OM

UNDERVISNINGEN I BRÅK

AF

K. NORDLUNDH.

(Aftryck ur Veckoblad för Folkundervisningen).

KARLSTAD,
CARL KJELLIN & C:NI 1881.

Vid all undervisning och således äfven vid den i räkning är af vigt börja med att göra lärjungarne förtrogna med de begrepp, som möta i den kunskapsgren, undervisningen gäller, samt derefter med de uttryck, som i densamma begagnas. Föremålet för undervisningen i räkning är tal eller antal, derför blir lärarens första uppgift att göra lärjungarne förtrogna med talen eller antalen.

En ganska stor svårighet möter vid detta arbete till följd deraf, att talen äro abstrakta. En del lärare förbigå inlärandet af talbegreppet och öfvergå genast till talens beteckning med siffror, hvarvid den naturliga följden blifvit, att siffrorna eller tecknen för talen för lärjungen trädt i talens ställe och räkningen med talen har man låtit bero af vissa föreskrifter d. v. s. räkningen har blott blifvit en minnesöfning om siffertalens uppställning och behandling. Att ett sådant undervisningssätt kunnat lemna *något* resultat har sin grund i det enkla och systematiska sätt, hvarpå talen äro betecknade, hvilket haft till följd, att lärjungen kunnat erhålla ett rätt svar på en fråga, utan att hafva haft kunskap om frågan, ännu mindre förstått det förfaringssätt, han följt för svarets erhållande. Orsaken till, att så många lärare ännu använda detta undervisningssätt, torde möjligen få sökas *dels* i det ringa hufvudbry, som det förorsakar så väl läraren som lärjungen, hufvudsakligen den förre, *dels* i det snabba resultat förfaringssättet skenbart lemnar.

En del lärare hafva förmildrat svårigheten, som följer af talens abstrakta natur, derigenom att de satt talen såsom bestämningar till verkliga storheter. Vid inlärandet af hela talen har detta sätt blifvit ganska allmänt. Vid inlärandet af bråktalen och deras egenskaper är det lika nödvändigt, som vid läran om de hela talen, att sätta dem såsom bestämningar till verkliga storheter och dermed fortfara en längre tid, innan man öfvergår till den allmäna bråkläran. Om läraren uppritar *på svarta taflan en rät linie*, som är t. ex. $^3/_4$ meter och delar denna i 5 lika delar, och en lärjunge ej kan förklara, att hvarje del är $^3/_{20}$ meter, så är det säkert, att lärjungen ej heller förstår, att femtedelen af $^3/_4$ är $^3/_{20}$, äfven om han kan lemna svar på denna fråga; och om läraren ställer till honom denna fråga; "huru många tolftedelsmeter innehåller denna linie"? och han ej kan besvara den, så är det äfvenledes säkert, att han ej förstår, att $^3/_4$ är lika med $^9/_{12}$, äfven om han *säger* det. Vill man således hafva en säker grund lagd till allmänna bråkläran och dess praktiska användning, är det ej tillräckligt att, såsom vanligtvis sker, sätta bråktalen som bestämningar till äplen och brödkakor etc. och efter en kort tid öfvergå till läran om bråk, då de äro betecknade med siffror.

Vid inlärandet af uttryckssätten, som användas vid räkning, hafva äfven ganska stora svårigheter visat sig, beroende derpå, att de äro hemtade från latinet och ej från vårt modersmål. Uttryken "addera", "subtrahera", "multiplicera" och "dividera" använda lärjungarne ofta utan att veta, hvad som verkligen dermed menas, i synnerhet är detta fallet med de två sistnämda. Till en början kunna de utbytas mot de svenska uttrycken "sammanlägga", "draga ifrån", "mångfaldiga" och "dela". Först sedan lärjungen fullt förstår dessa uttryck, är det tid att inviga honom i betydelsen af de motsvarande latinska, icke derför att de äro nödvändiga för läran om tal, utan derför att de så ofta användas i det borgerliga lifvet. Hvad uttrycken: "addend", "minuend", "subtrahend" o. s. v. angå, äro de öfverflödiga och kunna utan saknad förbigås. Men vill man inlära dessa uttryck, så bör detta ej ske förr, än lärjungen är så hemmastadd, att han kan förstå definitionerna till dessa uttryck. Utom ofvannämda uttryckssätt, hemtade från latinet, hafva en mängd andra för lärjungen obegripliga och oriktiga dels svenska, dels svensk-latinska uttryck under tidernas lopp insmugit sig vid räkneundervisningen, hvilka dels undanskymt sanningen, dels aflat af sig falska begrepp. Det skulle blifva för vidlyftigt att nu beröra denna lifsfråga för undervisningen, möjligen torde en annan gång tillfälle yppas att i ett sammanhang behandla den. Följden deraf, att läraren talar ett språk, som antingen icke begripes eller missförstås, har varit, att lärjungarne, äfven de mera begåfvade, ytterst sällan kunnat lemna en hjelplig förklaring öfver lösningen af en räkneuppgift. Särdeles i ögonen fallande blir denna stora brist, om undervisningssättet i räkning jämföres med det i geometri. Såsom bekant är, kräfves af lärjungarne vid den geometriska undervisningen en fullständig redogörelse för lösningen af dem förelagda uppgifter, jämte bevis för dennas riktighet, affattade i ett klart och följdriktigt språk. Med stort skäl anses af alla matematiska lärare denna redogörelse och detta bevis vara det, som vid denna undervisning mest bidrager till lärjungens andliga utveckling, Vid undervisningen i räkning deremot nöjer man sig vanligen blott med svaret på en framstäld fråga, hvilket mången gång antingen blifvit taget ur facitboken eller meddelat af en kamrat, eller i bästa fall erhållet genom ett förfaringssätt, som lärjungen icke begripit. För att lärjungarne må af undervisningen i räkning draga den nytta, som den är mäktig att gifva, om den skötes väl, är det nödvändigt, att den anordnas i öfverensstämmelse med dem geometriska.

Då det mål, som i första rummet vid undervisningen i räkning bör åsyftas, är utvecklingen af lärjungarnes intellektuela förmögenheter, företrädesvis förståndet, föreställningsförmågan, iakttagelseförmågan och minnet, så måste undervisningen ordnas så, att lärjungarne *nödgas* vara sjelfverksamma. För att detta skall kunna ske, fordras af läraren, att han börjar med det enkla och lätta och öfvergår så småningom till det mera svåra och invecklade. I närmaste sammanhang härmed står frågan om ordningsföljden vid räkneundervisningen. Emedan den, som i det efterföljande kommer att föreslås vid undervisningen i bråk, i flere delar skiljer sig från den vanliga, som är bestämd efter de s. k. fyra enkla räknesätten, är det nödvändigt förutskicka några upplysningar, på det att läsaren må kunna förstå den slutliga framställningen.

När en storhet delas i två eller flere delar, så har man utom storheten, som blifvit delad, att taga i betraktande delarnes antal och hvarje del särskildt. Är den delade storheten t. ex. penningsumman 27 öre, som blifvit delad i delarne 7 öre, 12 öre, och 8 öre, så har man att fästa uppmärksamheten vid delarnes antal 3, första delen 7 öre, andra delen 12 öre och tredje delen 8 öre, samt den delade storheten 27 öre. Delas penningsumman 27 öre i 3 lika delar, så kommer hvarje del att innehålla 9 öre. I detta fall har man utom 27 öre att uppmärksamma delarnes antal 3 och hvarje del, som är 9 öre. Storheten, som är delad eller tänkes vara delad, kan man för korthetens skull kalla *det hela*; i detta fall är det hela 27 öre. Lärjungarne böra tidigt vänjas att skilja mellan begreppen *det hela, delarne* och *delarnes antal*, emedan vid läran om hela tal och vid större delen af läran om bråk sysselsätter man sig blott med dessa begrepp, och frågan om dem innesluter likasom i en ram de s. k. fyra räknesätten, hvilket i det efterföljande skall visas. En af orsakerna till de ringa frukter, man mången gång erhållit af undervisningen i räkning, är att söka deri, att man så strängt hållit fast vid att ordna undervisningen efter *fyra* grundsatser (de fyra räknesätten) i st. f. efter *en*. Lärjungarne hafva ej kunnat ur denna mångfald af betraktelsesätt finna någon enhet eller samband mellan de olika räknesätten, hvilket betydligt försvårat deras arbete, och likasom tvingat dem att på "nåd och onåd" öfverlemna sig i slentrianens tjenst, der den ena falska föreställningen aflöst den andra. Falska föreställningar alstras, *dels* när lärjungarne sysselsättas med ämnen, som de ej kunna fatta med någon af sina förmögenheter, *dels*, när ämnen framställas under en för dem ofattlig form.

Hvarje lärare vet väl, huru svårt det är att utrota falska föreställningar, och att han mången gång aldrig lyckas oaktadt de ihärdigaste ansträngningar.

För att inöfva dessa begrepp, kan läraren taga ett antal föremål t. ex. böcker och fördela dem på något sätt. Läraren tager t. ex. 12 böcker, delar dem i 3 delar och lägger t. ex. 4 böcker i första delen, 6 böcker i den andra och 2 böcker i den tredje och frågar: "Hvilket är delarnes antal? Sv. 3. Hvaraf består den första delen?" eller "hvad innehåller första delen?" Sv. 4 böcker o. s. v. "Hvaraf består det hela?" Sv. 12 böcker. Delas de 12 böckerna i 3 lika stora delar, så kommer hvarje del att innehålla 4 böcker. I detta fall sammanslås de mellersta frågorna till denna: "Hvaraf består hvarje del"? Sv. 4 böcker. När barnen blifvit så försigkomna, att de kunna skilja mellan föremålen och deras antal, kan läraren i stället gifva följande form åt frågorna: "Hvilket är böckernas antal i första delen (hvarje del)?" Sv. 4 (ej 4 böcker) o. s. v. "Hvilket är böckernas antal i det hela?" Sv. 12 (ej 12 böcker). I stället för frågan: "Hvilket är delarnes (böckernas) antal" kan användas: "Huru många äro delarne (böckerna)?" Men då bör läraren ej heller tillåta barnen svara 3 delar, 4 böcker o. s. v. utan tillhålla dem att svara 3, 4. o. s. v., emedan frågan blott gäller *antalet.* Jag nämner detta, emedan det förekommer nästan allmänt i våra skolor, att barnen inläras denna oriktiga form för svaren. Det är nödigt, att barnen tidigt lära sig skilja mellan t. ex. en penningsumma och dess öretal, mellan en längd och dess metertal. Således skall svaret på följande fråga; "*Huru många öre* kosta 7 äplen, när hvarje äple kostar 3 öre?" vara 21 (ej 21 öre). Vill läraren hafva 21 öre till svar, så måste han gifva frågan följande form: "*Huru mycket* kosta 7 äplen, när hvarje äple kostar 3 öre?"

När man vid undervisningen utgår från grundsatsen om det hela, delarne och delarnes antal, får man skilja mellan följande tvänne fall: 1) delarne äro olika 2) delarne äro lika. Vid det första fallet är delarnes antal i allmänhet ej af någon framstående betydelse, hvilket deremot är händelsen i det senare fallet. Äro delarne olika, kan man antingen söka det hela (sammanläggningsuppgiften), då delarne äro gifna, eller kan man söka en af delarne (frändragningsuppgiften), då det hela och de öfriga delarne äro gifna. Dock kunna räkneuppgifter uppställas så, att delarnes antal behöfver medtagas (se efterföljande uppgifter 2 och 4). Sedan lärjungen blifvit fullt förtrogen med de trenne begreppen, använder läraren dem i de räkneuppgifter, som föreläggas lärjungarne. Se här några enkla exempel på dylika!

1) Hvad är det hela, när delarne äro 7 öre, 19 öre och 21 öre? Sv. 47 öre.

2) Hvad är det hela, när delarnes antal är 6, den första delen är 27 öre, den andra 14 öre mer än den första, den tredje 14 öre mer än den andra o. s. v.? Sv. 372 öre.

3) Det hela är 41 öre, delarnes antal är 2 och den ena delen är 29 öre. Hvilken är den andra delen? Sv. 12 öre.

4) Det hela är 85 öre, delarnes antal är 5 och de fyra första delarne äro: 15 öre, 17 öre, 14 öre och 27 öre. Hvilken är den återstående delen? Sv. 12 öre.

5) Delarnes antal är 5, och hvarje del är 85 öre. Hvad är det hela? Sv. 425 öre.

6) Delarnes antal är 5, det hela är 85 öre, och delarne äro lika. Huru stor är hvarje del? Sv. 17 öre.

7) Hvarje del är 5 öre och det hela är 85 öre. Hvilket är delarnes antal. Sv. 17.

Vid inlärandet af mångfaldstabellen (multiplikationstabellen) kan läraren stundom gifva de två senare frågorna följande mindre bestämda form:

Huru utfaller delningen, när 54 öre delas så, att hvarje del innehåller 6 öre? Sv. Delarnes antal blir 9. (Skäl: 9-falden af 6 är 54).

Huru utfaller delningen, när 54 öre delas i 6 lika delar? Sv. Hvarje del innehåller 9 öre. (Skäl: 6-falden af 9 är 54).

Dessa sistnämda frågformer äro lämpliga att använda, för att lärjungarne må lära sig skilja mellan delarnas antal och hvarje dels innehåll, hvilka de mycket ofta förväxla. Afvenledes böra de öfvas att angifva, hvilken del af tabellen de använda vid en frågas besvarande; (se ofvanstående exempel!)

Af de anförda räkneuppgifterna framgår, att ofvannämda grundsats om det hela, delarne och delarnes antal i sig innefattar de fyra räknesätten, sålunda äro exemplen 1 och 2 additionsuppgifter, 3 och 4 subtraktionsuppgifter, 5 multiplikationsuppgift, 6 s. k. delningsdivisionsuppgift, 7 s. k. innehållsdivisionsuppgift. Om läraren utgår från denna enkla grundsats, så är det för lärjungen mycket lättare att besvara räknefrågor, än om han utgår från grundsatsen om de fyra räknesätten. Det är likgiltigt, om barnet till en början vet, att sättet för finnandet af 17 öre i ex. 6 benämnes delningsdivision (en högst olämplig benämning), och att sättet för finnandet af talet 17 i ex. 7 benämnes innehållsdivision (äfvenledes en olämplig benämning); "namnet gör, ju ingenting till saken". Hufvudsaken är att lärjungen kan besvara frågan och redogöra för svarets tillkomst.

Att det hela omväxlande kallas summa, minuend, produkt och dividend, kan ej annat än förbrylla lärjungen, samma är förhållandet med de många namnen på delarne, hvilka äro addender, summander, termer, subtrahend, rest, multiplikand, divisor och qvot samt på delarnes antal, som äro multiplikator, divisor och qvot. Naturliga följden af denna rikedom på namn är, att högst få lärjungar känna dessa uttryck till namnet, än mindre till betydelsen, oaktadt de äro upptagna i alla aritmetiska läroböcker.

Sedan lärjungen blifvit fullt förtrogen med begreppen det hela, delarne och delarnes antal, kan läraren öfvergå till inlärandet af följande definitioner: *addition* kallas sättet att finna det hela, då delarne äro gifna och delarne äro olika. *Multiplikation* kallas sättet att finna det hela, då delarne och delarnes antal äro gifna, samt delarne äro lika. *Subtraktion* kallas sättet att finna den ena delen, då det hela och den andra delen äro gifna. *Division* kallas 1:o) sättet att finna hvarje del, då det hela och delarnes antal äro gifna, samt delarne äro lika; 2:o) sättet att finna delarnes antal, då det hela och hvarje del äro gifna, samt delarne äro lika stora. Likartade uttryckssätt kunna äfven användas vid definitionerna till de öfriga latinska orden.

När det *hela* sökes, delarne äro gifna och olika, så kallas det hela *summa*.

När det *hela* sökes, delarne och delarnes antal äro gifna, samt delarne äro lika, så kallas det hela *produkt*.

När den ena delen sökes, det hela och den andra delen äro gifna, så kallas det hela *minuend* o. s. v.

