtalas i varje lärobok. Vi behandlar nonien och avläsningen med tillhjälp av fig. 97.

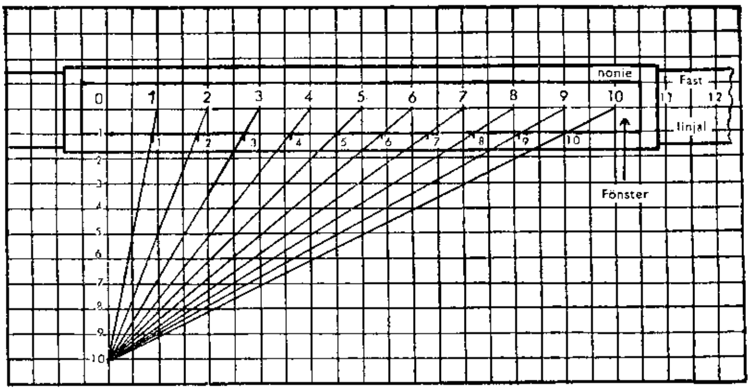



Fig. 97.

Om det inte finns något rutat område på tavlan, kan läraren enkelt (helst före lektionen) med hjälp av den jämnbreda linjalen rita ett rutsystem, vars rutor är lika med linjalens bredd.

I regel blir det väl så, att två elever får samsas om ett skjutmått. De får då först lägga märke till att linjalens nollstreck sammanfaller med noniens, då skänklarna berör varandra.

Låter vi eleverna sedan flytta nonien så, att dess nollstreck t. ex. sammanfaller med linjalens delstreck 21, så är kroppens tjocklek, d. v. s. avståndet mellan skänklarna, 21 mm precis. Flyttar vi nu nonien åt höger, så att dess delstreck nr 1 sammanfaller med nästa delstreck 22 på linjalen, har den rörliga skänkeln flyttats en tiondels millimeter. Vi kan nog också anta, att eleverna enl. fig. 97 intuitivt känner på sig, att delarna på nonieskalan är nio tiondelar av delarna på linjalen. Flyttar vi nonien så, att delstreck sex sammanfaller med närmaste delstreck (27) på linjalen, har nonien flyttats 0,6 mm åt höger och skänklarnas avstånd ökats till 21,6 mm. Antalet hela millimeter anges således av *linjalens delstreck närmast till vänster om noniens nollstreck och antalet tiondelar av det noniestreck, som närmast sammanfaller med något delstreck på linjalen.*


Fig. 98.

| Mätstickans tjocklek | |
|---|---|
| Mätning | tjocklek i mm |
| 1 | 3,7 |
| 2 | 3,8 |
| 3 | 3,9 |
| 4 | 4,0 |
| **Summa** | 15,4 |
| Medeltal | 3,85 |

Som övning kan vi t. ex. låta eleverna mäta tjockleken på sin mätsticka på fyra ställen (fig. 98) och göra en liten tabell. Läraren får försöka att åtminstone en gång under dessa mätningar kontrollera varje elevs avläsning.

## Laboration nr 4 den ....

### *Mikrometerskruven (mikrometern)*

En mikrometerskruv är så liten, att man vid demonstration behöver några (stora) teckningar på tavlan till hjälp, men det är inte möjligt, att eleverna hinner rita av dem. En lärare, som ofta undervisar på detta område, sparar åtskillig tid genom att tillverka en stor ritning att hänga upp på tavlan. Men roligare är det naturligtvis att själv förfärdiga en stor modell av papp, och att göra detta innebär inte någon större svårighet. Omkring en rund trästav (2 — 2 1/2 cm i diameter) lindar vi några gånger ett ritpapper eller annat tjockt papper och klistrar ihop lagren med kall-lim, så att vi får en stadig pappcylinder, 30—40 cm lång. På den ritar vi två diametralt motsatta generatriser och avsätter på den ena, från ändytan räknat, punkter med t. ex. 3 cm mellanrum. På den motsatta generatrisen sätter vi märkena mitt emellan de förra. Det går lätt att rita en blyertslinje mellan punkterna, så att man får en skruvlinje. Utefter denna skruvlinje klistrar vi — fortfarande med hjälp av kall-lim — på varandra några lager av en (överallt t. ex. 1 cm bred) remsa av ritpapper. När limmet har torkat ordentligt, sågar vi av en 6-7 cm av "skruven" och fäster den avsågade biten, sedan vi gnidit in den med lite talk, axialt i en cylindrisk pappburk med 5-6 cm diameter Om vi sedan rör ut lite bränd gips och häller i burken, får vi en mutter, som skruven passar till. Omkring denna klistrar vi några lager ritpapper, så att vi får en 12-13 cm lång cylinder. Av papp — baksidor till ritblock — skär vi så ut passande "bygelskivor", som klistras ihop med kall-lim, så att vi får en stadig (åtminstone 1 1/2 cm tjock) bygel, som sedan klistras fast vid cylindern kring muttern, först med en remsa av tunt tyg och därutanpå några lager ritpapper runt både muttercylindern och bygelns ena ben. Så har man att skära ut några cirkelringar av papp och klistra ihop dem, så att man får en kraftig (5-6 cm hög) ring, i vars inre man kan fästa "skruven", omkring vilken man kan rulla och klistra några lager ritpapper i form av en cylinder, som skall tjänstgöra som trumma i enlighet med figuren. Denna trumhylsas inre diameter bör helt naturligt vara något litet större än diametern hos cylindern kring muttern. "Skruven" måste givetvis sågas av, så att den får lämplig längd. En ungefärlig gradering är också lätt att åstadkomma.

Det bör alltid innebära en viss vinst vid undervisningen, att man kan visa sin stora modell och säga: "En mikrometerskruv kan man tillverka så och så", i stället för att endast visa den lilla fina precionsförfärdigade tingesten.

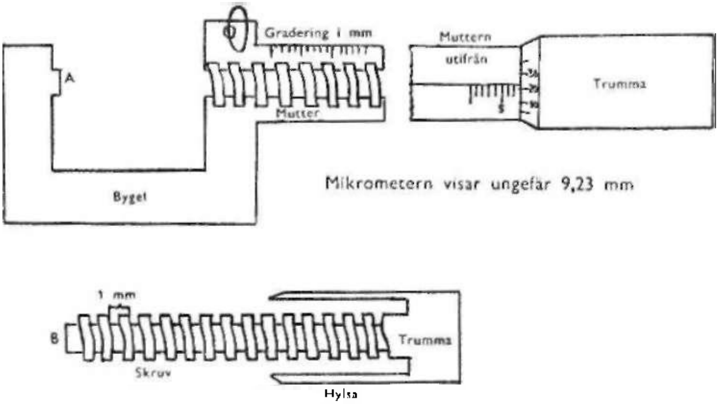



Fig. 99.

Skruven, som i detta fall har samma diameter utefter hela längden (det är inte en träskruv, som smalnar mot spetsen och vars gängor är vassa, så att de kan skära sig in i träet), har en gänghöjd (stigning) av precis en millimeter. Om skruven vrides runt ett varv, ändras avståndet mellan klackarna *A* och *B* med 1 mm.

Ju mer man vrider in skruven i muttern, desto längre in över muttern rör sig hylsan. Då de båda klackarna berör varandra, har hylsans vänstra rand kommit till graderingens nollpunkt. Antalet hundradels millimeter avläses på hylsans kant mittför det längsgående streck på muttern, utefter vilket millimetergraderingen är avsatt.

| Mätning nr | Trådens diameter i mm |
|---|---|
| 1<br>2<br>3<br>4 | |
| Summa | |
| Medeltal | |

Som övning låter vi eleverna mäta en mässingstråd på några ställen. Med två elever i varje grupp kan det vara lämpligt med fyra avläsningar.

Grupper med flinka elever kan få mäta tjockleken av ett blad i räkneboken, varvid man mäter tjockleken av 10 blad och sedan beräknar ett blads tjocklek som tiondelen därav. Vidare kan kanske några elever hinna med att mäta t. ex. tjockleken av ett hårstrå, ett grafitstift eller dylikt. Eleverna har vanligen inte svårt för att finna lämpliga mätobjekt.

## Laboration nr 5 den ....

*Bestämning av $\pi$ (pi)*

[Bestämning av förhållandet (rationen) mellan en cirkels omkrets och dess diameter]

Till detta försök brukar man använda trätrissor (träcylindrar med liten höjd, 1—2 cm).

Diametern kan man bestämma med hjälp av ett skjutmått eller med en linjal och två rätvinkliga träklossar enligt vidstående figur (fig. 100).

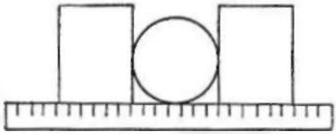


Fig. 100.

Fig. 101.

Läraren måste här säga några ord om att *förhållande* kan ersättas med *kvot* eller *ration*.

Omkretsen kan mätas på åtminstone tre sätt:

1. En pappersremsa, ca 1 cm bred, lindas ett varv omkring trissan, och med en knappnål sticker man hål genom två lager av papperet. Avståndet mellan hålen mätes. Om man måste använda en flaska, ett glas eller en plåtburk, är det nog förståndigt att först klistra några varv papper omkring flaskan eller burken.

2. På ett pappersark drar man en rät linje och på trissans ena plana yta ett streck vid omkretsen (yttersta delen av en radie). Så rullar vi trissan ett varv enligt figuren och sätter ett märke vid den räta linjen, när vi börjar och slutar.

Fig. 102.

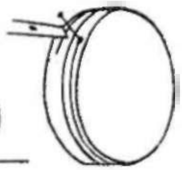


Fig. 103.

3. Vi sätter fast en knappnål i omkretsen av trissan, gör en ögla i ena änden av en sytråd, lindar tråden två eller tre varv runt omkretsen, skär med en kniv av tråden mitt för knappnålen och får genom att mäta tråden omkretsens dubbla eller tredubbla värde.

Har man ont om tid, får man nog nöja sig med den första metoden. Eleverna arbetar i grupper med två i varje grupp, och på så sätt får vi varje gång 8 eller 9 resultat.

Trissans omkrets $=$ ______
Trissans diameter $=$ ______

$$\frac{\text{omkrets}}{\text{diameter}} \quad \underline{\qquad\qquad}$$

Alla gruppernas resultat anges på tavlan.

Slutsats: Vi fann, att en cirkels omkrets är ..... ggr så stor som dess diameter.

| Grupp | Värde på $\pi$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| | |
| | |
| | |
| Summa | |
| Medeltal | |

## Laboration nr 6 den .

*Bestämning av $\pi$*

Bestämning av förhållandet mellan en cirkels yta och ytan av kvadraten på radien

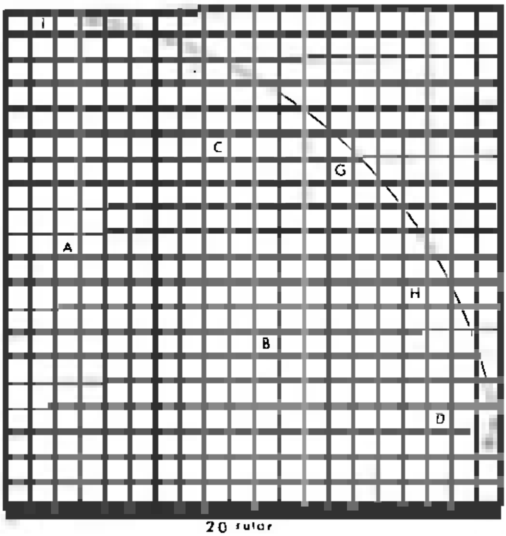



Fig. 104.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | = | 114 | rutor |
| $B$ | = | 120 | ,, |
| $C$ | = | 24 | ,, |
| $D$ | = | 18 | ,, |
| $E + F$ | = | 15 | ,, |
| $G$ | = | 8,5 | ,, |
| $H$ | = | 10 | ,, |
| $K$ | = | 4,5 | ,, |
| S:a | | 314 | ,, |

Hela cirkelns yta = $4 \cdot 314$ rutor.
Ytan av kvadraten på radien = 400 rutor.

$$\frac{\text{Cirkelns yta}}{\text{Ytan av kvadraten på radien}} = \frac{4 \cdot 314}{400} = 3{,}14.$$

Slutsats: Vi fann, att cirkelns yta är 3,14 ggr så stor som kvadraten på radien.

För att vinna tid bör läraren före laborationens början ha ritat upp cirkelkvadranten dels i elevernas laborationsböcker, dels på tavlan, i senare fallet med indelning i fält. Skall eleverna själva rita, drar det ofta alltför långt ut på tiden. Det är nog bäst, att alla eleverna delar in cirkelkvadranterna på samma sätt. Inom de områden, som delvis begränsas av periferien, sättes en prick i varje ruta eller del av sådan ruta, som medräknas och som uppskattas i tiondelar av en ruta.

I detta fall får vi lika många resultat, som det finns elever, och vi försöker hinna med att få alla elevernas resultat i en tabell och räkna ut medeltalet.

Sedan klassens båda grupper utfört både lab. 5 och lab. 6, har vi 4 medelvärden, vilkas medelvärde vi till slut lämpligen kan räkna ut under en vanlig matematiklektion.

Här kan man, om man vill, som en kuriositet till stöd för minnet dels ge eleverna en uppfattning om att $\pi$ är ett oändligt decimalbråk, dels ge dem en hjälp att komma ihåg de första siffrorna i talet genom att på tavlan skriva upp rektor Lindborgs minnesvers för $\pi$ (Elementa årgång 3, sid. 117):

> Hör' I alla: i kväll Arkimedes ju lovade komma;
> han skall noggrant klarlägga berömda siffrorna för pi,
> som förvisso rätt mången ej minnes utan ett ode;
> Tjugotvå giv åt täljarn, nämnarens värde, o, sju!

Man räknar antalet bokstäver i varje ord och lägger märke till att apostrofen efter hör motsvarar decimalkommat och o i sista raden är av ”noll och intet värde”.

Många elever, i synnerhet flickor, brukar uppskatta versen.

## Laboration nr 7 den ....

*Bestämning av buktiga ytan (mantelytan) och totala ytan hos en rät cirkulär cylinder*

(Siffervärden medtagna med tanke på förekommande avkortningar.)

Arbetsmetoden är här så pass självklar, att det kan synas onödigt att medtaga något förslag, men för den ofta jäktade läraren kan det kanske vara nyttigt med några hållpunkter.

Vid bestämning av mantelytan använder vi de i materielförteckningen omtalade träcylindrarna. Det är lämpligt, att läraren före laborationens början klippt en massa pappersremsor med bredden lika med träcylindrarnas höjd. (Sådana remsor kan man ju ha liggande på lager.)

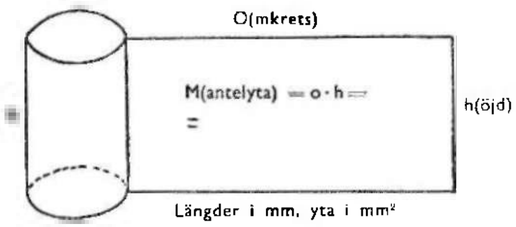



Fig. 105.

Eleverna kan nu söka omkretsen enligt någon av figurerna.

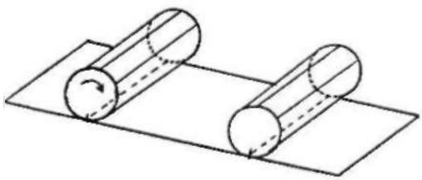


Fig. 106.

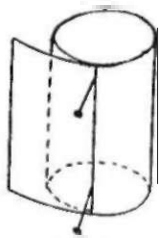


Fig. 107.

Om man arbetar i enlighet med fig. 107, bör eleverna börja med att genom vikning skaffa sig en rät linje på papperet, vinkelrät mot långsidorna. Linjen ifylles därefter med blyerts. Remsan lindas sedan omkring cylindern så, att sidan med blyertslinjen kommer utåt. Med en knappnål gör man, som figuren visar, två hål genom två lager papper. Sedan papperet vecklats ut, sammanbindes knapphålsmärkena med ett streck. Då får man en rektangel, som kan sägas ha uppkommit genom att mantelytan utvecklats i ett plan.

Vi sparar tid, om vi först låter eleverna rita fig. 105 och sedan på denna direkt skriva upp sina mätresultat. Det är säkrast att ange, hur många rutor höjd och diameter lämpligen bör tagas, för att de i sina böcker skall få figurer av lagom storlek.

Så låter vi eleverna också med hjälp av skjutmåttet mäta cylinderns höjd och diameter och räkna ut ytan med hjälp av kunskaperna från Lab. 3. Låt oss i detta fall tänka oss, att en elev har fått:

$$\begin{aligned} \text{cylinderns diameter} &= 29{,}8 \text{ mm} \\ \text{basytans omkrets} &= 29{,}8 \cdot \pi \text{ mm} = 29{,}8 \cdot 3{,}14 \text{ mm} = \\ &= 93{,}572 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Ambitiösa elever vill gärna behålla alla fem siffrorna, men många kommer säkert att "vifta" och fråga: "Hur många decimaler skall vi ta med?" Ja, läraren kan ju inte ge sig in på någon redogörelse för räkning med approximativa tal utan får väl något beröra, att åttan i 29,8 inte är exakt, att vi inte vet vilken siffra, som skall komma efter denna åtta, och att det är på samma sätt med faktorn 3,14. Därför får vi nöja oss med tre siffror också i produkten och erhåller alltså: (Jfr lab. 1)

$$\begin{aligned} \text{basytans omkrets} &\approx 93{,}6 \text{ mm} \\ \text{cylinderns höjd} &= 74{,}9 \text{ mm} \\ \text{mantelytan} &= 93{,}6 \cdot 74{,}9 \text{ mm}^2 = 7010{,}64 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Nu kommer frågan om antalet decimaler upp igen. Återigen får vi ta med (högst) 3 siffror. Vårt svar blir: Mantelytan är (ungefär) 70,1 cm².

| | |
|---|---|
| Basytan $= \pi(\text{radien})^2\,\text{mm}^2 = \pi \cdot 14{,}9 \cdot 14{,}9\,\text{mm}^2 =$ | $697{,}11\ \text{mm}^2$ |
| Båda basytorna | $\approx 1\,394{,}22\ \text{mm}^2$ |
| Mantelytan | $\approx 7\,010{,}64\ \text{mm}^2$ |
| Totala ytan | $\approx 8\,404{,}86\ \text{mm}^2$ |

Totala ytan blir ungefär **84,0 cm²**.

## Laboration nr 8 den ....

*Bestämning av volymen av en cirkulär cylinder*

(Kontroll med mätglas eller volymbägare)

**För mätningarna använder vi ett kalibermått och får t. ex.**

basytans diameter $= 29{,}8$ mm
basytans radie $= 14{,}9$ mm
**kvadraten på basytans radie** $= 222{,}01\ \text{mm}^2 \approx 222\ \text{mm}^2$
basytan $= 222 \cdot \pi\ \text{mm}^2 = 222 \cdot 3{,}14\ \text{mm}^2 \approx 697\ \text{mm}^2$
cylinderns höjd $= 74{,}9$ mm
cylinderns **volym** $= 697 \cdot 74{,}9\ \text{mm}^3 = 52205{,}3\ \text{mm}^3 \approx 52{,}2\ \text{cm}^3$.

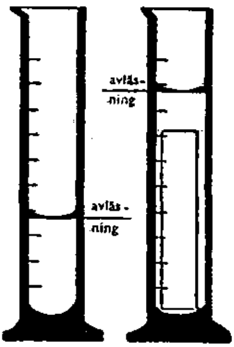


Fig. 108.

Vi kontrollerar resultatet genom att sänka ned cylindern i ett mätglas med hjälp av en tråd eller ev. genom att luta mätglaset. Skillnaden mellan avläsningarna (vid vattenytans nedre del enl. figurerna) ger cylinderns volym. Att vi inte får 52,2 cm³ (ml), är klart. Vi får vara nöjda med värden mellan 51,5 och 52,5 eller så ungefär.

Nu kan det ju inte vara särskilt bra för träcylindern att gång på gång sänkas ned i vatten. Till detta försök bör man därför använda en aluminiumcylinder.

Om man varken har tillgång till trä- eller metallcylinder, kan man klara sig med plåtburkar av något slag, t. ex. kryddburkar. Då får vi naturligtvis låta eleverna mäta inre diametern och höjden. Den här gången kan vi kontrollera volymen genom att fylla burken med vatten och hälla det i ett mätglas. Man kan faktiskt reda sig med en pappburk. Ett försök med en sådan burk har givit följande resultat.

