FÖRORD

Under de år läroboken *Räknelära i tal och bild*, utarbetad av lärare vid Falu folkskoleseminarium, kommit att på många håll användas i landets *folkskolor och seminarieskolor* (övningsskolor), har vid olika tillfällen framhållits önskvärdheten av att till densamma komme att utarbetas en särskild *handledning*. De räknemetodiska anordningarna i denna äro ju i en del punkter andra än de, som av gammalt hört samman med räkneundervisning enligt det traditionella quatorspeciessystemet, och skall undervisningen enligt nämnda lärobok komma fullt till sin rätt, är det uppenbarligen nödvändigt, att läraren gjort sig väl förtrogen med grundtankarna i den metod, som där följes. — Då dessutom vid olika *seminarier* framhållits, att det skulle vara värdefullt för undervisningen i räknemetodik, om man där kunde hänvisa eleverna till en kortfattad redogörelse för *de nutida räknemetodiska problemen*, har jag med detta lilla häfte velat närmare utreda de frågor, som man medelst nämnda nyelementära metod sökt ordna på ett för barnundervisningen enklare och naturligare sätt, än som mestadels varit fallit. Nämnda problem kunna givetvis lösas på flera sätt, och det är min förhoppning att framdeles bli i tillfälle att mera fullständigt redogöra för olika metoder, som använts och användas i den grundläggande räkneundervisningen. Det skulle dock vara mig en glädje, om vad som här upptagits som lösning av valda typproblem inom olika delar av räknekursen och som motivering för denna finge göra god tjänst som utgångspunkt för de diskussioner och studier i berörda frågor, som inom seminarier och annorstädes avse att skapa förtrogenhet med och leda fram till en barnpsykologiskt tillrättalagd räkneundervisning. Som värdefull litteratur i sådant studiearbete må här i övrigt nämnas:

1. *Anjou-Kastman*, Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare, häfte V: Räknekonsten i folkskolan, 1874.
2. *K. P. Nordlund*, Lärogång i räkning, 1891, samt Metodiska anvisningar för lärarna i läran om bråk.
3. *Harald Dahlgren*, Die Mathematik an den Volksschulen und Volksschullehrerseminaren Schwedens, 1911, se Berichte und Mitteilungen veranlasst durch die schwedische Abteilung der internationalen mathematischen Unterrichtskommission.
4. *Frits Wigforss*, Den grundläggande matematikundervisningen, 1925.
5. *Karl Nordlund m. fl.*, Arbetssättet i folkskolan, III: Räkning och geometri, 1926.

Det är mig ock kärt att här få framföra ett varmt tack till lärarna i matematik vid Falu folkskoleseminarium för vad de alla under snart tilländagångna 25 år givit mig av stort medintresse och värdefull hjälp i utformningen och prövningen av den räknemetod, som i dessa grundlinjer tecknas.

I mars 1937. *Carl Gustaf Hellsten*

RÄKNEMETODISKA GRUNDLINJER

FÖR RÄKNEUNDERVISNINGEN I FOLKSKOLAN

Nyelementär räknemetod

i belysande exempel av

CARL GUSTAF HELLSTEN
Rektor vid Falu folkskoleseminarium

STOCKHOLM

Svenska Bokförlaget
P. A. Norstedt & Söner

INNEHÅLLSFÖRTECKNING.

Kungl. Boktr. Sthlm 1937
376059

Målet för räkneundervisningen i folkskolan.

Enligt normalplanen av år 1900 för undervisningen i folk- och småskolor skall undervisningen i räkning i främsta rummet åsyfta att »öfva barnens förmåga att behandla praktiska uppgifter, vilkas lösning kräver klar uppfattning och eftertanke, och övningarna att bibringa dem nödig räknefärdighet få icke nedsjunka till ett blott mekaniskt sysslande med uträkning av vissa tal efter gifven regel och uppställning».

Redan då blev sålunda markerat, att man icke — såsom ofta varit fallet — skulle sätta som mål att mekaniskt inlära vissa räkneoperationer, utan att huvudsyftet med arbetet skulle vara att lära barnen det räknande, som behövs för lösning av praktiska uppgifter. Ännu tydligare framhäves detta i nu gällande undervisningsplan av år 1919, där målet anges på följande sätt: »*Undervisningen har till uppgift att bibringa barnen en efter deras ålder och utveckling avpassad insikt och färdighet i räkning med särskild hänsyn till vad som erfordras i det dagliga livet.*»

I denna bestämmelse är också att uppmärksamma som ett betydelsefullt pedagogiskt tillägg, att räkningen skall ordnas *efter barnens ålder och utveckling*. Det traditionella räknesystemet, sådant det tillskapats för högre skolors matematik, får alltså ej utan vidare godtagas. Då detta i mycket har algebraisk karaktär och många dess definitioner kräva stor förmåga av abstraktion, måste i stället räkningen i folkskolan åtminstone delvis läggas efter andra linjer, om den alltigenom skall komma att motsvara hos barn under 14 år förefintliga fattningsgåvor och förutsättningar i övrigt.

Räkneundervisningen bör hela skolan igenom ordnas efter barnpsykologiskt riktiga principer.

I. Några allmänpedagogiska grundtankar i fråga om åskådlighet.

1. Enär föreställningarna bildas genom uppfattning medelst sinnena, bör undervisningen *gå från det konkreta till det abstrakta*. Man bör ej så plantor, utan plantfrön, det vill säga: sanningen skall icke meddelas färdig utan växa fram hos lärjungen och det väsentligen genom självständigt arbete (Commenius).
2. Vad lära våra pedagoger barnen? Ord, ord och åter ord; man undervisar dem i vetenskaper, av vilka de tro sig veta något, när de känna orden. — *Man lär dem tecken, utan att ge dem föreställningar om det, som betecknas*. (Rousseau).
3. Undervisningens yttersta mål är det klara begreppet. *Utgångspunkten och grundvalen skall vara den tydliga sinnesåskådningen.* (Pestalozzi).
4. Utgångspunkten för allt som skall ske är verksamhet. Med handling bör all äkta utvecklande människofostran börja. Den bör spira i, växa fram ur och grunda sig *på handling*. (Fröbel).
5. Gå från det enkla till det sammansatta, från det konkreta till det abstrakta, *från det empiriska till det rationella.* (Spencer).

Vad så på olika sätt framhållits är grundsanningar, som man alltmer beaktat inom räkneundervisningen under de första skolåren. Uppenbarligen bör också undervisningen inom folkskolans följande klasser läggas efter samma pinciper. Visserligen ha barnen där mera utvecklat förstånd och större mognad, men de nya räkneföreställningar, som barnen där erhålla, bli det oaktat mycket oklara, om de inte grundas i åskådligt arbete. Länge har visserligen på många håll den uppfattningen gjort sig gällande, att »egentlig åskådningsmateriel endast mera undantagsvis bör begagnas annat än i småskolor», men i motsats härtill må därför betonas, att även i den egentliga folkskolans klasser behövs det grundläggande åskådliggörande arbetsövningar och för där förekommande räkneövningar särskilt avpassad räknemateriel.

Här må ock följande uttalande beaktas: »Det är nödvändigt att vid all undervisning och i synnerhet vid räkneundervisning se till, att man ej laborerar med tomma begrepp.» — »*Åskådlighet* i undervisningen är icke liktydigt med att en eller två eller kanske tre, fyra gånger visa en sak, utan åskådlighet innebär, att läraren tar barnens *alla sinnen* i anspråk, så att barnen lära känna undervisningsobjektet från så många synpunkter som möjligt och *så ofta*, att barnen verkligen känna till saken ifråga». (Torsten Dahlgren 1924.)[1]

II. Några synpunkter i fråga om lärosättet.

Vad som är att beakta för undervisning i allmänhet beträffande *lärosättet*, bör givetvis också iakttagas vid undervisningen i räkning. Icke minst värdefullt är det sålunda, att barnen vänjas vid *självverksamhet*. Detta kan i någon mån — särskilt på ett högre stadium — ske därigenom, att de få hjälpa till med att samla behövliga fakta för olika uppgifters lösning och att hitta på problem och likaså genom att de få komma med förslag vid utredningen av olika räknesätt, men särskilt ger ju själva inlärandet av olika räkneförlopp tillfälle härtill. I berörda avseende förtjänar ock följande goda anvisning att beaktas.[2]

»För att vid räkneundervisningen kunna se fordran på förståndsbildning till godo, måste läraren anse som sin huvuduppgift ej att vara den givande, den meddelande, utan den *ledande*, som ordnar uppgiften, angiver utgångspunkterna och riktningen, för att sedan låta barnen själva sluta sig till följden, draga slutledningar, fullända bevisen. Vidare har läraren att gå *systematiskt* tillväga. — Vart och ett föregående är grunden för det efterföljande. Försummas den säkra grundläggningen, faller allt tillsammans i ruin; varje lucka hämnar sig här såsom på intet annat område.»

Helt naturligt måste arbetet härvidlag bli mycket olika under olika lektioner, beroende på förefintligt elevmaterial, förhandenvarande skolförhållanden och lärarens individuella läggning. Så kan exempelvis frågan om *klassundervisning* eller individuellt lagd undervisning lösas på mycket olika sätt. Mestadels har det ansetts vara fördelaktigast, att alla barnen i klassen på en gång arbeta inom samma räkneområde och alltså hålla på med samma slags exempel i sin räknelära. I början av lektionen orienteras de då alla samtidigt i fråga om det räknande, som lektionen skall omfatta, vanligen i form av huvudräkning, under 15 à 20 minuter. Därefter få barnen räkna själva. Hjälp lämnas härvid åt de barn, som behöva sådan, och de duktigare barnen

[1] Se Om undervisning i räkning av Torsten Dahlgren.
[2] Se Anjou-Kastman, Räknekonsten i folkskolan, 1874.

få alltefter förefintliga förutsättningar och intressen vid sidan av de i räkneläran för alla barnen lämpliga exemplen taga ihåll med extra räkneuppgifter. — Emellertid kan man ock uppdela klassen i *skilda räknegrupper* och då individualisera arbetet på dessa, så som ju alltid måste ske med de olika klassavdelningarna i B-skolor. Det kan ju vara ovisst, vilket arbetssätt som ger bäst resultat. Att det senare är för läraren mer betungande, ligger i öppen dag. Han måste ju då vara ledare av flera olika arbeten på en gång.

Eftersom de sakliga exemplen vanligen gälla förekommande mått för längder, ytor, rymder, vikter och tider, är det naturligt och av värde, att dessa i stor utsträckning användas som åskådningsmedel. För att klarlägga skilda talvärden och räkneoperationer sammanför man sakligt närbesläktade räkneexempel, så att *varje lektion* kommer att gälla *ett bestämt sak- och sortområde.* Om därvid dithörande måttstorheter hållas tillgängliga, så att barnen i dessa vinna erforderlig åskådningshjälp, är detta ägnat att ge klarhet i räkningarnas innebörd och bidrager samtidigt till förtrogenhet med måttet i fråga. — Först då flera sort- och räkneområden så blivit grundligt behandlade, är tiden inne för lektioner med s. k. blandade uppgifter inom dessa. Att månadsvis efter genomgången av visst kursavsnitt anordna *provräkningar* är också till stort gagn, bland annat därför att läraren då blir i tillfälle att se, vad som brister i barnens räkneinsikter.

I fråga om s. k. *mekaniskt räknande* kan hänvisas till följande uttalande.[1]

»Matematikundervisnings möjligheter att påverka elevernas tanke- och viljeliv måste anses betydande. Då tankens skolning är en huvuduppgift för undervisningen i räkning, följer därur, att begripandet av kunskapsstoffet energiskt måste eftersträvas. Beträffande de vanliga räkneoperationernas utförande är att märka, att mekanisk säkerhet bör komma som ett resultat av en ofta företagen upprepning av den tankegång, som ligger bakom tekniken. Om barnen inlära tekniken genom att använda sin tanke, blir arbetet med begripandet intressant. — Att använda *formler* och schemata för lösning av vanliga enkla uppgifter är således olämpligt. De böra lösas ej genom användning av en inlärd formel utan genom att en tankegång övas.»

[1] Se Den grundläggande matematikundervisningen av Frits Wigforss, 1925.

Ett viktigt led i räkneundervisningen utgör också arbetet med att vänja barnen vid *riktiga och tydliga uttryckssätt.* Det kan ju synas självklart, att så väl lärare som barn böra vid utredningen av olika räkningar *tala svenska* och söka få språkligt goda, naturliga uttryck, och ändock återstår det i det stycket mycket att göra. Erfarenheten visar, att allt fortfarande mycken dimmighet i barnens räkneföreställningar uppkommer just därför, att man inte håller sig till modersmålet utan använder ett med latinska termer bemängt och konstlat språk.

Det är ock att tillråda, att barnen vid s. k. huvudräkning — särskilt i de högre klasserna — tillhållas att för sakliga uppgifter kort och tydligt *ange lösningssättet* (»teckningen» av uppgiften) och först därefter *resultatet.* För att barnen skola lära sig god ordning och slippa ifrån s. k. slarvfel, böra de likaså vänjas vid att för sakliga exempel i sina räkneböcker överskådligt och redigt ange såväl räknevägen (»teckningen») som själva räkneoperationerna.

Att låta barnen — åtminstone i de högre klasserna — få *använda facit,* är så till vida fördelaktigt, som barnen därigenom vänjas vid självkontroll. Detta underlättar också lärarens arbete, men gör givetvis icke lärarens särskilda granskning överflödig, utan det ligger tvärt om minst lika stor vikt uppå, att felaktigheter i barnens räkneböcker bli för varje gång ordentligt rättade, som att detta sker med deras rättskrivningsprov.

III. Aktuella problem i fråga om lärogång och lärokurs.

Särskild uppmärksamhet förtjänar frågan om vad som faktiskt bör inläras av räknevägar och räknebeteckningar och hur lärostoffet bör fördelas på olika klasser. Som redan framhållits, är det förr allmänt använda räknesystemet med de fyra räknesätten och tillhörande latinska termer, det s. k. *quatuorspeciessystemet,* icke i sin helhet lämpligt för undervisningen i våra folkskolor. Därför måste man numera taga under särskild omprövning, i vilka delar detta system bör förenklas och ersättas av för barn lämpliga räkneanordningar.

A. Quatuorspeciessystemet i kritisk belysning.

Uttalanden i olika räknemetodiska arbeten.

1. Utdrag ur »*Granskning av läroböcker för folkskolan jämte grundsatser för deras uppställning*», tredje häftet, 1887, underdånigt utlåtande av därtill utsedd *kunglig kommitté*.[1]

a. »Beträffande *räknesätten i bråk* är att märka, att själva räknesätten, lagarna för dem, reglerna icke böra bli andra än för hela tal och icke böra framställas med andra modifikationer än dem, som betingas deraf, att man måste röra sig med ett annat slag av talsorter än förut.»

b. »I exemplet: Om 1 kg. kostar 7 kr., hvad kostar $\frac{5}{8}$ kg.? sökes först priset för $\frac{1}{8}$ kg. genom att taga $\frac{1}{8}$ av 7 kr., d. ä. $\frac{7}{8}$ kr., och sedan multipliceras med 5.»

c. »*Division* i allmänna bråk har utgjort en svår stötesten, och man har nöjt sig med den mekaniska minnesregeln att vända upp och ned på divisorn och att sedan utföra en multiplikation, vilken operation för barnen måste framstå som ett rent konstgrepp. Enligt ovan angivna lag (Se mom. a) blir till och med denna sak ytterst enkel. När fråga blir om *innehåll*, t. ex. Hur många gånger $\frac{2}{9}$ innehålles i $2\frac{2}{3}$, erhålles svaret lätt, om båda talen förvandlas till niondelar, ty att $\frac{2}{9}$ innehålles i $\frac{24}{9}$ 12 gånger, är lika enkelt som att två kronor innehållas i 24 kronor 12 gånger.» — »När fråga blir om *delning* (delberäkning), delas uppgiften i tvenne, t. ex. Vad kostar 1 hl., om $3\frac{3}{4}$ hl. ($\frac{15}{4}$) kosta 75 kronor? Då fördelas 75 kronor ut på de 15 fjerdedelarna genom delning med 15, och så erhållas 5 kronor såsom priset på hvar fjerdedels hektoliter, och därefter sökes svaret genom multiplikation. 4×5 kr. anger priset på 1 hl.»

2. Utdrag ur »*Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning*» *1891 av K. P. Nordlund.*

a. Quatuorspeciesläran är i den grundläggande undervisningen förkastlig, ty barnen kunna icke fatta varken de latinska termernas namn eller de olika räknesättens innebörd. Det är både oegentligt och opedagogiskt att lämpa räknetermerna efter läran om de hela talen och att sedan helt enkelt överflytta dessa på *räkningen med bråk*. Så ha exempelvis uttrycken *multiplicera och dividera* kommit att föranleda stor oklarhet och begreppsförvirring. I detta räknesystems heltalslära betydde nämligen multiplicera mångfaldiga, men i dess bråklära stundom mångfaldiga, stundom dela och stundom bäggedera på en gång. Likaså betydde dividera i heltalsläran dela, men i bråkläran stundom dela, stundom mångfaldiga, stundom bäggedera i före-

[1] Att vara ledamöter i denna kommitté hade av Kungl. Maj:t utsetts: Chr. L. Anjou, N. J. O. H. Lindström, Carl Kastman, J. M. Ambrosius, I. A. Lyttkens, J. E. Johansson, K. O. Sjölander och P. A. Gödecke. Vad som återfinnes i nämnda utlåtande av dessa pedagogikens främste målsmän den tiden har ej blivit mig känt förrän efter utarbetandet av detta häfte, och har det därför ej varit möjligt att återge så mycket av dess innehåll som varit önskligt.

ning och stundom något annat, för vilket barnen ej fingo lära något namn alls. (I sista fallet avses dividera i betydelsen av förhållandet mellan två storheter.)

b. »Det är ett betydande pedagogiskt missgrepp, att *decimalbråksräkning* tages före räkningen i allmänna bråk. Decimalbråksräkningen måste bygga på ordentligt genomgången kurs i allmänna bråk, försåvitt den ej i mycket blott skall bli en besvärlig lek med siffror.»

3. Utdrag ur *»Anteckningar i Räknemetodik» 1894—1896 av G. W. Bucht och P. A. Svensk.*

«Här må påpekas några *mycket vanliga formella oriktigheter«:*

a. »$\frac{1}{3}$ *ggr* 5 kr i st. f. $\frac{1}{3}$ *av* 5 kr.»

b. «Förväxling av uttryck vid de *olika slagen av divisionsuppgifter.* Ex. Hur många veckor utgöra 56 dagar? Här får man ej säga, att man skall dela 56 dagar i 7 delar, utan att man skall undersöka, hur många ggr 7 dagar innehållas i 56 dagar.»

4. Utdrag ur *en uppsats: »Ett bidrag till räknemetodiken i folkskolan», 1905 av C. G. Hellsten.*[1]

a. «En saklig undervisning driver genast fram under täckmanteln *division* två helt skilda tankegestalter, av vilka den ena mäter: Hur stor? och den andra räknar: Hur många? Det är ingalunda förvånansvärt, att barn i regel ha rätt dimmiga begrepp om divisions användning, om man ger akt på den sammanblandning av helt skilda saker, som räknesättsprincipen i detta avseende föranleder. — Om räknesätten till antal och beskaffenhet få bestämmas av vad problemen kräva för att kunna enkelt och förståndsenligt lösas, erhållas alltså inom aritmetiken 5 enkla räknesätt: sammanläggning, fråndragning, multiplikation, delberäkning och innehållsberäkning.»

b. »Om man vid innehållsdivision säger, att *förhållandet mellan en mindre storhet och en större storhet* är detsamma som den förstnämnda dividerad med den andra, ger man ingen förklaring alls, ty det är just detta: Vad det vill säga att dividera en mindre storhet med en större likadan storhet, som skulle förklaras.

5. Utdrag ur *Internationella matematiska undervisningskommissionens berättelse 1910 av Harald Dahlgren.*[2]

a. »Vad som beträffande bråkräkningen i metodiskt avseende erbjuder det största intresset, är den gamla stötestenen, som består i svårigheten eller omöjligheten att överföra de från heltalsräkningen medförda *multiplikations-* och *divisionsbegreppen* på bråkräkning, nämligen i de fall, då multiplikator och divisor äro bråk.» — »De föreställningar, som barnet från början knyter till multiplikation och division kunna icke bibehållas vid multiplikation och division med bråk. Det måste ju använda multi-

[1] Se Manhem, Tidskrift för uppfostran och undervisning, 1906.

[2] Se Berichte und Mitteilungen veranlasst durch die schwedische Abteilung der internationalen mathematischen Unterrichtskommission, år 1911.

