Bengt Stolt

Geometri — euklidisk och icke-euklidisk

PRISMA

Bengt Stolt

Geometri — euklidisk och icke-euklidisk

PRISMA

Bokförlaget Prisma Stockholm

Omslag av Rolf Lagersson

En originalbok i Prismaserien
Berlingska Boktryckeriet, Lund 1968

Innehåll

I. Inledning

1. Geometrins uppbyggnad

Ordet geometri betyder ordagrant jordmätning. Namnet antyder att geometrin från början var ett slags naturvetenskap. Genom mätningar och konstruktioner kunde man fastställa vissa geometriska förhållanden, exempelvis att en triangel med sidorna 3, 4 och 5 längdenheter alltid är rätvinklig. Upprepade experiment visade att detta alltid stämde.

På så sätt fick man en samling empiriska satser om olika geometriska begrepp, punkter, räta linjer, cirklar, plan etc. Alla dessa var givna av erfarenheten. Det var inte fråga om att ge bevis för givna påståenden utan att formulera användbara räkneregler och konstruktionsmetoder. Det hette alltid: Gör så här så får du ett visst resultat.

Det förefaller först ha varit de gamla grekerna som angrep problemen från en mera teoretisk utgångspunkt. De upptäckte att om vissa satser var givna så var det möjligt att härleda andra satser genom rent teoretiska överväganden, oberoende av erfarenheten. Det låg då nära till hands att ställa frågan vilka satser som måste vara givna från första början och vilka som kunde härledas på teoretisk väg ur dessa. Genom den frågeställningen antog geometrin karaktären av matematisk vetenskap, sådan denna bedrivs i våra dagar.

I den moderna matematiken utgår man, precis som de gamla grekerna, från en samling givna påståenden vilka utan bevis läggs till grund för en matematisk teori av något slag. De grundläggande påståendena måste vara sådana att de inte motsäger varandra. I övrigt finns inga hinder att välja dem efter vilka principer man vill.

För grekerna var utgångspunkten den att de givna satserna skulle stämma överens med förhållandena i omvärlden. De satser som man kunde härleda för exempelvis trianglar skulle visa sig riktiga för sådana trianglar som man kunde rita upp och mäta. Men själva satserna skulle inte följa av erfarenheten utan härledas på rent teoretisk väg.

Här skall närmast ges en översikt av grekernas geometri för planet, sådan den framställs hos Euklides. Sedan följer en översikt över den historiska utvecklingen av Euklides geometri fram till upptäckten att det också finns andra geometriska system. De är från logisk synpunkt likaberättigade med Euklides geometri och brukar kallas icke-euklidiska geometrier.

I nästa avsnitt följer en modern framställning av den euklidiska geometrin. Denna bygger på ett antal grundläggande axiom som med vissa ändringar även kan användas för att framställa den hyperboliska och den elliptiska geometrin. I övrigt behandlas bl.a. frågan om de olika geometriernas motsägelsefrihet, om vilken geometri som gäller i världsrymden m.m.

II. Euklides och den grekiska geometrin

2. Allmänt

Den grekiske matematiker vars arbeten vi bäst känner till är *Euklides* († ca 300 f. Kr.). Denne sammanfattade grekernas matematiska vetande i sitt stora arbete *Elementa*. Det omfattar 13 böcker, av vilka de sex första behandlar planimetrin och de tre sista stereometrin. Det vittnar högt om Euklides skarpsinne att hans geometri i över 2 000 år ansågs oangripbar från vetenskaplig synpunkt, trots att hans arbete lästes och kommenterades av generationer av vetenskapsmän.

Euklides uppställer först vissa definitioner av de matematiska objekt som ingår i hans system, såsom punkter och räta linjer. Därefter fastställer Euklides vissa fundamentala satser som han kallar *axiom* och *postulat*. De innehåller från början givna relationer mellan de matematiska objekten.

Euklides syfte är det moderna, nämligen att bygga upp ett abstrakt geometriskt system oberoende av åskådningen. Han har inte lyckats helt. I vissa av sina bevis använder han förutsättningar som han inte postulerat utan som stillatigande förutsätts med ledning av åskådliga föreställningar.

Euklides system brukar efter honom kallas för *den euklidiska geometrin*.

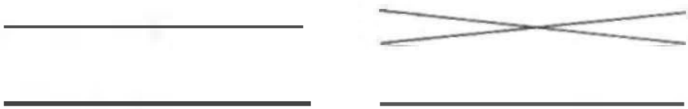
I början av sin första bok uppställer Euklides 23 definitioner, 5 axiom och 5 postulat. Axiomen är grundläggande antaganden av algebraisk natur, postulaten grundläggande antaganden av geometrisk natur. I modern geometri skiljer man inte på dessa två slag av förutsättningar utan använder för bådadera orden axiom eller postulat.

De olika kategorierna av element i en geometri kallas vanligen punkter, räta linjer etc. Men en geometri är ju ett logiskt system där elementens egenskaper bestäms av axiomatiskt givna relationer. Av den intuitiva uppfattningen om vad en rät linje är för något får man därför inte låta förleda sig att ge det matematiska begreppet rät linje i en viss geometri några egenskaper som inte kan härledas ur de givna axiomen.

Euklides och den grekiska matematiken ställde ett speciellt krav på geometrin. Dess axiom och postulat skulle väljas på sådant sätt att satserna i systemet stämde överens med den intuitiva uppfattningen av det åskådliga rummet. Det åskådliga rummet skulle med modernt språkbruk vara en *modell* av Euklides logiska system.

Som exempel på denna princip kan tas Euklides val av parallellpostulat. När Euklides skall formulera ett postulat, som utsäger hur många räta linjer som går genom en punkt utanför en given rät linje utan att skära den givna räta linjen, så förutsätter han att det bara finns en enda sådan rät linje. För den intuitiva uppfattningen är detta den enda tänkbara möjligheten.

Först 2 000 år efter Euklides prövade man möjligheten att förutsätta att det finns flera räta linjer som inte skär den givna.



Rent åskådningsmässigt förefaller ett sådant antagande orimligt. Det visar sig dock att om man byter ut Euklides parallellpostulat mot nyssnämnda antagande men bibehåller alla övriga axiom i den euklidiska geometrin, så får man ett motsägelsefritt logiskt system precis som i förra fallet. Denna nya geometri brukar vanligen kallas *den icke-euklidiska eller hyperboliska geometrin.*

Varje geometri i vilken det euklidiska parallellpostulatet inte gäller sägs stundom vara icke-euklidisk, vilket kan ge anledning till förväxlingar.

3. Euklides definitioner

En matematisk definition är en förklaring av meningen med ett matematiskt begrepp. I regel använder man sig härvid av andra matematiska begrepp. Vissa begrepp kan inte ges någon matematisk innebörd annat än i förhållande till varandra.

Definitionerna i Euklides *Elementa* utgör det svagaste partiet. Några av dem är existensvillkor, medan andra innehåller en antydan om egenskaper hos den rumsliga åskådningen men saknar matematisk innebörd. Vissa av dem kan bara förstås mot bakgrunden av samtida grekiskt tänkande.

Vi skall som exempel betrakta några av Euklides *definitioner*. Vi betecknar definition med ett D och bibehåller Euklides numrering.

D 1. *En punkt är något som inte kan delas.*

Definitionen framhåller en egenskap hos den åskådliga bilden av en punkt. Den som inte på förhand har vissa associationer förknippade med ordet "punkt" får ingen uppfattning om begreppets matematiska innebörd. Definitionen anses hänga samman med grekernas filosofiska spekulationer över atomen som den minsta, odelbara mängden av materia.

D 2. *En linje är en längd utan bredd.*

Definitionen är av samma slag som D 1, eftersom begreppen längd och bredd inte givits någon matematisk innebörd.

D 3. *En linjes ändar är punkter.*

D 3 är egentligen ett postulat, ty den innehåller ett antagande av geometrisk natur om sambandet mellan linjer och punkter. Man antar att Euklides ursprungligen definierat punkt som en linjes ändpunkt och att D 3 är en kvarleva av detta.

D 4. *En rät linje är en linje som ligger likformigt mellan sina punkter.*

D 5. *En yta är något som bara har längd och bredd.*

D 6. *En ytas begränsningar är linjer.*

D 7. *En plan yta är en yta som ligger likformigt mellan de räta linjerna på den.*

D 5—D 7 är tydligen bildade i analogi med D 2—D 4.

D 8. *En plan vinkel är lutningen mellan två linjer som ligger i samma plan och råkas men inte ligger i rät linje.*

D 8 är ytterst otillfredsställande och kan bara användas, om man utgår från en åskådlig bild. Den talar om "lutningen" utan att förklara den matematiska innebörden och menar med "linje" en icke begränsad linje (jfr D 3). Meningen är att definitionen även skall omfatta vinklar mellan kroklinjer. D 8 definierar endast vinklar mindre än ett halvt varv.

D 9. *När de linjer som begränsar en vinkel är räta linjer, kallas vinkeln rätlinjig.*

D 9 är en matematiskt korrekt definition.

D 10. *Om en rät linje skär en annan rät linje på ett sådant sätt att vinklarna på båda sidor blir lika stora, så kallas var och en av dessa lika stora vinklar en rät vinkel.*

Till slut skall vi nämna

D 23. *Två räta linjer sägs vara parallella, om de ligger i samma plan och aldrig råkas, om de förlängs obegränsat åt båda sidor.*

Den stora svagheten är som synes att Euklides försöker att ge en självständig matematisk innebörd åt sådana begrepp som punkt och rät linje, vilka bara kan ges en sådan innebörd genom att ställas i relation till varandra. De senare definitionerna, som kan stödja sig på redan införda begrepp, är i allmänhet matematiskt korrekta.

4. Euklides axiom och postulat

Euklides inför följande fem *postulat*, dvs. förutsättningar av geometrisk natur. Vi betecknar dem P 1—P 5.

P 1. *Det fordras att man kan dra en rät linje från en punkt till en annan.*

P 2. *Och att varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat.*

P 3. *Och att man kring varje medelpunkt kan beskriva en cirkel med given radie.*

P 4. *Och att alla räta vinklar är lika.*

P 5. *Och när en rät linje träffar två andra räta linjer, och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande räta linjen är mindre än två räta, så skall de båda räta linjerna, om de förlängs obegränsat, råkas på den sida om den skärande räta linjen som de båda vinklarna ligger som är mindre än två räta.*

Euklides säger inte uttryckligen att postulaten gäller relationer i ett plan. P 3 och P 5 är emellertid formulerade med tanke på planet.

I P 1 sägs ingenting om att räta linjen mellan två punkter är entydigt bestämd. Detta förutsätter Euklides stillatigande och använder entydigheten exempelvis vid beviset av sats 4 nedan.

I själva verket använder Euklides vid beviset av sina satser även andra postulat, som framgår av åskådningen men som han aldrig har förutsatt. Bl.a. nyttjar han följande två *skärningspostulat.*

Sk 1. *Om en rät linje går genom en punkt inuti en cirkel, så skärs cirkeln av räta linjen.*

Sk 2. *Om vardera av två cirklar går genom en punkt i det inre av den andra cirkeln, så skär cirklarna varandra.*

Man kan visa att Sk 2 är en följd av Sk 1.

Vidare fattas antaganden om att en rät linje delar planet i två delar och att en punkt på en rät linje delar denna i två delar. Över huvud taget saknas de s.k. anordningsaxiomen (avsnitt 12 nedan).

Euklides inför också fem *axiom*. De är grundläggande antaganden av algebraisk natur och innehåller relationer mellan "storheter", utan att Euklides förklarar vad han menar därmed. Av tillämpningarna framgår dock att han med storheter i axiomens mening avser sträckor, rätlinjiga vinklar och plana figurer, exempelvis trianglar.

Följande axiom uppställs. Vi betecknar dem A 1—A 5.

A 1. *Storheter som är lika med en och samma storhet är sinsemellan lika.*

A 2. *Och när man adderar lika storheter till lika storheter, så blir även summorna lika storheter.*

A 3. *Och när lika storheter subtraheras från lika storheter, så blir även resterna lika storheter.*

A 4. *Och storheter som täcker varandra är lika stora.*

A 5. *Det hela är större än sin del.*

Om Euklides "storheter" betecknas a, b, c, d, så kan de tre första axiomen med moderna beteckningar formuleras på följande sätt. Den lilla pilen anger att något följer av de relationer som man först skrivit upp.

A 1. $a=b,\ c=b \to a=c.$
A 2. $a=b,\ c=d \to a+c=b+d.$
A 3. $a=b,\ c=d \to a-c=b-d.$

Inte heller ifråga om axiomen har Euklides fått med alla de förutsättningar som han sedan använder sig av. Man saknar bl.a. följande axiom, där tecknet > betyder "större än".

$$a=b,\ b>c \to a>c.$$
$$a=b,\ c>d \to a+c>b+d.$$

5. Några av Euklides satser

Euklides avsikt är nu att bygga upp ett rent logiskt system med hjälp av de antaganden han gjort. Vi skall gå igenom ett par av hans *satser* och se hur han går tillväga.

Sats 1. *Problem. Att konstruera en liksidig triangel med given sida.*

Givet: En sträcka AB (se fig. 1).
Enligt P 3 kan vi rita en cirkel c_1 med medelpunkten i A,

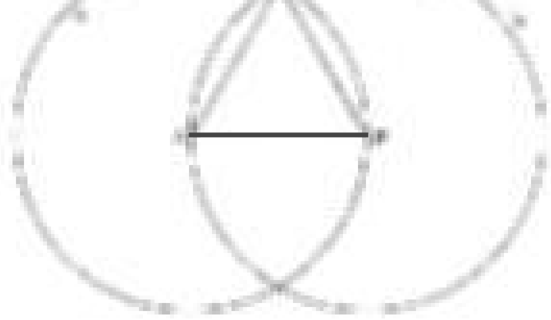


Fig. 1

som går genom punkten B, och en cirkel c_2 med medelpunkten i B, som går genom punkten A.

De båda cirklarna skär varandra i punkten C. (Sk 2. Euklides har som tidigare anmärkts inget postulat om villkoren för att två cirklar skall skära varandra utan nöjer sig med att stillatigande låta det ske, när åskådningen visar att så följer av en viss konstruktion.)

Enligt P 1 kan vi dra räta linjerna AC och BC.

På grund av cirklarnas egenskaper gäller nu $AC = AB$, $BC = AB$.

Enligt A 1 följer av detta $AC = BC$.

Alltså är triangeln ABC liksidig, vilket skulle bevisas.

Sats 2. *Problem. Att från en given punkt avsätta en given sträcka.*

Givet: Punkten A och sträckan BC (se fig. 2).

Drag räta linjen AB (P 1).

Konstruera den liksidiga triangeln ABD (sats 1).

Förläng DA och DB (P 2: en rät linje kan förlängas obegränsat).

Konstruera cirkeln c_1 med B som medelpunkt och BC som radie (P 3).

Uppsök skärningspunkten E mellan cirkeln c_1 och DB:s för-

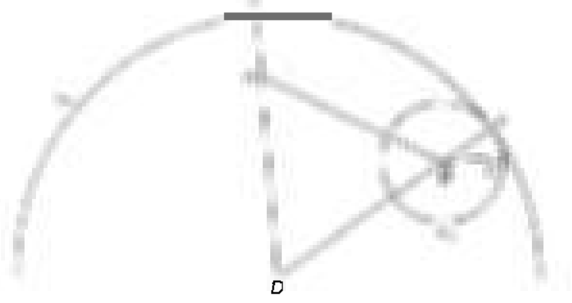


Fig. 2

längning (Sk 1: Euklides förutsätter stillatigande att en skärningspunkt existerar).

Konstruera cirkeln c_2 med D som medelpunkt och DE som radie (P 3).

Uppsök skärningspunkten F mellan c_2 och AD:s förlängning (Sk 1).

Då gäller $AF=BE$ (A 3: lika storheter minskade med lika storheter).

Vidare gäller $BE=BC$ (följer av cirkelns egenskaper).

Alltså är $AF=BC$ (A 1: två storheter är lika med en och samma storhet).

Sats 3. *Problem. Att på den större av två givna sträckor avsätta en sträcka av samma storlek som den mindre.*

Givet: Sträckorna AB och CD, $AB>CD$ (se fig. 3).

Avsätt från punkten A en sträcka $AE=CD$ (möjligt enligt sats 2).

Konstruera en cirkel med A som medelpunkt och AE som radie (P 3).

Bestäm skärningspunkten F mellan AB och cirkeln (Sk 1).

Då är $CD=AE=AF$ (följer av A 1 och av cirkelns egenskaper).

Sats 4. *(Första kongruensteoremet.) Om två sidor och mellanliggande vinkel i en triangel är lika med motsvarande ele-*

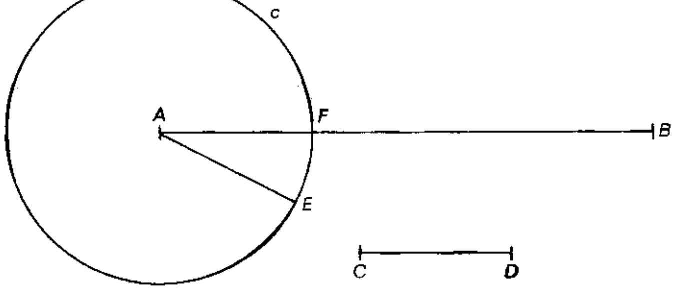


Fig. 3

ment i en annan triangel, så är de bägge trianglarnas tredje sidor lika stora, och triangelytorna är lika stora, och de övriga två vinklarna är lika stora som var sin vinkel i den andra triangeln.

Givet: De båda trianglarna ABC och $A'B'C'$, i vilka $AB=$ $=A'B'$, $AC=A'C'$ och vinkeln $A=$vinkeln A' (se fig. 4).

Euklides bevisar satsen genom att tänka sig triangeln ABC flyttad över på triangeln $A'B'C'$ på sådant sätt att vinkeln A täcker vinkeln A', sidan AB täcker sidan $A'B'$ och sidan AC täcker sidan $A'C'$.

Då måste också BC täcka $B'C'$, "ty annars skulle två räta linjer innesluta ett rum, vilket är omöjligt". (Med detta menar förmodligen Euklides att man inte kan dra två räta linjer mellan punkterna $B=B'$ och $C=C'$. Han använder sig alltså av den i P 1 inte klart uttalade egenskapen att två punkter entydigt bestämmer en rät linje.)

Efter flyttning följer alla likheter av A 4 (två ytor som täcker varandra är lika).

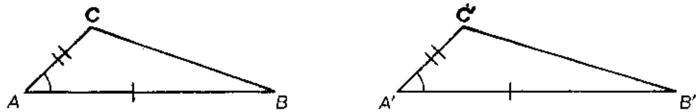


Fig. 4

Det är märkligt att Euklides utan vidare flyttar en hel triangel, när han i sats 1—3 gjort sig sådant besvär med flyttning av sträckor. Det förefaller som om han inte varit riktigt nöjd med de bevis som använder flyttning, ty när så är möjligt undviker han flyttning. När flyttning förekommer, förutsätter Euklides stillatigande

Flyttningspostulatet: *Det är möjligt att flytta en triangel vart som helst i planet utan att ändra dess sidor och vinklar.*

Vi skall sedermera se hur man i modern geometri undviker flyttningspostulatet genom att förutsätta en del av första kongruensteoremet som ett axiom (axiom III, 5 nedan).

I sats 5 använder Euklides sats 4 till att bevisa att de båda vinklarna, som står mot de lika sidorna i en likbent triangel, är lika stora. I nästa sats använder han för första gången A 5 (det hela är större än var och en av sina delar) för att bevisa omvändningen.

Sats 6. *Om två vinklar i en triangel är lika stora, så är motstående sidor lika stora.*

Givet: Triangeln ABC, i vilken vinklarna B och C är lika stora (fig. 5).

Om inte de sidor som står mot de lika vinklarna är lika stora, så måste den ena vara större än den andra. Antag att vi har $AB > AC$. Avsätt på BA en sträcka BD i riktning mot A sådan att $BD = CA$. Drag CD.

Man kan nu visa att trianglarna ACB och DBC är kongruenta, ty vinklarna i den ursprungliga triangeln vid B och C är lika, och vidare är $BD = CA$ samt BC gemensam.

Men då gäller speciellt att trianglarnas ytor är lika stora, vilket strider mot A 5. Följaktligen måste man ha $AB = AC$, v. s. b.

Euklides har nu använt alla fem axiomen samt P 1—P 3. Av postulaten återstår P 4 (alla räta vinklar är lika) samt P 5 (parallellaxiomet).

I sats 11 visar Euklides att räta vinklar existerar. Han använder sedan P 4, exempelvis för att bevisa att vertikalvinklar är lika stora. Med vertikalvinklar menas som bekant de parvis

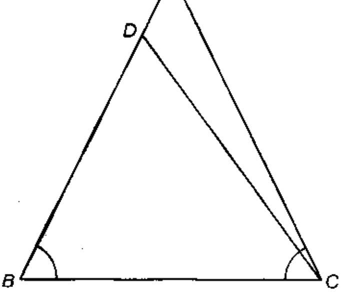


Fig. 5

lika stora vinklar som uppkommer då ett par räta linjer skär varandra.

En rät vinkel betecknar vi i det följande med bokstaven *R*.

Parallellaxiomet P 5 undviker Euklides i det längsta att använda. Man får ett intryck av att han har försökt komma så långt som möjligt utan P 5. Han bevisar exempelvis satsen att en yttervinkel till en triangel är större än var och en av de motstående inre vinklarna i triangeln utan att använda P 5, vilket avsevärt skulle förenklat beviset. Det är tänkbart att han i det längsta hoppats att kunna bevisa P 5 som en sats.

Med hjälp av nyssnämnda sats om en yttervinkel till en triangel bevisar Euklides att parallella linjer existerar.

Sats 27. *Om en rät linje skär två andra räta linjer så att ett par alternatvinklar är lika stora, så kan inte de två linjerna skära varandra.*

Ett av de båda paren alternatvinklar har markerats i fig. 6. Beviset förs indirekt. Om inte de båda räta linjerna vore parallella, så måste de skära varandra (se fig. 7). I så fall uppkommer en triangel sådan att en yttervinkel är lika stor som en av de motstående inre vinklarna, vilket är omöjligt.

Med hjälp av sats 27 kan Euklides alltså konstruera en rät linje genom en punkt utanför en given rät linje och parallell med den givna räta linjen. Härvid sammanbinder han den givna punkten med en punkt på den givna räta linjen och konstruerar två lika alternatvinklar.

Fig. 6

Fig. 7

Problemet är nu om konstruktionen är entydig. Kan man få andra räta linjer som inte skär den givna genom att sammanbinda den givna punkten med andra punkter på den givna räta linjen och konstruera lika alternatvinklar? Eller får man samma räta linje som vid den första konstruktionen?

Om vi har flera räta linjer genom punkten P, parallella med räta linjen l, så måste med beteckningarna i fig. 8 gälla $\delta > \gamma$. Om α och δ är sidovinklar och man alltså har $\alpha + \delta = 2R$, så måste gälla $\alpha + \gamma < 2R$.

Utifrån åskådningen kan det förefalla som om man lätt borde kunna härleda en sats om att det finns en och endast en rät linje genom P, som inte skär l. Det är dock inte möjligt. Man vet numera att entydigheten måste förutsättas som ett postulat. Så gjorde ju Euklides, som löste problemet genom att införa P 5. Enligt P 5 måste de räta linjerna skära varandra, om man har $\alpha + \gamma < 2R$, dvs. om summan av de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande linjen är $< 2R$.

När Euklides väl förutsatt P 5, kan han bevisa omvändningen av sats 27.

Sats 29. ***Om ett par räta linjer är parallella och skärs av en tredje, så är ett par alternatvinklar lika stora.***

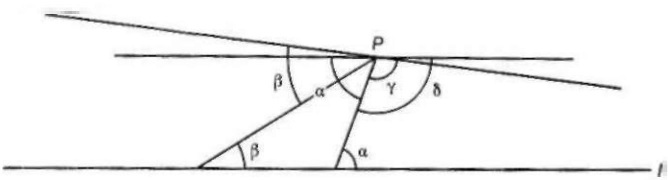


Fig. 8

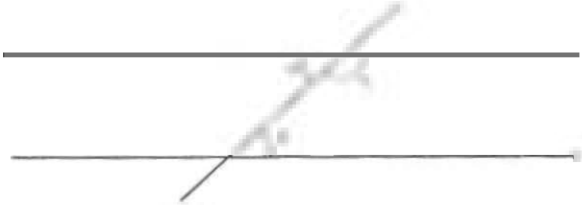


Fig. 9

Bevis. Antag att satsen vore falsk. Då hade man ett par parallella räta linjer, som skulle skäras av en tredje utan att alternatvinklarna vore lika stora.

Med beteckningarna i fig. 9 gäller $\alpha+\gamma=2R$. Om $\alpha>\beta$, så följde $\beta+\gamma<2R$. Men då råkades de givna räta linjerna enligt P 5, vilket strider mot antagandet.

Man kan nu härleda en rad satser som bevisas med hjälp av P 5, exempelvis att vinkelsumman i en triangel är $=2R$.

III. Parallellaxiomets historia

6. Från Euklides till Gauss

Om man undantar parallellaxiomet innehåller Euklides axiom och postulat idel förutsättningar av enklaste slag. Parallellaxiomet är däremot mera invecklat. Som redan påpekats, synes t.o.m. Euklides själv ha varit tveksam ifall inte parallellaxiomet egentligen vore en geometrisk sats, möjlig att bevisa med hjälp av övriga axiom och postulat.

Under de två årtusenden som följde på Euklides gjordes många försök att bevisa parallellaxiomet som en sats. Man lyckades visserligen inte finna något korrekt bevis, men man upptäckte att parallellaxiomet kan ersättas med likvärdiga axiom. Sådana axiom är t.ex. följande.

Om en rät linje skär den ena av två räta linjer, som aldrig råkas, så måste den också skära den andra (*Proclus*, 400-talet e. Kr.).

Genom tre punkter, som inte ligger i rät linje, kan man alltid lägga en cirkel (*W. Bolyai*, omkr. 1800).

Vinkelsumman i en triangel är två räta (*Sacceri*, omkr. 1700).

Det finns likformiga trianglar som inte är kongruenta (*Wallis*, 1600-talet).

Genom en punkt i det inre av en vinkel kan man alltid konstruera en rät linje som skär båda vinkelbenen (*J. F. Lorenz*, 1791).

Alla punkter på givet avstånd från en given rät linje och på samma sida om denna ligger på en rät linje (*Clavius*, 1500-talet).

Eftersom parallellaxiomet inte gäller i den hyperboliska geometrin, kan inte heller ovanstående utsagor gälla i denna.

Vid första ögonkastet verkar det kanske ytterst egendomligt att inte alla de uppräknade satserna skulle gälla. Det strider ju

Fig. 10

mot sunda förnuftet, dvs. mot den omedelbara uppfattning man har av förhållandena i ett vanligt åskådligt plan.

Men som tidigare framhållits menar ju Euklides själv att hans system skulle vara en abstrakt logisk byggnad, som inte utgår från åskådningen. Om man ändrar de grundläggande axiomen, måste man således fråga sig om det är möjligt att konstruera ett logiskt system, där inte ovanstående satser gäller.

Ett sådant system är faktiskt vad man får genom en så enkel åtgärd som att ersätta det euklidiska parallellaxiomet med antagandet att man genom en given punkt kan dra flera olika räta linjer, som inte skär en given rät linje.

Som exempel på försöken att bevisa det euklidiska parallellaxiomet som en sats skall visas hur engelsmannen *Wallis* (1616—1703) bevisade P 5 genom att stillatigande förutsätta att det existerar likformiga trianglar som inte är kongruenta.

Givet: Två räta linjer m och n, som skärs av en tredje rät linje PQ i P resp. Q på sådant sätt att summan av de båda inre vinklarna på ena sidan om PQ är mindre än två räta (fig. 10).

Om vi med beteckningarna i fig. 10 kallar de båda inre vinklarna α och β, så gäller alltså enligt antagandet

$$\alpha + \beta < 2R.$$

Drag en rät linje l genom P på sådant sätt, att $\wedge lPQ = \alpha$. l och n skär då PQ under lika stora alternatvinklar, varav följer att de är parallella. Eftersom $\alpha < 2R - \beta$ så kommer l att falla i det inre av $\wedge mPQ$.

Drag genom en punkt R på sträckan PQ en rät linje l' parallell med l genom att avsätta lika stora alternatvinklar α. Om R väljs nära P så måste l' skära även m, låt vara i punkten S. Det bildas alltså en triangel PRS.

Wallis konstaterar nu att en triangel enligt Euklides 3:e kongruensteorem är fullt bestämd, om man känner två vinklar och mellanliggande sida. Han använder detta för att jämföra den figur som begränsas av de räta linjerna PQ, m och n med triangeln PRS. Enligt konstruktionen gäller

$$\wedge PRS = \wedge Q = \alpha,$$
$$\wedge RPS = \wedge QPS = \beta.$$

Eftersom de båda vinklarna $\wedge PRS$ och $\wedge RPS$ tillsammans med mellanliggande sida PR bestämmer triangeln PRS, så drar Wallis den slutsatsen att vinklarna $\wedge Q$ och $\wedge QPS$ tillsammans med den mellanliggande sidan PQ bestämmer en med PRS likformig triangel. Av detta följer i sin tur att m och n skär varandra i en punkt T.