Försöket med mantelytan utfördes precis som med träcylindern.

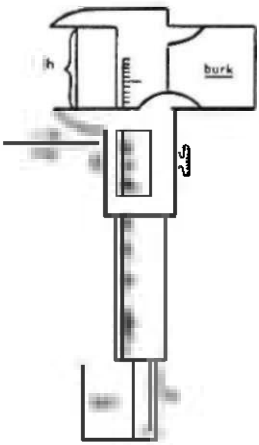



Fig. 109.

När det gäller att mäta *inre höjden*, får man använda skjutmåttet på ett nytt sätt, som framgår av fig. 109. Fäst på löparens (noniens) baksida finnes en i en ränna i den stora linjalen inlagd smal skena. Den del av denna skena, som skjuter ut utanför den stora linjalen, är precis lika med avståndet mellan skänklarna. Avläsningen sker på vanligt sätt med noniens hjälp.

burkens inre diameter $= 35{,}0$ mm
burkens inre radie $= 17{,}5$ mm
kvadraten på burkens inre radie $\approx$
$\approx 306 \text{ mm}^2$

burkens basyta $= 306 \cdot 3{,}14 \text{ mm}^2 \approx 961 \text{ mm}^2$
burkens inre höjd $= 60{,}5$ mm
burkens inre volym $= 60{,}5 \cdot 961 \text{ mm}^3 = 58\,140{,}5 \text{ mm}^3 \approx$
$\approx 58{,}1 \text{ cm}^3$.

Burken fylldes sedan med havssand (fin skursand), och när denna hälldes i ett mätglas, blev resultatet 58 $\text{cm}^3$ (noggrannare avläsning är ej möjlig i vanligen använda mätglas).

## Laboration nr 9 den

*Volymbestämning med mätglas och volymbägare*

**Om mätglaset har så stor genomskärningsyta, att det** föremål, t. ex. en sten, vars volym vi vill mäta, kan sänkas ned i mätglaset, har volymbägaren på sätt och vis ingen uppgift att fylla. Vi förutsätter därför, **att vår sten inte går ned** i mätglaset men väl i volymbägaren.

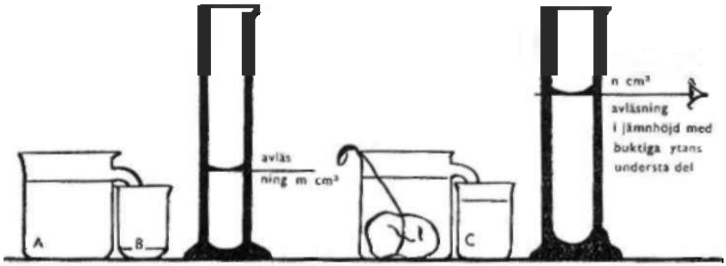



Fig. 110.

Vi ställer en mindre bägare *B* under pipen till volymbägaren *A* och häller vatten i *A*, tills något vatten rinner ut i *B*. Sedan byter vi ut *B* mot en annan liten bägare *C*. När vi sänker stenen i *A*, rinner litet vatten (stenens vattendeplacement) ned i *C*. För att finna vattnets volym häller vi det i mätglaset, som vid första försöket kan vara tomt men som vid andra försöket innehåller $m$ cm³ vatten (första försöksresultatet) och vid tredje försöket, om det är tillräckligt stort, $n$ cm³ vatten. Denna gång stiger vattenytan till delstrecket $p$ cm³.

Vid varje avläsning gör vi naturligtvis ett litet fel. Därför söker vi medeltalet av våra tre försök.

| Försök | Avläsning efter | försöket i $cm^3$ före | Stenens volym i $cm^3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $m$ | 0 | $m$ |
| 2 | $n$ | $m$ | $n$-$m$ |
| 3 | $p$ | $n$ | $p$-$n$ |
| | Summa | | |
| | **Medeltal** | | |

*Resultat:* Vi fann, att stenens volym är ____ $cm^3$.

Observera att ögat vid avläsningen skall hållas i jämnhöjd med vattenytan, så att vi undviker oriktiga värden. Vidare skall avläsningen ske vid den buktiga vattenytans understa del, vilket bör påpekas vid genomgången.

Det fel, som uppkommer därigenom, att vi först låter vattnet rinna ned i den lilla bägaren $C$, kan vi undvika genom att ställa volymbägaren på ett så högt underlag, att vattendeplacementet omedelbart rinner ned i mätglaset (utan att droppar kommer på väggarna).

Såvida tiden räcker till, kan man passa på att undersöka, vad det blir för skillnad i resultatet, om vi använder bägaren $C$ eller inte och om vi torkar $C$ mellan försöken eller inte. Troligen blir eleverna överraskade av att dessa fel inte inverkar mer, än deras resultat utvisar.

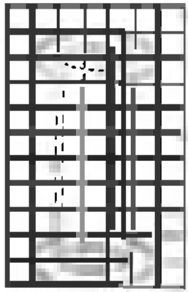
Det går fort att göra försöken. Mätglaset behöver ju i regel inte tömmas mellan försöken.

## Laboration nr 10 den ....

a) *Bestämning av volymen av godset i ett glasrör*

Mätningarna sker även denna gång med skjutmått.

Rörets yttre diameter = 10,0 mm
Rörets yttre radie = 5,0 mm
Rörets inre diameter = 7,8 mm
Rörets inre radie = 3,9 mm



Kvadraten på rörets yttre radie =
= 25,00 mm$^2$
Rörets yttre genomskärningsyta =
= 25,00 $\pi$ mm$^2$
Kvadraten på rörets inre radie =
= 3,9 · 3,9 mm$^2$ = 15,21 mm$^2$
Rörets inre genomskärningsyta =
= 15,21 $\pi$ mm$^2$
Godsets genomskärningsyta (en cirkelring) = (25,00 $\pi$ — — 15,21 $\pi$) mm$^2$ = 9,79 $\pi$ mm$^2$ = 9,79 · 3,14 mm$^2$ = = 30,7406 mm$^2$ $\approx$ 30,7 mm$^2$.
Rörets längd = 79,8 mm.
Godsets volym = 30,7 · 79,8 mm$^3$ = 2449,86 mm$^3$ $\approx$ 2,50 cm$^3$.

Om vi ändrar radierna så litet som 0,025 mm uppåt eller nedåt, får vi som största värde på godsets genomskärningsyta 32,1 mm$^2$ och som minsta värde 29,3 mm$^2$.

Räknar vi ändå med 30,7 mm$^2$ som ett medelvärde på godsets genomskärningsyta, vet vi, att detta är mycket osäkert.

Anser, vi att det uppmätta värdet på höjden kan vara felaktigt på 0,05 mm åt endera hållet, finner vi, att godsets volym har ett värde mellan 2,34 cm$^3$ och 2,57 cm$^3$.

b) *Bestämning av volymen av en metalltråd.*

Det kan bli svårt att hinna med alla räkningarna i den ovan föreslagna laborationen på en lektion. Man kan då nöja sig med att bestämma antingen yttre eller inre volymen av glasröret. Vill man dessutom än en gång använda mikrometerskruven, kan man byta ut glasröret mot en tunn metalltråd. Vi behöver då endast:

Trådens diameter i mm = ______
Trådens radie i mm = ______
Kvadraten på trådens radie i mm$^2$ = ______
Trådens genomskärningsyta i mm$^2$ = ______
Trådens längd i mm = ______
Trådens volym i mm$^3$ = ______

Lärarens arbete underlättas naturligtvis, om trådbitarna klipps av samma tråd och i två eller tre längder.

## REPETITION

Hur skall man nu förfara för att ”säkert” inlära regler och lärosatser? Matematiken är ett läroämne, som i viss mån står övningsämnena nära, och därför gäller i hög grad den gamla sentensen: Repetitio est mater studiorum. Den ene följer detta råd så, att han låter eleverna själva räkna uppgift efter uppgift; den andre tycker, att de få timmarna i skolan måste användas till gemensamt arbete, där eleverna också kan få övning att på svenska uttrycka sina tankar.

Även om gemensamt arbete erbjuder betydande svårigheter i t. ex. en heterogen klass, varför en utpräglat individuell arbetsmetod kanske måste tillämpas, har jag funnit, att man ändå mest rationellt utnyttjar tiden till verklig undervisning, om man så vitt möjligt arbetar gemensamt med klassen. Därigenom kan åtskilliga moment läggas in i arbetet, som måste gå förlorade för eleverna, då de efter en kort genomgång sitter och arbetar var och en för sig. Man kan öva eleverna i muntlig framställning, förmåga till självständigt kritiskt tänkande, vaksamhet, vana vid att sakligt men hovsamt framföra kritik mot kamraternas prestationer, vana vid att mottaga och bemöta en kritisk bedömning osv. Då dessutom metoden med i avsevärd utsträckning gemensamt arbete ger allsidigare, mer nyanserade och vanligen mer befästa kunskaper, har den enligt min mening betydande fördelar.

Innötningsarbetet kan delas upp i momenten träning och huvudräkning. Träningen avser att befästa redan genomgånget material, och genom huvudräkningen erhålles tillämpningsövningar.

Det blir väl inte så ofta man har råd att anslå någon längre tid till "träningen", men de enklare frågorna tar vanligen inte så lång tid att besvara och kan därför med fördel komma till användning vid slutet av en lektion, då endast några få minuter återstår. På mindre än en minut kan man få svar på frågor sådana som följande: Vad är $\pi$? Hur stor blir höjden i en liksidig triangel, om dess sida betecknas med $a$? Vad menas med komplementvinklar och supplementvinklar? Vad menas med höjd i en triangel?

Många av dessa enkla frågor är av den art, att de ofta måste upprepas, för att kunskaperna skall befästas.

Om man inte fordrar någon högre grad av noggrannhet, kan man också på kort tid få acceptabla teckningar till uppgifter i planimetri och geometri, exempelvis: 1) Rita en trubbvinklig triangel och drag höjden mot den minsta sidan. 2) Uppskatta längderna av bas och höjd och räkna ut ytan. (Räcker tiden till, är det trevligt att kontrollera, om uppskattningen var något så när riktig.) 3) Rita en cirkel och drag en sekant. 4) Illustrera med en teckning innehållet i satsen om medelpunktvinkeln och periferivinkeln. 5) Vilka överskrifter kommer till användning vid behandlingen av ett problem och vilka vid ett teorem?

Självklart är, att man vid alla sådana övningar försöker få eleverna att i så hög grad som möjligt svara med egna ord.

# TRÄNING

I det följande har jag samlat sådana frågor, som kan användas vid träningsrepetition av skilda kursmoment. Efter varje avdelning kommenteras några av de anförda frågorna.

## AVDELNING 1

A. På realskolans första stadium, när man sysslar med repetition av hela tal och har börjat med decimalbråk, gör vi t. ex. följande uppgifter:

1. Skriv upp de grekiska och latinska ord, som man använder, då man i decimalsystemet bildar över- och underavdelningar av enheten. Skriv också deras översättningar på svenska.
2. Skriv upp i ordningsföljd alla de viktsmått, som kan komma ifråga, då man som enhet använder pund, lod, karat, gram.
3. Rita en jämförelsevis lång sträcka på tavlan, kalla den för en fot och illustrera med en teckning, vad man skulle mena med en kvadratfot och med en kvadratdecifot.
4. Rita en jämförelsevis kort sträcka på tavlan, kalla den för en tum och illustrera, vad man skulle mena med en kvadrattum och med en kvadratdecitum.
5. Rita en sträcka, som är 6—7 dm lång, kalla den för 1 aln och börja att illustrera, vad man skulle mena med 1 aln$^3$ och 1 daln$^3$ (kubikdecialn).
6. Finns det några vanliga mått, som har mer än ett namn?

7. Skriv upp namn på vanliga storheter, som förekommer vid arbete med de fyra enkla räknesätten.
8. Vad vet du om begreppet reduktionstal?
9. Vilka delningsregler känner du till?
10. Vad är att iakttaga vid utförande av räkningar i addition, subtraktion, multiplikation och division i decimalbråk?

*Kommentar till Avd. 1*

Vid en sådan träningsrepetition har man möjlighet att utvidga den första genomgången.

Om vi tänker på frågorna om yt- och rymdmåtten, är någonting i den stilen här möjligt. (Detta är inte av sådan vikt, att det normalt bör delges eleverna, men det kan dock vara av värde för läraren att själv en gång tänka igenom frågan på sådant sätt.)

Vi ritar på tavlan en rektangel

Fig. 112.

och sätter såsom i teckningen ovan längden = 1 fot och bredden lika med 1 tum. Vad skall vi då kalla den ytan för? Det ligger nära till hands att kalla den för en fottum eller en tumfot. Säkert vore det oförståndigt att hitta på ett nytt namn, som man gjort, då man kallat 1 kvadratdekameter för 1 ar. Ritar vi nu i stället en rektangel med längden 4 fot och bredden 3 tum,

Fig. 113.

så ser man lätt genom att utföra uppdelningen så som i fig. 114, att ytan blir 12 tumfot.

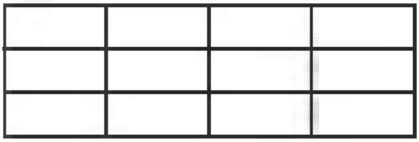


Fig. 114.

Går vi så ett steg vidare och ritar en rektangel med basen 3 fot 2 tum och höjden 4 tum,

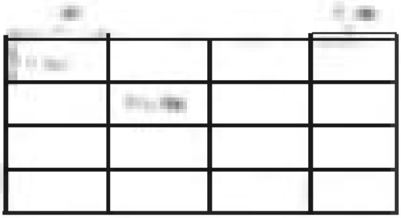


Fig. 115.

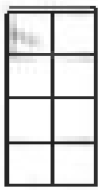


Fig. 115 a.

så får vi 12 st små rektanglar, som kan kallas tumfot, men så får vi kvar 4 lite mindre rektanglar. På fig. 116 ser man, att man får 8 st små kvadrater med sidan 1 tum, som bör benämnas kvadrattum och tecknas tum$^2$. Vår yta blir alltså 12 tumfot och 8 tum$^2$. — Arbetet blir tydligen mycket enklare, om man känner reduktionstalet mellan 1 fot och 1 tum. Men om detta reduktionstal är ett krångligt tal som 3,33 eller något i den stilen, får vi ett mycket besvärligt arbete, som var och en lätt inser. Håller vi oss t. ex. till de tre längdmåtten aln, fot och tum och anser, att 1 aln är 4 fot och 1 fot = 3 tum, så får vi (som man lätt kan verifiera) att 1 aln$^2$ = 16 fot$^2$ och 1 fot$^2$ = 9 tum$^2$. Det kräves nog inte mycken eftertanke för att inse, att det kommer att bli mycket krångligt att hålla reda på dessa reduktionstal och utföra förvandlingar.

Det hela blir utan tvekan mycket enklare, om man som reduktionstal mellan på varandra följande sorter, som inte har med ytor och volymer att göra, använder talet 10, och om man dessutom alltid uttrycker alla längder i samma sort, innan man sätter i gång med att söka ytor och volymer.

I gymnasiets läroböcker i geometri (t. ex. Nyström—Olsons likformighetslära för gymnasiet) säges det ibland, ifråga om satsen om ytan av en rektangel: "I realskolan är satsens riktighet bevisad för det fall, att mätetalen av rektangelns sidor äro rationella." Det är nu inte så säkert, att detta alltid medhinnes, men nog vore det bra, om det blev tillfälle att ta upp frågan någon gång i klass 7.

Uppgiften nr 7 ovan kan naturligtvis besvaras på olika sätt. Man kan skriva upp storheternas namn utan vidare och sedan muntligen redogöra för deras betydelse med hjälp av exempel. Man skulle också kunna göra så här:

term + term + term + . . . + term = summa,
term — term = skillnad,
faktor · faktor = produkt,
faktor · faktor · faktor · . . . · faktor = produkt,
dividend : divisor = kvot + $\frac{\text{rest}}{\text{divisor}}$ eller
dividend : divisor = kvot + rest : divisor,
term + term — term — term = algebraisk summa,
dividenden = divisorn · kvoten + resten.

## Avdelning 2

När man kommit lite längre och klarat av bråken och sysslat lite med den inledande geometrien (i klass 6), får man ett stort tillskott av frågor:



1. Vad är att iakttaga vid addition och subtraktion i bråk?
2. Hur bär man sig åt, när man skall utföra en multiplikation i bråk?
3. Hur utför man en division i bråk?
4. Skriv upp de storheter, som förekommer vid räkning med vinst, förlust, rabatt, ränteräkning och handelsräkning.
5. Skriv upp några samband mellan storheterna i föregående uppgift.
6. Hur förkortar (förlänger) man ett bråk?
7. Vad är $\pi$?
8. Hur räknar man ut ytan av en cirkel? (Med figur.)
9. Hur resonerar man, när man löser en ekvation (ekvationen tillverkas av eleven)?
10. Rita en figur, som illustrerar: en liksidig triangel, en trubbvinklig triangel, en diagonal i en fyrsidig figur, en korda, en sekant, en diameter, en sektor, ett segment i en cirkel.

### *Kommentar till Avd. 2*

Har man anslagit en lektion eller större delen av en lektion till "träning", kan man låta flera elever samtidigt arbeta vid tavlan vid behandlingen av uppgifter. På frågan nr 5 kunde vi t. ex. få följande svar:

a) Vinsten = (köpesumman · vinstprocenten) : 100
b) Försäljningssumman = köpesumman + vinsten


Förlusten = köpesumman · förlustprocenten dividerat med hundra.

c)

Rabatt (4 kr)

Nettopris (76 kr)

Bruttopris = 80 kr

bruttopriset — bruttopriset · rabattprocenten genom hundra = nettopriset.

Som förövning till begreppet "förhållande" kan vi, om vi sätter rabattprocenten = 5, här träna med: Rabatten förhåller sig till nettopriset som 4 : 76 eller 1 : 19. Rabatten förhåller sig till bruttopriset som 4 : 80 eller 1 : 20. Nettopriset förhåller sig till bruttopriset som 76 : 80.

På detta stadium får vi nog beträffande handelsräkningen hålla oss till övningar i stil med ovanstående, när det var fråga om rabatt. Men vid repetition i följande klasser får vi vara glada, om vi något så när kan klara av denna enda fråga på en lektion, då ju här så många möjligheter yppar sig, t. ex. vid beräkning av vinstprocenten.

Ställer man frågan om bråkförkortning alldeles vid slutet av en lektion, får man väl nöja sig med det gamla vanliga svaret, som ju de flesta kan ge: Man dividerar täljare och nämnare med samma tal. Men har jag lite längre tid på mig, vill jag gärna, att eleverna skall bilda ett förkortningsbart bråk genom att först skriva t. ex. $\frac{13}{\text{[illegible]}}$ och sedan tillfoga samma faktor eller faktorer i täljare och nämnare, så att man får t. ex. $\frac{13 \cdot 5 \cdot 3}{\text{[illegible]} \cdot \text{[illegible]} \cdot 3}$ för att sedan efter multiplikationerna, då de komponerat sin uppgift, åter dela upp täljare och nämnare i faktorer, innan förkortningen utföres.

Alltså: $\frac{195}{255} = \frac{3 \cdot 65}{3 \cdot 85} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 13}{3 \cdot 5 \cdot 17} = \frac{13}{17}$

Härvid bör naturligtvis sägas ut: Täljarens siffersumma är 15 och nämnarens 12. Alltså kan jag dividera både täljare och nämnare med 3. 3 i 19 går 6 gånger, 3 i 15 går 5 gånger etc. Sedan ser jag, att 65 och 85 båda kan divideras med 5 etc.

## Avdelning 3

Av annan art blir de nya frågorna, när vi kommer till klass 7. Då har vi gått igenom grunderna av ekvationslösningen, lite problemlösning och de geometriska satserna om sträckor, vinklar och trianglar; kanske också litet algebra. Som exempel må följande repetitionsfrågor anföras.