Att tillämpa denna grundsats på praktiska räknefrågor är för lärjungen mycket lättare än att angifva det räknesätt, som för hvarje särskildt fall skall användas. Se här några exempel!

1) Huru många kannor mjölk kan man köpa för 9 kr. 24 öre, då hvarje kanna kostar 28 öre? Sv. 33.

Denna fråga sammanfaller med frågan: Hvilket är delarnes antal, då det hela är 9 kr. 24 öre och hvarje del är 28 öre. Sv. 33.

2) Hvad kostar 1 kanna mjölk, då 28 kannor kosta 9 kr. 24 öre? Sv. 33 öre.

Denna fråga sammanfaller med följande:

Hvad innehåller hvarje del, då det hela är 9 kr.

24 öre, delarnes antal 28 samt delarne äro lika stora? Svar 33 öre.

3) En fritt fallande kropp tillryggalägger under första sekunden 16 fot 5 tum, under andra sekunden 33 fot mer än under den första, under den tredje 33 fot mer än under den andra o. s. v. Huru många sekunder dröjer det, innan en sten, som nedsläppes från en grufvas öppning, träffar bottnen? Grufvans djup är 1056 fot. Sv. 8.

Frågan sammanfaller med följande:

Hvilket är delarnes antal, när det hela är 1056 fot, första delen 16 fot 5 tum, andra delen 33 fot längre än den första, o. s. v.? Sv. 8.

Lika lätt kan man förklara betydelsen af de s. k. operationstecknen: + — . :

Sålunda kan man säga, att

7 öre + 9 öre + 15 öre = 31 öre betyder:

När delarne äro 7 öre, 9 öre och 15 öre, så är det hela 31 öre.

47 öre — 29 öre = 18 öre betyder:

När det hela är 47 öre och den ena delen 29 öre så är den andra delen 18 öre.

89 öre — 15 öre — 27 öre — 14 öre = 33 öre betyder:

När det hela är 89 öre, delarnes antal är fyra och tre af delarne äro: 15 öre, 27 öre och 14 öre, så är den återstående delen 33 öre.

7 . 48 öre = 336 öre betyder:

När delarnes antal är 7 och hvarje del är 48 öre, så är det hela 336 öre.

336 öre : 7 = 48 öre betyder:

När det hela är 336 öre, delarnes antal är 7 och delarne äro lika, så är hvarje del 48 öre.

336 öre : 48 öre = 7 betyder:

När det hela är 336 öre och hvarje del är 48 öre, så är delarnes antal 7.

Följande öfningar äro nyttiga att använda efter direkta räknefrågor:

Läraren uppskrifver på svarta taflan t. ex. följande ofullständiga sats:

"När delarnes antal är 37 och hvarje del är ?, så är det hela 2,183 kr", och tillsäger lärjungarne att finna den bristande delen, 59 kronor.

Sedan lärjungen utan ansträngning kan finna den bristande delen i dylika satser, öfvergår läraren till motsvarande öfningar med ofullbordade satser skrifna med det matematiska teckenspråket t. ex.

37 . ? = 2,183 kr.

Vanligen förekommer det i exempelsamlingar och räkneböcker, att blott den storhet, som står på högra sidan om likhetstecknet, skall bestämmas. Att denna ensidiga öfning gifvit riklig näring åt tanklösheten och slentrianen är alt för väl bekant. Den naturliga följden har blifvit, att lärjungen saknat öfning och kunskap i tydandet af den matematiska skriftens inre mening.

Med ledning af ofvanstående satser, skrifna med matematiska tecken, följer, att

1) "7 öre + 9 öre + 15 öre" utmärker det hela, när delarne äro 7 öre, 9 öre och 15 öre.

2) "47 öre — 29 öre" utmärker den ena delen, då det hela är 47 öre och den andra delen 29 öre.

3) "7 . 48 öre" utmärker det hela, då delarnes antal är 7 och hvarje del är 48 öre.

4) "336 öre : 7" utmärker hvarje del, då det hela är 336 öre, delarnes antal 7 och delarne lika.

5) "336 öre : 48 öre" utmärker delarnes antal, då det hela är 336 öre, och hvarje del är 48 öre.

Deremot kan "336 : 48" utmärka *antingen* delarnes antal, då det hela är 336 och hvarje del är 48 *eller* hvarje del, då det hela är 336 och delarnes antal är 48 samt delarne äro lika. I bägge fallen utmärker det talet 7.

Talen och de verkliga storheterna kunna inom den matematiska vetenskapen tecknas, och i följd deraf äfven benämnas, på många olika sätt. Sålunda användas såsom tecken för talet "fjorton": 12 + 2, 2 . 7, 16 — 2, $^{42}/_3$ o. s. v. Det vanligast förekommande namnet på detta tal är "fjorton" och tecknet är 14. Ingår bland tecknen för ett tal ett eller flere bland de s. k. operationstecknen, så önskar man vanligen att få talet betecknadt utan dessa tecken, när detta kan ske.

Af det, som blifvit sagdt i det föregående, finner man, att de s. k. operationstecknen äro tecken, som jämte siffror och bokstäfver användas, *dels* för att beteckna tal och verkliga storheter, *dels* för att i satser uttrycka sett samband, som eger rum mellan tal och verkliga ord heter. De skilja sig från siffror och bokstäfver deruti, att de ej ensamma kunna beteckna tal eller verkliga storheter. Den vanliga definitionen på de s. k. operationstecknen, att de skola utmärka, att en viss räkning med talen, som de förena, skall verkställas, håller ej streck, hvarken vid läran om de bestämda eller de obestämda talen, t. ex. 3 i 4, a + 7 o. s. v. I stället för att säga, att 3 : 4 betyder, att man skall dela 3 i 4 lika delar, ty detta kan ej verkställas, bör man säga, att 3 : 4 betecknar hvarje del, då det hela är 3 och delarnes antal är 4 eller kortare 3 : 4 betecknar a) ett tal, hvaraf 3 är 4-falden eller b) ett tal, som angifver förhållandet mellan 3 och 4. I det efterföljande kommer denna sak att mera omständligt beröras.

I sammanhang härmed bör påpekas en annan oegentlighet, som förekommer i läroböckerna. Der säges det nämligen, att talen äro af tvänne slag: *abstrakta* och *konkreta*, eller *obenämda* och *benämda*. Detta är ej enligt med sanna förhållandet, ty alla tal äro abstrakta d. v. s. de kunna blott fattas af tanken.

Man har t. ex. kallat 3 meter, 5 kronor o. s. v. för konkreta tal. Dessa äro ej tal, utan 3 meter är eller, om man så önskar, utmärker en längd och 5 kr. är en penningsumma eller en myntstorhet. Talen 3 och 5, som förekomma såsom bestämningar för längdenheten *meter* och myntenheten *krona*, äro abstrakta och blifva ej konkreta, derför att de sättas som bestämningar till de konkreta storheterna *meter* och *krona*. Det förhåller sig med talen, som med hvarje annan abstraktion t. ex. begreppet *dygdig*, som ej upphör att vare abstrakt, när det sättes som bestämning till en konkret person. Lika oegentligt är det att kalla 3 meter och 5 kr. benämda tal, ty talen 3 och 5 äro ej benämda eller bestämda af "meter" och "kronor", utan det är tvärtom "meter" och "kronor", som äro bestämda af 3 och 5. Talen äro all tid oföränderliga, och det är derför man använder dessa för att bestämma andra storheter.

Om en storhet t. ex. en längd a skall uppmätas med den kända längdenheten meter, så indelas a i delar, som äro lika med en meter. Antag, att delarnes antal blir 7, så kallas längden a sju meter och hans skrifttecken är 7 m. Om man således säger, att en längd a är sju meter, så får man noga skilja mellan den konkreta längden a, längdbestämningen 7 meter, längdenheten meter och talet 7, som anger delarnes antal, då det hela är a och hvarje del är 1 meter, eller såsom man säger: 7 är längdens a metertal, eller 7 är förhållandet mellan längden a och längdenheten *meter*.

I det föregående har jag sökt visa, att grundsatsen om det hela, delarne och delarnes antal kan läggas till grund för läran om de hela talen och för lösningen af räkneuppgifter, i hvilka hela tal förekomma. Samma grundsats kan äfven användas i läran om bråktalen.

Sålunda kan man säga, att

«$^3/_4$ m. + $^5/_6$ m.» utmärker det hela ($^{19}/_{12}$ m.), då delarne äro $^3/_4$ m. och $^5/_6$ m. «$^7/_8$ m. — $^3/_7$ m.» utmärker den ena delen ($^{25}/_{56}$ m.), då det hela är $^7/_8$ m. och den andra delen $^3/_7$ m. 5 . $^3/_8$ m. utmärker det hela ($^{15}/_8$ m.), då delarnes antal är 5 och hvarje del är $^3/_8$ m. «$^3/_8$ m. : 5» utmärker hvarje del ($^3/_{40}$ m.), då det hela är $^3/_8$ m., delarnes antal är 5 samt delarne äro lika. «$^3/_8$ m. : $^1/_{24}$ m.» utmärker delarnes antal (9), då det hela är $^3/_8$ m. och hvarje del är $^1/_{24}$ m. Deremot är denna grundsatsen lika litet som grundsatsen om de fyra räknesätten tillräcklig för att förklara betydelsen af uttryck sådana, som

$^5/_7$. $^3/_8$ m., $^3/_8$ m. : $^5/_7$, $^3/_8$ m. : $^5/_7$ m., $^3/_8$: $^5/_7$; m. m.

Man har visserligen försökt definiera orden multiplicera och dividera så, att lärjungen med ledning häraf skulle kunna finna betydelsen af uttryck, likartade med ofvanstående, men mig veterligen har det ej lyckats. Dessutom hafva lärjungarne i läran om hela tal fått inplantad en betydelse af orden multiplicera och dividera, hvilken ej öfverensstämmer med den betydelse, som måste tilldelas dessa ord i bråkläran, om man vill använda dem. Min enskilda åsigt är, att uttrycken multiplicera och dividera ej böra förekomma i bråkläran, emedan de förorsakat skefva föreställningar hos lärjungarne och således hämmat deras utveckling. Det är derför ej underligt, att lärjungar i allmänhet hysa de mest förvända föreställningar om betydelsen af t. ex. «$^5/_7$. $^3/_8$», som de ibland utläsa: $^5/_7$ *gånger* $^3/_8$ och stundom $^5/_7$ *multipliceradt med* $^3/_8$, och $^5/_7$: $^3/_8$, som de utläsa $^5/_7$ *divideradt med* $^3/_8$ eller $^5/_7$ genom $^3/_8$, utan att de veta, hvilken mening gömmer sig bakom deras ord. De följa derför troget de föreskrifter, som boken angifver, för att erhålla ett rätt svar. Man har ej ens vågat tilltro lärjungen så mycken förmåga, att han på egen hand skulle kunna bestämma t. ex. hvilket tal är 6-falden af $^5/_7$, utan gifvit honom föreskrifter om uppställningen: $^6/_1 \cdot {^5/_7}$ och förfaringssättet för svarets $^{30}/_7$ erhållande. För att kunna göra denna uppställning, har man ansett sig behöfva upptaga en högst egendomlig öfning, som har till öfverskrift: «förvandling af hela tal till *en*-delar». Har läraren en samling tanklösa lärjungar och vill lära dem att «dividera» ett tal med t. ex. 6, så kan öfningen hafva någon betydelse, ty eljes är det möjligen fara för handen, att, när de skola tillämpa den märkliga divisionsregeln: «multiplicera med divisorn upp- och nedvänd», de multiplicera med 9 (6 upp- och ned-vändt) i st. f. med $^1/_6$. När denna vigtiga del af bråkläran på detta ytliga sätt blifvit genomgången, har man öfvergått till användningen af det inlärda, hvarvid man snart funnit, att den lätt vunna kunskapen varit altför otillräcklig för att låta lärjungen på egen hand sköta sig sjelf med lösningen af praktiska frågor. Man har nödgats fortgå på samma väg, som man börjat, nämligen att gifva särskilda föreskrifter — mången gång mycket egendomliga — för vissa frågors lösning med åtföljande uppställning. Dessa föreskrifter grunda sig på läran om likheten som lånats från algebran, och hvarom naturligtvis lärjungen ej haft en aning. Så småningom hafva dessa grupper af uppgifter gifvit uppkomsten till nya «räknesätt» såsom: enkel och sammansatt regula di tri, ränteräkning, procenträkning, rabatträkning, medelterminers reduktion o. s. v., hvilka kommit att bilda sjelfständiga delar af räkneläran. Härigenom har räkningen blifvit en minnets i st. f. en förståndets sak. Lärjungar, som blifvit undervisade på detta sätt, igenkännas lätt på den vemodiga klagan, de så ofta afgifva, när de komma i trångmål, nämligen: «Jag vet ej, huru jag skall ställa upp». Uppmanar man sådana lärjungar att lemna en redogörelför räkneuppgiftens innehåll, så märker man snart, att det för dem är alldeles obekant.

I afseende på valet af räkneuppgifter kan med fog göras den anmärkningen, att de fleste bland dem hvarken äro praktiska, d. v. s. de förekomma ej i det borgerliga lifvet, ej heller äro de af den beskaffenhet, att de lemna lärjungen en djupare kunskap om talen, hufvudsakligen derför att deras innehåll är för lärjungen ofattligt. Innehållet i dem angår vanligen det borgerliga lifvets ganska invecklade penningeförhållanden, och hvarje lärare vet, huru svårt det är att inviga barnen deri, hvilket är nödvändigt, för att lärjungen må kunna lösa uppgiften. I stället har man uteslutit en mängd uppgifter, som både äro praktiska och hvilkas behandling lemna lärjungen en djupare inblick i talens natur. Till dylika räknar jag i första rummet sådana, som angå geometriska storheter, der talen likasom framträda försinligade. Till praktiska och tankeöfvande uppgifter räknar jag äfven sådana, som handla om egentlig vigt och tid. Hvad uppgiften om tid angår, så finnas visserligen sådana upptagna, men högst sällan riktigt beräknade. Felen uppkomma af följande märkliga uppgifter, som förekomma i räkneböckerna: 1 år innehåller 365 dagar, stundom 366 dagar. 1 år = 12 mån, 1 mån. = 30 dagar, 1 år = 52 veckor, hvilka uppgifter äro hvarandra motsägande. Det är skadligt att låta lärjungar sysla med räkneuppgifter, som stöda sig på antaganden, hvilka strida mot verkligheten. Hvarför kan man ej gifva en tidräkningsfråga följande form: «Huru många dagar hafva förflutit från och med t. ex. d. 29 mars 1861 till och med d. 10 nov. 1880? o. s. v. Frågans besvarande kräfver af lärjungen kännedom om den *verkliga* tidräkningen, hvilken läraren naturligtvis bör meddela honom.

Ordnas undervisningen deremot så, att räkningen blir en förståndets sak, så är upptagandet af denna mängd olika s. k. «räknesätt« öfverflödigt, och läraren kan öfverlemna uppgifterna till lärjungarne att lösas utan några föreskrifter om deras uppställning och lösning, hvarigenom räkneundervisningen blir, hvad den bör vara, såväl uppfostrande som grundläggande för matematikens studium.

När således grundsatsen om det hela, delarne och delarnes antal ej är tillräcklig för en nöjaktig förklaring af ofvannämda uttryck och i sammanhang dermed stående frågor, är det nödigt att se sig om efter en grundsats, som omfattar den föregående som ett enskildt fall, och hvarur man tydligt kan finna uttryckens betydelse. Denna grundsats anser jag vara den om storheters jämförelse, ur hvilken framgår begreppet förhållande, hvilket är «den röda tråd«, som genomgår hela den matematiska vetenskapen.

Om storheters jämförelse.

Endast storheter af samma slag kunna jämföras med hvarandra.

En storhet a säges vara en *mångfald* af en storhet b, när a kan delas i delar, som *alla* äro lika stora med b.

Exempel: 54 kr. äro en mångfald af 3 kr, derför att 54 kr. kunna delas så, att alla delarne blifva 3 kr. 2 $^1/_2$ är en mångfald af $^1/_6$, derför att 2 $^1/_2$ kan delas så, att alla delar blifva [illegible]

En storhet säges vara en *jämn del* af en storhet d, när d kan delas i delar, som alla äro lika stora med c.