Den förste som kom med ett nytt och fruktbart betraktelsesätt var jesuitpatern *Gerolamo Sacceri* (djiro'lamo sa'tjeri, 1667—1733), lärare vid universitetet i Pavia. Hans huvudarbete trycktes 1733 under titeln *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Euklides befriad från varje fläck. Redan 1697 hade han i ett mindre arbete, *Logica demonstrativa*, framlagt grundidén till den indirekta bevismetod som han använde i sina försök att bevisa Euklides parallellaxiom.

Sacceris huvudarbete utgavs i engelsk översättning 1894 i första bandet av *American Mathematical Monthly*, i tysk översättning 1895 i F. Engels och P. Stäckels i litteraturförteckningen upptagna historik.

För alla som tidigare sysslat med geometri hade det varit självklart att parallellaxiomet skulle gälla. Sacceri utgick i likhet med sina föregångare från Euklides system men gjorde inget försök att bevisa parallellaxiomet med hjälp av Euklides övriga förutsättningar. Han antog i stället att om parallellaxiomet verkligen vore ett axiom, så skulle man komma till en

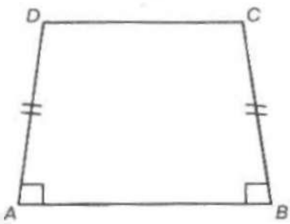


Fig. 11

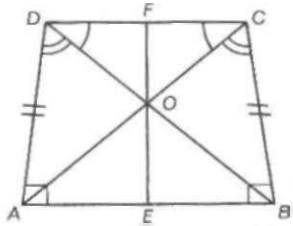


Fig. 12

rad motsägelser om man försökte bygga upp ett geometriskt system utan parallellaxiomet. På så sätt skulle man på indirekt väg erhålla ett bevis för nödvändigheten av att införa parallellaxiomet.

Sacceri betraktar en fyrhörning $ABCD$, där vinklarna vid A och B är räta och sidorna AD och BC lika (fig. 11).

Man kan nu visa att vinklarna C och D är lika utan att parallellaxiomet behöver användas. Detta sker genom att man drar diagonalerna AC och BD och bevisar att trianglarna ABC och BAD är kongruenta och likaså trianglarna ACD och BDC (se fig. 12).

Utan parallellaxiomet kan man emellertid inte avgöra om vinklarna C och D är spetsiga, räta eller trubbiga.

Sacceri gjorde nu tre olika antaganden, vilka han sedan undersökte var för sig:

a) Vinklarna C och D är spetsiga.
b) Vinklarna C och D är räta.
c) Vinklarna C och D är trubbiga.

Sacceri kan nu visa bl.a. följande sats:

Vinkelsumman i en triangel är a) mindre än, b) lika med, c) större än 180°.

Beviset går så till att Sacceri delar upp en godtycklig triangel i två rätvinkliga trianglar genom att dra höjden från ett av triangelns hörn. Satsen visas sedan för en rätvinklig triangel ABC.

Drag AD vinkelrät mot AB och sammanbind C med D. Då får man en Sacceris fyrhörning.

Sacceri visar först att för sidorna AB och CD i de tre fallen gäller a) $AB<CD$, b) $AB=CD$, c) $AB>CD$ ($<$ betyder mindre än, $>$ större än). I fall b) får han då att trianglarna ABC och ACD är kongruenta (alla sidor lika). Speciellt blir vinkeln ACB = vinkeln CAD. Men summan av vinklarna CAD och CAB är 90°. Således blir vinkelsumman i triangeln ABC 180°.

I fall a) gäller $AB<CD$. Då måste enligt Sacceri vinkeln DAC vara större än vinkeln ACB. Men $\wedge DAC + \wedge CAB = 90°$. Då är $\wedge CAB + \wedge ACB < 90°$ och vinkelsumman i triangeln ABC mindre än 180°. Fall c) behandlas analogt.

Sacceri visar också att de räta linjerna AB och CD har en gemensam normal EF. Detta härleder han genom följande kontinuitetsresonemang. Låt AD, som ju är vinkelrät mot AB, förflytta sig från A till B och hela tiden vara vinkelrät mot AB. Vinkeln ADC måste under förflyttningen minska resp. öka allteftersom den från början är trubbig resp. spetsig. I läget BC har den ju bytt karaktär. Den är där spetsig, om den från början var trubbig, och vice versa. Men då måste den i något mellanläge vara vinkelrät mot CD och då vara den gemensamma normalen.

(Man kan f.ö. lätt bestämma normalen genom att dra räta linjen EOF på sådant sätt att den utgör bisektris till de båda vertikalvinklarna AOB och COD. De båda triangelparen OFC och OFD resp. OEA och OEB blir då kongruenta. Av detta följer att vinklarna vid E och F är räta. Följaktligen är EF den sökta gemensamma normalen.)

Man kan nu visa att alla punkter på samma sida om en rät linje och på samma avstånd från den räta linjen inte i den hyperboliska geometrin kan ligga på en rät linje. I Sacceris fyrhörning ligger ju C och D lika långt från räta linjen AB. Om alla punkter på detta avstånd från AB skulle ligga på räta linjen genom C och D, skulle man ha $AD=EF$. Men då vore $AEFD$ en fyrhörning av det slag Sacceri behandlade, dvs. vinklarna D och F skulle vara av samma slag. Detta är endast möjligt i den euklidiska geometrin; i fallen a) och c) får man en motsägelse.

I fall c) kom Sacceri således fram till att vinkelsumman i en triangel var större än 180°. Eftersom han med Euklides hade förutsatt att en rät linje kan förlängas obegränsat, kunde han bevisa parallellaxiomet utifrån antagandet c). Av parallellaxiomet följer att vinkelsumman i en triangel är exakt 180°. Därmed konstaterade Sacceri att han funnit en motsägelse.

I den moderna geometrin kan man bygga upp ett axiomsystem där antagandet c) gäller. Men man får då ändra på vissa av Euklides övriga axiom och postulat för att få ett motsägelsefritt system.

Av antagandet b) följer parallellaxiomet och därmed den vanliga euklidiska geometrin.

När Sacceri gjorde antagandet a) kunde han härleda en rad satser som föreföll samtiden vanvettiga, därför att de strider mot vad man intuitivt anser gälla i ett plan. I själva verket innebär de inga logiska motsägelser mot de gjorda antagandena. De är alltså inga bevis för att antagandet a) är orimligt.

Sacceri fann bl.a. att vinkelsumman i en triangel är mindre än 180°. Genom ett felslut trodde han sig även i fallet a) ha kommit fram till en motsägelse och ansåg sig därför kunna avfärda också detta. I själva verket var han den förste som härledde en rad satser som gäller för den hyperboliska eller icke-euklidiska geometrin.

Den amerikanske matematikern *E. T. Bell*, känd även i vårt land för sina populära arbeten om matematikens historia, har givit spridning åt en berättelse som ifrågasätter Sacceris vetenskapliga hederlighet. Sacceri skulle nämligen mot bättre vetande ha uppgivit att han kommit till en motsägelse i fallet a). Själv skulle han ha begripit att den motsägelse han erhållit endast var skenbar. Orsaken skulle ha varit att den euklidiska geometrin ju erfarenhetsmässigt gällde i den värld som skapats av Vår Herre. Även den euklidiska geometrin utgjorde ett av Hans skapade verk. Att konstruera ett med denna likaberättigat logiskt system vore därför en hädelse.

Förklaringen verkar efterhandskonstruktion. Sacceri hade knappast någon känsla för att det kunde finnas andra logiskt riktiga geometrier än den euklidiska. Han var säkerligen inställd på att förr eller senare finna en motsägelse.

Sacceris bevis är 16 sidor långt. Motsägelsen erhålls genom att vissa skärningspunkter i en figur tänks förflyttade till oändligt avstånd. Att sådant kunde vara otillåtet hade man inte någon känsla för i början av 1700-talet. Det dröjde också till efter Sacceris tid innan man fann hans felslut. Att en nutida matematiker av facket genast upptäcker det är tämligen självklart. Hypotesen om Sacceris påstådda ohederlighet är närmast en illustration till vissa amerikanska lärdomshistorikers oförmåga att leva sig in i en gången tids situation för att i stället bedöma andra tiders problem utifrån sin egen upplysta ståndpunkt.

Bland matematiker som under senare hälften av 1700-talet sysslade med geometriska undersökningar kan nämnas schweizaren *Johann Heinrich Lambert* (1728—1777). Han studerade en fyrhörning med tre räta vinklar. För den fjärde vinkeln gjorde han liknande antaganden som Sacceri: den förutsattes vara spetsig, rät eller trubbig.

Lambert visade bland annat en viktig sats för ytan av en triangel i den spetsiga och den trubbiga vinkelns geometri. Om vinkelsumman i triangeln *ABC* skiljer sig från 180° med en vinkel ε, så är triangelns yta proportionell mot ε. Ju större vinkeln ε är, desto större blir triangelytan. För den spetsiga vinkelns geometri, den hyperboliska geometrin, innebär tydligen detta att om vinkelsumman i en triangel är mindre än i en annan så är den första triangelns yta större.

Något senare än Lambert arbetade fransmannen *Adrien Marie Legendre* (1752—1833) med geometriska undersökningar. Han visade bl.a. att om alla Euklides axiom utom parallellaxiomet förutsätts gälla kan vinkelsumman i en triangel inte överstiga 180°. Han kunde därigenom avfärda Sacceris antagande om den trubbiga vinkeln. Varken Lambert eller Legendre kom emellertid med något principiellt nytt utöver Sacceris undersökningar.

Slutligen bör också nämnas ungraren *Bolyai Farkas*, tysk namnform *Wolfgang Bolyai* (1775—1856). Åren 1796—1799 studerade denne i Göttingen och sysselsatte sig då med undersökningar över parallellaxiomets natur. Han var under denna tid en nära vän till Gauss, som annars levde tämligen isolerat. Sedan Bolyai lämnat Göttingen uppehöll han brevkontakt med Gauss. Han skickade således år 1804 ett försök att bevisa pa-

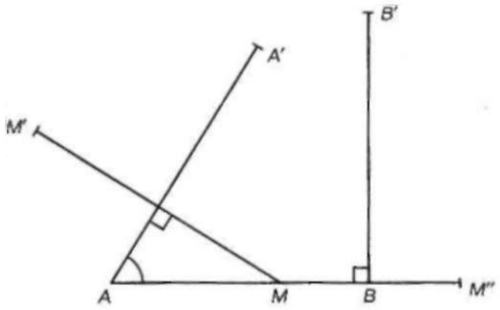


Fig. 13

rallellaxiomet till Gauss, som dock måste svara att beviset var felaktigt.

I ett senare arbete, *Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos* . . ., publicerat 1832—35, visade Wolfgang Bolyai bl.a. följande sats.

Sats. *Om man alltid kan lägga en cirkel genom tre punkter, som inte ligger i rät linje, så gäller Euklides parallellaxiom.*

För att bevisa satsen antar Bolyai att två räta linjer AA' och BB' skärs av en tredje genom A och B på sådant sätt att vinklarna vid B blir räta och vinkeln på ena sidan om A blir mindre än en rät (se fig. 13). Uppgiften är då att visa att de räta linjerna måste skära varandra.

Bolyai väljer nu en godtycklig punkt M på AB och uppsöker dess spegelbilder i AA' och BB', som han kallar M' och M''. Eftersom vinkeln vid A är spetsig ligger de inte i rät linje. Men då kan man lägga en cirkel genom dem. Cirkelns medelpunkt ligger i skärningspunkten mellan mittpunktsnormalerna till MM' och MM'', dvs. på skärningspunkten mellan AA' och BB'. Således existerar denna skärningspunkt, och de ursprungliga räta linjerna skär varandra.

7. Den icke-euklidiska geometrins upptäckt

Den självklara förutsättningen för alla som sysslat med geometri sedan Euklides dagar hade varit att det euklidiska parallellaxiomet med nödvändighet måste gälla, antingen som en sats eller som ett axiom.

Som redan nämnts hade under 1700-talet förekommit försök att bevisa parallellaxiomet genom indirekt metod. De hade inneburit ansatser till uppbyggnad av abstrakta system, i vilka parallellaxiomet ersatts med andra antaganden. Men matematikernas arbetshypotes hade varit att sådana system förr eller senare skulle kunna visas innehålla motsägelser.

Först under 1800-talets två första årtionden uppträder vetenskapsmän som klart uttalar att det är möjligt att konstruera en logiskt motsägelsefri geometri, i vilken parallellaxiomet inte gäller. De har ännu inga bevis. Men de undersöker det logiska system som i det föregående kallats den spetsiga vinkelns geometri inte för att hitta motsägelser utan för att studera dess egenskaper.

Karl Friedrich Gauss

K. F. Gauss (1777—1855) var som bekant en av alla tiders störste matematiker. Samtiden gav honom ärenamnet *princeps mathematicorum*, matematikernas furste. Gauss publicerade ytterst få av sina matematiska upptäckter därför att han ville ge dem en elegant, logiskt oanfäktbar form. Många av hans resultat blev därför inte kända förrän under utgivningen av hans samlade skrifter många årtionden efter hans död.

Till de upptäckter som Gauss hemlighöll hör insikten om att den spetsiga vinkelns geometri var en särskild geometri, skild från den euklidiska men från logisk synpunkt likvärdig med denna. För den spetsiga vinkelns geometri reserverar Gauss namnet icke-euklidisk geometri — namnet hyperbolisk geometri infördes sedermera av andra.

Man kan följa Gauss arbete genom de glimtar ur hans tankevärld som skymtar i hans brev till olika vänner. Redan 1799, i ett brev till den tidigare nämnde Wolfgang Bolyai, uttalar Gauss sina tvivel på att parallellaxiomet går att bevisa som en sats. Hans uppfattning under det närmaste årtiondet förefaller att ha varit oklar. I ett brev från 1816 gör emellertid Gauss sådana uttalanden att han måste ha löst problemet om den icke-euklidiska geometrin som ett logiskt system. Gauss menar här att man skulle kunna bevisa den icke-euklidiska geometrins giltighet i den fysiska omvärlden, om man kunde finna en stor triangel vars vinkelsumma vore mindre än 180°. Gauss räknar klart med möjligheten att en sådan triangel existerar.

Bland Gauss efterlämnade anteckningar förekommer inte någon systematisk framställning av den hyperboliska geometrin. Men han har vid olika tidpunkter bevisat dess viktigaste satser.

I ett brev på äldre dagar uppger Gauss att han redan 1792, alltså vid 15 års ålder, skulle ha insett den hyperboliska geometrins berättigande som självständigt logiskt system. Detta stämmer dock inte med de uttalanden i Gauss efterlämnade brev och anteckningar som ovan anförts.

N. I. Lobatjevskij

De första som publicerade framställningar av den hyperboliska geometrin som ett självständigt logiskt system var ryssen Lobatjevskij och ungraren Johan Bolyai. Deras upptäckt av den nya geometrins likaberättigande med den euklidiska anses ha skett vid ungefär samma tidpunkt, nämligen mitten av 1820-talet. Lobatjevskijs resultat publicerades dock något tidigare.

Nicolai Ivanovitch Lobatjevskij (1793—1856) var verksam vid universitetet i Kasan, först som student, sedermera som professor i matematik. Uppslaget till sina undersökningar kan han ha fått från sin lärare Bartels, som var ungdomsvän till Gauss.

I sina föreläsningar åren 1815—1817 försökte Lobatjevskij bevisa parallellaxiomet. Men han kom så småningom till klarhet om dess oberoende av Euklides övriga axiom. Hans första arbete framlades 1826 för den fakultet han tillhörde.

Den första publiceringen skedde på ryska 1829—1830 med titeln *Om geometrins grunder*. Sedan följde en rad arbeten som behandlade olika problem inom den nya geometrin. Lobatjevskij kallade den i en avhandling från 1835 *Imaginär geometri*, i en undersökning från 1855 på franska och ryska för *Pangeometri*.

Sin första presentation för icke ryskspråkiga läsare fick Lobatjevskijs idéer i uppsatsen "Géometrie imaginaire", publicerad 1837 i den tyska *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, kallad *Crelles Journal*. 1840 trycktes på tyska i Berlin ett annat geometriskt arbete av Lobatjevskij, *Undersökningar av teorin för parallella linjer*.

Gauss lärde i början av 1840-talet känna Lobatjevskijs arbeten, även de ryskspråkiga, sedan han vid mer än 60 års ålder börjat lära sig ryska. Med anledning av en oförstående recension av Lobatjevskijs tyska skrift från 1840 skriver Gauss till en vän att recensionen torde ha författats av en alldeles okunnig person. Gauss fortsätter: "Efter det jag själv fick tillfälle att ta del av denna undersökning är mitt omdöme därom mycket positivt."

Johan Bolyai

Bolyai Janos eller Johan Bolyai (1802—1860) var son till matematikern Wolfgang Bolyai, som nämnts i det föregående. Han var ungrare och ämnade bli ingenjörsofficer. Redan som kadett vid kejserliga ingenjörsakademin i Wien sysslade den unge Bolyai med problemet att avgöra parallellaxiomets natur. 1820 skrev han hem till sin far om sina undersökningar. Denne svarade emellertid att detta var bortkastat arbete. Den äldre Bolyai erinrade om hur han själv under många år försökt bevisa parallellaxiomets riktighet utan att lyckas och framhöll bl.a.: "Under århundraden kommer hundratals av världens bästa geometer att få grubbla utan att lyckas bevisa det elfte axiomet, såvida de inte tar något nytt axiom till hjälp. Jag tror jag själv har tagit alla tänkbara idéer i betraktande."

Den yngre Bolyai lät dock inte avskräcka sig. De närmaste åren blev han klar över att det euklidiska parallellaxiomet inte kunde bevisas som en sats och att det kunde tänkas en icke-euklidisk geometri, där det inte gällde. I ett brev av den 23 november 1823 berättar han för fadern om sina upptäckter:

"Jag har funnit så storartade ting att jag själv blev förvånad. Det skulle vara en evig skada, om de gick förlorade. När Ni får se dem, kommer Ni också att inse detta. Nu kan jag bara säga så mycket som att jag ur intet har skapat en ny värld.”

Bolyai senior publicerade så småningom sonens resultat som en bilaga till sin egen matematiska lärobok *Tentamen* . . . under en lång latinsk titel, inledd med ordet *Appendix*. Johan Bolyais *Appendix* trycktes i juni 1831.

Följande år, i februari 1832, erhöll Gauss arbetet genom en gemensam vän till dem båda. I ett brev den 14 februari samma år skriver Gauss till en kollega: ”Jag nämner vidare att jag i dagarna från Ungern fått mottaga en liten skrift om den icke-euklidiska geometrin, i vilken jag återfunnit alla mina egna idéer och resultat, framställda med stor elegans, ehuru i en form som på grund av koncentrationen är svår att ta del av för den som inte är hemma i ämnet. Författaren är en mycket ung österrikisk officer; hans far är min ungdomsvän, med vilken jag 1798 ofta diskuterade frågan, fastän mina idéer då ännu var långt ifrån det mogna stadium till vilket denne unge man genom självständiga forskningar nu utvecklat dem. Jag betraktar denne unge geometer v. Bolyai som ett första rangens geni.”

Den 6 mars följde så ett brev från Gauss till Wolfgang Bolyai med ett utlåtande om sonens arbete. I sak är det erkännande, i det att Gauss sätter Johan Bolyais prestation i paritet med sina egna resultat. Men till formen verkar det onödigt negativt.

Gauss skriver: ”Nu några ord angående din sons arbete. Om jag börjar med att säga att jag inte får berömma det, så blir du väl i förstone förvånad, men jag kan inte annat. Att berömma arbetet skulle betyda att berömma mig själv. Ty hela skriftens innehåll, den väg din son slagit in på och de resultat till vilka han har kommit, sammanfaller nästan genomgående med mina egna meditationer, som jag delvis utfört redan för 30—35 år sedan. I själva verket kommer detta för mig som en stor överraskning. Min avsikt var att lämna mina egna arbeten, av vilka endast litet finns upptecknat, för hela min livstid opublicerade. . . . Däremot var det min avsikt att med tiden anteckna allt, så att det icke skulle försvinna med mig.”

Fadern Bolyai uppfattade att detta var menat som beröm. Så ej sonen. Johan Bolyai tog det mycket hårt att en annan hade upptäckt sammanhangen inom den icke-euklidiska geometrin före honom. Han kände också bitterhet över att Gauss inte gav offentligt erkännande åt hans arbete. Johan Bolyai lämnade nu helt sina matematiska studier, greps tidvis av förföljelseidéer och dog efter år av melankoli.

Matematikerna i gemen ägnade inte Lobatjevskijs och Bolyais arbeten någon större uppmärksamhet. Genom publiceringen av Gauss brev och anteckningar, som påbörjades år 1860, blev emellertid bekant vad den store Gauss uträttat inom den hyperboliska geometrin. Den matematiska världen började nu mera allmänt intressera sig även för Lobatjevskij och Bolyai och fortsatte deras undersökningar. Gauss anteckningar rörande den icke-euklidiska geometrin publicerades i sin helhet först år 1900, i band 8 av hans *Samlade arbeten.*

Schweikart och Taurinus

Under 1800-talets första årtionden synes intresset för den hyperboliska geometrin ha legat i luften. Ett exempel på detta är att två jurister sysselsatte sig med geometriska undersökningar och kom mycket nära problemets lösning.

Den förste av dem var Ferdinand Karl Schweikart (1780—1859), verksam först vid universitetet i Charkov, från 1818 juris professor i Marburg. I ett arbete från 1807 framkastade han möjligheten att det euklidiska parallellaxiomet bara skulle gälla i de små förhållanden man hade att göra med på jordytan. År 1818 meddelade han Gauss att han konstruerat en icke-euklidisk geometri, som han kallade *Astralgeometri* (Stjärngeometri). Namnet valde Schweikart för att antyda att även om den euklidiska geometrin enligt all erfarenhet föreföll vara den "riktiga" i den skala man hade att göra med på jorden, så var det möjligt att en annan geometri skulle gälla, om sådana avstånd som från jorden till fixstjärnorna kom med i betraktandet.

Schweikarts arbeten publicerades aldrig. Inom den matematiska världen fick man för första gången kännedom om dem genom ett brev från Schweikart till Gauss, som återfanns bland den senares efterlämnade papper (band 8, s. 180—181).

Uppmuntrad av Schweikart ägnade sig hans systerson Franz Adolf Taurinus (1794—1874) åt att bygga ut astralgeometrin och härledde bl.a. vissa trigonometriska satser för denna. Egendomligt nog var Taurinus hela tiden övertygad om den euklidiska geometrins riktighet och om möjligheten av att härleda parallellaxiomet som en sats. 1824 sände han Gauss ett försök att bevisa parallellaxiomet. Detta hindrade honom emellertid inte att undersöka vilka konsekvenser ett förnekande av dess giltighet kunde medföra. Taurinus bestämde således omkretsen och ytan hos den hyperboliska cirkeln samt den hyperboliska sfärens area och volym.

Även Taurinus arbeten synes ha gått samtiden så gott som spårlöst förbi. De återupptäcktes först mot slutet av 1800-talet, då man började studera parallellaxiomets historia.

Den fortsatta utvecklingen

Lobatjevskij kallade den nya geometrin för imaginär geometri. Så småningom blev namnet icke-euklidisk geometri allmänt vedertaget. Det är inte särskilt lyckat, eftersom man i modern tid har konstruerat många geometrier som inte överensstämmer med den euklidiska. Ofta används därför namnet *hyperbolisk geometri.* Både Lobatjevskij och Bolyai synes emellertid ha trott att det bara kunde tänkas en enda geometri, skild från den euklidiska.

Nya synpunkter på detta problem framlades av den tyske matematikern *Bernhard Riemann* (1826—1866). Riemann, som gått den vanliga lärda vägen, hade först blivit Dr. phil. Efter en tid av fortsatt vetenskapligt arbete blev han docent i Göttingen, eller, som det också hette, "habilitierter Doktor", förkortat Dr. habil. Som sådan måste han hålla en provföreläsning för docentur, en habilitationsföreläsning. Denna hölls den 10 juni 1854 och bär titeln "Om de hypoteser som ligger till grund för geometrin". Riemann avsåg inte att låta trycka den. Den kom därför inte att publiceras förrän 1868, efter Riemanns död. Bland Riemanns åhörare märktes hans gamle lärare Gauss, som dog följande år.

Alla som tidigare sysslat med geometri hade med Euklides antagit att en rät linje kunde förlängas oändligt långt i båda riktningarna, utan att man någonsin nådde ett slut. Riemanns idé går ut på att skilja mellan begreppen oändlig och obegränsad. En klotyta och ett plan betraktar Riemann båda som obegränsade i den meningen att man kan röra sig åt ett bestämt håll hur långt som helst. Däremot anser han att klotytan har en ändlig utsträckning, medan planet är oändligt.

Riemann antar nu att rummet är ändligt men obegränsat. En rät linje som förlängs i en bestämd riktning kan då förlängas i oändlighet men kommer likt en storcirkel på en klotyta så småningom tillbaka till utgångspunkten.

Det är möjligt att bygga upp en geometri på detta antagande. Riemann får på så vis ett system där en rät linje saknar parallella räta linjer. Det blir helt enkelt *den trubbiga vinkelns geometri*, även kallad den *elliptiska geometrin*.

Redan Sacceri behandlade den trubbiga vinkelns geometri men kom till logiska motsägelser. Orsaken var enligt Riemann att Sacceri förutsatt giltigheten av samtliga Euklides axiom utom parallellaxiomet. Riemann själv tog bara med vissa av Euklides axiom och fick på så vis ett system som var logiskt oantastligt.

Riemann visar i sin framställning att man kan konstruera matematiska ytor av olika slag med den egenskapen att antingen den elliptiska, euklidiska eller hyperboliska geometrin gäller. Som räta linjer får man då välja de s.k. geodetiska linjerna, dvs. de kurvor som utgör kortaste avståndet mellan närbelägna punkter på ytan.

För det fortsatta matematiska studiet av de tre geometrierna svarade främst *Felix Klein* (1849—1925), död som professor i Göttingen. Klein är en av sekelskiftets mest framstående matematiker. Han har utfört grundläggande undersökningar inom den moderna geometrin. Dessutom hade han gåvan att kring sig kunna samla en krets av lärjungar som fortsatt hans vetenskapliga arbete. Klein har själv författat en historik över den utveckling inom matematiken som han personligen varit med om att genomföra.

Berömt blev Felix Kleins s.k. *erlangenprogram*. Det var ett föredrag hållet 1872 i samband med att Klein tillträdde en professur i Erlangen. Titeln var ”Jämförande betraktelser över nyare geometriska forskningar”.

I erlangenprogrammet hänvisar Klein till de olika geometriernas samband med andra grenar av matematiken. Han framhåller att man kan utnyttja detta samband på olika sätt, dels för att genomföra en klassificering av olika geometriska system, dels för att ge nya fruktbara synpunkter på deras uppbyggnad.

Kleins idéer framlades året därpå i tryck. Erlangenprogrammet trycktes in extenso först 1893 i *Mathematische Annalen*, band 43.

Före mitten av 1800-talet hade man i regel godtagit alla Euklides axiom och postulat med undantag av parallellaxiomet. Detta hade i stället varit föremål för ett så mycket intensivare studium. Under 1800-talets senare hälft började man kritiskt granska Euklides geometriska system som sådant.

En av pionjärerna härvidlag var *Max Pasch*, som i sina föreläsningar åren 1873—1874 gav den första stränga kritiken av Euklides geometri i dess helhet. Han formulerade ett system av axiom för den euklidiska geometrin som uppfyllde moderna krav på att vara uppbyggt utan luckor och dolda förutsättningar. Paschs arbete trycktes 1882 under den anspråkslösa titeln *Föreläsningar över nyare geometri.*

Det har även framlagts andra liknande axiomsystem med samma målsättning. Det system för den euklidiska och hyperboliska geometrin som vanligen läggs till grund för dessa geometriers logiska uppbyggnad publicerades första gången av den framstående tyske matematikern *David Hilbert* (1862—1943) i hans arbete *Grundlagen der Geometrie* 1899. Arbetet har utkommit i flera upplagor och både Hilbert själv och andra forskare har företagit vissa modifikationer av det ursprungliga axiomsystemet. I föreliggande arbete följs i huvudsak framställningen i den åttonde upplagan från 1956, med vissa modifikationer.

IV. Hilberts axiomsystem

8. Inledande anmärkningar

Av den historiska översikten framgick att den euklidiska och den hyperboliska geometrin endast skiljer sig genom parallellaxiomets olika formulering. Alla de satser som man kan härleda utan att använda parallellaxiomet måste alltså vara desamma i båda geometrierna. Man brukar kalla den gemensamma delen av den euklidiska och den hyperboliska geometrin för *pangeometrin* eller den *absoluta geometrin.*

En *definition* i matematisk mening är en förklaring av meningen med ett matematiskt begrepp. I regel definierar man ett nytt begrepp med hjälp av begrepp med känd innebörd.

Som exempel skall vi välja följande definition av begreppet *vinkel* i planimetrin.

Definition: En *vinkel* är en figur som bildas av två halvlinjer utgående från samma punkt.

Definitionen förutsätter att vi vet vad som menas med punkt och med halvlinje utgående från punkten.