1. Hur motiverar man ekvationerna vid lösning av uppgifter om
   a) vinst- och förlusträkning?
   b) blandning med mängder (vikter och volymer)?
   c) blandning med priser och värden?
2. Vad menas med begreppet halt? Exempel.
3. Vad menas med
   a) ett guldföremåls finhet (om detta behandlats)?
   b) ett silverföremåls lödighet (om detta behandlats)?
   c) karat?
4. Vad innehålles i a) kvadratregeln, b) konjugatregeln?
5. Vilken är tankegången vid lösning av en ekvation med nämnare? (Gör en typisk ekvation utan tanke på svaret!)
6. Hur vet man, att $\pi$ är lite mer än 3?
7. Vad menas med en normal, en bisektris, en kvadrat, en pgrm?
8. a) Hur delar man en sträcka mitt itu?
   b) Hur delar man en vinkel mitt itu?

c) Hur drar man en normal mot en rät linje från en punkt på en rät linje och från en punkt utanför en rät linje?
d) Hur drar man en rät linje parallell med en given rät linje?
e) Hur delar man en sträcka i tre lika delar?
f) Vad menas med alternatvinklar (även vid linjer, som inte är parallella)?

9. Rita en teckning, som illustrerar
   a) satsen om den likbenta triangeln (omvändning),
   b) en sats om samband mellan sidor och vinklar i en triangel,
   c) något kongruensfall.
10. Vilka geometriska satser illustrerar följande teckningar?

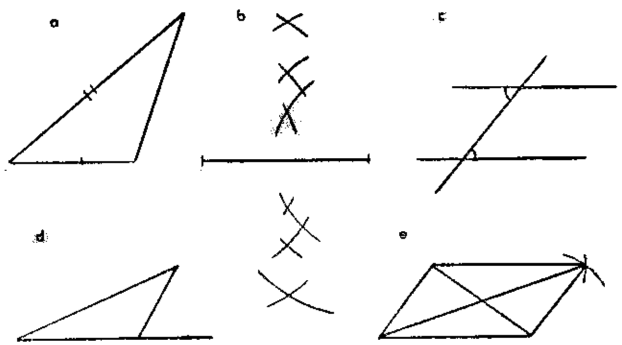



Fig. 116.

*Kommentar till Avd. 3*

Uppgiften 6 förutsätter, att barnen fått lära sig att i en cirkel inskriva en reguljär sexhörning och dela den i sex liksidiga trianglar med 3 diametrar.

Svaret på frågan nr 10 a bör ta sig ut ungefär så här: Om en sida (eleven för pekpinnens spets utefter sidan med



två tvärstreck) i en triangel (eleven pekar runt omkretsen) är större än en annan sida (eleven pekar utefter sidan med ett tvärstreck), så är den vinkel, som står mot den större sidan (eleven för pekpinnen i en båge från det ena vinkelbenet till det andra på den större vinkeln), större än den vinkel, som står emot den mindre (eleven pekar på samma sätt ut den mindre vinkeln).

Det kan ju låta fint och bestickande, om eleverna hastigt kan läsa upp satserna utantill, men värdet blir säkert bra mycket större, om pekpinnen flitigt användes.

## Avdelning 4

1. a) Hur motiverar man ekvationerna, då man löser problem om hastighet och arbete?
   b) Vad menas med att en löpare varvar en annan?
2. Vad menas med ett förhållande? (Definition eller exempel.)
3. Vad menas med ett bråks värde? Hur betecknar man lämpligen ett bråk, vilket som helst, vars värde är $\frac{3}{7}$? Vad får man, om bråket förkortas med 2, förlänges med 2? Hur ser resultatet ut, om man först förlänger bråket med 2 och sedan ökar täljaren med 4?
4. Gör en jämförelse mellan
   a) pris och täthet,
   b) pris och hastighet,
   c) pris och arbetsförmåga (effekt).

   Om samme lärare undervisar i matematik och fysik, passar det bra att här fortsätta med jämförelser mellan pris och specifikt värme, smältvärme och ångbildningsvärme.
5. Hur kan man med hjälp av begreppet "förhållande"

uttrycka sambandet mellan de storheter, som förekommer vid räkning med bolag och konkurser?

6. Redogör för innehållet i utbrytningsregeln, kvadratregeln och konjugatregeln.
7. Skriv en dignitet och tala om, vad de olika storheterna kallas. Författa och räkna ut en uppgift med digniteter.
8. Hur drar man en tangent till en cirkel från en punkt på cirkeln och från en punkt utanför?
9. Vilka satser illustrerar följande teckningar? (Fig. 117.)

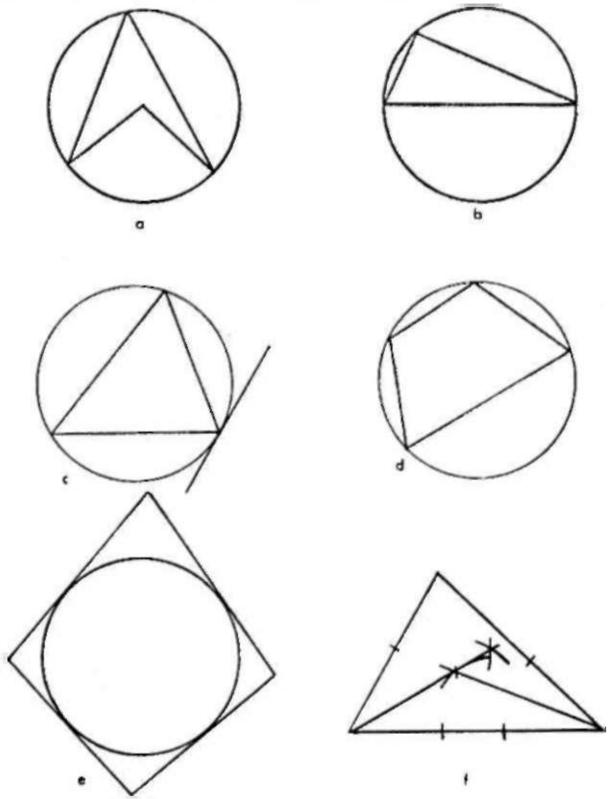



Fig. 117.

10. Rita teckningar till och redogör för några satser om bågar, kordor och medelpunktsvinklar i en cirkel.

*Kommentar till Avd. 4*

Hur pass ingående svaret på *frågan 1* blir, beror naturligtvis på tillgänglig tid. Har vi tid, kan vi först låta eleverna svara på några sätt och sedan sammanfatta resultatet. Det torde bli någonting i den här stilen:

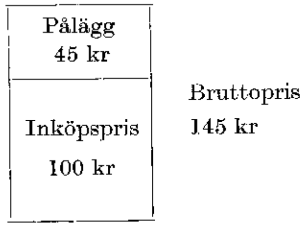
Eleven A: Om det är fråga om två personer, som reser för att mötas, och man vet, när de startar, och hur stora deras hastigheter är, så uttrycker man deras tider med hjälp av $x$. Då använder man sig av att $s = vt$. Ekvationen uttrycker, att den enes väg + den andres väg är lika med hela vägen, som också måste vara bekant.

Eleven B: Om det är fråga om två personer, som startar från samma ställe och reser åt samma håll, och man vet, när de startar och när de träffas, uttrycker man deras hastigheter med hjälp av $x$ och använder sedan sambandet, att vägen är lika med hastigheten gånger tiden. Om man sedan skriver upp, att deras vägar är lika, så får man en ekvation.

Eleven C: Ibland är det så, att man känner hastigheterna och ett samband mellan tiderna. Då uttrycker man vägarna med hjälp av $x$ och använder sambandet "tiden är lika med vägen genom hastigheten". Sedan skriver man upp det givna sambandet mellan tiderna, och det ger ekvationen.

Eleven D ber kanske att få tillverka en uppgift i enlighet med vad som föreslagits under "hastighetsuppgifter".

*Frågan 2.* Förhållande är kvoten vid en *innehållsdivision*, får man naturligtvis inte ofta till svar. Om man frågar så här: Hur många gånger innehålles 2 kg i 10 kg?, så blir svaret 5 ggr. Då är kvoten eller rationen mellan 10 kg och 2 kg lika med 5. Man kan också säga, att förhållandet mellan 10 kg och 2 kg är 5 eller att förhållandet mellan 2 kg och 10 kg är 1 : 5 eller $\frac{1}{5}$. Eller: Vi kan rita en teckning och uttrycka sambanden så här: Om påläggsprocenten är 45, så förhåller sig pålägget till inköpspriset som 9 : 20, eller pålägget förhåller sig till brutto(försäljnings)priset som




9 : 29, och inköpspriset förhåller sig till bruttopriset som 20 : 29. Eller: Förhållande är detsamma som kvot eller ration. Om förhållandet mellan två summor är 5 : 6, betyder det, att om man dividerar den första summan med den andra, så blir kvoten $\frac{5}{6}$. Om man får den första summan genom att multiplicera 5 med 200, får man den andra genom att multiplicera 6 med 200.

Storheterna, som omtalas i *frågan nr 4*, hör inte till dem, som eleverna blir bekanta med i första taget. Om man tränat en smula från femte klassen, bör man ändå ha möjlighet att få svar från några elever i klassen, t. ex. så här:

Eleven A: Om man ser i ett fönster en skylt, på vilken det står: "Apelsiner, 2 kr", så kan man inte veta, om det är meningen, att ett kg apelsiner kostar 2 kr eller om det är fråga om ett dussin. Pris är därför "värde per kg" eller "värde per dussin", och sorten blir kr/kg eller kr/duss.

Eleven B: Man kan inte gärna om en viss sorts sten säga, att 3 l väger 7,5 kg, om man skall ge en uppgift om stenen.



Därför talar man i stället om, hur mycket 1 l väger, och så säger man, att tätheten är 2,5 kg/l.

Eleven C: Vi har i allmänhet inte haft någon sort att mäta arbete i, när vi har sysslat med arbetsproblem. I början talade vi om dagsverken och timverken, och därmed menade vi den arbetsmängd, som en man kunde utföra på en dag resp. en timme.

På sista tiden har det i sådana uppgifter talats om ett alldeles bestämt arbete, som kan utföras av olika arbetare på olika lång tid, men vad för sorts arbete det har varit fråga om, har man inte alltid fått veta. Då får man ta reda på hur stor del av arbetet en viss arbetare utför på en dag (eller en timme) och får effekten uttryckt i arbetsdel per dag och det på ett visst antal dagar utförda arbetet i

$$\frac{\text{arbetsdel}}{\text{dag}} \cdot \text{dagar} = \text{arbetsdelar}.$$

Vid räkningen får man sedan använda sig av att summan av de arbetsdelar, som utförts av de olika arbetarna, är lika med den totalt utförda delen av arbetet. Det vanligaste är, att hela arbetet utförts, och då blir summan av alla de utförda arbetsdelarna lika med 1.

I en hel del uppgifter har det varit tal om kar och cisterner, i vilka man fyller i vatten med några rör och kan tömma ut vattnet med andra rör. Då kan man inte tala om arbetsförmåga i vanlig mening. Kanske snarare om fyllnings- och tömningsförmåga, uttryckt i liter i minuten eller kar-del i minuten (cisterndel i timmen). Man kan slippa de här beteckningarna, om man skriver ut tanken på svenska: Röret *A* fyller på en minut så och så många liter eller så och så stor del av karet. Många är ju vana vid att omedelbart sätta upp en tabell, och då skrives kanske utan vidare arbetsförmåga utan någon tanke på vad det är fråga om.

Eleverna bör med egna ord lämna svar på frågan 6, t. ex.:

Om man har ett polynom, d. v. s. en samling termer med plus- och minustecken emellan, kan det hända, att man kan dela upp termerna i faktorer så, att samma faktor finns i alla termerna. Polynomet kan då delas upp i två faktorer, av vilka den ena är den omtalade gemensamma faktorn. Man skriver den, följd av ett multiplikationstecken framför en parentes. Innanför parentesen skriver man ett nytt polynom, som man får, om man berövar varje term i det givna polynomet den gemensamma faktorn. Multiplikationstecknet mellan faktorn och parentesen kan utelämnas.

Eller något annorlunda:

Om man har ett polynom, i vilket alla termerna innehåller samma tal som faktor, kan man bryta ut den faktorn. Polynomet kan då skrivas lika med detta tal gånger en parentes. Varje term i det nya polynomet inom parentesen erhålles som kvot mellan den motsvarande termen i det ursprungliga polynomet och den gemensamma faktorn.

## Avdelning 5

### *Några träningsfrågor i realskolans avslutningsklass*

1. Vilka storheter förekommer vid behandling av växlar? Vilka samband existerar mellan dessa storheter?
2. Lika med fråga 1 men ”växlar” utbytt mot ”obligationer”.
3. Hur bär man sig åt för att skaffa bort rotmärken ur nämnaren på ett bråk?
4. Redogör för tanken vid lineär interpolation. — Kvadratrotsutdragning. Olika tabeller.
5. Vilka regler för uppdelning i faktorer av bokstavsuttryck känner du till?
6. Berätta något om den rätvinkliga triangeln och Pythagoras’ sats.

7. Redogör för några minnessaker i samband med den liksidiga triangeln.
8. Några hjälpfrågor vid lösning av planimetriska problem.
9. Vilken är tankegången vid lösning av ekvationssystem?
10. Vad illustrerar följande figurer? Redogör för några minnessaker i samband med dessa figurer.

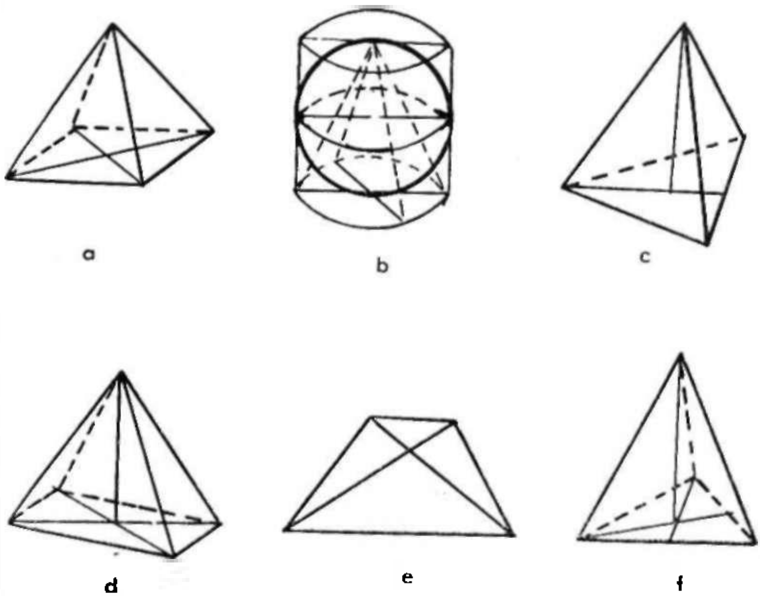



Fig. 118.

*Kommentar till Avd. 5*

Tankegången vid den lineära interpolationen klargöres bäst med hjälp av ett exempel. Låt oss söka $\sqrt{314{,}7}$. Det är klart, att $\sqrt{314{,}7}$ ligger mellan $\sqrt{314}$, d. v. s. 17,720 och $\sqrt{315}$, som är 17,748. Vi brukar tänka oss en trappa med lika höga steg mellan två avsatser. På den undre avsatsen står kvadratroten ur talet 314 och på den övre kvadratroten ur talet 315.

Vi har ett trappsteg för varje tiondel. Då talet ökar med 1 enhet eller 10 st tiondelar, ökar kvadratroten med 28 tusendelar. Höjden på varje trappsteg blir i vårt fall 2,8 tusendelar. På sjunde trappsteget står $\sqrt{314{,}7}$. Om vi tänker oss, att vi har lika många avsatser som hela tal och att avsatsen $\sqrt{0}$ ligger på havets nivå, så kommer $\sqrt{314{,}7}$ att ligga på en höjd (över havets nivå) av $17{,}720 + 0{,}7 \cdot 0{,}028 = 17{,}720 + 0{,}0196 \approx 17{,}720 + 0{,}020 = 17{,}740$.

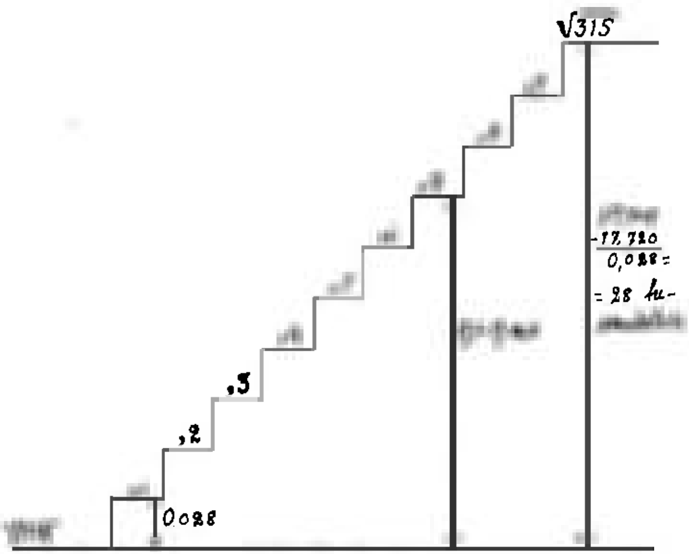



Fig. 119.

Ibland måste tanken upprepas, utan att man har tillfälle att illustrera tankegången. Det kan t. ex. ske så här: Kvadratroten ur 314 är 17,720, och roten ur 315 är 17,748. Då talet ökar med 10 st tiondelar, ökar kvadratroten med 28 tusendelar, och om talet ökar med 1 tiondel, ökar kvadratroten med en tiondel av 28 tusendelar. Då talet ökar med 7 tiondelar, ökar roten med $0{,}7 \cdot 0{,}028$.

Använder man tabellen över kvadratroten ur talen 0,0—99,9, måste vi säga, att talet ökar med några hundradelar i stället för som ovan med några tiondelar.

*Ex.:* $\sqrt{31{,}47} = 5{,}604 + 0{,}7 \cdot 0{,}008 \approx 5{,}604 + 0{,}006 = 5{,}610.$

På *frågan 5* kunde man i bästa fall tänka sig ett svar så här: Vi har bara lärt oss en regel, som kan komma till användning, när det är fråga om att i faktorer dela upp ett polynom, som består av mera än 3 termer. Det är utbrytningsregeln (behandlad i föregående frågeserie). Om polynomet består av 3 termer, så får jag använda kvadratregeln, och om det består av 2 termer, så kan jag tänka på konjugatregeln. När kvadratregeln kan användas, finns det i polynomet två plustermer, som är jämna kvadrater, t. ex. $4x^2 + 9y^2$. Då säger jag, att första talet heter $2x$ och det andra talet $3y$. Men så måste det också finnas en term med plus- eller minustecken, som är dubbla produkten av första och andra talet. Det blir i det här fallet $2 \cdot 2x \cdot 3y$ eller $12xy$. Då kan man skriva:

$4x^2 + 9y^2 + 12xy = (2x + 3y)^2$ eller $(2x + 3y) \cdot (2x + 3y)$

och $4x^2 + 9y^2 - 12xy = (2x - 3y) \cdot (2x - 3y) = (2x - 3y)^2$.

Efter en liknande beskrivning av konjugatregeln kan man lämpligen sluta med regeln: Man bör alltid först se efter, om man kan använda utbrytningsregeln.

*Frågan 6* kan besvaras på många olika sätt, t. ex.:

Om man ritar upp en cirkel omkring en rätvinklig triangel med den längsta sidan som diameter, så går den cirkeln genom den räta vinkelns spets. De sidor, som utgör den räta vinkelns ben, kallas kateter och den längsta sidan hypotenusa. Drar man höjden från den räta vinkelns spets, blir triangeln delad i två trianglar, som är likformiga sinsemellan och med den stora triangeln. Om man skriver upp, att lilla kateten i lilla deltriangeln förhåller sig till lilla kateten i hela triangeln, som hypotenusan i lilla deltriangeln förhåller sig till hypotenusan i hela triangeln och dito med den stora deltriangeln, så kan man bevisa 4 st satser om den rätvinkliga triangeln (vilka kan demonstreras). I uppgifter är det mycket vanligt med egyptiska trianglar, d. v. s. trianglar, vilkas sidor förhålla sig som 3 : 4 : 5. Om man funnit, att en triangel är egyptisk, och inte känner sidorna, kan man lämpligen beteckna dem med $3x$, $4x$ och $5x$. Om den mellersta sidan t. ex. är $a$, så är den minsta sidan $\frac{3}{4}a$ och den största $\frac{5}{4}a$.