Exempel: 6 kr. äro en jämn del af 72 kr, derför att 72 kr. kunna delas så, att delarne blifva lika med 6 kr. $^3/_8$ är en jämn del af 2 $^1/_4$, derför att 2 $^1/_4$ kan delas så, att hvarje del är $^3/_8$. Deremot äro ej 7 kr. en jämn del af 72 kr, och ej heller 72 kr. en mångfald af 7 kr, derför att 72 kr. ej kunna delas så, att *alla* delarne innehålla 7 kr.

Anm. Då man i dagligt tal säger, att en storhet är en del af en annan, förstår man, att storheten ingår som *beståndsdel* i den andra. Enligt matematiskt språkbruk tages ordet *del* i en vidsträcktare betydelse. Sålunda säger man, att en enhet är *del* af en annan, när den är mindre, oberoende af hurvida den ingår som beståndsdel i den andra eller ej. Egentligen borde man säga om en storhet, som är mindre än en annan, och i hvilken den ej ingår som beståndsdel att den är lika med en del af den andra.

I den elementära matematiken jämföras tvänne storheter med hvarandra på tvänne sätt.

Anm. I stället för att i allmänna ord ange, huru tvänne storheter med hvarandra jämföras, anser jag det vara lämpligare att förtydliga frågan genom framställandet af några enskilda fall. De storheter, som blifvit valda, äro räta linier hvilka torde vara de ändamålsenligaste för vinnandet af klarhet och åskådlighet.

Första jämförelsesättet.

A) *Storheten, som jämföres, är större än den storhet, med hvilken han jämföres.*

a b

b c

Låt a vara en linie-storhet, som skall jämföras med linie-storheten b.

Ifrån ena ändpunkten af a afskäres ett stycke lika stort med b. Låt c vara den återstående delen af a.

Resultatet af jämförelsen uttryckes i vanlig skrift:

a är c mer (större) än b,

i matematisk skrift:

$$a = b + c.$$

Anm. $a = b + c$ återgifves i vanlig skrift med
a är summa af b och c eller
a är lika med b och c tillsammans eller
a är lika med b tillsammans med c. O. s. v.

B) *Storheten, som jämföres, är mindre än den storhet, med hvilken han jämföres.*

m n

r

Låt nu m vara en linie-storhet, som skall jämföras med en större linie-storhet n.

Linien m. förlänges med ett stycke r, så att m tillsammans med r blir lika stor med n.

Resultatet af jämförelsen uttryckes:

i vanlig skrift:

m är r mindre än n,

i matematisk skrift:

$$m = n - r.$$

Anm. $m = n - r$ återgifves äfven i vanlig skrift:
m är skilnad mellan n och r eller
m är lika med n minskadt med r. O. s. v.

Andra jämförelsesättet:

A) *Storheten, som jämföres, är en mångfald af den storhet, med hvilken han jämföres.*

a b

Låt a vara en linie-storhet, som är mångfald af linie-storheten b.

Linien a delas så, att hvarje del blir lika med b, hvilket kan ske, emedan a antogs vara en mångfald af b.

Låt antalet delar i a vara *fyra.*

Resultatet af jämförelsen uttryckes på trenne olika sätt, alt efter som man vill i satsen framhålla storheten a som jämföres, eller storheten b, i afseende på hvilken jämförelsen sker, eller antalet *fyra.*

I vanlig skrift:

1) *Linien a är fyrafalden af linien b.*

2) *b är den linie, hvaraf linien a är fyrafalden.*

3) *Fyra är det tal, som anger, hvilken mångfald linien a är af linien b,* eller vanligare:

Fyra är förhållandet mellan linien a och linien b.

i matematisk skrift:

1) $a = 4 \,.\, b$ eller $a = 4 \times b$ eller $a = 4\,b$.

2) $b = a : 4$.

3) $4 = a : b$ eller $4 = \frac{a}{b}$ om a och b beteckna tal.

Anm. 1. Följande omkastning af ofvanstående satser användas äfven, nämligen:

i vanlig skrift:

1) *Fyrafalden af linien b är linien a.*

2) *Den linie, hvaraf a utgör fyrafalden, är linien b.*

3) *Det tal, som anger, hvilken mångfald linien a är af linien b är fyra,* eller vanligare

Förhållandet mellan linien a och linien b är fyra.

i matematisk skrift:

1) $4 \,.\, b = a$ eller $4 \times b = a$ eller $4\,b = a$.

2) $a : 4 = b$.

3) $a : b = 4$ eller $\frac{a}{b} = 4$, om a och b beteckna tal.

Anm. 2. $a = 4 \,.\, b$ återgifves äfven i vanlig skrift med:

a är fyra gånger b.

a är fyra gånger så stort som b.

Anm. 3. Mindre ofta förekommer det att uttrycka resultatet af jämförelsen mellan a och b

i vanlig skrift:

a är tre gånger b mer (större) än b, i hvilken sats b (storheten i afseende på hvilken jämförelsen sker) vanligen uteslutes efter ordet «gånger» och sammandrages till

a är tre gånger mer (större) än b, i hvilket fall b underförstås efter ordet «gånger».

I matematisk skrift skulle det återgifvas med:

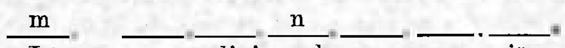
$a = b + 3\,b$.

Anm. 5. Vid undervisningen och i läroböcker förekommer i detta fall mycket ofta följande oriktiga sats:

a är fyra gånger mer (större) än b.

Jämföres denna med den senare i anm. 3, synes lätt, hvari det oriktiga består När ordet «gånger» förekommer i en dylik sats utan att vara åtföljdt af något ord, till hvilket det utgör bestämning, underförstås all tid den af storheterna, i afseende på hvilken jämförelsen sker. I detta fall är det b.

B) *Storheten, som jämföres, är en jämn del af den, med hvilken han jämföres*



Låt m vara en liniestorhet, som är en jämn del af linien n.

Linien n delas så, att hvarje del blir lika med m, hvilket kan ske, emedan m antogs vara en jämn del af n.

Låt antalet af n:s delar vara *sex*.

Resultatet af jämförelsen uttryckes äfven i detta fall på tre olika sätt.

I vanlig skrift:

1) *Linien m är en sjettedel af linien n.*

2) *n är den linie, af hvilken linien m utgör en sjettedel.*

3) *En sjettedel är det tal, som anger, hvilken jämn del m är af n,* eller vanligare:

En sjettedel är förhållandet mellan linien m och linien n.

i matematisk skrift:

1) $m = {}^1/_6 \, . \, n$ eller $m. = {}^1/_6 \times n$ eller $m = {}^1/_6 \, n$.

2) $n = m : {}^1/_6$.

3) ${}^1/_6 = m : n$ eller ${}^1/_6 = \frac{m}{n}$ om m och n beteckna tal.

Anm. 1. En omkastning likartad med den i anm. 1 mom. A förut nämda förekommer äfven med dessa satser.

Anm. 2. Vid undervisningen och i läroböcker förekommer mycket ofta i stället för satsen i 1) följande oriktiga sats:

m är 6 gånger mindre än n.

Att satsen är oriktig framgår deraf, att efter ordet «gånger» måste något underförstås, som här ej kan vara annat än n (storheten i afseende på hvilken jämförelsen sker), hvilket insatt efter ordet «gånger» lemnar en oriktig sats. Deremot skulle kunna sägas, att

m är fem gånger m mindre än n.

I matematisk skrift skulle den återgifvas med

$m = n - 5\,m$,

men i detta fall tillåter ej språket, att m efter ordet «gånger» uteslutes.

Anm. 3. För att angifva delar af storheter användas vanligen ordningstalen. Sålunda säger man *tredje*-del, *fjerde*-del o. s. v. Stundom användas ordningstal och grundtal om hvarandra. Sålunda säger man både *sextonde*-del och *sexton*-del, *hundrade*-del och *hundra*-del. Stundom användas särskilda ord, såsom *hälft* och ej *andra*-del (ofta förekommer äfven *tvåen*-del, sålunda är det mycket vanligt, att ${}^3/_2$ utläses «tre tvåen-delar»), *tjuguende*-del ej *tjuguförsta*-del (ofta förekommer äfven *tjuguen*-del), *tjugutvåen*-del och ej *tjuguandra*-del (stundom får man äfven höra *tjugutvående*-del).

Emedan man af benämningarne på storheters jämna delar skall leda sig till deras storlek och ej till den ordning, de intaga i en rad af storheter, är det naturligare att för ändamålet använda grundtalen än ordningstalen.

Genom grundtalens användande skulle öfverensstämmelse komma att ega rum mellan benämningarna på en storhets mångfalder och jämna delar. När t. ex. satsen «12 kr. är *fyra*-falden af 3 kr.» skall omkastas, vore det följdriktigare att säga: «3 kr. är *fyra*-delen af 12 kr.» än 3 kr. är fjerdedelen af 12 kr. Såsom ytterligare skäl för grundtalens företräde anföres äfven följande:

1:o) Om en storhet a är delad i tre lika delar, så säger man, att a är tre-delad, hvarför det vore naturligt att benämna a:s delar för hans tredelar.

2:o) Om en linie är delad i t. ex. 6 lika delar, och en lärjunge tillsäges visa på a:s tredje del, så pekar han på den tredje delen i ordningen. Läraren nödgas derför att vid inlärandet af bråklärans första grunder fästa lärjungens synnerliga uppmärksamhet på den stora skilnaden i betydelsen mellan orden tredjedel och tredje del, som vid uttalet ljuda nästan lika.

3:o) Är det oegentligt i språkligt hänseende att efter ett ordningstal använda en flertalsform t. ex. två tredje-*delar*

Sättet att angifva storheters jämna delar med ordningstalen har äfven fortplantats till läran om digniteter och rötter. För att benämna tals digniteter och rötter användas näml. äfven ordningstal i stället för grundtal, sålunda säger man, att 8 är *tredje*-digniteten till 2, och 2 är *tredje*-roten till 8, ehuru det af ofvanstående skäl vore riktigare att använda i stället tre-dignitet och tre-rot. Deremot användas grundtalen vid benämningen af tals logaritmer, sålunda säger man, att 4 är *tre*-logaritm till 81 och ej *tredje*-logaritm.

För att angifva ett tals tvådignitet och tredignitet användas äfven «qvadrat» och «kub». «Qvadrat» är egentligen namnet på en liksidig och rätvinklig parallelogram, och «kub» är namnet på en rätvinklig parallelipiped, hvars alla kanter äro lika stora, sedermera hafva dessa ord äfven blifvit satta såsom bestämningar till *tal*, sålunda säger man, att 64 är *qvadrat* till 8 och *kub* till 4. Man har ej ens ryggat tillbaka för att tala om qvadraten på en tidrymd m. m. (Att författarne lemnat läsaren i okunnighet om betydelsen af qvadraten på en tidrymd m. m. har sin grund deri, att de lika litet som någon annan kunna lemna en dylik upplysning). Så ofta man vid undervisningen afviker från den gyllene regeln: «Mot *ett* begrepp skall svara *ett* tecken och mot *ett* tecken skall svara *ett* begrepp», skapar man svårigheter, som hafva i sitt följe falska föreställningar och oreda. Det är derför ett önskningsmål, att orden «qvadrat» och «kub» så småningom måtte försvinna inom tal-läran och blott användas i geometrien. Det vore äfven fördelaktigt, att orden «qvadratrot» och «kubikrot» utbyttes mot orden «tvårot» och «trerot», hvilka bättre återgifva de motsvarande begreppen, och som stå i öfverensstämmelse med de öfriga orden «fyrarot», «femrot» o. s. v., som användas för att angifva rötterna till tal. I gamla matematiska böcker förekommer ordet «rektangel» i samma bemärkelse, som ordet produkt. Sålunda säges det, att rektangeln af 7 och 8 är 56. Att detta oegentliga talesätt har fått «stryka på foten» kan ingifva förhoppning, att de *lika* oegentliga orden «qvadrat» och «kub» skola försvinna såsom namn på tal. Användandet af «qvadrat», «kub» och «rektangel» såsom namn på tal leder sitt ursprung från ett fel, bestående i en förväxling mellan verkliga storheter och de tal, som angifva förhållandet mellan storheterna och vissa inom ett land brukliga enheter, såsom meter, krona, skålpund o. s. v. Sålunda har man talat om längder, som äro lika med 7, 8 o. s. v., ehuru en längd och ett tal äro af olika slag, hvarför man om en längd ej kan säga, att hon hvarken är större än, lika stor med eller mindre än ett tal. Ofta förekomma räkneuppgifter liknande denna: «En a) kubs kant b) qvadratsida är 5. Huru stor är a) kuben b) qvadraten? Sv. a) 125 b) 25». Genom tillsats af några ord blir uppgiften riktig och begriplig: «Fottalet till en a) kubs kant b) qvadrats sida är 5. Hvilket är a) kubens kubikfottal b) qvadratens qvadratfottal? Sv. a) 125 b) 25». Från samma källa hafva följande ytterst vilseledande uttryck flutit: «Multiplicera bas och höjd», «produkt af bas och höjd», «qvadrat-innehåll», «kubik-innehåll», «areal-innehåll» o. s. v.

Oaktadt det skulle vara en stor vinst vid räkneundervisningen att få ordningstalen vid benämningen af en storhets jämna delar utbytta mot grundtalen, anser jag det vara fåfängt försöka utrota deras användande i denna bemärkelse, emedan orden «tredjedel», «fjerdedel» o. s. v. inrotat sig i folkspråket, deremot är det skäl göra försök med införandet af «tre-dignitet», «tre-rot» o. s. v. i stället för de nu brukliga «*tredje* dignitet» eller «kub«, «*tredje* rot» eller «kubikrot», emedan de ej hafva nedträngt till den stora allmänheten.

C) *Storheterna, som jämföras, äro mångfalder af samma storhet.*

Låt r vara en linie-storhet, som jämföres med en linie-storhet s, och x en linie-storhet, hvaraf r och s äro mångfalder.

r och s uppdelas så, att hvarje del blir lika stor med x, hvilket kan ske, emedan r och s förutsattes vara mångfalder af x.

Antag att antalet af r's delar är *fyra* och s's delar är *fem*.

Resultatet af jämförelsen uttryckes äfven i detta fall på tre olika sätt.

I vanlig skrift:

1) *Linien r är fyra femtedelar af linien s.*

2) *s är den linie, af hvilken linien r utgör fyra femtedelar.*

3) *Fyra femtedelar är det tal, som anger förhållandet mellan linierna r och s,* eller vanligare

Fyra femtedelar är förhållandet mellan linierna r och s.

I matematisk skrift:

1) $r = {}^4/_5 \,.\, s$ eller $r = {}^4/_5 \times s$ eller $r = {}^4/_5\, s$.

2) $s = r : {}^4/_5$.

3) ${}^4/_5 = r : s$ eller ${}^4/_5 = {}^r/_s$ om r och s äro tal.

Anm. 1. Jämföres åter s med r, uttryckes resultatet af jämförelsen

i vanlig skrift:

1) *Linien s är fem fjerdedelar af linien r.*

2) *r är den linie, af hvilken s utgör fem fjerdedelar.*

3) *Fem fjerdedelar är det tal, som anger förhållandet mellan s och r,* eller vanligare

Fem fjerdedelar är förhållandet mellan s och r.

i matematisk skrift:

1) $s = {}^5/_4 \,.\, r$ eller $s = {}^5/_4 \times r$ eller $s = {}^5/_4\, r$.

2) $r = s : {}^5/_4$.

3) ${}^5/_4 = s : r$ eller ${}^5/_4 = {}^s/_r$ om s och r äro tal.

Anm. 2. En omkastning af ofvanstående satser, likartad med den, som är omnämd i det föregående, kan äfven här användas.

Anm. 3. Ofta händer det, att storheten, som jämföres, uppdelas eller tänkes vara uppdelad i delar, som äro lika med den jämförda storhetens *hundradel*. I förevarande fall skulle r få 80 delar. Resultatet af jämförelsen uttryckes då

i vanlig skrift:

r är 80 hundradelar af s, eller vanligare
r är 80 procent af s;

i matematisk skrift:

r — 0,80 . s. eller r = 0,80 × 3, eller r — 0,80 s.