†1—376059.

plikationstecknet, ehuru det egentligen är fråga om en delning, och det måste använda delningstecknet, ehuru sakförhållandet anger, att det sökta värdet är större än det kända. Då barnet icke har möjlighet att sammanhålla de tecknade räkneoperationerna, så blir den oundgängliga följden förvirring och osäkerhet. Här står man uppenbarligen inför svårigheter av betänklig art, svårigheter, som nog icke kunna övervinnas utan en vittgående metodisk omläggning av den elementära aritmetiken, varvid vetenskapens till minsta antal reducerade räknesätt helt eller delvis måste lämnas åsido.»

b. »Erfarenheten har visat, att *algebraiskt betraktelsesätt* och tidigt användande av *ekvationer* utgör en fara så till vida, som det för barnen bort från en naturlig tankegång vid lösningen av enkla praktiska räkneproblem.»

6. Utdrag ur *»Den grundläggande matematikundervisningen» 1925 av Frits Wigforss.*

a. Den viktigaste anmärkningen om räknesättens innebörd hänför sig till *divisionen.* Mycken oklarhet i räkneundervisningen uppkommer, om ej de två väsentligt skilda tankegångar uppmärksammas, som ligga bakom detta räknesätt. Dessa tankegångar äro så olika, att barnen böra uppfatta dem som *två skilda räknesätt* med *olika namn och beteckning* och lika strängt hålla dem i sär som de andra räknesätten. I den grundläggande undervisningen skulle man alltså kunna sägas ha *fem* räknesätt i stället för de sedvanliga fyra.

b. »Hur många barn kunna ej svara, att $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$ eller att $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} =$ [illegible] *utan* att de ha reda på *vad som menas med att multiplicera med* $\frac{3}{4}$ eller att *dividera med* $\frac{2}{3}$. Med ett sådant undervisningssätt börjar man betänkligt närma sig den gräns, där räkningen från att vara ett betydelsefullt arbete övergår till att bliva en meningslös lek med siffror.»

B. Huvudlinjer i »nyelementär räknemetod›.

För att få ovanberörda svårigheter undanröjda ha många mer eller mindre planmässigt genomförda försök gjorts, som syftat till att få efter barns förutsättningar naturligt avpassat lärostoff. I det följande skall visas huvuddragen i den räknemetod, som under åren 1915—1935 närmare utformats i arbetet med barnen vid Falu folkskoleseminariums övningsskola.

Utmärkande för densamma är följande.

1. Eftersom räkningen i folkskolan avser barn med obetydlig förmåga av abstraktion, bygger man i denna alltjämt på enskilda fall och *enkla räknesammanhang,* och först vid mera mogen ålder göras barnen efter hand förtrogna med quatuorspeciessystemets algebraiska räknesättsbegrepp. — Sålunda användes icke inom heltalsläran det abstrakta räknebegrepp, som ligger till grund för dess divisionsräkning, utan i stället särlägges, vad som i detta kallas division, i två från varandra helt skilda räknesätt, innehållsberäkning och delberäkning. Barnen hänvisas sålunda enligt denna metod icke till fyra räknesätt (3 enkla och ett med dubbel betydelse) utan till *5 enkla räknesätt som grundpelare* i sitt räknande, nämligen 1. *Sammanläggning.* 2. *Fråndragning.* 3. *Gångertagning* (multiplikation). 4. *Innehållsberäkning* och 5. *Delberäkning.*

2. Barnen få *för varje räknebegrepp* (räknesätt) lära sig *ett för detta karakteristiskt beteckningssätt.* Om uppgiften är att bestämma, hur många gånger 42 l *innehåller* 3 l, tecknas uppgiften med sedvanligt divisionstecken. 42 l : 3 l = 14 ggr, men om uppgiften är att beräkna *tredjedelen* av 42 l, tecknas den inte som i quatuorspeciessystemet med samma tecken (42 l : 3 = 14 l), utan här användes teckningen $\frac{1}{3} \cdot 42$ l = = 14 l, där punkttecknet läses »*av*». För de fem enkla räknesätten äro alltså räknetecknen följande:

För *addition*	För *subtraktion*	För *multiplikation*	För *innehållsberäkning*	För *delberäkning*
+ (plus)	— (minus)	× (gånger)	: (innehåller)	· (av)

Å andra sidan undvikes att för ett och samma begrepp ha olika tecken. *Gånger* tecknas sålunda inte i vissa klasser med krysstecknet » ×» och i andra klasser med punkttecknet » · », utan det tecknas *alltid* med krysstecknet » ×».

3. I *bråkräkningen* få barnen använda *de fem räknesätt,* de lärt känna inom heltalsläran, och i *precis samma betydelse som där,* och hela bråkräkningen inläres som utvidgad heltalslära. Här förekommer sålunda inte någon »multiplikation med bråk», som ger ett *mindre* värde, än det som multipliceras, och icke heller någon »division med bråk», som ger ett *större* värde, än det som divideras. Att beräkna *en del* av en storhet kallas alltid *delberäkning,* och blir det fråga om att beräkna *flera delar* av en storhet, hänvisas till de två enkla räknesätt, delberäkning och multiplikation, som inlärts under räkningen med hela tal (se sid. 31). — Motsvarande gäller om quatuorspeciessystemets delningsdivision med bråk (se sid. 32). — Uppgifter som innebära att bestämma förhållandet mellan ett mindre mått och ett större mått lösas också medelst sedvanligt reguladetritänkande. (Se sid. 35). Först i *klass 7* få barnen lära sig att för olika slags uppgifter inom de skilda divisionsarterna använda *gemensamma beteckningssätt.* Sålunda vidgas då deras uppfattning av begreppet förhållande till att gälla både innehållsberäkning och förhållanderäkning, och uppgifter som innebära s. k. »delningsdivision med bråk», få de där lära sig att lösa medelst *direkt* teckning.

Då här berörda räknemetod kommit att kallas »*nyelementär metod*», innebär detta icke, att däri använda räknevägar och beteckningssätt förut varit helt okända inom den pedagogiska världen och inom matematiken. Sedan långt tillbaka i tiden har man ju inom våra folkskolor försökt att göra räkningens olika partier begripliga för barnen och i åtskilliga stycken är här upptaget, vad som så tillförts av metodiskt värde för undervisningen där.[1] Det är närmast i motsats till det räknande, som av gammalt ägt rum i våra skolor och där man fortfarande använder quatuorspeciessystemets algebraiskt betonade definitioner av räknesätten, som denna metod kan sägas vara nyelementär, i det denna *grundar såväl heltals- som bråkräkningen på 5 olika räknesätt* och därvid låter *dessa räknesätt alltjämt vara definierade på det aritmetiskt enkla sätt*, som för heltalsräkningen är det naturligaste och för barn mest begripliga. Närmare granskning ger ock vid handen, att här förordade räknevägar i sin grundton fullt stämma överens med de lösningssätt, som praktiska livets män och kvinnor med sitt naturligt sunda och saktrogna tänkande merendels betjäna sig av. Nämnda metod utgör sålunda ett led i vår tids strävanden att göra arbetet i våra folkskolor klart inriktat på vad som i dessa bör vara främsta uppgiften, nämligen *att fostra för den verksamhet, som möter inom livets många olika näringsområden.* I denna metod lämnas därjämte åsido konstmässiga och för praktisk räkning obehövliga räkneprocedurer och — både i fråga om lösningssätt och terminologi — *begränsas lärostoffet till vad lösningen av dagliga livets räkneuppgifter kräver.* Städse hålles uppmärksamheten så i främsta rummet inriktad på vad som är till gagn för huvudmassan av vårt folk.

[1] Jfr exempelvis: Anjou-Kastman, Räknekonsten i folkskolan. 1874.

IV. Nyelementär räknemetod i belysande exempel.

De olika räknesättens åskådliggörande, tekniska utformning och användning.

Beteckningssätt och de yttre anordningarna i räknandet kunna givetvis väljas på mycket olika sätt. Det är emellertid icke oviktigt, att den *yttre formen* blir praktiskt lämplig och *karakteristisk för saken ifråga.* Den bör vara sådan, att den för barnen klart och tydligt markerar den räkneväg, de ha att följa. Arbetet underlättas därvid också i hög grad, om det finns god överensstämmelse mellan det skriftliga och det muntliga uttryckssättet.

Vid sidan av det traditionella räknesystemets latinska terminologi ha under årens lopp i olika skolor och räkneböcker kommit att användas en stor mängd av räknetecken och termer, ofta utan bestämd åtskillnad och förefintligt behov. I här berörda metod har gjorts ett försök att få obehövliga och *onödiga termer utgallrade* och att få enkelhet, fast ordning och enhetlighet i nämnda avseende. Givetvis utesluter det inte, att andra uttryckssätt kunna användas, utan att metoden i sin grundkaraktär därav ändras.

För att sammanhanget mellan räkneanordningarna hela skolan igenom skall överskådligt framträda, har i följande framställning av mera *speciella drag i berörda metod* lärogången angivits för ett räknesätt i sänder medelst för olika klasser valda exempel.[1]

A. De fem enkla räknesätten i hela tal och bråk.

1.	Sammanläggning	[15 öre + 12 öre = 27 öre] .	. Sid. 14—15
2.	Fråndragning	[15 öre — 12 öre = 3 öre] .	. Sid. 14—15
3.	Gångertagning	[3 × 5 öre = 15 öre] .	. Sid. 16—17
4.	Innehållsberäkning	[15 öre : 5 öre = 3 ggr] .	. Sid. 18—19
5.	Delberäkning	[$\frac{1}{3}$ · 15 öre = 5 öre] .	. Sid. 20—21

[1] Den som önskar mera fullständig bild av lärogången enligt denna metod hänvisas till de anvisningar, som till ledning upptagits i Räknelära i tal och bild av C. G. Hellsten m. fl. och till förutnämnda uppsats Räknesättsprincipen i den grundläggande **matematikundervisningen i Arbetssättet i folkskolan, av K. Nordlund m. fl.**

Sammanläggning och fråndragning.

Hela tal (klass 1—4).

1. *Erik hade 7 kulor* och *Anna 5 kulor. Tillsammans?*

7 kulor 5 kulor

7 k. + 5 k. = 12 k.
(»7 kulor *och* 5 kulor *är* 12 kulor»)

I klass 3—6 läses »*plus*»

2. *Måns hade 9 äpplen. Han gav Stina 5 äpplen. H. m. kvar?*

4 äpplen

9 äpplen

9 ä. — 4 ä. = 5 ä.
(9 äppl., »*ta bort*» 4 äppl., är 5 äppl. kvar.

I klass 3—6 läses »minus».

3. *Kajsa hade 43 öre* och *köpte kakor för 27 öre. H. m. hade hon sedan kvar?*

43 öre — 27 öre ?

Svar: 16 öre.

$\overline{4}$3	öre
— 27	»
16	öre

Vid uträkningen läses:
7 öre »*ifrån*» 3 öre — Går inte.
Då får jag växla 1 tioöring. Då blir det 3 tioören och 13 ettören.
7 öre *ifrån* 13 öre är 6 öre.
2 tioör. » 3 tioör. » 1 tioör.

Obs! Räkningen får till en början gälla *ettören* och *tioören* (*ej* ental och tiotal).
Obs! Det är tidsödande, fult och onödigt att vid växlingen skriva *10* ovanför första termens siffror. (Strecket över siffran kan vara till hjälp som en »etta» i vissa fall). Viktigt är att barnen med slantar få utföra några sådana fråndragningar med växling.

4. *Anna köpte på ett ställe 5 l 6 dl bär* och *på ett annat ställe 3 l 8 dl bär. På bägge ställena tillsammans?*

56 dl + 38 dl = ?

Svar: 9 l 4 dl.

l	*dl*	
5	6	(första termen)
+ 3	8	(andra »)
9	4	(summan)

Vid uträkningen läses:
6 dl + 8 dl är 14 dl
14 dl är = 1 l 4 dl
1 l + 5 l är 6 l
6 l + 3 l » 9 l
Svar: 94 dl eller 9 l 4 dl.

5. *Brita vävde på måndag 7 m 5 cm tyg och på tisdagen 2 dm 7 cm. H. m. mer vävde hon på måndagen än på tisdagen?*

75 cm — 27 cm = ?

Svar: 4 dm 8 cm mer.

dm	cm
$\overline{7}$	5
— 2	7
4	8

7 cm ifrån 5 cm — Går inte.
Då får jag »ta av närmaste sort».
Det blir 15 cm.
7 cm ifrån 15 cm är 8 cm, o. s. v.

Addition och subtraktion.

Bråk (klass 5—6).

6. *Elsa köpte* $2\frac{1}{3}$ *l mjölk och Karin* $3\frac{2}{3}$ *l. Tillsammans?*

$2\frac{1}{3}$ l + $3\frac{2}{3}$ l = $5\frac{3}{3}$ l = *6 l.* | *Obs!* Räkningen får gälla hela liter och »tredjedelsliter» (buteljer).

7. *Anna köpte* $2\frac{4}{10}$ *kg ost* och *Brita 9 hg. Hur mycket köpte Anna mer än Brita?*

a) Med allmänt bråk
$2\frac{4}{10}$ kg — $\frac{9}{10}$ kg = $1\frac{14}{10}$ kg — $\frac{9}{10}$ kg = $1\frac{5}{10}$ kg. | Räkningen gäller *hela* kilo och *tiondels-kilo* (hg).

b) Med decimalbråk.

$$\begin{array}{r} \cancel{2},4 \text{ kg} \\ -\ 0,9\ \text{»} \\ \hline 1,5 \text{ kg} \end{array}$$

Skrivsättet med allmänt bråk visar räkningens innebörd tydligast. *Räkning med allmänna bråk* bör därför helst tagas *före räkning med decimalbråk.*

8. *Einar läste på en läxa* $1\frac{1}{2}$ *timme, på en annan 32 min. och på en tredje* $\frac{3}{4}$ *tim. På alla tillsammans?*

$1\frac{1}{2}$ tim. + $\frac{32}{60}$ tim. $\frac{3}{4}$ tim.
= $1\frac{30}{60}$ tim. + $\frac{32}{60}$ tim.
+ $\frac{45}{60}$ tim.
= *2 tim. 47 min.*

Liknämniggörandet får mera konkret innebörd och blir lättare att förstå, om man fasthåller, att minuter är detsamma som sextiondelstimmar och att räkningen alltså gäller *hela* timmar och *sextiondelstimmar* (min.).

Obs! Förlängningen och liknämniggörandet framstår enklare och naturligare, då *varje bråk behandlas för sig.* Gemensamt bråkstreck användes därför ej.

9. *Axels bok vägde* $2\frac{1}{4}$ *kg. Hur mycket vägde den mer än Birgers, om Birgers vägde 1 kg 1 hg 75 g?*

a) $2\frac{1}{4}$ kg — $1\frac{175}{1000}$ kg = $2\frac{250}{1000}$ kg — $1\frac{175}{1000}$ kg = $1\frac{75}{1000}$ kg = *1 kg 75 g.*

b)

$$\begin{array}{r} \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\quad \\ 2,\cancel{2}\,\cancel{5}\,0 \text{ kg} \\ -\ 1,1\,7\,5\ \text{»} \\ \hline 1,0\,7\,5 \text{ kg} \end{array}$$

Som inledning till lösningen av sådana exempel övas lämpligen *sortförvandlingar* i fråga om vikter, och härvid påvisas att ex. 2,345 kg = 2 kg 3 hg 4 tiogr. 5 g.

Obs! För åskådliggörandet av sådana sortförvandlingar finns i »Hellstens räknemateriell» särskilt anordnat *viktställ.* (Hos P. A. Norstedt & Söner.)

Gångertagning.

Hela tal (klass 2—4.)

1. *En kaka kostar 5 öre. Vad kosta 3 kakor?*

①①①①① + ①①①①① + ①①①①①

5 öre   5 öre   5 öre

3 × 5 öre = 15 öre.

(Gångertal)   (Produkt)

Obs! Som tecken för *gånger* användes det lutande korstecknet »×» och *icke* punkttecknet. (Detta är i enlighet med de beteckningar, som för matematiken utarbetats av »Commission électrotechnique internationale» och av K. Skolöverstyrelsen förordats för rikets skolor.)

Obs! Gångertagningen inläres som en *»upprepad sammanläggning»*. Multiplikationstabellerna få växa fram ur additionsserier. På grund av definitionen av räknesättet måste tydligen *gångertalet* alltid vara *helt tal*. Det skall ju ange antalet termer i den upprepade sammanläggningen.

2. *En kaka kostade 3 öre. Vad kostade då 5 kakor?*

①①① + ①①① + ①①① + ①①① + ①①①

3 öre   3 öre   3 öre   3 öre   3 öre

5 × 3 öre = 15 öre.

Obs! Innebörden av denna teckning är en helt annan än vad teckningen i ex. 1 anger. (Se figurerna.)

3. *Vad skall man betala för 23 kartböcker, om varje kartbok kostar 1 kr 45 öre?*

23 × 145 öre = 3 335 öre.
Svar: 33 kr 35 öre.

Uträkning:

```
  145 (Multiplikand)
× 23  (Gångertal)
  435
 290
 3335 (Produkt)
```

4. *Erik köpte 145 skrivböcker. Han skulle få dem för 23 öre stycket. Vad skulle han då betala?*

145 × 23 öre = 3 335 öre.
Svar: 33 kr 35 öre.

Uträkningen göres med samma uppställning som i ex. 3. Det påpekas, att 145 × 23 är lika mycket som 23 × 145. *Teckningen* bör dock *alltid* göras *enligt det sakliga sammanhanget.*

Gångertagning (Multiplikation).

Bråk (klass 5—6).

5. *Hur mycket saft är det i 7 muggar, om det är $\frac{2}{3}$ liter på varje flaska?*

$7 \times \frac{2}{3}$ l $= \frac{14}{3}$ l $\quad 4\frac{2}{3}$

Obs! Vid klarläggandet av lösningen fasthålles att sorten är »tredjedelsliter» (buteljer).

6. *Hur mycket tyg behövs det till 9 klänningar, om det till varje klänning beräknas* a) $2\frac{3}{10}$ *m?* b) *2,3 m?*

a) $9 \times 2\frac{3}{10}$ m $= 9 \times \frac{23}{10}$ m $= \frac{207}{10}$ m $= 20\frac{7}{10}$ m. | Sorten tänkes vara *tiondelsmeter* (dm).

b) $9 \times 2{,}3$ m $= ?$
Svar: 20,7 m.

Uträkning

$$\begin{array}{r} 2{,}3 \\ \times\ 9 \\ \hline 20{,}7 \end{array}$$

Obs! Först uträknas $9 \times 23 = 207$. Sedan säges: »Det var inte 23 *hela*, som skulle tagas 9 ggr, utan 23 *tiondelar*. Därför blir det 207 *tiondelar* eller *20,7*.

Obs! Multiplikation med bråket tecknat som *allmänt* bråk är lättare att förstå. Därför är det bäst att inlära detta, innan man inlär multiplikation i decimalbråk.

Obs! Även inom *bråkläran* får multiplikation ha betydelsen av upprepad sammanläggning. *Gångertalet* måste alltså även här alltid vara ett *helt* tal och *produkten* blir *alltid större* än *multiplikanden*.

7. *Erik skulle rensa 14 blomsterland. Hur lång tid behövdes därtill, om han arbetade $1\frac{5}{12}$ timme på varje land?*

$14 \times 1\frac{5}{12}$ tim. $= \cancel{14} \times \frac{17}{\cancel{12}}$ tim. $=$

$= \frac{119}{6}$ tim. $= 19\frac{5}{6}$ tim. $=$ *19 tim. 50 min.*

Då »*förkortningen av uttrycket*» inläres, löses uppgiften först utan förkortning.

8. *På $\frac{1}{6}$ minut gjorde ett hjul 24,5 varv. Hur många varv gjorde det då på 1 minut?*

$6 \times 24{,}5$ varv $=$ *147 varv.*

Uträkning:

$$\begin{array}{r} 24{,}5 \\ \times\ 6 \\ \hline 147{,}0 \end{array}$$

Obs! Uppgiften löses medelst multiplikation och *icke* genom någon slags »division med $\frac{1}{6}$» såsom skedde i räkning enligt quatuorspeciessystemet, då man skrev: $24{,}5$ varv $: \frac{1}{6} = 24{,}5 \times 6 =$ *147 varv.*

Innehållsberäkning.

Hela tal (klass 3—4).

1. *Hur många gånger kan Erik plocka undan 3 kulor, om han har 15 kulor?*

3 kulor

15 kulor : 3 kulor = 5 ggr.
(Läses: »15 kulor *innehåller* 3 kulor 5 ggr»).

Obs! Man säger *inte:* »15 kulor dividerat med 3 kulor».
Tecknet »:» läses alltid »innehåller».
Obs.! Inledningsvis lösas sådana uppgifter med *»upprepad fråndragning»*.