Vi frågar oss nu om det är möjligt att definiera de ingående begreppen. För halvlinje finns följande definition.

Definition: En *halvlinje* från en given punkt utgörs av samtliga punkter som ligger på en rät linje genom punkten och på samma sida om den givna punkten.

I den sista definitionen kommer in ytterligare nya begrepp, nämligen "rät linje genom en punkt" och "ligga på samma sida". Om vi fortsätter måste vi till slut komma till vissa element och relationer mellan element som vi inte kan ge någon matematisk innebörd annat än genom utsagor som ställer dem i förhållande till varandra. Man brukar kalla sådana relationer och element för *grundbegrepp.*

Grundbegreppen är av två slag, dels *grundelement*, dels *grundrelationer* mellan dessa. De är till en början bara tomma ord, och de får sitt innehåll genom de axiom som uppställts för den geometri där de ingår.

Hilbert uppställer först ett axiomsystem för den euklidiska geometrin. Han utgår härvid från tre kategorier av grundelement som kallas ”punkter”, ”räta linjer” och ”plan”. Hilbert framhåller uttryckligen att vi inte får lägga in några egenskaper i benämningarna som sådana. Lika väl som att tala om punkter, räta linjer och plan, säger Hilbert, skulle man kunna tala om stolar, bord och ölsejdlar, dvs. använda vilka bokstavskombinationer som helst. Detsamma gäller Hilberts grundrelationer, såsom ”mellan” och ”kongruent”.

Man kan fråga sig varför man i så fall skall välja namn på begreppen, som direkt ger associationer till kända egenskaper och begrepp i det åskådliga rummet. Orsaken är att man i regel vid uppställningen av ett geometriskt system har haft den rumsliga föreställningen i tankarna. Av den har man hämtat tips om hur axiomen skulle formuleras för att inte bli motsägande.

När man väl har ställt upp sina axiom, kan man på rent logisk väg bygga upp en abstrakt geometri. Denna kan i sin tur användas för att avgöra om det intryck man fick av den rumsliga föreställningen var logiskt hållbart.

Den hyperboliska geometrin är ett exempel på att det euklidiska parallellaxiomet, som vi med utgångspunkt från den rumsliga föreställningen tycker är en självklar och nödvändig beståndsdel av ett geometriskt system, vars alla övriga axiom stämmer överens med förhållandena i det åskådliga rummet, mycket väl kan bytas ut mot ett parallellaxiom av rakt motsatt innehåll utan att man därigenom får ett logiskt motsägande system.

Man har i den moderna matematiken konstruerat många olika, logiskt motsägelsefria geometrier. I förhållande till vår vanliga rumsliga åskådning ter de sig ofta mer eller mindre patologiska. Detta hindrar givetvis inte att de är av matematiskt intresse.

Man ställer två krav på en modern geometri. Den skall vara *motsägelsefri*, dvs. man skall inte ur de uppställda axiomen kunna härleda satser som strider mot varandra. Dessutom skall axiomen vara *oavhängiga* av varandra.

Kravet på motsägelsefrihet söker man verifiera genom att betrakta ett system i vilket samtliga axiom är uppfyllda. Mera om detta senare.

Kravet på oavhängighet är svårare att verifiera. Som exempel kan nämnas att de första upplagorna av Hilberts *Grundlagen der Geometrie* innehåller axiom som sedermera kunnat härledas som satser med utgångspunkt från Hilberts övriga axiom. Om man håller hårt på kravet att samtliga axiom skall vara oberoende av varandra, kan dessutom vissa axiom få en mycket krånglig formulering. Man brukar därför i praktiken inte hålla så hårt på oavhängighetskravet.

Eftersom Hilberts avsikt är att uppställa ett axiomsystem för den euklidiska geometrin, har han valt sina grundbegrepp och axiom på ett sådant sätt att de stämmer överens med motsvarande begrepp i det vanliga åskådliga rummet. Hilbert åstadkommer det som Euklides ville men inte helt förmådde förverkliga, nämligen ett logiskt system som är oberoende av den rumsliga åskådningen men konstruerat på sådant sätt att det "stämmer" med vår intuitiva uppfattning av förhållandena omkring oss.

9. De fem axiomgrupperna

Hilbert utgår i sitt geometriska system, som redan nämnts, från tre kategorier av *grundelement*. Den första kategorin kallas *punkter* och betecknas A, B, C, . . . Den andra kategorin kallas *räta linjer* och betecknas med små bokstäver, a, b, c, . . . Den tredje kategorin kallas *plan* och betecknas med grekiska bokstäver, α, β, γ, . . .

Punkterna kallas även element i den *linjära* geometrin, punkter och räta linjer kallas element i *planimetrin*, och alla tre kategorierna kallas element i *rymdgeometrin*.

Grundrelationerna mellan de olika typerna av grundelement benämner vi med sådana ord som *höra samman*, *mellan*, *kongruent* och *parallell*. Den matematiska innebörden i dessa olika relationer följer ur axiomen i Hilberts geometri.

På grund av sitt innehåll indelas axiomen i fem grupper.

I. 1—8. Incidensaxiom.
II. 1—4. Anordningsaxiom.
III. 1—5. Kongruensaxiom.
IV. Parallellaxiomet.
V. 1—2. Kontinuitetsaxiomen.

Axiomen i grupperna I—III och V är gemensamma för den euklidiska och den hyperboliska geometrin. Man säger att de utgör axiomen i *pangeometrin*. Grupp IV består endast av det euklidiska parallellaxiomet. När Hilbert vill uppställa ett axiomsystem för den hyperboliska geometrin, byter han ut det euklidiska parallellaxiomet IV mot det hyperboliska parallellaxiomet IV' men låter övriga axiom gälla oförändrade.

Det bör kanske påpekas att ordalydelsen i ett och samma axiom kan variera i olika upplagor av Hilberts arbete utan att axiomets innebörd ändrats.

10. Incidensaxiomen

Vi antar först att det existerar en grundrelation, som ställer de tre kategorier av grundelement som vi kallat "punkter", "räta linjer" och "plan" i ett visst samband med varandra. Vi uttrycker denna relation genom att säga att en rät linje *a hör samman med* en punkt *A*, att *A* hör samman med *a*, eller att *A* och *a* hör samman. Analogt formuleras relationen mellan en punkt och ett plan och mellan en rät linje och ett plan.

När det i axiomen talas om två eller flera punkter, räta linjer och plan, så förutsätts hela tiden att det är fråga om icke sammanfallande element.

Det första incidensaxiomet lyder:

I, 1. *Till två givna punkter A, B finns det alltid en rät linje a, som hör samman med var och en av de båda punkterna A, B.*

I stället för uttrycket "höra samman med" använder man ofta andra språkliga vändningar, hämtade från den åskådliga tolkningen av de matematiska begreppen i vår föreställningsvärld. Det är då viktigt att ha klart för sig att detta bara är en tolkning bland många. Man säger således att den räta linjen *a* *går genom* punkterna *A* och *B*, eller att den *förbinder* punkterna *A* och *B*, eller att punkterna *A* och *B* *ligger på* räta linjen *a*.

Om punkten *A* ligger på räta linjerna *a* och *b*, säger man också att räta linjerna *a* och *b* *skär varandra i A* eller att de *har punkten A gemensam*.

Axiom I, 1 är tydligen ett *existensaxiom*. Av axiomet följer att det till två givna punkter *A*, *B* existerar minst en rät linje *a*, som hör samman med punkterna. Däremot innehåller axiomet ingenting om att den räta linjen skall vara entydigt bestämd. Om man exempelvis tolkar "punkt" som *punkt* i planet, "rät linje" som *cirkel* i planet och "räta linjen hör samman med punkten" som *cirkeln går genom punkten*, så finns det som bekant oändligt många "räta linjer" som "hör samman med" två givna punkter *A* och *B*.

Däremot får inte axiomet tolkas så: "räta linjen *a* är mittpunktsnormal till sträckan *AB*". Ty i så fall har inte relationen "*a* hör samman med *A*" någon mening, eftersom man ju inte kan tänka sig en mittpunktsnormal till en enda punkt utan bara till sammanbindningslinjen mellan två punkter.

Hilberts andra incidensaxiom lyder:

I, 2. *Till två givna punkter A, B finns det högst en rät linje a som hör samman med var och en av de två punkterna.*

Axiom I, 2 är ett *unitetsaxiom* eller *entydighetsaxiom*. Tillsammans utsäger I, 1 och I, 2 att det finns en och endast en rät linje som hör samman med två givna punkter. Den modell vi valde för att illustrera I, 1, i vilken "rät linje" betydde cirkel genom två givna punkter, kan alltså inte användas för att ge en modell av ett logiskt system där både I, 1 och I, 2 skall gälla samtidigt.

Av orsaker som framgår av det följande skall vi formulera Hilberts axiom I, 3 som två axiom.

I, 3a. *En given rät linje a hör samman med minst två punkter A, B.*

I, 3b. *Det finns minst tre punkter som inte alla tre hör samman med samma räta linje.*

Hittills uppställda axiom kallas de *planimetriska incidensaxiomen*, eftersom de endast innehåller utsagor om punkter och räta linjer.

Man kan skriva de planimetriska incidensaxiomen på ett mera formelmässigt sätt genom att ersätta uttrycket "A hör samman med a" och dess synonymer med "A inc a" (A inciderar a, dvs. faller på a). Med detta beteckningssätt kan axiomen skrivas som följer.

I, 1. *Till A, B, $A \neq B$, finns ett a sådant att* $\begin{cases} A \text{ inc } a \\ B \text{ inc } a \end{cases}$.

I, 2. [illegible] $\begin{cases} A \text{ inc } a \\ B \text{ inc } a \end{cases}$, *så finns inget $b \neq a$ sådant att* $\begin{cases} A \text{ inc } b \\ B \text{ inc } b \end{cases}$.

I, 3a. *Till givet a existerar A, B, $A \neq B$, så att* $\begin{cases} A \text{ inc } a \\ B \text{ inc } a \end{cases}$.

I, 3b. *Det existerar A, B, C, $A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A$, så att intet a uppfyller* $\begin{cases} A \text{ inc } a \\ B \text{ inc } a \\ C \text{ inc } a \end{cases}$.

Man kan fråga sig varför man inte formulerar de båda axiomen I, 1 och I, 2 som ett enda axiom. Ett sådant axiom skulle då innehålla att två givna punkter A och B bestämmer en och endast en rät linje a.

Det är ingenting som hindrar att man gör det. I det följande förekommer andra fall, där man skulle kunna formulera sådana sammansatta axiom som samtidigt innehåller ett existens- och ett entydighetsvillkor.

Men vissa sådana axiom är av den arten att man inte hade behövt förutsätta både existens och entydighet. Existensen kanske följer som en sats, medan entydigheten däremot måste införas som ett axiom.

Så var ju förhållandet med det euklidiska parallellaxiomet. Med hjälp av övriga axiom kunde man visa som en sats att det genom en punkt utanför en rät linje kunde dras minst en rät linje parallell med den givna. Existensvillkoret var därmed klart. När det var fråga om entydigheten måste man däremot tillgripa ett axiom.

Därför ger det en klarare bild av ett logiskt system om man skiljer på existens och entydighet.

Vi skall inte diskutera de *rymdgeometriska incidensaxiomen* mera ingående utan endast återge deras lydelse.

I, 4. *Till tre punkter A, B, C, som inte hör samman med en och samma räta linje, finns det alltid ett plan α, som hör samman med var och en av de tre punkterna A, B, C. Till varje plan finns alltid en punkt, som hör samman med planet.*

I, 4 är tydligen ett existensaxiom för plan. Jämför med I, 1 som var existensaxiomet för räta linjer.

Man använder också här det vanliga språkbrukets vändningar som synonymer till att en punkt "hör samman med" ett plan, exempelvis att punkten *A ligger i* planet α, att *A är en punkt i* α, osv.

I, 5. *Till tre punkter A, B, C, som inte hör samman med en och samma räta linje, finns det högst ett plan α, som hör samman med var och en av de tre punkterna A, B, C.*

I, 5 är alltså motsvarande entydighetsaxiom.

I, 6. *Om två punkter A, B på en rät linje a ligger i planet α, så ligger varje punkt på a i α.*

Hilbert har här gått över till vanligt språkbruk. Om I, 6 är uppfyllt, säger man att räta linjen *a* ligger i planet α.

I, 7. *När två plan α, β har en punkt A gemensam, så har de åtminstone ännu en punkt B gemensam.*

I, 8. *Det finns minst fyra punkter som inte ligger i samma plan.*

Om ej annat anges är satser och axiom i det följande formulerade för planet.

11. De planimetriska incidensaxiomens oberoende

Låt oss studera de planimetriska incidensaxiomen I, 1—3b något närmare.

Det kan vara intressant att jämföra dem med Euklides postulat. Det visar sig då att I, 1, som föreskriver att två punkter skall bestämma en rät linje, motsvarar Euklides P 1. De övriga axiomen fattas hos Euklides. I, 2, entydigheten av en rät linje bestämd av två punkter, använder dock Euklides, som tidigare framgått, vid beviset av första kongruensteoremet. De återstående axiomen förutsätter Euklides stillatigande i sina resonemang.

Enligt överenskommelse skall orden "punkter" och "räta linjer" inte ha någon annan innebörd än den som de får genom föreskrifterna i axiomen. Det är därför tillåtet att konstruera geometriska system där orden betyder något annat än det vanliga. Om axiomens utsagor är uppfyllda, kan de ändå tjäna som en modell av en geometri där I, 1—I, 3b gäller.

Vi skall studera ett par exempel. I det första utgår man från en *tetraeder*, dvs. en kropp som begränsas av fyra liksidiga trianglar. Den har, som man lätt kan räkna efter, fyra hörn och sex kantlinjer som förbinder hörnen två och två.

Låt nu

"planet" beteckna denna tetraeder,

"rät linje i planet" beteckna kantlinje i tetraedern,

"punkt i planet" beteckna endera av tetraederns fyra hörnpunkter,

"rät linje som hör samman med punkterna A, B" beteckna den kantlinje i tetraedern som inte går genom A eller B.

Man kan nu visa att vi fått en logisk bild av axiomen I, 1—3b.

I, 1 innebär att det skall finnas minst en kant till tetraedern som inte går genom två givna hörn A, B.

I, 2 innebär att det skall finnas högst en sådan kant. I, 1 och I, 2 är uppfyllda, eftersom det finns exakt en "rät linje som hör samman med punkterna A, B" i den tydning av axiomens innebörd som vi gjort i vår modell.

I, 3a innebär i vår tolkning att det finns minst två hörn i tetraedern som inte ligger på en given kantlinje.

I, 3b innebär att det i modellen finns minst tre hörn som inte ligger utanför samma kantlinje.

Man hade således kunnat få idén till ett abstrakt geometriskt system genom att utgå från tetraedern och göra de tolkningar som här genomförts. Den geometri man då fått hade som enda axiomgrupp innehållit det som här kallats de planimetriska incidensaxiomen. Teoretiskt kan man utvidga en sådan geometri genom att tillfoga abstrakta axiom som i sin konkreta tolkning stämmer överens med tetraedermodellen.

I den euklidiska geometrin är det ju i stället det åskådliga planet som de abstrakta axiomen skall stämma överens med. Därför kan man inte vänta sig att tetraedermodellen skall duga som modell för ett system där andra av de euklidiska axiomen kommer med.

Vi skall ta ett annat exempel. Låt en fyrhörning i planet jämte dess diagonaler vara given (fig. 14).

Vi definierar vår modell på följande sätt. Låt

"punkt" beteckna en av fyrhörningens fyra hörnpunkter,

"rät linje" beteckna fyrhörningens sidor och diagonaler,

"punkten hör samman med räta linjen" betyda, att punkten ligger på räta linjen.

Det är lätt att verifiera att axiomen I, 1—3b är uppfyllda i modellen.

Om man jämför denna modell med tetraedermodellen, är det lätt att inse att de båda modellerna återger samma abstrakta system av "punkter" och "räta linjer". Modellerna är med andra ord *isomorfa*. Skissen av fyrhörningen kan för övrigt betraktas som en perspektivskiss av en tetraeder. Man har dock inte gjort exakt samma tolkning av axiomen som i tetraederfallet.

I fyrhörningsmodellen definierades inte diagonalernas skärningspunkt som någon "punkt" i modellen. Men man kan lätt visa att man kan konstruera en modell av axiomen I, 1—3b som skiljer sig från den föregående endast genom att även

Fig. 14

diagonalernas skärningspunkt är en "punkt" i modellen! Den som har lust kan ju genomföra resonemanget för detta fall.

Vi skall nu visa de planimetriska incidensaxiomens *oberoende* av varandra. Detta går så till att vi konstruerar ett system av "punkter" och "räta linjer" i vilket samtliga planimetriska incidensaxiom med undantag av ett bestämt axiom ingår. Detta sista axiom kan då inte vara en följd av de övriga utan är oberoende av dem och måste förutsättas som ett särskilt axiom.

I, 1 är nödvändigt

Vi låter "punkt" betyda en av tre givna punkter A, B, C i planet (se fig. 15), "rät linje" betyda räta linjen genom punkterna A och B och "punkten hör samman med räta linjen" betyda att punkten ligger på räta linjen.

I, 2 är uppfyllt, ty högst en rät linje förbinder två givna punkter.

I, 3a är uppfyllt, ty på räta linjen ligger minst två punkter.

I, 3b är uppfyllt, ty alla tre punkterna ligger inte på räta linjen.

I, 1 är däremot ej uppfyllt, ty C ligger inte på någon rät linje.

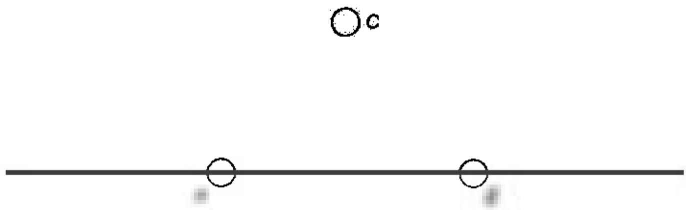


Fig. 15

I, 2 är nödvändigt

Vi tar som exempel följande "bokstavsgeometri". Låt

"punkt" betyda en av bokstäverna *o*, *r*, *s*, *t*,

"rät linje" betyda ett av orden *rot*, *sot*, *ros*,

"punkten hör samman med räta linjen" betyda "bokstaven ingår i ordet".

I, 1 är uppfyllt, ty det finns minst ett ord som innehåller två givna bokstäver.

I, 3a är uppfyllt, ty i varje ord ingår minst två bokstäver.

I, 3b är uppfyllt, ty det finns minst tre bokstäver som inte ingår i ett och samma ord (*r*, *s*, *t*).

Däremot gäller ej I, 2, ty i vår tolkning innebär I, 2 att det högst finns ett ord i vilket två givna bokstäver ingår. Tre bokstavspar (*r*, *o*), (*s*, *o*), (*t*, *o*) ingår dock i vardera två ord.

I, 3a är nödvändigt

För att bevisa detta betraktar vi följande modell. Låt

"punkt" betyda ett av talen 1, 2, 3,

"rät linje" betyda en av ekvationerna

$$(x-1)(x-2)=0, \quad (x-1)(x-3)=0,$$
$$x-1=0, \quad (x-2)(x-3)=0,$$

"punkten hör samman med räta linjen" betyda "talet är rot till ekvationen".

I, 1 och I, 2 är uppfyllda, ty till varje talpar (1,2), (1,3), (2,3) existerar exakt en ekvation med talen som rötter.

I, 3b är uppfyllt, ty de tre talen är inte rötter till en och samma ekvation.

I, 3a gäller däremot ej, ty det finns en ekvation som ej har två av de givna talen som rötter.

I, 3b är nödvändigt

Detta framgår av följande modell. Låt

"punkt" betyda en av städerna *Uppsala* och *Enköping*,

"rät linje" betyda *Uppsala län*,

"punkten hör samman med räta linjen" betyda "staden ligger i länet".

I modellen gäller tydligen axiomen I, 1—I, 3a, däremot ej I, 3b.

Det var inte så svårt att visa de planimetriska incidensaxiomens oberoende av varandra. Men om vi betraktar ett system i vilket också andra axiom ingår är det betydligt svårare att visa de olika axiomens oberoende. Vi skall i det följande se exempel på att flera axiom som Hilbert ställde upp i första upplagan av sin *Grundlagen der Geometrie* (1899) senare har kunnat härledas som satser med hjälp av övriga axiom.

Vi skall bevisa en enkel sats.

Sats 1. *Två räta linjer i ett plan har en eller ingen punkt gemensam.*

Bevis. Antag att det funnes två räta linjer som hade två punkter gemensamma. Då skulle de sammanfalla enligt I, 2.

12. Anordningsaxiomen

De fyra anordningsaxiomen definierar en ordningsrelation för punkterna på en rät linje och i planet. De tre första är *linjära* ordningsaxiom, det fjärde ett *planimetriskt* ordningsaxiom.

Vi antar att de punkter som ligger på samma räta linje står i en viss relation till varandra och att denna relation uttrycks genom grundbegreppet "mellan". För relationen ifråga gäller följande tre axiom.

Fig. 16

II, 1. *När en punkt B ligger mellan en punkt A och en punkt C, så är A, B, C tre olika punkter på en rät linje, och B ligger då även mellan C och A* (fig. 16).

Axiomet fastslår alltså att relationen "mellan" gäller olika punkter på en rät linje och att den är symmetrisk. Man får lätt en bild av axiomets innehåll genom att tolka begreppen på vanligt åskådligt sätt.

II, 2. *Till två punkter A och C finns det alltid minst en punkt B på räta linjen AC sådan att C ligger mellan A och B* (se fig. 17).

Axiom II, 2 är tydligen ett existensaxiom och innebär att det på en rät linje finns oändligt många punkter.

II, 3. *Av tre givna punkter på en rät linje finns det högst en som ligger mellan de båda andra.*

II, 3 är tydligen ett entydighetsaxiom.

Närmast definierar Hilbert en *sträcka* på följande sätt. Man betraktar en rät linje *a* och två punkter *A* och *B* på *a* och kallar det system som består av de båda punkterna jämte den räta linjen för en *sträcka* och betecknar den *AB* eller *BA*. Punkter *mellan A* och *B* kallas punkter *på* sträckan *AB*. *A* och *B* kallas sträckans ändpunkter. Övriga punkter på räta linjen *a* kallas punkter *utanför* sträckan *AB*.

Nu kan man formulera

II, 4 (Paschs axiom). *Låt A, B, C vara tre punkter, som inte ligger på samma räta linje, och låt a vara en rät linje i planet*

Fig. 17

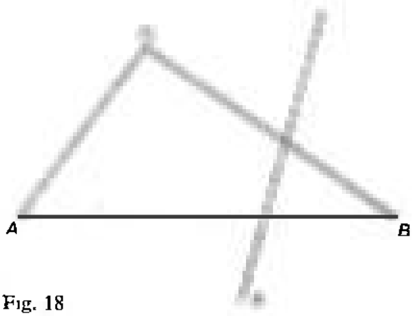


Fig. 18

ABC, som inte träffar någon av punkterna A, B, C. Om räta linjen a går genom en punkt på sträckan AB, så går den säkert även genom en punkt på sträckan AC eller genom en punkt på sträckan BC.

Åskådligt uttryckt: Om en rät linje går in i en triangel, så går den också ut ur den (fig. 18).

Samtliga fyra axiom i denna axiomgrupp saknas hos Euklides.

Euklides, som inte i sitt axiomsystem tagit med några anordningsaxiom, stöder sig i stället vid sina bevis på figurer i planet. Ibland får han flera fall. Men hela tiden måste han stillatigande utgå därifrån, att hans figurer är riktigt tecknade och att de förhållanden som han hämtar ur figurerna verkligen gäller. Därför är det möjligt att illustrera en sats av Euklides med en felaktig figur och på så vis komma till en alldeles befängd slutsats, trots att alla led i beviset är logiskt korrekta.

Som exempel skall visas följande

Påstående: Alla trianglar är likbenta.

Bevis. I fig. 19 är *ABC* en given godtycklig triangel. Dela vinkeln *A* mitt itu genom bisektrisen *AO* och drag mittpunktsnormalen *DO* till sidan *BC*. Om de båda linjerna sammanfaller, följer satsen att den ursprungliga triangeln delas i två kongruenta deltrianglar. Antag därför att de båda linjerna inte sammanfaller utan skär varandra i *O*.

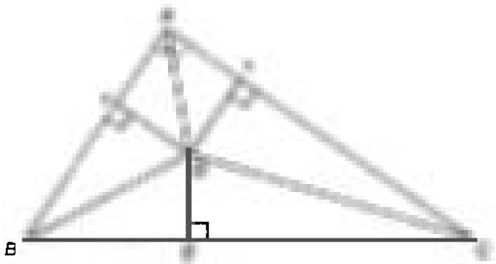


Fig. 19

Drag normalerna *OE* och *OF* mot *AB* och *CA*.

Trianglarna *AOF* och *AOE* är kongruenta, ty sidan *AO* är gemensam, vinklarna vid *A* lika och vinklarna *E* och *F* båda räta. Således gäller $AE=AF$.

Trianglarna *OCD* och *OBD* är också kongruenta, ty två sidor $DC=DB$, den gemensamma sidan *OD* och mellanliggande vinkel är lika.

Slutligen är i de rätvinkliga trianglarna *OEC* och *OFB* hypotenusorna $OC=OB$ och kateterna $OE=OF$ lika och trianglarna följaktligen kongruenta.

Men då gäller $AE=AF$, $EC=FB$. Genom addition fås $AC=$ $=BC$, dvs. den ursprungliga triangeln är likbent.

Beviset har genomförts under förutsättningen att punkten *O* låg inuti triangeln. Skulle *O* ligga utanför triangeln och *E* och *F* falla på förlängningen av sidorna *AC* och *AB* (fig. 20), får man ett analogt bevis, där man i slutskedet kan bestämma längderna av sidorna *AC* och *BC* genom att subtrahera $EC=$ $=FB$ från $AE=AF$.

Var ligger felet? Logiskt förefaller det inte att finnas några blottor.

Båda figurerna är felaktiga. Det visar sig nämligen att punkten *O* aldrig kan ligga inuti triangeln. Den ligger utanför. Vidare kan inte de båda punkterna *E* och *F* ligga på triangelsidornas förlängning, utan den ena punkten ligger på en triangelsida, den andra på en sidas förlängning.

Detta betyder att det aldrig blir fråga om att addera eller

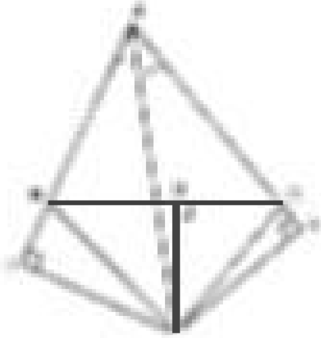


Fig. 20

subtrahera lika långa sträckor. Man får visserligen $AE = AF$, $EC = FB$, men sluträkningarna blir

$$AB = AF - BF, \quad AC = AE + CE = AF + BF,$$

vilket inte innebär att en godtycklig triangel är likbent.

13. Satser som följer av incidens- och anordningsaxiomen

Med hjälp av axiomen i de två första axiomgrupperna kan man nu bevisa en rad satser.

Betrakta först axiomen i grupp II litet närmare! Om man antar att en rät linje a är given och två punkter A, B på a, så följer av axiom II, 2 att det existerar minst en punkt på räta linjen a *utanför* sträckan AB. Däremot finns det inget existensaxiom som säger något om att det finns någon punkt *på* sträckan AB. Detta kan emellertid bevisas med hjälp av de införda axiomen.

Sats 2. *Till två givna punkter A och C finns det minst en punkt D på räta linjen genom A och C, som ligger mellan A och C.*

Bevis. Givet punkterna A och C och räta linjen a genom dem (fig. 21).

Enligt I, 3b existerar en punkt E i planet utanför a.

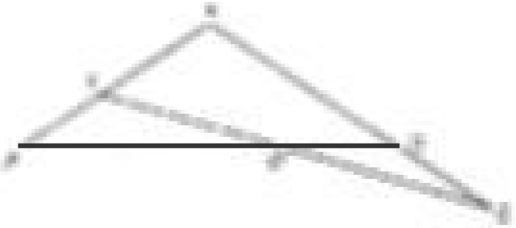


Fig. 21

Enligt I, 1 och I, 2 kan vi dra en rät linje *b* genom *A* och *E*.

Enligt II, 2 existerar en punkt *F* på *b* utanför *E*.

Enligt I, 1 och I, 2 kan vi dra en rät linje *c* genom *F* och *C*.

Enligt II, 2 existerar en punkt *G* på *c* utanför *C*.

Enligt I, 1 och I, 2 kan vi dra räta linjen *EG*.

EG går genom en punkt *E* på *AF* och måste enligt Paschs axiom gå genom en punkt på *AC* eller *FC*. Men den har redan punkten *G* gemensam med räta linjen *c* genom *F* och *C* och kan enligt sats 1 ej ha ännu en punkt gemensam med *c*. Alltså går *EG* genom en punkt *D* på *AC*.

I de första upplagorna av *Grundlagen der Geometrie* är sats 2 en del av axiom II, 2.