Anm. 4. Ännu ett annat sätt användes för att uttrycka resultatet af jämförelsen i detta fall, nämligen

i vanlig skrift:

r är en femtedel af s mindre än s, hvilken sats sammandrages till
r är en femtedel mindre än s.

I matematisk skrift skulle satsen återgifvas med:
$r = s - {}^1/_5\, s$.

Jämföres åter s med r säger man, att
s är en fjerdedel af r mer (större) än r,
hvilken sats sammandrages till
s är en fjerdedel mer (större) än r.

I matematisk skrift skulle satsen återgifvas med:
$s = r + {}^1/_4\, r$.

Är r uppdelad eller tänkes vara uppdelad i delar, som äro lika med hundradelar af s, uttryckes resultatet af jämförelsen med
r är tjugu procent (hundradelar) af s mindre än s, hvilken sats sammandrages till
r är tjugu procent mindre än s.

I matematisk skrift skulle satsen återgifvas med
r = s — 0,20 s.

Jämföres deremot s med r, och s tänkes vara uppdelad i delar, som äro lika med hundradelar af r, uttryckes resultatet af jämförelsen med
s är tjugufem procent af r mer (större) än r, hvilken sats sammandrages till
s är tjugugufem procent mer (större) än r.

Jämför ofvanstående med anm. 3 och 4 mom. A under det *Andra jämförelsesättet.*

Anm. 5. I sammanhang med det, som blifvit sagdt i föregående anmärkning, påpekas följande ofta förekommande fel. Om t. ex. innevånarnes antal i ett samhälle vid slutet af år 1878 var 2,000 och vid slutet af år 1879 var 2,500, så får man i tidningar och tidskrifter ofta läsa följande oriktiga påstående: »Vid slutet af år 1879 var folkmängden 25 procent större än vid slutet af år 1878, *derför var den vid slutet af år 1878 25 procent mindre än vid slutet af år 1879*». I den senare delen af satsen skall 25 utbytas med 20, för att satsen skall blifva riktig.

Anm. 6. Om *tal* jämföras med hvarandra, kunna de i anm. 4 angifna förkortade uttryckssätten förorsaka förvillelse. Säger man, att

9 är en fjerdedel mindre än 12, underförstås efter ordet «fjerdedel» «af tolf».

Säger man åter, att

11 $^3/_4$ är en fjerdedel mindre än 12, underförstås efter ordet «fjerdedel» «af 1».

Förekomma i tal-läran «tredjedel» $^1/_3$, «fjerdedel» $^1/_4$, o. s. v., utan att vara åtföljdt af något ord, till hvilket det utgör en bestämning, underförstås all tid «af 1» efter dessa ord. Sålunda bör man på frågan

«Hvilket tal är en fjerdedel mindre än 12»? Svara: 11 $^3/_4$ ej 9.

Deremot bör man på frågan:

«Hvilken myntstorhet är en fjerdedel mindre än 12 kr»? Svar: 9 kr. och ej 11 $^3/_4$ kr., ty hade ändamålet med frågan varit att erhålla svaret 11 $^3/_4$ kr., borde den hafva haft följande form:

Hvilken myntstorhet är en fjerdedels-*krona* mindre än 12 kr.?

D) *Storheterna, som jämföras, äro ej mångfalder af samma storhet.*

Emedan detta fall hörer till den högre räkneläran, förbigås det här. Af det föregående finner man, att talet, som anger förhållandet mellan dylika storheter, hvarken kan vara ett helt tal eller ett bråk.

Anm. Ett tredje jämförelsesätt finnes äfven, men detta kan blott tillämpas, när de jämförda storheterna äro tal. Emedan detta slag af jämförelse förekommer inom den högre räkneläran, beröres det här blott i största korthet. Jämföres talet 64 med talet 4, så erhålles genom det första jämförelsesättet talet 60, genom det andra talet 16, och genom det tredje talet 3, hvilket anger antalet faktorer till 64, då hvar och en af dem är 4. Talen 60, 16 och 3 angifva sålunda förhållandet mellan 64 och 4, taget från olika synpunkter. För att åtskilja dem skulle man säga, att 60 är skilnads-förhållandet, 16 qvot-förhållandet och 3 dignitets-förhållandet mellan 64 och 4. I stället för dessa långa ord, användes ganska allmänt följande: 60 är *skilnaden* mellan 64 och 4, 16 är *förhållandet* mellan 64 och 4, och *3 är 4-logaritm till 64* eller *3 är logaritm till 64 i det system, hvars bas är 4.*

Resultatet af denna jämförelse uttryckes äfven på trenne olika sätt,

i vanlig skrift:

1) *64 är tre-dignitet till 4.*

2) *4 är det tal, hvaraf 64 är tre-dignitet,* eller vanligare

4 är tre-rot till 64.

3) *3 är det tal, som anger, hvilken dignitet 64 är af 4* eller vanligare

3 är 4-logaritm till 64.

I matematisk skrift:

1) $64 = 4^3$.

2) $4 = {}^3 64$*).

3) $3 = \log._4 64$.

Såsom förut blifvit nämdt, är grundsatsen om det hela, delarne och delarnes antal fullt tillräcklig att sättas till stöd för läran om de hela talen, och således är det obehöfligt, att i denna lära upptaga begreppet förhållande, hvilket först med nödvändighet behöfves i läran om bråktalen. Men emedan grundläggandet af detta begrepp kräfver stor omsorg och planmässigt tillvägagående af läraren, på det han må kunna nå ett godt resultat med sitt arbete, är det nödvändigt, att begreppet först tillämpas på storheter, hvilkas storlekstal äro hela, hvilka för lärjungarne äro klarare än bråktalen. Denna förberedande kurs kan läraren låta bestå af följande tre afdelningar: 1) Förhållandet är ett helt tal. 2) Förhållandet är ett stambråk. 3) Förhållandet är något annat bråk, egentligt eller oegentligt.

Till ledning för läraren lemnas här några frågor med åtföljande svar och förklaringar.

1. a) *Hvad är förhållandet mellan 54 öre och 9 öre? Svar 6.*

b) *Hvad är förhållandet mellan 6 m. 3 dm. och 7. dm? Svar 9.*

c) *Hvad är förhållandet mellan 9 veck. 1 dag och 1 vecka och 1 dag? Svar 8.*

d) *Hvad är förhållandet mellan 6 mil och 3 fjerdingsväg? Svar 8* o. s. v.

Anm. Lärjungarne märka snart, att frågan: «Hvad är förhållandet mellan 54 öre och 9 öre?« o. s. v. sammanfaller med den af dem förut kända: «Hvilket är delarnes antal, då det hela är 54 öre och hvarje del är 9 öre?« hvarigenom de få ett grundläggande begrepp om förhållandet.

2 a) *Hvad är förhållandet mellan 14 öre och 84 öre? Svar* $^1/_6$.

b) *Hvad är förhållandet mellan 6 tim. och 1 dygn? Svar* $^1/_4$.

---

*) Rottecken, som likna ett enkelt V, finnas ej bland tryckeriets typer.

c) *Hvad är förhållandet mellan 50 öre och 8 kronor? Svar* $^1/_{16}$.

d) *Hvad är förhållandel mellan 20 qvm. och 1 ar? Svar* $^1/_5$ o. s. v.

Innan läraren öfvergår till framställandet af frågor om förhållandet mellan så beskaffade storheter, att den ena ej är en mångfald af den andra, bör han på något lämpligt sätt förbereda frågorna. Läraren säger t. ex: I det föregående har den ena af de jämförda storheterna varit en mångfald af den andra, men äfven andra storheter af samma slag, af hvilka den ena ej är en mångfald af den andra, kunna med hvarandra jämföras. Nu skall jag visa eder, huru dessa 12 öre jämföras med dessa 18 öre. I finnen, att dessa 12 öre ej äro en jämn del af 18 öre, men flere penningsummor finnas, som äro jämna delar af både 12 öre och 18 öre. Hvilka penningsummor kännen I, som äro jämna delar både af 12 öre och 18 öre? Svar: 1 öre, 2 öre, 3 öre och 6 öre. *Läraren:* Af dessa jämna delar skola vi särskildt fästa oss vid den *största* bland dem, nämligen 6 öre. Dela nu dessa 12 öre och 18 öre så, att hvarje del kommer att innehålla 6 öre! Huru många äro delarne? Svar: Delarnes antal till 12 öre är 2 och till 18 öre 3. *Läraren:* När 12 öre jämföras med 18 öre, säger man: *"Förhållandet mellan 12 öre och 18 öre är* $^2/_3$ *(två tredjedelar)".* I hafven förut funnit, att *"12 öre är 2 tredjedelar af 18 öre,"* hvilken sats innehåller samma sanning som den förra, ehuru formen för den samma är olika.

När läraren genom dylika öfningar, dels med dels utan föremål, funnit lärjungarne förstå dylika frågor, förelägger han dem sådana till besvarande. Dock böra storheterna, som med hvarandra jämföras, väljas så, att lärjungarne med hufvudsaklig ledning af mångfaldstabellen (multiplikationstabellen) kunna finna storheternas största jämna del. Stundom kan äfven läraren uppgifva storheter, hvilkas största jämna del de ej ännu kunna finna, men i sådant fall bör läraren uppgifva den på samma gång, han framställer frågan.

Se här några exempel på dylika frågor!

3 a) *Hvad är förhållandet mellan 27 öre och 63 öre?* Svar $^3/_7$.

Sedan lärjungarne afgifvit svar på den framstälda frågan, böra de tillhållas att förklara, huru de erhållit svaret. Denna förklaring kan till en början få följande form: Den största jämna delen till 27 öre och 63 öre är 9 öre, hvaraf 27 öre är 3-falden och 63 öre är 7-falden, derför är förhållandet mellan 27 öre och 63 öre $^3/_7$ (3 sjundedelar). Sedermera kan förklaringen få följande kortare form: 27 öre äro 3-falden och 63 öre 7-falden af 9 öre, derför är förhållandet mellan 27 öre och 63 öre $^3/_7$.

b) *Hvad är förhållandet mellan 5 m. 6 dm. och 7 m. 2 dm?* Svar $^7/_9$.

Förklaring: 5 m. 6 dm. eller 56 dm. är 7-falden och 7 m. 2 dm. eller 72 dm. är 9-falden af 8 dm., derför är förhållandet mellan dessa längder $^7/_9$.

c) *Hvad är förhållandet mellan 4 kr, och 2. kr 25 öre?* Svar $^{16}/_9$ eller 1 $^7/_9$.

Förklaring: 4 kr. äro 16-falden och 2 kr. 25 öre 9-falden af 25 öre, derför är förhållandct mellan dessa penningsummor $^{16}/_9$ eller 1 $^7/_9$.

d) *Hvad är förhållandet mellan 55 veckor 6 dagar och 62 veckor 3 dagar?* Svar $^{17}/_{19}$.

Upplysning: Största jämna delen till de bägge tidrymderna är 3 veckor, 2 dagar.

Förklaring: 55 veckor 6 dagar eller 391 dagar äro 17-falden och 62 veckor 3 dagar eller 437 dagar 19-falden af 3 veckor 2 dagar eller 23 dagar, derför är förhållandet mellan de begge tidrymderna $^{17}/_{19}$.

e) *Hvad är förhållandet mellan en qvadrat A, hvars sidor äro 15 cm.* och *en qvadrat B, hvars sidor äro 27 cm?* Svar $^{25}/_{81}$.

Förklaring: A är 25-falden, och B är 81-falden af en qvadrat, hvars sidor äro 3 cm, derför är förhållandet mellan A och B $^{25}/_{81}$.

Dels för inlärandet af mångfaldstabellen, dels för grundläggandet af läran om ytors mätning äro öfningar, som böra förbereda ofvanstående, af särdeles stor nytta. Läraren uppritar på svarta taflan en rektangel, hvilkens sidor äro till ex. 24 cm. och 30 cm, visar derefter lärjungarne en qvadratisk ruta af papper med 3 centimeters (1 tum) sida och tillsäger dem att beräkna antalet dylika rutor, som åtgå för att täcka den uppritade rektangeln. Svaret bör blifva 80.

Förklaring: Emedan 24 cm. är 8-falden af 3 cm., så blir rutornas antal i hvarje rad 8, och emedan 30 cm. är 10-falden af 3 cm., så blir radernas antal 10, derför är antalet till alla rutorna 10-falden af 8 eller 80.

Sedan likartade öfningar fortgått någon tid, kan förklaringen gifvas följande kortare form: Antalet rutor i hvarje rad är 8, och radernas antal är 10, derför är antalet till alla rutorna 10-falden af 8, som är 80.

Frågor af detta sistnämda slag böra förekomma i läran om de hela talen och böra sidorna i den på svarta taflan uppritade rektangeln (eller qvadraten) vara mångfalden af pappers-qvadratens sida. I st. f. qvadratiska pappersrutor kunna naturligtvis äfven rektangulära användas. Sålunda kan läraren låta lärjungarne bestämma det antal rektangelformiga rutor, hvilkas sidor äro t. ex. 8 cm. och 5 cm., som åtgå för täckandet af den uppritade rektangeln. Antalet rutor i detta fall blir 18.

f) *Hvad är förhållandet mellan en kub A, hvars kanter äro 21 cm. och en kub B, hvars kanter äro 28 cm?* Svar $^{27}/_{64}$.

Förklaring: A är 27-falden och B är 64-falden af en kub, hvars kanter äro 7 cm.

Dessa frågor böra äfven förberedas i läran om de hela talen genom öfningar motsvarande den, för hvilken det här ofvan blifvit redogjordt efter frågan c).

Att låta, såsom vanligen sker, lärjungarne blott bestämma förhållandet mellan rektanglar å ena sidan och qvadrater, hvilkas sidor äro 1 fot, 1 cm. 1 tum, å andra sidan o. s. v. samt mellan rätvinkliga parallelipipeder å ena sidan och kuber, hvilkas sidor äro 1 fot, 1 tum, 1 cm. å andra sidan o. s. v. gifver riklig näring åt slentrianen, och bidrager ej att gifva lärjungarne en djupare inblick i läran om ytors och rymders beräkning. Skola de t. ex. besvara följande fråga: Huru stor är en rektangel A, hvars bas är 27 fot och höjd 21 tum? »multiplicera« de 21 och 27 och afgifva såsom svar på frågan blott talet 567. De hafva ej iakttagit, att 27 är åtföljdt af fot och 21 af tum, ännu mindre hafva de besvärat sig med att föreställa sig den i fråga varande rektangeln, hvilket är så nödvändigt, då förhållandet mellan ytor skall beräknas. För betydelsen af det erhållna svaret kunna de ej redogöra. I häpenheten omväxla de med följande utredning af gåtan: 567 utmärker fot, stundom tum, stundom qvadratfot och stundom qvadrattum. Slå de upp sin räknebok, möter dem följande märkliga förbud, framstäldt i en ännu märkligare form, nämligen «Man får ej multiplicera basen uttryckt i fot och höjden uttryckt i tum«. Hade de varit kunniga i rektanglars uppmätning, så hade de svarat, att 56,7 (produkten af basens fottal och höjdens tumtal) är förhållandet mellan den i fråga varande rektangeln och en rektangel, hvars sidor äro 1 fot och 1 tum; 5,670 (produkten af basens tumtal och höjdens tumtal) är förhållandet mellan A och en qvadrat, hvars sidor äro 1 tum d. v. s. 1 qvadrattum, samt 56,7 (produkten af basens fottal och höjdens fottal) är förhållandet mellan A och en qvadrat, hvars sidor äro 1 fot d. v. s. 1 qvadratfot.

Bland öfningar, som äfven äro tjenliga att hos lärjungarne grundlägga begreppet förhållande, må nämnas följande: *Läraren* uppritar på svarta taflan tvänne räta linier a och b, hvilkas förhållande skall bestämmas. För detta ändamål lemnar han åt en af lärjungarne en mätstång, som är indelad i lika delar, och tillsäger lärjungen bestämma antalet skaldelar, som äro lika med a och med b. Om t. ex. a är lika med 42 skaldelar, och b lika med 54 skaldelar, så är den största jämna delen till a och b en längd, som är lika med 6 skaldelar. Af denna jämna del är a 7-falden och b 9-falden, derför är förhållandet mellan a och b $^7/_9$.