2. *Hur många 5-öres bullar får man för 35 öre?*

35 öre : 5 öre = 7 ggr.
Svar: 7 bullar.

Obs! Sådana lätta exempel få barnen lära sig att lösa redan i *småskolan*, men då rätt så länge *utan teckning* med något divisionstecken. De pröva sig då fram till resultatet med hjälp av multiplikationstabellen.

Obs! Övergång till svaret erhålles genom att låta barnen säga som så: »För varje gång jag kan få ut 5 öre, får jag *en* bulle. Alltså blir det här 7 bullar.

3. *Hur många dygn är 510 timmar?*

510 tim : 24 tim. = ?
»Det stora måttet» »Det lilla måttet»

Svar: 21 dygn (6 tim över).

Uträkning:

510	24
—48	21
30	
—**24**	
6	

Läsning vid uträkningen:
24 »går i» 51 2 ggr.
$2 \times 24 = 48$.
24 »går i» 30 1 gång
$1 \times 24 = 24$.

4. *Axels skolväg är 1 km 750 m, Britas 250 m. Hur många gånger längre är Axels skolväg än Britas?*

1 750 m : 250 m = *7 ggr.*
Innehållstalet

Svar: 7 ggr längre.

Obs! Innehållsberäkningen måste ordentligt klarläggas, ty på den grundar sig bland annat a) *Förvandling till högre* sort (jfr ex. 3) och b) Beräkningar av *hur många gånger större* en storhet är än en annan (jfr ex. 4).

Innehållsberäkning (Division).

Bråk (klass 5—7).

5. *Hur många klänningar kan det bli av 23,8 m tyg, om det till varje klänning behövs 14 dm?*

23,8 m : 14 dm = 238 dm : 14 dm = 17 ggr.

Svar: 17 klänningar.

Vid innehållsberäkning måste båda måtten uttryckas i *samma sort.*

6. *Hur många gånger kan man* a) *ur 14 l saft få 2 l saft?* b) *ur 14 but. få 2 but. saft?* c) *ur* $4\frac{2}{3}$ *l få* $\frac{2}{3}$ *l?* d) *ur 1,4 l få 2 dl?*

a) 14 l : 2 l = 7 ggr.

b) 14 but : 2 but = 7 ggr.

c) $\frac{14}{3}$ l : $\frac{2}{3}$ l = 14 tredjedelslit. : 2 tredjedelslit. = 7 ggr.

d) 14 tiondelslit. : 2 tiondelslit. = 7 ggr.

Obs! Med sådana exempel visas, att *innehållstalet* är *oberoende* av *sortens* beskaffenhet och storlek, om blott denna är densamma för båda måtten.

7. *Hur många lådor socker med 2,5 kg i varje kan man få av 147,5 kg socker?*

147,5 kg : 2,5 kg =
= 1475 hg : 25 hg =
= 59 ggr.

Svar: 59 lådor.

```
1475 | 25
125  | 59
----
 225
-225
```

För att få heltalsvärden förvandlas båda måtten till *lägre sort* (i detta fall till hektogram)

8. *Hur många flaskor saft blir det av* $8\frac{1}{2}$ *l saft, om det går* $\frac{2}{3}$ *l på varje flaska?*

$8\frac{1}{2}$ l : $\frac{2}{3}$ l = $\frac{17}{2}$ l : $\frac{2}{3}$ l = $\frac{51}{6}$ l : $\frac{4}{6}$ l = 51 sjättedelslit. : 4 sjättedelslit. = *$12\frac{3}{4}$ ggr.*

Svar: $12\frac{3}{4}$ flaskor.

9. *Hur många muggar mjölk blir det av* $7\frac{1}{4}$ *l mjölk, om varje mugg rymmer 0,5 l?*

$7\frac{1}{4}$ l : 0,5 l = 7,25 l : 0,5 l =
= 725 hundradelslit : 50 hundradelslit = 14,5 ggr

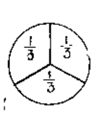
Svar: *$14\frac{1}{2}$ muggar.*

```
725 | 50
 
225
200
 250
 250
```

Delberäkning.

Hela tal (klass 3—4).

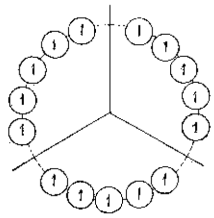
1. *En kaka delas lika mellan 3 pojkar. Hur stor del av kakan får var och en?*



Svar: a) (Muntligt) »En tredjedel av kakan».
b) (Skriftligt) $\frac{1}{3}$ kaka.

Obs! Detta är det *allmänt antagna uttrycks-* och *skrivsättet.* Så måste alla lära sig att säga och skriva.

2. *En kaka, som kostade 15 öre, delades lika mellan 3 pojkar. Hur mycket skulle var och en betala?*



$\frac{1}{3} \cdot 15$ öre = *5 öre.*

(Läses $\frac{1}{3}$ *av* 15 öre.)

Obs! Det är här fråga om *samma slags delning* som i ex. 1. — Därför böra här uttryckssätt och skrivsätt vara desamma som där.

Obs! Teckningen $\frac{1}{3} \cdot 15$ öre lästes förr (enligt quatuorspeciessystemets principer) »$\frac{1}{3}$ *gånger* 15 öre. I praktiska livet har man emellertid funnit detta uttryckssätt vara *onaturligt,* och numera har man ganska allmänt både i folkskolor och realskolor *övergått till läsningen* »$\frac{1}{3}$ *av* 15 öre». — Man säger *inte* längre, att »1 km är $\frac{1}{10}$ *gånger* 1 mil, utan »1 km är $\frac{1}{10}$ *av* 1 mil», inte heller »att räntan är en procent ($\frac{1}{100}$) *gånger* kapitalet» utan 1 % *av* kapitalet. Det står inte i våra deklarationsblanketter, att vi där skola uppgiva $\frac{1}{60}$ *gånger* förmögenheten, utan $\frac{1}{60}$ *av* denna. I sådant räknande är det ju *inte alls fråga om någon multiplikation* (upprepad sammanläggning), utan uppgiften är ju att bestämma *en del av storheten.* Med här valda utgångspunkter bör då detta räknesätt inte heller kallas multiplikation utan *delberäkning.* Räknetecknet bör inte vara »×» utan ett *av-tecken.* Som sådant användes här alltid *punkttecknet* »·».

3. *För 7 kg socker betaltes 4 kr 34 öre. Priset på 1 kg?*

$\frac{1}{7} \cdot \underbrace{434 \text{ öre}}_{\text{»Det hela»}} = \underbrace{62 \text{ öre.}}_{\text{»Delen»}}$

(Läses $\frac{1}{7}$ *av* 434 öre.)

Uträkning

$$\begin{array}{r} \frac{1}{7} \cdot 434 = 62 \\ -42 \\ \hline 14 \\ -14 \\ \hline \end{array}$$

Läsning vid uträkn.:
»$\frac{1}{7}$ av 43 är 6»
»$\frac{1}{7}$ av 14 är 2»

Delberäkning.

Bråk (klass 5—7).

4. *$17\frac{1}{3}$ l mjölk slås på 4 flaskor, lika mycket på varje. Hur mycket mjöl blir det på varje flaska?*

$\frac{1}{4} \cdot 17\frac{1}{3}$ l $= \frac{1}{4} \cdot \frac{52}{3}$ l $= \frac{13}{3}$ l $= 4\frac{1}{3}$ l. | Som *sort* tänkes här *»tredjedelsliter»* (bu teljer).

Obs! I *klass 5* böra alla hithörande exempel vara sådana, att delberäkninge kan göras *utan* förändring av nämnaren (sorten).

5. *19,2 l mjölk slogos på 6 flaskor, lika mycket på varje. Hur mycke blev det på varje flaska?*

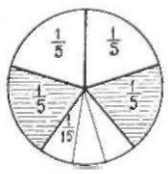
$\frac{1}{6} \cdot 19{,}2$ l $= ?$

(Läses: $\frac{1}{6}$ *av* 19,2 l).

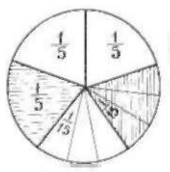
Uträkning: $\frac{1}{6} \cdot 19{,}2 = 3{,}2$
—18
12
—12

Läsning vid uträkn.
$\frac{1}{6}$ av 19 är 3
»Slut på de hela, *decimalkomma.»*
$\frac{1}{6}$ av 12 är 2

6. *Hur mycket* är a) $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{5}$ *kaka?* b) $\frac{1}{3}$ *av* $\frac{2}{5}$ *kaka?*

a) 

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ kaka $=$
$= \frac{1}{3 \times 5}$ kaka (se fig.)
$= \frac{1}{15}$ *kaka.*

b) 

$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$ kaka $=$
$= 2 \times \frac{1}{15}$ kaka(se fig.
$= \frac{2}{15}$ *kaka.*

Obs! För dessa uppgifters lösning krävos *en annan tankegång*, än de son mött i heltalsräkningen. Den är något för bråkräkningen säreget. Egentligen innebär den ett fortsatt klarläggande av *bråkbegreppet.*

Obs! Sådana uppgifter, där delberäkningen kräver *förändring av nämnaren.* behandlas först i *klass 6.*

7. *För att cykla 10 mil använde Olle $8\frac{1}{3}$ timmar. Hur lång tid behövde han för varje mil?*

$\frac{1}{10} \cdot 8\frac{1}{3}$ tim. $= \frac{1}{\cancel{10}_{2}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{3}$ tim. $= \frac{5}{6}$ tim. $=$
$=$ *50 min.*

| Teckningen *läses:* »$\frac{1}{10}$ *av* $8\frac{1}{3}$ tim». Räknesättet är *delberäkning* (icke multiplikation).

Obs! Vid uträkningen kan man visserligen i samband med omskrivning av uttrycket använda s. k. *gemensamt bråkstreck.* Detta är emellertid *alldeles onödigt.* Förkortningen kan lika gärna göras med uttrycket så skrivet, som här i exemplet angivits.

Olika sätt att teckna delberäkningen.

(Några kritiska anmärkningar.)

1. *Delberäkningen i klass 3—4 inläres ej som någon slags* ***bråkräkning.***

I alla nyare läroböcker i räkning lär man barnen i tredje klassen att beräkna »hälften», »tredjedelen», »fjärdedelen», »femtedelen», »sjättedelen», »sjundedelen», »åttondelen» och »niondelen» av olika mått och värden. — Flertalet författare ange då dessa delar med *ord* (bokstäver). I här skisserad metod har beaktats, att dessa delar skrivas både av barn och av lärare mycket lättare med *siffror.* — Givetvis utgöra dessa delar *bråk,* och detta gäller, vare sig de skrivas med bokstäver eller med siffror. I denna klass talar man dock ej alls med barnen om, att de äro bråk och vad som utmärker täljare och nämnare. Man blott visar barnen, att exempelvis »en tredjedel» skrives »$\frac{1}{3}$», alldeles som man lär dem, att »tre» skrives »3».

Av intresse är att i detta sammanhang taga del av vad som i berörda avseende framhålles i det metodiska arbetet: »Åskådningsmatematik» av Anna Kruse. Hon låter barnen redan i småskolan lära sig att räkna med hälfter, tredjedelar, fjärdedelar o. s. v. Hon skriver: »*Ingen må inbilla sig, att det är någon bråkräkning barnen här i själva verket syssla med.* Barnen behandla bråk på alldeles samma sätt som hela tal. Och vi må akta oss att på något sätt krångla in deras klara begrepp. Jag vill ännu en gång säga att vad jag här talar om är grundat på erfarenhet och erfarenheten har jag fått genom vad barnen lärt mig.»

2. *Det här valda teckningssättet för delberäkningen innebär en* ***värdefull förenkling*** *av räkningen i övrigt.*

I sedvanlig räkneundervisning enligt quatuorspeciessystemet har man låtit barnen lära sig att teckna en och samma delberäkningsuppgift på minst två olika sätt. Vi antaga, att exemplet är följande:

Ex. 1. Fem pojkar delade lika en kaka, som kostade 35 öre. H. m. borde var och en betala?

Uppgiften innebär ju då att beräkna »*en femtedel av 35 öre*». För denna uppgift har man lärt barnen:

a) i *klass 3* teckningen 35 öre : 5 = 7 öre och då kallat räknesättet *division.*

b) i *klass 5—6* teckningen $\frac{1}{5}\cdot 35$ öre = 7 öre, men då har man kallat räknesättet *multiplikation.*)

Att sådan dubbelhet i teckningssättet för en och samma räkneuppgift är ägnad att förbrylla barnen och att grumla deras föreställningar om vad som utmärker en multiplikation till skillnad från en division, ligger i öppen dag. Ännu mera famlande i valet av räknesätt bli barnen tydligen, om man inlär teckningen med s. k. bråkstreck såsom nytt beteckningssätt för delberäkning och icke konsekvent håller sig till detta teckningssätt utan sedan dessutom medtager de traditionellt brukliga. Barnen måste ju då *för delberäkning* lära sig *minst tre olika teckningssätt.* Belysande för läget i sådant fall äro nedanstående anvisningar, hämtade ur räkneläror i samband med följande två exempel.

Ex. 2. Tre personer dela $9\frac{3}{4}$ *kg kaffe lika. H. m. kilogram få de var?*

Anvisning: »Tecknas $\frac{9\frac{3}{4}\text{ kg}}{3} = ?$ kg eller $9\frac{3}{4}$ kg : 3 = ? kg eller $\frac{1}{3}$ av $9\frac{3}{4}$ kg = ? kg» eller »$\frac{1}{3} \times 9\frac{3}{4}$ kg = ? kg».

Ex. 3. En båt går $8\frac{1}{4}$ *mil på 3 timmar. Hur långt går den då på 1 timme (i medeltal)?*

Anvisning: »Tredjedelen av $8\frac{1}{4}$ mil kan tecknas på flera olika sätt:

a) $8\frac{1}{4}$ mil : 3 b) $\frac{8\frac{1}{4}\text{ mil}}{3}$ c) $\frac{33}{3 \times 4}$ mil d) $\frac{1}{3} \times 8\frac{1}{4}$ mil.»

I stället för att hänvisa barnen till sådan mångfald av teckningssätt och räkneanordningar för en och samma sak låter man barnen i nyelementär metod för sådan uppgift *endast använda ett teckningssätt.* Redan från början (i klass 3) få barnen för uppgiften i *ex. 1* lära sig teckningen $\frac{1}{5}\cdot 35$ öre, och detta teckningssätt användes sedan i alla klasser och kallas alltid *delberäkning.* — Lätt är ock att inse, att då »en femtedel av 35 öre» skall av barnen skrivas, just detta skrivsätt »$\frac{1}{5}\cdot 35$ öre» mera enkelt och naturligt ansluter sig till läsningen av uppgiften än sådana skrivsätt som »35 öre : 5 öre» och $\frac{\text{»35 öre»}}{5}$.

Med sådan behandling av delberäkningen *vinnes* åtskilligt:

a) Man behöver *ej* för sådan räkning *offra tid* på mer än ett teckningssätt.

b) Man *förebygger förväxling* med innehållsberäkningen.

c) Man inlär för delberäkningen redan från början det skrivsätt, *som är bäst* vid dess användning i *sammansatta räknesätt*, t. ex. i reguladetri. (Där brukar man ju aldrig använda divisionstecknet »:».)

d) Man får därmed *god brygga* från *heltalsräkningen* till *räkningen med bråk*. Då barnen redan i klasserna 3 och 4 bli väl förtrogna med både beteckning för och beräkning av sådana delar som »hälften, en tredjedel, en fjärdedel, en femtedel o. s. v., blir därmed mycket arbete undangjort för bråklärans inlärande i klass 5.

3. *S. k. divisionsstreck användes här endast för att ange att förhållandet mellan två storheter skall bestämmas.* (Se sid. 35—36.)

I sammanhang härmed må framhållas följande.

a) »*Divisionsstrecket*» är mycket lämpligt för att ange, att förhållandet mellan två storheter skall bestämmas. Uppgiften att beräkna, *hur stor del 5 m är av 7 m*, tecknas sålunda $\frac{5\ \mathrm{m}}{7\ \mathrm{m}} = ?$. Resultatet ger sig då mycket lätt. (Se sid. 35.)

b) »*Divisionsstreck*» utgör *icke* en naturlig beteckning för *delberäkning*. För att exempelvis ange »*en femtedel* av en *kaka*» är ju det allmänt brukliga skrivsättet »$\frac{1}{5}$ kaka». $\left(\text{Man skriver aldrig } \frac{\text{kaka}}{5}\right)$. — Skall man i överensstämmelse härmed skriva »*en femtedel* av *35 öre*», har man tydligen att först skriva $\frac{1}{5}$ och därefter 35 öre. Teckningen »$\frac{1}{5} \cdot 35$ öre» ger sig alltså omedelbart, $\left(\text{ej } \frac{35 \text{ öre}}{5}\right)$. — På samma sätt blir det naturligt, att, om priset på hela kakan är 35 öre, priset på $\frac{3}{5}$ kaka bör tecknas »$\frac{3}{5} \cdot 35$ öre» $\left(\text{ej } 3 \times \frac{35 \text{ öre}}{5}\right)$.

c) *Bråkstreck* är något helt annat än »*divisionsstreck*». Bråkstrecket är nämligen *ej alls beteckning för ett räknesätt*, utan ingår blott i tecknandet av ett *tal*, då det skrives som allmänt bråk. Bråket $\frac{3}{5}$ betyder exempelvis *ej*, att talet 3 skall delas i 5 lika delar och att en sådan del skall beräknas, utan — som läsningen av bråket tydligt visar — anger det, att man har 3 sådana delar, som man får, om man delar enheten (måttet i fråga) i 5 lika delar. — Att före inlärandet av bråk låta barnen använda divisionsstreck för delberäkningen blir därför gärna *ett hinder* för *naturlig uppfattning av bråkbeteckningen*. Då barnen exempelvis skola lära sig lägga samman $\frac{3}{8} + \frac{5}{8}$, är det icke lämpligt, att de tro uppgiften betyda »åttondelen av 3 + åttondelen av 5».

Sammanfattning.

De fem enkla räknesätten

med hela tal, allmänna bråk och decimalbråk.

1. *Sammanläggning (addition).*

Två flaskor rymma a) 4 l och 3 l. b) $\frac{4}{5}$ l och $\frac{3}{5}$ l. c) 0,4 l och 0,3 l. Båda tillsammans?

a) 4 l + 3 l = *7 l.* (Sorten är *hela* liter.)
b) $\frac{4}{5}$ l + $\frac{3}{5}$ l = $\frac{7}{5}$ l = $1\frac{2}{5}$ l. (» » femtedelsliter.)
c) 0,4 l + 0,3 l = *0,7 l.* (Sorten är tiondelsliter.)

2. *Fråndragning (subtraktion).*

Två böcker väga a) 4 kg och 2 kg. b) $\frac{4}{5}$ kg och $\frac{2}{5}$ kg. c) 0,4 kg och 0,2 kg. Skillnaden i vikt?

a) 4 kg — 2 kg = *2 kg.* (Sorten är *hela* kilo.)
b) $\frac{4}{5}$ kg — $\frac{2}{5}$ kg = $\frac{2}{5}$ kg. (Sorten är femtedelskilo.)
c) 0,4 kg — 0,2 kg = *0,2 kg.* (Sorten är tiondelskilo.)

3. *Gångertagning (multiplikation).*

Hur långt kommer man på 7 timmar, om man färdas a) 4 mil i tim? b) $\frac{4}{5}$ mil i tim? c) 0,4 mil i tim?

a) 7 × 4 mil = *28 mil* (sort är *hela* mil).
b) 7 × $\frac{4}{5}$ mil = $\frac{28}{5}$ mil = *$5\frac{3}{5}$ mil* (sort är femtedelsmil).
c) 7 × 0,4 mil = 28 tiondelsmil = *2,8 mil.*

4. *Innehållsberäkning (»innehållsdivision»).*

Hur många korgar bär blir det av 8 l bär, om det i varje korg lägges a) 4 l? b) $\frac{4}{5}$ l? c) 0,4 l?
Svar: a) 2 korg. b) 10 korg. c) 20 korg.

a) 8 l : 4 l = *2 ggr.*
b) 8 l : $\frac{4}{5}$ l = $\frac{40}{5}$ l : $\frac{4}{5}$ l = 40 femtedelslit. : 4 femtedelsliter = *10 ggr.*
c) 8 l : 0,4 l = 80 tiondelslit : 4 tiondelslit. = *20 ggr.*

Teckningen läses:
a) »8 l *innehåller* 4 l.»
b) »8 l » $\frac{4}{5}$ l.»