Av axiom II, 3 följer att det av tre givna punkter på en rät linje finns *högst* en som ligger mellan de båda andra. Axiomet var från början formulerat så att det av tre givna punkter på en rät linje fanns en och endast en av dem som låg mellan de båda andra. Existensvillkoret i axiomet är borttaget i de senaste upplagorna av Hilberts arbete och ersatt med följande sats.

Sats 3. *Bland tre givna punkter A, B, C på en rät linje finns det exakt en som ligger mellan de båda andra.*

Bevis. I fig. 22 är *A*, *B*, *C* tre punkter på en given rät linje. På grund av II, 3 kan vi anta att *A* inte ligger mellan *B* och *C*, och att *C* inte ligger mellan *A* och *B*. Det skall då visas att *B* ligger mellan *A* och *C*, dvs. på sträckan *AC*.

Låt *D* vara en punkt som ej ligger på räta linjen genom

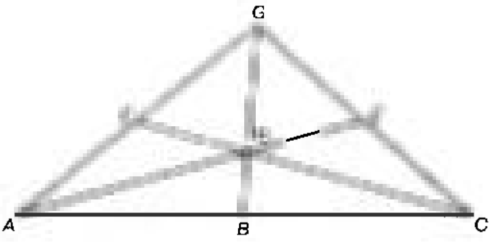


Fig. 22

punkterna (I, 3b). Sammanbind D med B (I, 1 och 2) och bestäm en punkt G på räta linjen genom B och D sådan att D ligger mellan B och G (II, 2).

Drag räta linjer genom A och D och genom C och G.

Tillämpas II, 4 på triangeln BGC så inses att räta linjen genom A och D skär GC i en punkt E mellan G och C.

Drag räta linjerna genom A, G och genom C, D.

På analogt sätt inses av triangeln BGA att räta linjen genom C och D skär GA i en punkt F mellan G och A.

Med samma argumentering inses av triangeln AEG och räta linjen genom F, D och C att eftersom F ligger mellan G och A, så ligger D mellan A och E.

Slutligen inses på analogt sätt med hjälp av triangeln AEC och räta linjen genom G, D och B att eftersom D ligger mellan A och E, så måste B ligga mellan A och C, v. s. b.

Vi skall nämna ännu en sats som ursprungligen formulerades som axiom men som kan bevisas med hjälp av ovan formulerade axiom.

Sats 4. *Om fyra punkter på en rät linje är givna, så kan man alltid beteckna dem A, B, C, D på sådant sätt att den med B betecknade punkten ligger mellan A och C och mellan A och D, och vidare den med C betecknade punkten ligger mellan A och D och mellan B och D* (se fig. 23).

Beviset förs på liknande sätt som bevisen för de två föregående satserna.

Genom att generalisera sats 4 kan man bevisa att ett ändligt antal givna punkter A, B, C, ..., K på en rät linje kan beteck-

Fig. 23

nas på sådant sätt att B ligger mellan å ena sidan A och å andra sidan $C, D, \ldots, K$; C ligger mellan å ena sidan A, B och å andra sidan $D, E, \ldots, K$ osv.

Vidare gäller

Sats 5. *Varje rät linje a, som ligger i ett plan α, delar de punkter i planet som inte ligger på räta linjen i två områden med följande egenskaper: Varje punkt A i det ena området bestämmer tillsammans med varje punkt B i det andra området en sträcka AB sådan att en punkt på a ligger på AB. Däremot bestämmer två punkter A och A' i samma område en sträcka AA', som inte innehåller någon av punkterna på a.*

Ett sådant område kallas ett *halvplan.*

Bevis. Vi skall först visa att det existerar två punkter A, B i planet sådana att en punkt X på räta linjen a ligger mellan A och B. Enligt satsen tillhör då de båda punkterna skilda områden i planet (se fig. 24).

Enligt I, 3b existerar en punkt A i planet som inte ligger på räta linjen a.

Enligt I, 3a finns minst en punkt X på räta linjen a.

Enligt II, 2 finns det till punkterna A och X minst en punkt B på räta linjen genom A och X sådan att X ligger mellan A och B. Det första påståendet är därmed bevisat.

Låt C vara en godtycklig punkt i planet, $C \neq a, A, B$. Vi skall visa att C hör till samma område som endera av A och B och att C ej kan tillhöra båda områdena.

Antag först att C ligger på räta linjen genom punkterna A, X och B. Enligt vad vi tidigare visat ligger X mellan A och B. Enligt sats 4 om mellanrelationerna för fyra punkter på en rät linje måste då X ligga på en och endast en av sträckorna AC och BC.

Om X ligger på AC, hör A och C till olika områden. Där-

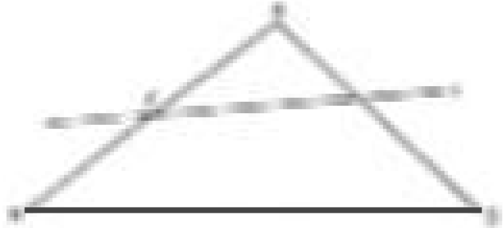


Fig. 24

emot ligger B och C i samma område, ty ingen punkt på a kan ligga på BC.

Antag nu att C inte ligger på räta linjen genom A, X och B. Sammanbind C med A och B.

Eftersom a skär AB i X och C inte ligger på a, måste a enligt II, 4 skära en och endast en av sträckorna AC och BC. Om a skär AC, ligger A och C i olika områden. B och C ligger däremot i samma område, ty enligt II, 4 skär a inte BC. Därmed är satsen bevisad.

Låt A, A', O och B vara fyra punkter på räta linjen a, belägna så att O ligger mellan A och B men ej mellan A och A' (fig. 25). Sådana punkter existerar enligt det föregående. Vi säger då att A och A' ligger på *samma* sida om O och att A och B ligger på *olika* sidor om O. Samtliga punkter på a som ligger på samma sida om O kallas punkter på en från O utgående *halvlinje*. Varje punkt på en rät linje delar tydligen punkterna på linjen i två halvlinjer.

Man kan nu definiera ett system av sträckor AB, BC, CD, . . ., KL som ett *polygontåg*, som sammanbinder A med L. Punkter på AB, BC, . . ., KL jämte punkterna A, B, . . ., L kallas punkter som *tillhör* polygontåget.

Fig. 25

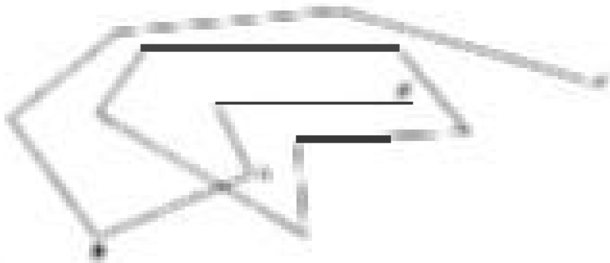


Fig. 26

Om alla sträckor ligger i samma plan och L sammanfaller med A, kallas polygontåget en *polygon*.

En *enkel polygon* är en polygon, vars samtliga hörn är skilda från varandra, där inget hörn faller på någon polygonsida och där två sidor i polygonen inte har någon punkt på sidorna gemensam.

Man kan nu bevisa

Sats 6. *Varje enkel polygon i ett plan α delar de punkter i planet som inte tillhör polygonen i två områden, som kallas det inre av polygonen resp. det yttre av polygonen eller den del av planet som ligger utanför polygonen. Om A är en punkt i det inre av polygonen och B en punkt utanför polygonen, så har varje polygontåg i α som förbinder A med B minst en punkt gemensam med polygonen.*

Två punkter A, A' i det inre av polygonen och två punkter B, B' utanför polygonen har den egenskapen att man kan finna ett polygontåg i α, som förbinder A med A' resp. B med B' utan att ha någon punkt gemensam med polygonen (se fig. 26).

Med lämplig beteckning av områdena finns det alltid räta linjer som helt ligger utanför polygonen. Däremot finns det ingen rät linje som helt tillhör det inre av polygonen.

Vidare kan man bevisa som en sats att varje plan α delar de punkter i rymden som inte ligger i α i två områden sådana, att varje punkt A i det ena området tillsammans med varje punkt B i det andra området bestämmer en sträcka AB sådan, att en punkt i α ligger på AB. Däremot bestämmer två punkter A, A'

i samma område en sträcka AA', som inte innehåller någon av punkterna i α.

Nyssnämnda sats innehåller ett viktigt resultat rörande elementens anordning i rymden. Man kan bevisa den med hjälp av axiomen i grupp II och behöver inga speciella anordningsaxiom för rymden. Även övriga satser om anordning i rymden kan bevisas utan att nya anordningsaxiom behöver införas.

14. Kongruensaxiomen

Axiomgrupp III, som innehåller kongruensaxiomen, omfattar vissa egenskaper hos "kongruenta" sträckor och vinklar. De tre första axiomen behandlar sträckor, det fjärde vinklar. Det femte kongruensaxiomet slutligen motsvarar en av Euklides satser om kongruenta trianglar.

I vanlig tolkning i ett plan där den euklidiska geometrin gäller handlar dessa axiom om "lika stora" sträckor och vinklar. Detta är den åskådligaste och lättfattligaste tolkningen. Men i andra system, exempelvis de som möter i kapitel 6, kommer kongruenta sträckor och vinklar att definieras på annat sätt. Därför är det lämpligt att använda ordet "kongruens", i varje fall vid axiomens uppställande. På så vis undviker man att lägga in några egenskaper i begreppet som inte följer av de uppställda axiomen.

Antag först att för sträckor existerar en relation som uttrycks genom att sträckor betecknas som "kongruenta" eller "lika stora". Relationens innebörd framgår av följande axiom.

III, 1. *Låt A och B vara två punkter på räta linjen a. Om A' är en punkt på samma räta linje eller på en annan rät linje a', så kan man alltid på en föreskriven sida om A' bestämma en punkt B' på räta linjen a' sådan, att sträckan AB är kongruent med sträckan $A'B'$; i formel*

$$AB \rightarrow A'B'.$$

Axiomet ger villkoren för att AB skall vara kongruent med $A'B'$ men säger ingenting om att $A'B'$ i så fall är kongruent med AB. Kongruens är alltså enligt definitionen ingen symmetrisk relation. Därför betecknar vi den till en början med en pil.

Enligt axiomet är det möjligt att avsätta en sträcka av given längd på en given halvlinje. Axiomet innehåller ingenting om att konstruktionen är entydig.

En sträcka har tidigare definierats som ett system av två punkter A, B. Den betecknades med AB eller BA. Därför kan man i formeln i axiom III, 1 ersätta AB med BA och $A'B'$ med $B'A'$ och alltså skriva formeln på fyra olika sätt med samma betydelse.

III, 2. *Om AB, $A'B'$ och $A''B''$ är tre sträckor, för vilka gäller*

$$A'B' \rightarrow AB, \quad A''B'' \rightarrow AB,$$

så gäller även

$$A'B' \rightarrow A''B''.$$

III, 2 innehåller tydligen detsamma som Euklides axiom A 1. Skillnaden är att III, 2 är formulerat för sträckor, medan A 1 gällde icke närmare specificerade "storheter".

Vi kan nu bevisa att kongruensrelationen för sträckor är reflexiv och symmetrisk.

Sats 7. *En given sträcka är kongruent med sig själv (kongruensrelationen är reflexiv).*

Bevis. Låt AB vara en given sträcka. Enligt III, 1 kan man till denna bestämma en med AB kongruent sträcka $A'B'$, i formel

$$AB \rightarrow A'B'.$$

Skrives denna relation två gånger, kan man tillämpa III, 2 och får då

$$AB \rightarrow AB.$$

Sats 8. *Om för två sträckor AB och $A'B'$ gäller*

$$AB \rightarrow A'B',$$

så gäller även

$$A'B' \rightarrow AB.$$

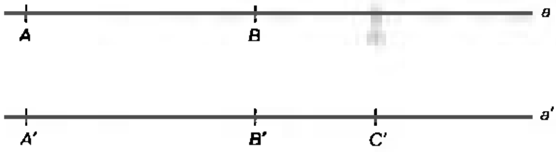


Fig. 27

(Kongruensrelationen är symmetrisk.)

Bevis. Låt AB och $A'B'$ vara två givna sträckor. Enligt föregående sats gäller

$$A'B' \rightarrow A'B'.$$

Enligt antagandet gäller

$$AB \rightarrow A'B'.$$

Av III, 2 följer

$$A'B' \rightarrow AB.$$

Man kan därför i fortsättningen beteckna kongruens med en symmetrisk symbol, exempelvis det vanliga likhetstecknet. Man har tydligen rätt att säga att två sträckor är *sinsemellan* kongruenta.

III, 3. *Låt AB och BC vara två sträckor på räta linjen a utan gemensamma punkter och vidare $A'B'$ och $B'C'$ två sträckor på samma räta linje eller på en annan rät linje a', likaså utan gemensamma punkter. Om*

$$AB = A'B', \ BC = B'C',$$

så gäller även

$$AC = A'C' \text{ (se fig. 27).}$$

Axiomet innebär att sträckor kan adderas. Det innehåller alltså detsamma som Euklides axiom A 2, ehuru formulerat för sträckor i stället för "storheter" i allmänhet. Motsvarande relation för vinklar bevisas nedan som en särskild sats.

En *vinkel* definieras nu på följande sätt. Låt α vara ett plan,

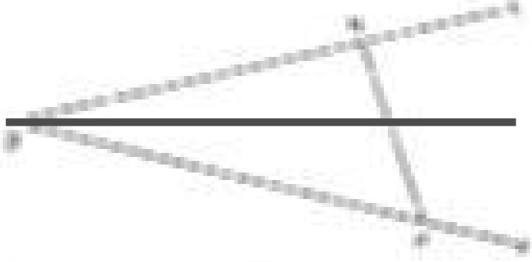


Fig. 28

O en punkt i planet och h, k två olika halvlinjer i α, vilka utgår från O och inte utgör delar av samma räta linje. De båda halvlinjerna bildar ett system som kallas *vinkel* och betecknas $\wedge(h, k)$ eller $\wedge(k, h)$.

Halvlinjerna kallas vinkelns *ben*, och punkten O kallas vinkelns *spets*.

Man kan visa att punkten O tillsammans med halvlinjerna h och k delar punkterna i planet i två områden (se fig. 28). Alla punkter som ligger på samma sida om h som k och på samma sida om k som h sägs tillhöra det *inre* av vinkeln. Övriga punkter som inte ligger på O, h och k sägs ligga utanför vinkeln eller i det *yttre* av vinkeln.

Låt H vara en punkt på h och K en punkt på k. Man kan då visa att sträckan HK ligger helt i det inre av $\wedge(h, k)$.

Vidare kan man visa att en halvlinje som utgår från O ligger helt i det inre eller helt i det yttre av vinkeln. Om den ligger helt i det inre av vinkeln måste den skära sträckan HK.

Låt A och A' vara två punkter i det inre av vinkeln (fig. 29). Man kan visa att sträckan AA' inte har någon punkt gemensam med O, h eller k, oberoende av punkternas läge i området. Detta gäller inte för sträckan BB', om de båda punkterna B, B' ligger i det yttre av vinkeln.

Låt A vara en punkt i det inre och B en punkt i det yttre av vinkeln (fig. 30). Varje polygontåg, sammansatt av sträckor i planet, som förbinder A och B, måste då innehålla punkten O eller en punkt på h eller k. Däremot är det möjligt att förbinda två punkter A, A' i samma område medelst ett polygontåg i

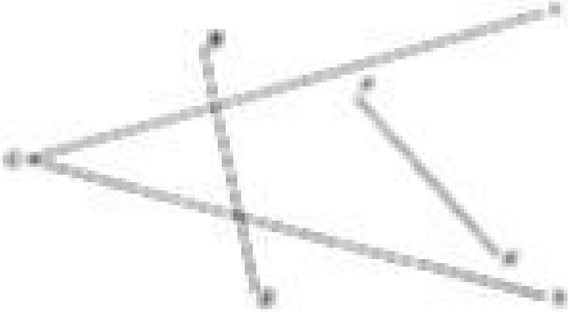


Fig. 29

planet som inte innehåller punkten O eller någon punkt på h eller k.

Vi antar nu att mellan vinklar råder ett samband som kan uttryckas med ordet "kongruent". Dess innebörd framgår av följande axiom.

III, 4. *Låt* $\wedge(h, k)$ *vara given jämte en rät linje* a' *och halvplanet på en bestämd sida om* a'. *Om* h' *är en halvlinje på* a', *utgående från punkten* O', *så finns det i halvplanet en och endast en halvlinje* k' *sådan att* $\wedge(h, k)$ *och* $\wedge(h', k')$ *är kongruenta och samtidigt alla inre punkter i vinkeln* (h', k') *ligger på den givna sidan om* a'; *i formel*

$$\wedge(h, k) \equiv \wedge(h', k').$$

Om $\wedge(h, k) \equiv \wedge(h', k')$, *så gäller även* $\wedge(h', k') \equiv \wedge(h, k)$, *dvs. vinkelkongruens är en symmetrisk relation.*

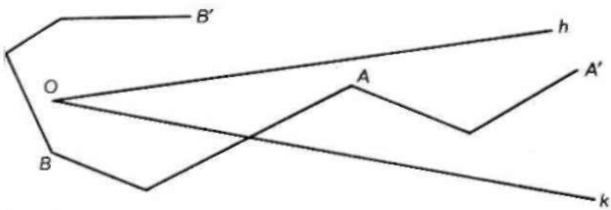


Fig. 30

Varje vinkel är kongruent med sig själv (vinkelkongruens är en reflexiv relation); i formel

$$\wedge(h,\ k) = \wedge(h,\ k).$$

Enligt III, 4 kan man alltså avsätta en given vinkel på föreskriven sida om en given halvlinje i ett plan. Konstruktionen förutsätts vara *entydig*. Motsvarande axiom för sträckor innehöll däremot ingenting om entydighet.

Eftersom definitionen av en vinkel inte innehöll något om den ordning i vilken vinkelns ben skulle komma betyder $\wedge(h, k)$ och $\wedge(k, h)$ samma vinkel.

Vi använder på vanligt sätt beteckningen $\wedge ABC$ för en vinkel med spetsen i B och punkterna A och C belägna på var sitt vinkelben.

Tidigare definierades sträckors kongruens som en icke-symmetrisk relation. Man kunde lätt visa att symmetrin gick att härleda som en sats. Man kan göra detsamma för vinkelkongruens. Även förutsättningen ovan att vinkelkongruens är reflexiv kan härledas som en sats. Detta har visats av A. Rosenthal, *Mathematische Annalen* 71 (1912), 257—274. Härledningarna är emellertid så långa och besvärliga att man i regel använder formuleringen ovan. III, 4 är alltså exempel på att man i praktiken inte håller strängt på villkoret att axiomen skall vara oberoende av varandra, dvs. att ett axiom icke skall innehålla utsagor som kan härledas ur övriga axiom.

Hilbert formulerar vinkelkongruens som en reflexiv relation men härleder symmetrivillkoret som en särskild sats.

I stället för de båda axiomen A 1 och A 2 hos Euklides har vi ovan för sträckors kongruens infört de båda axiomen III, 2 och III, 3. Motsvarande utsagor för vinklars kongruens behöver man inte införa som axiom utan kan bevisa som satser.

Analogin till III, 2 följer lätt av III, 4. Ty om $\wedge(h, k)$, $\wedge(h', k')$ och $\wedge(h'', k'')$ är tre vinklar, för vilka gäller

$$\wedge(h',\ k') = \wedge(h,\ k), \quad \wedge(h'',\ k'') = \wedge(h,\ k),$$

så gäller även

$$\wedge(h',\ k') = \wedge(h'',\ k'').$$

Analogin till axiom III, 3, som behandlar addition av parvis kongruenta vinklar, skall vi bevisa i sats 18.

Hilbert inför nu ett mycket starkt kongruensaxiom, som ger ett samband mellan sträckors och vinklars kongruens. Axiomet är en svagare form av Euklides första kongruensteorem för trianglar och formuleras på följande sätt.

III, 5. *Låt ABC och A'B'C' vara två trianglar. Om kongruenserna*

$$AB = A'B', \ AC = A'C', \ \wedge BAC = \wedge B'A'C'$$

gäller, så gäller även kongruensen

$$\wedge ACB = \wedge A'C'B'.$$

Om man ändrar beteckningar i de båda trianglarna, så följer omedelbart att också det återstående paret vinklar är sinsemellan kongruenta.

Euklides gjorde, som vi minns, en stillatigande förutsättning om att man kan flytta en triangel vart som helst i planet utan att sidor och vinklar ändras, samt förutsatte i A 4 att storheter som täcker varandra är lika stora. Dessa antaganden ersätts av axiom III, 5.

III, 1—3 kallas *linjära* kongruensaxiom, III, 4—5 kallas *planimetriska* kongruensaxiom.

Vi skall till slut komplettera III, 1 med motsvarande entydighetsvillkor.

Sats 9. *Låt AB vara en given sträcka och A' en punkt på räta linjen a'. Då kan man på föreskriven sida om A' bestämma en och endast en punkt B' på a' sådan att*

$$AB = A'B' \text{ (se fig. 31).}$$

Bevis. Antag att satsen vore oriktig. Då kunde man från A' avsätta två sträckor $A'B'$ och $A'B''$ på samma sida om A' utmed räta linjen a, som båda vore kongruenta med en given sträcka AB.

Välj en punkt C' utanför a' och drag $A'C'$, $B'C'$ och $B''C'$. Då gäller $A'B' = A'B''$ enligt sats 8, $A'C' = A'C'$ enligt sats 7 och $\wedge B'A'C' = \wedge B''A'C'$ enligt axiom III, 4.

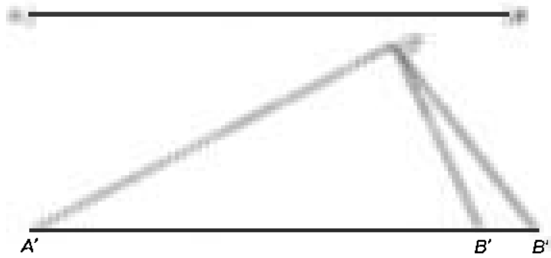


Fig. 31

Av axiom III, 5 följer då

$$\wedge A'C'B' = \wedge A'C'B''.$$

Men detta strider mot villkoret i III, 4 att man på en bestämd sida om en given halvlinje kan konstruera en och endast en vinkel av given storlek.

15. Satser ur pangeometrin

Med hjälp av axiomen i grupperna I—III kan man bevisa en rad satser som gäller i pangeometrin, dvs. både i den euklidiska och den hyperboliska geometrin.

Vi visar först

Sats 10. *Om man har två sträckor AC och $A'C'$, för vilka gäller*

$$AC = A'C',$$

och dessutom en punkt B på AC, så finns det en entydigt bestämd punkt B' på $A'C'$ sådan, att man har

$$AB = A'B', \; BC = B'C'.$$

Bevis. Antag att sträckorna AC och $A'C'$ är givna kongruenta sträckor (se fig. 32).

Låt B vara en punkt på AC. Enligt sats 9 existerar då en entydigt bestämd punkt B' på $A'C'$ sådan att man har

$$AB = A'B'.$$

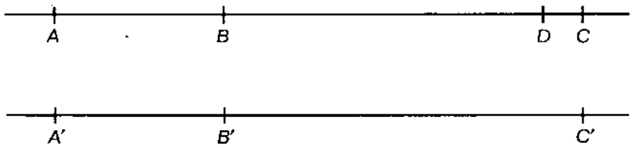


Fig. 32

Bestäm från B i riktning mot C en punkt D sådan att

$$B'C' = BD.$$

Enligt axiom III, 3 om sträckors addition gäller

$$AD = AB + BD = A'B' + B'C' = A'C' = AC.$$

Men enligt sats 9 kan man på en rät linje på föreskriven sida om en punkt A avsätta en och endast en sträcka kongruent med en given. Alltså sammanfaller C och D, och satsen är bevisad.

Satsen innebär att sträckor kan subtraheras och innehåller alltså Euklides axiom A 3, formulerat för sträckor.

Två trianglar ABC och $A'B'C'$ kallas *kongruenta trianglar,* om följande kongruenser för sträckor och vinklar är uppfyllda.

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\wedge A = \wedge A'$, $\wedge B = \wedge B'$, $\wedge C = \wedge C'$.

Man kan närmast bevisa

Sats 11 (Euklides första kongruensteorem för trianglar). *Om två sidor och mellanliggande vinkel i en triangel är kongruenta med motsvarande element i en annan triangel, så är trianglarna kongruenta.*

Bevis. Av III, 5 följer att samtliga vinklar i de båda trianglarna är parvis kongruenta. Det återstår då att bevisa att det återstående paret sidor i trianglarna är sinsemellan kongruenta.

Låt trianglarna vara ABC och $A'B'C'$ och antag att man har $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\wedge A = \wedge A'$, $\wedge B = \wedge B'$ och $\wedge C = \wedge C'$ (fig. 33). Om man inte har $BC = B'C'$, kan man från B' i riktning mot C' avsätta en sträcka $B'D' = BC$. Eventuellt faller punkten D' på $B'C'$:s förlängning.

Fig. 33

I trianglarna BCA och $B'D'A'$ gäller nu $BC = B'D'$, $BA = B'A'$, $\wedge B = \wedge B'$. Enligt III, 5 gäller då $\wedge BAC = \wedge B'A'D'$.

Men enligt III, 4 kan inte $\wedge BAC$ vara kongruent med både $\wedge B'A'C'$ och $\wedge B'A'D'$ utan att dessa sammanfaller. Alltså måste halvlinjerna $A'C'$ och $A'D'$ sammanfalla. Eftersom D' och C' är deras skärningspunkter med räta linjen $B'C'$, måste också D' och C' sammanfalla.

I likhet med Euklides har tydligen Hilbert definierat begreppet kongruenta trianglar på sådant sätt att han inte gör någon skillnad mellan likriktad kongruens och spegelbildlig kongruens.

Av sats 11 följer lätt

Sats 12. *Om två sidor i en triangel är kongruenta, så är motstående vinklar kongruenta.*

Bevis. Låt ABC vara en triangel i vilken man har $AC = BC$ (fig. 34). Av första kongruensteoremet följer att trianglarna ABC och BAC är kongruenta. Speciellt innebär detta, att $\wedge A = \wedge B$.

Sats 13 (Euklides tredje kongruensteorem för trianglar). *Om två vinklar och mellanliggande sida i en triangel är kongruenta med motsvarande element i en annan triangel, så är trianglarna kongruenta.*

Bevis. Antag att i trianglarna ABC och $A'B'C'$ (fig. 35) gäller

$$AB = A'B', \quad \wedge A = \wedge A', \quad \wedge B = \wedge B'.$$

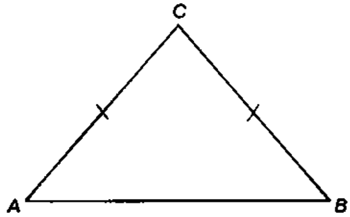


Fig. 34

Avsätt en sträcka $B'D'$ från B' i riktning mot C' sådan att

$$BC = B'D'.$$

Trianglarna ABC och $A'B'D'$ är då kongruenta enligt första kongruensteoremet, ty man har

$$\wedge B = \wedge B',\ BA = B'A',\ BC = B'D'.$$

Speciellt gäller $\wedge B'A'D' = \wedge A$. Men enligt antagandet gällde $\wedge B'A'C' = \wedge A$. Alltså måste räta linjerna $A'C'$ och $A'D'$ sammanfalla enligt entydighetsvillkoret i III, 4. Alltså sammanfaller punkterna D' och C', varav följer $BC = B'C'$.

De båda givna trianglarna är nu kongruenta enligt första kongruensteoremet, ty man har $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ och $\wedge B = \wedge B'$.

Man kan nu bevisa

Sats 14. *Om två vinklar i en triangel är kongruenta, så är motstående sidor kongruenta.*

Bevis. Låt vinklarna A och B i triangeln ABC vara kongruenta. Trianglarna ABC och BAC är då kongruenta enligt 3:e kongruensteoremet. Speciellt gäller då $AC = BC$.

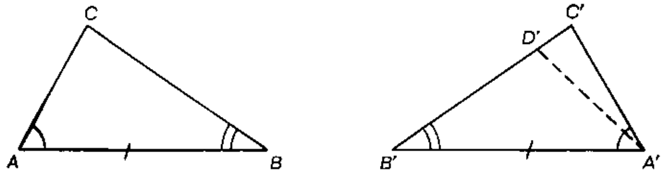


Fig. 35

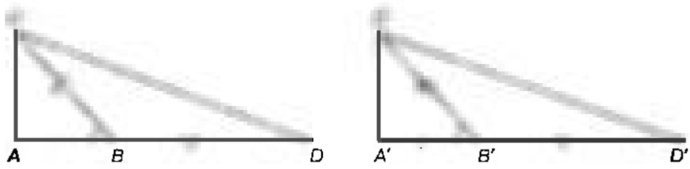


Fig. 36

Två vinklar kallas *sidovinklar*, om spetsen och ena vinkelbenet är gemensamma för båda vinklarna och om de båda övriga vinkelbenen utgör delar av samma räta linje.

Två vinklar kallas *vertikalvinklar*, om de har gemensam spets och om deras vinkelben tillsammans bildar två räta linjer.

För sidovinklar gäller

Sats 15. *Om två vinklar är kongruenta, så är deras sidovinklar kongruenta.*

Bevis. Låt i fig. 36 $\wedge ABC$ och $\wedge A'B'C'$ vara de givna kongruenta vinklarna och $\wedge CBD$ och $\wedge C'B'D'$ deras resp. sidovinklar.