Svar till *fråga 7.*

Om man drar en höjd i en liksidig triangel, får man två 90-60-30-graders trianglar. Kallar man triangelns halva sida, d. v. s. minsta kateten i den rätvinkliga triangeln för $a$, blir hela sidan $2a$ och höjden $a\sqrt{3}$. Om man drar alla tre höjderna, skär de varandra i en punkt, som är medelpunkt för både den inskrivna och den omskrivna cirkeln. Den längre delen av höjden, d. v. s. den omskrivna cirkelns radie, är dubbelt så stor som den mindre delen, som är radie i den inskrivna cirkeln. Eftersom ytan av en triangel är lika med halva basen gånger höjden, så blir den liksidiga triangelns yta i vårt fall lika med $a \cdot a\sqrt{3}$, och om hela sidan betecknas med $s$, blir ytan $\frac{s^2\sqrt{3}}{4}$.

Svar till *fråga 8.*

a) Finns det någon symmetri? Drag i så fall symmetriaxeln.
b) Finns det några rätvinkliga trianglar. Om ej, se efter, om det är möjligt att skaffa fram några.
c) Finns det några likformiga trianglar? Om ej, se efter, om det är möjligt att skaffa fram några. Tag noga reda på, vilka sidor som svarar emot varandra. Ibland kan det omedelbart framgå ur figurens form, men ibland måste

man noggrant se efter, att de sidor, som jämföres, står emot lika vinklar.

d) Om i uppgiften finnes given en vinkel på 30°, 60° eller 45°, drag från en vinkelspets en normal mot en sida, så att man får en rätvinklig triangel, som innehåller en av dessa vinklar. Använd sedan bekanta satser om dessa slag av trianglar.

e) Kom ihåg, att alla punkter på en cirkel ligger lika långt ifrån medelpunkten, att om två cirklar tangerar varandra, medelpunkterna och tangeringspunkten ligger i rät linje med varandra och att normalen från tangeringspunkten mot tangenten går genom medelpunkten.

## HUVUDRÄKNING

Kortare huvudräkningsfrågor förekommer väl lite då och då under lektionens gång. *Vill man ha huvudräkningsövning med hela klassen, bör man dock förlägga den till lektionens början och endast hålla på därmed en kort stund.*

Som uppgifter för dessa övningar kan man i allmänhet använda de första uppgifterna på varje område i läroböckerna. Dessa uppgifter är nog i regel av läroboksförfattarna just avsedda till huvudräkningsövningar, när ett nytt område skall genomgås.

Vill man repetera gamla kurser medelst huvudräkning, måste man antingen gå tillbaka i läroboken och plocka ut sådana uppgifter, som passar, eller också själv tillverka dem, och det är nog detta sista, som ger det mesta. Nedan lämnas några förslag till frågor på detta område, uppdelade i fem avdelningar.

### Avdelning 1

1. Tala om, hur man i huvudet räknar ut 7 · 17.
2. Utför i huvudet divisionen: 1659 : 7.
3. Läraren: Utför i huvudet räkningarna, allteftersom jag läser dem:

   a) två gånger tre ökat med sex gånger tre minskat med tre och sedan alltihop multiplicerat med tre,

   b) tre gånger fyra minskat med ett gånger sju minskat med två, alltihop dividerat med fem,

c) sjuttiotvå dividerat med nio plus 1 dividerat med nio ökat med fem gånger fyra minskat med sex.

4. Uppdela i faktorer: a) 72, b) 96, c) 105, d) 729, e) 120, f) 630, g) 440, h) 5544, i) 56232.

5. Vad blir:
   a) $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = ?$
   b) $1{,}2 + 0{,}3 + 0{,}04 + 0{,}06 = ?$
   c) $0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = ?$
   d) $0{,}2 : 0{,}04 + 0{,}09 : 0{,}003 = ?$

   I a) och b) kan läraren läsa: Noll komma ett plus noll komma två plus noll komma tre plus noll komma fyra etc.

   c) och d) skriver man lämpligen upp på tavlan.

6. **Utläs på några olika sätt talet 1357, 9246 med användande av olika talsorter.**

7. Uttryck i olika sorter:
   a) 2034,5067 kg; b) 4,02094 kfot; c) 32,50043 hp, där p är förkortning av pund; d) 20034,502 fot$^2$;
   e) 904638,20405 m$^2$; f) 390404056,00300246 aln$^3$.

8. a) Om centner är ett viktmått, uttryck i hcentner: 2 Mcentner 3 kcentner 231 dcentner 2 mcentner;
   b) uttryck i g: 15 Mg 13 hg 29384 mg; (Mg = ton);
   c) uttryck i dtum$^2$: 5 ktum$^2$ 33 Dtum$^2$ 4 ctum$^2$;
   d) uttryck i Dfamn$^3$: 7 famn$^3$ 1234 cfamn$^3$;
   e) uttryck i dm$^3$: 2 hm$^3$ 3 mm$^3$;
   f) uttryck i m$^3$: 5 Mm$^3$ 98765 cm$^3$.

9. **Ange vad som skall stå på de tomma platserna (i täljare eller nämnare) i följande bråk:** a) $\frac{3}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$; b) $\frac{11}{23} = \frac{44}{\quad}$;
   c) $\frac{15}{17} = \frac{165}{\quad}$; d) $\frac{13}{17} = \frac{247}{\quad}$

10. a) Sätt text till följande uppgift:

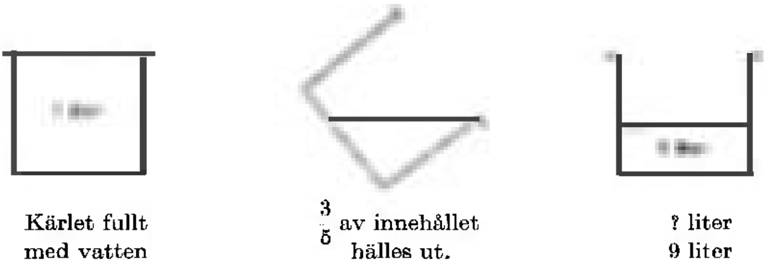
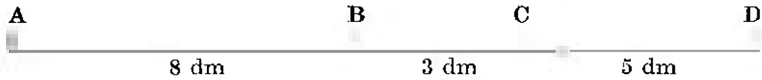



Fig. 120.

b) Ange på olika sätt sambanden mellan sträckan *AB* och dess delar.




*Kommentar till Avd. 1*

1. Här är inte meningen, att läraren skall lära bort en viss metod, utan snarare, att eleverna skall få tillfälle att själva hitta på olika möjligheter att utföra räkningen i huvudet. I detta enkla fall kan man redan tänka sig flera möjligheter. En elev föreslår: 7 gånger 10 är 70, 7 gånger 7 är 49, 70 och 49 är 119. En annan: 7 gånger 20 är 140, 3 gånger 7 är 21, 140 minskat med 21 är 119, en tredje möjligen: 7 gånger 15 är 105, 7 gånger 2 är 14, 105 och 14 är 119. (Han säger 7 gånger 15, därför att han tycker, att det är lätt att räkna ut 7 gånger 10 och sedan ta hälften av den produkten.)
2. Ifråga om uppgifter av detta slag är det särskilt viktigt, att läraren vid kompositionen ofta sätter ihop uppgifter sådana som följande: 5664 : 8. Det brukar nämligen vara besvärligt med divisioner, som ger nollor inuti kvoten. I de flesta klasser finns det nog lärjungar, som behöver

påminnas om att man inte får säga: 8 i 56 går 7 gånger, 8 i 64 går 8 gånger och som till resultat får 78, i stället för 708.

3. Här måste det läsas mycket tydligt. 2 gånger 3 (är 6, tänker eleven), ökat med 6 ($6 + 6 = 12$), gånger 3 (eleven tänker 12 gånger 3 är 36), minskat med 3 ($36 - 3 = 33$), och sedan alltihop multiplicerat med 3 (33 gånger $3 = 99$).
4. Här kan man ha både fem och sex elever vid tavlan. Det är lämpligt att låta eleverna bit för bit skriva upp tankegången. I h) skulle man t. ex. få: $5544 = 11 \cdot 504 = 11 \cdot 9 \cdot 56$, ty siffersumman i 504 är 9. Till slut får vi $5544 = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$.
6. Ett par förslag: ett tusental 35 tiotal 79 tiondelar 2 hundradelar och 46 tiotusendelar eller 13 hundratal, 57 ental 924 tusendelar och 6 tiotusendelar.
7. Man kan spara tid genom att låta eleverna skriva sorten under den givna uppgiften, t. ex. i f):

| 3 9 0 | 4 0 4 | 0 5 6, | 0 0 3 | 0 0 2 | 4 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| haln$^3$ | Daln$^3$ | aln$^3$ | daln$^3$ | caln$^3$ | 460 maln$^3$. |

Enkla uppgifter av detta slag brukar finnas i stort antal i varje lärobok och kan för övrigt tillverkas omedelbart av lärare eller elever. Uppgifter av ovanstående art kan användas som uppmuntran åt duktigare elever.

10. Här är meningen, att eleverna skall få tillfälle att öva sig i att uttrycka sig på svenska. Texten skulle lyda något i den här stilen: Ett kärl är fullt med vatten. Man häller ut $\frac{3}{5}$ av innehållet. Då finns det 9 liter kvar i kärlet. Hur mycket rymmer kärlet?

I 10 b avses övningar av följande art:

$AB$ är $\frac{8}{11}$ av $AC$, $AB$ är $\frac{8}{5}$ av $CD$, $AB$ är $\frac{8}{16}$ = hälften av $AC$. $AB$ förhåller sig till $BC$ som 8 till 3 etc.

## Avdelning 2

1. Lägg ihop a) $213 + 314 + 425 + 536$,
   b) $3{,}45 + 23{,}82 + 34{,}93$.

2. Räkna ut a) $\frac{2}{[illegible]} + \frac{3}{4}$, b) $\frac{3}{[illegible]} + \frac{5}{12}$, $\frac{7}{21} + \frac{13}{39}$.

[illegible]

3. Räkna ut a) $92 \cdot 13$, b) $29 \cdot 5$, c) $24 \cdot 42$, d) $112 \cdot 49$.

4. Räkna ut a) $4\frac{15}{20} + 5\frac{9}{36} + 6\frac{11}{[illegible]}$, b) $3\frac{14}{21} + 4\frac{31}{9[illegible]} + 5\frac{56}{84}$.

5. a) Skriv som bråk $3\frac{1}{2}$ %, $4\frac{1}{3}$ %, $7\frac{1}{4}$ %, $5\frac{1}{3}$ ‰.

   b) Hur mycket är 15 % av 60 kr, 15 % av 64 kr, 15 % av 62 kr?

   c) Hur mycket är 12 % av 60 kr, 12 % av 64 kr, 12 % av 62 kr?

6. Skriv upp namn på olika storheter och operationer, som förekommer vid addition, subtraktion, multiplikation och division samt vid räkning med decimalbråk och allmänna bråk.

7. Om någon säger, att han vid utförande av additionen $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ "skall förlänga täljare och nämnare i första bråket med 5 och i det andra bråket med 4", vad är det för fel i det uttryckssättet? Vad får man, om man verkligen förlänger täljare och nämnare i bråken med 5 resp. 4?

8. Vad är det, som man mäter i: kr/m, kg/liter, m/sek, mil/tim, liter/minuten, askar/minut, bilar/månad, åkdon/timme, fotgängare/timme, besökare/dag?

9. Lös ekvationerna: a) $2x = 50$, b) $3y + 2 = 11$, c) $5z - 2 = 8$, d) $\frac{2x}{3} = 8$, $\frac{2y + 1}{[illegible]} + 1 = 6$, $\frac{3z - 2}{5} - 1 = 3$.

10. a) Rita en godtycklig triangel och uppskatta dess yta. Gör sedan erforderliga mätningar och kontrollera uppskattningen.

b) Samma uppgift men med en rektangel.

c) Hur stora är omkretsar och ytor av följande figurer?

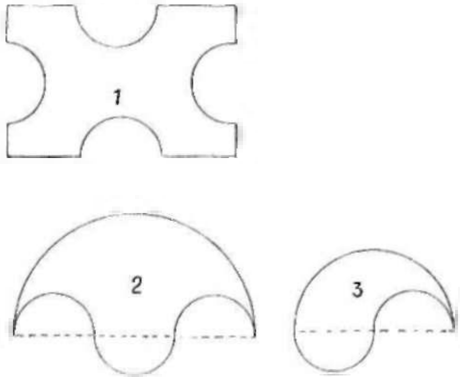



Fig. 121 a.

De rätlinjiga delarna av konturen i 1 är omväxlande 1 cm och 2 cm.

Småcirklarnas radier är överallt 1 cm.

d) Beräkna längden av spiralen nedan.

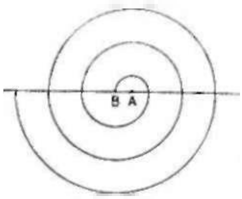



Fig. 121 b.

Man tar omväxlande $A$ och B till medelpunkter för cirklar, vilkas radier alltså för varje ny halvcirkel ökas med sträckan $AB$, som lämpligen kan tagas till 1 cm vid ritning på papper eller 1 dm vid ritning på svarta tavlan.

*Kommentar till Avd. 2*

1. Räkningen blir säkert lättare, om man tar hundratalen för sig och likaså tiotalen och entalen, än om man försöker arbeta på samma sätt, som man gör, då man skriver upp talen. I b) skulle man på detta sätt få: 3 ental + 23 ental + 34 ental blir 60 ental, 4 tiondelar + 8 tiondelar + + 9 tiondelar är 21 tiondelar eller 2 ental och 1 tiondel. 5 hundradelar + 2 hundradelar + 3 hundradelar är 10 hundradelar eller 1 tiondel. Summan blir alltså 62 ental och 2 tiondelar.
2. I c) och d) påminnes om att man tar hela för sig och delar för sig, så långt det går, och inte omedelbart sätter igång med att förvandla de blandade talen till oegentliga bråk.
3. Det är inte meningen, att man här skulle nöja sig med ett riktigt svar. Det gäller för eleven att tala om, hur han bär sig åt, då han utför räkningen i huvudet. Vi vill också ha räkningen utförd på flera olika sätt. Ifråga om uppgiften $24 \cdot 42$ kan vi vänta oss: a) 20 gånger 42 är 840, 4 gånger 40 är 160, och 4 gånger 2 är 8, eller tillsammans 168. Produkten blir alltså 1008.
   b) 24 gånger 21, eller kanske bättre 21 gånger 24, blir 480 + 24 eller 504. Dubbelt upp blir 1008.
   c) 25 gånger 42 är 4200, dividerat med 2 ger 2100, och än en gång med 2 ger 1050! Om jag sedan drar bort 42, får jag 1008. $\left(25 = \frac{100}{4}\right)$.

d) 40 gånger 24 är 960, och 2 gånger 24 är 48, eller tillsammans 1008.

4. Här är övningen närmast att lära sig se upp, så att man förkortar, innan man börjar sätta igång med att arbeta med de hela för sig och delarna för sig.

5. I b) räknar vi t. ex. 10 procent av 62 är 6,20, och hälften av det är 3,10. Tillsammans blir det 9,30.

   I c) låter det: 10 procent av 62 kr är 6 kr 20 öre, 1 procent blir 62 öre, 2 procent blir 1 kr 24 öre. Allt som allt får jag 7 kr 44 öre.

8. De efterfrågade sorterna är: pris, täthet, hastighet, ”tappningsförmåga”, tillverkningshastighet eller produktionsförmåga, ”trafikfrekvens”, besöksfrekvens.

## Avdelning 3

1. Lös ekvationen: a) $5x + 8 = 48$, b) $7x - 8 = 5x + 4$.

2. Lös ekvationen: a) $3(x + 2) - 2(3x + 1) = 4(2x - 1) - 3$,
   b) $3(4x - 10) - 4(12 - 2x) = 5x + 3$.

3. Lös ekvationerna: [illegible] $\frac{x}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{x}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{x - 2}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{x}{[illegible]}$

   c) $\dfrac{3x + 4}{5} = \dfrac{4x + 2}{6}$, d) $\dfrac{2x + 1}{3} - \dfrac{3x - 1}{5} = 1$,

   [illegible] $\dfrac{3x + 2}{[illegible]}$ [illegible] $\dfrac{4x + 4}{[illegible]}$ [illegible]

4. Lös ekvationerna: a) $\dfrac{3x\ [illegible]}{\frac{1}{3}} - [illegible] = 13$,

   [illegible]) $\dfrac{[illegible]}{0{,}25} - \dfrac{[illegible]}{0{,}2} = \dfrac{[illegible]}{0{,}5} + 1$.

5. $a \cdot a^2 \cdot a^3 = ?$, $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = ?$,

$a^2 \cdot (a^3)^4 \cdot (a^4)^5 = ?$, $\{(a^2)^3\}^5 \cdot \{(a^3)^5\}^6 = ?$

6. a) Uppdela i faktorer $5x^2 + 10xy$, $4a^3 + 8a^2b + 4ab^2$.

   b) Utveckla $(3x + 2)^2$, $(2a - 3b)^2$, $(0{,}1\ m + 0{,}2\ n)^2$.

7. a) Sök ett tal, som är lika mycket större än 7, som det är mindre än 15.

   b) Sök medeltalet (aritmetiska mediet) till 7 och 15 och 20.

8. a) Hur stor blir kopparhalten, om man blandar 5 hg koppar med 2 hg tenn och 5 hg zink?

   b) Ange något sätt att åstadkomma en 15-procentig koksaltlösning.

   c) Hur stor blir salthalten i blandningen, om man häller ihop 1 kg 10-procentig saltlösning och 1 kg 20-procentig, 1 kg 10-procentig och 2 kg 20-procentig, 2 kg 10-procentig och 3 kg 15-procentig?

   d) Hur mycket vatten skall avdunstas från 1 kg 15-procentig saltlösning, för att den skall bli 20-procentig, och hur mycket vatten skall tillsättas, för att den skall bli 10-procentig?

9. a) Hur många räntedagar är det från den 7 jan. till den 2 nov.? från den 2 febr. till den 1 aug.?

   b) Hur stor blir räntan på 600 kr under ett kvartal efter $3^1/_2$ %?

   c) Hur stor ränta får man på 300 kr efter $4^1/_2$ % från den 26 mars till den 14 maj?

10. a) Om två vinklar i en triangel är 100° och 40°, hur stora vinklar bildar den tredje vinkelns bisektris med den motstående sidan?

    b) I en parallellogram delas vinklarna av diagonalerna i två delar, av vilka den ena delen är dubbelt så stor som den andra. Sök vinklarna mellan diagonalerna. Upprita med hjälp av gradskiva en sådan parallellogram.

1b. Det är meningen, att hela tanken skall uttryckas ungefär så här: Nu vill jag ha $x$-en i ena ledet och enheterna i det andra. Eftersom vi har den största tillgången på $x$ i vänstra ledet, så är det bäst att ta bort $x$-en ur högra ledet, och det gör jag genom att minska ekvationens båda led med $5x$. Då får jag i V.L. kvar $+ 2x$. Nu vill jag ha enheterna i H.L., och det får jag genom att öka båda leden med 8 enheter. Därav får jag: $2x = 12$. Om jag sedan dividerar båda leden med 2, så blir $x = 6$.

2a. Man får öva eleverna att lämna ungefär följande text: I första parentesen får jag $+ 3x$ och i den andra $- 6x$; det blir $- 3x$; i högra ledet får jag $8x$. Efter hyfsning blir det i H.L. $11x$. Av enheter får jag ur vänstra ledets första parentes $+ 6$ och ur den andra $- 2$ eller tillsammans $+ 4$. I högra ledet får jag ur parentesen $- 4$, vilket tillsammans med termen $- 3$ ger $- 7$. Om jag då ökar båda leden med $+ 7$, får jag i V.L. $+ 11$, och ekvationen tar sig ut: $11 = 11x$, varav $x = 1$.

3. Vi väljer uppgiften d) och uttrycker tanken ungefär så här: Jag skall multiplicera ekvationens alla termer med 15. I första bråket kan jag förkorta med 3 och får $10x$. I andra bråket får jag på samma sätt $- 9x$, vilket efter hyfsning ger i V.L. endast $x$. Av enheter får jag i första bråket $+ 5$ och i det andra $+ 3$, alltså i V.L. $+ 8$. I H.L., som också skall multipliceras med 15, får jag $+ 15$. Om alla enheterna samlas i H.L., får man där 7. Ekvationens rot är alltså 7.

4a. Här är det av vikt, att eleverna tydligt får säga ut: ”Jag förlänger första bråket med 3 och andra bråket med 2” eller: ”Jag utför de tecknade divisionerna, och det går till så, att jag multiplicerar täljaren i det första bråket med $\frac{[illegible]}{1}$ och täljaren i det andra bråket med $\frac{[illegible]}{5}$ eller 2. Då får jag $3(3x - 4) - 2(2x - 1) = 13$."