Obs! Båda måtten **skola uttryckas i *samma sorts delar.***

5. *Delberäkning (delningsdivision).*

5 pojkar skola dela en korg bär. Hur mycket får var och en, om korgen rymmer a) 20 l? b) $6\frac{2}{3}$ l? c) 3,5 l?

a) $\frac{1}{5}$ · 20 l = *4 l.*
b) $\frac{1}{5}$ · $6\frac{2}{3}$ l = $\frac{1}{5}$ · $\frac{20}{3}$ l = $\frac{4}{3}$ l = *$1\frac{1}{3}$ l.*
c) $\frac{1}{5}$ · 3,5 l = $\frac{1}{5}$ · 35 tiondelsliter = *0,7 l.*

Teckningen läses:
a) $\frac{1}{5}$ *av* »20 l.»
b) »$\frac{1}{5}$ *av* $6\frac{2}{3}$ l.»

Obs! **Räknesättet är här *ej* multiplikation utan *delberäkning*.**

B. Sammansatta räknesätt.

1. Några allmänna synpunkter.

Då barnen få att lösa räkneuppgifter, som i deras räknelära äro tecknade, kan det ofta vara tillräckligt, att de utföra räkneoperationerna i sina räkneböcker, men i fråga om *sakliga uppgifter* är det att tillråda, att barnen vänjas vid att i en *teckning ange räknevägen*, innan de taga i håll med uträkningarna. (Jfr sid. 7.)

Enligt gällande undervisningsplan böra uppgifter med mer än ett räknesätt icke föreläggas barnen förr än i fjärde klassen. Det torde ock vara lämpligt att hela skolan igenom undvika mera komplicerade uppgifter. I regel äro *barn ej mogna för »långa tankeräckor»*.

Vid lösningen av sammansatta räkneuppgifter är det vanligen bäst att låta barnen *teckna och räkna ut en sak i sänder*. Till belysning härav må upptagas behandlingen av följande vid en sparsamhetstävling lämnade exempel:

»Sara kokte dagligen 6 koppar kaffe till frukosten och 4 koppar till middagen. Hon använde 5 g bönor till varje kopp. Kaffet kostade 2,50 kr per kilo. H. m. kostade det kaffe, som gick åt under 360 dagar?»

a) I en del skolor angav barnen lösningen i *en enda teckning* på följande sätt:

»360 × 5 × 4 kopp. + 6 kopp. × 5 : 1 000 × 250 öre = ?» De ha tänkt rätt och fått riktigt resultat, men teckningen är uppenbarligen i många avseenden *felaktig*. Barnen ha icke behärskat den sedvanliga matematiska teckenapparaten med paranteser och olika räkneteckens bindkraft. Det må dem gärna förlåtas.

b) I andra skolor »tecknade» barn på följande sätt:

»6 kopp. + 4 kopp. = 10 kopp. × 5 = 50 gr × 360 = 18 kg × × 250 = 45 kr.» — Även här ha barnen vid lösningen följt riktig tankegång, men teckningen är tydligen ur flera synpunkter *oriktig*. Det har exempelvis ej alls generat barnen att sätta likhetstecken mellan koppar och gram och kronor.

c) I stället för sådana teckningar rekommenderas att låta barnen *med kort text ange varje räkneakt för sig*, exempelvis så här:

»Under 1 dag gick det åt 10 × 5 g = 50 g. Under 360 dagar gick det åt 360 × 50 g = 18 000 g = 18 kg.» Kostnaden blev 18 × 250 öre = 4 500 öre = ***45 kr.***	Åtminstone böra barnen vänjas vid att så *muntligen redogöra* för lösningen — ***kort*** och ***enkelt.***

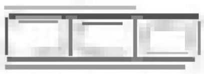
2. Multiplikation och delberäkning med hela tal.

Klass 4—5.

Många exempel i det praktiska livet kräva för sin lösning både delberäkning och multiplikation (exempelvis s. k. *reguladetriuppgifter*). Lämpligt är att redan tidigt lära barnen att ange hela lösningen för dessa i en enda teckning.

1. ***3 chokoladbitar kosta 30 öre. Vad böra då 2 bitar kosta?***

2 bitar ~ ? öre



$2 \times \frac{1}{3} \cdot 30$ öre = *20 öre.*

3 bitar ~ 30 öre

Obs! Ännu är ej något inlärt om bråk eller förkortning. Vid uträkningen göres *delberäkningen* först ($\frac{1}{3} \cdot 30$ öre = 10 öre) och sedan gångertagningen (2×10 öre = 20 öre).

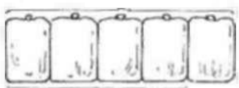
Obs! Teckningen erhålles genom följande resonemang. (Jfr fig.)

3 bitar kosta 30 öre
1 bit » $\frac{1}{3} \cdot 30$ öre. Alltså
2 bitar » *$2 \times \frac{1}{3} \cdot 30$ öre.*

Obs! Teckningen anger *två* olika räknesätt.

2. ***4 påsar socker kostade 96 öre. Vad var priset på 5 påsar?***

5 påsar ~ ? öre



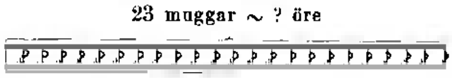
$5 \times \frac{1}{4} \cdot 96$ öre = 120 öre =
= *1 kr 20 öre.*

4 påsar ~ 96 öre

Uträkning:
$\frac{1}{4} \cdot 96$ öre = 24 öre.
5×24 öre = 120 öre.

3. ***Priset på 12 muggar saft är 1 kr 80 öre. Vad kosta då 23 muggar?***

23 muggar ~ ? öre



12 muggar ~ 180 öre

$23 \times \frac{1}{12} \cdot 180$ öre = 345 öre = *3 kr 45 öre.*

$\frac{1}{12} \cdot 180 = 15$	15
— 12	× 23
60	45
— 60	30
	345

4. ***5 askar stift kostade 60 öre. Vad kostade då 8 askar?***

8 askar ~ ? öre

5 askar ~ 60 öre

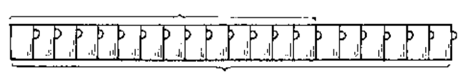
$8 \times \frac{1}{5} \cdot 60$ öre = ?

Barnen få i några exempel övertyga sig om att resultatet blir detsamma, vare sig man gör *delberäkningen först* och sedan multiplikationen (här 8×12 öre), eller *multiplikationen först* och sedan delberäkningen (här $\frac{1}{5} \cdot 480$ öre).

Den teckning, som här valts för reguladetriräkningen, ger sig alldeles självt, då det ju i dessa uppgifter gäller att utföra två räkneoperationer, en delberäkning och en multiplikation. Dessa tecknas alldeles så, som förut inlärts. Det vore här tydligen både *onaturligt* och meningslöst att införa s. k. *gemensamt bråkstreck.* — Barnen ha förut fått sammansatta räkneuppgifter, som kräva både addition och subtraktion, t. ex. 14 öre — 3 öre + 11 öre, och kunna lösa dem på olika sätt. I sista exemplet å föregående sida är angivet, hur man också i sådana fall kan utföra de olika räkneoperationerna i godtycklig ordning. Till en början är det dock bäst att låta barnen utföra delberäkningen först, så som alltid sker vid huvudräkning.

Det har varit vanligt, att man vid behandlingen av reguladetriuppgifter tillhållit barnen att först ange de olika storheterna i en bestämd uppställning. Om exemplet var följande: »*Vad bör betalas för 14 l potatis,* om *20 l kosta 1 kr 80 öre*», skulle sålunda skrivas $\left\{\begin{array}{l}\text{»20 l — 180 öre}\\ \text{14 l — ? öre}\end{array}\right\}$. Det blev ofta för barnen en god hjälp. Ännu mera klarhet i deras tänkande vinnes, om de vänjas vid att utsätta måtten i fråga i en *figur* (se a) eller *måttlinje* (se b).

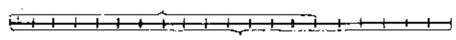
a) 14 l ~ ? öre



20 l ~ 180 öre

$14 \times \frac{1}{20} \cdot 180$ öre $= 14 \times 9$ öre $=$ $= 1$ kr 26 öre.

b) 14 l ~ ? öre



20 l ~ 180 öre

Obs! Det *kända* sakförhållandet anges *under* linjen (se fig.) och det *sökta* över linjen.

Då enkla reguladetriuppgifter så behandlas i slutet på fjärde klassens och i början av femte klassens räknekurser, erhålla barnen skärpt blick för *det säregna för delberäkningen* till skillnad från multiplikationen. (Medelst det förstnämnda räknesättet erhålles ett *minskat* värde, medelst det andra ett *ökat* värde.)

Därmed vinnes ock en *ypperlig övergång från heltalsräkning till räkning med bråk.* Då barnen löst sådana exempel som ex. 1—4, kunna de nästan utan vägledning förstå, vad man menar med sådana bråk som $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ o. s. v. och hur man skall få priset på sådana delar av ett föremål, då man känner priset på det hela. De veta ju då redan förut, hur man får $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ o. s. v., och teckningssättet $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ blir dem mycket lätt att förstå och använda.

3. »Multiplikation och division med bråk.»

I *quatuorspeciessystemet* har man varit angelägen om att få en sådan definition på räknesättet *multiplikation*, att man kan multiplicera en storhet (a) med ett tal (b), oberoende av om detta tal (b) är ett helt eller ett *brutet* tal. Man skall alltså kunna taga storheten ifråga både 4 ggr och $\frac{1}{5}$ ggr och $\frac{2}{5}$ ggr. Multiplikation kan tydligen då *inte* helt enkelt få sägas innebära en upprepad sammanläggning, utan till multiplikation skall då också höra sådana exempel som att beräkna $\frac{1}{5} \times a$ och $\frac{2}{5} \times a$, trots det att härvid det erhållna värdet (produkten) blott är *en del* av storheten i fråga.

Motsvarighet härtill möter i fråga om den s. k. *»delningsdivisionen»*. Man skall där kunna dividera en storhet (a) med ett visst tal (b), vare sig detta tal (b) är ett helt tal (t. ex. 5) eller ett *brutet* (t. ex. $\frac{1}{3}$ eller $\frac{2}{3}$). Delningsdivisionen får då *inte* definieras som det räknesätt, medelst vilket *delens storlek* bestämmes efter delning av storheten i fråga i ett visst antal delar. Till divisionsräknande skall ju exempelvis då också höra att beräkna »30 öre : $\frac{1}{3}$» så, att det blir *90 öre* och att beräkna »30 öre : $\frac{2}{3}$» så, att det blir *45 öre.* Härvid skall alltså det erhållna värdet (delen) bli *större* än det som divideras (delas). Här behövs en helt annan *definition*, denna: »Division är det räknesätt, medelst vilket man beräknar den ena faktorn till en av två faktorer bestående produkt, då man känner produkten och den andra faktorn».

Redan på 1890-talet framhölls med stor skärpa av den framstående *räknemetodikern K. P. Nordlund,* hurusom det *icke* är möjligt att göra räkning till något *för barn* fattbart, om denna grundas på sådana räknesättsbegrepp. (Se sid. 8.)

Den framstående pedagogen och matematikläraren, f. d. seminarierektorn *Harald Dahlgren,* som hade fått det stora förtroendet att lämna en redogörelse för räkneundervisningen i vårt land vid sekelskiftet, har i denna också tagit upp samma problem till särskilt skärskådande. (Se sid. 9.) Där återfinnes i berörda punkt följande beaktansvärda uttalande:

»Vad som beträffande bråkräkningen i metodiskt avseende erbjuder det största intresset, är den gamla stötestenen, som består i svårigheten eller omöjligheten att överföra de från heltalsräkningen medförda multiplikations- och divisionsbegreppen på bråkräkning, nämligen i de fall, då multiplikator och divisor är bråk. — Försök att i barnskolor i fråga om *multiplikation* använda *allmänna definitioner* sådana som: Produkten erhålles ur multiplikanden på samma sätt som multiplikatorn ur enheten, äro självklart förgäves. även om en sådan definition kan fattas av en och annan lärjunge. Samma sak i fråga om *division,* om man ger en sådan definition som: Division är den räkneprocedur, varigenom man med produkten och en av dess faktorer givna tager reda på den andra faktorn. De visa sig vara *till föga gagn,* om det gäller att lösa en saklig uppgift. Man måste finna sig i att formellt medge, vad saken i själva verket är, nämligen att såväl multiplikation som division med bråk innebära en *dubbel räkneoperation, som icke gärna låter definiera sig som enkel.»* — Man kan visserligen lära barnen »att teckna det sökta svaret och ur förut insedda resultat taga fram regeln för utförandet av den tecknade räkningen, men den nämnda stötestenen finns där dock alltjämt. Barnet föres kanske förbi den utan att märka det, men förr eller senare är den åter i vägen. De föreställningar, som barnet knyter till begreppen multiplikation och division kunna *icke* bibehållas vid multiplikation och division med bråk. Det måste ju använda *multiplikationstecknet,* ehuru det egentligen är fråga om en delning, och det måste använda *delningstecknet,* ehuru sakförhållandet anger, att det sökta värdet är större än det kända. Då barnet icke har möjlighet att sammanhålla de tecknade räkneoperationerna under definitioner eller föreställningar som omfatta båda operationerna, så blir den oundgängliga följden förvirring och osäkerhet.»

För att undanröja dessa svårigheter för barnen i deras räknande, följes i här tecknade metod det förslag till lösning, som skisserats i förutnämnda uppsats »Ett bidrag till metodiken för räkneundervisningen i folkskolan».[1] Den bärande grundtanken i detta är att ifrågavarande exempel — liksom reguladetriuppgifter — böra lösas som *sammansatta räkneuppgifter* bestående av såväl delberäkning som multiplikation. Hur detta kan ske, skall i det följande visas i samband med behandlingen av några valda exempel.

[1] Se Manhem, Tidskrift för uppfostran och undervisning, 1906.

a. »Multiplikation med bråk» ersättes med två enkla räknesätt:

Delberäkning och multiplikation.

Inom heltalsräkningen ha barnen redan förut lärt sig att beräkna exempelvis $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ o. s. v. av olika värden. (Se delberäkning.) De förstå då nästan utan närmare förklaringar, hur följande uppgift skall tecknas och lösas:

1. *En hel kaka kostade 35 öre. Vad skulle då $\frac{3}{5}$ av kakan kosta?*

$\frac{3}{\cancel{5}_1} \cdot \overset{7}{\cancel{35}}$ öre $=$
$= 21$ öre.

Muntlig förklaring:
$\frac{1}{5}$ av kakan kostar $\frac{1}{5} \cdot 35$ öre. Då bör
$\frac{3}{5}$ » » kosta $3 \times \frac{1}{5} \cdot 35$ öre eller $\frac{3}{5} \cdot 35$ öre.

Barnen inse omedelbart, **att det är en reguladetriuppgift**, som för sin lösning kräver *två räkneoperationer*, en delberäkning och en multiplikation. Då de emellertid nu lärt sig teckna bråk och känna till innebörden av ett sådant bråk som $\frac{3}{5}$, föredraga de dock gärna att i stället för det ursprungliga teckningssättet för reguladetri »$3 \times \frac{1}{5} \cdot 35$ öre» skriva kortare »$\frac{3}{5} \cdot 35$ öre». De få därmed full överensstämmelse med skrivsättet för $\frac{3}{5}$ kaka och äro lika fullt på det klara med, vilka räkneoperationer som med teckningen anges. — Räknesättet är givetvis icke multiplikation, icke heller delberäkning, utan det är ett *sammansatt räknesätt*, som liksom reguladetri omfattar *båda räknesätten*. Något namn på detta räknesätt behövs ej, men det kan ju kallas »reguladetri» eller »bråkdelsräkning». För att ej barnens föreställningar om de förut inlärda enkla räknesätten skola grumlas, bör det däremot ***ej kallas multiplikation.*** (Uppgiften innebär ju att beräkna ***delar*** av priset.)

2. *För 1 kg socker betaltes 62 öre. Vad skulle då $\frac{3}{4}$ kg kosta?*

$\frac{3}{\cancel{4}_2} \cdot \overset{31}{\cancel{62}}$ öre $= \frac{1}{2} \cdot 93$ öre $= 46{,}5$ öre $=$
$=$ *47 öre.*

Obs! I »skriftlig räkning» utföres multiplikationen *före* delberäkningen.

3. *För 1 liter saft betaltes 65 öre. Vad skulle då 0,3 l kosta?*

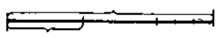
a) $\frac{3}{\cancel{10}} \cdot \cancel{65}$ öre $= \frac{1}{2} \cdot 39$ öre $= 19\frac{1}{2}$ öre $=$
$=$ *20 öre.*

b) $0{,}3 \cdot 65$ öre $= 19{,}5$ öre $=$
$= 20$ öre.

65
0,3
19,5

4. *Priset på 1 m tyg är 6 kr. Vad kostar då $2\frac{3}{4}$ m?*

$2\frac{3}{4}$ m ∼ ? kr



1 m ∼ 6 kr

a) *Huvudräkningsmetoden:*

$$\begin{cases} 2 \text{ m kosta } 2 \times 6 \text{ kr} = 12{,}\text{--} \text{ kr.} \\ \frac{3}{4} \text{ m} \quad » \quad \frac{3}{4} \cdot 6 \text{ kr} = 4{,}50 \; » \end{cases}$$

$$\mathit{16{,}50\ kr.}$$

b) *Skriftlig metod:*

$$2\tfrac{3}{4} \times 6 \text{ kr} = \frac{11}{\cancel{4}_{2}} \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \text{ kr} = \frac{33}{2} \text{ kr} = 16\tfrac{1}{2} \text{ kr} = \mathit{16{,}50\ kr.}$$

Obs! Huvudräkningsmetoden visar, att uppgiften innebär dels en multiplikation och dels en »bråkdelsräkning». Då man vill ha båda dessa räkneoperationer angivna i *en* teckning med bibehållande av talstorheten $2\frac{3}{4}$, måste man välja mellan de två räknetecknen »×» och »·». Eftersom heltalsvärdet är mer bestämmande för räkningens huvudkaraktär och resultatets storlek än delen ($\frac{3}{4}$), är det lämpligast att på traditionellt sätt låta *räkningen* i *huvudsak* framstå som *multiplikation* och att alltså välja »×»-tecknet och låta teckningen bli »$2\frac{3}{4}$ *gånger* 6 kr.». (»$\frac{11}{4} \cdot 6$ kr» bör dock läsas $\frac{11}{4}$ *av* 6 kr.)

5. *Priset på 1 l mjölk var 15 öre. Vad kostade då 2,3 l?*

2,3 × 15 öre = 34,5 öre = = *35 öre.*

Uträkning:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 2{,}3 \\ \hline 45 \\ 30 \\ \hline 34{,}5 \end{array}$$

Först *multipl.* 23 × 15 = 345. Sedan *delberäkn.* $\frac{1}{10} \cdot 345 =$ = 34,5.

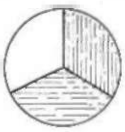
b. »Division med bråk» ersättes med två enkla räknesätt:

Delberäkning och multiplikation.

6. $\frac{2}{3}$ *kaka kostar 30 öre. Vad kostar då hela kakan?*

Enligt quatuorspeciessystemet skulle en sådan uppgift tecknas »30 öre : $\frac{2}{3}$» och denna teckning läsas »30 öre dividerat med $\frac{2}{3}$». Vid uträkningen skulle man först vända upp och ned på divisorn och sedan multiplicera (i stället för att dividera) med detta bråk, så att man fick: 30 öre × $\frac{3}{2}$ = *15 öre.*

Denna lösningsväg har helt naturligt alltmer övergivits i våra folkskolor. Vanligt folk har *icke kunnat få riktig* tilltro till denna metod, och man har i allmänhet undvikit den i praktiska livets räknande. Trots läroboksförfattares olika försök till förklaringar och bevis för dess riktighet, innebär denna metod för varje tänkande, där man bakom orden och räknandet vill ha sakligt och konkret underlag, något underligt *verklighetsfrämmande* och *något som strider mot gängse räkneföreställningar.* Nog förstår man vad det vill säga att dela en storhet i 3 delar, 4 delar, 5 delar o. s. v. Men hur skall man väl bära sig åt, om det begäres, att *30 öre skola »delas med* $\frac{2}{3}$», alltså i ett antal delar, som är mindre än 1? Och ännu orimligare måste en sådan delning te sig, då man får veta, att delningen skall göras så, att det *i varje del* blir 45 öre, alltså *mer* än det som delades. — I *praktiska livet* har man för sådana uppgifter som den i ex. 6 nämnda därför sökt sig fram till lösning på *andra, sakligt fattbara räknevägar.* Även här är det reguladetrimetoden, som tagits till hjälp. Denna det praktiska livets räkneväg har ock sedan länge inlärts i många folkskolor. Den förordas ock här för undervisningen *i klass 6* med följande skrivsätt:



$\frac{2}{3}$ **av kakan kostar** 30 öre.
$\frac{1}{3}$ » » $\frac{1}{2}\cdot 30$ öre.
Hela » » $3 \times \frac{1}{2}\cdot 30$ öre.
eller $\frac{3}{2}\cdot 30$ öre $=$ *45 öre.*

Obs! Teckningen läses:
»$\frac{3}{2}$ *av* 30 öre».