Bestäm punkter på de från B och B' utgående vinkelbenen på sådant sätt att man med figurens beteckningar har

$$AB = A'B',\ CB = C'B',\ DB = D'B',\ \wedge ABC = \wedge A\ B\ C'.$$

Trianglarna ABC och $A'B'C'$ är kongruenta enligt 1:a kongruensteoremet. Speciellt gäller $\wedge A = \wedge A'$, $AC = A'C'$.

Trianglarna ACD och $A'C'D'$ är kongruenta enligt 1:a kongruensteoremet. Speciellt gäller $CD = C'D'$, $\wedge D = \wedge D'$.

Trianglarna BCD och $B'C'D'$ är kongruenta enligt 1:a kongruensteoremet. Speciellt gäller

$$\wedge CBD = \wedge C'B'D',$$

varigenom satsen är bevisad.

Sats 16. *Vertikalvinklar är kongruenta.*

Bevis. Av definitionen på vertikalvinklar följer att med fig. 37:s beteckningar t är sidovinkel till u och att även v är sido-

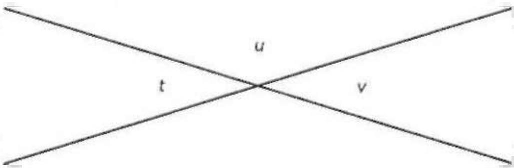


Fig. 37

vinkel till u. Enligt föregående sats gäller då $t = v$, ty vinkeln u är kongruent med sig själv enligt axiom III, 4.

Euklides bevisade nyssnämnda sats med hjälp av P 4, som säger att alla räta vinklar är lika stora. Hilbert bevisar däremot satsen innan han definierat begreppet rät vinkel.

Vi kan nu definiera en *rät vinkel* som en vinkel som är kongruent med sin sidovinkel.

Sats 17. *Det existerar räta vinklar.*

Bevis. Låt punkten O och halvlinjen OA vara givna.

Avsätt på båda sidor om OA de båda kongruenta vinklarna $\wedge AOB$ och $\wedge AOC$ (fig. 38).

Avsätt de kongruenta sträckorna OB och OC från O.

Drag BC. Eftersom B och C ligger på olika sidor om räta linjen genom OA, skär BC halvlinjen OA eller halvlinjen på andra sidan om O i punkten D.

Då gäller

$$\wedge BOD = \wedge COD,$$

ty antingen är vinklarna kongruenta enligt konstruktionen eller också är de sidovinklar till kongruenta vinklar och därför kon-

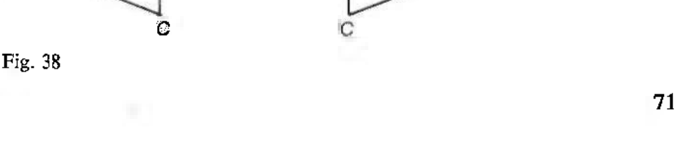


Fig. 38

Fig. 39

gruenta. I båda fallen är trianglarna *BOD* och *COD* kongruenta enligt 1:a kongruensteoremet.

Speciellt gäller då

$$\wedge BDO = \wedge CDO,$$

varmed satsen är bevisad.

Sats 18. *Låt h, k, l resp. h′, k′, l′ vara tre halvlinjer från punkterna O resp. O′ sådana, att h, k, och h′, k′ samtidigt ligger på samma eller motsatta sidor om l resp. l′. Om*

$$\wedge(h, l) = \wedge(h', l'),\ \wedge(k, l) = \wedge(k', l'),$$

så gäller även

$$\wedge(h, k) = \wedge(h', k').$$

Satsen innebär att om kongruenta vinklar adderas till eller subtraheras från kongruenta vinklar, så blir de resulterande vinklarna kongruenta. Satsen innehåller alltså Euklides axiom A 2 och A 3, formulerade för vinklar.

Bevis. Antag först att h, k och h', k' ligger på *motsatta* sidor om l resp. l' (fig. 39).

Låt k_1 vara den halvlinje som utgår från O och ligger utmed samma räta linje som k fastän åt motsatt håll, och låt k'_1 vara motsvarande halvlinje från O' utmed samma räta linje som k' och åt motsatt håll.

Enligt satsen om sidovinklar gäller då

$$\wedge(k_1, l) = \wedge(k'_1, l').$$

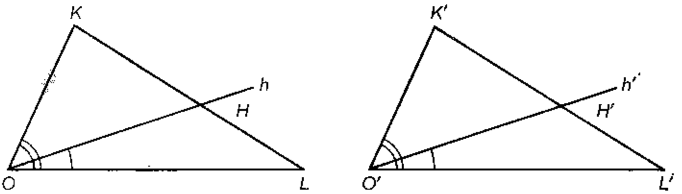


Fig. 40

Vidare är det klart att h och k_1 ligger på samma sida om l och att h' och k'_1 ligger på samma sida om l'. Om vi kan visa att

$$\wedge(h, k_1) = \wedge(h', k'_1),$$

så måste motsvarande sidovinklar vara lika, och satsen är bevisad.

Det räcker alltså att betrakta det fall, då h, k och h', k' ligger på *samma* sida om l resp. l'.

Vi betecknar halvlinjerna på sådant sätt att h ligger i det inre av $\wedge(k, l)$.

Bestäm punkterna L på l, L' på l', K på k och K' på k', så att

$$OL = O'L', \ OK = O'K' \text{ (se fig. 40).}$$

Eftersom h ligger i det inre av $\wedge(k, l)$, skär h sträckan LK i punkten H. Bestäm dessutom en punkt H' på h', så att

$$OH = O'H'.$$

I trianglarna OLH och $O'L'H'$ gäller

$$OH = O'H', \ OL = O'L', \ HOL = H'O'L'.$$

Trianglarna är alltså kongruenta enligt 1:a kongruensteoremet. Speciellt har vi, eftersom H ligger på LK,

$$\wedge OLK = \wedge O'L'H', \ LH = L'H'.$$

I trianglarna OLK och $O'L'K'$ gäller

$$OL = O'L', \ OK = O'K', \ \wedge LOK = \wedge L'O'K'.$$

Fig. 41

Trianglarna är kongruenta enligt 1:a kongruensteoremet. Speciellt gäller

$$\wedge OLK = \wedge O'L'K', \quad \wedge OKL = \wedge O'K'L', \quad LK = L'K'.$$

Men punkterna H' och K' ligger på samma sida om l' enligt antagandet. Enligt III, 4 kan man på denna sida avsätta en och endast en vinkel av given storlek. Alltså måste H' och K' ligga på samma räta linje från L'. Enligt sats 10 gäller då $HK = H'K'$.

I trianglarna OHK och $O'H'K'$ gäller

$$OK = O'K', \quad HK = H'K', \quad \wedge OKL = \wedge O'K'L'.$$

Trianglarna är kongruenta enligt 1:a kongruensteoremet. Speciellt gäller

$$\wedge (h, k) = \wedge (h', k'),$$

v. s. b.

Man kan visa att det vid addition av två vinklar α och β kan inträffa att det *inre* av α och av β tillsammans utgör det *yttre* av vinkeln $\alpha + \beta$.

På liknande sätt bevisar man

Sats 19. *Låt* $\wedge (h, k)$ *och* $\wedge (h', k')$ *vara två kongruenta vinklar, och låt* l *vara en halvlinje, som utgår från spetsen av* $\wedge (h, k)$ *och ligger i det inre av vinkeln. Då finns det en och endast en halvlinje* l' *från spetsen av* $\wedge (h' k')$ *och i det inre av denna vinkel sådan, att*

$$\wedge (h, l) = \wedge (h', l'), \quad \wedge (k, l) = \wedge (k', l') \text{ (se fig. 41).}$$

Man kan nu visa

Sats 20 (Euklides andra kongruensteorem för trianglar). *Om alla tre sidorna i en triangel är kongruenta med motsvarande element i en annan triangel, så är trianglarna kongruenta.*

Fig. 42

Vi skall närmast definiera begreppen "större än" och "mindre än" för vinklar. För att kunna göra detta behöver vi följande sats som bevisas med hjälp av sats 19.

Sats 21. *Låt* $\wedge(h, k)$ *och* $\wedge(h', l')$ *vara två givna vinklar. Bestäm en halvlinje* l *på samma sida om* h *som* k *och en halvlinje* k' *på samma sida om* h' *som* l' *från resp. vinkels spets på sådant sätt, att man har*

$$\wedge(h, l) = \wedge(h', l'), \quad \wedge(h', k') = \wedge(h, k).$$

Om k' *ligger i det inre av* $\wedge(h', l')$*, så ligger* l *i det yttre av* $\wedge(h, k)$ (fig. 42).

Om $\wedge(h, k)$ och $\wedge(h', l')$ är två givna vinklar, för vilka sats 21 är uppfylld, så sägs $\wedge(h', l')$ vara *större än* $\wedge(h, k)$. Analogt definieras *mindre än*.

Om α, β och γ är tre vinklar, så kan man visa att $\alpha > \gamma$ följer av följande tre antaganden: 1) $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, 2) $\alpha > \beta$, $\beta = \gamma$, 3) $\alpha = \beta$, $\beta > \gamma$.

Motsvarande storleksrelationer för sträckor erhålls lätt.

I P 4 uttalar Euklides att alla räta vinklar är lika. Hilbert visar detta som en sats.

Sats 22. *Alla räta vinklar är kongruenta.*

Bevis. Enligt definitionen är en vinkel rät, om den är kongruent med sin sidovinkel. Låt α, β och γ, δ vara två par räta sidovinklar med de gemensamma vinkelbenen resp. h och h' (fig. 43).

Om satsen inte gäller kan vi anta att exempelvis vinklarna α och γ inte är kongruenta. Vi avsätter i så fall en vinkel $\gamma' = \gamma$

Fig. 43

som figuren visar. Vinkelbenet h'' kommer då antingen att falla i det inre av α eller β. Om h'' ligger i det inre av α, så gäller $\alpha > \gamma'$. För sidovinkeln δ' till γ' måste då gälla $\delta' > \beta$ och $\delta' = \delta$. Detta ger

$$\gamma = \delta = \delta' > \beta = \alpha > \gamma' = \gamma,$$

vilket är en motsägelse.

Sats 22 innebär att normalen till en rät linje i en given punkt på räta linjen är entydigt bestämd. Man kan lätt bevisa detsamma för normalen mot räta linjen från en punkt utanför räta linjen.

Sedan man bevisat sats 22, kan man definiera begreppen *spetsig* och *trubbig* vinkel.

Med hjälp av hittills genomgångna satser kan man visa att en yttervinkel till en triangel är större än var och en av de motstående inre vinklarna. På samma sätt som i sats 27 hos Euklides kan man använda detta resultat för att konstruera en rät linje, som går genom en given punkt och inte skär en given rät linje.

Vidare kan man visa att vinkelsumman i en triangel inte kan överskrida 180°. Däremot kan man inte avgöra om den är exakt 180° eller om den är mindre.

16. De båda parallellaxiomen

Vi har tidigare nämnt att axiomsystemen för den euklidiska och den hyperboliska geometrin endast skiljer sig genom paral-

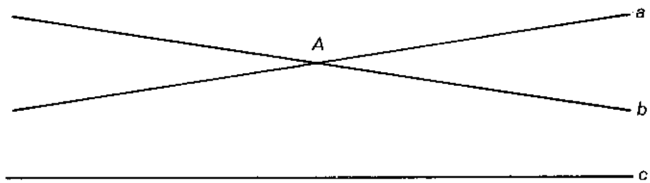


Fig. 44

lellaxiomets formulering. Hilberts fjärde axiomgrupp består endast av parallellaxiomet.

Låt en rät linje vara given jämte en punkt, som inte ligger på den räta linjen. Enligt en sats i pangeometrin finns det *minst* en rät linje genom den givna punkten som inte skär den givna räta linjen.

Hilbert formulerar nu det *euklidiska* parallellaxiomet IV på följande sätt:

IV. *Låt a vara en rät linje och A en punkt som inte ligger på a. I planet genom a och A finns det högst en rät linje genom A som inte skär a.*

Den räta linje genom A, som inte skär a, sägs vara den med *a parallella* räta linjen genom A.

Man kan givetvis härleda Euklides och Hilberts formuleringar av parallellaxiomet ur varandra.

Vidare gäller

Sats 23. *Om två räta linjer a, b inte skär en tredje rät linje c, så är de parallella.*

Bevis. Antag att a och b skär varandra i en punkt A (fig. 44). I så fall finns det två räta linjer genom A som är parallella med c, vilket strider mot IV.

Med hjälp av det euklidiska parallellaxiomet kan man bevisa en rad satser som är speciella för den euklidiska geometrin. Några av dem är nämnda i den historiska översikten. Där framhölls också att man kan förutsätta någon av dessa satser som axiom i stället för IV och sedan bevisa det euklidiska parallellaxiomet som en sats.

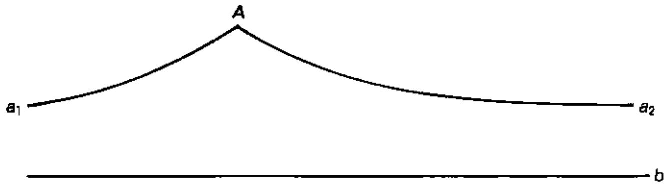


Fig. 45

Det *hyperboliska* parallellaxiomet formulerar Hilbert på följande sätt.

IV′. *Låt b vara en godtycklig rät linje och A en punkt utanför b. Då finns det två halvlinjer* a_1, a_2, *som utgår från A och inte utgör delar av samma räta linje samt inte skär b, medan b skärs av varje halvlinje som utgår från A och ligger i vinkelfältet* a_1, a_2.

Halvlinjerna a_1 och a_2 sägs vara *randparallella* med b (fig. 45). Om a_1 utgör en del av räta linjen a, sägs a och b vara randparallella. Om B är en punkt på b och b_1 är den halvlinje utmed b, som ligger på samma sida om räta linjen AB som a_1, sägs a_1 och b_1 vara randparallella.

Övriga räta linjer genom A och halvlinjer från A som inte skär b kallas *icke skärande*. Randparallella och icke skärande räta linjer och halvlinjer kallas gemensamt *parallella*.

När man skall illustrera satser ur den hyperboliska geometrin brukar man rita vissa räta linjer som böjda kurvor för att få tydliga figurer, så som skett i fig. 45.

17. Kontinuitetsaxiomen

Den sista axiomgruppen består av följande två axiom.

V, 1 (Arkimedes axiom eller Eudoxus axiom). *Låt AB och CD vara givna sträckor. Då existerar ett naturligt tal n sådant, att om sträckan CD avsättes n gånger från A utmed halvlinjen mot B, så kommer man till en punkt på andra sidan B* (se fig. 46).

Fig. 46

Motsvarande förhållande för vinklar kan härledas som en sats.

Med hjälp av V, 1 kan man mäta sträckor genom att ge en viss sträcka längden 1 och sedan jämföra den med andra sträckor. Man får då göra följande två antaganden.

1. Kongruenta sträckor har samma längd.
2. Om B är en punkt mellan A och C och man har längderna $AB = a$, $BC = b$, så har AC längden $a + b$.

Man kan närmast visa att halva enhetssträckan har längden $\frac{1}{2}$ etc. En godtycklig sträckas längd kan sedan bestämmas med föreskriven noggrannhet.

Vidare förutsätts

V, 2 (linjärt fullständighetsaxiom). *Ett system som består av punkterna på en rät linje jämte anordnings- och kongruensaxiom kan icke utökas med ytterligare punkter på sådant sätt att relationerna mellan tidigare element, de grundegenskaper för linjär anordning och kongruens, som följer av axiomen I—III samt axiom V, 1 upprätthålls.*

De grundegenskaper som åsyftas i satsen är dels de som innehålls i själva axiomen, dels resultatet i sats 4 om att fyra punkter på en rät linje kan betecknas på sådant sätt, att vissa mellanrelationer är uppfyllda, dels slutligen sats 9 om att konstruktionen i axiom III, 1 av en sträcka kongruent med en given sträcka är entydigt bestämd.

Med hjälp av V, 2 kan man bevisa

Sats 24 (Fullständighetssatsen). *Till ett system av punkter, räta linjer och plan, för vilket axiomen I—III, V, 1 gäller, kan man inte foga ytterligare punkter, räta linjer eller plan utan att något av de ingående axiomen upphör att gälla.*

Sats 24 gäller både i den euklidiska och den hyperboliska geometrin.

Av sats 24 följer nedanstående sats. Den kallas Cantors axiom, eftersom den kan förutsättas som ett axiom i stället för V, 2.

Sats 25 (Cantors axiom). *Låt* A_nB_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ *vara en oändlig följd av sträckor på samma räta linje sådan, att varje sträckas ändpunkter ligger på föregående sträcka och sträckornas längder konvergerar mot noll. Då finns det en och endast en punkt som ligger på samtliga sträckor.*

Med hjälp av Cantors axiom kan man visa att om en enhetssträcka är given, så kan man bestämma en sträcka vars längd svarar mot ett godtyckligt reellt positivt tal.

Också för vinklar kan man härleda en sats analog med Cantors axiom. Det är möjligt att i stället för V, 2 förutsätta giltigheten av Cantors axiom och med ledning av detta härleda V, 2 som en sats.

Med hjälp av axiomen i grupperna I—III och V kan man bevisa ytterligare satser ur pangeometrin. Vi kommer i det följande att ha användning av

Sats 26. *Vinkelsumman i en triangel är* $<2R$.

V. De olika geometriernas egenskaper

18. Den euklidiska geometrins motsägelsefrihet

För att undersöka om den euklidiska geometrin är motsägelsefri betraktar man en lämplig modell. I denna skall finnas objekt som svarar mot begreppen "punkter", "räta linjer" etc. Mellan dessa objekt skall råda de samband som formuleras i axiomen. Om den euklidiska geometrin leder till motsägande slutsatser, bör dessa framträda i relationerna mellan objekten i modellen.

Man kan undersöka den euklidiska geometrins motsägelsefrihet genom att skaffa sig en motsvarighet mellan de geometriska begreppen och relationer mellan vanliga reella tal. Om den euklidiska geometrin skulle leda till en motsägelse, måste även de vanliga räknelagarna för reella tal leda till en motsvarande motsägelse.

Man har inte hittat någon sådan motsägelse för de reella talen. Den tyske matematikern *Kurt Gödel* visade 1931 att deras motsägelsefrihet är omöjlig att bevisa, såvida man inte använder slutledningsprinciper vilkas motsägelsefrihet i sin tur kan ifrågasättas. (Se t.ex. E. Nagel—J. Newman: "Gödels bevis", i *Sigma,* band 5.) Resultatet av undersökningen i detta kapitel brukar därför formuleras så, att den euklidiska geometrin är motsägelsefri i samma mån som de reella talens aritmetik är motsägelsefri.

Med "tal" menas i fortsättningen ett reellt tal.

I anslutning till det nyss sagda gör man följande tolkningar.

"Punkt" betyder ett talpar (x_1, y_1). Talparet är ordnat, vilket innebär att (x_1, y_1) och (y_1, x_1) inte är samma talpar annat än om $x_1 = y_1$. x_1 och y_1 kallas punktens koordinater.

"Rät linje" betyder linjär ekvation av formen $ax + by + c = 0$.

I detta uttryck är x och y variabler. a, b och c är givna konstanta tal. a och b får ej samtidigt vara $=0$.

"Punkten (x_1, y_1) hör samman med räta linjen $ax+by+c=0$" betyder att punktens koordinater satisfierar räta linjens ekvation, således att $ax_1+by_1+c=0$ gäller.

Punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är *lika* endast i det fall att man samtidigt har $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

De båda räta linjerna $a_1x+b_1y+c_1=0$ och $a_2x+b_2y+c_2=0$ är *lika* om och endast om det finns en konstant $k\neq 0$ sådan att man har $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, $c_1=kc_2$.

Om man låter de tal x och y som införs beteckna koordinater i ett rätvinkligt koordinatsystem för planet, kan man i planet rita in "punkter" och "räta linjer" som vanliga åskådliga punkter och räta linjer. Man får då ett plan med de egenskaper som intuitivt tillkommer punkter och räta linjer i ett plan. Dessa egenskaper är från matematisk synpunkt således en illustration av egenskaper hos talpar och ekvationer och dessa i sin tur en tolkning av abstrakta förutsättningar.

När det i detta och följande kapitel talas om ett rätvinkligt koordinatsystem avses vad som på strikt matematiskt språk kallas ett *ortonormerat* system. Det innebär att koordinataxlarna skär varandra under räta vinklar och att man har samma skala utmed båda axlarna.

Genom räkning kan man lätt konstatera att om två räta linjer $a_1x+b_1y+c_1=0$ och $a_2x+b_2y+c_2=0$ satisfieras av två icke sammanfallande punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2), så måste de räta linjerna sammanfalla.

Nu kan man visa att de planimetriska incidensaxiomen I, 1—I, 3b är uppfyllda. Ty två punkter i modellen bestämmer entydigt en rät linje (I, 1 och I, 2), på en rät linje finns minst två punkter (I, 3a) och man kan bestämma tre punkter som inte ligger på samma räta linje (I, 3b).

Låt $a_1x+b_1y+c_1=0$ och $a_2x+b_2y+c_2=0$ vara två räta linjer som inte sammanfaller. Man definierar dem då som *parallella*, om något av följande villkor är uppfyllt.

1) $a_1=a_2=0$, 2) $b_1=b_2=0$, 3) $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, $a_2\neq 0$, $b_2\neq 0$.

I det tredje fallet gäller givetvis inte $c_1=kc_2$, ty då skulle de räta linjerna sammanfalla, vilket strider mot förutsättningen.

Låt $ax+by+c=0$ vara en rät linje och (x_1, y_1) en punkt, som inte ligger på räta linjen.

Man kan visa att det euklidiska parallellaxiomet IV gäller. Låt $ax+by+c=0$ vara en rät linje och (x_1, y_1) en punkt utanför räta linjen. Genom punkten går då en entydigt bestämd rät linje med ekvationen $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$.

Låt (x_1, y_1), (x_2, y_2) och (x_3, y_3) vara tre skilda punkter på en given rät linje $ax+by+c=0$. Punkten (x_2, y_2) anses ligga *mellan* de båda andra punkterna, om åtminstone endera av talföljderna

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ och } y_1,\ y_2,\ y_3$$

är antingen växande eller avtagande.

Man kan visa att definitionen är motsägelsefri. Detta innebär att om exempelvis (tecknet > betyder ”större än”, tecknet < ”mindre än”)

$$x_1 > x_2 > x_3,$$

så gäller antingen

$$y_1 = y_2 = y_3,\ y_1 > y_2 > y_3 \text{ eller } y_1 < y_2 < y_3.$$

Mellanrelationen för tal svarar således mot en mellanrelation för punkter. Därmed är klart att de tre första anordningsaxiomen gäller: att av tre olika punkter på en rät linje måste exakt en av dem ligga mellan de båda andra (II, 1 och II, 3) och att det mellan två punkter A och C på en rät linje alltid finns en tredje punkt B sådan, att C ligger mellan A och B (II, 2).

För att det i modellen skall ha någon mening att säga att två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) ligger på samma eller olika sidor om en och samma räta linje $ax+by+c=0$, gör man följande antagande. Punkterna ligger på *samma* sida om den räta linjen, om de båda uttrycken

$$ax_1+by_1+c,\ ax_2+by_2+c$$

har samma tecken, alltså båda är >0 eller <0. I annat fall ligger punkterna på *olika* sidor av den räta linjen. Uttrycken kan inte bli $=0$, ty då skulle motsvarande punkt ligga på räta linjen.

Man kan nu visa att Paschs axiom II, 4 är uppfyllt.

För att kunna införa *kongruensaxiomen* låter man sträckor och vinklar svara mot vissa tal. En sträcka med ändpunkterna (x_1, y_1), (x_2, y_2) tillordnas ett positivt tal l, kallat sträckans längd, enligt formeln

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Två sträckor definieras som *kongruenta* om de har samma längd. Axiomen III, 1—3 är då uppfyllda.

Vinkeln φ mellan två räta linjer $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=$ $=0$ tillordnas på analogt sätt talet $\cos\varphi$ enligt formeln

$$\cos\varphi=\frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

Två vinklar definieras som *kongruenta* om de tillordnats samma tal. Man kan nu lätt visa att axiomen III, 4—5 är uppfyllda i modellen. Eftersom även de återstående axiomen, V, 1—2, kan visas vara uppfyllda, så gäller således samtliga axiom i Hilberts axiomsystem för den euklidiska plana geometrin i modellen.

Ett plan, vars egenskaper fastlagts på ett sådant sätt att den euklidiska planimetrin gäller i planet, kallas ett *euklidiskt plan*. På analogt sätt definieras begreppen *euklidisk* tredimensionell *rymd*, *elliptiskt plan* och *hyperboliskt plan*.

Senare skall visas att även den elliptiska och den hyperboliska geometrin är motsägelsefria i samma mån som de reella talens aritmetik är motsägelsefri.

19. Några satser ur den hyperboliska geometrin

Den hyperboliska geometrin skiljer sig från den euklidiska endast genom att det euklidiska parallellaxiomet (IV) utbytts mot det hyperboliska (IV'). Alla andra axiom är desamma.

Detta betyder att man kan härleda en rad geometriska satser på samma sätt som i den euklidiska geometrin. Vill man illustrera satserna genom figurer i ett vanligt åskådligt plan, ritas en hyperbolisk "punkt" som en vanlig punkt i planet. Däremot är det inte möjligt att rita alla den hyperboliska geometrins "räta linjer" som åskådliga räta linjer.

Antag att man från en punkt utanför en hyperbolisk rät linje ville dra de två randparallella hyperboliska räta linjerna till den givna räta linjen. Om man ville rita de båda linjerna på sådant sätt, att det åskådligt framginge av figuren att de randparallella linjerna inte träffar den givna räta linjen förrän på oändligt avstånd, skulle de randparallella räta linjerna praktiskt taget sammanfalla. Om man ritar en figur, där vinkeln mellan dem är fullt tydlig, får betraktaren en intuitiv känsla av att båda de randparallella räta linjerna kommer att skära den givna en liten bit utanför papperets kant.

För att komma tillrätta med denna svårighet ritar man vissa hyperboliska rätå linjer som böjda kurvor. Figurerna ger därigenom inte full åskådlighet åt vår föreställning om en "rät linje". Men de geometriska konstruktionerna och de logiska slutsatserna låter sig illustreras på detta vis.

En annan metod är att definiera begreppen "punkter", "räta linjer", "kongruenta vinklar" etc. på annat sätt än det intuitiva. Man får då modeller av det hyperboliska planet som i vissa avseenden ger en åskådlig bild av planets egenskaper. En annan möjlighet är att illustrera satserna genom figurer på en annan yta än ett plan. Sådana exempel behandlas senare.

Vi skall bevisa några enkla satser och börjar med

Sats 27. *Låt b vara en rät linje och a_1, a_2 de båda med b randparallella halvlinjerna från en punkt A. Då bildar a_1 och a_2 lika stora vinklar med normalen från A mot b.*

Bevis. Drag i fig. 47 normalen AB från A till punkten B på b. Antag att a_1 och a_2 bildar vinklarna α resp. β med AB. Om ej satsen gäller utan exempelvis $\alpha > \beta$, kan vi dra en halvlinje på andra sidan AB som bildar vinkeln β med AB. Eftersom a_1 och b är randparallella kommer den nya halvlinjen att skära b i en punkt C.

Avsätt $BC' = BC$ på andra sidan B och drag AC' (fig. 48).

Trianglarna ABC och ABC' är kongruenta, ty vinklarna vid

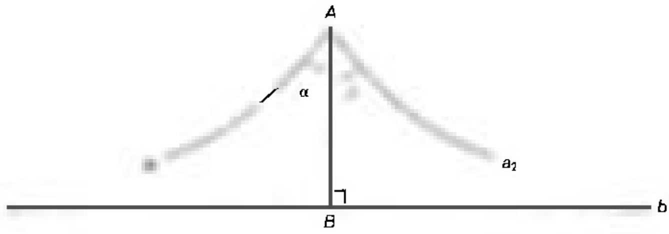


Fig. 47

B är räta, $BC = BC'$ och BA är gemensam. Speciellt gäller $\wedge BAC' = \beta$, vilket är omöjligt.

Låt p vara längden av normalen från en punkt P till räta linjen l. Med *parallellvinkeln* i P menas vinkeln mellan normalen och en av de båda randparallella halvlinjerna från P.

Man kan visa

Sats 28. *Parallellvinkeln beror endast av normalens längd.*

Man bevisar satsen genom att anta att det existerar två lika långa normaler, vilkas parallellvinklar är olika stora. Beviset är sedan analogt med beviset för sats 27.