Om detta skrives på tavlan, torde man inte ha ockrat för mycket på minnet. Sedan fortsättes som i 2.

5. Här får *icke* förekomma, att eleverna lär sig några regler om multiplikation eller addition av exponenterna. Då är övningen helt förfelad. Det är avsett, att arbetet, t. ex. i uppgiften $a^2 \cdot (a^3)^4 \cdot (a^4)^5$, skall utföras så här: Fyran längst upp till höger i uttrycket $(a^3)^4$ anger, att vi har en produkt av 4 st faktorer $a^3$, alltså $a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$. Men var och en av dessa faktorer $a^3$ är själv en produkt av 3 st lika faktorer $a$. Det hela är alltså en produkt av 12 st faktorer $a$, vilket tecknas $a^{12}$. Sedan en annan elev fått säga samma sak om $(a^4)^5$, har vi fått det givna uttrycket lika med $a^2 \cdot a^{12} \cdot a^{20}$, vilket lämpligen skrives på tavlan. En tredje lärjunge får avsluta det hela: Den första faktorn i uttrycket är en produkt av 2 faktorer $a$, den andra av 12 och den tredje av 20 lika faktorer $a$. Hela uppgiften är alltså en produkt av $2 + 12 + 20$ faktorer $a$ eller 34 faktorer $a$, vilket skrives $a^{34}$.

7. I regel lönar det sig att "prata" med eleverna en stund om nya saker och inte bara tala om för dem, vad det eller det är eller betyder. Här skulle det t. ex. kunna vara av intresse att betrakta 4 tal $a$, $b$, $c$, $d$, uppgivna efter storlek, så att $a$ är större än $b$ etc., och så låta eleverna söka medeltalet av dem, två och två, vilka som helst, och sedan beräkna medeltalet av de nya medeltalen. t. ex.:

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2}, \quad \frac{\frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2}}{2}$$

Denna undersökning med hjälp av bokstäver passar nog bättre på ett något högre stadium och kan, om tiden tillåter, lämpligen tas upp där, men här kan man naturligtvis utan svårighet arbeta med siffror. Man kan alltid ge något skäl till att man måste överge den första definitionen, som anges i a).

8. Ett naturligt svar, kanske det naturligaste, skulle väl vara, att man på ena vågskålen t. ex. till en *parallellogramvåg* ställer en tillräckligt stor bägare eller flaska och tarerar den. Om man sedan först sätter 150 g på samma vågskål som taran, fyller i salt till jämvikt, sedan ersätter de 150 g med en kg-vikt och fyller i vatten till jämvikt än en gång, så har man fått den sökta lösningen.

I c) och d) avses naturligtvis viktsprocent. Tanken i tredje uppgiften i c) blir följande: 2 kg 10-procentig saltlösning innehåller 200 g salt, och 3 kg 15-procentig saltlösning innehåller 450 g salt. Blandningen, som väger 5 kg, kommer alltså att innehålla 650 g salt. Då kommer 1 kg av blandningen att hålla 130 g salt. I 100 g blandning finns det 13 g salt, och 13 % av den erhållna blandningens vikt är alltså salt.

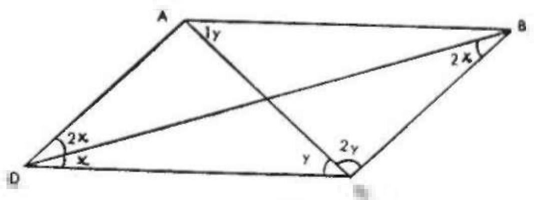



Fig. 122.

10b. Fig. 122. I en parallellogram, som inte är en romb, är alltid den ena sidan, t. ex. $AB$, större än den andra, $BC$. Därav följer, att om $\wedge$ $ABD$, som är lika med $\wedge$ $BDC$, betecknas med $x$, så blir vinkeln $CBD = 2x$. Om man på samma sätt betecknar $\wedge$ $DCA = \wedge$ $BAC$ med $y$, så blir $\wedge$ $BCA = 2y$. De båda små vinklarna måste alltså komma i samma triangel. Man får omedelbart, att $3x + 3y = 180°$ och $x + y = 60°$, varefter satsen om yttervinkeln ger, att vinkeln mellan diagonalerna är 60°.

Konstruktion med passare och linjal kan leda till resonemang, som passar bättre på ett högre stadium, där uppgiften under alla omständigheter lämpligen kan återupptagas.

## Avdelning 4

1. Räkna ut:

a) $5\frac{3}{7} + 4\frac{2}{3} + 2\frac{5}{6} + 1\frac{9}{14}$, [illegible]

[illegible] $\dfrac{3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 4\frac{5}{6}}{2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{6} - 4\frac{1}{2}}$, d) $\dfrac{1\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}$,

[illegible] $\dfrac{\frac{[illegible]}{4} - \frac{[illegible]}{4} \cdot \frac{[illegible]}{3}}{\frac{[illegible]}{5} + \frac{[illegible]}{5} \cdot \frac{[illegible]}{2}}$

2. a) $21^2$, $201^2$, $88^2$, $88 \cdot 92$, $149 \cdot 151$.
   b) Utveckla $(2x + 3) \cdot (x^2 + x - 2)$, $(2x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1$[illegible] $(a + 3)^2 - (a - 3)^2$, $(2a + 3b)^2 + (2a + 3b) \cdot (2a - 3b)$.

3. Forenkla a) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$, $\dfrac{2a}{3b} - \dfrac{3b}{8a}$, $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} + 1$,

[illegible] $\dfrac{\frac{a}{2} + \frac{b}{3}}{\frac{[illegible]}{3} - \frac{[illegible]}{2}}$

c) Förkorta $\dfrac{2a^2b^2}{6ab^3}$, $\dfrac{3m^3n^4}{9mn^2}$, $\dfrac{3ax + 6ay}{2x + 4y}$



4. Lös ekvationerna

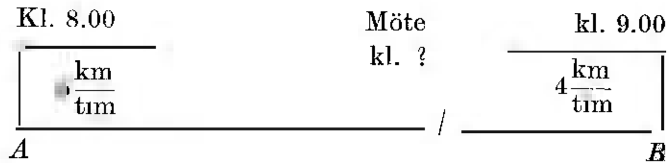
$$\frac{8}{5x} = \frac{6}{4x - 5}, \quad \frac{7}{2x + 4} = \frac{9}{4x - 2}, \quad \frac{x + 3}{x + 4} = \frac{x + 5}{x + 6},$$

$$\frac{2x - 3}{x} = \frac{2x}{x + 3}, \quad \frac{3x - 1}{x} = [illegible] + 1.$$

5. Om ett kapital insättes i en bank den 27 januari och förräntas under 211 dagar, vilken dag tas pengarna ut?

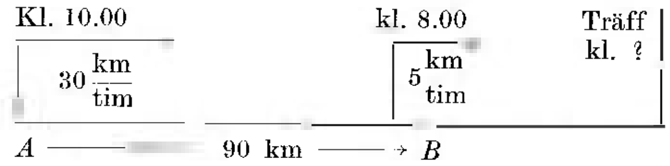
6. Om en kropp går 9 km på 15 minuter, uttryck dess hastighet på några olika sätt.

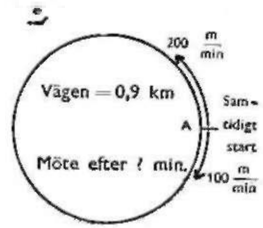
7. a)



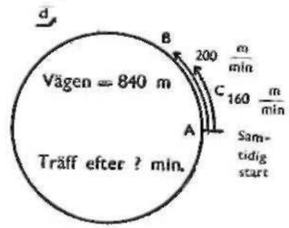

$AB = 2$ mil 3 km.

b)




c)



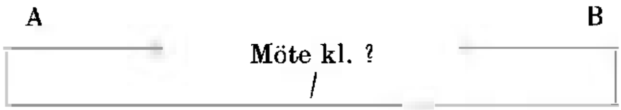

d)

Giv text till ovanstående uppgifter. Lös dem och ange, när och var sammanträffandet sker?

8. 1. A reser hela vägen på 5 tim.

2. B reser hela vägen på 7 tim.

3.




Samtidig start kl 8.00.

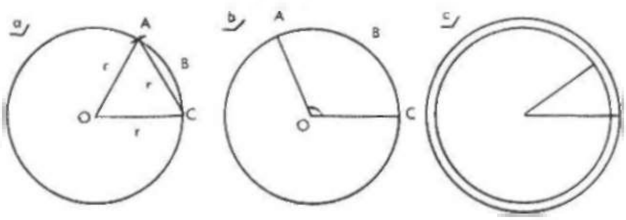
Giv text till uppgiften och räkna ut, när mötet sker, och hur stor del av vägen A och B har rest.

9. a) Sök vinklarna i en triangel, om de förhåller sig som 2 : 3 : 7.

b) Tre vinklar i följd i en inskriven fyrhörning förhåller sig till varandra som 4, 6, 5. Sök vinklarna i fyrhörningen.

10. a) Sök (ytan och) omkretsen av segmentet $ABC$ uttryckt i r.

b) Hur stor är medelpunktsvinkeln $AOC$, om bågen $ABC$ är lika med *sektorns* halva omkrets ?



Hur stor är skillnaden mellan cirklarnas *omkretsar*, om den mindre cirkelns radie är 6 370 km och den större 6 370 km 1 m?

*Kommentar till Avd. 4*

I näst högsta realskoleklassen har vi nu (1956) endast fyra timmar i veckan till förfogande. Det är, minst sagt, svårt att hinna med kursen, och det kan inte bli mycken tid över till repetitioner. Men vid den tiden, då eleverna ett par år har arbetat med ekvationer och man inte har haft tid att öva vanliga sifferräkningsuppgifter, blir det alltid svårt för eleverna att skilja på behandlingen av algebraiska uttryck och ekvationer. Det är därför alla skäl att försöka få tid att räkna några uppgifter liknande dem i Ex. 1.

Det är ingen ovanlighet, inte ens i första ringen, att behandlingen tar sig ut så här:

$$5\frac{3}{7} + 4\frac{2}{3} + 2\frac{5}{6} + 1\frac{9}{14} = \frac{38}{7} + \frac{14}{3} + \frac{17}{6} + \frac{23}{14}$$

$$= 228 + 196 + 119 + 69 = 612.$$

Här är det naturligtvis ekvationerna, som spökar, ibland t. o. m. i så hög grad, att likhetstecknen blir uteslutna. Det brukar vara trevligt att låta den elev, som fått detta resultat, göra ett litet överslag. Han förstår ju lätt, att de givna termerna i ordning är mindre än 6, 5, 3 och 2 och att den givna uppgiften måste ha en summa, som är mindre än 16.

Om man först tar ihop de hela, sedan $\frac{3}{7}$ och $\frac{9}{14}$ och därefter $\frac{2}{3}$ och $\frac{5}{6}$, kan man mycket väl räkna uppgiften i huvudet. Man får endast kvar $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{14}$ att lägga ihop.

I uppgiften 2a är det meningen, att eleven skall säga ungefär så här: Jag kan anse, att $201^2$ är ett exempel på kvadratregeln. Första talet heter då 200, och kvadraten på det är 40 000, andra talet är 1. Kvadraten på det är också 1. Dubbla produkten blir 400 och den sökta kvadraten 40 401.

I 2b brukar det vara givande med följande väg: Produkten $(2x + 3) \cdot (x^2 + x - 2)$ måste bli ett uttryck av tredje graden i $x$. Det kommer således att innehålla $x^3$-, $x^2$-, $x$-termer och en sifferterm. $x^3$-termer kan jag inte få på mer än ett sätt, nämligen av $2x$ gånger $x^2$, vilket ger $2x^3$. $x^2$-termer kan jag få på två sätt, både av $+ 2x$ gånger $+ x$ och av $+ 3$ gånger $+ x^2$. Jag får alltså $5x^2$. På samma sätt $- x - 6$.

Åtminstone några elever i klassen borde ha möjlighet att i huvudet utföra räkningarna i ex. 3. I uppgiften $\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b} + 1$ bör tanken uttryckas så: Om jag gör alla tre bråken liknämniga, får jag i första täljaren $a^2 - ab$ och i den andra $ab + b^2$ eller tillsammans $a^2 + b^2$. I sista termens täljare får jag $a^2 - b^2$. Resultatet blir $\frac{2a^2}{a^2 - b^2}$.

I $\frac{3m^3n^4}{9mn^2}$ bör sägas ut: I täljaren finns det tre faktorer $m$ och i nämnaren en faktor $m$. Då kan jag förkorta med 1 faktor $m$ och får i täljaren kvar 2 faktorer $m$ och i nämnaren ett. Av $n$-faktorer finns i täljaren 4 och i nämnaren 2. Efter förkortning återstår i täljaren 2 faktorer $n$ och i nämnaren faktorn 1.

Som resultat får jag $\frac{m^2n^2}{3}$.

I ekvationen $\frac{x + 3}{x + 4} = \frac{x + 5}{x + 6}$ i ex. 4 får man ett $x^2$ i vartdera ledet. Likaså får man i båda leden $9x$. I V.L. återstår sedan 18 och i H.L. 20, d. v. s. ekvationen är orimlig.

I $\frac{3x-1}{x} = \frac{2x}{x+1} + 1$ blir behandlingen: Om jag multiplicerar ekvationens båda led med minsta gemensamma dividenden till nämnarna, kan jag förkorta första bråket med $x$ och det andra med $x + 1$. Av $x^2$-termer får jag ur V.L. $3x^2$, ur H.L':s första term $2x^2$ och ur andra termen $x^2$. $x^2$-termerna tar alltså ut varandra. I V.L. får jag $+ 3x$ gånger $+ 1$ och $+ x$ gånger $- 1$, d. v. s. $+ 2x$ och i H.L. endast $+ x$ gånger $+ 1$. Allt som allt får jag ett $x$ i V.L. Man får endast en sifferterm, nämligen $- 1$ i V.L. Om jag "flyttar" över denna term i H.L., blir ekvationen till slut $x = 1$.

5. Om man förut lärt bort, att man kan finna antalet räntedagar, t. ex. från den 27 jan. till den 5 sept. genom att först ta reda på att det i januari är 3 dagar kvar, sedan 210 dagar på 7 månader och till sist 5 dagar i september, så kan man ju nu passa på och visa, att det går mycket bra att komma fram på följande sätt också:

$$\frac{5}{9} - \frac{27}{1} = \frac{35}{8} - \frac{27}{1} = \frac{8}{7} \text{ d. v. s. 7 månader 8 dagar.}$$

I första täljaren står uttagningsdagens nummer och i nämnaren uttagningsmånadens. Därvid är det att lägga märke till att nionde månaden femte dagen är detsamma som åttonde månaden 35:te dagen. I andra bråket betyder täljare och nämnare insättningsdagens, resp. insättningsmånadens ordningsnummer. Vid uträkningen minskar man täljare med täljare och nämnare med nämnare, såsom framgår av ovanstående exempel. Den lärare, som anser, att detta sätt att skriva data kan verka förvillande på eleverna och därför icke använder metoden vid undervisningen (i klass 9), kan, om han samtidigt vid tavlan har flera elever, som räknar ut räntedagars antal, själv dra nytta av att arbetet väl går lite fortare på detta sätt.

I den givna uppgiften blir räkningen:

$\frac{[illegible]}{[illegible]} + \frac{[illegible]}{[illegible]}$ = d. v. s. den 28 augusti. (211 dagar = 7 månader 1 dag).

I ex. 7 väljer vi uppgiften d). till vilken en medelgod elev borde kunna sätta text ungefär så här: Två personer B och C, som kan springa med en hastighet av 200 m/min, resp. 160 m/min, startar samtidigt från samma punkt åt samma håll och löper runt en sluten bana av 840 m längd. Hur länge dröjer det, innan de första gången träffas, och var sker detta? (Hur länge dröjer det, innan B första gången springer om — varvar — C?)

Om vi anser, att det dröjer $x$ min, får vi, emedan B då måste ha sprungit ett varv mer än C, ekvationen

$$200x = 160x + 840$$
$$40x = 840$$
$$x = 21.$$

De träffas alltså efter 21 minuter. Då har B sprungit 5 varv och C 4 varv.

Ändrar vi t. ex. C:s hastighet till 170 m/min, så att hastighetsskillnaden inte går jämnt upp i övriga givna storheter, träffas de ej längre efter ett helt antal varv.

I så fall får vi: $200x = 170x + 840$, varav $x = 28$. Emedan $28 \cdot 170 = 4760 = 5 \cdot 840 + 560$ och

$28 \cdot 200 = 5600 = 6 \cdot 840 + 560$, har C hunnit runt 5 varv och 560 m därtill, och B har hunnit 6 varv och 560 m därtill.

Ex. 8 är avsett att visa nyttan av att införa obekanta storheter, som ej efterfrågas och som ”försvinner” under räkningens gång. Om vi betecknar vägens längd i kilometer med $s$, blir A:s hastighet $= \frac{s}{[illegible]}$ km/tim och B:s $\frac{s}{7}$ km/tim.

Axiomet ”Det hela är lika med sina delar tillsammantagna” ger oss ekvationen

$$\frac{sx}{[illegible]} + \frac{sx}{[illegible]} = [illegible]$$

Man får $x = \frac{[illegible]}{1[illegible]}$. De möts alltså efter 2 tim 55 min, då A har rest $\frac{7}{12}$ och B $\frac{5}{12}$ av vägen.

Det är inte ovanligt, att man ifråga om uppgifter i stil med Ex. 9 kan få se ett sådant här antagande: "Antag, att vinklarna är $2x$, $3x$ och $7x$" i stället för: "Antag, att den minsta vinkeln är $2x$. Då är de övriga vinklarna $3x$ och $7x$." Med detta antagande blir ekvationen $3x + 7x + 2x = 180°$, varav $x = 15°$. Gör man i stället antagandet, att minsta vinkeln är $2x°$, blir ekvationen $2x + 3x + 7x = 180$ och $x = 15$. Vinklarna är alltså 30°, 45° och 105°. I det sista fallet betecknar $x$ mätetalet för vinkeln, uttryckt i grader, i förra fallet betyder det storheten själv.

Finns det någon möjlighet att hinna med, bör man också låta eleverna konstruera triangeln med passare och linjal.

Om man i 9b betecknar den minsta vinkeln med $4x°$, blir den motstående $5x°$, varefter satsen om motstående vinklar i en inskriven fyrhörning ger ekvationen

$$4x + 5x = 180.$$

Vinklarna blir alltså i ordning 80°, 120°, 100° och 60°. Denna gång kan det vara lämpligt att låta eleverna konstruera figuren med hjälp av passare och gradskiva.

## Avdelning 5

1. Angiv några mått med två namn.

2. a) $5\frac{1}{[illegible]} - \frac{1}{5} \cdot 20$, b) $17\frac{5}{6} - \frac{5}{6} \cdot 12$, c) $2\frac{1}{[illegible]} - \frac{1}{[illegible]} \cdot 6$,

[illegible]

[illegible]

3. a) $\dfrac{2\ \text{Mg} : 4\ \text{hg} + 4\ \text{kp} : 5\ \text{dp}}{8\,\dfrac{\text{km}}{\text{tim}} : 2\,\dfrac{\text{m}}{\text{sek}}}$

b) $\dfrac{8\ \text{Mp} : 10\ \text{kp} - 4\ \text{kr} : 5\ \text{öre}}{4\ \text{m}^2 : 5\ \text{cm}^2 - 2\ \text{hl} : 5\ \text{cl}}$

4. a) Uppdela i faktorer: $4x^2 - 9a^2$, $16x^2 + 8xy + y^2$ $0{,}81\,m^3 + 1{,}21\,mn^2 - 1{,}98m^2n$, $2a^2 - 3b^2$.

b) Fullborda den påbörjade kvadraten: $4x^2 - 12bx$ $0{,}04m^2 + b^2$, $0{,}81x^2 - 0{,}24xy$.

c) Förkorta $\dfrac{0{,}09x^2 - y^2}{0{,}12x^2 + 0{,}4xy}$, $\dfrac{16\,m^3 + 24\,m^2n + 9\,mn^2}{16m^2n - 9n^3}$ [illegible]

5. Lös ekvationssystemet

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x - 2y = 11. \end{cases}$

b) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{4}{x} + \dfrac{y}{3} \text{ [illegible]} \\ \dfrac{8}{x} \quad \dfrac{y}{2} \text{ [illegible]} \end{array} \right.$

c) Är $x$ [illegible] 2 rot till ekvationen

$$\frac{[illegible]}{x + 3} + \frac{[illegible]}{4 \quad 2x} \ [illegible] \ \frac{[illegible]}{2x} \quad 0\,?$$

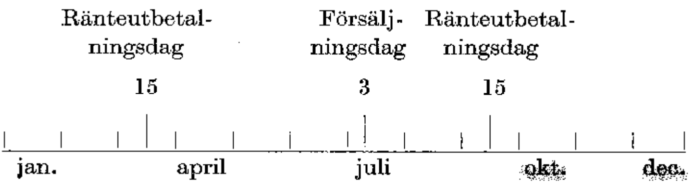
d) Är $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ett rotsystem till ekvationssystemet

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{[illegible]\ 1}{x + 1} + \dfrac{y + 2}{y - 2} = \dfrac{[illegible]}{[illegible]} - 2 \\ \dfrac{2 - x}{[illegible]} \quad \dfrac{y^2 - 1}{[illegible]} \quad \dfrac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible] \end{array} \right.$$

Om så ej är fallet, ändra den sista tvåan, så, att
$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ satisfierar systemet.