I *tredje ledet* skriva barnen vanligen helst $\frac{3}{2}\cdot 30$ öre genast. — Då barnen med sådant skriftligt resonemang löst många sådana exempel, finna de det ofta vara onödigt att medtaga mellanledet och skriva då efter muntligt resonemang genast $\frac{3}{2}\cdot 30$ öre.

7. *Vad kostar 1 kg socker, om* a) $\frac{4}{5}$ *kg kostar 48 öre?* b) *0,7 kg kostar 35 öre?*

a) 1 kg ~ ? öre

[illegible] 48 öre

$\frac{4}{5}$ kg kost. 48 öre.
[illegible] öre.
1 » » $\frac{5}{4}\cdot 48$ öre $=$ *60 öre.*

b) 1 kg ~ ? öre

$\frac{7}{10}$ kg ~ 35 öre

[illegible] kg kost. 35 öre.
[illegible] » » $\frac{1}{7}\cdot 35$ öre.
1 » » $\frac{10}{[illegible]}\cdot 35$ öre $=$ *50 öre.*

[illegible] *Vad är priset per meter, om* a) $2\frac{4}{5}$ *m kost. 9,80 kr?* b) *2,8 m kost. 11.20 kr.*

a) $\frac{14}{5}$ m kost. 9,80 kr.
$\frac{1}{5}$ m » $\frac{1}{14}\cdot 9{,}80$ kr.
1 m » $\frac{5}{14}\cdot 9{,}80$ kr $=$
$=3{,}50$ kr.

b) $\frac{28}{10}$ m kost. 11,20 kr.
[illegible]
1 m » $\frac{10}{28}\cdot 11{,}20$ kr. [illegible]
$= 4$ kr.

Anm. Då många sådana exempel blivit lösta, göres resonemanget blott muntligt och teckningen skrives *genast* »$\frac{5}{14}\cdot 9{,}80$ kr».

4. Förhållandebegreppet och barns räknande.

I det dagliga livets räknande möter jämt och ständigt sådana uppgifter som att bestämma, hur stort ett värde är i förhållande till ett annat. Man vill exempelvis ha reda på, hur många gånger en väg är längre än en annan, *hur många gånger* en yta är *större* än en annan, hur många gånger tyngre och dyrare en vara är en annan. För sådana uppgifter, som avse förhållandet mellan ett större mått och ett mindre, ha barnen redan inom heltalsläran fått ett gott lösningssätt i *innehållsberäkningen*. Medelst detta räknesätt ha de ju fått lära sig att bestämma, hur många gånger ett större mått *innehåller* ett mindre. Ordet förhållande har kanske ej alls använts, och dock har därmed givits en värdefull utbildning för uppfattning av *förhållandebegreppet*, sådant det förefinns i en hel mängd uppgifter av detta slag.

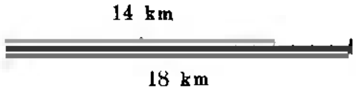
Lika ofta förekomma emellertid sådana uppgifter som att bestämma, *hur stor del ett mått är av ett annat*, exempelvis hur stor del ett vägstycke, som är 14 km, är av en väg, som är 18 km lång. Dessa fordra helt annan behandling än de först nämnda. Om man här — som förr ofta skett — helt enkelt hänvisar till »*vanligt divisionsförfarande*» (en mekanisk räkneanordning) ger man barnen ingen förklaring, och de bliva då ej heller förtrogna med vad räkningen i sådana fall innebär. Häri ligger ock säkerligen anledningen till att såväl ungdomen i våra skolor som folk annars ofta röja en famlande osäkerhet och dunkelhet i sitt tänkande, så fort det blir fråga om sådana uppgifter som att bestämma, hur stort ett mindre mått är i jämförelse med ett större. — För att *lösningen* av dessa uppgifter skall bli förstådd, måste den *baseras på helt andra räkneföreställningar*, än som knyta sig till *division* (innehållsberäkning). Barnen förstå visserligen mycket bra, om man tänker på sträckan 12 km, att man kan ur den få 2 km, 3 km, 4 km ett visst antal gånger, men de vilja ej gärna vara med om, att 12 km skall kunna innehålla 15 km (eller mått som äro större än 12 km). För dem »*går det inte*» att taga 15 km ur 12 km. Detta är för dem lika omöjligt som att taga 15 km *ifrån* 12 km.

Den räkneväg, som här naturligt ger sig, är samma räkneförfarande, som användes i början av bråkläran, då barnen göras förtrogna med bråkbegreppet. Liksom där får man resultatet genom reguladetriresonemang på följande sätt:

a. Hur stor del ett mått är av ett annat.

Hela tal och decimalbråk. Klass 6.

1.



18 km är hela vägen.
1 km » $\frac{1}{18}$ av » (Se figuren.)
14 km » 14 ggr längre, alltså $\frac{14}{18}$ eller $\frac{7}{9}$ av vägen.
Svar: $\frac{7}{9}$ *av vägen.*

Naturligtvis kan man sedan förvandla $\frac{7}{9}$ till decimalbråk, om man så vill, men denna räkning hör tydligen ej till det *väsentliga* i dessa problems lösning.

Lösningssättet är tydligen detsamma, som allmänt användes vid *sortförvandlingar från lägre till högre sort.*

2. *En penna hade varit 9 cm lång. Hur stor del av den var kvar, då den endast var 4 cm lång?*

$\dfrac{4\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \frac{4}{9}$. *Svar:* $\frac{4}{9}$ *av pennan.*

Lösningen erhålles genom följande reguladetriresonemang:
9 cm är hela pennan.
1 cm » $\frac{1}{9}$ av »
4 cm » 4 ggr så mycket, alltså $\frac{4}{9}$ av pennan.

Obs! Teckningen läses »4 cm genom 9 cm» är $\frac{4}{9}$.

Obs! Uttrycket *förhållandet* undvikes. Barn förstå icke meningen med uppgiften, om man frågar: »Vad är förhållandet mellan 4 cm och 9 cm»?

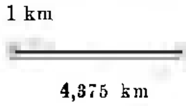
Obs! I teckningen $\dfrac{4\text{ cm}}{9\text{ cm}}$ är strecket *icke* något *bråkstreck.* Teckningen anger nämligen *icke* ett *bråk* utan ett räknesätt, d. v. s. att man vill ha en viss räkneuppgift löst. Vilken denna är, böra barnen säga i varje fall, exempelvis så här: »Jag skall ta reda på, hur stor del 4 cm är av 9 cm.»

3. *Kajsa hade plockat 1,8 l bär och gav Anna 1,2 l. Hur stor del av bären fick Anna?*

$\dfrac{12\text{ dl}}{18\text{ dl}} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$.
Svar: $\frac{2}{3}$ av bären.

Obs! Båda måtten måste anges i samma sort eller samma sorts delar.

4. *Rapp skulle cykla 4,375 km. Hur stor del av vägen hade han tillryggalagt, då han cyklat 1 km?*



$\dfrac{1\text{ km}}{4{,}375\text{ km}} = \dfrac{1000\text{ m}}{4375\text{ m}} = \dfrac{1000}{4375} = \dfrac{8}{35} = 0{,}23.$

Svar: Ungefär 0,23 av vägen.

b. Att beräkna förhållandet mellan två mått (bråk).

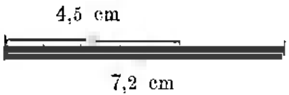
Förlängningsmetoden. Klass. 7.

5. *Hur stor del är* a) *3 dm av 7 dm?* b) *3 m av 7 m?* c) *3 km av 7 km?*

6. *Vad är förhållandet mellan* a) *3 dm och 5 dm?* b) *6 dm och 10 dm?* c) *9 dm och 15 dm?* d) *30 dm och 50 dm?*

Med sådana exempel påvisas, att *resultatet* (förhållandet) *blir detsamma, även om båda måtten förstoras,* blott de båda göras lika många gånger större. *Uttrycket* kan *»förlängas»*.

7. ***En bokpärms bredd är 4,5 cm och längd 7,2 cm. Vad är förhållandet mellan bredden och längden?***

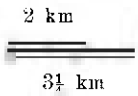


$$\frac{4{,}5\text{ cm}}{7{,}2\text{ cm}} = \frac{45\text{ cm}}{72\text{ cm}} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}.$$

Svar: Bredden är $\frac{5}{8}$ av längden.

Obs! Uttrycket $\frac{4{,}5\text{ cm}}{7{,}2\text{ cm}}$ är här »förlängt med 10.»

8. ***En väg är 2 km*** och ***en annan $3\frac{1}{4}$ km. Hur stor är den första i förhållande till den andra?***



$$\frac{2\text{ km}}{3\frac{1}{4}\text{ km}} = \frac{8\text{ km}}{13\text{ km}} = \frac{8}{13}.$$

Obs! Båda måtten tagas 4 ggr. (»Man förlänger uttrycket» med 4.)

Då barnen enligt ovanstående lärt sig såväl att bestämma, hur många *gånger större* ett mått är än ett annat (genom *innehållsberäkning*), som också ***hur stor del*** ett mått är av ett annat (genom *reguladetriresonemang*), ha de därmed dock *icke* fått något färdigbildat och fullödigt *förhållandebegrepp*, men genom att de gjorts förtrogna med nämnda två sidor av detta, har en *god grund* lagts för en rätt uppfattning av detta svåråtkomliga begrepp, så att de sedan vid mera mogen ålder skola kunna förstå, vad därmed sammanhör. Detta innebär en stor vinst såväl för deras arbete med praktiska livets räkneuppgifter som för deras matematiska bildning på det hela taget. Förhållandebegreppet utgör nämligen själva *»hörnstenen»* i allt matematiskt tänkande.

Efter hand kunna bägge räkneakterna inordnas under *ett och samma räknesätt, förhållanderäkning* eller, om man föredrager det gamla namnet, »innehållsdivision». *Räknetecknet* för detta blir antingen divisionstecknet (»:») eller »förhållandestrecket», motsvarande de olika teckningssätten för en analogi 1) $a : b = c : d$ eller 2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

5. Behandlingen av reguladetriuppgifter.

a. Med sedvanligt reguladetriresonemang.

(Klass 5—6.)

1. *Ett 8 m långt tygstycke kostade 3,60 kr. Vad kostade 5 m?*

5 m ~ ? kr

$\frac{5}{8}\cdot 3{,}60$ kr $= 2{,}25$ kr.

8 m ~ 3,60 kr.

Förklaring:

8 m kosta 3,60 kr. Då kostar
1 m $\frac{1}{8}\cdot 3{,}60$ kr och alltså
5 m $5\times\frac{1}{8}\cdot 3{,}60$ kr eller
$\frac{5}{8}\cdot 3{,}60$ kr.

Obs! Då barnen i bråkläran lärt sig att beräkna bråkdelar av ett värde, föredraga de i regel teckningssättet »$\frac{5}{8}\cdot 3{,}60$ kr» framför det teckningssätt de använde inom heltalsräkningen. Det har ju precis samma innebörd men är kortare. — Detta teckningssätt är också att föredraga ur en annan synpunkt. Det motsvarar ett annat sätt att lösa uppgiften, som är mycket vanligt i praktiska livet och är en i åtskilliga fall mycket elegantare behandling av uppgiften. Man säger som så: Hela tygstycket (8 m) kostade 3 kr 60 öre. Då bör förstås 5 m, som utgör $\frac{5}{8}$ av tygstycket, kosta $\frac{5}{8}\cdot 3{,}60$ *kr.* Enligt *figuren* erhålles så teckningen *direkt.* Då den tankegången lägges till grund för teckningen, är det den s. k. *förhållandemetoden,* som användes.

2. *Ett 2,4 m långt tygstycke kostar 9 kr. Vad kostar då 1,8 m?*

18 dm ~ ? kr

$\frac{18}{24}\cdot 9$ kr $=$ *6,75 kr.*

24 dm ~ 9 kr

Teckningen erhålles som i *ex. 1.* Värdefullt är att också med hjälp av figuren visa, att tygbiten är $\frac{18}{24}$ av hela tygstycket och att priset på den därför bör bli $\frac{18}{24}$ av hela priset (Förhållandemetoden).

3. *Ett tåg gick på $\frac{3}{4}$ tim. 36 km. På 5 timmar?*

5 tim ~ ? km

$\frac{3}{4}$ tim ~ 36 km

$5\times\frac{4}{3}\cdot 36$ km $=$
$=$ *240 km.*

Förklaring:

På $\frac{3}{4}$ tim gick det 36 km.
» 1 » » » $\frac{4}{3}\cdot 36$ km[1]
» 5 » » » $5\times\frac{4}{3}\cdot 36$ km.

[1] Jfr ex. 7 på sid. 33.

b. Förhållandemetoden.

(Klass 7.)

Sedan barnen i 7:de klassen lärt sig att bestämma förhållandet mellan två mått, även då dessa äro uttryckta medelst bråk, kan man lämpligen lära dem att med hjälp av måttlinjer lösa reguladetriuppgiften enligt förhållandemetoden.

4. *Vad är priset på 1 m, då 2,4 m kostar 7,20 kr?*

$\frac{1}{2,4} \cdot 7,20$ kr $= \frac{10}{24} \cdot 7,20$ kr $=$ *3 kr.*

Förklaring till teckningen:

Av figuren framgår, att 1 m är $\frac{1}{2,4}$ av hela tygstyckets längd.

Alltså bör priset på 1 m vara $\frac{1}{2,4}$ av hela priset.

Obs! Teckningen $\frac{1}{2,4} \cdot 7,20$ kr läses »1 genom 2,4 av 7,20 kr.» Vid uträkningen förlänges dubbelbråket med 10. (Jfr ex. 7 å sid. 36.)

På samma sätt kunna tydligen alla de exempel behandlas, i vilka det gäller att bestämma »enhetsvärdet», d. v. s. värdet på ett mått, då man känner värdet på vissa bråkdelar av detsamma (Jfr sid. 33).

5. *Vad kostar 1 kg socker, om* a) $\frac{4}{5}$ *kg kostar 48 öre?* b) *0,7 kg kostar 35 öre?*

a)

$\frac{1}{\frac{4}{5}} \cdot 48$ öre $= \frac{5}{4} \cdot 48$ öre $=$ *60 öre.* (Jfr Ex. 7, sid. 33.)

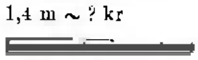
(Dubbelbråket i teckningen förlänges med 5.)

b)

$\frac{1}{0,7} \cdot 35$ öre $= \frac{10}{7} \cdot 35$ öre $=$ *50 öre.* (Jfr Ex. 7, sid. 33.)

Blir det fråga om att beräkna värdet på flera sådana enheter, kan detta lätt ske så som framgår i följande exempel.

6. *Ett 2,4 m långt stycke kostar 7,20 kr. Vad kosta 1,4 m?*



$1,4 \times \frac{1}{2,4} \cdot 7,20$ kr $= \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{10}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{24}}} \cdot \overset{0,60}{\cancel{7,20}}$ kr $=$ *4,20 kr.*

7. *$5\frac{1}{3}$ l saft kostar 6,40 kr. Vad kostar $7\frac{5}{6}$ l?*

$7\frac{5}{6}$ l ~ ? kr

$5\frac{1}{3}$ l ~ 6,40 kr

$$7\tfrac{5}{6} \times \frac{1}{5\frac{1}{3}} \cdot 6{,}40 \text{ kr} = \frac{47}{6} \cdot \frac{3}{16} \cdot \overset{0,2}{\cancel{6{,}40}} \text{ kr} =$$

Obs! Dubbelbråket $\frac{1}{5\frac{1}{3}}$ förlänges med 3 och blir då $= \frac{3}{16}$.

8. ***Axel cyklar 12 km på $\frac{3}{4}$ tim. Hur långt kommer han på $2\frac{1}{2}$ tim.?***

$2\frac{1}{2}$ tim. ~ ? km

$\frac{3}{4}$ tim. ~ 12 km

$$2\tfrac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \cdot 12 \text{ km} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \overset{4}{\cancel{12}} \text{ km} = \textit{40 km}.$$

Obs! Dubbelbråket $\frac{1}{\frac{3}{4}}$ förlänges med 4 och blir då $\frac{4}{3}$.

c. Reguladetriexempel med motsatta förhållanden.

Ehuru hithörande exempel äro mycket vanliga och nyttiga, är det i regel lämpligt att *icke* låta sådana tillhöra den obligatoriska kursen för *klass 6*. Det är nämligen ganska viktigt, att barnen först äro fullt förtrogna med lösningen av reguladetriexempel med analoga förhållanden, och merendels måste man därför spara dessa exempel med indirekt proportionalitet till *klass 7 och fortsättningsskolan*. Lösningssättet framgår av följande två exempel.

1. ***Vid en forskningsfärd hade man proviant för 10 personer och 30 dagar. Hur länge räckte provianten, om det blev 15 personer och matportionerna fortfarande skulle vara lika stora?***

Lösning:

Om det varit 10 personer, skulle förrådet ha räckt 30 dagar.
» » » 1 » , » » » » 10×30 dagar.
» » blev 15 » , räckte » $\frac{1}{15} \cdot 10 \times 30$ dagar $=$
$= \textit{20 dagar}.$

2. *Rapp åkte hem på 90 min., då han for $3\frac{1}{2}$ mil i timmen. Hur lång tid skulle hemfärden tagit, om han åkt 4,5 mil i timmen?*

Om han åkt $3\frac{1}{2}$ mil i timmen, skulle han behövt 90 min. för resan.
» » » 1 » » » , » » » $3\frac{1}{2} \times 90$ min. » »
» » åker 4,5 » » » , behöver han $\frac{1}{4{,}5} \cdot 3\frac{1}{2} \times 90$ min. $=$
$= \frac{10}{45} \cdot \frac{7}{2} \cdot 90$ min. $= \textit{70 min.}$

Reguladetrimetoden förr och nu.

Inom aritmetiken betecknar den metod, i vilken man vid räknandet bygger på »*Regula de tri*» (d. v. s. »regeln om tre» storheter, som ger den fjärde), ett stort framsteg. I den under senare hälften av 1600-talet mycket använda läroboken i aritmetik av N. P. Agrelius visas också, hur nästan alla praktiska livets räkneuppgifter kunde lösas medelst den, och den kallas där »*Regula Aurea*», »thet är Gyllene Regel». — Denna regel angav emellertid för ifrågavarande uppgifters lösning *en helt annan räkneväg* än den, som under sista femtio åren mestadels använts. Om man exempelvis skulle beräkna priset på 5 m tyg, då man visste, att 8 m tyg kostade 3,60 kr, grundade man räkningen på, att förhållandet mellan priserna skulle vara lika med förhållandet mellan tygstyckenas längder. Längre fram, då nu brukliga räknetecken kommit att användas, lät man ofta teckningen vara: »x kr : 3,60 kr = 5 m : 8 m, varvid x kr fick ange det sökta priset. För beräkningen av x inlärdes en mekanisk regel, som gav rätt resultat, ofta utan att man förstod varför. Så ha hithörande exempel mestadels lösts ända fram till 1880-talet. (Se exempelvis Lärobok i räkning av P. A. v. Zweigbergk, tryckt 1885.)

Den numera *sedvanliga reguladetrimetoden*, i vilken man tecknar *värdet på enheten* i ett mellanled, är för barnen mycket lämplig och utomordentligt värdefull för klarläggande av olika räkneuppgifter. Den har dock sina *svagheter*, bland annat finner man ofta, att just detta mellanled får något overkligt över sig. Ett enda exempel härpå. »*Under viss tid räcker 250 l havre till 5 hästar. Till huru många hästar räcker då 750 l under samma tid?* Här blir mellanledet: 1 l havre skulle räcka till $\frac{1}{250} \cdot 5$ hästar $= \frac{1}{50}$ häst (!). I *praktiska livet* löses ock detta exempel liksom många andra reguladetriuppgifter i stället på det sätt, som kallats förhållandemetoden (se sid. 38). Man söker sig *ej* först till »enheten», utan ser efter, hur det är med *förhållandet mellan mängderna* i fråga. Lantmannen skulle i nämnda exempel säga som så: »750 l, det är ju 3 ggr så mycket som 250 l. Då bör den säden räcka till 3 ggr så många hästar, alltså till 15 hästar.»