Vi skall visa

Sats 29. *Låt b vara en given rät linje och a den ena av de med b randparallella räta linjerna genom en viss punkt A. Då är a randparallell med b i var och en av sina punkter.*

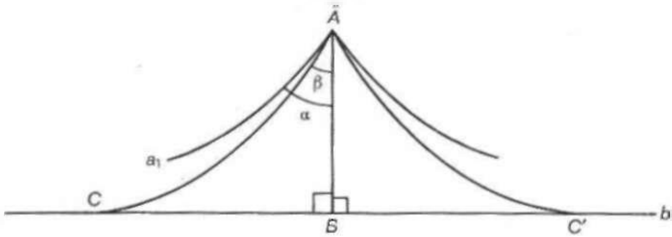


Fig. 48

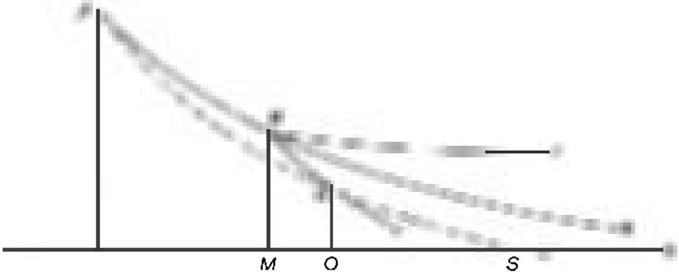


Fig. 49

Bevis. Betrakta fig. 49. Antag att villkoren i satsen är uppfyllda och låt B vara en godtycklig punkt på a. Drag normalen BM från B mot b.

Man bevisar satsen genom att visa att varje halvlinje från B i det inre av vinkeln MBa skär b och att ingen halvlinje i det yttre av samma vinkel skär b.

Låt m vara en halvlinje från B i det inre av $\wedge MBa$. Bestäm en punkt R på m och drag normalen RO mot b.

Drag vidare räta linjen AR. Eftersom a är randparallell skär förlängningen av AR räta linjen b i en punkt S.

Men m går in i triangeln ROS genom R och måste alltså skära b.

Låt n vara en halvlinje från B i det yttre av $\wedge MBa$. Den skär inte b, ty om den skulle skära b i N, skulle räta linjen a som går in i triangeln BMN också skära b, vilket är mot antagandet.

Man behöver alltså inte tala om randparallellitet i viss punkt utan kan allmänt säga att a är randparallell med b.

Omvänt gäller

Sats 30. *Om a, b är två räta linjer och a är randparallell med b, så är b randparallell med a.*

Bevis. Givet två räta linjer a och b av vilka a är randparallell med b (fig. 50).

Bestäm en punkt A på a och drag normalen mot b, som träffar b i B. Låt m vara en halvlinje från B i vinkeln ABb.

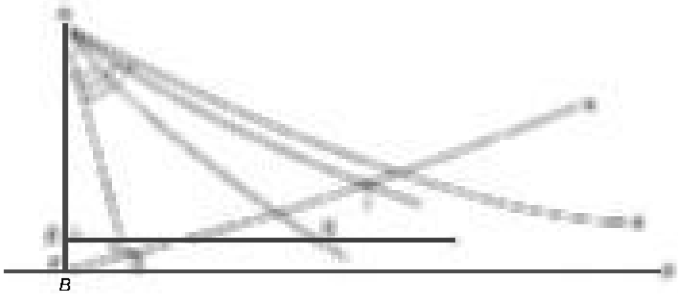


Fig. 50

Satsen är bevisad om vi kan bevisa att m skär a. Ty det är klart att en halvlinje från B på andra sidan om b inte kan skära a, eftersom inte b skär a.

Fäll normalen AQ mot m. Avsätt på AB en sträcka $AR = AQ$. I triangeln ABQ är vinkeln vid Q rät. Eftersom vinkelsumman i en triangel enligt en sats i pangeometrin är $\leq 2R$, och eftersom den större sidan i en triangel enligt en annan sats i pangeometrin står mot den större sidan, så kommer punkten R att falla mellan A och B.

Drag i R en normal vinkelrät mot AB. Drag räta linjen AS på så sätt att $\wedge RAS = \wedge QAa$. Eftersom $\wedge QAa$ är mindre än parallellvinkeln vid A, kommer räta linjen AS att skära b. Den skär alltså normalen från R i en punkt S.

Avsätt på m sträckan $QT = RS$. Om T kommer att ligga på andra sidan om a, så måste m skära a. Vi kan alltså anta att Q och T ligger på samma sida om a.

Drag slutligen AT.

Trianglarna AQT och ARS är kongruenta enligt 1:a kongruensteoremet, ty man har

$$\wedge R = \wedge Q = 1R, \quad RS = QT, \quad AR = AQ.$$

Speciellt följer $\wedge QAT = \wedge RAS$. Men vi hade $\wedge RAS = \wedge QAa$. Alltså gäller

$$\wedge QAT = \wedge QAa.$$

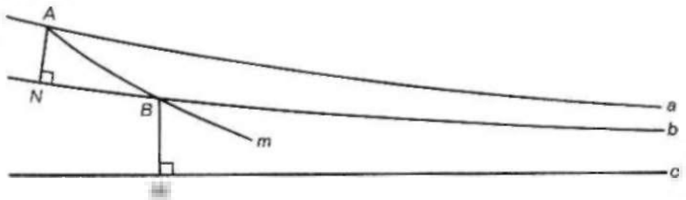


Fig. 51

Alltså faller punkten T på räta linjen a, dvs. m skär a. Därmed är satsen bevisad.

Sats 31. *Om två halvlinjer är randparallella med en tredje, så är de sinsemellan randparallella.*

Bevis. Antag att a, b, c är tre halvlinjer, av vilka a är randparallell med b och b är randparallell med c (fig. 51). Vi skall visa att a är randparallell med c.

Antag först att a och c ligger på olika sidor om b. Drag från en punkt A på a en normal mot b, som träffar b i N. Drag vidare en halvlinje m från A i vinkelfältet NAa.

Eftersom a är randparallell med b och ligger på motsatt sida om b som c, så kan inte a skära c. a är randparallell även till c, om vi kan visa att halvlinjen m i vinkelfältet NAa skär c.

Eftersom $\wedge NAa$ är parallellvinkeln i A i förhållande till b, så måste m skära b i en punkt B. Drag i B normalen BM mot c. Eftersom m skär b i B, måste gälla $\wedge MBm < \wedge MBb$, dvs. m måste även skära c.

Antag nu att a och c ligger på samma sida om b.

Om a skulle skära c i en punkt A (fig. 52), kunde man dra normalen från A mot b till en punkt N på b. Då vore med figurens beteckningar

$$\wedge NAa < \wedge NAc,$$

dvs. a måste skära b, mot antagandet.

a och c skär alltså inte varandra. Antag att c ligger mellan a och b (fig. 53). Drag från en punkt A på a normalen mot b och låt den träffa b i en punkt N. Den skär c eftersom A och N ligger på olika sidor om c.

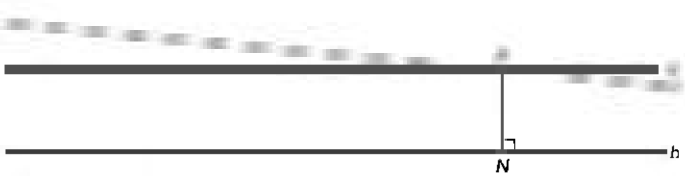


Fig. 52

Drag nu en halvlinje m från A i vinkelfältet NAa. Enligt antagandet måste den skära b. Men enligt Paschs axiom måste den då även skära c. Därmed är satsen bevisad.

Med hjälp av de föregående satserna kan man visa att två icke skärande räta linjer alltid har en gemensam normal. Detta gäller däremot inte för randparallella räta linjer. Sistnämnda resultat är en följd av

Sats 32. *Om två räta linjer skärs av en tredje under lika stora likbelägna vinklar, så måste det vara fråga om icke skärande räta linjer.*

Bevis. Låt räta linjerna a och b i fig. 54 skäras av räta linjen c. Om de likbelägna vinklarna α och β är lika, så är alternatvinklarna β och γ lika. Enligt en sats i pangeometrin kan inte a och b skära varandra.

Antag att a och b vore randparallella på den sida om c där de lika stora likbelägna vinklarna α, β ligger. Då kunde man på andra sidan om c hitta ett par lika stora likbelägna vinklar γ, δ. Alltså skulle a och b vara randparallella även på denna sida om c, vilket strider mot axiom IV′.

Man kan nu visa

Sats 33. *Parallellvinkeln minskar när avståndet till räta linjen ökar.*

Bevis. Betrakta fig. 55. Låt PQN vara normalen från punkterna P och Q mot den räta linjen c, och låt a och b vara motsvarande randparallella räta linjer. Kalla parallellvinkeln vid P för α och vid Q för β. Vi skall visa, att $\alpha < \beta$.

Eftersom a och b båda är randparallella med c, är de sinsemellan randparallella. Enligt sats 32 kan då inte α och β vara lika stora.

Fig. 53

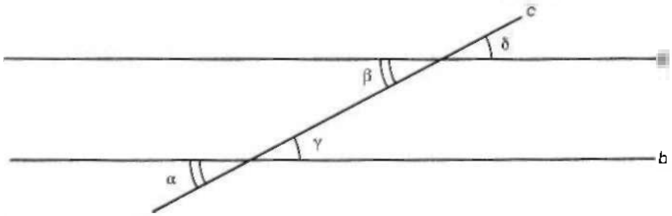


Fig. 54

Antag nu att man har $\alpha > \beta$. Avsätt vinkeln β vid P. Räta linjen Pm måste då skära c och givetvis också b, enligt Paschs axiom. Men m och b kan inte skära varandra, då de är räta linjer som skärs av PQ under lika alternatvinklar. Således måste man ha $\alpha < \beta$.

Som en intressant följdsats kan man visa att det i den hyperboliska geometrin existerar en absolut längdenhet. Mot en vinkel av given storlek kommer nämligen att svara en normal av bestämd längd, som har vinkeln till parallellvinkel, och vice versa. En följd av detta är också att när vinklarna i en triangel är bestämda, så är även sidornas längder fastlagda. Detta resultat kan formuleras som en sats, speciell för hyperbolisk (och elliptisk) geometri.

Sats 34. *Om vinklarna i två trianglar är parvis lika stora, så är trianglarna kongruenta.*

Antag nämligen att det funnes två likformiga trianglar ABC och $A'B'C'$, som inte vore kongruenta (fig. 56). Man kunde då konstruera en med den mindre triangeln kongruent triangel,

Fig. 55

placerad som figuren visar. Sidan $A'B'$ faller utmed sidan AB, och normalerna från C och C' mot AB ligger utmed samma räta linje.

Då skulle emellertid sidorna BC och $B'C'$ resp. AC och $A'C'$ skära AB under lika stora likbelägna vinklar. Detta strider mot antagandet att sidorna var randparallella. Det är endast möjligt om sidorna sammanfaller, dvs. om trianglarna är kongruenta.

I den h. geometrin existerar således inte några likformiga trianglar som inte samtidigt är kongruenta. Sats 34 brukar ibland kallas det "femte kongruensteoremet", eftersom det är ett nytt kongruensfall utöver de fyra som Euklides behandlade.

Till sist skall visas hur man i den hyperboliska geometrin kan konstruera en triangel, vars alla vinklar är 0°. För att kunna göra detta måste man veta, att det existerar en normal

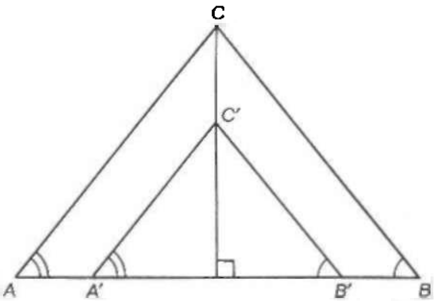


Fig. 56

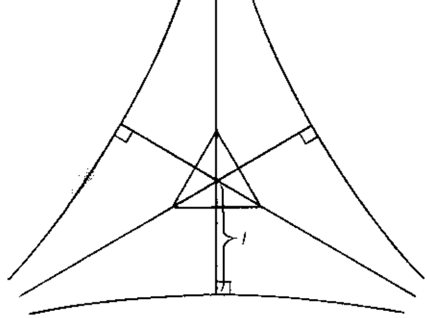


Fig. 57

av bestämd längd l, som svarar mot en parallellvinkel av storleken 60°.

Rita en liksidig triangel (fig. 57) och drag de tre höjderna. De skär varandra i en punkt och bildar 60°:s vinkel med varandra.

Låt nu den liksidiga triangeln bli allt större, under det att höjderna fortfarande ligger utmed samma räta linjer. När vinkelräta avståndet från höjdernas gemensamma skärningspunkt till de tre sidorna i triangeln är l, kommer triangelns sidor att vara parvis randparallella med höjden från motsvarande urartade "hörn" i triangeln. Enligt sats 31 är då också triangelns sidor parvis randparallella.

20. Den elliptiska geometrin

I detta avsnitt skall inte presenteras någon detaljerad genomgång av den elliptiska geometrin. I stället ges en översikt över dess axiom och några av dess egenskaper med hjälp av en modell i det vanliga euklidiska rummet.

Som *modell* väljs ett *klot* med medelpunkten i O. Den plana elliptiska geometrin gäller då på klotets yta, om man tolkar de båda euklidiska punkterna i ändarna av en diameter som en enda elliptisk punkt. Eftersom även diametern mellan de båda euklidiska punkterna kommer att svara mot denna elliptiska

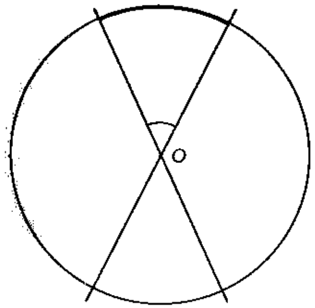


Fig. 58

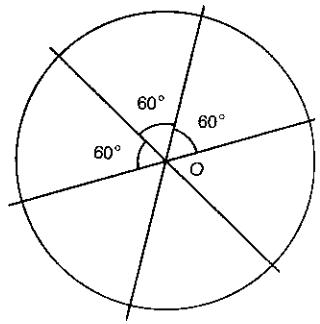


Fig. 59

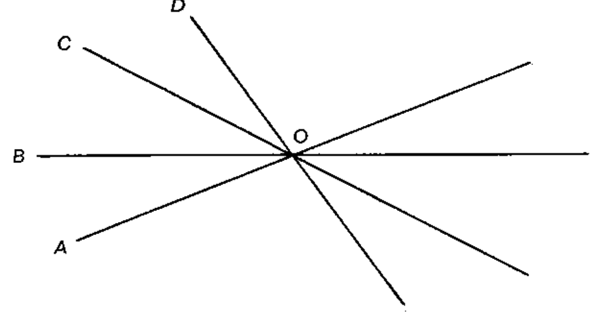


Fig. 60

punkt, kan man tolka en elliptisk punkt på två sätt. Man kan göra på liknande sätt med övriga element i modellen, ty i vissa fall är den ena, i andra fall den andra tolkningen att föredra.

I modellen gäller alltså:

elliptisk punkt = euklidisk rät linje genom O = de båda skärningspunkterna mellan den euklidiska räta linjen och klotytan,
elliptisk rät linje = euklidiskt plan genom O = den storcirkel utefter vilken det euklidiska planet skär klotytan,
elliptisk sträcka = den minsta euklidiska vinkeln mellan motsvarande euklidiska räta linjer = den minsta storcirkelbågen mellan en euklidisk punkt ur vart och ett av de motsvarande euklidiska punktparen (fig. 58),
elliptisk vinkel mellan två elliptiska räta linjer = den minsta euklidiska vinkeln mellan motsvarande euklidiska plan = den minsta euklidiska vinkeln på klotytan mellan motsvarande storcirkelbågar.

Det är lätt att inse att de planimetriska incidensaxiomen I, 1—I, 3b gäller.

Däremot gäller inte *anordningsaxiomen* i vanlig formulering. Ty om man låter tre euklidiska räta linjer genom O ligga i samma euklidiska plan och bilda 60° vinkel med varandra (fig. 59), så kan man inte ge någon naturlig tolkning åt påståendet att en av dem ligger mellan de båda andra. Man kan ersätta

dem med andra anordningsaxiom av följande typ: Fyra elliptiska punkter A, B, C, D på en elliptisk rät linje kan på ett och endast ett sätt uppdelas i två varandra skiljande punktpar (fig. 60).

Om man förutsätter att ingen av de inre vinklarna i en triangel är $>180°$, så kan man visa att *samtliga kongruensaxiom* gäller.

Av modellen framgår att parallella räta linjer inte existerar utan att alla elliptiska räta linjer måste skära varandra. Axiomgrupp IV bortfaller alltså. Däremot gäller de båda *kontinuitetsaxiomen*.

Det är lätt att inse att *vinkelsumman i en elliptisk triangel är $>180°$*. Ty om ABC är en elliptisk triangel på klotytan och man lägger ett euklidiskt plan genom punkterna A, B och C, så är vinkelsumman i den euklidiska triangeln ABC i detta plan 2 räta. Men varje vinkel i den elliptiska triangeln på klotytan är större än motsvarande vinkel i nyssnämnda euklidiska triangel i planet.

Av detta följer vidare att det inte finns några likformiga trianglar som inte samtidigt är kongruenta. Ty ju större en elliptisk triangel är, desto mera skiljer sig vinklarna i storlek från motsvarande euklidiska vinklar i det euklidiska planet genom triangelns hörn. Om vinklarna skall vara lika stora i två trianglar, måste detsamma även gälla för trianglarnas sidor.

Som tidigare visats gäller samma sats i den hyperboliska geometrin.

Vissa av satserna i den elliptiska geometrin skiljer sig inte från motsvarande satser i den euklidiska. Eftersom kongruensaxiomen gäller, får man kongruensteorem analoga med de euklidiska. Däremot finns det andra satser som är säregna för den elliptiska geometrin. Alla normaler till en given rät linje skär således varandra i en och samma punkt. Vidare har alla räta linjer samma längd. De kan således inte förlängas i oändlighet utan att man kommer tillbaka till utgångspunkten.

21. Ytor på vilka de tre geometrierna gäller

I den historiska översikten nämndes att Riemann i sin habilitationsföreläsning 1854 gav en översikt över de typer av ytor på vilka den elliptiska, euklidiska och hyperboliska geometrin gäller.

För den euklidiska och den elliptiska geometrin har ju sådana ytor redan behandlats i det föregående. I avsnitt 18 visades att man med hjälp av ett rätvinkligt koordinatsystem i ett plan kan åstadkomma en motsvarighet mellan talpar (x, y) och punkter samt mellan linjära ekvationer med två obekanta, av utseendet $ax+by+c=0$, och räta linjer. På så sätt kunde man fastlägga att den euklidiska geometrin skulle gälla i ett sådant plan.

I avsnitt 20 utgick man från att den euklidiska geometrin gällde i ett tredimensionellt rum. Man kunde då visa att den plana elliptiska geometrin gällde på ytan av ett klot, om man tolkade begreppen punkt och rät linje på lämpligt sätt.

Det ligger då nära till hands att fråga sig om det finns någon yta i det euklidiska tredimensionella rummet, på vilken den hyperboliska geometrin gäller. För att på liknande sätt som Riemann kunna angripa det problemet måste man känna till vissa matematiska begrepp, i första hand krökning och krökningsradie.

Låt en kurva i ett vanligt euklidiskt plan vara given. Kurvan förutsätts uppfylla vissa matematiska villkor, som innebär att den inte har en spets eller uppvisar andra liknande oregelbundenheter. Man kan då utgå från en given punkt på kurvan och välja två andra punkter på kurvan i närheten av den givna. Genom de tre punkterna kan man lägga en cirkel. Om nu de två andra punkterna får röra sig på kurvan i riktning mot den givna, kommer eventuellt cirkelns radie att ändras. Om de tre punkterna bringas att sammanfalla får cirkelns radie ett visst värde, som svarar mot den punkt på kurvan i vilken de tre punkterna sammanföll till en. Detta kallas kurvans *krökningsradie* i punkten och betecknas med bokstaven R. Inverterade värdet av krökningsradien, alltså talet $1/R$, kallas kurvans *krökning* i punkten.

Man ser lätt att krökningen för punkterna på en cirkels periferi alltid är konstant och bestämd av cirkelns radie. På samma sätt kan man konstatera att krökningsradien till en rät linje blir oändligt stor i varje punkt och att räta linjens krökning således blir $=0$.

Låt en godtycklig yta i den euklidiska rymden vara given. Betrakta ett delområde av ytan. Låt P vara en punkt i det inre av området. Antag att P har den egenskapen att tangenten i P till varje kurva på ytan som går genom P ligger i ett visst plan. Detta kallas ytans *tangentplan* i P. En punkt som äger ett tangentplan kallas en *ordinär* punkt. Normalen i P till tangentplanet kallas ytans *normal* i P. Ett plan genom ytnormalen skär ytan utmed en kurva som kallas ett *normalsnitt*.

Betrakta ett normalsnitt genom P. Låt dess krökningsradie i P vara R och krökning $1/R$.

Låt nu planet genom ytnormalen i P vrida sig ett varv kring ytnormalen. Om tillhörande normalsnitts krökning i P inte förblir konstant, kommer krökningen att variera och i regel uppvisa ett största och ett minsta värde. Motsvarande krökningsradier kallas de *principala krökningsradierna* i P och betecknas med R_1 och R_2. Man kan visa att tillhörande normalsnitt är vinkelräta mot varandra.

Ytans *gaussiska krökning* eller kort och gott *krökning* K i en punkt anges av formeln

$$K=\frac{1}{R_1R_2}.$$

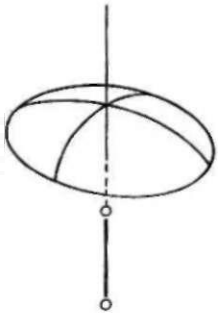


Fig. 61. $K > 0$. Elliptisk krökning

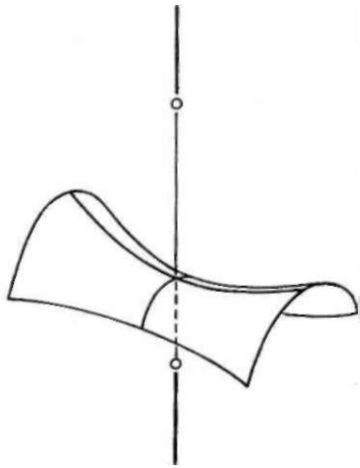


Fig. 62. $K < 0$. Hyperbolisk krökning

Vi räknar nu krökningsradien positiv på ena sidan om ytan och negativ på andra sidan. Man får då tre huvudtyper av krökning i en punkt på en yta.

1. *Elliptisk krökning.* $K > 0$. Båda de principala krökningsradierna har samma tecken (se fig. 61). Ex. punkterna på en ellipsoid eller ett klot.

2. *Hyperbolisk krökning.* $K < 0$. Då måste R_1 och R_2 ha olika tecken (se fig. 62). En punkt med hyperbolisk krökning kallas en *sadelpunkt*. Ex. punkterna på en enmantlig hyperboloid och på en hyperbolisk paraboloid.

3. *Parabolisk krökning.* $K = 0$. Endera av $1/R_1$ eller $1/R_2$ är $= 0$. Ex punkterna på en kon, på en cylinderyta eller i ett plan.

Speciellt kan det inträffa, att alla normalsnitt i en punkt på ytan har samma krökning, $1/R = 1/R_1 = 1/R_2$. En sådan punkt kallas en *navelpunkt*. Två ytor består av idel navelpunkter, nämligen planet och klotytan.

Tidigare har vid flera tillfällen framhållits att den euklidiska geometrin är uppbyggd med ledning av vår intuitiva uppfattning om förhållandena i ett åskådligt plan. Speciellt gäller i ett sådant att sträckor, vinklar och trianglar kan flyttas och vridas utan att deras storlek ändras. Om man tänker sig att exempelvis två trianglar i det åskådliga planet är urklippta ur något styvt och oböjbart material, så svarar kongruensrelationen för trianglar mot den åskådliga egenskapen att den ena triangeln kan flyttas i planet, så att den bringas att täcka den andra triangeln eller dess spegelbild. Att detta är möjligt beror på att planet består av idel punkter med konstant krökning och att varje sådan punkt är en navelpunkt.

När det gällde att tolka de geometriska grundbegreppen på en klotyta på ett sådant sätt att denna kom att utgöra en modell av den elliptiska planimetrin, tolkade man "räta linjer" som storcirklar. Med denna tolkning kom klotytan att medge samma rörelsefrihet som planet. Sträckor, vinklar och trianglar kunde flyttas vart som helst på ytan utan att storleken ändrades. Detta beror givetvis på att klotytan i likhet med planet består av idel punkter med konstant krökning och att alla dessa punkter är navelpunkter. Kongruensbegreppet kunde därför definieras på analogt sätt som i planet.

Vårt mål är nu att finna en yta i det euklidiska rummet som kan användas som en modell av den hyperboliska geometrin. Men planet och klotet är de enda ytor som består av idel navelpunkter. Därför måste man på den sökta ytan definiera en kongruensrelation med ledning av någon annan åskådlig egenskap än den som använts för planet och klotytan. För att kunna göra detta måste man införa begreppen geodetisk linje och isometrisk avbildning.

Med en *geodetisk linje* på en yta menas den kortaste förbindelselinjen på ytan mellan två punkter. Den geodetiska linjen genom två tillräckligt närbelägna punkter bestäms entydigt av punkterna.

Antag nu att en yta S överförs i en annan yta S' genom *isometrisk avbildning*, dvs. genom att böjas och veckas utan att krympas eller tänjas. Man kan visa att ytans krökning är invariant och således inte förändras vid isometrisk avbildning (visat av Gauss). Vidare är vinkeln mellan två varandra skärande kurvor på S lika stor som vinkeln mellan motsvarande bildkurvor på S'. Längden av en kurva är lika stor som längden av motsvarande bildkurva.

De geodetiska linjerna överförs vid isometrisk avbildning i geodetiska linjer. Ty enligt definitionen behåller alla kurvor sin längd, och de kortaste linjerna förblir alltså de kortaste linjerna även på den nya ytan.

Man kan nu visa att om två ytors krökning i varje punkt har ett och samma konstanta värde K, så kan den ena ytan avbildas på den andra genom isometrisk avbildning.

Låt nu en ytas krökning i alla punkter ha det konstanta värdet K. Då kan ytan avbildas på sig själv genom isometrisk avbildning. En triangel i ytan, som begränsas av geodetiska linjer, kommer att avbildas på en annan triangel i ytan, begränsad av geodetiska linjer. Enligt det föregående har de båda trianglarna lika långa sidor och lika stora vinklar och samma yta. På en yta, vars punkter har konstant krökning, kan den ena triangeln bringas att täcka den andra eller dennas spegelbild. Man får då tänka sig de båda trianglarna utskurna av mjukt otänjbart tyg, så att de vid förflyttning kan följa ytans alla buktningar utan att tänjas eller sträckas.

Vi vill nu studera en yta, vars alla punkter har konstant negativ krökning $K<0$. Det visar sig emellertid att det inte existerar någon yta i det euklidiska rummet, vars alla punkter har konstant negativ krökning. Detta betyder att man måste begränsa sina undersökningar till lämpliga delområden av de ytor som kan komma ifråga. Dessa utgör bara en modell av ett visst delområde av det hyperboliska planet.

Den enklaste ytan med konstant negativ krökning kallas *pseudosfären* (fig. 63) och ser ut som en dubbeltrumpet.

För att konstruera en pseudosfär utgår man från en kurva som kallas *traktris* eller släpkurva. Den undersöktes tidigast av holländaren *Huygens* under 1600-talets senare hälft. Huygens, som var en rik privatlärd med matematik och naturvetenskap som hobby, kallade traktrisen för *hundkurvan*. För att beskriva den tänkte sig Huygens ett rätvinkligt koordinatsystem. Kalla axlarna på vanligt sätt x- och y-axel. Antag att en husse ställer sig i origo. På y-axeln i en punkt på avståndet a befinner sig hans hund. Kopplet mellan dem är sträckt. Låt nu husse röra

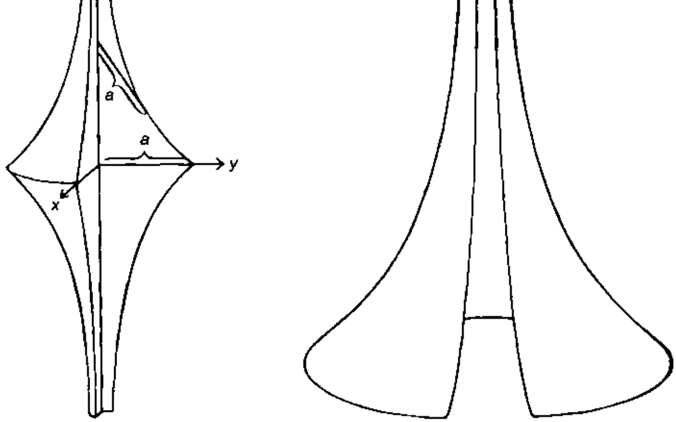


Fig. 63. T.v. pseudosfär och traktris. T.h. pseudosfär, uppskuren längs en genererande traktris och den singulära linjen

sig utmed x-axeln med kopplet hela tiden sträckt, så att hunden motvilligt låter sig släpas med i hans kölvatten. Då kommer hunden att röra sig utmed Huygens hundkurva eller traktrisen.

Ju längre husse avlägsnar sig från utgångsläget, desto mera kommer hunden att närma sig husses väg. Den senare, alltså x-axeln, blir kurvans asymptot. Låter man nu kurvan rotera kring asymptoten får man pseudosfären. Hundens utgångsläge beskriver en cirkel vars punkter intar en särställning i förhållande till ytan i övrigt och kallas för ytans singulära linje.