6. a) Avkorta 1,239899 till först 6 siffror, sedan 5 och slutligen 4 siffror.
   b) Bestäm genom prövning $\sqrt{7}$ med 2 decimaler.
   c) Bestäm med tabell $\sqrt{9,27}$, $\sqrt{2\ 345}$.
   d) Bortskaffa rotmärkena ur nämnaren till $\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.
   e) Är $\sqrt{2}$ rot till ekvationen
$$\frac{3x}{x+1} + \frac{x}{3 - x^3} = x^4 - x^2 - 2\ ?$$
   f) Lös ekvationen $x\sqrt{2} + 2 = x\sqrt{3}$.

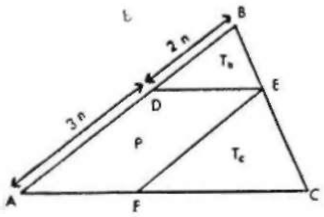
7. a) Vilken är tankegången vid behandlingen av följande uppgift? En köpman i Göteborg har inköpt ett parti apelsiner från Messina och skall därför betala 882 lire. Han kan sända likvid antingen över Hamburg, där noteringen är 100 lire = 80,80 Mark, 100 kr = 112 Mark; eller över London, där noteringen är 1 p. st. = = 25,20 lire = 18,20 kr. Hur stor blir prisskillnaden, uttryckt i svenskt mynt?
   b) Sätt text till följande uppgift om obligationer:

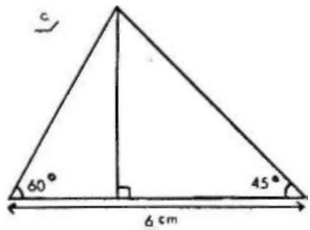



Nominellt värde = 1000 kr.
Kurs = 98 %.
Nominell procent = 5.
Mäklarearvode = 2 $^0/_{00}$ av kursvärdet.

8. a) Vad menas med **skala, längdskala, ytskala och rymdskala?**

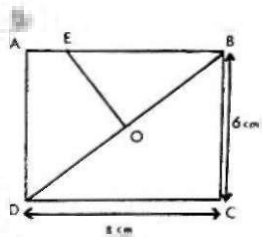
b) *Konstruera* med passare och linjal en figur som fig. b nedan. Om $DE \parallel AC$ och $EF \parallel AB$, **hur stor** del av $\triangle ABC$ är pgrmen $P$?

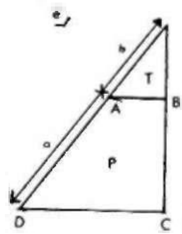



c) *Konstruera* ovanstående figur i lämplig skala. Sök sedan yta och omkrets.

d) **I vilket förhållande delar mittpunktsnormalen till** rektangelns diagonal $BD$ sidan $AB$?



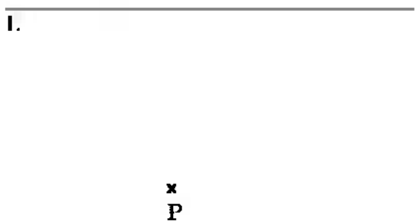




e) $AB \parallel CD$. Sök förhållandet mellan ytan av parallelltrapetset $P$ och ytan av triangeln $T$.

9. a) Tala om, vad en parallellogram är, **och redogör** för **några satser om parallellogrammen.**

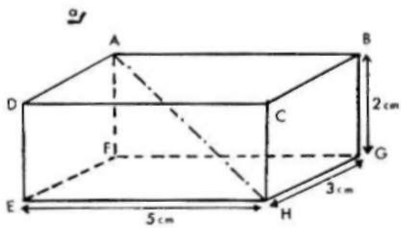
b) Rita en cirkel och inskriv sedan i den en triangel, **där** två vinklar **är** 80° och 40° resp.

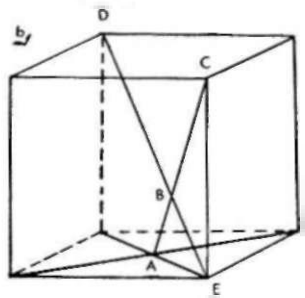
c) Rita med hjälp av gradskiva och linjal en femhörning, i vilken fyra på varandra följande vinklar är 80°, 120°, 140° och 160°. Bestäm utan att använda gradskivan den femte vinkeln.




Drag genom $P$ en rät linje, som med den räta linjen $L$ bildar en vinkel av 45°.

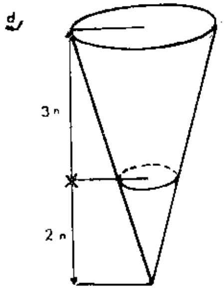
10. a) Vidstående figur är en rätvinklig parallellepiped. Sök vinkelräta avståndet från punkten $C$ till rymddiagonalen $AH$.




b) Vidstående figur föreställer en kub. Sök $AB : BC$.

c) Rita en fyrsidig pyramid, vars alla kantlinjer är lika långa. Beräkna sedan förhållandet mellan basytan och summan av de fyra sidoytorna.




d) I vilket förhållande delas den raka cirkulära konen av det utritade planet, som är parallellt med bottenytan?

*Kommentar till Avd. 5*

1. Närmaste orsaken till att denna fråga har kommit med, är ett intermezzo vid en muntlig realexamen. Examinanden skulle söka höjden i en triangel med ytan 1 a och höjden 25 m. Vederbörande examinator försäkrade, att eleven hade skrivit Na. Kemistudiernas resultat var färskare än kunskaperna om metersystemet. Men denna sanna berättelse ur livet visar, att man måste försöka, att få någon tid till att repetera metersystemet i avslutningsklassen.

I första hand får man då påminna om att liter = $dm^3$ och milliliter = $cm^3$. (Att tala om skillnaden torde knappast löna sig här.) Att 1 a = 1 $Dm^2$, d. v. s. en kvadrat med sidan 10 m, och 1 ha = 1 $hm^2$, bör också komma med. Sedan beror det på lärarens inställning, om han för att öva de grekiska och latinska ordens betydelse vill ta med t. ex. 1 ton = 1 Mg, 1 dton = 1 hkg, 1 cton = = 1 Dkg, 1 hl = 1 dkubikmeter o. s. v. Det är bäst att vara försiktig, så att man inte skriver 1 $dm^3$, när man menar 1 decikubikmeter.

I ex. 2 är sammanförda några uppgifter, som alla förekommit i den muntliga prövningen i realexamen och blivit oriktigt behandlade på ett eller annat sätt, nämligen:

a) $5\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot 20 = \frac{26}{5} - \frac{101}{5} = \frac{76}{5}$,

b) $17\frac{5}{[illegible]} - \frac{5}{[illegible]} \cdot 12 = 17\frac{5}{6} - 10 = 16\frac{102}{6} - 10$,

c) $2\frac{[illegible]}{3} - \frac{[illegible]}{3} \cdot 6 = 7 - \frac{6}{18} = 36$,

d) $4\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{14}{3} - \frac{12}{[illegible]} = 168 - 24 = 144$,

e) $4\frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot 21$ blev i ett fall lika med $\frac{29}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{144}{7}$ [illegible]

$= - \frac{[illegible]}{7}$, och i ett annat fall först $4\frac{1}{7} - \frac{[illegible]}{7} \cdot 21 = 28$ och

sedan $\frac{29}{[illegible]} - \frac{1}{[illegible]} = \frac{28 \cdot 21}{[illegible]} = 84$,

[illegible]

h) $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{15}{20} : \frac{16}{20}$, i) $\frac{0{,}0016}{0{,}008} = \frac{0{,}002}{0{,}001} = 0{,}002$,

k) $\dfrac{3\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4}{\frac{1}{[illegible]}\ [illegible]\ \frac{1}{[illegible]}} = \frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$.

Att ta reda på vilka fel som här begåtts, överlämnas åt läsaren. Man kan lätt se, att det överallt brutits mot den enkla regeln, att man bör se efter, att resultatet är rimligt och att det är möjligt att komma fram till den muntliga prövningen i realexamen, fastän man räknar addition i bråk så, att man helt enkelt lägger ihop täljare med täljare och nämnare med nämnare!

Men det viktigaste resultatet är nog ändå, att man klart inser, att det är nödvändigt att emellanåt repetera bråkläran.

3. Ex. 3 är också övning på metersystemet. Även om någon liten anteckning behövs på tavlan, kan det mesta räknas i huvudet, och en hel del elever kan sättas i verksamhet. Det är meningen, att räkningen skall gå till ungefär så här: Om man skall räkna ut 2 Mg : 4 hg, så är det bäst att förvandla 2 Mg till hg. 2 Mg är i gram uttryckt lika med 2 med 6 nollor efter eller uttryckt i hg 2 med 4 nollor efter. Man får alltså 20000 : 4, d. v. s. 5000.
4. I samband med uppgiften b) kan den lärare, som så önskar, passa på att lösa några enkla andragradsekvationer, vilket lämpligen tillgår på följande sätt:

   Läraren skriver på tavlan t. ex.

$$x^2 + 4x =$$

och låter sedan en elev föreslå ett värde på $x$. Om vi antar, att eleven säger 3, får därefter någon annan i klassen räkna ut, vad som skall stå i högra ledet, för att den påbörjade ekvationen skall få 3 till rot. Man får då ekvationen:

$$x^2 + 4x = 21.$$

Tanken blir: $x^2 + 4x$ är början till ett exempel på kvadratregeln. Första talet är $x$, och dubbla produkten av första och andra talet är $4x$. Då blir enkla produkten $2x$ och andra talet 2. Så ökar vi ekvationens båda led med kvadraten på det andra talet, d. v. s. med 4. Då får vi

$$x^2 + 4x + 4 = 25 \text{ eller}$$
$$(x + 2)^2 = 25, \text{ vilket ger}$$

antingen eller

$$x + 2 = 5 \qquad\qquad x + 2 = -5$$
$$x = 3 \qquad\qquad x = -7.$$

Svar: $x_1 = 3$, $x_2 = -7$.

5. Ifråga om denna uppgift är knappast något annat att säga, än att man kanske behöver göra någon anteckning

på tavlan, t. ex. i uppgift d). Där får man i första ekvationen $\frac{1}{3} + \frac{3}{-1} = -2\frac{2}{3}$ i V.L. I H.L. får man $\frac{1}{3} - 2$.

Man ser, att den sista tvåan bör utbytas mot 3. I andra ekvationens V.L. erhålles 0 och i H.L. $1 - 2$. Tvåan bör således utbytas mot 1.

6. Om vi i Ex. 6b låter eleverna tippa, får vi kanske förslaget, att $\sqrt{7}$ är 2,7. En elev får räkna och finner, att $(2{,}7)^2 = 7{,}29$. Så föreslår en annan, att vi skall försöka med 2,65, och en tredje finner vid räkning, att $(2{,}65)^2$ är 7,0225. Då får vi försöka med 2,64 och erhåller vid kvadrering 6,9696. 2,65 är tydligen närmast.

7. Uppgiften 7a kan naturligtvis inte räknas i huvudet. Den har tagits med, därför att ingen uppgift av detta slag (som ju förr i världen brukade behandlas med hjälp av s. k. kedjeräkning) kommit med på annat håll.

Med hjälp av reguladetri får man:

$$100 \text{ lire} = 80{,}80 \text{ mark} \qquad 112 \text{ mark} = 100 \text{ kr}$$

$$1 \text{ lire} = 0{,}8080 \text{ mark} \qquad 1 \text{ mark} = \frac{100}{112} \text{ kr}$$

$$1 \text{ lire} = 0{,}808 \text{ mark} = \frac{0{,}808 \cdot 100}{112} \text{ kr och}$$

$$882 \text{ lire} = \frac{882 \cdot 0{,}808 \cdot 100}{112} \text{ kr} = 636{,}30 \text{ kr.}$$

$$25{,}20 \text{ lire} = 18{,}20 \text{ kr, varav } 1 \text{ lire} = \frac{1820}{2520} \text{ kr och}$$

$$882 \text{ lire} = \frac{882 \cdot 182}{252} \text{ kr} = 637{,}00 \text{ kr.}$$

Skillnaden blev alltså 70 öre.

7. Texten i Ex. 7b skulle kunna bli så här: En person köper (säljer) den 3 juli en obligation med nominellt

värde 1000 kr och med ränteterminer den 15 mars och den 15 september efter en kurs av 98 %. Hur mycket skall han betala (erhåller han vid försäljningen), om mäklaren räknar kurtage efter 2 promille av kursvärdet?

8 a. Att längdskala är förhållandet mellan en sträcka på kartan och motsvarande sträcka i verkligheten, ytskala är förhållandet mellan en yta på avbildningen och motsvarande yta i verkligheten och rymdskala förhållandet mellan en viss volym på avbildningen och motsvarande volym i verkligheten, behöver ofta upprepas.

b. Har man läst satsen om ytskalan, får man omedelbart, att $T_b$ är $\frac{4}{25}$ och $T_c$ $\frac{9}{25}$ av hela triangeln och båda tillsammans $\frac{13}{25}$ därav.

För parallellogrammen återstår alltså $\frac{12}{25}$ av triangeln.

Har man inte läst denna sats, kan man komma fram med hjälp av satsen om trianglar med lika höjder.

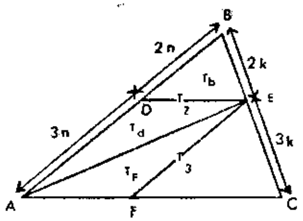


Fig. 123.

Denna sats ger enligt figuren $T_d = \frac{3}{5}$ av $T_2$ och $T_2 = \frac{2}{5}$ av $T$ (hela triangeln). Alltså är $T_d = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ av $T$. Då blir $P = \frac{12}{25}\,T$.

Det går också bra att komma fram genom att dra lämpliga höjder.

Om man har ritat figuren (Fig. 124), så kan man lätt räkna fortsättningen i huvudet. $P = 2l \cdot 3h = 6 \cdot hl.$

$$T = \frac{5l \cdot 5h}{2} \text{ och } \frac{P}{T} = \frac{6 \cdot lh \cdot 2}{25 \cdot lh} = \frac{12}{25}.$$

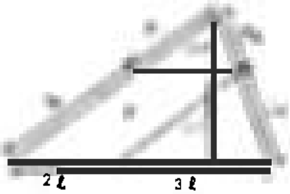


Fig. 124.

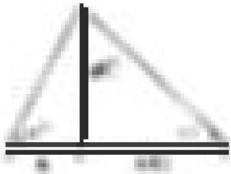


Fig. 125.

**I c) får man med beteckningarna i fig. 125.**

$x(\sqrt{3} + 1) = 6$, varav $x = 3(\sqrt{3} - 1)$. Ytan blir

$$\frac{x\sqrt{3} \cdot x(\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2(\sqrt{3} - 1) = 9(3 - \sqrt{3}).$$

d. Eftersom trianglarna är egyptiska, kan man lämpligen använda beteckningarna i figuren. Man får då omedelbart: $8x = 10$ ($BD = 10$ cm), och $x = 1{,}25$. $BE$ blir alltså 6,25 cm och $AE$ 1,75 cm. Det sökta förhållandet $AE : EB$ blir 7 : 25.

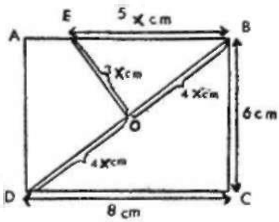




Fig. 126.

**I e) får man med transversalsatsen** $\frac{P + T}{T} = \frac{(a + b)^2}{b^2}$,

$\frac{P}{T} + 1 = \frac{a^2 + 2ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}$ vilket ger $\frac{P}{T} = \frac{a^2 + 2ab}{b^2}$.

9. a) *Definitionen* på parallellogram tycks höra till de saker, som man kan fråga på nästan hur många gånger som helst utan att lyckas lära bort, att den ligger i första delen av ordet och att således motstående sidor måste vara parallella.

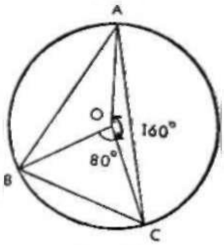



Fig. 127.

b) Om man drar tre radier, som med varandra bildar 80° och 160° (och 120°), och sammanbinder deras ändpunkter, får man den sökta triangeln Med hjälp av satsen, att en medelpunktsvinkel är dubbelt så stor som en periferivinkel på samma båge, bevisas konstruktionens riktighet.

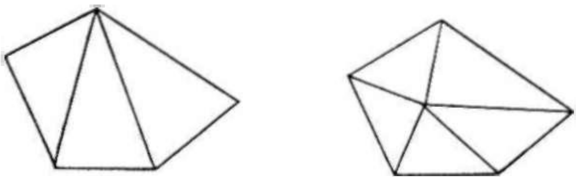


Fig. 128.

I c) repeteras användningen av gradskivan men också, hur man kan finna vinkelsumman i en godtycklig konvex månghörning. Man indelar månghörningen i trianglar, antingen genom att dra diagonaler från ett hörn eller genom att från en godtycklig punkt inom månghörningen dra räta linjer till alla vinkelspetsarna. Om sidoantalet är $n$, får man i första fallet $(n - 2)$ trianglar och således vinkelsumman $(n - 2) \cdot 180°$ och i andra fallet $n$ trianglar med vinkelsumman $n \cdot 180°$, vilket man dock måste minska med summan av de vinklar, som stöter samman vid den godtyckligt valda punkten, d. v. s. 360°.


Fig. 129.

10. a) Om man ritar diagonalsnittet $ACHF$, får man omedelbart med Pythagoras' sats, att $AC = \sqrt{34}$ och $AH$ $\sqrt{38}$. Eftersom dubbla triangelytan

kan fås på två sätt, erhåller man lätt den lilla ekvationen $2\sqrt{34} = \sqrt{38} \cdot CK$, som är den sökta sträckan. Därav fås $CK = \frac{2\sqrt{34}}{\sqrt{38}}$

b) I det ritade diagonalsnittet får man två trianglar $BCD$ och $BAE$. Emedan $AE$ är hälften av $CD$ och parallell med $CD$, är $\triangle\ BAE$ en avbildning av $\triangle\ BCD$ i skalan $1 : 2$.
Därav följer, att $AB : BC = 1 : 2$.

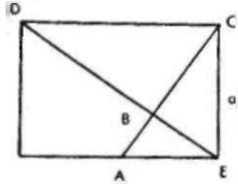



Fig. 130.

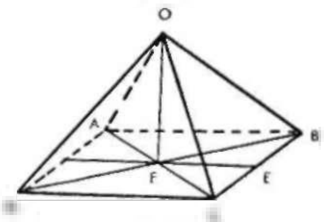



Fig. 131.

c) En sådan figur ger övning på mycket, både ifråga om ritning och räkning. För att svara på den framställda frågan kan man ju lägga märke till att det sökta förhållandet är lika med förhållandet mellan trianglarna $FBC$ och $OBC$, vilka ha den gemensamma basen $BC$ och således förhåller sig som $EF$ till $EO$, d. v. s. som $1 : \sqrt{3}$.

d) Satsen om volymskalan ger, att toppkonen förhåller sig till hela konen som $8 : 125$ och således toppkonen till den stympade konen som $8 : 117$.