Då barnen vänjas vid att för reguladetriuppgifterna använda *måttlinjer*, få de efter hand alltmer blick för förhållandemetoden, som ger dem teckningen utan det omständliga reguladetriresonemanget. Det är likaledes av intresse att lägga märke till, att till grund för denna lösning (med hjälp av förhållandet mellan två av de kända storheterna) ligger samma tankegång, som gav teckningen i ovannämnda lösning medelst »Regula Aurea», men att man här lyckats få en teckning, som är fullt i överensstämmelse med barnens räknande i övrigt.

Behandlingen av olika slags sammansatta räkneuppgifter.

(Sammanfattande översikt.)

I. Elsa köpte 2 kg kaffe à 2,90 kr och 5 kg socker à 0,45 kr. **H. m. skulle hon ha *tillbaka* på 10 kr?**

Kaffet kost. $2 \times 2{,}90$ kr $= 5{,}80$ kr.
Sockret » $5 \times 0{,}45$ kr $= 2{,}25$ »
S:a $8{,}05$ kr.
10 kr $- 8{,}05$ kr $=$ *1,95 kr.*

II. a) Siljans yta är 2,9 mil². *H. m. ggr större* är Vänern, som är 55,5 mil²?
b) En ångbåt behövde för en resa $22\frac{1}{2}$ tim., en flygare blott $2\frac{2}{3}$ tim. *Hur många gånger längre* tid behövde ångb.?

a) $55{,}5$ mil² : $2{,}9$ mil² $=$
$= 5\,550$ km² : 290 km² $=$
$=$ *19,14 ggr.*
b) $22\frac{1}{2}$ tim. : $2\frac{2}{3}$ tim. $=$
$= \frac{45}{2}$ tim. : $\frac{8}{3}$ tim $=$
$=$ 135 sjättedels tim. : 16 sjättedelstim. $=$ *$8\frac{7}{16}$ ggr.*

III. a) Erik hade rest 4,5 mil. *Hur stor del* av vägen var det, om denna var 18 mil?
b) Elsa hade 7 l äpplen. Av dem kunde blott $4\frac{2}{3}$ l användas. *Hur stor del* var det?

a) $\frac{4{,}5 \text{ mil}}{18 \text{ mil}} = \frac{45 \text{ km}}{180 \text{ km}} = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$
b) $\frac{4\frac{2}{3} \text{ l}}{7 \text{ l}} = \frac{14 \text{ tredjedels lit.}}{21 \text{ tredjedels lit.}} = \frac{2}{3}$

IV. *Vad kostar 1 liter* grädde,
a) om 4 l kostar 9 kr?
b) om 0.7 l kostar 1,75 kr?
c) om $1\frac{2}{3}$ l kostar 3,50 kr?

a) $\frac{1}{4} \cdot 9$ kr $=$ *2,25 kr.*
b) $\frac{10}{7} \cdot 1{,}75$ kr $=$ *2,50 kr.*
c) $\frac{3}{5} \cdot 3{,}50$ kr $=$ *2,10 kr.*

Teckningen av b) och c) erhålles i *klass 6* genom reguladetriresonemang, men i *klass 7* tecknas uppgiften på följ. sätt:

b) $\frac{1}{0.7} \cdot 1{,}75$ kr.

c) $\frac{1}{1\frac{2}{3}} \cdot 3{,}50$ kr.

V. Om 1 kg kaffe kostar 2,80 kr, vad kostar då a) 3 kg? b) $\frac{1}{4}$ kg? c) $2\frac{3}{4}$ kg?

a) $3 \times 2{,}80$ kr $=$ *8,40 kr.*
b) $\frac{1}{4} \cdot 2{,}80$ kr $=$ *0.70 kr.*
c) $2\frac{3}{4} \times 2{,}80$ kr $= \frac{11}{4} \cdot 2{,}80$ kr $=$
$=$ *7,70 kr.*

VI. a) Om 9 kg socker kost. 4,50 kr, vad kostar då 7 kg?	a) $\frac{7}{9} \cdot 4{,}50$ kr $=$ *3,50 kr.* (I femte klassen $7 \times \frac{1}{9} \cdot 4{,}50$ kr.)
b) Om 7,8 m tyg kost. 5,70 kr, vad kostar då 6,5 m.	b) $\frac{6{,}5}{7{,}8} \cdot 5{,}70 \text{ kr} = \frac{65}{78} \cdot 5{,}70 \text{ kr} = \mathit{4{,}75\ kr.}$
c) Olle åkte på $4\frac{2}{3}$ tim. 20 mil. Hur långt kom han då på $3\frac{1}{2}$ tim.?	c) $3\frac{1}{2} \times \frac{3}{14} \cdot 20$ mil[1] $= \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{14} \cdot 20$ mil $=$ $= \mathit{15\ mil.}$

Obs! Teckningen i c) av vägsträckan, som han åkte på 1 timme ($\frac{3}{14} \cdot 20$ mil), erhålles i *klass 6* genom reguladetrīresonemang, i *klass 7* genom teckn. $\frac{1}{4\frac{2}{3}} \cdot 20$ mil.

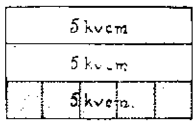
C. Beräkningar inom speciella sakområden.

1. Geometriska beräkningar.

Rätlinjiga figurer och kroppar.

(Klass 4.)

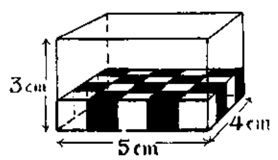
Rektangeln.



a) *Omkretsen* = summan av sidorna.	a) Någon annan regel behövs tydligen ej.
b) *Ytan* $= 3 \times 5$ cm² $=$ $= \mathit{15\ cm^2}$.	b) *Förklaring:* I *en* rad efter längden får det plats 5 cm². I 3 sådana rader alltså 3×5 cm².

Obs! Formeln »Ytan = bredden × längden» inläres icke i denna klass.

Rätvinkliga pelaren (lådan).



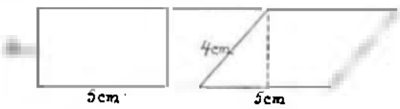
a) *Ytnätet* = summan av basytorna och sidytorna.

b) *Volymen* $\begin{cases} \text{Basytan} = 4 \times 5 \text{ cm}^2. \\ \text{Bottenlagret} = 4 \times 5 \text{ cm}^3. \\ \text{Hela volymen} = 3 \times 4 \times 5 \text{ cm}^3 = \\ = \mathit{60\ cm^3}. \end{cases}$

Obs! Någon formel »Volymen = höjden × bredden × längden» inläres ej i denna klass.

(Klass 5.)

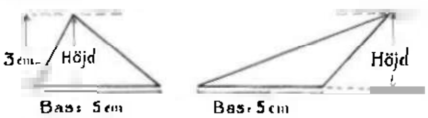
Parallellogrammen.



a) *Omkretsen* = summan av sidorna.
b) *Ytan* = *höjden* × × *basen*[1].
(Ex. Ytan = 3 × 5 cm² = 15 cm².

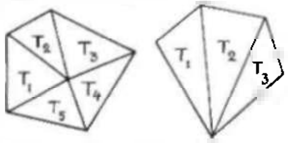
[1] Här inläres detta förkortade uttryckssätt.

Triangeln.



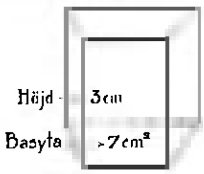
a) *Omkretsen* = summan av sidorna.
b) ***Ytan*** = $\frac{1}{2}$ ***av höjden*** × ***basen.***
(Ex. Ytan = $\frac{1}{2} \cdot 3 \times 5$ cm² = $7\frac{1}{2}$ cm²).

Månghörningar.



a) *Omkretsen* = summan av sidorna.
b) *Ytan* = summan av deltrianglarna (T_1 + + T_2 + T_3 + — — —).

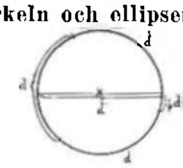
Rätlinjiga pelaren.



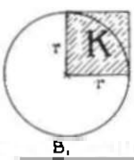
a) *Ytnätet* = summan av basytorna och sidytorna.
b) *Volymen* = höjden × basytan.
(Ex. Volymen = 3 × 7 cm³ = 21 cm³.)

Kroklinjiga figurer och kroppar.
(Klass 6—7.)

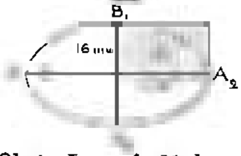
Cirkeln och ellipsen.



a) *Cirkelns omkrets* = = $3\frac{1}{7}$ × diametern.
Cirkelns diameter = = $\frac{7}{22}$ · omkretsen.



b) *Cirkelns yta* = = $3\frac{1}{7}$ × kvadraten på radien (K).

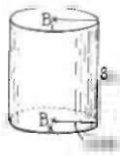


c) *Ellipsens yta* = = $3\frac{1}{7}$ × rektangeln R.

Obs! Barnen få *inte* lära sig några geometriska formler med *algebraisk* karaktär, sådana som **2 × 3,14 × r.** I stället få de lära sig *minnesregler*, som ange ett *sakligt sammanhang*. (t. ex. $3\frac{1}{7}$ × diametern.)

Obs! I st. f. $3\frac{1}{7}$ kan också sättas 3,14. Märk dock, att $3\frac{1}{7}$ är ett riktigare värde och dessutom ofta bekvämare att använda vid uträkningen.

Cylindern.



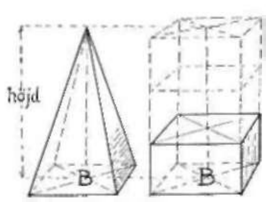
a) *Mantelytan* = höjden × basytans omkrets.

Ytnätet = summan av mantelytan och basytorna.

b) *Volymen* = höjden × basytan.

Ex. Basytan $= 3\frac{1}{7} \times 3{,}5 \times$ $\times\ 3{,}5\ \text{cm}^2 = 38{,}5\ \text{cm}^2$.
Bottenlagret $= 38{,}5\ \text{cm}^3$.
Volymen $= 3 \times 38{,}5\ \text{cm}^3 =$ *115,5* cm^3.

Pyramiden.

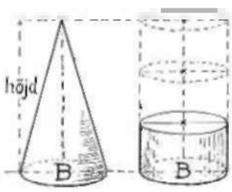


a) *Ytnätet* = summan av sidytorna och basytan.

b) *Volymen* = $\frac{1}{3}$ av »motsvarande pelarens» volym.

Lagen påvisas experimentellt (se Räknelära i tal och bild, del VII eller F).

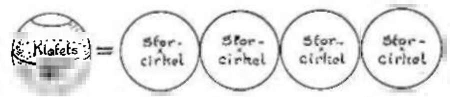
Konen.



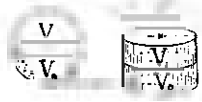
a) *Mantelytan* utvecklad = en cirkelsektor (se Räknel. del VII).

b) *Volymen* = $\frac{1}{3}$ av omskrivna cylinderns volym (se Räknel., del VII).

Klotet.

a) 

Ytan = 4 × storcirkelns yta.

b) 

Volymen = $\frac{1}{3}$ av omskrivna cylinderns volym.

Riktigheten av dessa regler påvisas experimentellt (se Räknelära i tal och bild, del VII.)

2. Procent- och ränteräkning.

Några allmänna synpunkter.

Procenträkningens innebörd framträder bäst, då man använder *allmänt bråk* för procentdelen. (4 % omskrives alltså till $\frac{4}{100}$.)

Lämpligt är att i »*måttlinje*» åskådliggöra såväl det som skall vara 100 % (inköpspris eller begynnelsekapital) som också det som skall vara vissa procent av detta (vinst eller årsränta). Då *måttlinje* förut använts av barnen i reguladetriräkningen, kommer sådan linje också vid procenträkningen att på ett gott sätt införa barnen både i uppgifternas sakliga innebörd och i teckningens mening. Den kräver visserligen litet arbete och besvär, men detta är mycket värdefullt och i många fall rent av nödvändigt, för att det skall bli riktig ordning och styrsel i barnens tänkande. — Barnen få sålunda lära sig att *lösa procent- och ränteproblemen* på *samma sätt som vanliga reguladetri-exempel,* vare sig det är vinst (ränta) eller procent som sökes. På samma sätt lösas ränteproblem, i vilka tiden eller begynnelsekapitalet sökes. De sistnämnda torde dock böra reserveras för mera duktiga och intresserade lärjungar.

Man behöver alltså ej alls lära barnen någon *ränteformel* $\frac{kpt}{100}$ eller andra för barnen mer eller mindre trolldomsartade *algebraiska uttryck,* i vilka man skall sätta in tal i stället för bokstäver.

Ej heller behöver man lära barnen och offra tid på »*ekvationer*», något som för flertalet barn inte kan bli annat än ett ganska maskinmässigt och underligt räknande, som de sedan icke komma att använda i sitt dagliga räknande och som därför också snart blir helt och hållet bortglömt och utan värde. Om barnen i stället enligt ovanstående använda *reguladetrimetoden med måttlinje,* vinna de ökad inblick och säkerhet i det aritmetiska räknande, som de annars använda för lösning av sina räkneuppgifter och som de sedan dagligdags behöva och ha gagn av.

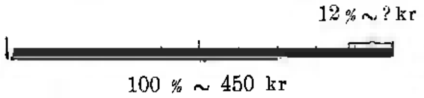
Vid undervisningen om *reverser, växlar, obligationer* m. m. är att märka, att problem ang. dessa i regel icke erbjuda några särskilda svårigheter i räknehänseende, om man blott låter barnen få noggrann kännedom om vad dessa affärspapper innehålla och hur de användas. Viktigt är därför, att man åtminstone i *ett fall* noga *klarlägger det sakliga läget* (exempelvis så som i följande exempel antytts).

Förlustproblem.

(Klass 6—7.)

Förlust beräknas alltid i procent av *inköpspriset*. Därför kan *inköpspriset alltid sägas vara 100 %*.

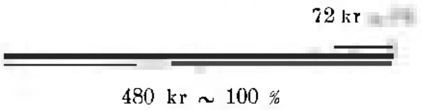
1. ***En möbelhandlare inköpte en möbel för 450 kr. Vad fick han för den, om han vid försäljningen gjorde 12 % förlust?***



Förlusten $= \frac{12}{100} \cdot 450$ kr $= 54$ kr.
Försäljn.pr. $= 450$ kr — 54 kr $=$
$=$ *396 kr.*

Obs! Värdefullt är att medelst måttlinjen visa på för barnen, att försäljningspriset är 88 % och att man också kan få detta enligt teckningen: Försäljningspriset är $\frac{88}{100} \cdot 450$ kr.

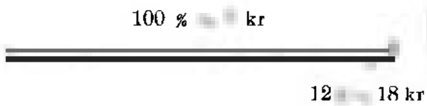
2. ***En handlande hade köpt ett parti råg för 480 kr och sålde det med 72 kronors förlust.*** *Hur många procent utgjorde förlusten?*



Om förlusten varit 480 kr, hade den varit 100 % av inköpspriset.
Om förlusten varit 1 kr, hade den varit $\frac{1}{480} \cdot 100$ %.
Då nu *förlusten* var 72 kr, är den $\frac{72}{480} \cdot 100$ % $=$ *15 %*.

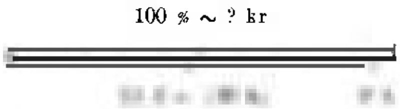
Obs! ***Förlusten*** **utsättes i figuren som** *en bit* **av** ***linjen*****, som anger inköpspriset,** och lämpligen i slutet av den. Storleken tages »på känn» och korrigeras, sedan resultatet erhållits.

3. *I en affär såldes ett parti äpplen med 18 kr förlust. Denna förlust utgjorde 12 %. Beräkna inköpspriset?*



(Förlusten) 12 % av inköpspriset utgör 18 kr.
Alltså 1 % av inköpspr. $\frac{1}{12} \cdot 18$ kr och då blir
Hela inköpspriset $\frac{100}{12} \cdot 18$ kr $=$
$=$ *150 kr.*

4. *Ett pälsverk såldes med 8 % förlust för 138 kr. Hur mycket hade det kostat i inköp?*



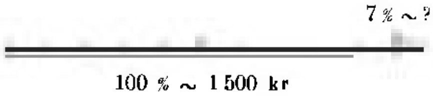
92 % av inköpspriset är			138 kr
1 % »	»	»	$\frac{1}{92} \cdot 138$ kr
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Vinstproblem.

(Klass 6—7.)

Vinst beräknas alltid i procent av *inköpspriset.* Därför kan *inköpspriset alltid sägas vara 100 %.*

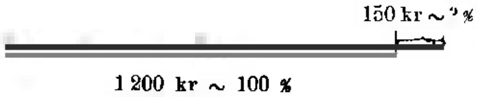
1. ***En husägare inköpte en tomt för 1 500 kr. Han sålde den med 7 % vinst. Vad var vinsten och försäljningspriset?***



Vinsten är $\frac{7}{100}\cdot 1\,500$ kr = = *105 kr.*
Försäljningspriset är 1 500 kr + 105 kr = *1 605 kr.*

Obs! Värdefullt är att med hjälp av figuren visa barnen. att försäljningspriset också kan direkt beräknas genom att taga $\frac{107}{100}\cdot 1\,500$ kr = = *1 605* kr.

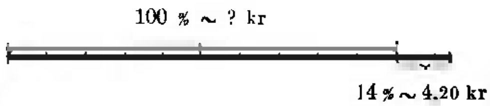
2. *En kapten sålde en segelbåt, som han inköpt för 1 200 kr, med 150 kr vinst. Hur många procent var denna?*



Om vinsten varit 1 200 kr, hade den varit 100 %.
Om vinsten varit 1 kr, hade den varit $\frac{1}{1200}\cdot 100$ %.
Då vinsten nu är 150 kr, utgör den $\frac{150}{1200}\cdot 100$ % = *12½* %.

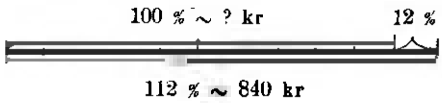
Obs! Den bit i måttlinjen, som skall föreställa vinsten, utsättes »på känn» och korrigeras efter svarets erhållande.

3. *En frukthandlare inköpte ett parti äpplen och sålde det med 14 % vinst. Vinsten var 4,20 kr. Vad var inköpspriset?*



14 % av ink.pr. är 4,20 kr.
1 % av ink.pr. är $\frac{1}{14}\cdot 4{,}20$ kr.
Hela inköpspris. $\frac{100}{14}\cdot 4{,}20$ kr. = *30 kr.*

4. *I en musikhandel såldes ett piano för 840 kr. Vinsten utgjorde 12 %. Hur stort var inköpspriset?*



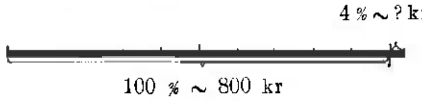
112 % av inköpspriset är 840 kr.
1 % av ink.pr. är $\frac{1}{112}\cdot 840$ kr.
Hela inköpspriset $\frac{100}{112}\cdot 840$ kr = = *750 kr.*

Ränteproblem.

Enkla fall (klass 6).

Ränta beräknas i procent av det *insatta kapitalet*. Därför kan *begynnelsekapitalet alltid sägas vara 100 %*.

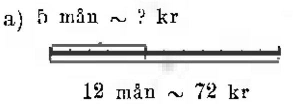
1. *Karin insatte 800 kr i en bank, som gav* a) *4 % ränta* b) *$4\frac{1}{2}$ % ränta. Vad blir då räntan på 1 år (»årsräntan»)?*



a) Årsräntan är $\frac{4}{100} \cdot 800$ kr $=$ $= 32$ *kr.*
b) Årsränt. är $4\frac{1}{2} \times \frac{1}{100} \cdot 800$ kr $=$ $= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{100} \cdot 800$ kr $=$ *36 kr.*

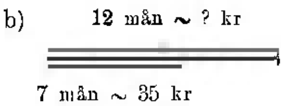
2. a) *Vad är räntan för 5 mån., då räntan för hela året är 72 kr?*
b) » » » » *hela året,* » » » *7 mån.* » *35 kr?*

a)



$\frac{5}{12} \cdot 72$ kr $= 30$ kr.

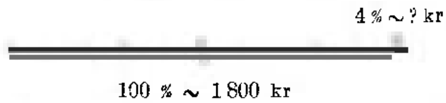
b)



$\frac{12}{7} \cdot 35$ kr $=$ *60 kr.*

Många sådana exempel tagas, så att barnen lära sig att *omedelbart* teckna räntan, då man vill ha:
a) räntan på vissa månader (dagar).
b) räntan på hela året.