Pseudosfären har fått sitt namn av att samtliga punkter, utom de som genereras av traktrisens spets, har konstant negativ krökning $K = -1/R^2$. R kallas *pseudoradien*. Om man tänker sig en av de trumpetliknande ytorna på ena sidan om den singulära linjen uppskuren längs en av de genererande traktriserna, får man en yta på vilken den plana hyperboliska geometrin gäller. Den motsvarar dock endast en del av det hyperboliska planet.

En detaljerad matematisk framställning av avsnitt 21 återfinnes i bl.a. C. G. Esseen, *Föreläsningar över differentialgeometri* (1957), samt K. Strubecker, *Differentialgeometrie III*, Sammlung Göschen 1180—1180a (1959).

VI. En modell av den hyperboliska geometrin

22. Den hyperboliska geometrins motsägelsefrihet. Kleins modell

I avsnitt 18 visades att den euklidiska planimetrin är motsägelsefri i samma mån som de reella talens aritmetik är motsägelsefri. Detta skedde med hjälp av en aritmetisk modell av den euklidiska planimetrin.

Med hjälp av ett rätvinkligt koordinatsystem kunde man sedan ge de aritmetiska begreppen en tolkning som åskådliga geometriska begrepp i ett plan. I detta gällde således den euklidiska geometrin.

Man kan nu visa att även den hyperboliska planimetrin är motsägelsefri i samma mån som de reella talens aritmetik är motsägelsefri. Det sker genom att man utgår från det nyssnämnda euklidiska planet. I detta ger man vissa begrepp och relationer en annan tolkning än den vanliga. På så sätt kan man visa, att en lämpligt vald del av den euklidiska modellen utgör en modell av den hyperboliska geometrin. Hyperboliska begrepp och relationer i den nya modellen är egentligen euklidiska begrepp och relationer, som man givit andra namn. Då följer av denna modell att *den hyperboliska planimetrin är motsägelsefri i samma mån som den euklidiska planimetrin är det.*

Den modell av den hyperboliska geometrin som man på detta sätt konstruerar har många fördelar. När man i avsnitt 19 skulle illustrera de olika satserna ur den hyperboliska geometrin genom figurer i det vanliga åskådliga planet, måste man i vissa fall rita räta linjer som böjda linjer för att få en acceptabel bild av satsernas innehåll. I vår modell däremot definierar man en hyperbolisk rät linje som ett visst bestämt begrepp ur den euklidiska geometrin. Detta har den fördelen att en hyperbolisk rät linje alltid kommer att återges på samma sätt.

I och med denna modell är det klart att de euklidiska och hyperboliska geometrierna är likaberättigade. Är den ena motsägelsefri måste detta också gälla den andra. Man behöver alltså inte befara att i en framtid hitta satser i den hyperboliska geometrin som strider mot varandra. Om det skulle finnas sådana, måste det finnas analoga motsägelser i den vanliga euklidiska geometrin. Det är således fråga om två likvärda logiska system. Frågan vilket system som bäst beskriver den fysiska verkligheten omkring oss är ett annat problem, som skall diskuteras i bokens sista avsnitt.

I det följande betecknar vi euklidisk med e., hyperbolisk med h.

Det finns två modeller som vanligen brukar användas, nämligen Kleins och Poincarés.

Felix Kleins modell är den äldsta av dem. De grundläggande idéerna förekommer redan i ett arbete av engelsmannen Cayley från 1859. Klein har emellertid överarbetat dem i sitt arbete "Om den s.k. ickeeuklidiska geometrin", som publicerades i *Mathematische Annalen*, bd 4, 1871.

I Kleins modell av den icke-euklidiska geometrin utgörs det icke-euklidiska planet av det inre av en cirkel i ett euklidiskt plan. Denna cirkel brukar kallas för *randcirkel* till det h. planet. Av praktiska skäl brukar man lägga in ett rätvinkligt koordinatsystem i planet och låta det h. planet motsvaras av en cirkel med medelpunkten i origo och radien $=1$, en s.k. enhetscirkel (fig. 64).

Den h. geometrins grundelement tolkas nu på följande sätt.

Det h. planet = det inre av cirkeln.
En h. punkt = e. punkt i det inre av cirkeln.
En h. rät linje = korda i enhetscirkeln.

En detaljerad genomgång av Kleins modell finns t.ex. i R. Baldus—F. Löbell, *Nichteuklidische Geometrie*, Sammlung Göschen 970. Här skall inte alla detaljer behandlas utan bara ges en skiss av modellens utseende. Dess största svaghet är det sätt på vilket kongruenta ("lika") vinklar definieras.

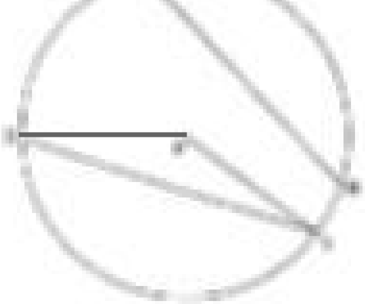


Fig. 64

Eftersom punkter och räta linjer i Kleins modell utgörs av punkter och räta linjer, gäller alla axiomen i de två första axiomgrupperna.

För att komma vidare måste man närmast införa ett mått på sträckors längd. Eftersom cirkelns omkrets skall motsvara oändligheten, måste man definiera h. lika långa sträckor på sådant sätt att de är e. mindre, ju närmare cirkelns omkrets de ligger.

Detta är möjligt med hjälp av begreppet *dubbelförhållande.* Vad som därmed menas skall i detalj förklaras i avsnitt 25 nedan.

Begreppet dubbelförhållande innebär i korthet att varje sträcka tillordnas ett reellt tal, som bestäms av läget av sträckans ändpunkter och av motsvarande h. räta linjes e. skärningspunkter med randcirkeln. Två sträckor definieras som h. kongruenta, om de tillordnas samma tal d eller tal d och d', som utgör varandras inverterade värden, $d' = 1/d$. Om två sträckor adderas, kommer den resulterande sträckan att svara mot ett dubbelförhållande som man får genom att multiplicera de båda delsträckornas dubbelförhållanden med varandra. Man kan då visa att kongruensaxiomen III, 1—3 för sträckor samt Arkimedes axiom V, 1 är uppfyllda.

Automorfa kollineationer

Nu återstår de båda sista kongruensaxiomen, som innehåller lagar för begreppet h. kongruenta vinklar. För att kunna tilllämpa dem måste man införa en kongruensrelation mellan vinklar i modellen.

De vinklar Klein definierar som hyperboliskt kongruenta blir inte "lika stora" i euklidisk mening. Detta betyder givetvis ingenting från rent abstrakt synpunkt. Men det har den nackdelen att man inte rent åskådligt kan se vilka vinklar i modellen som är kongruenta och därmed hyperboliskt lika.

För att kunna införa h. kongruenta vinklar utgår man från ett rätvinkligt koordinatsystem i ett vanligt euklidiskt plan. Där låter man det hyperboliska planet motsvara en cirkel, vars radie är $=1$ och vars medelpunkt ligger i origo. Varje punkt i det e. planet får koordinaterna (x, y), där x och y är vissa reella tal.

Betrakta nu ekvationerna

$$(1) \qquad x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3},$$

där de numrerade bokstäverna a, b, c i högra ledet skall uppfylla relationen

$$(2) \qquad a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \neq 0.$$

Genom dessa ekvationer kommer varje punkt (x, y) i det e. planet att överföras i en annan punkt i det e. planet med koordinaterna (x_1, y_1). Man kallar detta en *avbildning* av den ena punkten på den andra och säger att ekvationerna (1) och (2) bestämmer en viss avbildning eller *kollineation*.

Man kan lätt visa att en kollineation är entydigt bestämd, om man föreskriver att fyra givna punkter i det e. planet som inte ligger i rät linje skall avbildas på fyra andra punkter med samma egenskap. Ty sätter man i ovanstående uttryck in koordinaterna för en punkt och för motsvarande bildpunkt, så kommer de fyra givna punkterna att tillsammans med motsvarande bildpunkter ge upphov till åtta ekvationer för de nio obekanta konstanterna $a_1 - c_3$. Om någon av konstanterna inte är $=0$, exempelvis c_3, kan man dividera uttrycken i (1) och (2) med c_3. På så vis får man bara åtta obekanta konstanter att bestämma.

Att punkterna inte får ligga flera än två på samma räta linje beror på att avbildningen överför räta linjer i räta linjer. Att så är fallet kan man konstatera genom att bestämma ekvationen för en rät linje genom två givna punkter, beräkna punkternas bildpunkter, bestämma ekvationen för en rät linje genom bildpunkterna samt pröva om bilden av en punkt på räta linjen mellan de ursprungliga punkterna kommer att ligga på räta linjen mellan bildpunkterna.

Den angivna avbildningens egenskap att överföra räta linjer i bilder av räta linjer är viktig för tillämpningen på Kleins modell. Men det finns en annan viktig egenskap som är grundläggande för tillämpningen på Kleins modell. Det visar sig nämligen, att det är möjligt att bestämma konstanterna på sådant vis att randcirkeln till det h. planet överförs i sig själv. Man kallar en avbildning med denna egenskap för en *automorf kollineation*.

En spegling av det e. planet och därmed av randcirkeln i en e. rät linje genom origo är ett exempel på en automorf kollineation. Men man kan även bestämma automorfa kollineationer, där det e. avståndet mellan bildpunkterna är ett annat än det e. avståndet mellan de ursprungliga punkterna.

Speciellt kan man bestämma sådana automorfa kollineationer som överför en given h. rät linje (e. en korda i randcirkeln) i en annan h. rät linje. En given punkt på den ena h. räta linjen kan överföras i en given punkt på den andra. Slutligen kan man fastlägga avbildningen på sådant sätt att den del av det h. planet (randcirkeln) som ligger på bestämd sida om den ena h. räta linjen överförs till en bestämd sida av den andra h. räta linjen.

Man kan således bestämma att räta linjen UV överförs i räta linjen $U'V'$ på sådant sätt att punkten A överförs i punkten A'; vidare kan det mindre cirkelsegment som UV avskär av det h. planet överföras i endera av de två cirkelsegmenten på ömse sidor om $U'V'$.

Det enklaste sättet att fastlägga en sådan avbildning är att välja ut fyra punkter som inte ligger i rät linje samt föreskriva

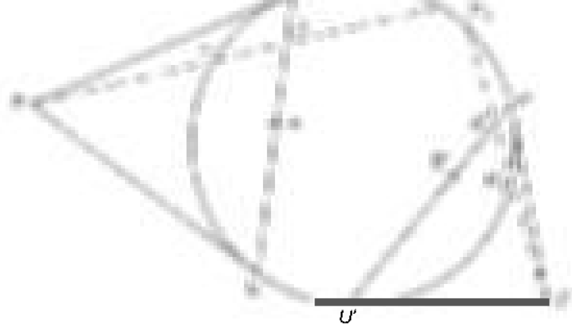


Fig. 65

vilka bildpunkter de skall ha. Man väljer lämpligen ut följande fyra punkter (se fig. 65):

den h. räta linjens (kordans) ändpunkter U och V,

skärningspunkten S mellan tangenterna till randcirkeln i U och V (kordans pol),

skärningspunkten P mellan räta linjen SA och randcirkeln.

Genom att man väljer P i stället för A får man fastlagt hur cirkelsegmenten på ömse sidor av de h. räta linjerna skall avbildas på varandra.

Den automorfa kollineationen är således bestämd av följande avbildningsföreskrifter:

$$U—U'$$
$$V-V'$$
$$S-S'$$
$$P-P_1'$$

En vanlig euklidisk cirkel är bestämd om man känner tre punkter på cirkelns periferi. I föreliggande fall är randcirkeln bestämd genom de tre punkterna U, V och P. De tre bildpunkterna ligger också på randcirkeln enligt förutsättningen. Genom insättning i avbildningsformeln kan man visa att varje punkt på randcirkeln avbildas på en annan punkt på samma cirkel.

Vidare kommer punkterna i det inre av cirkeln att avbildas på punkter i det inre.

Det är lätt att se att en automorf kollineation är omvändbart entydig. Till en given avbildning, exempelvis den som bestäms av punkterna ovan, kan man således bestämma en *invers* avbildning. Denna avbildar U' på U, V' på V, S' på S och P_1' på P. I formlerna (1) svarar denna mot att punkten (x_1, y_1) avbildas på punkten (x, y). För att få motsvarande ekvationer får man i (1) lösa ut x och y och uttrycka dem med hjälp av x_1 och y_1. Man får då två nya ekvationer av samma utseende som (1). Skillnaden mot (1) blir bara att konstanterna $a_1 - c_3$ får andra värden.

Man kan också göra flera avbildningar efter varandra. Har man en avbildning $U-U'$, $V-V'$, $S-S'$, $P-P'$ och en annan avbildning $U'-U''$, $V'-V''$, $S'-S''$, $P'-P''$, så kan man tänka sig dem sammansatta till en enda avbildning, som alltså direkt överför punkterna U, V, S och P i U'', V'', S'' och P''.

För motsvarande ekvationer av formen (1) innebär detta att mot den första avbildningen svarar ett par formler som avbildar punkten (x, y) i (x_1, y_1). Har man en ny avbildning svarar denna mot ett formelpar med andra värden på koefficienterna $a_1 - c_3$. Dessa formler avbildar då punkten (x_1, y_1) på en ny punkt (x_2, y_2).

Genom räkning kan man då härleda formlerna för en avbildning som direkt överför punkten (x, y) i punkten (x_2, y_2). Resultatet blir ett nytt formelpar av samma utseende som (1). Om man exempelvis sammansätter en avbildning med dess inversa avbildning, skall resultatet bli en identitet. Man får i detta speciella fall helt enkelt $x_2 = x$, $y_2 = y$, vilket ju är ett par formler av samma typ som (1).

Vid bevis av satser för den hyperboliska geometrin med hjälp av Kleins modell använder man sig ofta av *det speciella lägets princip*. Man utgår från en godtycklig geometrisk figur. Genom en automorf kollineation överför man denna i en figur som exempelvis ligger symmetriskt i förhållande till randcirkeln eller som har ett hörn i origo. Sedan bevisar man satsen för figuren i detta speciella läge. Med hjälp av den inversa automorfa kollineationen kan man sedan göra en avbildning tillbaka till den ursprungliga figuren. Man kan, som strax skall visas, använda denna metod för att visa att en godtycklig vinkel är kongruent med sig själv.

Kongruenta sträckor

Man kan nu visa att kongruenta sträckor avbildas på varandra. Antag att sträckan AB är given och att man vill avbilda den på en med AB kongruent sträcka $A'B'$, som ligger utmed räta linjen $U'V'$.

För att lösa uppgiften bestämmer man en avbildning som avbildar A på A' och den h. räta linjen UV på $U'V'$. Det sistnämnda kan göras på två sätt. Om U avbildas på U', kommer den med AB kongruenta sträckan att avsättas från A' på samma sida som U'. Om i stället U avbildas på V', kommer den kongruenta sträckan att avbildas på andra sidan om A'. S avbildas i båda fallen på S'. Däremot kan man välja endera av de båda avbildningar som överför P i P_1' resp. i P_2. För att AB och $A'B'$ skall vara h. lika, dvs. kongruenta, bestämmer man B' på sådant sätt att de båda sträckorna svarar mot dubbelförhållanden som innebär h. kongruens.

Därmed är klart att axiom III, 1 är uppfyllt för automorfa kollineationer.

Axiom III, 2 innebär att två sträckor, som är kongruenta med en och samma sträcka, sinsemellan är kongruenta. Detta följer av att alla tre svarar mot samma dubbelförhållanden.

Axiom III, 3 slutligen föreskriver att om man för två par av sträckor på räta linjer har $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, så gäller också $AC = A'C'$. Detta följer av att sträckorna AC och $A'C'$ enligt vad som tidigare sagts enligt lagarna för dubbelförhållandet måste vara h. kongruenta och således kan överföras i varandra genom en automorf kollineation.

Kongruenta vinklar

Man definierar nu två vinklar som h. kongruenta när de kan överföras i varandra genom en automorf kollineation.

Antag vinkeln UOV given jämte punkten O' och halvstrålen

$O'U'$. Uppgiften är att enligt axiom III, 4 bestämma en vinkel $U'O'V'$ på en given sida om $O'U'$, h. kongruent med vinkeln UOV.

Enligt det föregående finns det två kollineationer, som överför O i O' och U i U'. Förlängs OU får man en h. rät linje som delar randcirkeln i två delar. De båda kollineationerna överför den h. halvlinjen OV till var sin sida av den h. räta linjen genom O' och U'. Om man föreskriver på vilken sida om $O'V'$ som vinkeln skall avsättas, är således avbildningen entydigt bestämd.

Det finns därför en och endast en kollineation som avsätter en med VOU kongruent vinkel med spetsen i O', ena vinkelbenet utmed $O'U'$ och det andra vinkelbenet på given sida om $O'U'$.

Man kan lätt visa att en vinkel är kongruent med sig själv, exempelvis att vinkeln UOV är kongruent med vinkeln UOV. Detta följer direkt av att avbildningen av det h. planet på sig självt är en automorf kollineation. Den svarar mot ekvationerna $x_1 = x$, $y_1 = y$, som ju är av formen (1).

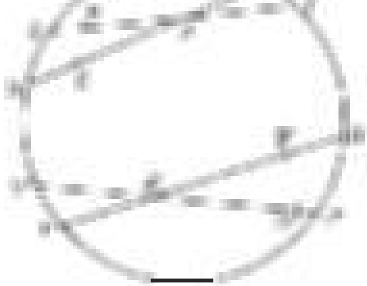
Att vinkelkongruens är en symmetrisk egenskap följer av att det till den automorfa kollineation, som överför en vinkel i en annan, svarar en invers kollineation, som överför den sistnämnda vinkeln i den ursprungliga.

Axiom III, 5

Antag att sträckorna AB och $A'B'$ i fig. 66 är h. kongruenta, likaså sträckorna AC och $A'C'$.

Vidare skall vinklarna BAC och $B'A'C'$ vara h. kongruenta. Detta innebär att det finns en automorf kollineation som överför S i S', A i A' och U i U'. Eftersom dubbelförhållandena skall vara lika måste denna avbildning överföra B i B' och C i C'.

De h. räta linjerna genom BC och CA avbildas således på de h. räta linjerna genom $B'C'$ och $C'A'$. Då vinklar är oförändrade vid avbildningen är således vinklarna C och C' lika. Detsamma gäller givetvis då också vinklarna vid B resp. B'. Därmed är visat att axiom III, 5 är uppfyllt i modellen.



Nu gäller fullständighetsaxiomet V, 2 för det e. planet och därmed också för Kleins modell av det h. planet.

Vi har alltså visat att *samtliga axiom i den hyperboliska geometrin gäller i Kleins modell.* Modellen består av element ur den e. geometrin som vi givit en annan tolkning än den vanliga. *Om den euklidiska geometrin är motsägelsefri, så måste också den hyperboliska geometrin vara motsägelsefri.*

Det euklidiska parallellaxiomet följer inte ur axiomen i grupperna I—III, V. Ty i modellen är dessa axiom uppfyllda men däremot ej det euklidiska parallellaxiomet. Givetvis kan inte heller det hyperboliska parallellaxiomet följa ur dessa axiom.

Därmed är klart att den euklidiska och den hyperboliska geometrin är två likaberättigade logiska system. Om det ena av dem är motsägelsefritt, så måste också det andra vara det. Detta är ett väsentligt resultat, som ger det definitiva svaret på den fråga som ställts av matematiker under många århundraden.

23. Hyperbolisk geometri i Kleins modell

Med hjälp av Kleins modell kan man i vissa fall få en god illustration till satser och förhållanden i den hyperboliska geometrin.

I den historiska översikten över parallellaxiomets historia framhölls att man under århundradens forskningar upptäckte

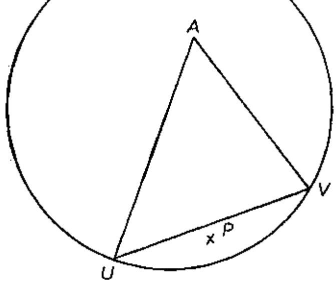


Fig. 67

att parallellaxiomet kunde ersättas av vissa andra utsagor. Om dessa inte gäller, gäller inte heller det euklidiska parallellaxiomet. Det kan vara av intresse att studera några av dem med hjälp av Kleins modell.

I den euklidiska geometrin gäller att om den ena av två räta linjer, som inte råkas, skärs av en tredje, så måste den andra räta linjen också skäras. I Kleins modell är det lätt att se att två randparallella eller icke skärande räta linjer icke har denna egenskap. Man kan mycket väl bestämma en h. rät linje som skär den ena men inte den andra.

J. F. Lorenz uttalade 1791 för den euklidiska geometrin att om en punkt ligger i det inre av en vinkel, så kan man alltid bestämma en rät linje som skär båda vinkelbenen. Detta är inte alltid möjligt i den h. geometrin, vilket också är lätt att visa i Kleins modell (se fig. 67). Genom P kan man tydligen inte dra någon rät linje som skär både AU och AV.

Man kan visa

Sats 35. *Normalerna till en h. rät linje i Kleins modell utgörs av e. räta linjer genom den h. räta linjens pol.*

Bevis. En normal skär en rät linje under räta vinklar. En rät vinkel har tidigare definierats som en vinkel som är kongruent med sin sidovinkel.

Antag nu att en h. rät linje UV är given (se fig. 68). Drag en e. rät linje från UV:s pol S till en godtycklig punkt A på

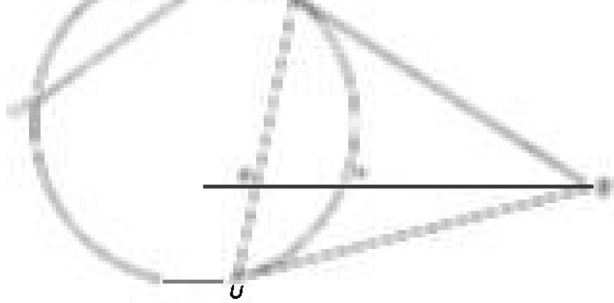


Fig. 68

den h. räta linjen. Vi skall visa att SA är en h. normal till UV.

Detta följer av att man kan utföra en automorf kollineation, som avbildar S på S, P på P, U på V och V på U. Resultatet blir en "spegling" i SA, som överför vinklarna vid A i varandra. Dessa måste då vara h. kongruenta, dvs. h. räta vinklar.

Man kan också visa att en godtycklig normal genom A mot UV måste gå genom S. Ty annars skulle genom A finnas två normaler, vilket enligt en tidigare sats är omöjligt. Därmed är visat att det i satsen givna villkoret är nödvändigt och tillräckligt.

Av sats 35 följer

Sats 36. *Normalerna till en h. rät linje är sinsemellan icke skärande h. räta linjer.*

Bevis. Om normalerna förlängs, skär motsvarande e. linjer varandra i den h. räta linjens pol, som ligger utanför randcirkeln. De kan alltså varken skära varandra på randcirkeln (= vara randparallella) eller i cirkelns inre (= det h. planet).

Av sats 35 följer också

Sats 37. *Till två icke skärande räta linjer finns det en och endast en gemensam normal.*

Bevis. Drag den e. räta linjen mellan polerna till de h. räta linjerna UV och $U'V'$. Denna är enligt sats 35 normal till var och en av de h. räta linjerna.

Med utgångspunkt från en h. sträcka kan man lätt konstruera motsvarande h. vinkel. Drag en godtycklig h. rät linje UV, avsätt den givna sträckan AB utmed en h. normal till den h. räta linjen från en punkt A och sammanbind sträckans ändpunkter med U och V. Vinklarna på ömse sidor om B mellan den h. normalen och BU resp. BV är parallellvinklar och därmed h. kongruenta. Vinklarna bestäms tydligen av sträckan AB:s längd.

Modellernas för- och nackdelar

Fördelen med Kleins modell är att h. räta linjer motsvarar sträckor av bestämd längd på e. räta linjer, nämligen e. kordor i en e. cirkel. Därför kan förhållanden i den h. geometrin, som rör räta linjer, ges en god illustration i Kleins modell. Däremot får man ingen överskådlig bild av h. vinklars inbördes storleksförhållanden.

I Poincarés cirkelmodell, som närmast skall behandlas, är förhållandena de motsatta. H. vinklar motsvaras av e. lika stora vinklar mellan e. cirkelbågar. De e. cirkelbågarna tolkas som h. räta linjer. Även denna modell har sina nackdelar. En fördel är att den kan användas som modell av vissa förhållanden inom högre matematisk analys. Detta måste dock förbigås i föreliggande framställning.

Det råder ett geometriskt samband mellan Kleins och Poincarés modeller av den hyperboliska geometrin. Betrakta ett klot med viss given radie. Kalla klotets vågräta "ekvator" l och antag att klotet ligger på ett vågrätt plan, bottenplanet.

Genom lodräta linjer kan ekvatorn projicieras på bottenplanet. Man får då där en cirkel m, som kan väljas som randcirkel i Kleins modell. Genom att dra räta linjer från nordpolen genom ekvatorn kan denna projicieras på en annan cirkel k i bottenplanet. Denna väljer man som randcirkel i Poincarés cirkelmodell.

Låt nu g vara en h. rät linje i Kleins modell. Ett plan genom

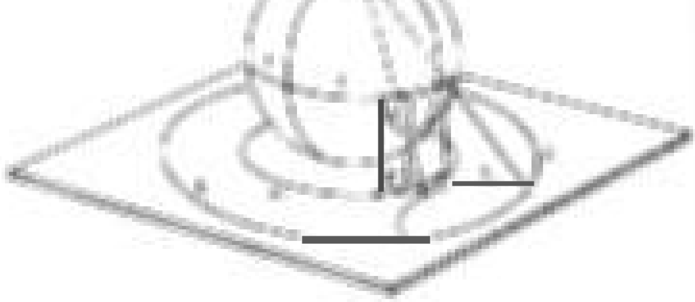


Fig. 69

g vinkelrätt mot bottenplanet skär klotet utmed en cirkelbåge *v*.

Drag nu räta linjer från nordpolen genom cirkelbågen *v*. Den projicieras då på en cirkelbåge *n* i bottenplanet. Denna cirkelbåge, som skär *k* under räta vinklar, utgör en h. rät linje i Poincarés modell.

Det skisserade sambandet mellan de båda modellerna kommer dock inte att utnyttjas i nästa avsnitt vid presentationen av Poincarés modell.

24. Poincarés cirkelmodell

År 1882 utkom i Stockholm första bandet av *Acta matematica.* Den är numera en av de stora tidskrifterna inom matematiken, i vilken under årens lopp många betydelsefulla resultat publicerats. Grundare och under de första åren även redaktör var professorn vid dåvarande Stockholms högskola, *Gösta Mittag-Leffler.*

Första bandet av *Acta matematica* innehåller en avhandling av den franske forskaren Henri Poincaré, där han presenterar en annan modell av den hyperboliska geometrin än Kleins. Den brukar kallas *Poincarés cirkelmodell.*

I likhet med Klein lägger Poincaré till grund för sin modell ett plan, i vilket den euklidiska geometrin förutsätts gälla. I detta betraktar han en cirkel. Om ett rätvinkligt koordinatsystem läggs in i planet, väljs detta på så sätt att ifrågavarande cirkel kommer att utgöra en enhetscirkel.

Den h. geometrins grundbegrepp tolkas som följer.

det h. planet = det inre av enhetscirkeln,

h. punkt = e. punkt i det inre av enhetscirkeln,

h. rät linje = den inom enhetscirkeln liggande delen av en e. cirkelbåge som skär enhetscirkeln under räta vinklar (ortogonalcirkelbåge). En diameter i enhetscirkeln betraktas som en ortogonalcirkelbåge, vars medelpunkt ligger på oändligt avstånd.

I sammanhanget kan nämnas att man kan avbilda det inre av denna cirkel på ett halvplan, begränsat av en e. rät linje l. Man får då *Poincarés halvplanemodell* för den hyperboliska geometrin. En h. punkt svarar mot en e. punkt i halvplanet. De h. räta linjerna utgörs dels av e. räta linjer vinkelräta mot l, dels av e. halvcirkelbågar, vilkas medelpunkt ligger på l.

En genomgång av Hilberts axiomsystem med hjälp av Poincarés halvplanemodell förekommer i en artikel av G. af Hällström i *Nordisk matematisk tidskrift* 1961. En utförligare behandling av modellen ges i H. Meschkowski, *Nichteuklidische Geometrie* (1954).

I det här avsnittet behandlas bara Poincarés cirkelmodell. Uppgiften är närmast att undersöka de olika axiomens giltighet.

Det är lätt att visa att incidens- och anordningsaxiomen gäller.

Införandet av begreppet h. vinkel i Poincarés modell sker helt enkelt genom att man definierar den h. vinkeln mellan två h. räta linjer som den e. vinkeln mellan motsvarande e. cirkelbågar. Axiom III, 4, som handlar om kongruenta ("lika") vinklar, är då uppfyllt eftersom det gäller för e. vinklar.