Här nedan meddelas några exempel, i hvilka begreppet förhållande tillämpas på storheter, hvilkas storlekstal äro bråk. Såsom inledning till dessa meddelas följande anvisning.

Läraren uppritar på svarta taflan tvänne räta linier, hvilkas längder äro t. ex. $^2/_3$ m. och $^3/_4$ m. Sedermera frågar han: Hvilka jämna delar af en meter äro äfven jämna delar af $^2/_3$ m.? Svar: $^1/_3$ m., $^1/_6$ m., $^1/_9$ m., $^1/_{12}$ m., $^1/_{15}$ m. o. s. v, nämligen hvar tredje af meterns jämna delar.

Hvilka jämna delar af 1 meter äro jämna delar af $^3/_4$ m.? Svar: $^1/_4$ m., $^1/_8$ m., $^1/_{12}$ m.. $^1/_{16}$ m. o. s. v., nämligen hvar fjerde af meterns jämna delar.

Hvilken jämn del af 1 meter är den största jämna del både af $^2/_3$ m. och $^3/_4$ m. Svar: $^1/_{12}$ m. De öfriga jämna delarne af dessa längder äro hälften, tredjedelen, fjerdedelen o. s. v. af $^1/_{12}$ m. d. v. s. $^1/_{24}$ m, $^1/_{36}$ m., $^1/_{48}$ m. o. s. v.

Uppdela dessa längder i delar, som äro lika med $^1/_{12}$ m.! Huru utföll delningen? Svar: Den förra längden erhöll 8 och den senare 9 delar. Hvad är således förhållandet mellan $^2/_3$ m. och $^3/_4$ m.? Svar: $^8/_9$.

De i nedanstående frågor förekommande linier och ytor böra till en början uppritas på svarta taflan jämte den storhet, som är den största jämna delen till de bägge storheterna, sedan den af lärjungarne blifvit funnen. De bägge storheterna, som med hvarandra jämföras, böra äfven i början uppdelas i delar, som äro lika stora med denna jämna del, på det att förhållandet må framstå klart för lärjungarne.

1). *Hvad är förhållandet mellan $^1/_3$ m. och $^1/_2$ m.?* Svar $^2/_3$.

Förklaring: $^1/_3$ m. är 2-falden och $^1/_2$ m. är 3-falden af $^1/_6$ m., derför är förhållandet mellan $^1/_3$ m. och $^1/_2$ m. $^2/_3$.

Anm. Läraren bör tidigt rätta ett mycket ofta återkommande fel, som begås af lärjungarne, bestående deri, att de sammanblanda *en half* ($^1/_2$) med *en halfmeter* ($^1/_2$ *m.*), *en tredjedel* ($^1/_3$) med en *tredjedels qvadratmeter* ($^1/_3$ qvm.) o. s. v.

2). *Hvad är förhållandet mellan $^4/_9$ m. och $^5/_6$ m.?* Svar $^8/_{15}$.

Förklaring: $^4/_9$ m. är 8-falden och $^5/_6$ m. är 15-falden af $^1/_{18}$ m., derför är förhållandet mellan $^4/_9$ m. och $^5/_6$ m. $^8/_{15}$.

Anm. När de bägge längderna $^4/_9$ m. och $^5/_6$ m. blifvit uppdelade i delar, som äro lika med deras största jämna del $^1/_{18}$ m., så kan läraren låta lärjungarne jämte förhållandet bestämma längdernas summa, som är $^{23}/_{18}$ m. eller 1 $^5/_{18}$ m, samt deras skilnad, som är $^7/_{18}$ m.

3). *Hvad är förhållandet mellan en rektangel A, hvars sidor äro $^2/_3$ m. och $^5/_7$ m. och en qvadrat, hvars sida är 1 meter d. v. s. 1 qvadratmeter?* Sv. $^{10}/_{21}$.

Förklaring: A är 10-falden och 1 qvm. är 21-falden af en rektangel, hvars sidor är $^1/_3$ m. och $^1/_7$ m., derför är förhållandet mellan A och 1 qvm. $^{10}/_{21}$.

Anm. När storleken till rektangeln A skall angifvas, kunna följande tre uttryckssätt användas: 1) Förhållandet mellan A och 1 qvm. är $^{10}/_{21}$ 2) Qvadratmetertalet till A är $^{10}/_{21}$. 3) A är $^{10}/_{21}$ qvadratmeter.

4) *Förhållandet mellan två linier a och b är* $^5/_7$. *Hvad är förhållandet mellan qvadraterna på a och b?* Svar $^{25}/_{49}$.

Förklaring: Qvadraten på a är 25-falden och qvadraten på b är 49-falden af en qvdrat, hvars sidor äro a:s femtedel eller b:s sjundedel, som äro lika stora.

5) *En linie a är 1* $^1/_4$ *m. och en linie b är 1* $^5/_6$ *m. Hvilket är förhållandet mellan qvadraterna på a och b?* Svar $^{225}/_{484}$.

Förklaring: Qvadraten på a är 225-falden och qvadrater på b är 484-falden af en qvadrat, hvars sidor äro $^1/_{12}$ m.

6) *Förhållandet mellan en af kanterna till en kub A och en af kanterna till en kub B är* $^2/_3$. *Hvad är förhållandet mellan A och B?* Svar $^8/_{27}$.

Förklaring: A är 8-falden och B är 27-falden af en kub, hvars kant är hälften af A:s kant eller tredjedelen af B:s kant.

Sedan lärjungarne blifvit förtrogna med bestämmandet af förhållandet mellan tvänne storheter, öfvas de med att beräkna den ena bland de jämförda storheterna, då förhållandet och den andra storheten äro gifna. Såsom inledning till dessa öfningar uppritar läraren på svarta taflan tvänne räta linier a och b, och tillsäger lärjungarne att efter ögonmått eller med skala bestämma deras förhållande och frågar: «Hvad förstås dermed, att förhållandet mellan a och b är $^3/_7$ (om detta uppgifves)?« Svar: 1) Om b delas i 7 lika delar, så är a 3-falden af en bland b:s delar *eller* kortare: a är 3-falden af b:s sjundedel. 2) Om a delas i 3 lika delar, så är b 7-falden af en bland a:s delar *eller* kortare: b är 7-falden af a:s tredjedel. 3) Om a delas i 3 lika delar och b i 7 lika delar, så är hvarje del af a lika med hvarje del af b, eller kortare: a:s tredjedel är lika med b:s sjundedel.

Dessa trenne former för svaret återgifva visserligen samma tanke, men erfarenheten har visat nödvändigheten af deras inlärande. När förhållandet är ett helt tal eller stambråk d. v. s. den ena af storheterna är en mångfald af den andra, användes såsom svar den i det föregående uppgifna definitionen på mångfald och jämn del.

För att tillämpa det ofvanstående, uppritar läraren på svarta taflan flere räta linier a, b, c, d, o. s. v. och tillsäger en af lärjungarne att upprita en linie, hvars förhållande till a är $^3/_4$. Lärjungen delar a i 4 lika delar och uppritar en rät linie m, som innehåller 3 sådana delar. Derefter tillsäger han en annan att upprita en linie, till hvilken b har förhållandet $^3/_4$. Lärjungen delar då b i 3 lika delar och uppritar en linie n, som innehåller 4 sådana delar. Läraren frågar sedan: «Hvad är centimetertalet till m, när centimetertalet till a är 36?« Svar 27. *Förklaring*: Emedan centimetertalet till a är 36, så är centimetertalet till hvarje del af a och således äfven till hvarje del af m fjerdedelen af 36, som är 9, och då måste centimetertalet till m vara 3-falden af 9, som är 27.

Hvad är centimetertalet till n, när centimetertalet till b är 21? Svar: 28.

Förklaring: Emedan centimetertalet till b är 21, så måste centimetertalet till hvarje del af b, och således äfven till hvarje del af n, vara tredjedelen af 21, som är 7, och då måste centimetertalet till n vara 4-falden af 7, som är 28.

Läraren tillsäger vidare en af lärjungarne att upprita en rät linie, hvars förhållande till linien c är t. ex. $2^1/_3$ eller $^7/_3$. Lärjungen delar då c i 3 lika delar och uppritar derefter en rät linie r, som är 7-falden af c:s tredjedel. Derefter tillsäger läraren en af lärjungarne att upprita en rät linie, till hvilken linien d har förhållandet $2^1/_3$. Lärjungen delar då d i 7 lika delar, och uppritar derefter en rät linie s, som är 3-falden af d:s sjunde del. Sedermera uppgifver läraren centimetertalen till c och d, och låter lärjungarne beräkna centimetertalen till r och s. Centimetertalen till c och d böra till en början vara hela tal och så afpassade, att centimetertalen till r och s äfven blifva hela tal. När lärjungarne vunnit tillräcklig säkerhet, använder läraren äfven bråk och blandade tal såsom centimeter- eller metertal till de först uppritade linierna.

När två storheter af samma slag jämföras med hvarandra enligt det andra jämförelsesättet, har man att taga i betraktande: 1) Storheten, som jämföres. 2) Storheten, med hvilken han jämföres. 3) Förhållandet. De två storheterna, som jämföras, kunna vara dels verkliga storheter, dels tal. Förhållandet är alltid ett tal.

Anm. För korthetens skull kallas i det följande storheten, som jämföres, den *föregående*, och storheten, med hvilken han jämföres den *efterföljande*.

Frågan om storheters jämförelse ger anledning till trenne slag af räkneuppgifter.

1) Den föregående och den efterföljande storheten äro gifna och förhållandet sökes.

2) Den efterföljande storheten och förhållandet äro gifna och den föregående sökes.

3) Den föregående storheten och förhållandet äro gifna och den efterföljande sökes.

För att ytterligare belysa det ofvan sagda, bifogas följande exempel.

a) *Om den föregående storheten är $^3/_4$ m. och den efterföljande $^5/_6$ m., så är förhållandet $^9/_{10}$.*

Häraf kunna bildas följande tre räkneuppgifter:

1) *Den föregående storheten är $^3/_4$ m. och den efterföljande $^5/_6$ m.*

Hvad är förhållandet? eller kortare uttryckt:

Hvad är förhållandet mellan $^3/_4$ m. och $^5/_6$ m.? Sv. $^9/_{10}$.

Uträkning: Först sökes de bägge längdernas största jämna del, som är $^1/_{12}$ m., derefter tänkas de uppdelade i delar, som äro lika med $^1/_{12}$ m., då $^3/_4$ m. erhåller 9 och $^5/_6$ m. 10 delar, hvaraf följer, att förhållandet är $^9/_{10}$.

2) *Den efterföljande storheten är $^5/_6$ m. och förhållandet är $^9/_{10}$.*

Hvilken är den föregående storheten? eller kortare uttryckt: *Hvilken längd är 9 tiondelar* ($^9/_{10}$) *af $^5/_6$ m.?* Sv. $^3/_4$ *m.*

Uträkning: Först sökes *tiondelen* af $^5/_6$ m., som är $^1/_{12}$ m., derefter sökes 9-falden af $^1/_{12}$ m., som är $^9/_{12}$ m. eller $^3/_4$ m.

3) *Den föregående storheten är $^3/_4$ m. och förhållandet är $^9/_{10}$.*

Hvilken är den efterföljande storheten? eller kortare uttryckt: *Af hvilken längd utgör $^3/_4$ m. 9 tiondelar?* Sv. $^5/_6$ m.

Uträkning: Först sökes *niondelen* af $^3/_4$ m., som är $^1/_{12}$ m., derefter tages 10-falden af $^1/_{12}$ m. som är $^{10}/_{12}$ m. eller $^5/_6$ m.

Anm. Sättet för svarens finnande i dessa trenne uppgifter framgår otvunget af de i det föregående meddelade förklaringarne till begreppet *förhållande.*

Enligt det föregående återgifves satsen *a*) med matematiska skriftecken på följande tre olika sätt:

1) $^{3}|_{4}$ m. : $^{5}/_{6}$ m. = $^{9}/_{10}$, som betyder:

Förhållandet mellan $^{3}|_{4}$ *m. och* $^{5}|_{6}$ *m. är* $^{9}|_{10}$ eller fullständigare: *När den föregående storheten är* $^{3}|_{4}$ *m. och den efterföljande* $^{5}|_{6}$ *m., så är förhållandet* $^{9}|_{10}$.

2) $^{9}|_{10}$. $^{5}|_{6}$ m. = $^{3}|_{4}$ m., som betyder:

9 tiondelar af $^{5}|_{6}$ *m. är* $^{3}|_{4}$ *m.* eller fullständigare: *När förhållandet är* $^{9}|_{10}$ *och den efterföljande storheten är* $^{5}|_{6}$ *m., så är den föregående* $^{3}|_{4}$ *m.*

3) $^{3}|_{4}$ m : $^{9}|_{10}$ = $^{5}|_{6}$ m., som betyder:

Den längd, hvaraf $^{3}|_{4}$ *m. utgör 9 tiondelar, är* $^{5}|_{6}$ *m.* eller fullständigare: *När den föregående storheten är* $^{3}|_{4}$ *m. och förhållandet är* $^{9}|_{10}$, *så är den efterföljande* $^{5}|_{6}$ *m.*

På grund af ofvanstående kan man *antingen* uppfatta hvart och ett af uttrycken: »$^{3}|_{4}$ m. : $^{5}|_{6}$ m.», »$^{9}|_{10}$. $^{5}|_{6}$ m.» och »$^{3}|_{4}$ m. : $^{9}|_{10}$», såsom en del af en med matematiska tecken angifven sats, i hvilket fall räknarens uppgift blir att finna den bristande delen af satsen, *eller* kan man — hvilket är det vanligaste — uppfatta hvart och ett af dem såsom tecken för *en enda* storhet, sålunda säger man, att

1) »$^{3}|_{4}$ m. : $^{5}|_{6}$ m.» utmärker *ett tal,* som anger förhållandet mellan $^{3}|_{4}$ m. och $^{5}|_{6}$ m.

2) »$^{9}|_{10}$. $^{5}|_{6}$ m.» utmärker en *längd,* som är 9 tiondelar af $^{5}|_{6}$ m.

3) »$^{3}|_{4}$ m. : $^{9}|_{10}$» utmärker en *längd,* hvaraf $^{3}|_{4}$ m. utgör 9 tiondelar.

I detta senare fall blir vanligen räknarens uppgift att finna ett enklare tecken — om ett sådant finnes, — i stället för det mera invecklade. Man kan nämligen i matematisk skrift all tid utbyta:

»$^{3}|_{4}$ m. : $^{5}|_{6}$ m.» mot det enklare tecknet $^{9}|_{10}$
»$^{9}|_{10}$. $^{5}|_{6}$ m.» » » » » $^{3}|_{4}$ m.
»$^{3}|_{4}$ m. : $^{9}|_{10}$» mot det enklare tecknet $^{5}|_{6}$ m.

På det att läsaren må blifva fullt förtrogen med ofvan angifna sätt att uppfatta betydelsen af s. k. produkter och qvoter, meddelas här nedan dylika jämte nödiga förklaringar.

1) »3 . $2^{1}|_{2}$ kr.» utmärker en *penningsumma* (mynt-

storhet), som är 3-falden af $2\frac{1}{2}$ kr. Denna penningsumma är $7\frac{1}{2}$ kr.

2) »$2\frac{1}{2}$ kr. : 3» utmärker en *penningsumma*, hvaraf $2\frac{1}{2}$ kr. är 3-falden. Denna penningsumma är $\frac{5}{6}$ kr.

3) »$2\frac{1}{2}$ kr. : 3 kr.» utmärker ett *tal*, som anger förhållandet mellan $2\frac{1}{2}$ kr. och 3 kr. Detta tal är $\frac{5}{6}$.

4) »$\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{2}$ ar» utmärker en *yta*, som är 1 tredjedel af $2\frac{1}{2}$ ar. Denna yta är $\frac{5}{6}$ ar.