3. *Axel satte in 1 800 kr i en bank, som gav 4 % ränta. Hur stor ränta fick han för 11 månader?*

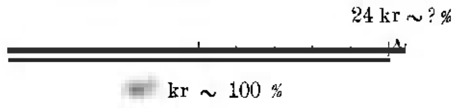


Årsräntan är $\frac{4}{100} \cdot 1\,800$ kr.
Räntan för 11 mån är —
$= \frac{11}{12} \cdot \frac{4}{100} \cdot 1\,800$ kr $=$ *66 kr.*

Obs! I måttlinjen insättes endast *årsräntan*. (Då erhålles för *ränteproblemens* behandling full överensstämmelse med *vinstproblemens*).

4. *Bror satte in 600 kr i en bank. Efter 9 mån. fick han 18 kr i ränta. Hur många procents ränta gav banken?*

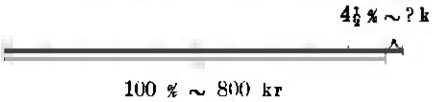
Obs! **Ränteprocenten anger alltid, hur många procent *årsräntan* är av begynnelsekapitalet.**



Årsräntan (Jfr ex. 2) är $\frac{12}{9} \cdot 18$ kr $= 24$ kr. (Insättes i måttlinjen.)
Räntefoten (enl. fig.) $\frac{24}{600} \cdot 100\,\% =$
$= 4\,\%$.

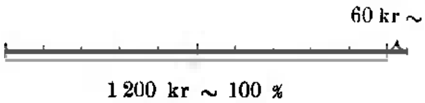
Svårare fall (klass 7).

6. *Axel satte in 800 kr i en bank. som gav $4\frac{1}{2}$ % ränta. Hur stor blir räntan å detta kapital efter $6\frac{2}{3}$ månader?*



Årsräntan är $4\frac{1}{2} \times \frac{1}{100} \cdot 800$ kr.
Räntan på *200 dag* är
$\frac{200}{360} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{100} \cdot 800$ kr $=$ *20 kr.*

7. *Birger satte in 1 200 kr. i en bank och fick efter 18 dagar i ränta 3 kr. Hur många procents ränta gav banken?*



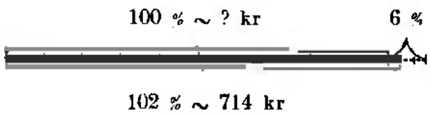
Årsräntan är $\frac{360}{18} \cdot 3$ kr $= 60$ kr.
(Jfr ex. 2 b på sid. 48).
∵ Räntefoten (se fig.) =

8. *Emilia sätter i dag in 450 kr i en bank, som ger 4 % ränta. Hur länge dröjer det, innan räntan blir 5 kr?*

Lösningen erhålles enligt följande *grundtanke:* Hur länge det dröjer, kan man lätt bestämma, om man bara får reda på, *hur stor del räntan är av räntan på hela året.* Därför uträknas *årsräntan* först. Den är tydligen $\frac{4}{100} \cdot 450$ kr $=$ $= 18$ kr.

För att få 18 kr i ränta måste man ha pengarna i banken 360 dagar.
För att få 5 kr i ränta måste man ha peng. i bank. $\frac{5}{18} \cdot 360$ dag $=$ *100 dag.*

9. *Hur mycket pengar skall man sätta in i bank, som ger 6 % ränta, för att de på 4 mån. skola växa till 714 kr.*[1]



Först bestämmes hur många procent *slutkapitalet* (714 kr) är:
För hela året är räntetillskottet 6 %.
För 4 mån. är räntetillskottet $\frac{1}{3} \cdot 6$ % $= 2$ %.
Alltså är *slutkapitalet* $=$
$= 100$ % $+ 2$ % $= 102$ %.

Som figuren visar, erhålles sedan *beg.kap.* $= \frac{100}{102} \cdot 714$ kr $=$ *700 kr.*

[1] Exempel av denna typ böra endast lämnas åt särsk. duktiga lärjungar.

Reverser och handelsrabatt.

(Klass 6 och forts.skolor)

Reverser.

1. *Torsten Eriksson fick av fabrikör Broden låna 300 kr den 1 okt. 1930* och *lovade att återbetala lånet efter 3 år. Han skulle dock betala ränta på skulden varje år den 1 okt. efter 4 %.*

Han lämnade då följande skriftliga förbindelse:

Revers.

Till Fabrikör Broden eller order betalar undertecknad den 1 oktober 1933

Tre hundra (300: —) kronor,

och förbinder jag mig att dessutom betala den 1 okt. varje år 4 % ränta å detta belopp, till dess lånet blivit fullt återbetalt.

Falun den 1 okt. 1930

Torsten Eriksson

a) Vad skall T. Eriksson betala till Fabrikör Brodén den 1 okt. 1931? b) den 1 okt. 1932? c) den 1 okt. 1933?

a) $\frac{4}{100} \cdot 300$ kr = *12 kr.*
b) » » = 12 kr.
c) 300 kr + 12 kr = = 312 kr.

Handelsrabatt.

2. *Olle Bull köpte ett piano för 800 kr den 1 juli 1930 i Tells musikaffär. Han betalte kontant (d. v. s. med detsamma) och fick därför 5 % rabatt (avdrag).*

a) Vad skulle Bull betala?

$800 \text{ kr} - \underbrace{\tfrac{5}{100} \cdot 800 \text{ kr}}_{\text{Rabatten}} = 760 \text{ kr.}$

b) Tell skulle skriva ett kvitto på att han fått betalningen. Hur skulle han skriva?

Kvitto.

Av Herr Olle Bull har jag denna dag för ett piano mottagit ett belopp av

Sjuhundrasextio (760: —) kronor,

som härmed kvitteras.

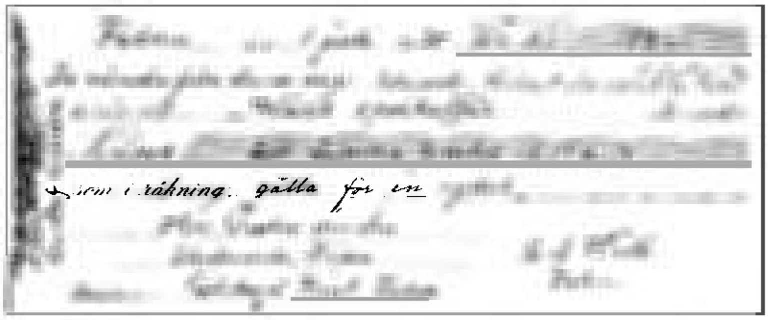
Falun den 1 juli 1930.

O. Tell.

Växlar.

(Klass 7 och forts.skolor)

1. Gustaf Lundin *köpte en cykel* den 1 juli 1930 **i Hälls sportaffär.** Den kostade *150 kr*, och han skulle få vänta med betalningen till den *1 okt. 1930.* Han måste då skriftligen erkänna, att han lovat **att då betala detta belopp, genom att skriva sitt namn på följande** *växel*, som Herr Häll gjort i ordning (utskrivit):


som i räkning gälla för en

E. Häll, som utskrev växeln, säges »*utställa*» växeln. Gustaf Lundin, som skriver sitt namn på växeln, säges »*acceptera*» (godkänna) växeln.

Hur mycket skall Gustaf Lundin betala till Hälls sportaffär den 1 okt. 1930? Svar: 150 kr.

2. Herr Häll ville emellertid ha pengar för cykeln redan den 1 juli 1930. Han gick då till en bank (Göteborgsbanken) och frågade, om han av banken kunde få 150 kr. mot det att banken övertoge växeln och finge rätt att i Herr Hälls ställe (»order») utfå av Gustaf Lundin pengarna den 1 okt. 1930.

   Banken svarade då, att den skulle övertaga växeln, men att den inte ville betala fullt 150 kr. för den nu, ty den skulle ju inte kunna få ut pengarna av G. Lundin förrän efter 3 månader. Den skulle dock gå med på att betala Häll *150 kr med avdrag av ränta på växelbeloppet för tiden till förfallodagen* efter 6 % per år. (Detta avdrag — det s. k. *diskontoavdraget* — skulle alltså beräknas för *3 mån.*)

a) Vad skulle banken betala till Herr Häll för växeln den 1 aug. 1930? | a) $150 \text{ kr} - \underbrace{\frac{3}{12}\cdot\frac{6}{100}\cdot 150 \text{ kr}}_{\text{Diskontoavdraget}} = 147{,}75$ kr.

b) Hur mycket skulle Göteborgsbanken få av Gustaf Lundin den 1 okt. 1930? | b) *150 kr.*

Aktier och kursvärde.

(Klass 7.)

1. *Tre personer A, B och C startade en järnaffär. A satsade 5 000 kr, B 10 000 kr och C 15 000 kr. Varje aktie angav insats på 200 kr.*

a) Hur många aktier erhöll var och en?

A. 5 000 kr. : 200 kr. = 25 ggr.	*Svar:* A. *25 aktier.*
B. 10 000 kr. : 200 kr. = 50 ggr.	» B. *50 aktier.*
C. 15 000 kr. : 200 kr. = 75 ggr.	» C. *75 aktier.*
Hela aktiekap. *30 000 kr*	S:a *150 aktier.*

b) Ett år var vinsten 2400 kr. H. m. *procents* vinst var det?

b) 2 400 $\sim$? %

30 000 kr $\sim$ 100 %

$\frac{2\,400}{30\,000} \cdot 100\ \% = 8\ \%$.

c) H. m. *kronors* vinst fick man på varje aktie?

c) $\frac{8}{100} \cdot 200$ kr = *16 kr.*

d) Ett år fick man blott *9 kr* vinst per aktie. Hur många *procents vinst* hade man då?

d) 9 kr $\sim$? %

200 kr $\sim$ 100 %

$\frac{9}{200} \cdot 100\ \% = 4\frac{1}{2}\ \%$.

e) Då ville *A* sälja sina aktier till Sigge, men Sigge ville inte betala mer för varje aktie, än att utdelningen blev 6 % på vad han betalt för den. *Hur mycket borde han då ge för den*, om han antar, att utdelningen fortfarande blir 9 kr?

e) 100 % $\sim$? kr

6 % $\sim$ 9 kr

$\frac{100}{6} \cdot 9$ kr = *150 kr.*

f) Om Sigge köper varje aktie för 150 kr, vad är då *»köpkursen»* i procent (d. v. s. hur många procent är priset av aktiens ursprungliga värde).

f) 150 kr $\sim$? %

200 kr $\sim$ 100 %

Köpkurs = $\frac{150}{200} \cdot 100\ \%$ = *75* %.

2. Johan köpte en aktie, som ursprungligen kostat 200 kr (det s. k. *nominella värdet*) för 240 kr.

a) Vad var då *köpkursen?*

b) Han fick sedan som *utdelning* (vinst) på aktien 18 kr. Hur många procents vinst hade han på vad han betalt?

2. 240 kr $\sim$? %

a) 200 kr $\sim$ 100 %

$\frac{240}{200} \cdot 100\ \% = 120\ \%$.

18 kr $\sim$? %

b) 240 kr $\sim$ 100 %

$\frac{18}{240} \cdot 100\ \% = 7\frac{1}{2}\ \%$.

Obs! Tidningarnas börsnoteringar ge många goda exempel.

Obligationer.

(Klass 7.)

I en stad skulle man uppföra ett nytt *skolhus* för *300 000 kr.* För att få pengar till detta lät man en bank annonsera om, att de personer, som ville *låna* ut pengar till staden, skulle få $4\frac{1}{2}$ % *ränta* på sina pengar. **För varje lån på 600 kr. skulle man få en s. k. *obligation*, d. v. s. ett papper**, på vilket det stod tryckt 1) *att* innehavaren av det papperet (obligationen) hade *lånat* staden *600* kr och 2) *att* staden skulle *varje år den 1 juli* lämna $4\frac{1}{2}$ % *ränta* på detta belopp (det s. k. *nominella värdet*) samt 3) *att* staden skulle *återbetala* lånet senast efter *20 år*.

1. Hur många obligationer skulle utlämnas? | 300 000 kr. : 600 kr. = 500 ggr. *Svar:* 500 obligationer.

2. Hur mycket skulle staden betala i ränta för varje obligation? | $4\frac{1}{2} \times \frac{1}{100} \cdot 600$ kr. = *27 kr.*

3. Staden ville avbetala lånet med lika stora avbetalningar varje år.

a) **Hur stor summa skulle betalas varje år?** | a) $\frac{1}{20} \cdot 300\,000$ kr = ***15 000 kr.***

b) Hur många obligationer skulle staden inlösa varje år? | b) 15 000 kr. : 600 kr. = 25 ggr. *Svar:* 25 obligationer.

Obs! Vilka obligationer som skola inlösas, bestämmes genom lottdragning.

4. Erik hade två obligationer och hade ett år den 1 juli just fått räntan på dem. Då kom Hasse och ville köpa en av honom. **Men Hasse ville ha 5 % på sina pengar.**

a) Hur mycket borde han då betala för den?

b) Vad var då köpkursen?

a) 100 % ~ ? kr

5 % ~ 27 kr

$\frac{100}{5} \cdot 27$ kr. = *540 kr.*

540 kr ~ ? %

600 kr ~ 100 %

$\frac{540}{600} \cdot 100$ % = *90 %*.

5. Den 1 nov. ville Erik sälja den andra obligationen. *Kursen* var då *81* %. Han ville emellertid då inte bara ha betalt för själva obligationen utan också ha *ränta* på obligationen för tiden efter den 1 juli till den 1 nov. (s. k. *upplupen ränta*).

Hur mycket skulle han då betala för alltsammans?

För obligationen $\frac{81}{100} \cdot 600$ kr. =	486 kr.
Som ränta $\frac{4}{12} \cdot \frac{9}{200} \cdot 600$ kr. =	9 »
S:a	***495 kr.***

Sammansatt ränta.

(Klass 7 och forts.skolor)

1. *Erik insatte i en bank 225 kr. Till vilket kapital (»slutkapital») växer detta belopp under 10 år, om banken ger 4 % ränta?*

225 kr ~ ? kr
100 kr ~ 148,02 kr

Enl. tab. växer 100 kr (på 10 år) till 148,02 kr.
Då » 225 kr (» » ») » $\frac{225}{100} \cdot 148{,}02 =$
$= 333{,}05$ *kr.*

2. ***Hur länge dröjer det, innan 320 kr vuxit till 381,60 kr i en bank, som ger $4\frac{1}{2}$ % ränta?***

100 kr ~ ? kr
320 kr ~ 381,60 kr

Eftersom 320 kr skola växa till 381,60 kr, måste tydligen 100 kr växa till $\frac{100}{320} \cdot 381{,}60$ kr $= 119{,}25$ kr.
Av tabellen synes, att man då måste vänta *4 år.*

3. *I en bank växte 225 kr på 17 år till 515,70 kr. Hur många procents ränta gav banken?*

100 kr ~ ? kr
225 kr ~ 515,70 kr

Då 225 kr skola växa till 515,70 kr, måste tydligen 100 kr växa till $\frac{100}{225} \cdot 515{,}70$ kr $= 229{,}20$ kr.
Av tabellen synes, att *räntefoten* då måste vara *5 %*.

4. *Hur stort kapital (begynnelsekap.) måste insättas i en bank, som ger 6 % ränta, för att man efter 16 år skall kunna lyfta 889,14 kr?*

889,14 kr ~ ? kr
254,04 kr ~ 100 kr

Av tabellen erhålles, att efter 16 år svarar ett slutkapital på 254,04 kr mot begynnelsekap. 100 kr.
Alltså » » » » 1,— kr » » $\frac{1}{254{,}04} \cdot 100$ kr.
och då » » » 889,14 kr » » $\frac{889{,}14}{254{,}04} \cdot 100$ kr $=$
$= 350$ *kr.*

I. Tabell för sammansatt ränta.

Det slutkapital, till vilket 100 kr växa:

Tid	3 %	[illegible]	4 %	4½ %	5 %	5½ %	6 %
Under							
1 år	103,—	103,50	104,—	104,50	105.—	105,50	106,—
2 »	106,09	107,12	108,16	109,20	110,25	111,30	112,36
3 »	109,27	110,87	112,49	114,12	115,76	117,42	119,10
4 »	112,55	114,75	116,99	119,25	121,55	123,88	126,25
5 »	115,93	118,77	121,67	124,62	127,63	130,70	133,82
Under							
6 år	119,41	122,98	126,53	130,23	134,01	137,88	141,85
7 »	122,99	127,23	131,59	136,09	140,71	145,47	150,36
8 »	126,68	131,68	136.86	142,21	147,75	153,47	159,39
9 »	130,48	136,29	142,33	148,61	155,13	161,91	168,95
10 »	134,39	141,06	148,02	155,30	162,89	170,81	179,09
Under							
11 år	138,42	146,00	153,95	162,29	171,03	180,21	189,83
12 »	142,58	151,11	160,10	169,59	179,59	190,12	201,22
13 »	146,85	156,40	166,51	177,22	188,57	200,58	213,29
14 »	151,26	161,87	173,17	185,19	197,99	211,61	226,09
15 »	155.80	167,54	180,09	193,53	207,89	203,25	239,66
Under							
16 år	160,47	173,40	187,30	202,24	218,29	235,53	254,04
17 »	165,29	179,47	194,79	211,34	229,20	248,48	269,28
18 »	170,24	185,75	202,58	220,85	240,66	262,15	285,43
19 »	175,35	192,25	210,69	230,79	252,70	276,57	302,56
20 »	180,61	198,98	219,11	241,17	265,33	291,78	320,71
Under							
21 år	186,03	205,94	227,88	252,02	278,60	307,82	339,96
22 »	191,61	213,15	236,99	263,37	292,53	324,75	360,35
23 »	197,36	220,61	246,47	275.22	307,15	342,62	381,98
24 »	203,28	228,33	256,33	287,60	322,51	361,46	404,89
25 »	209,38	236,32	266,58	300,54	338,64	381,34	429,19

Annuitetsräkning.[1]

(Klass 7.)

Årliga insättningar.

1. (Inledande uppgift.)

Johan hade i början av varje år under 4 år insatt 100 kr. Hur mycket hade han att fordra vid slutet av det 4:de året. Räntefoten antages vara 4 %? (Se vidst. tabell).

Tid	Kapitalet vid årets *början*	Räntan	Kapitalet vid årets *slut*
1:sta året	100,—	4.—	104,—
2:dra »	204.—	8,16	212,16
3:dje »	312,16	12,49	324,65
4:de »	424,65	16,98	441,63

Obs! Räntan blir under 4:de året mer än 4 ggr så stor som under första året. Kapitalet blir nämligen för varje år ökat icke blott med den årliga insättningen utan också med räntan för det sist gångna året.

2. Axel insatte varje år den 1 jan. 350 kr i en bank, som gav 5 % ränta. Hur mycket hade han att fordra efter 6 år (alltså strax *före* den 7:de insättningen)?

350 kr ~ ? kr

100 kr ~ 714,20 kr

På 6 år ger (se tab. II å sid. 57) 100 kr årlig insättning 714,20 kr.
På 6 år ger alltså 350 kr årl. insättn. $\frac{350}{100} \cdot 714,20$ kr $=$ *2 499,70 kr.*

3. *Karin insatte i början av varje år 125 kr i en bank. Efter 16 år kunde hon i banken lyfta 3 105,05 kr. Efter vilken procent var då räntan beräknad?*

100 kr ~ ? kr

125 kr ~ 3 105,05 kr

Om man insatt *100 kr* årligen, skulle *slutkap.* varit (se fig.) $= \frac{100}{125} \cdot 3\,105,05$ kr $=$ *2 484,04 kr.* Av tabellen framgår, att det då måste lämnats *5* % ränta.

[1] Då *årliga inbetalningar* göras för att återgälda ett *lån*, kallas dessa *annuiteter*. Här användes uttrycket *annuitet* i vidare bemärkelse liktydigt med »*årlig inbetalning*», vare sig det är avbetalning på lån eller annan inbetalning.