H. kongruenta sträckor definieras med hjälp av dubbelförhållandet, analogt med förhållandena i Kleins modell. Man får även i Poincarés modell att av två h. lika sträckor är den e. kortare som ligger närmare den h. oändligheten. Denna utgörs

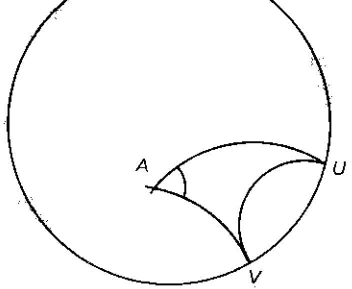


Fig. 70

av cirkelns omkrets. Axiomen III, 1—3 samt Arkimedes axiom V, 1 följer som vid Kleins modell.

Nu återstår dels parallellaxiomet, dels axiom III, 5, vilket senare handlar om kongruenta trianglar.

Man visar lätt analogt med förhållandena i Kleins modell att *det hyperboliska parallellaxiomet* gäller också hos Poincaré. Låt en h. rät linje *UV* vara given jämte en punkt *A* utanför den h. räta linjen (se fig. 70). Då kommer de randparallella h. halvlinjerna att motsvaras av e. cirkelbågar från *A* till *U* och till *V*.

Det är lätt att inse att varje h. halvlinje från *A* som ligger i vinkelfältet mellan halvlinjerna *AU* och *AV* måste skära den h. räta linjen *UV*.

Med hjälp av Poincarés cirkelmodell kan man visa att man kan konstruera en h. triangel, vars alla vinklar är noll (fig. 71). En sådan nollvinklig triangel måste ha sina hörn på randen av enhetscirkeln och begränsas av ortogonalcirkelbågar, som tangerar varandra i triangelns hörn. Dessa kommer att ligga i hörnen av en liksidig e. triangel, inskriven i cirkeln.

Sidorna i en nollvinklig triangel utgörs alltså av parvis randparallella h. räta linjer och triangelns hörn av de randparallella h. räta linjernas på oändligt avstånd belägna skärningspunkter. En sådan triangel kallas *urartad* eller *asymptotisk*.

För att kunna visa att axiom III: 5 gäller behöver man en avbildningsfunktion, precis som i Kleins modell. Man företar

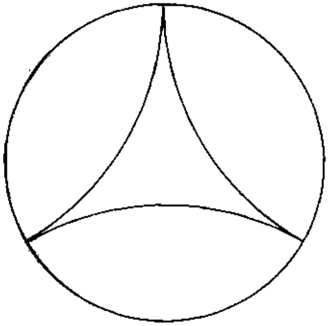


Fig. 71

en s.k. konform avbildning. Detaljerna måste här förbigås. Resultatet blir analogt med det som gällde i Kleins modell. Eftersom fullständighetsaxiomet V, 2 givetvis är uppfyllt, gäller även i denna modell alla den hyperboliska geometrins axiom.

Under förutsättning att den avbildningsfunktion man använder överför h. kongruenta trianglar i varandra kan man med hjälp av det speciella lägets princip visa

Sats 37. *Vinkelsumman i en h. triangel är mindre än 180°.*

Bevis. Man överför (fig. 72) den givna h. triangeln ABC i en med denna kongruent h. triangel $OB'C'$, varvid A avbildas på enhetscirkelns medelpunkt O. Då kommer triangelsidorna OB' och OC' att ligga utefter e. räta linjer, medan sidan $B'C'$

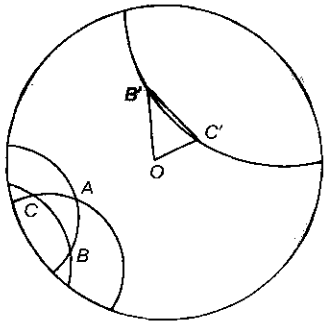


Fig. 72

utgör en del av en från O sett konvex cirkelbåge. Eftersom vinkelsumman i den e. triangeln $OB'C'$ är 180°, måste vinkelsumman i den h. triangeln $OB'C'$ vara $<180°$, v. s. b.

25. Dubbelförhållande och sträckors kongruens

För intresserade skall slutligen ges en detaljerad framställning av begreppet dubbelförhållande och visas hur det kan användas för att definiera begreppet hyperboliskt kongruenta sträckor i Kleins eller Poincarés modell. Man behöver inte kunna någon högre matematik för att begripa detta avsnitt. Utredningarna är dock en smula långrandiga; därav placeringen i ett särskilt avsnitt.

Om ej annat anges, betraktas i det följande begrepp ur den e. geometrin. Närmast definierar man begreppet *riktad sträcka.*

Antag att A och B är två punkter på en rät linje. Med AB betecknar man en sträcka med riktning från A till B. Låt AB ha längden a. Då definierar man BA som en sträcka med riktning från B till A och med längden $-a$. Om A och B ligger på en x-axel och har koordinaterna x_1 resp. x_2, så gäller således

$$AB = x_2 - x_1, \; BA = x_1 - x_2.$$

Antag nu att punkterna A och B ligger i ett rätvinkligt koordinatsystem. Om de har koordinaterna (x_1, y_1) resp. (x_2, y_2), får man avståndets talvärde genom Pythagoras sats enligt formeln

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

För att avgöra om sträckan skall ha plus- eller minustecken får man förutsätta att endera av AB och BA har längden $+a$ och den andra $-a$.

Låt nu A, B, U och V vara fyra punkter på en rät linje, tagna i någon viss ordning. Punkternas dubbelförhållande definieras då av uttrycket

$$(ABUV) = \frac{AU}{BU} \cdot \frac{BV}{AV}.$$

Om de fyra punkterna ligger på en x-axel och har koordinaterna resp. x_1, x_2, x_3, x_4, så kan dubbelförhållandet skrivas

$$(ABUV)=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\cdot\frac{x_4-x_2}{x_4-x_1}=d,$$

där d är ett tal som kan vara positivt eller negativt.

Dubbelförhållandet är oberoende av valet av koordinatsystem. Ty ändrar man skalan utmed x-axeln, kommer varje koordinat att multipliceras med en konstant k. Denna kan man sedan förkorta bort ur formeln för dubbelförhållandet. Om punkterna projicieras på en annan rät linje, kommer likaledes varje koordinat att multipliceras med en konstant, varför dubbelförhållandet även nu blir oförändrat.

Man ser också lätt att det bara är när några av punkterna sammanfaller som dubbelförhållandet antar något av värdena

$$0, 1, +\infty, -\infty.$$

Genom att ändra ordningsföljden mellan punkterna i formeln för dubbelförhållandet inser man att detta endast kan anta något av följande sex värden.

$$d,\ \frac{1}{d},\ 1-d,\ \frac{1}{1-d},\ \frac{-d}{1-d},\ \frac{1-d}{-d}.$$

Om $(ABUV)=d$ och man kastar om ordningsföljden i dubbelförhållandet, så är det lätt att visa följande formler.

$$(ABUV)=(BAVU)=(UVAB)=(VUBA)=d,$$

$$(BAUV)=(ABVU)=(VUAB)=(UVBA)=\frac{1}{d}.$$

Betrakta fyra räta linjer som skär varandra i en punkt. Om de fyra räta linjerna skärs av en femte rät linje, så följer av att dubbelförhållandet är oförändrat vid projektion att dubbelförhållandet mellan skärningspunkterna är detsamma för alla skärande räta linjer. Det konstanta dubbelförhållandet kallas för *de räta linjernas dubbelförhållande*.

Kongruenta sträckor i Kleins modell

Låt nu A och B vara två h. punkter i Kleins modell. De bestämmer en h. rät linje enligt de båda första incidensaxiomen. Denna h. räta linje är en e. korda. Denna skär randcirkeln i två punkter som man betecknar med U och V.

I Kleins modell definieras nu *sträckan AB:s dubbelförhållande* som det tal man får, om man först tar sträckans ändpunkter A och B, därefter den e. kordans ändpunkter U och V. Dubbelförhållandet antar då något av värdena

$$(ABUV)=(BAVU)=d, \ (ABVU)=(BAUV)=\frac{1}{d}.$$

Sträckan BA får tydligen också dubbelförhållandena d eller

$$\frac{1}{d}$$

Man kan nu definiera h. kongruenta sträckor på följande sätt.

Definition. *Två h. sträckor är h. kongruenta om de har dubbelförhållandena d resp. d' och om man har*

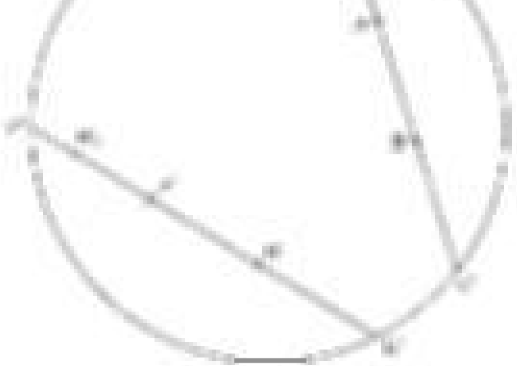
$$d=d' \ \text{eller} \ d=\frac{1}{d'}.$$

Av formeln för dubbelförhållandet inser man att en h. sträckas dubbelförhållande alltid är ett positivt tal. Detta är större än 1, om riktningarna AB och UV är motsatta, annars mindre än 1.

Antag att en h. sträckas dubbelförhållande är >1. Om B ligger nära A, så är dubbelförhållandets värde nära 1. Om nu B får röra sig i riktning mot U, ökar d kontinuerligt från ett värde nära 1 till allt större värden.

Vi definierar nu en h. sträcka AB på den h. räta linjen UV, där U och V är skärningspunkterna med enhetscirkeln som *positivt riktad* eller *positiv*, om B ligger mellan A och U. Riktningarna AB och UV är då *motsatta*, och man har

$$(ABUV)>1.$$



Analogt definieras AB som *negativt riktad* eller *negativ*, om B ligger mellan A och V. Riktningarna AB och UV blir då *lika* riktade, och man får

$$(ABUV) < 1.$$

Man kan nu visa att de första kongruensaxiomen gäller i modellen.

III, 1 är uppfyllt

Låt den h. sträckan AB på den h. räta linjen UV vara given jämte dess dubbelförhållande

$$(ABUV) = d.$$

Låt vidare A' vara en punkt på den h. räta linjen $U'V'$ (fig. 73). Då följer av det föregående att det på $U'V'$ finns en punkt B'_1 sådan att

$$(A'B'_1U'V') = d$$

och en punkt B'_2 sådan att

$$(A'B'_2U'V') = \frac{1}{d}.$$

Enligt det föregående är det klart, att B'_1 och B'_2 ligger på olika sidor om A'. Man kan alltså på given sida om A' bestämma en punkt B' sådan att $A'B'$ och AB är kongruenta, dvs. III, 1 är uppfyllt.

III, 2 är uppfyllt

III, 2 säger att om $A'B'$ är kongruent med AB och om även $A''B''$ är kongruent med AB, så är $A'B'$ kongruent med $A''B''$. Det är klart av det föregående att axiomet är uppfyllt.

III, 3 är uppfyllt

Axiomet innebär att om kongruenta sträckor adderas till kongruenta sträckor, så blir de resulterande sträckorna kongruenta.

Låt AB och BC vara två lika riktade h. sträckor på den h. räta linjen UV. Antag vidare

$$(ABUV)=d_1,\ (BCUV)=d_2,\ (ACUV)=d_3.$$

Eftersom man vet att dubbelförhållandena under de förutsättningar som gjorts är positiva, kan man skriva dem som förhållanden mellan sträckor med positiva mätetal. Då fås

$$(ABUV)=\frac{AU}{BU}\cdot\frac{BV}{AV},\quad (BCUV)=\frac{BU}{CU}\cdot\frac{CV}{BV},$$

$$(ACUV)=\frac{AU}{CU}\cdot\frac{CV}{AV}=\frac{AU}{BU}\cdot\frac{BV}{AV}\cdot\frac{BU}{CU}\cdot\frac{CV}{BV}=(ABUV)(BCUV).$$

Vid addition av lika riktade h. sträckor i modellen får man alltså den nya sträckans dubbelförhållande genom att multiplicera delsträckornas dubbelförhållanden med varandra.

$$d_1\cdot d_2=d_3.$$

Har man enligt III, 3 två par kongruenta sträckor $AB=A'B'$ och $BC=B'C'$, så kan man rikta dem alla på samma sätt och får då

$$(A'B'U'V')=(ABUV)=d_1,\ (B'C'U'V')=(BCUV)=d_2.$$

De båda sträckorna AC och $A'C'$ har då samma dubbelförhållande d_1d_2 och är alltså kongruenta enligt definitionen.

Närmast skall visas att Arkimedes axiom gäller.

V, 1 är uppfyllt

Låt den *positivt* riktade h. sträckan AB vara given. Om A_1 är en punkt på AB, så gäller enligt det föregående

$$(ABUV) > (AA_1UV) > 1.$$

Välj nu en följd av h. kongruenta sträckor AA_1, A_1A_2, ... på AB i enlighet med förutsättningen i Arkimedes axiom. Vi kan välja dem så att alla sträckor blir positiva. Då har man

$$(AA_1UV) = (A_1A_2UV) = (A_2A_3UV) = \ldots = (A_{n-1}A_nUV) = d.$$

Genom addition av dessa sträckor fås enligt det föregående

$$(AA_nUV) = d^n.$$

Om $(ABUV) = d_1$, så följer av $d > 1$, att man för tillräckligt stort n måste ha

$$d^n > d_1.$$

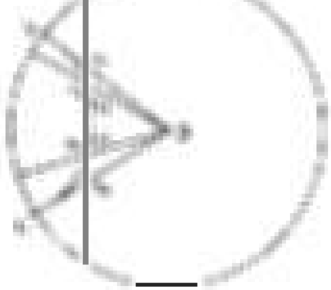
Då måste punkten B ligga på sträckan AA_n, dvs. axiom V, 1 är uppfyllt.

Kongruenta sträckor i Poincarés modell

I Poincarés cirkelmodell får man skilja på två fall, eftersom en h. rät linje antingen kan vara en e. diameter i randcirkeln eller en e. cirkelbåge, som skär randcirkeln under räta vinklar.

Om den h. räta linjen är en e. diameter till randcirkeln, bestäms dubbelförhållandet för en sträcka AB analogt med en sträcka i Kleins modell. Man tar således först sträckans ändpunkter A och B, därefter diameterns ändpunkter U och V. Då gäller motsvarande satser och definitioner.

Antag nu att den h. räta linjen genom A och B är en e. cirkelbåge, som skär randcirkeln i U och V (se fig. 74). Då sammanbinder man punkterna A, B, U, V med randcirkelns



medelpunkt O. Sträckan AB:s dubbelförhållande definieras nu som dubbelförhållandet för de e. räta linjerna OA, OB, OU och UV, bestämt på så sätt att man först tar de e. räta linjerna till sträckans ändpunkter A och B, därefter de e. räta linjerna till den h. räta linjens (den e. cirkelbågens) skärningspunkter med randcirkeln, U och V.

Också i det senare fallet kan dubbelförhållandet för en sträcka anta två värden. Man kan därför definiera begreppet kongruenta sträckor genom att införa satser och definitioner svarande mot dem som används i Kleins modell.

För att genomföra *beräkningen* av dubbelförhållandet kan man göra på följande sätt. Låt som förut AB vara en h. sträcka och U, V motsvarande h. räta linjes skärningspunkter med randcirkeln. Man lägger en x-axel utmed den e. räta linjen genom A och B och betecknar koordinaterna för A och B med resp. x_1 och x_2 samt koordinaterna för skärningspunkterna mellan de e. räta linjerna OU och OV och den e. räta linjen genom A och B med x_3 och x_4. Den h. sträckan AB:s dubbelförhållande kan då skrivas

$$(ABUV) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1} = d.$$

VII. Geometrin och verkligheten

26. Vilken geometri gäller i världsrymden?

En tysk matematikprofessor karakteriserade vid ett besök i Uppsala sin vetenskap som en vacker lek ("ein schönes Spiel"). Och från sunda förnuftets synpunkt kanske man kan tycka att allt som skrivits om geometrin egentligen bara är en lek med ord och begrepp. En "rät linje" behöver ju i den här boken inte ha något att göra med de räta linjer som vi uppfattar i sinnevärlden. Med sina lagar, sina axiom och sin logiska uppbyggnad framstår vart och ett av de anförda geometriska systemen som ett exempel på vad Frans G. Bengtsson i något sammanhang kallar för "vetenskapens raffinerade patience". Har något annat av dem än den vanliga euklidiska geometrin något att göra med vår vanliga verklighet?

Ja, så resonerar det råa människoförståndet, för att använda Schopenhauers uttryck. Men det kan också tänkas att förhållandena är mera komplicerade än så. Jorden är ju inte platt, fastän den ter sig sådan för allehanda naturfolk. Ju flera data man fått fram, desto tydligare har det under mänsklighetens historia framgått att jordens form i själva verket är en annan.

På samma sätt kan man resonera ifråga om den geometri som gäller i världsrymden. Att det förefaller att vara den euklidiska kan ju bero på att man inte tar hänsyn till alla fakta i sammanhanget.

Hur skall man då kunna avgöra vilken geometri som gäller i världsalltet?

Först måste man tydligen göra klart för sig, vad de abstrakta begreppen "punkt" och "rät linje" skall motsvara.

Euklides definierar ju en linje som en längd utan bredd. Om man t.ex. målar en svart kvadrat på en vit yta, kommer kvadratens sidor att uppfylla Euklides definition. Men hur vet man att en dylik begränsningslinje verkligen är en rät linje? Man kan naturligtvis kontrollera förhållandet med hjälp av en linjal. Då uppstår frågan, dels om linjalen verkligen är en rät linje, dels om eventuella avvikelser från den rätlinjiga linjalen ligger inom ramen för de mätfel som man alltid måste räkna med.

För experiment i större skala måste man använda andra bilder av en rät linje, exempelvis en ljusstråles väg. Om en ljusstråle fortplantar sig rätlinjigt, borde det finnas möjligheter att undersöka geometriska figurer vilkas sidor utgörs av ljusstrålar.

Den icke-euklidiska geometrins upptäckare försökte också att verifiera sina teorier genom experiment av detta slag.

Gauss föreslog således vid ett tillfälle (*Werke VIII*, s. 267) att man skulle mäta vinkelsumman i en tillräckligt stor triangel. Om vinkelsumman blev exakt 180°, gällde den euklidiska geometrin. Blev den mindre, gällde däremot den "icke-euklidiska" eller hyperboliska geometrin. Blev den däremot större, måste den elliptiska geometrin gälla. Att man vid mätning av vinkelsumman i trianglar som man ritade upp alltid fick vinkelsumman 180° kunde bero på mätfel. Gjorde man ett försök i tillräckligt stor skala, borde det vara möjligt att konstatera en eventuell avvikelse i den ena eller andra riktningen.

På 1830-talet fick Gauss ett tillfälle att pröva riktigheten av sitt resonemang. Man startade nämligen en kartläggning av hans hemland Braunschweig. Gauss var intresserad av kartografi och deltog i arbetet.

Gauss idé var att undersöka vinkelsumman i en triangel, vars spetsar utgjordes av tre bergstoppar i Harz i mellersta Tyskland. En av dem var Brocken, den tyska motsvarigheten till vårt svenska Blåkulla, skildrat i Goethes Faust som häxornas mötesplats i valborgsmässonatten. Tillsammans med två andra toppar, Inselsberg och Hohenhagen, utgjorde de en triangel med sidorna 107, 85 och 69 kilometer.

Vinkelsumman i denna triangel uppmättes till 179°59′58″, således mindre än 180°. Avvikelsen låg tyvärr inom mätfelens gränser. Någon märkbar avvikelse från den euklidiska geometrins 180° kunde således inte konstateras.

Lobatjevskij, den hyperboliska geometrins egentlige grundläggare, gjorde ett liknande experiment. Han försökte beräkna vinkelsumman i en triangel, vars ena hörn var placerat i himlens ljusstarkaste stjärna, Sirius. Avståndet dit är ungefär 9 ljusår. Ett ljusår är ju den sträcka ljuset tillryggalägger under 1 år med sin hastighet av 300 000 kilometer i sekunden. De båda andra hörnen låg i ändpunkterna av jordbanan. På så vis fick Lobatjevskij en likbent triangel. Inte heller där kunde någon avvikelse från vinkelsumman 180° konstateras som kunde avgöra frågan om geometrin och verkligheten.

Är det då verkligen säkert att den använda metoden kan ge ett svar på frågan om den geometri som gäller i världsrymden? Först måste man då konstatera det något paradoxala förhållandet att om det är den euklidiska geometrin som gäller i världsrymden, så kan man aldrig bevisa den saken genom triangelmätningar. Om den elliptiska geometrin gällde, borde man vid mätning av allt större trianglar med allt noggrannare metoder så småningom kunna objektivt fastlägga att vinkelsumman var större än 180°. På liknande sätt borde man i det hyperboliska fallet kunna konstatera en vinkelsumma mindre än 180°.

Om däremot den euklidiska geometrin vore den riktiga, skulle man aldrig komma till en objektivt mätbar avvikelse åt ena eller andra hållet. Men detta förhållande kunde också förklaras av att man inte valt tillräckligt stora trianglar eller förfinade vinkelmätningsmetoder. Man kunde aldrig vara säker på att inte i en framtid kunna konstatera en sådan avvikelse att någon av de båda andra geometrierna bevisades gälla.

Vad skulle följden bli, om man en dag kunde visa att vinkelsumman i en tillräckligt stor triangel alltid var större än 180°? Skulle problemet vara avgjort med detta?

Tyvärr inte. Även om mätfelen inte är av den storleksordningen att avvikelsen från 180° kan förklaras genom dem, kan det finnas andra alternativa förklaringar. De fysiska företeelser som man betraktar som punkter och räta linjer i sitt geometriska system kanske inte ger en tillräckligt korrekt bild av den teoretiska geometrins abstrakta punkter och räta linjer.

Ett exempel är ljusstrålen. Både Gauss och Lobatjevskij utförde ju sina experiment under förutsättningen att ljuset fortplantar sig rätlinjigt. Moderna undersökningar har emellertid visat att ljuset böjs av, när det passerar genom en himlakropps gravitationsfält.

Betraktar man ljusstrålens väg som rätlinjig, beror således de eventuella avvikelserna från euklidiska räta linjers egenskaper på att den fysiska verkligheten är mera komplicerad än man från början förutsatte. Vill man identifiera den med modellen av ett abstrakt matematiskt system, får man således använda en mera invecklad modell än som från början föreföll nödvändigt.

Ett exempel på detta erbjuder Einsteins allmänna relativitetsteori, framlagd 1916. Einstein har där övergivit den äldre uppfattningen att världsrymden har samma struktur som den euklidiska geometrin. Han beskriver i stället förhållandena med hjälp av ett mera komplicerat matematiskt system. Men först några ord om krökningsbegreppet!

I avsnitt 21 har studerats olika tvådimensionella ytor i det tredimensionella rummet. För ytorna har definierats en viss krökning. Denna kan vara positiv eller negativ eller vara $=0$. Om endera fallet inträffar, gäller på ytan den plana elliptiska resp. hyperboliska eller euklidiska geometrin. Det kortaste avståndet mellan två punkter i ytan kallas en geodetisk linje, som alltså motsvarar det geometriska begreppet ”rät linje”.

Matematiskt kan man beskriva förhållandena genom att lägga in ett koordinatsystem i tre dimensioner. Den tvådimensionella ytans egenskaper kan då beskrivas genom lämpligt formulerade ekvationer.

Einstein betraktar i sin allmänna relativitetsteori ett system med fem koordinater. De svarar mot de tre rumsdimensionerna samt begreppen tid och massa. Ett sådant femdimensionellt ”rum” är svårt att föreställa sig i sinnevärlden. De matematiska formler som beskriver det blir generaliseringar av dem som gällde för det tredimensionella rummet.

Man talar i matematiken om ”underrum” till ett rum av viss dimension. Därmed menas ett rum med färre dimensioner. En yta i två dimensioner är med detta språkbruk ett underrum till ett vanligt tredimensionellt rum. På analogt vis blir ett tredimensionellt rum ett underrum till rum av högre dimensioner.

Einstein betraktar nu universum som ett tredimensionellt underrum till sitt tidigare nämnda femdimensionella rum. Och han går vidare. Precis som en yta i ett tredimensionellt rum kan vara krökt på olika vis antar Einstein att detta tredimensionella rum har en viss krökning. Krökningen antas inte vara konstant utan påverkas av himlakropparnas massor. Den tidigare nämnda avvikelsen hos en ljusstråle, som passerar en stjärnas gravitationsfält, förklaras av att ljuset följer en geodetisk linje.

Är då universum i sin helhet krökt, så att där gäller en annan geometri än den euklidiska? Låt oss återvända till problemet en sista gång!

Man betraktar som förut en ljusstråles väg. Ljusstrålen följer en geodetisk linje, analog med dem som förekom på de plana ytorna med olika krökning.

Antag först att rummet är positivt krökt. Då gäller den elliptiska geometrin, och förhållandena blir analoga med dem på en klotyta. En geodetisk linje kommer så småningom tillbaka till utgångspunkten. Om man observerar i en viss riktning skulle man, som den tyske fysikern *Helmholtz* på sin tid konstaterade, kunna se sitt eget bakhuvud! Allvarligt uttryckt: man skulle kunna se en bild av solen genom att observera i rakt motsatt riktning med ett tillräckligt starkt teleskop. Varje bild vi ser av något föremål i världsalltet skulle i ett rum med elliptisk krökning ha en motbild åt rakt motsatt håll.

Detta har inte kunnat konstateras. Det finns många förklaringar: att en absorption av ljus äger rum i världsrymden eller att avstånden är för stora för att vi med våra teleskop skall kunna uppfatta några motbilder.

Det finns emellertid en annan egenskap hos det krökta rummet som man försökt använda sig av. Betrakta som förut en klotyta, som således har positiv krökning. Om man står vid nordpolen och observerar i två olika riktningar, kommer motsvarande geodetiska linjer att utgöras av två longituder. Till en början avlägsnar de sig mer och mer från varandra. Vid ekvatorn uppnår de sitt största avstånd. På andra sidan ekvatorn kommer avståndet mellan dem att minskas, tills linjerna skär varandra vid sydpolen.

Antag nu att man vill räkna alla vintergator i världsrymden som ligger i vinkeln mellan två synlinjer. Man grupperar dem efter avståndet från solsystemet. Om vintergatorna är jämnt fördelade över världsrymden, kommer antalet vintergator i vinkelfältet på givet avstånd till en början att öka. Men när avståndet växer bortom ekvatorn, kommer antalet vintergator i vinkelfältet att minska.

I ett universum med negativ krökning skulle man på analogt sätt kunna iaktta proportionellt flera vintergator än väntat i ett givet vinkelfält, när avståndet från iakttagaren växer.

Den amerikanske astronomen *Edwin Hubble* försökte på 1930-talet avgöra frågan om världsalltets krökning genom mätningar av det slag som här antytts. Man har också undersökt andra astronomiska förhållanden som kan förklaras som en följd av världsalltets krökning i ena eller andra riktningen.

Inga säkra slutsatser har kunnat dras. Men det förefaller som om världsalltet skulle kunna ha positiv krökning. En mera detaljerad framställning av dessa förhållanden ligger utom ramen för denna bok, som endast velat ge en översikt av de olika geometriska systemen.

Litteraturförteckning

R. Baldus—F. Löbell: *Nichteuklidische Geometrie*. Sammlung Göschen 970. 1953.

O. Becker: *Das mathematische Denken der Antike*. 1957.

J. Bolyai: *The Science absolute of Space*. Independence of the Truth or Falsity of Euclid's Axiom XI (which can never be decided a priori). Translated by G. Halsted. 1896.

R. Bonola—H. Liebmann: *Nichteuklidische Geometrie*. 1919.

H. Coxeter: *Non-euclidean geometry*. 1957.

F. Engel: *N. J. Lobatschefskij*. 1899.

F. Engel—P. Stäckel: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*. 1895.

Die Elemente von Euklid. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften I (Buch I—III), Nr. 235. 1933.

T. Hall: *Gauss, matematikernas konung*. 1965.

D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. 1. Auflage 1899, 8. Auflage 1956.

D. Hilbert—S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*. 1932.

G. af Hällström: "Om den plana geometrins axiomsystem". *Nord. matem. tidskrift* 9 (1961), s. 145—165.

F. Klein: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, II. 1925.

—: *Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie*. 1932.

H. Liebmann: *Nichteuklidische Geometrie*. 1905.

N. J. Lobatschefskij: *Imaginäre Geometrie*. Deutsche Übersetzung mit Anmerkungen von H. Liebmann. 1904.

—: *Pangeometrie*. Übersetzt und herausgegeben von H. Liebmann. 1912.

H. Meschkowski: *Nichteuklidische Geometrie*. 1954.

R. Nevanlinna: *Rum, tid och relativitet*. 1966.

W. S. Peters: *Johann Heinrich Lamberts Konzeption einer Geometrie auf einer imaginären Kugel*. 1961.

L. Redei: *Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach Felix Klein*. 1965.
M.Riesz: *En åskådlig bild av den icke-euklidiska geometrin*. 1943.
E. Roesner: *Die Nichteuklidischen Geometrien*. 1957.
C. E. Sjöstedt: *Icke-euklidisk geometri*. 1945.
P. Stäckel: *Wolfgang und Johann Bolyai*. 1913.
B. L. van der Waerden: *Ontwakende Wetenschap*. 1950. Tysk övers. *Erwachende Wissenschaft*. 1956. Engelsk övers. *Science awakening*. 1954.

Register