## OM ÖVERSLAGSBERÄKNING OCH NÄRMEVÄRDESRÄKNING

Det första eleverna skall göra, när de fått en uppgift att behandla, det är att se efter, om de kan upptäcka något särskilt med den. Om vi t. ex. tar

$$2\frac{15}{20} + 1\frac{3}{12} + \frac{21}{28} + 2\frac{13}{52},$$

så kan det hända, att någon sätter igång med att göra alla termerna till oegentliga bråk och sedan söka minsta gemensamma dividenden till 20, 12, 28 och 52. Den som vant sig att se sig för, har kanske ändå större möjlighet att komma ihåg, att man tar "de hela" för sig och bråken för sig, och dessutom lättare att märka det, som man här i första hand skulle se upp med, nämligen att man kan förkorta alla fyra bråken, så att man får [illegible]

I huvudräkningens fjärde avdelning behandlades uppgiften $5\frac{3}{7} + 4\frac{2}{[illegible]} + 2\frac{5}{[illegible]} + 1\frac{9}{14}$, och därvid påpekades nyttan av att vänja sig vid att från början göra ett överslag, så att man på ett ungefär vet, vad resultatet skall bli, och inte nöjer sig med det felaktiga värdet 612 som i det anförda exemplet.

Ytterligare ett exempel på vikten av att man ser upp och gör överslag må lämnas. Felet, som förekommer här, är så vanligt, att det väl kännes igen av en och var.

En person, vilken den 27 februari satt in en summa pengar i en bank, som ger ränta efter 4 %, har den 21 juli att fordra 254 kr. Hur stort kapital satte han in?

En vanlig behandling är denna:

Antag, att han satte in $x$ kr.
Kapital i kronor $= x$.
Räntefot $= 4$.
Tid i dagar $= 3 + 120 + 21 = 144$.

Ränta i kronor $= \dfrac{4 \cdot x \cdot 144}{100 \cdot 360} = \dfrac{4 \cdot x \cdot 4}{100 \cdot 10}$

Tillgodohavande i kronor $= 254$.

**Ekvation:** $\dfrac{16x}{1000} = 254$

$x = \dfrac{254\,000}{16} = 15\,875.$

Svar: Han satte in 15 875 kr.

Den minsta eftertanke visar orimligheten i svaret. Hade man börjat behandlingen med att fråga: Hur mycket kunde det vara, som han satte in?, så hade väl utan undantag svaret blivit, att det måste vara så där ungefär 250 kr, vilket ju också är det riktiga svaret.

Ett annat slag av överslagsräkning, som med fördel kan användas vid huvudräkningsövningar, må belysas med några exempel:

$396 \cdot 48$ kan räknas på många sätt. Man kan ta $400 \cdot 48 - 192 = 19\,200 - 192 = 19\,008$. Men mera tilltalande är att säga så här: Om jag ökar första faktorn till 400, så har jag ökat den med 4 på 400 (mycket nära åtminstone). Då får jag minska andra faktorn med 4 på 400 eller 1 på 100, d. v. s. 1 %. 1 % av 48 är 0,48. Resultatet blir alltså mycket nära $400 \cdot 47{,}52$ eller 19 008, vilket t. o. m. visar sig vara alldeles riktigt.

Man kunde ju också öka andra faktorn 48 till 50. Då har man ökat andra faktorn med 2 på 48, alltså med något mer än 2 på 50 eller 4 på 100. Då måste vi i stället minska första faktorn med något mer än 4 % av 396, låt oss säga 4 % av 400, d. v. s. 16. Vi får då $380 \cdot 50 = 19\,000$. Att resultatet måste sluta på 8 är klart, eftersom $6 \cdot 8 = 48$, men om man nu skall lägga till 8 eller dra ifrån 2, är kanske inte så lätt att säga. Skulle man syssla med frågan, då konjugatregeln behandlats, kan en viss ledning erhållas.

Om vi skall multiplicera $a$ med $b$ men i stället utför räkningen med $\left(a - \frac{p}{100}\,a\right)$ och $\left(b + \frac{p}{100}\,b\right)$, får man inte $ab$ utan $ab\left(1 - \frac{p^2}{10\,000}\right)$, alltså alltid litet för litet. Det skulle därför ligga närmast till hands att lägga till 8.

Om man möjligen tagit upp frågan i näst sista eller sista realskoleklassen och vid räkningen fått 19000, kan man fortsätta och fråga: Hur stort fel fick vi? Det kunde vara en viss fördel, om man på ett jämförelsevis tidigt stadium kunde få med begreppen absolut fel och relativt fel. Att *absoluta felet* är 8 är ju lätt att inse, och inte är det så mycket svårare att förstå frågan: Hur många procent av 19000 är 8? Svaret på den frågan blir, vad man kallar *relativa felet*. — Här får inpassas ett litet resonemang om att en felräkning på 1 öre på en totalsumma av 1 kr betyder mera, än om man räknar fel på 1 öre på 1 000 kr, att en felräkning på 1 öre på 1 kr är av samma storleksordning som 10 kr på 1 000 kr, eller något liknande.

I vårt fall får vi det relativa felet $\frac{800}{19\,000}$ % (det är nog lättast att alltid använda procent), d. v. s. $\frac{8}{190}$ %. Ökar vi nu nämnaren med 10 på (ungefär) 200, d. v. s. 5 %, så får vi öka täljaren med 0,4 eller något mera, och vi får $\frac{8{,}4}{200}$ % $=$ $= 0{,}042$ %.

När man sysslar med uppgifter av detta slag, är det naturligtvis lämpligt att välja tal i närheten av jämna hundratal eller 250 eller 333 eller 125, som är resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{8}$ av 1000 och liknande. Ibland kan ju räkningarna bli långa, men det blir ändå god övning i huvudräkning. Låt oss ta ytterligare ett exempel i multiplikation.

Om man i $123 \cdot 212$ vill öka 123 till 125, har man ökat med 20 tiondelar på 5 st 25:or, alltså med 4 tiondelar på 25 och 1,6 på hundra. Då bör vi minska 212 med 1,6 % d. v. s. $2{,}12 + 1{,}06 + 0{,}21 = 3{,}39$. Vi får $125 \cdot 208{,}61 = \frac{208610}{8} =$ $= 26076{,}—$. Räknar man "för hand", får man 26076.

Vid beräkning av relativa felet i en föregående uppgift kom vi in på räknesättet division, som i detta sammanhang kanske är ändå roligare än multiplikation. Vi tar först några inverterade värden.

Ex. 1. $\frac{1}{327} \approx \frac{1{,}018}{333} \approx \frac{3{,}054}{1000} = 0{,}003054.$

(Tabellvärde 0,003058.) Om jag i nämnaren ökar med 6 på ett tredjedels tusental eller 18 på 1000, så måste täljaren ökas med 0,018.

Ex. 2. $\frac{1}{412} \approx \frac{0{,}97}{400} = 0{,}002425 \approx 0{,}00243.$

Om nämnaren minskas med 12 på 400 eller 3 på 100, så måste täljaren minskas med 0,03 till 0,97.

Ex. 3. $\frac{1}{729} \approx \frac{1{,}028}{750} \approx \frac{0{,}343}{250} = \frac{1{,}372}{1000} = 0{,}001372.$

Om man samtidigt låter en elev räkna divisionen "för hand", blir klassen säkert förvånad över noggrannheten i resultatet.

Uppgifter, där man med fördel kan arbeta på detta sätt, träffar man på jämt och ständigt. Ett par exempel från en lärobok i fysik.

$$\text{Ex. 1.}\quad \frac{x}{1{,}018} = \frac{987}{673} \approx \frac{987 - 0{,}9\ \%\ \text{av}\ 987}{667} \approx \frac{1467}{1000}.$$

När man har minskat 673 till 667, så har man minskat med 6 på 667 eller 3 på 333 eller 9 på 1000. 987 är så nära 1000, att man tydligen kan minska 987 med 9 och få $\frac{978}{667}$.

Vidare är $x = 1{,}018 \cdot 1{,}467 = 1{,}00 \cdot (1{,}467 + 0{,}026) = 1{,}493$.

0,018 är 1,8 % av 1,000 och 1,8 % av 1,467 = 2 % av 1,467 — 0,2 % av 1,467 = 0,029 — 0,003 = 0,026.

Kontrollräkning ger 1,493 med ett fel på 0,003, om de givna sifferuppgifterna är på vanligt sätt avkortade närmevärden.

$$\text{Ex. 2.}\quad i = \frac{36}{86} = \frac{18}{43} \approx \frac{18 - 7\ \%\ \text{av}\ 18}{40} = \frac{18 - 1{,}26}{40} =$$
$$= \frac{16{,}74}{40} = \frac{1{,}674}{4} = 0{,}418 \approx 0{,}42.$$

I nämnaren minskar man med lite mindre än "3 på 40" eller 1,5 på 20 eller 7,5 på 100, låt oss säga 7 %. 7 % av 18 = 1,26.

## Om felberäkningar

*Täthet* är ett av de första begrepp, som eleverna får bekanta sig med i fysikundervisningen. Redan tidigt träffar de där på uppgifter i stil med följande. Vad är oljas täthet, om 0,3 liter väger 270 g?

Detta begrepp är så viktigt, att man kan ha goda skäl till att ta upp frågan i matematiken vid något senare tillfälle och diskutera vårt problem lite närmare, *om tiden tillåter det.*

Där är många frågor, som behöver besvaras: Hur har man mätt upp 0,3 l olja, och vad för sorts våg har man använt? Mätglas, i vilka man kan mäta upp 300 $cm^3$, är ganska vida. Det är inte lätt att läsa av noggrant. Skall man till äventyrs använda en fjädervåg för att ta reda på vikten (tyngden), måste man kanske hälla oljan i något kärl med grepe. Då stannar alltid något olja kvar i mätglaset, och vi får möjligen räkna med ett fel på 5 $cm^3$. På fjädervågen måste vi göra två avläsningar, och vi måste få ett ganska stort fel. Eftersom vi antog felet i volymen vara så stort som 5 $cm^3$, kan vi här nöja oss med ett fel på t. ex. 0,5 g. Om vi betecknar det största värdet på tätheten med $s_{max}$, det största värdet på absoluta vikten med $a_{max}$ och det minsta värdet på volymen med $v_{min}$, får vi

$$s_{max} = \frac{a_{max}}{v_{min}} = \frac{270,5}{295}\ g/cm^3$$

och på liknande sätt

$$s_{min} = \frac{a_{min}}{v_{max}} = \frac{269,5}{305}\ g/cm^3$$

Räknar vi ut $s_{max}$ "för hand", får vi 0,917. Med hjälp av vår nyss använda närmemetod, får vi, om vi ökar nämnaren med 5 till 300, d. v. s. med 5 på 300 eller $\frac{5}{3}$ %, att vi måste öka täljaren med $5 \cdot 0,9 = 4,5$. Så får vi:

$$s_{max} \text{ i g/cm}^3 \approx \frac{270,5 + 4,5}{300} = \frac{275}{300} = 0,917.$$

På samma sätt får vi

$$s_{min} \text{ i g/cm}^3 \approx \frac{269,5 - 4,5}{300} = \frac{265}{300} = 0,883.$$

Det är klart, att det värde på tätheten, som man erhåller ur kvoten $\frac{270}{300}$ g/$cm^3$ = 0,900 g/$cm^3$, måste vara medelvärdet av $s_{max}$ och $s_{min}$. Med våra felantaganden får vi som svar, att tätheten för oljan i $cm^3$ är $0,900 \pm 0,017$.

Nu kunde det vara av intresse att undersöka, hur mycket ändringen i täljaren från 270 till 270,5 eller 269,5 inverkar på resultatet.

Ändringen i tätheten blir $\frac{0{,}5}{\text{[illegible]}} = \frac{0.005}{\text{[illegible]}} = 0{,}0017$ och räknad i procent av tätheten $\frac{0{,}17}{0{,}90} \approx 0{,}19$.

Felet i volymen ger ett fel i resultatet, som är $0{,}90 -$ $- \frac{\text{[illegible]}}{305} \approx 0{,}90 - \frac{\text{[illegible]}}{300} = 0{,}900 - 0{,}885 = 0{,}015$ eller i procent av tätheten $0{,}900\ g/\text{cm}^3 = \frac{1.5}{\text{[illegible]}} = \frac{5}{\text{[illegible]}} = 1{,}67$. När vi räknade med fel både i vikt och volym, fick vi ett fel i resultatet på $0{,}0167$, vilket ger ett relativt fel av $\frac{1{,}67}{0.9}\ \% = 1{,}86\ \%$.

Av våra resultat kan vi dra två viktiga slutsatser.

Dels ser vi, att felet på en femma i fjärde siffran i täljaren inverkar mycket mindre på resultatet än felet på 5 i tredje siffran i nämnaren, dels ser vi att det relativa felet i resultatet är lika med summan av de relativa felen i täljaren och nämnaren.

Om vi vill lämna svaret utan att ange felgränser, måste vi svara med $0{,}9$, då vi endast vet, att tätheten ligger mellan $0{,}917\ g/\text{cm}^3$ och $0{,}883\ g/\text{cm}^3$, vilka båda ju måste avkortas till $0{,}9\ g/\text{cm}^3$.

Det kan vara intressant att undersöka, hur stort fel vi kan tillåta i täljaren, innan felet blir så stort, att resultatet inte kan avkortas till $0{,}9$. I så fall kan absoluta felet i resultatet uppgå till $0{,}05$, vilket är $5{,}5\ \%$ av $0{,}9$. Eftersom relativa felet i nämnaren är $1{,}7$, kan vi i täljaren tillåta ett relativt fel på $3{,}8\ \%$ och alltså ett absolut fel på $\frac{3{,}8 \cdot 270}{100}\ \text{g} \approx 10\ \text{g}$.

Maximivärdet på tätheten blir då $\frac{280}{\text{[illegible]}} = 0{,}95$ eller avkortat $0{,}9$. Vi kan se, att om vi bestämmer volymen med hjälp av ett mätglas, är det ingen anledning att sitta och plocka med småvikter vid vägning på en balansvåg.

En eller annan kan möjligen finna nöje i att välja uppgifter av detta slag för sina huvudräkningsövningar till fromma i varje fall för de elever, som ämnar fortsätta i gymnasiet. Men även vid arbete med kvadratrötter och sådana uppgifter, där $\pi$ kommer in, kan man få nytta av sådan övning. Det bör ju vara så (åtminstone i studentex.), att antalet decimaler i de utförda räkningarna liksom i resultaten bör rätta sig efter uppgiftens beskaffenhet och de använda numeriska hjälptabellerna, inte vara för litet men inte heller för stort.

Den lärare, som eventuellt försöker få tid att arbeta på detta område, behöver inte söka efter uppgifter. Man får dem till skänks vid räkning med approximativa tal. Man bör nog då först — genom sifferexempel — visa, att vid multiplikation och division det relativa felet i resultatet är lika med summan av de relativa felen i den tecknade räkningens olika delar, alltså vid en produkt summan av de relativa felen i faktorerna, så att man kan använda denna sats vid arbetet.

Ett enda exempel: Hur många siffror kan vi ta med i resultatet, om vi vid uträkning av $\pi \cdot \sqrt{8}$ räknar med 3 siffror i båda faktorerna?

I 3,14 är absoluta felet 0,005 och relativa felet 5 på 3140 eller ungefär $\dfrac{\frac{5}{3}}{1000}$, d. v. s. $1\frac{2}{3}$ ‰.

I $\sqrt{8} \approx 2{,}83$ är abs. felet 0,005 och relativa felet $\dfrac{5}{2830} \approx$ $\approx \dfrac{5}{3000}$ eller $1\frac{2}{3}$ ‰.

Produkten $3{,}14 \cdot 2{,}83 \approx 3 \cdot \left(2{,}83 + \dfrac{14}{300} \cdot 2{,}83\right) \approx 3(2{,}83 + 0{,}13) = 3 \cdot 2{,}96 = 8{,}88$.

Relativa felet i produkten blir $\left(1\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3}\right)$ ‰ och alltså absoluta felet i resultatet 3,3 ‰ av 8,88 eller ungefär $\frac{3{,}3 \cdot 9}{1000} = \frac{29{,}7}{1000} \approx 0{,}03$.

Resultatet blir $8{,}88 \pm 0{,}03$, och vi kan inte svara med mer än två siffror, alltså 8,9.

Hur skulle svaret bli, om vi tog med en siffra till i endera faktorn? Jo, då blir relativa felet i denna faktor endast 1,67 : 10 promille, alltså 0,00017, och totala relativa felet i produkten 1,84 ‰, som för säkerhets skull avkortas till 1,9 ‰. Absoluta felet blir ungefär $9 \cdot 0{,}002$ eller 0,02 med två decimaler. Vi måste i alla fall svara med 8,9.

Innan vi lämnar kapitlet om felräkning, låt oss ta en **uppgift av ett slag, som ofta förekommer i värmeläran:** Hur mycket vatten av + 40° ($t_1$°) skall blandas med 100 g ($a$ g) vatten av 10° ($t_3$°) för att blandningstemperaturen skall bli 30° ($t_2$°)?

Om vi betecknar den sökta vattenvikten i gram med $x$, får vi ekvationen

$$x(t_1 - t_2) = a(t_2 - t_3), \text{ varav } \quad x = \frac{a(t_2 - t_3)}{t_1 - t_2}$$

eller med värdena insatta $x = 200$.

Om vi räknar med ett fel på 1 g i vikten och 0,5° i temperaturavläsningarna, får vi ett relativt fel i $a$ på 1 %, i $(t_2 - t_3)$ på 5 % och i $(t_1 - t_2)$ på 10 % och i $x$ ett relativt fel på 16 % och ett absolut fel på 32 g.

Har man gjort ett sådant försök och inte fått det väntade resultatet, kan det vara av värde att visa eleverna, att det kan finnas förklaring. Men man behöver ju inte fördenskull tala om relativt fel. Vi kan skriva

$$x_{max} = \frac{a_{max}(t_{2\,max} - t_{3\,min})^1}{t_{1\,min} - t_{2\,max}} = \frac{101 \cdot 21}{9} = \frac{101 \cdot 7}{3} = \frac{707}{3} \approx 236$$

Vi kan alltså vänta oss, att vårt resultat skall ligga mellan 164 g och 236 g.

[1] Man måste se upp, så att inte i samma uttryck t. ex. både $t_{2\,min}$ och $t_{2\,max}$ kommer med.

## NÅGRA TANKAR OM UNDERVISNINGS-ARBETET I ALLMÄNHET

*Planera* för terminen, före nästa provräkning, för morgondagen! (Jfr Met. anv. f. realsk. II mom. 1 andra stycket och för gymn. II mom. 2, de två sista meningarna.) För anteckningar och samla dessa pedagogiska funderingar i ett häfte för varje klass! Innehållet i läroböcker och exempelsamlingar skall sovras (Met. anv. II mom. 3). För in resultatet och räkna ”svårare” uppgifter med flera räkningar! Det är bra att ha delräkningar tillgängliga vid läxförhör. Har man liten och fin stil, kan dessa anteckningar göras i marginalen i läroboken eller exempelsamlingen. Skriv där också upp hur lång tid en genomsnittselev kan tänkas behöva för att behandla uppgiften! Vid förberedelsen för nästa lektion, tänk också efter (så ofta det är möjligt), vilka uppgifter som skall ges i läxa till följande lektion! Om läxa måste bestämmas under lektion, gör det i god tid och använd ovan omtalade tidsuppgifter, så att hemuppgiften får något så när normal omfattning. Förbruka vid läxgivning inte alla uppgifter på ett område på en gång! Sprid ut några över återstående del av läsåret! Under de flesta lektioner skall redan genomgångna avsnitt repeteras och nya moment förberedas genom huvudräkning. Att komponera eller samla lämpliga uppgifter ingår i den dagliga förberedelsen. — Ge läxor av rimlig omfattning! Det är bättre, att eleverna utför en kort läxa väl än en lång läxa dåligt.

*Kontrollera* elevernas hemarbete (Met. anv. IV)! Den dagliga kontrollen, att arbetet utförts snyggt och ordentligt (Met. anv. II mom. 18) kan ske så, att eleverna får lägga upp sina hemräkneböcker på bänkarna, under det att hemläxan (besvärliga delar) behandlas på tavlan. På några minuter kan läraren vandra genom klassen och utföra kontrollen.