5) »$2\frac{1}{2}$ ar : $\frac{1}{3}$» utmärker en *yta*, hvaraf $2\frac{1}{2}$ ar utgör 1 tredjedel. Denna yta är $7\frac{1}{2}$ ar.

6) »$2\frac{1}{2}$ ar : $\frac{1}{3}$ ar» utmärker ett *tal*, som anger förhållandet mellan $2\frac{1}{2}$ ar och $\frac{1}{3}$ ar. Detta tal är $\frac{15}{2}$ eller $7\frac{1}{2}$ (största jämna delen till de bägge ytorna är $\frac{1}{6}$ ar).

7) »$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$ tim.» utmärker en *tidrymd*, som är 3 fjerdedelar af $\frac{1}{2}$ tim. Denna tidrymd är $\frac{3}{8}$ tim.

8) »$\frac{1}{2}$ tim. : $\frac{3}{4}$» utmärker en *tidrymd*, hvaraf $\frac{1}{2}$ tim. utgör 3 fjerdedelar. Denna tidrymd är $\frac{2}{3}$ tim.

9) »$\frac{1}{2}$ tim. : $\frac{3}{4}$ tim.» utmärker ett *tal*, som anger förhållandet mellan $\frac{1}{2}$ tim. och $\frac{3}{4}$ tim. Detta tal är $\frac{2}{3}$.

10) »0,7 . 2,52 l.» utmärker en *rymd*, som är 7 tiondelar af 2,52 liter. Denna rymd är 1,764 liter.

11) »2,52 l. : 0,7» utmärker en *rymd*, hvaraf 2,52 l. utgör 7 tiondelar. Denna rymd är 3,6 liter.

»2,52 l. : 0,7 l.» utmärker ett *tal*, som anger förhållandet mellan 2,52 l. och 0,7 l. Detta tal är $\frac{252}{70}$ eller 3,6.

12) »5 kr. : 30 öre» utmärker ett *tal*, som anger förhållandet mellan 5 kr. och 30 öre. Detta tal är $\frac{50}{3}$ eller $16\frac{2}{3}$.

13) »5 kr. : 30» utmärker en *penningsumma*, hvaraf 5 kr. utgör 30-falden. Denna penningsumma är $\frac{1}{6}$ kr.

14) »$2\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{5}$ m.» utmärker en *längd*, som är $2\frac{1}{4}$ eller 9 fjerdedelar af $2\frac{2}{5}$ m. Denna längd är $\frac{27}{5}$ m. eller $5\frac{2}{5}$ m.

15) »$2\frac{2}{5}$ m. : $2\frac{1}{4}$» utmärker en *längd*, hvaraf $2\frac{2}{5}$ m. utgör 9 fjerdedelar. Denna längd är $\frac{48}{45}$ m. eller $1\frac{1}{15}$ m.

16) »$2\frac{2}{5}$ m. : $2\frac{1}{4}$ m.» utmärker ett *tal*, som anger förhållandet mellan $2\frac{2}{5}$ m. och $2\frac{1}{4}$ m. Detta tal är $\frac{16}{15}$ eller $1\frac{1}{15}$. Den största jämna delen till de bägge längderna är $\frac{3}{20}$ m., hvaraf den föregående är 16-

falden och den efterföljande är 15-falden. Såsom jämn del till de bägge längderna kan man äfven använda $^1|_{20}$ m., i hvilket fall förhållandet blir $^{48}|_{45}$, som förkortadt blir $^{16}|_{15}$.

Anm. 1. Det förekommer mycket ofta, att följande med matematiska tecken uttryckta sats:

»$^2|_3$ *m.* : $^3|_4$ *m.* = $2^2{}_3$ *kr.* : 3 *kr.*» återgifves i vanlig skrift med $^2|_3$ *m. förhåller sig till* $^3|_4$ *m., såsom* $2^2/_3$ *kr till* 3 *kr.*

Den ordagranna »öfversättningen» till denna sats är:

Förhållandet mellan $^2|_3$ *m.* : $^3/_4$ *m. är lika med förhållandet mellan* $2^2/_3$ *kr. och* 3 *kr.* Denna senare tydning af satsen är att föredraga, emedan den klarare och bestämdare återger satsens matematiska innehåll. Såväl »$^2{}_3$ m. : $^3{}_4$ m.» som »$2^2/_3$ kr. : 3 kr.» äro lika med talet $^8/_9$.

Anm. 2. Någon gång finner man i räkneböcker och exempelsamlingar följande oriktiga likheter

7 tum×8 tum = 56 qv.-tum, $^2/_3$ m.×$^5/_7$ m. = $^{10}/_{21}$ qvm. o. s. v.

Uttrycken »7 tum × 8 tum,» »$^2{}_3$ m. × $^5{}_7$ m.» o. s. v. hafva lika litet någon matematisk betydelse, som 7 kr. × 8 kr., $^2/_3$ tim. × $^5/_7$ kr.

Anm. 3. Oftare förekommer följande likhet:

$^1/_3$ *kr.*×$^3/_4$ = $^1/_4$ *kr.*, som i vanlig skrift återgifves med »$^1/_3$ *kr. multipliceradt med* $^3/_4$ *är* (*lika med*) $^1/_4$ *kr.*

Denna öfversättning är otydlig och kräfver således en förklaring, för att meningen af lärjungarne skall begripas. Ger man åt likheten formen

»$^3/_4$×$^1/_3$ kr. = $^1/_4$ kr.,» och återgifver den med 3 *fjerdedelar af* $^1/_3$ *kr. är* $^1/_4$ *kr.*, är det fullt begripligt.

I de föregående exemplen hafva de jämförda storheterna varit verkliga. I det följande meddelas några exempel, i hvilka de jämförda storheterna äro *tal.*

17) »$^3|_7$. $^1|_4$» utmärker ett *tal*, som är 3 sjundedelar af talet $^1/_4$. Detta tal är $^3/_{28}$.

18) Om uttrycket »$^1/_4$: $^3/_7$» kan man säga:

1:o) att det utmärker ett *tal*, hvaraf talet $^1/_4$ utgör 3 sjundedelar. Detta tal är $^7/_{12}$.

Uträkning: Först tages *tredjedelen* af talet $^1/_4$, som är $^1/_{12}$. Derefter tages 7-falden af $^1/_{12}$, som är $^7|_{12}$.

2:o) att det utmärker ett *tal*, som anger förhållandet mellan talet $^1/_4$ och talet $^3{}_7$. Detta tal är äfven $^7/_{12}$.

Uträkning: Först sökes den största jämna delen till talen $^1/_4$ och $^3/_7$, som är $^1/_{28}$. Af detta tal $^1/_{28}$, finner man sedan $^1|_4$ vara 7-falden och $^3|_7$ 12-falden, således är förhållandet $^7|_{12}$.

Anm. Ofta får man höra, att »$^1|_4$: $^3|_7$» skulle betyda ett tal, som anger huru många gånger talet $^3|_7$ innehålles i talet $^1|_4$. Med stöd af denna bestämning är det ej möjligt att leda sig till uttryckets betydelse, emedan $^3|_7$ är större än $^1|_4$, och kan således ej innehållas i $^1/_4$. Likväl har man utgått från denna oriktiga bestämning på uttrycket, och gjort följande både i språkligt och logiskt hänseende märkliga härledning: 1 innehålles i $^1/_4$ $^1/_4$ gång, således måste $^1/_7$, som är 7 gånger mindre än 1, innehållas i $^1/_4$ 7 gånger mera och således $^7/_4$ gånger, och i följd deraf måste $^3/_7$, som är 3 gånger mera än $^1/_7$, innehållas i $^1/_4$, 3 gånger mindre än $^7/_4$, som är $^7/_{12}$ gånger. Svaret blir således, att $^3/_7$ innehålles i $^1/_4$ $^7/_{12}$ gånger. Att lärjungarne ej fatta uppgiften framställd under denna form, ej heller svaret jämte dess härledning, kan ej läggas *dem* till last. I ofvannämda dunkla svar kan ej inläggas någon annan mening än, att *talet* $^1/_4$ *är 7 tolftedelar af* $^3/_7$ eller med andra ord, att *förhållandet mellan talet* $^1/_4$ *och* $^3/_7$ *är* $^7/_{12}$ hvilka tydningar äro fullt klara och bestämda.

19) 0,17 . 0,6443 utmärker ett tal, som är 17 hundradelar af 0,6443. Detta tal är 0,109531.

Uträkning: Först tages hundradelen af 0,6443, som är 0,006443, derefter tages 17-falden af 0,006443, som är 0,109531.

20) Om uttrycket 9,6443 : 0,17 kan man säga,

1:o) att det utmärker ett tal, hvaraf 0,6443 utgör 17 hundradelar. Detta tal är 3,79.

Uträkning: Först tages 17-delen af 0,6443, som är 0,0379, derefter tages 100-falden af 0,0379, som är 3,79.

Samma svar erhålles äfven, om man först tager 100-falden af 0,6443, som är 64,43, och derefter 17-delen af 65,43, som äfven är 3,79.

2:o) att det utmärker ett *tal*, som anger förhållandet mellan 0,6433 och 0,17. Detta tal är $^{6433}/_{1700}$, hvilket är lika med decimalbråket 3,79.

Anm. 1. Om man vill hafva svaret angifvet i decimalbråk, såsom vanligen är förhållandet, bör det *första* sättet användas vid den »mekaniska» räkningen, emedan man derigenom i de flesta fall snabbast erhåller svaret. Beräknar man t. ex. 0,06356 : 0,7 på det första sättet, så kan man utan någon »mekanisk» räkning finna svaret 0,0908. Skall man deremot beräkna det efter det andra sättet, så erhålles först $^{6356}/_{70000}$, hvaraf sedan skall beräknas decimalbråket 0,0908. Då det senare talet har lika många eller flere decimaler till höger om decimaltecknet än det förra, är det likgiltigt, hvilketdera sättet man använder.

Anm. 2. Med *multiplikation* menar man sättet att finna *den föregående* storheten, då förhållandet och den efterföljande storheten äro kända. Med *division* åter menar man, *dels* sättet att finna den *efterföljande* storheten, då förhållandet och den föregående storheten äro kända, *dels* sättet att finna *förhållandet*, då den föregående och den efterföljande storheten äro kända.

Att dessa benämningar i läran om bråk äro i hög grad oegentliga och vilseledande, har jag i det föregående anmärkt.

Efter denna framställning öfver tydningen af s. k. produkter och qvoter, skall jag i det följande redogöra för lösningen af några räkneuppgifter, stödjande mig på begreppet *förhållande*.

I många räkneuppgifter förekommer det, att en af storheterna är summa af tvänne andra.

a   *b*   *c*

Låt *a*, *b* och *c* vara tre räta linier så beskaffade, att *a* är summa af *b* och *c*. Jämföras nu med hvarandra två af dessa linier, hvilka som helst, så erhållas 6 tal eller förhållanden. 1) Förhållandet mellan *a* och *b*. 2) Förhållandet mellan *b* och *a*. 3) Förhållandet mellan *a* och *c*. 4) Förhållandet mellan *c* och *a*. 5) Förhållandet mellan *b* och *c*. 6) Förhållandet mellan *c* och *b*.

Om ett af dessa förhållanden är kändt, så är det lätt att beräkna de öfriga. Vore t. ex. förhållandet mellan *c* och *b* $^3/_4$, så vet man, att, om *c* delas i 3 och *b* i 4 delar, *c:s* och *b:s* delar skola blifva lika stora. Men *a* antogs vara lika stor med *b* och *c* tillsammans, derför skall *a* vara 7-falden af en bland *c:s* eller *b:s* delar, och i följd deraf skall förhållandet mellan 1) *a* och *b* vara $^7/_3$, 2) *b* och *a* vara $^3/_7$, 3) *a* och *c* vara $^7/_4$, 4) *c* och *a* vara $^4/_7$, och 5) *b* och *c* vara $^4/_3$.

Är nu centimetertalet till någon af de tre linierna kändt, så är det lätt att beräkna centimetertalen till de bägge öfriga. Centimetertalet till *a* är t. ex. $3^1/_3$. Emedan förhållandet mellan *b* och *a* är $^4/_7$, så är centimetertalet till *b* 4 sjundedelar af *a:s* centimetertal $3^1/_3$, som är $1^{19}/_{21}$. Om centimetertalet till *c* vet man, 1) att det är skilnad mellan *a:s* och *b:s* centimetertal $3^1/_3$ och $1^{19}/_{21}$, som är $1^9/_{21}$, eller $1^3/_7$, 2) att det är 3 sjundedelar af $3^1/_3$, som äfven är $1^3/_7$.

Lika lätt är det att beräkna centimetertalen till *a* och en af delarne, när centimetertalet till den andra delen är kändt.

När en storhet är summa af tvänne andra, så förekomma 1) de tre storlekstalen till de trenne storheterna och 2) de 6 förhållandena.

I det föregående är visadt, att, när *ett* storlekstal och *ett* förhållande äro kända, så kan man finna de öfriga sju talen.

Äro deremot två bland storlekstalen kända, så är det äfvenledes lätt att beräkna den tredje storhetens storlekstal, och derefter de sex förhållandena.

För att tillämpa det ofvan sagda meddelas här nedan några exempel.

1. *Ett stycke tyg, hvars längd är 55 meter, skall delas mellan A och B så, att A:s andel blir 3 åttondelar af B:s. Hvilka äro metertalen till A:s och B:s andelar?*

Svar: 15 och 40.

Anm. Tygstyckets metertal är *summa* af metertalen till *A:s* och *B:s* andelar.

C ——— *E* ——————————— *D*

Låt *CD* föreställa tygstycket, *CE A:s* andel och *ED B:s* andel.

Lösning: Emedan *A:s* andel *CE* är 3 åttondelar af *B:s* andel *ED* d. v. s. förhållandet mellan *CE* och *CD* är $^3|_8$, så måste, om *CE* delas i 3 lika delar och *ED* i 8 lika delar, *CE:s* och *ED:s* delar blifva lika. Derigenom blir *CD* delad i 11 lika delar. Nu är metertalet till *CD* 55, derför är metertalet till hvarje del af *CD* 11-delen 55, som är 5, och metertalet till *CE* 3-falden af 5 eller 15, samt metertalet till *ED* 8-falden af 5 eller 40.

Denna fullständiga form för lösningen kan läraren till en början låta lärjungarne använda. Sedan de blifvit fullt förtrogna med begreppet *förhållande*, kunna de använda följande kortare form för *lösningen:* Emedan förhållandet mellan *CE* och *ED* är $^3/_8$, så måste förhållandet mellan *CE* och *CD* vara $^3|_{11}$, och förhållandet mellan *ED* och *CD* $^8/_{11}$. Metertalet, till *CD* är 55, derför är metertalet till *CE* 3 elftedelar af 55 eller 15, och metertalet till *ED* 8 elftedelar af 55 eller 40.

2. *Mellan tvänne orter A och B är en järnväg, hvars längd är 10 mil. Från A går ett tåg kl. 7 f. m. till B med en hastighet af $1^3|_4$ mil i timmen. Från B går vid samma tid ett tåg till A med en hastighet af 2 mil i timmen.*

a) Huru långt från A mötas tågen? Svar: $4^2|_3$ mil.
b) När mötas tågen? Svar: kl. 9 t. 40 m. f. m.

A ——— C ——— B

Låt AB föreställa jernvägen mellan orterna A och B och låt C vara den punkt, der tågen mötas.

Anm. $AB = AC + CB$.

Lösning: Emedan tåget, som går från A, tillryggalägger $1^3/_4$ mil i timmen, och tåget från B 2 mil i timmen, så måste förhållandet mellan de väglängder, som det förra och det senare tåget tillryggalägga under *samma* tid, vara lika med förhållandet mellan $1^3/_4$ mil, och 2 mil, som är $^7/_8$, derför är förhållandet mellan AC och CB, som äro tillryggalagda på samma tid, $^7/_8$, och i följd deraf är förhållandet mellan AC och AB $^7/_{15}$. Men AB är 10 mil lång, derför är AC:s längd 7 femtondelar af 10 mil, som är $4^2/_3$ mil.