II. Tabell för annuitetsräkning.

Det slutkapital, till vilket årliga inbetalningar av 100 kr vuxit:

Tid	3 %	3½ %	4 %	4½ %	5 %	5½ %	6 %
Efter							
1 år	103,00	103,50	104,00	104,50	105,00	105,50	106,00
2 »	209,00	210,62	212,16	213,70	215,25	216,80	218,36
3 »	318,36	321,49	324,65	327,82	331,01	334,23	337,46
4 »	430,91	436,25	441,63	447,07	452,56	458,11	463,71
5 »	546,84	555,02	563,30	571,69	580,19	588,81	597,53
Efter							
6 år	666,25	677,94	689,83	701,97	714,20	726,69	73[illegible],38
7 »	789,23	805,17	821,42	838,00	854,91	872,16	889,75
8 »	915,91	936,85	958,28	980,21	1 002,66	1 025,63	1 049,13
9 »	1 046,39	1 073,14	1 100,61	1 128,82	1 157,78	1 187,54	1 218,08
10 »	1 180,78	1 214,06	1 248,61	1 284,12	1 320,68	1 358,35	1 397,16
Efter							
11 år	1 390,20	1 360,20	1 402,58	1 446,40	1 494,71	1 538,56	1 586,99
12 »	1 461,78	1 511,30	1 562,68	1 615,99	2 671,30	1 728,68	1 788,21
13 »	1 608,63	1 667,70	1 729,19	1 793,21	1 859,86	1 929,26	2 001,51
14 »	1 759,89	1 829,57	1 902,86	1 978,41	2 057,86	7 140,87	2 227,60
15 »	1 915,69	1 997,10	2 082,45	2 171,93	2 265,75	2 364,11	2 467,25
Efter							
16 år	2 076,16	2 170,50	2 269,75	2 374,17	2 484,04	2 599,64	2 721,29
17 »	2 241,44	2 349,97	2 464,54	2 585,51	2 718,24	2 848,12	2 990,57
18 »	2 411,69	2 535,72	2 667,12	2 806,36	2 953,90	3 110,27	3 276,00
19 »	2 587,04	2 727,97	2 877,81	3 037,14	3 206,60	3 386,83	3 578,56
20 »	2 767,65	2 926,95	3 096,92	3 278,31	3 471,92	3 678,61	3 899,27
Efter							
21 år	2 953,68	3 132,89	3 324,80	3 530,34	3 750,52	3 986,43	4 239,23
22 »	3 145,29	3 346,04	3 561,79	3 793,70	4 043,05	4 311,18	4 599,58
23 »	3 342,65	3 566,65	3 808,26	4 068,92	4 350,20	4 653,80	4 981,56
24 »	3 545,93	3 794,99	4 064,59	4 356,52	4 672,71	5 015,26	5 386,15
25 »	3 755,80	4 031,31	4 331,17	4 657,06	5 011,85	5 396,60	5 815,64

4. *Hur stort belopp skall insättas varje år i en bank, som ger 5 % ränta, för att slutkapitalet på 6 år må bli 1 785,50 kr?*

1 785,50 kr ~ ? kr

714,20 kr ~ 100 kr

Slutkap. blir på 6 år (se tab. II) 714,20 kr, om annuiteten är 100 kr.
För att man på 6 år skall få 714,20 kr, måste alltså annuiteten vara 100 kr.
För att man skall få 1 785,50 kr., måste (enl. fig.) annuiteten vara $\frac{1\,785{,}50}{714{,}20} \cdot 100$ kr = 250 kr.

Svar: Det skall årligen insättas *250 kr.*

5. *Stina insatte årligen 150 kr i en bank, som gav $4\frac{1}{2}$ % ränta. — Hur länge dröjde det, innan hon då lyckades få ihop* a) *1 257 kr?* b) *1 350 kr?* c) *1 425 kr?*

a) 100 kr ~ ? kr

150 kr ~ 1 257 kr

Det måste tydligen (se fig.) dröja så länge, att 100 kr årl. insattn. ger $\frac{100}{150} \cdot 1\,257$ kr = 838 kr. Detta sker (se tab.) efter *7 år.*

b) **Det dröjer tydligen så länge, att 100 kr årlig insättning kommer att** ge $\frac{100}{150} \cdot 1\,350$ kr = 900 kr.

Se vi nu efter i tabellen, finna vi, att 100 kr. årl. insättning kommer att ge 980,21 kr efter 8 år. Därav inses, att det inte behövts fullt 8 år för att få 900 kr (utan att det inträffar under det 8:de året).

Det kan då vara säkrast att räkna ut, hur stort slutkapitalet verkligen blivit, då det insattes 150 kr årligen, vid 7:de årets slut. Det blir tydligen $\frac{150}{100} \cdot 838$ kr = *1 257 kr* (Jfr ex. 5, a). Dagen efter (d. v. s. på det 8:e årets första dag) skulle emellertid Stina åter göra en inbetalning på 150 kr, men denna behöver hon tydligen inte fullt betala. Det behövs ju blott *93 kr* inbetalning, för att slutbeloppet skall bli 1 350 kr.

Svar: Det dröjer *7 år,* men hon måste vid 8:de årets början betala *93 kr.*

c) Under det 8:de året skola 1 257 kr växa till 1 425 kr. Det behövs alltså utom annuiteten på 150 kr 18 kr i ränta på 1 407 kr. **Den räntan erhålles på 103 dagar. (Jfr 8 sid. 49).**

Svar: **7 år 103 dagar.**

6. ***Ett livförsäkringsbolag lovade, att vid en persons dödsfall*** **eller** ***senast efter 20 år betala 5 000 kr, om denne betalte som försäkringspremie 210 kr i början av varje år. När skulle hans död inträffa, för att bolaget varken skulle vinna eller förlora, om räntefoten antages vara 4 %?*** *Svar:* 16 år 43 dagar efter försäkringsdagen.

Amortering.

(Klass 7).

Lika stora avbetalningar på lånebeloppet varje år.

1. Axel lånade av fabrikör Brodén 2 000 kr. Han skulle avbetala på skulden 500 kr vid varje års slut under 4 år och samtidigt varje gång betala 4 % ränta på skulden under det sist gångna året. Hur mycket skulle han då betala varje gång?

Tid	Skulden vid årets *början*	Räntan under året	Avbetalningen	Hela inbetalningen
1:sta året	2 000.—	80 —	500,—	580,—
2:dra »	1 500 —	60.—	500,—	560,—
3:dje »	1 000,—	40,—	500,—	540,—
4:de »	500,—	20.—	500.	520 —

Obs! Avbetalningen på kapitalet kallas *amortering*.

2. Ett bolag lånade av en bank 45 000 kr. Bolaget skulle återbetala lånet på 9 år med lika stora amorteringar vid varje års slut. Varje gång skulle dessutom erläggas 6 % ränta på skulden under det sist gångna året. Hur mycket hade bolaget att betala a) efter 3 år? b) efter 9 år?

a) *Amorteringen* varje år 5 000 kr.
Under det tredje året var skulden 45 000 kr — — 2 × 5 000 kr = 35 000 kr.
Räntan blir $\frac{6}{100}$ · 35 000 kr = 2 100 kr.
Summa 7 100 kr.

b) Amorteringsbeloppet = 5 000 kr.
Räntan $\frac{6}{100}$ · 5 000 kr = 300 kr.
Summa 5 300 kr.

3. En stad hade upptagit ett lån på 600 000 kr. Varje år skulle på kapitalet avbetalas 30 000 kr och på samma gång skulle 5 % ränta erläggas för det sist gångna året. Hur mycket hade staden att betala a) vid den 5:te amorteringen? b) Vid den 15:de amorteringen?

Obs! Den förstnämnda inbetalningen var alltså 15 000 kr större än den 15:de.

a) Vid den *5:te avbetalningen* hade staden att betala:
1) Som amortering 30 000 kr.
2) Som ränta 5 % av (600 000 kr — — 4 × 30 000 kr) 24 000 »
Summa 54 000 kr.

b) Vid den *15:de avbetalningen*:
1) Som amortering 30 000 kr.
2) Som ränta 5 % av (600 000 kr — — 14 × 30 000 kr) 9 000 »
Summa 39 000 kr.

Anm. **I många fall finner man det olämpligt att behöva betala mera under de första åren än under de följande. Man ordnar då betalningen med *lika årliga inbetalningar* (annuiteter). Hur dessa beräknas, upptages ej här.**

3. Ekonomi inom hem, kommun och stat. Skatter.

I klass 7 och i våra fortsättningsskolor är det mycket lämpligt och viktigt, att barnen i samband med arbetet i *medborgarkunskap* få någon kännedom om mera allmänna ekonomiska förhållanden och om *skatters beräkning*. Bättre än allmänna resonemang om sådana saker är att låta barnen räkna enkla omsorgsfullt valda exempel, som belysa dessa förhållanden vid ett bestämt tillfälle och i hemorten.

Då man vid undervisningen i medborgarkunskap behandlar verksamheten inom *församling* och *borgerlig kommun*, är det lämpligt att låta barnen få kännedom om hur mycket som behöver tagas upp av församlingens invånare som skatt både totalt och för varje 100 kr av den beskattningsbara inkomsten. Vid genomgången av *landstingets* ordnande av länets sjukvård fästes också uppmärksamheten på hur mycket pengar som behövs härtill och vad som därför måste betalas som skatt av länets inbyggare för varje 100 kr av den beskattningsbara inkomsten. Likaså göras barnen förtrogna med hur mycket pengar *riksdagen* bestämmer skall få utgå till olika ändamål och vilket belopp som därför måtte utbetalas som direkt *skatt till staten* av rikets invånare. — Sedan är det mycket givande att låta barnen på vanliga deklarationsblanketter föra in inkomster för en bestämd person och att låta dem veta både de avdrag, som personen själv får göra, och hurusom sedan ytterligare avdrag göras av taxeringsmyndigheterna och att låta dem anteckna både »beskattningsbar inkomst» och »beskattningsbart belopp».

Därefter blir det förenat med stort intresse att låta barnen räkna ut, hur mycket skatt då den personen bör betala a) till församlingen b) till borgerliga kommunen c) till länet och d) till staten, och att sedan sammanföra de två första beloppen till vad som kallas *»kommunalskatt»* och de två sista beloppen till s. k. *kronoskatt*.

Avdragen, som taxeringsnämnden skall göra, äro för olika dyrorter[1]:

A. För skatten till församling, kommun och län. (Se Sv. förf. 1928, n:r 370.)

Dyrortsgrupp	I	II	III	IV	V
[illegible]	[illegible]	380 kr	420 kr	460 kr	500 kr
Familjeavdrag för hustru och varje [illegible]	160 »	160 »	180 »	180 »	200 kr

B. För skatter till staten. (Se Sv. förf. 1928, n:r 3[illegible]3.)

Dyrortsgrupp	I	II	III	IV	V
[illegible]	680 kr	760 kr	840 kr	920 kr	1 000 kr
Familjeavdrag för hustru och varje [illegible]	320 »	320 »	360 »	360 »	400 »

[1] Till vilken dyrort en plats hör, är angivet i Svensk författningssamling 1935 n:r 16. Om så önskas, kan uppgift därom erhållas hos *Blids bokhandel, Falun* eller hos *Svenska Bokförlaget*, Drottninggat. 20, Stockholm.

a. Skatt till församling och borgerlig kommun.

1. Pers bodde i en stad F. med 14 000 innevånare. *Församlingens* utgifter för kyrka, prästernas avlöning m. m. voro ett år 99 500 kr. Inkomsterna för begravningsplatser m. m. uppgingo till 3 500 kr. H. m. behövde församlingsborna betala för den kyrkliga verksamheten? *Svar:* 96 000 kr.

2. Pers visste, att nettoutgifterna i hans stad för skolor, fattigvård, hälsovård, underhåll av vägar m. m. uppgingo till 1 080 000 kr. Om det var 8 000 av invånarna, som skulle betalat detta, och om de alla skulle betalt lika mycket, h. m. skulle då var och en fått betala? *Svar:* 135 kr.

3. Pers hade hustru och 3 barn under 16 år. Hans lön var ett år 5 650 kr. För lektioner i slöjd hade han förtjänat 250 kr. På sina pengar i banken hade han fått i ränta 60 kr och som utdelning på 20 st. aktier i Sockeraktiebolaget fick han i utdelning för varje aktie 3,50 kr. Hur stor var hans inkomst? *Svar:* 6 030 kr.

4. Vid sin självdeklaration fick Pers från inkomsten draga av pensionsavgifterna (18 kr), som han betalat för sina 3 barn, och dessutom 102 kr för försäkringspremier. För dessa pengar skulle han nämligen inte behöva betala skatt. Vad blev kvar av inkomsten, då dessa avdrag gjorts? *Svar:* 5 910 kr.
Obs! Detta belopp (5 910 kr) kallar man det *taxerade beloppet.*

5. Pers behövde ej skatta för hela det »taxerade beloppet», utan detta skulle av taxeringsnämnden ytterligare minskas med 1) ett *grundavdrag* (se sid. 60) 2) ett *familjeavdrag* (se sid. 60) och dessutom 3) ett *extra avdrag*, som skall vara = hälften av grundavdraget och familjeavdraget tillsammans[1]. (Den stad, Pers bodde i, tillhörde dyrortsgruppen III). För hur stor inkomst skulle alltså Pers skatta? *Svar:* 4 200 kr.
Obs! Detta belopp (4 200 kr.) kallas hans *»beskattningsbara inkomst».*

6. Alla invånarnas »beskattningsbara inkomster» i staden F. utgjorde ett år tillsammans 12 000 000 kr. H. m. behövde då tagas ut som *skatt för varje 100 kr* beskattningsbar inkomst a) för den *kyrkliga verksamheten* (jfr. ex. 1)? b) för *kommunens utgifter* i övrigt (jfr. ex. 2)? *Svar:* a) 0,80 kr. b) 9 kr.

7. H. m. skulle Pers betala i skatt a) till församlingsverksamheten (kyrkan)? b) till den borgerliga kommunen? c) Vad blev *hela hans kommunalskatt.* *Svar:* a) 33,60 kr. b) 378 kr. c) 411,60 kr.

[1] I vissa fall (då inkomsten är liten) beräknas det »extra avdraget» på annat sätt.

b. Landstingsskatt och skatt till staten.

8. *Landstinget* för det län, som Pers bodde i, hade för sjukvård m. m. under ett år att utbetala 3 210 000 kr. Alla länets inbyggares »beskattningsbara belopp» tillsammantagna uppgick till 107 000 000 kr. a) H. m. måste tagas ut som skatt till länet för varje 100 kr beskattningsbar inkomst? b) H. m. borde Pers betala som *landstingsskatt?*
Svar: a) 3 kr. b) $\frac{4\,200}{100} \cdot 3$ kr = 126 kr.

9. *Skatten till staten* beräknas *icke* på samma belopp som skatten till kommunen och länet. Här bliva *avdragen större. Pers* får sålunda i sin självdeklaration själv draga av från inkomsterna inte blott pensionsavgifterna och försäkringspremierna utan också den kommunalskatt (420 kr) och landstingsskatt (110 kr), som han betalte förra året, och de avdrag *taxeringsnämnden* skall göra, bliva dubbelt så stora (se sid. 60). a) Vilket inkomstbelopp blir det, som Pers själv skall i sin deklaration upptaga för skatt till *staten?* b) För hur stor *inkomst* skall Pers skatta till staten enligt taxeringsnämndens beräkningar?
Svar: a) Avdragen = 18 kr + 102 kr + 420 kr + 110 kr = 650 kr.
Taxerade beloppet = 6 030 kr — 650 kr = 5 380 kr.
b) Avdragen = 840 kr + 4 × 360 kr + 1 140 kr = 3 420 kr.
»Beskattningsbar inkomst» 5 380 kr — 3 420 kr = 1 960 kr.

10. När det är fråga om skatt till staten, måste Pers också betala skatt för en del av sin *förmögenhet.* Denna bestod av hans kapital på banken vid förra årets slut (1 100 kr) och 20 aktier i Sockeraktiebolaget, vilkas nominella värde var 50 kr, men vilka enligt kursen vid förra årets slut faktiskt voro värda 65 kr. Han skulle skatta för $\frac{1}{60}$ av förmögenheten vid förra årets slut. a) Hur stor var Pers förmögenhet? b) Hur stor var den *beskattningsbara förmögenheten?*
Svar: a) Förmögenhet = 1 100 kr + 20 × 65 kr = 2 400 kr.
b) *»Beskattningsbara förmögenheten»* = $\frac{1}{60} \cdot 2\,400$ kr = 40 kr.

11. Till staten skall Pers alltså erlägga skatt både för viss inkomst och viss förmögenhet s. k. *statlig inkomst- och förmögenhetsskatt.* På vilket belopp skall den beräknas? *Svar:* 1 960 kr + 40 kr = = 2 000 kr.
Obs! Detta belopp kallas hans *»beskattningsbara belopp».*

12. År 1937 bestämde riksdagen, att det skulle till statens utgifter upptagas av landets inbyggare som direkt skatt 285 100 000 kr och att därför var och en skulle betala en *grundskatt* av 3 % av det beskattningsbara beloppet och dessutom en *tilläggsskatt* av 70 % av denna grundskatt.[1] H. m. skulle Pers betala som *skatt till staten*. *Svar:* 102 kr.

13. På *kronoskattsedeln* upptages både landstingsskatt och kronoskatt. Hur stor blev alltså Pers *kronoskatt*? *Svar:* 228 kr.

14. Hur många procent av sin årsinkomst måste Pers betala a) som kommunalskatt? b) som kronoskatt? c) som skatt på det hela taget? *Svar:* a) 6,8 %. b) 3,8 %. c) 10,6 %.

Slutord.

»Det finns ingen kungsväg till geometrien», sades för mer än tusen år sedan. Var och en som studerat matematiken vet, att det inte heller för andra grenar inom detta ämne finns någon väg, som icke kräver arbete och möda. Är det fråga om barn, måste också alldeles särskilt beaktas, att god inblick och säkerhet i vad som gäller deras räknande endast vinnes, om däråt ägnas *mycket både intresse och tid*. Vilken metod som än väljes, är det först genom ständiga tankeövningar det matematiska sinnet blir så utvecklat, att olika räknevägars innebörd framstår klar, och det är endast genom ständiga räkneövningar som stor räknefärdighet kan vinnas.

Där läraren ordnar arbetet på ett gott sätt, bruka dock lektionerna i räkning *bereda barnen mycken glädje och tillfredsställelse*. De få vara i verksamhet, känna hur de gå framåt och reda ut allt svårare problem och se resultat av sitt arbete.

Denna barnens tillfredsställelse ökas, då de efter hand få klarhet i något, som de förut inte förstått. Så är exempelvis fallet, då »dividera» inte längre får vara en hel del dunkelt anade saker utan får bestämt och fattbart innehåll. Detta vinnes ej, om en del av divisionsräkningen helt flyktigt genomgås under några lektioner. *Endast om man klass*

[1] Detta gäller, om beskattningsbara beloppet är mindre än 10 000 kr. För belopp mellan 10 000 och 20 000 kr är grundskatteprocenten 4 % och för större belopp ännu högre.

efter klass håller de två divisionsarterna ordentligt i sär och övar de olika tankegångarna här liksom för de övriga räknesätten, *får man begära, att barnen skola fullt förstå och säkert använda dessa.* Därpå använd tid är ej heller bortkastad. Därmed vinnes klarhet i ett räknande, som förut alltid vållade svårigheter, och därmed lägges också den bästa grunden för mycket av det räknande, som sedan möter i livet.

Då resultatet av undervisning i räkning skall bedömas, tager man också saken alltför ytligt, om man blott undersöker, hur olika klasser lyckats reda sig med vissa förelagda provräkningar. Det finns exempelvis *många barn, som reda sig mycket bra* både i inträdesprov till läroverken och i realexamen *utan att ha någon nämnvärd matematisk utbildning.* Att de lyckades, berodde mera på att exemplen kunde lösas efter väl inlärda mekaniska regler och formler än på förtrogenhet med matematiskt tänkande och olika räknebegrepp. Med invand räknemekanism kan man komma förvånansvärt långt. — Uppenbarligen är det dock ett annat resultat, som man i första hand bör sträva mot i våra barndomsskolor, och det ligger också stor vikt på, att man beaktar detta, då man uttalar sig om undervisningens och olika räknemetoders värde. Frågan bör i första hand vara, i vad mån man har förmått att göra barnen matematiskt klarseende, och vad barnen ha fått för föreställningar om de många sakförhållanden av praktisk art, som vid räkneundervisningen skola klarläggas, eller m. a. o. i vad mån räknearbetet har bidragit till deras allmänna utbildning.

Till slut må ock framhållas, att all »början bliver svår». Detta gäller barn, men det gäller ock lärare. Då man vant sig vid vissa uttryckssätt och vissa räkneanordningar, fordras det åtskilligt arbete, ja, i viss mån riktig självövervinnelse, innan man lärt sig att behärska samt lätt och ledigt använda nya sådana. Och det som ingår i ens vanor vill ju gärna framstå som det absolut enklaste och bästa. Så mycket viktigare är det, att man vid prövandet av nya räknemetoder i främsta rummet ger akt på, hur dessa ställa sig för *barnen*, och väntar med att uttala sig om dem, till dess man lärt sig att lika säkert och klart handleda barnen i dessa som i den förut använda. Trots den förkärlek till den traditionella räknemetoden enligt quatuorspeciessystemet, som helt naturligt ännu på många håll finns att övervinna, vågar jag hoppas och tro, att mera efter barnens tänkande avpassade och direkt för folkskolans behov lämpliga metoder skola överallt bana sig väg in i våra skolor. Vad läraren i det stycket offrar för sina barns bästa, skall förr eller senare bära rik frukt.