Några regler för elevernas arbete:

1. Kontrollera räkningarna lite då och då under arbetets gång! Det är bättre än att bli tvungen att göra om alltihop.
2. Forma siffror och bokstäver ordentligt!
3. Skriv ordentliga tecken! Om ett bråk skall skrivas efter ett tecken, skriv först bråkstrecket mittför tecknet och därefter täljare och nämnare!
4. Stryk över så lite som möjligt! Inga förkortningspyramider!
5. Gör inga ändringar i den ursprungliga ekvationen i en uppgift!
6. Skriv antagande på vårdad svenska! Antag, att . . . eller Antagande: eller Beteckna den sökta storheten med $x$ eller liknande!
7. Lämna alltid motiveringar (t. ex. till uppställda ekvationer)!
8. Skriv ut alla räkningar, som inte kan utföras i huvudet, i boken och inte på lappar!
9. Formulera svaret tydligt!
10. Rita stora (med måtta), tydliga figurer i enlighet med uppgifterna i problemet!

*Provräkningar* bör (om möjligt) icke anordnas på kortare tid än två timmar. Jfr Met. anv. för gymnasiet II mom. 6 andra stycket. Yttrandet där, att många elever, även sådana med goda anlag för matematik, arbetar långsamt och har svårt att göra sig gällande på korta skrivningar, gäller säkert även för lärjungarna i realskolan och enhetsskolan.

Komponera lite då och då själv uppgifterna till provräkningarna! Om inte inspirationen vill komma, kan man alltid variera sifferuppgifterna i andra författares problem. Spara resultatet av detta arbete i den bok, där annat förberedelsearbete införes, på kort eller på annat sätt! I stället för kort kan man med fördel använda skriv- eller räkneboksblad, som delas på mitten. Skriv vid varje uppgift, om det är egen tillverkning, i annat fall var den hämtats! Dessa uppgifter — med lösningar — kommer säkert till nytta i framtiden.

Om provräkningens sammansättning talas i Met. anv. IV mom. 3. Vanligt är, att man ger 8 eller 10 uppgifter och fordrar 3 resp. 4 för B. Men då måste svårighetsgraden vara sådan, att t. ex. de 6 första uppgifterna av 8 verkligen svarar mot ett AB och de två sista uppgifterna är nötter, som endast några av de duktigare eleverna kan knäcka.

God framställning på svenska måste alltid eftersträvas. Man kan ta som regel, att text alltid måste skrivas vid s. k. benämnda tal, d. v. s. uppgifter med text. I klass 5 får man kanske nöja sig med två eller tre ord, men fordringarna måste ökas klass för klass.

I realexamensskrivningarna vt 52 gavs följande uppgift: En bil körde halva avståndet mellan två städer på 1 tim 15 min med en jämn hastighet av 40 km/tim. Den andra hälften körde den likaledes med jämn hastighet, men farten på denna sträcka var endast 20 km/tim. Med hur många minuter skulle körtiden mellan de båda städerna ha minskats, om bilen hela vägen hållit en jämn hastighet av 30 km/tim?

Några behandlingar må anföras:

1. $1\frac{1}{4} + 2 \cdot 1\frac{1}{4} - \frac{1\frac{1}{4} \cdot 40 \cdot 2}{30} = 3\frac{3}{4} - \frac{10}{3} = 3\frac{3}{4} - 3\frac{1}{3}$

$= \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}.$

$\frac{5}{12}$ tim = 25 min. Svar: 25 min.

2. Om bilen går 40 km på 1 tim, så går den på en kvarts timme 10 km och hela vägen är 100 km.

Kl. 0 — kl. $1\frac{1}{4}$ tim — kl. $3\frac{3}{4}$ tim

100 km

kl. 0 — tid $= \frac{100}{30}$ tim — kl. $3\frac{1}{3}$ tim

100 km

Tidsskillnaden blir 3 tim 45 min — 3 tim 20 min = 25 min.

Svar: Körtiden hade minskats med 25 min.

3. Eftersom bilen i första fallet går med en hastighet av 40 km/tim, är halva vägen $1\frac{1}{4} \cdot 40$ km = 50 km, och hela vägen 100 km.

Tiden i första fallet blir $3 \cdot 1$ tim 15 min = 3 tim 45 min.

Tiden i andra fallet blir $\frac{100}{30}$ tim $= 3\frac{1}{3}$ tim = 3 tim 20 min.

Alltså minskas körtiden med 25 min.

Svar: Körtiden minskas med 25 min.

Vid lösningen 1 har man brutit emot föreskrifterna 7 och 9 ovan. Om den överhuvud taget skall tillmätas något värde, måste detta bli mycket ringa. Den som behandlar en uppgift på detta sätt, sparar på mindre lämpligt sätt åtskillig tid, som kan användas till att lösa andra uppgifter, under det att en kamrat kanske med mycken möda försöker att på ”vårdad” svenska skriva ut motiveringar till sina räkningar. Jfr Met. anv. III, I[5] mom. 7: ”Den tanketräning, som man avser att erhålla genom att teckna svaret fullständigt, torde nog i de flesta fall bli illusorisk.”

Vid *rättning* av provräkningarna söker man, så långt tid och krafter räcker, reda på alla fel, gör anteckning (bock eller Obs! eller vad man nu finner lämpligt att skriva) både i elevens arbete och i marginalen och helst också någon positiv ledning. Om man efter följande behandling av nedanstående uppgift

$$\frac{[\text{illegible}]}{5\frac{1}{5}} - \frac{[\text{illegible}]}{1\frac{1}{5} : (0{,}75)^3 + 1 : 1\frac{7}{[\text{illegible}]}} = \frac{\frac{25}{4} \cdot 2 \cdot \frac{25}{[\text{illegible}]} - 2\frac{37}{54}}{4 : \frac{27}{64} + 1 : 1\frac{7}{8}} =$$

$$= \frac{\frac{25}{2} \cdot 2\frac{42}{54} - 1\frac{37}{54}}{\frac{27}{4 \cdot 64} , \frac{15}{8}} = \frac{\frac{25}{2} \cdot \frac{5}{24}}{\frac{27}{256} : \frac{15}{8}} = \frac{125}{27 + 480} = \frac{125}{507}$$

endast skulle skriva ”Ej Nöjaktigt” eller kanske blott en bock vid $\frac{125}{[\text{illegible}]}$ och en bock i kanten, så skulle eleven inte få veta, att

1) han inte får ta $3\frac{1}{2}$ från första termen och minska det med $1\frac{1}{3}$ från andra termen,
2) han inte får anse $5\frac{[\text{illegible}]}{5} - 1\frac{1}{5}$ vara dividend,
3) han inte får ta faktorn $\frac{25}{[\text{illegible}]}$ från första termen och minska den med $2\frac{37}{54}$,
4) division i bråk inte går till på det sättet, att man multiplicerar divisorn med dividendens inverterade värde (Eleven har blandat ihop dividend och divisor),
5) man inte får kasta bort nämnarna, när man gör bråk liknämniga.

Om vid rättning av följande uppgift efter densamma endast skrivits "Nöjaktigt", så kunde ju eleven — och det med all rätt — ha trott, att han räknat rätt.

$$\frac{6\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}\left(3\frac{1}{4} : 1\frac{5}{8} - \frac{2}{3}\right)}{3\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}} = \frac{6\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}\left(\frac{13}{4}\cdot\frac{8}{13} - \frac{2}{3}\right)}{\frac{13}{4}\cdot\frac{3}{2} - \frac{15}{4}\cdot\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{6\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\right)}{\frac{39}{8} - 2\frac{1}{2}} = \frac{6\frac{3}{4} - 3 + 1}{3\frac{7}{8} - 2\frac{1}{2}} = \frac{6\frac{3}{4} - 4}{1\frac{3}{8}} = \frac{2\frac{3}{4}}{1\frac{3}{8}} = 2.$$

Resultatet blev rätt tack vare två räknefel — fjärde ledets nämnare skulle ha varit $4\frac{7}{8} - 2\frac{1}{2}$, femte ledets täljare $6\frac{3}{4} - 2$ och sjätte ledet $4\frac{3}{4} : 2\frac{3}{8} = 2$. — Den riktiga bedömningen är: Rätt resultat, Icke nöjaktigt.

Exempel på felaktigt behandlade ekvationer med riktigt svar återfinnes under rubriken: Iakttagelser vid ekvationslösning. Ett problem med text må här anföras.

En elev hade räknat R.W.F.: II Ex. 788: A och B äro två gårdar vid en landsväg, C en stad, till vilken landsvägen från A till B leder. B ligger mellan A och C, 8 km från A och 72 km från C. Från A och B resp. starta kl 8 två kamrater D och E, som båda skall cykla till C. D brukar cykla 20 km/tim och E 16 km/tim. När och var kan man beräkna, att D upphinner E?

Elevens lösning såg ut så här:

| | $v$ | $t$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| $D$ | 20 km/tim | $x$ tim | $20\,x$ km |
| $E$ | 16 km/tim | $x$ tim | $16\,x$ km |

Ekv.:

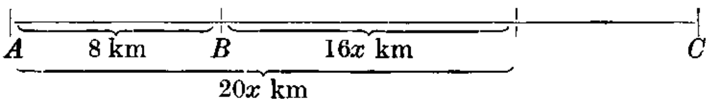
$$\begin{aligned} 20x + 16x &= 72 \\ 36x &= 72 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Svar: D upphann E kl 10, när D hade cyklat 40 km.

Eleven var osäker och kommenterade: "Jag tror inte, att jag begriper det, men när jag tittade i facit, så förstod jag, att ekvationen måste vara $20x + 16x = 72$." Hon hade tydligen rätt, när hon sade, att hon inte hade begripit uppgiften, men fel, när hon trodde, att ekvationen skulle vara så, som hon skrivit.

Med hennes egna antaganden blev lösningen:

*D* kl. 8 → *E* kl. 8 →




Ekv.:

$$\begin{aligned} 20x - 16x &= 8 \\ 4x &= 8 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Samma svar som ovan.

Elevens lösning måste även denna gång bedömas: **Rätt resultat, Ej nöjaktigt.**

Alla anteckningar om provräkningen införes lämpligen i den ovan omtalade boken, där också ett exemplar av provräkningslapparna insättes. Den som skriver smått och tydligt, kan möjligen göra undantag för tabellen över de uppgifter, som lärjungarna räknat, och i stället skriva den i lärarkalendern.

Mången gång kan man både länge och väl sitta och fundera, om man skall bedöma en lösning med "Nöjaktigt (med tvekan)" eller med "Icke nöjaktigt" och till slut kanske bestämma sig för det senare. Det är orimligt, att uppgiften därmed skulle förlora allt värde. Man kan därför ha skäl att i sina anteckningar (och kanske även i elevernas böcker) använda bedömningarna "Icke nöjaktigt (men med förtjänster)" och "Nöjaktigt (med brister)".

Beträffande bedömningen både av de enskilda uppgifternas behandling och proven som helhet har skolöverstyrelsen på allra sista tiden givit åtskilliga goda råd och anvisningar. Jag tänker därvid på Met. anv. för realskolan IV mom. 4, Met. anv. för gymnasiet II mom. 6, där även realskoleläraren finner åtskilligt att ta vara på (t. ex. sjätte stycket), ett cirkulär av d. 6 mars 1954 och alldeles särskilt en uppsats av undervisningsrådet Sjöstedt i Tidning för Sveriges läroverk 1954, nr 25.

Det är en god regel att hålla kontakt med hemmet på så sätt, att man efter varje med B? eller lägre betyg bedömt prov begär målsmans påskrift. Man kan t. ex. efter provräkningens slut i räknehäftet, där man skriver betyg, datum för återlämnandet och sitt signum, också skriva: Haft del:.

Eleven bör sedan någon av de närmast följande matematiktimmarna uppvisa häftet med målsmans underskrift.

## LITTERATURANVISNINGAR

Nedan har upptagits böcker och publikationer av huvudsakligen allmänt och metodiskt innehåll. Förteckningen är långt ifrån fullständig, men kan måhända ändå vara av något värde för läsaren.


*Ändringarna i de Metodiska anvisningarna till undervisningsplanen för rikets allmänna läroverk* i Aktuellt från Skolöverstyrelsen 1951 : 4. Förkortas: Metodiska anvisningar. Utkom senare i särskilt häfte: *Metodiska anvisningar för matematikundervisningen i realskolan* utfärdade av skolöverstyrelsen den 13 dec. 1950. Sthlm 1954. Numera ingår dessa anvisningar i *Kursplaner och metodiska anvisningar för realskolan,* Kungl. Skolöverstyrelsens skriftserie 16. Svenska Bokförlaget Nordstedts (i distribution). Sthlm 1955. 5:— kr. Förkortas även Met. anv.

*Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola.* Fastställda av Kungl. Skolöverstyrelsen för läsåren 1955/58. Svenska Bokförlaget, Nordstedts. Sthlm 1955. 3:40 kr.

*Timplaner för rikets allmänna läroverk.* Svensk författningssamling 1950, nr 60.

*Undervisningsplaner för kommunala flickskolor.* Svensk författningssamling 1950, nr 61.

*Förslag till tim- och kursplaner för treåriga realskolor* i Aktuellt från Skolöverstyrelsen 1953 : 26.

*Förslag till nya tim- och kursplaner för folkskolan.* Svenska Bokförlaget Sthlm 1953.

*Studieplaner* utarbetade på uppdrag av kursplanedelegationen inom 1946 års skolkommission:

Wigforss, F., och Roman, Anna Maria, *Studieplan i matematik för första, andra och tredje skolåren.* 81 s. M. Bergwalls förlag 1951. 4 : 50.

Lindström, S., *Studieplan i matematik för klasserna 1—3.* 93 s. Almqvist och Wiksell. Sthlm 1952.

Wigforss, F., *Studieplan i matematik för fjärde, femte och sjätte skolåren.* 97 s. Magnus Bergvalls förlag, Sthlm 1952. 6: 60.

Wigforss, F., och Nilsson, Hj., *Studieplan i matematik för sjunde och åttonde skolåren.* 70 s. M.B. Sthlm 1952. 5:50.

Åstrand, S., *Förslag till studieplan i matematik för klasserna 7 och 8 vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola.* Stencilerad 75 s. 1951. 1946 års Skolkommission.

Ehrnst, F., *Studieplan i matematik för nionde skolåret (Alternativkurs 1).* 35 s. Almqvist och Wiksell, 1953. Sthlm 2:50.

Carli, O., *Vardagsräkning. Studieplan i matematik för nionde skolåret (Alternativkurs 2).* 53 s. Sthlm M.B. 1952. 4:50.

*Elementa, Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi.* Redaktion och expedition Karlbergsvägen 16:IV. Sthlm. Fyra häften per år. Prenumerationspris 15: — kr per år. Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 5 27 55.
Nästan oumbärlig för en matematiklärare.[1]

*Nordisk matematisk tidskrift.* (Fyra häften per år. Ordinarie pris 16 kr. Reducerat pris för medlemmar i Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning och för studerande 8 kr. Abonnemang tecknas genom brevkort till: Nordisk Matematisk Tidskrift, Matematisk Institutt, Blindern, *Oslo,* Norge. Uppgiv därvid, om tidskriften önskas fr. o. m. årg. 1 (1953) samt om Ni är berättigad till nedsatt pris. Avgiften inbetalas lämpligen samtidigt på postgiro: Nordisk Matematisk Tidskrift, Tekniska Högskolan, *Stockholm 70.* Postgiro 15 45 52.

*Tidning för Sveriges Läroverk.* Organ för Läroverkslärarnas riksförbund. (Utkommer lördagar. Prenumerationspris 25 kr. För medlemmar i riksförbundet ingår prenumerationskostnaden i årsavgiften.) Publicerar regelbundet examensuppgifter och innehåller bl. a. diskussioner i pedagogiska frågor.

Asperén, K., *Huvudräkneövningar.* 4:de uppl. 99 s. J. Beckmans förl. Sthlm 1926.

Hedström, J. S., *Förberedande kurs i geometri.* 8:e uppl., 31 s. Sv. Bokförl. Sthlm 1946, 0:75 kr. 1:90.

Hellsten, C. G., *Räknemetodiska grundlinjer för räkneundervisningen i folkskolan.* 64 s. Sv. Bokförl. Sthlm 1949.

Ivan, N., (Red.) *Vad examinatorerna fordrar i realexamen,* avsnittet om matematik (11 s.) av Karl v. Proschwitz. A. V. Carlsons Bokförlag. Sthlm 1951. 6:50.

[1] Jfr även *Tidskrift för skolmatematik* (red. E. Ferner, Jungmansg. 1, Karlstad). Helårsprenum. (4 h.) 5: —, postgiro 49 02 82.

RENDAHL, C., WAHLSTRÖM, B., och FRANK, K., *Räknebok för realskolan*, delarna IA, IB; del II; del III. Förkortas R.W.F.: IA; IB; II; III.

SJÖSTEDT, C. E., *Lärobok i geometri för realskolan och därmed jämförliga läroanstalter*. 100 s. Natur och Kultur, Sthlm. 3:15. Förkortas: Sjöstedt.

SJÖSTEDT, C. E., *Geometri och geometriundervisning*. 60 s. Gleerup, Lund 1948. 2:25.

För övrigt hänvisas till de årliga redogörelserna för *Försöksverksamheten vid högre skolor* i Aktuellt från Skolöverstyrelsen.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

nfeds 2 3/4-3
117 prov

*Skrifter utgivna av Sveriges yngre läroverkslärares förening*

1. IVAR THORÉN: *Barn och uppsatsskrivning.* Några råd beträffande sättet att planlägga uppsatsskrivningen på det lägre skolstadiet. Andra upplagan. 1954. 3: —.
2. C. E. SJÖSTEDT: *Geometri och geometriundervisning.* 1948. 2: 25.
3. ERIK SANDBERG: *Kristendomsundervisning i läroverken.* 1948. 3: —.
4. WILHELM THAM: *Undervisningen i historia med samhällslära i våra läroverk.* 1948. 3: —.
5. STELLAN ARVIDSON: *Skolreformen.* En sammanfattning av 1946 års skolkommissions betänkande. 1948. 3: —.
6. IVAR ELVERS: *Biologisk mikroskoperingsteknik.* 1949. 6: 50.
7. JOHANNES EDFELT: *Några verk och gestalter i modern tysk diktning.* 1948. 3: 25.
8. MELKER JOHNSSON: *Enhetsskola och lärarutbildning i USA.* 1948. 3: 50.
9. IVAR ELVERS m. fl.: *I naturen.* Handbok för vandringar och exkursioner. 1950. 8: 50, inb. 11: 50.
10. ELI F. HECKSCHER: *Studium och undervisning i ekonomisk historia.* 1951. 3: 50.
11. LENNART FRANKMAN och ERIK HERNQVIST: *Hur ett schema kommer till.* Anvisningar för schemaplaneringen vid folkskolor och högre skolor. Med förord av t. f. undervisningsrådet Torsten Wetterblad. 1951. 3: 75.
12. JONAS ORRING: *Läroverkslärarens arbetsbörda.* En arbetstidsundersökning. Andra upplagan 1951. 5: 25.
13. JULCHEN BLOOM: *Lekar och spel i engelskundervisningen.* Översättning från tyskan av Carl-Henrik och Göran Wittrock. Med förord av undervisningsrådet Birger Thorén. 1952. 6: —.
14. SVEN J:SON LUNDQUIST: *Att tjänstgöra vid högre skolor.* 1952. 6: 50.

    Tillägg till d:o. Utarbetat av Martin Wellander, 1955. 1: 25.
15. HALFRID STENMARK. *Matematikundervisningen* i realskolan och motsvarande skolformer. Hft 13: 50, inb. 17: 50.

Föreliggande arbete, *Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer*, är författat av adjunkten vid Högre allmänna läroverket i Bromma, fil. lic. *Halfrid Stenmark*. Denne äger många års erfarenhet av dylik undervisning och har på skolöverstyrelsens uppdrag flera somrar lett stödkurser för matematiklärare med otillräcklig erfarenhet och utbildning. Handledningen utges med statsbidrag; i sitt tillstyrkande utlåtande yttrade skolöverstyrelsen bl. a.: "Även om boken icke kan ge lösning på varje uppkommande pedagogiskt problem, torde framställningen inom varje avsnitt dock vara så ingående, att den kan ge också den oerfarne läraren de utgångspunkter han behöver för sitt arbete. Men även för erfarna lärare i matematik kan denna metodiska handledning ha ett betydande värde."

Det förtjänar att framhållas, att det i vårt land tidigare saknats en systematisk och metodisk behandling av matematikkursen på realskolestadiet. Boken kommer med största sannolikhet att bli till stor nytta för matematiklärare icke blott inom realskolan utan även inom enhetsskolan och jämförliga skolformer.