Tåget från A tillryggalägger $1^3/_4$ mil under 1 timme, derför tillryggalägger det $^1/_{12}$ mil (en jämn del till $1^3/_4$ mil och $4^2/_3$ mil), som är 21-delen af $1^3/_4$ mil, under 21-delen af 1 timme, som är $^1/_{21}$ timme, och $4^2/_3$ mil, som är 56-falden af $^1/_{12}$ mil, under 56-falden af $^1/_{21}$ timme, som är $2^2/_3$ timme eller 2 t. 40 m. Derför mötas tågen 2 t. 40 m. efter kl. 7 f. m. eller kl. 9 t. 40 m. f. m.

Vill man använda *förhållande* vid beräkningen af tidpunkten för mötet, så blir *lösningen* följande:

Tåget från A tillryggalägger $1^3/_4$ mil under 1 timme, derför tillryggalägger det $4^2/_3$ mil, som är 8 tredjedelar (förhållandet mellan $4^2/_3$ mil och $1^3/_4$ mil), af $1^3/_4$ mil, under 8 tredjedelar af 1 timme, som är $2^2/_3$ timme eller 2 t. 40 m. Derför mötas tågen etc.

I stället för att, såsom här skett, först beräkna miltalet till AC, och derefter tidpunkten, när tågen mötas, kan man först beräkna denna tidpunkt, och derefter miltalet till AC.

Emedan tåget från A tillryggalägger $1^3/_4$ mil, och tåget från B 2 mil under 1 timme, tillryggalägga båda tågen tillsammans under 1 timme summan af $1^3/_4$ mil och 2 mil eller $3^3/_4$ mil. Tågen skola mötas, när de tillsammans tillryggalagt hela järnvägens längd 10 mil. Förhållandet mellan 10 mil och $3^3/_4$ mil är $^8/_3$, derför mötas tågen efter 8 tredjedelar af 1 timme, som är $2^2/_3$ timme eller 2 t. 40 m. Derför mötas tågen etc.

Tåget från *A* tillryggalägger under 1 timme $1\frac{3}{4}$ mil, derför tillryggalägger det under $2\frac{2}{3}$ timme, som är 8 tredjedelar af 1 timme, 8 tredjedelar af $1\frac{3}{4}$ mil, som är $4\frac{2}{3}$ mil.

Anm. Om tågen afgå vid olika tidpunkter, blir uppgiften obetydligt svårare; sedan man nämligen beräknat den väglängd, som det tidigare tåget tillryggalagt mellan tågens afgångstider, och tagit skilnaden mellan järnvägens hela längd, och denna väglängd, som det tidigare tåget tillryggalagt, sammanfaller den återstående delen af uppgiften med ofvanstående.

3. *Från en station A vid en järnväg afgår ett tåg kl. 8 f. m. i den riktning, hvari en annan station B vid samma järnväg är belägen. Från stationen B afgår tåg samtidigt i samma riktning, som tåget från A. Tåget från A har en hastighet af* $3\frac{1}{2}$ *mil i timmen, och tåget från B en hastighet af* $2\frac{1}{3}$ *mil i timmen. Afståndet mellan A och B är* $4\frac{2}{3}$ *mil.*

a) Huru långt från B upphinner tåget från A tåget från B? Sv.: $9\frac{1}{3}$ *mil.*

b) När upphinner tåget från A tåget från B? Sv. kl. 11 f. m.

A ——— *B* ——————— *C*

Låt *AC* föreställa järnvägen med stationerna *A* och *B*, samt *C* det ställe, der tåget från *A* upphinner tåget från *B*.

Anm. AC = AB + BC.

Lösning: Emedan tåget från *A* tillryggalägger $3\frac{1}{2}$ mil i timmen, och tåget från *B* $2\frac{1}{3}$ mil i timmen, så måste förhållandet mellan *BC* och *AC*, som äro tillryggalagda under *samma* tid, vara lika med förhållandet mellan $2\frac{1}{3}$ mil och $3\frac{1}{2}$ mil, som är $\frac{2}{3}$, och i följd deraf är förhållandet mellan *BC* och *AB* 2. Men *AB* är $4\frac{2}{3}$ mil, derför är *BC* 2-falden af $4\frac{2}{3}$ mil, som är $9\frac{1}{3}$ mil.

Tåget från *B* tillryggalägger $2\frac{1}{3}$ mil under 1 timme, derför tillryggalägger det $9\frac{1}{3}$ mil, som är 4-falden af $2\frac{1}{3}$ mil, under 4 timmar. Derför upphinner tåget från *A* tåget från *B* 4 timmar efter kl. 7 f. m. eller kl. 11 f. m.

I stället för att först beräkna miltalet till *BC* och derefter tidpunkten för tågens sammanträffande, kan man liksom i förra uppgiften först beräkna denna tidpunkt, och derefter miltalet till *BC*.

Emedan tåget från *A* tillryggalägger $3\frac{1}{2}$ mil, och tåget *B* $2\frac{1}{3}$ mil, och tågen gå i samma riktning, så måste afståndet mellan tågen hvarje timme minskas med skilnaden mellan $3\frac{1}{2}$ mil och $2\frac{1}{3}$ mil, som är $1\frac{1}{6}$ mil. Afståndet var kl. 7 f. m. $4\frac{2}{3}$ mil, som är 4-falden af $1\frac{1}{6}$ mil, således dröjer det 4 timmar, innan afståndet minskas med $4\frac{2}{3}$ mil, då tågen sammanträffa.

Tåget från *B* tillryggalägger $2\frac{1}{3}$ mil i timmen, och således under 4 timmar 4-falden af $2\frac{1}{3}$ mil, som är $9\frac{1}{3}$ mil.

Anm. 1. I den händelse, att tågen skulle afgå från *A* och *B* vid olika tidpunkter, blir uppgiften obetydligt svårare. Se vidare Anm. efter föregående uppgift!

4. *Tim- och minutvisare på ett ur täcka hvarandra mellan 4 och 5.*

Huru mycket är klockan? Sv. 4 t. $21\frac{9}{11}$ m.

Kalla den punkt *a* på urtaflans omkrets, som beröres af ändpunkterna på visarne, då de täcka hvarandra.

Anm. Den del af urtaflans omkrets, som ligger mellan 12 och *a* (12—*a*) är lika med summan af de delar, som ligga mellan 12 och 4 (12—4) samt mellan 4 och *a* (4—*a*).

Lösning: Emedan förhållandet mellan timvisarens hastighet och minutvisarens är $\frac{1}{12}$, så är förhållandet mellan bågen (4—*a*) och bågen (12—*a*) $\frac{1}{12}$, och i följd deraf förhållandet mellan bågen (12—4) och bågen (12—a) $\frac{11}{12}$, derför är förhållandet mellan den senare och den förra bågen $\frac{12}{11}$. Bågen (12—4) innehåller 20 delstreck, derför måste bågen (12—a) innehålla 12 elftedelar af 20 delstreck, som är $21\frac{9}{11}$ delstreck, och i följd deraf är kl. 4 t. $21\frac{9}{11}$ m., när tim- och minutvisare täcka hvarandra mellan 4 och 5.

5. *A köpte varor, hvilka han sålde med en vinst af 8 procent af inköpssumman. Försäljningssumman var 1,566 kr.*

Huru stor var A:s vinst? Sv. 116 kr.

Anm. Försäljningssumman är lika med inköpssumman tillsammans med vinsten.

Lösning: Emedan vinsten var 8 procent af inköpssumman, så måste förhållandet mellan vinsten och inköpssumman vara 8 hundradelar eller $\frac{2}{25}$, derför var förhållandet mellan vinsten och försäljningssumman $\frac{2}{27}$. Försäljningssumman var 1,566 kr., derför var vinsten 2 tjugusjundedelar af 1,566 kr., som är 116 kr.

6. *En annan gång köpte A varor, hvilka han nödgades sälja med en förlust af $5^1|_3$ procent af inköpssumman. Försäljningssumman var 4,757 kr.*

Huru stor var A:s förlust? Sv. 268 kr.

Anm. Inköpssumman är lika med försäljningssumman tillsammans med förlusten.

Lösning: Emedan förlusten var $5^1|_3$ procent af inköpssumman, så måste förhållandet mellan förlusten och inköpssumman vara $5^1|_3$ hundradelar eller $^{16}|_{300}$ eller $^4|_{75}$, och i följd deraf är förhållandet mellan försäljningssumman och inköpssumman $^{71}|_{75}$, och förhållandet mellan förlusten och försäljningssumman $^4|_{71}$. Försäljningssumman var 4,757 kr., derför var förlusten 4 sjutioendelar af 4,757 kr., som är 268 kr.

7. *Ett granitstyckes vigt, när det under vägningen hölls helt och hållet nedsänkt i vatten, befanns vara 2 kg. 8 hg. Granitens egentliga vigt är $2^3|_4$.*

Hvad vägde granitstycket i luften? Sv. 4 kg. 4 hg.

Anm. 1. En fast eller flytande kropps egentliga vigt är förhållandet mellan kroppens vigt och vigten på rent vatten af 0 gr. med lika stor rymd som kroppens. Emedan fasta och flytande kroppar hafva olika rymd vid olika temperaturer, så växlar en kropps egentliga vigt med hans gradtal. Det tal eller förhållande, som i tabeller finnes upptaget såsom egentlig vigt, är bestämd för en fast kropp, då hans temperaturs gradtal är 0, och för en vätska, då hennes temperaturs gradtal är 15. Det tal deremot, som i tabellen är upptaget såsom egentlig vigt till en gas, är förhållandet mellan vigten på en rymd af denna gas och vigten på en lika stor rymd luft, då gradtalet är 0 och millimetertalet till trycket hos gasen och luften är 760. När i räkneuppgifter om egentlig vigt en kropps gradtal ej är angifvet, så förutsättes det vara 0, om kroppen är fast, och 15, om kroppen är flytande. Vid räkneuppgifter om gaser böra alltid temperaturens gradtal och tryckets millimetertal vara angifna.

Anm. 2. Enligt den Archimediska principen *förlorar en kropp, som delvis eller helt och hållet nedsänkes i en vätska, så mycket af sin vigt, som den af honom undanträngda vätskan väger*, eller med andra: *En kropps vigt i luften är summan af kroppen vigt i en vätska* och *den undanträngda vätskans vigt.*

Lösning: Emedan granitens egentliga vigt är $2^3|_4$, så är förhållandet mellan det undanträngda vattnets vigt och kroppens vigt i luften $2^3|_4$ eller $^{11}|_4$, derför är förhållandet mellan kroppens vigt i luften och kroppens vigt i vattnet $^{11}|_7$. Granitstyckets vigt i vattnet var 2 kg. 8 hg. eller 28 hg., derför var granitstyckets vigt i luften 11 sjundedelar af 28 hg., som är 44 hg. eller 4 kg. 4 hg.

8. *De nuvarande mynten à 1 krona, som väga $7^1/_2$ gr., innehålla 80 proc. silfver och 20 procent koppar. En guldsmed nedmälte 66 dylika mynt för att erhålla s. k. arbetssilfver, som är $13^1/_4$-lödigt.*

Huru mycket silfver borde han tillsätta? Sv. 81 gram.

Anm. Vigtenheten för silfver var 1 mark (49 ort 55 korn), som indelas i 16 lod. Enär värdet af en blandning af silfver och någon eller några oädla metaller bestämmes efter vigten på silfret, är det nödvändigt att på något sätt ange silfvermängden i en blandning. Detta skedde på det sätt, att man angaf antalet lod silfver, som hvarje mark af blandningen innehöll. Sålunda sades en blandning vara $13^1/_4$-lödig, när hvarje mark af blandningen innehöll $13^1/_4$ lod silfver.

Lösning: Emedan ett mynt à 1 krona väger $7^1/_2$ gr., och 80 procent deraf är silfver, så måste vigten på silfret i hvarje mynt vara 80 hundradelar eller 4 femtedelar af $7^1/_2$ gr., som är 6 gram, och i följd häraf är vigten på kopparn i hvarje dylikt mynt $1^1/_2$ gr. Vigten på silfret i de 66 mynten är således 66-falden af 6 gram eller 396 gram, och vigten på kopparn 66-falden af $1^1/_2$ gram eller 99 gram. I $13^1/_4$-lödigt silfver är förhållandet mellan vigten på silfret och vigten på blandningen $13^1/_4$ *sextondelar*, som är $^{53}/_{64}$, derför är förhållandet mellan vigten på silfret och vigten på kopparn i en dylik blandning $^{53}/_{11}$. Vigten på kopparn i alla mynten var 99 gram, derför bör vigten på silfret vara 53 elftedelar af 99 gram, som är 477 gram, för att blandningen må blifva $13^1/_4$-lödig. Vigten på silfret i alla mynten var 396 gram, således måste guldsmeden tillsätta skilnaden mellan 477 gram och 396 gram eller 81 gram silfver.

9) *En guldsmed hade en blandning af guld och koppar, hvilken var $23^5/_{12}$ karat fin. Blandningen vägde 2 hg. 88 gr. Till denna blandning smälte han koppar, så att den nya blandningen blef $18^1/_3$ karat fin.*

Huru mycket vägde den tillsatta kopparn? $79^{47}/_{55}$ gr.

Anm. Vigtenheten för guld var 1 *mark* (52 ort 8 korn), som indelades i 24 karat. Finheten af en blandning, hvari guld ingick, angafs genom det antal karat, som 1 mark af blandningen innehöll. I handeln förekomma tre olika guldblandningar. 1) *Dukatguld*, som är $23^5/_{12}$ karat fint. 2) *Pistolguld*, som är $20^1/_3$ karat fint, och 3) *Kronguld* (äfven kalladt 18-karats guld), som är $18^1/_3$ karat fint.

Lösning: Emedan den första guldblandningen var $23^5/_{12}$ karat fin, så var förhållandet mellan guldets vigt och blandningens vigt $23^5/_{12}$ tjugufjerdelar eller $^{281}/_{288}$. Den första blandningen vägde 2 hg. 88 gr., derför var guldes vigt $^{281}/_{288}$ af 2 hg. 88 gr., som är 281 gr., och i följd deraf var kopparns vigt 7 gr. Den nya blandningen var $18^1/_3$ karat fin, derför var förhållandet mellan guldets vigt och blandningens vigt $18^1/_3$ *tjugufjerdedelar* eller $^{55}/_{72}$, derför var förhållandet mellan kopparns vigt och guldets vigt $^{17}/_{55}$. Vigten på guldet i den nya blandningen var äfven 281 gram, derför var kopparns vigt $^{17}/_{55}$ af 281 gr., som är $86^{47}/_{55}$ gr. Men i blandningen funnos 7 gr. koppar, derför skulle den tillsatta kopparn väga $79^{47}/_{55}$ gram.

I det föregående har jag sökt visa, huru en mängd uppgifter lätt kunna lösas med tillhjelp af begreppet *förhållande.* En del af dessa uppgifter har man ansett vara för svåra att upptagas i de aritmetiska läroböckerna och exempelsamlingarne och först i algebran upptagit dem såsom tillämpningar till läran om likheter. Af en del andra har man bildat fristående »räknesätt», ehuru de blott i grunden äro tillämpningar till den allmänna läran om tal.

Den stora betydelsen af begreppet förhållande framstår ännu klarare, när talläran tillämpas på geometriska storheter. Redan när man skall uppmäta storheter såsom längder, ytor, rymder m. m. med i lag bestämda mått, framträder detta begrepp, ty att uppmäta t. ex. en längd med metern som mått vill ingenting annat säga, än att bestämma förhållandet mellan längden och längdenheten meter, och att uppmäta en yta med qvadratmetern som mått betyder att bestämma förhållandet mellan ytan och ytenheten qvadratmeter.

Anm. Att förhållandet mellan en längd och metern *kallas* längdens *metertal*, och förhållandet mellan en yta och qvadratmetern *kallas* ytans *qvadratmetertal* o. s. v. ändrar ej saken. Det händer deremot mycket ofta att man för korthetens skull använder särskilda namn på en del förhållanden, sålunda hafva vi sett, att *egentlig vigt* är namnet på *förhållandet* mellan vigten af en kropp och vigten på en lika stor rymd vatten. På samma sätt förhåller det sig med ordet *kurs*, som är namnet på förhållandet mellan tvänne länders myntenheter.

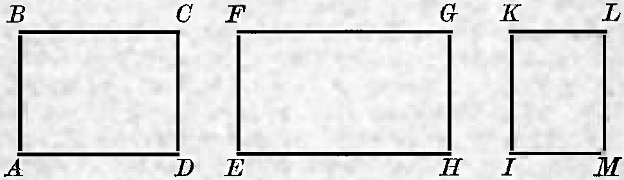
Att »*kursen* på London» är 18,16 betyder, att förhållandet mellan den engelska myntenheten *pound sterling* och den svenska myntenheten *krona* är 18,16. Till grund för den del af matematiken, som kallas *trigonometri*, ligger begreppet förhållande, hvilket äfven der får särskilda namn, som *sinus*, *cosinus*, *tangent* o. s. v. Vid matematikens tillämpning på de fysiska företeelserna förekommer oupphörligt förhållande, hvilket äfven der tilldelas olika namn, såsom *utvidgningskoefficient*, *brytningsexponent*, *egentligt värme* o. s. v. Man kan således med skäl säga, att det begrepp, som benämnes med ordet *förhållande*, är ett af matematikens vigtigaste, hvarför det ej bör, såsom hitintills skett, helt och hållet försummas vid undervisningen i räkneläran, särdeles som betydelsen af de s. k. multiplikations- och divisionsuppgifterna i bråk ej kunna på något nöjaktigt sätt förklaras *utan* detta begrepp.

Jag öfvergår nu till en framställning af några satser om förhållanden mellan åtskilliga geometriska figurer jämte nödiga förklaringar och exempel.

Om förhållandet mellan rektanglar.

1. *Om tvänne rektanglar hafva lika stora a) höjder b) baser, så är förhållandet mellan rektanglarne lika med förhållandet mellan a) baserna b) höjderna.*

Anm. Af två närliggande sidor i en rektangel plägar man kalla den ena *bas* och den andra *höjd*. Rektangeln säges äfven innehållas af dessa sidor.



Låt i rektanglarne *ABCD* och *EFGH* höjderna *AB* och *FE* vara lika stora, och antag förhållandet mellan baserna *AD* och *EH* vara $^3/_4$, så skall bevisas, att förhållandet mellan *ABCD* och *EFGH* äfven är $^3/_4$.

Bevis: En jämn del till *ABCD* och *EFGH* är en rektangel *IKLM*, hvars höjd *KI* är lika stor med *AB* eller *EF*, och hvars bas *IM* är lika stor med *ADs tredjedel* eller *EHs fjerdedel*. Af denna jämna del *IKLM* är *ABCD* 3-falden och *EFGH* 4-falden, derför är förhållandet mellan *ABCD* och *EFGH* äfven $^3/_4$. Om förhållandet mellan *AD* och *EH* vore något annat tal än $^3/_4$ t. ex. $^5/_{12}$ eller $2^1/_2$, så vore äfven förhållandet mellan rektanglarne i förra fallet $^5/_{12}$ och i senare fallet $2^1/_2$.

På samma sätt bevisas, att förhållandet mellan rektanglarne är lika med förhållandet mellan höjderna, när baserna äro lika stora.

Exempel: *I tvänne rektanglar A och B äro höjderna lika stora. Basen i A är $^4/_9$ m. och basen i B $^7/_{12}$ m. Hvad är förhållandet mellan A och B?* Sv. $^{16}/_{21}$.

Lösning 1. En jämn del till $^4/_9$ m. och $^7/_{12}$ m. är $^1/_{36}$ m., hvaraf $^4/_9$ m. är 16-falden och $^7/_{12}$ m. 21-falden, derför är förhållandet mellan basen i *A* och basen i *B* $^{16}/_{21}$, hvilket tal enligt sats 1 äfven är förhållandet mellan *A* och *B*.

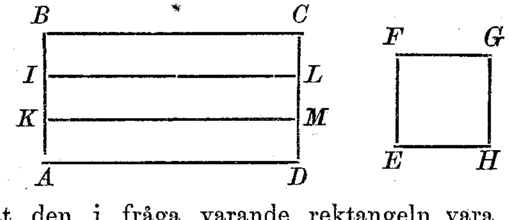
Lösning 2. En jämn del till *A* och *B* är en rektangel *C*, hvars bas är $^1/_{36}$ m. (en jämn del till baserna), och hvars höjd är lika stor med *As* eller *Bs* höjd. Af denna *C* är *A* 16-falden och *B* 21-falden, derför är förhållandet mellan *A* och *B* $^{16}|_{21}$.

Anm. Den senare lösningen bör i början användas, emedan den är lättare för lärjungarne att fatta.

Följdsats: Om i en rektangel en af sidorna är a) 1 meter b) 1 centimeter c) 1 fot o. s. v., så är a) qvadratmetertalet b) qvadratcentimetertalet c) qvadratfottalet o. s. v. till rektangeln lika med a) metertalet b) centimetertalet c) fottalet o. s. v. till rektangelns andra sida.

Exempel: En rektangels qvadratcentimetertal är $3^1/_2$ och höjdens centimetertal är $1^1|_2$.

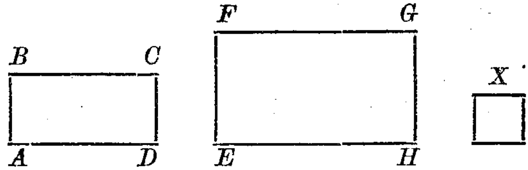
Hvilket är basens centimetertal? $2^1|_3$.



Låt den i fråga varande rektangeln vara *ABCD* och *EFGH* en qvadratcentimeter.

Lösning: Om höjden *AB* delas genom punkterna *I* och *K* i tre lika delar, och jämlöpande linier *IL* och *KM* med *AD* eller *BC* dragas, så blir rektangeln genom dessa linier delad i tre lika delar. Nu är qvadratcentimetertalet till *ABCD* $3^1/_2$, derför är qvadratcentimetertalet till hvarje del af rektangeln *tredjedelen* af $3\frac{1}{2}$, som är $\frac{7}{6}$, och i följd deraf är qvadratcentimetertalet till tvänne delar tillsammans eller till rektangeln *AILD* 2-falden af $\frac{7}{6}$, som är $2\frac{1}{3}$. Men centimetertalet till *AB* är $1\frac{1}{2}$, derför är centimetertalet till *AI* 1. Således är qvadratcentimetertalet till *AILD* $2\frac{1}{3}$ och centimetertalet till höjden *IA* 1, derför är enligt ofvanstående följdsats centimetertalet till basen *AD* äfven $2\frac{1}{3}$.

2. *Förhållandet mellan tvänne rektanglar är lika med produkten af förhållandet mellan deras baser och förhållandet mellan deras höjder.*



Låt *ABCD* och *EFGH* vara tvänne rektanglar, i hvilka förhållandet mellan *AD* och *EH* antages vara $\frac{5}{7}$, och förhållandet mellan *AB* och *EF* $\frac{2}{3}$, så skall bevisas, att förhållandet mellan *ABCD* och *EFGH* är $\frac{10}{21}$, som är produkt af $\frac{5}{7}$ och $\frac{2}{3}$.

Bevis: En jämn del till de bägge rektanglarne är en rektangel *X*, hvars bas är lika med *ADs femtedel* eller *EHs sjundedel* och höjd lika med *ABs hälft* eller *EFs tredjedel.* Af denna rektangel *X* är *ABCD* 10-falden och *EFGH* 21-falden, derför är förhållandet emellan dem $\frac{10}{21}$.

Om förhållandena $\frac{2}{3}$ och $\frac{5}{7}$ utbytas mot andra, så sker beviset på samma sätt.

Exempel: I en rektangel A är basen $5\frac{1}{4}$ cm. och höjden $2\frac{2}{5}$ cm; i en rektangel B är basen $2\frac{1}{4}$ cm. och höjden $3\frac{3}{4}$ cm.

Hvad är förhållandet mellan A och B? Sv. $1\frac{37}{75}$.

(Upprita figur.)

Lösning 1: Förhållandet mellan baserna i *A* och *B* är $\frac{7}{3}$, och mellan deras höjder $\frac{16}{25}$, derför är enligt sats 2 förhållandet mellan *A* och *B* $\frac{112}{75}$ eller $1\frac{37}{75}$, som är produkt af $\frac{7}{3}$ och $\frac{16}{25}$.

Lösning 2: (utan användning af sats 2). En jämn del till *A* och *B* är en rektangel *C*, hvars bas är $\frac{1}{4}$

cm. (en jämn del till baserna), och höjd är $^1/_{20}$ cm. (en jämn del till höjderna), *A* är 1008-falden, och *B* 675-falden af *C*, derför är förhållandet mellan *A* och *B* $^{1008}/_{675}$ eller $^{112}/_{75}$ eller $1^{37}/_{75}$.

Anm. Uppdelas *A* i delar, som äro lika stora med *C*, så blir delarnes antal i hvarje rad 21, och radernas antal 48, derför blir delarnes antal i *A* 48.21 eller 1008. Förfares på samma sätt med *B*, så blir delarnes antal i hvarje rad 9, och radernas antal 75, derför blir delarnes antal i *B* 75.9 eller 675.

Följdsats: Förhållandet mellan en rektangel A och en qvadrat B, i hvilken hvarje sida är 1 m., är produkt af förhållandet mellan basen i A och 1 meter och förhållandet mellan höjden i A och 1 meter, eller kortare: *En rektangels A qvadratmetertal är produkt af basens metertal och höjdens metertal.*

Anm. Deremot är enligt sats 2 produkten af *metertalet* till *As* bas och *decimetertalet* till *As* höjd förhållandet mellan *A* och en rektangel, hvars bas är *1 meter* och höjd *1 decimeter*.

Exempel: Metertalet till basen i A är $2^1/_2$ och till höjden $3^1/_2$.

Hvilket är qvadratmetertalet till A? Sv. $8^1/_3$.

Lösning 1: Enligt följdsatsen är qvadratmetertalet till *A* produkt af $2^1/_2$ och $3^1/_3$, som är $8^1/_3$.

Lösning 2: (utan användning af följdsatsen). En jämn del till *A* och 1 qvadratmeter är en rektangel *C*, hvars bas är $^1/_2$ m. och höjd $^1/_3$ m. Af denna rektangel *C* är *A* 50(5.10)-falden och qvadratmetern 6-falden, derför är qvadratmetertalet till *A* $^{50}/_6$ eller $8^1/_3$.

3. *Om förhållandet mellan baserna i tvänne rektanglar är lika med förhållandet mellan höjderna, så är förhållandet mellan rektanglarne tvådignitet till förhållandet mellan baserna eller förhållandet mellan höjderna.*

Satsen följer omedelbart ur sats 2.

Följdsats 1: Förhållandet mellan tvänne qvadrater är tvådignitet till förhållandet mellan en af sidorna i den ena och en af sidorna i den andra.

Exempel: Metertalet till hvarje sida i en qvadrat A är 0,21 och metertalet till hvarje sida i en qvadrat B är 0,7.

Hvad är förhållandet mellan A och B? Sv. 0,09.

Lösning 1: Förhållandet mellan en af *As* sidor och en af *Bs* är $^{21}/_{70}$ eller 0,3, derför är enligt följdsatsen förhållandet mellan *A* och *B* tvådignitet till 0,3, som är 0,09.

Lösning 2: En jämn del till *A* och *B* är en qvadrat *C*, i hvilken hvarje sida är 0,01 m. (1 cm.), *A* är 441(21 . 21)-falden och *B* 4900(70 . 70)-falden af *C*, derför är förhållandet mellan *A* och *B* $^{441}/_{4900}$ eller 0,09.

Följdsats 2: En qvadrats qvadratmetertal är tvådignitet till hvarje sidas metertal.

Exempel: Hvarje sida i en qvadrat A är $7^1/_2$ *decimeter. Hvilket är qvadratmetertalet till A?* Sv. $^9/_{16}$.

Lösning 1: Emedan *decimetertalet* till hvarje sida i *A* är $7^1/_2$, så är *metertalet* tiondelen af $7^1/_2$, som är $^3/_4$, och qvadratmetertalet till *A* tvådignitet till $^3/_4$, som är $^9/_{16}$.

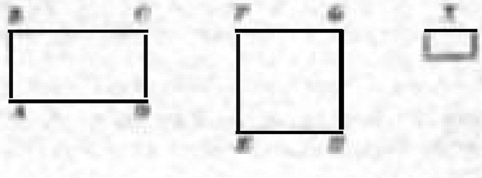
Lösning 2: (utan användning af följdsatsen 2). En jämn del till qvadraten *A* och qvadratmetern är en qvadrat *C*, hvars sida är $^1/_2$ decimeter. Af denna qvadrat *C* är *A* 225(15 . 15)-falden och qvadratmetern 400(20 . 20)-falden, derför är förhållandet mellan *A* och qvadratmetern $^{225}/_{400}$ eller $^9/_{16}$.

Anm. $^{225}/_4$ eller $56^1/_4$, som är tvådignitet till $7^1/_2$, är qvadratdecimetertal till *A*.

Följdsats 3: Om fyra räta linier a, b, c och d äro så beskaffade, att förhållandet mellan a och b är lika med förhållandet mellan c och d. så skall förhållandet mellan den rektangel, som har a och c till sidor, och den rektangel, som har b och d till sidor, vara tvådignitet till förhållandet mellan a och b eller förhållandet mellan c och d.

Anm. När fyra storheter äro så beskaffade, att förhållandet mellan den *första* och den *andra* är lika med förhållandet mellan den *tredje* och den *fjerde*, så plägar man säga, att de fyra storheterna äro *proportionela*, och att den fjerde storheten är *fjerde proportional* till den första, andra och tredje.

4. *Om förhållandet mellan basen i en rektangel och basen i en annan är lika med förhållandet mellan höjden i den andra och höjden i den förra, så skola rektanglarne vare lika stora.*



Låt *ABCD* och *EFGH* vara tvänne rektanglar, om hvilka man vet, att förhållandet mellan *AD* och *EH* är lika med förhållandet mellan *EF* och *AB*, så skall bevisas, att rektanglarne äro lika stora. Antag förhållandet mellan *AD* och *EH* vara $^4/_3$.

Bevis 1: Emedan förhållandet mellan *AD* och *EH* förutsattes vara $^4/_3$, så måste äfven förhållandet mellan *EF* och *AB* vara $^4/_3$, och derför är förhållandet mellan *AB* och *EF* $^3/_4$. Enligt sats 2 är förhållandet mellan *ABCD* och *EFGH* produkt af $^4/_3$ och $^3/_4$, som är 1, derför äro rektanglarne lika stora.

Bevis 2: (utan användning af sats 2). En jämn del till rektanglarne är en rektangel *X*, hvars bas är lika med *ADs* fjerdedel eller *EHs* tredjedel och höjd lika med *ABs* tredjedel eller *FEs* fjerdedel. Af denna *X* är *ABCD* 12-falden och *EFGH* äfven 12-falden, derför äro rektanglarne lika stora.

På samma sätt sker beviset, om förhållandet mellan *AD* och *EH* är något annat tal än $^4/_3$.

Anm. Sats 4 framställes äfven under följande form: *Två rektanglar äro lika stora, när baser och höjder äro proportionela i omvänd ordning.*

Följdsats 1: Om fyra räta linier äro proportionela, så är rektangeln, som innehålles af den första och den fjerde linien, lika stor med rektangeln, som innehålles af den andra och den tredje linien.

Anm. Denna sats står i nära sammanhang med följande sats i talläran: Om fyra tal äro proportionela, så är *produkten* af det *första* och det *fjerde* lika med *produkten* af det *andra* och det *tredje.*

Följdsats 2: Om tre räta linier äro så beskaffade, att förhållandet mellan den första och den andra är lika med förhållandet mellan den andra och den tredje, så är rektangeln, som innehålles af den första och den tredje, lika stor med qvadraten på den andra.

Anm. 1. Om tre storheter äro så beskaffade, att förhållandet mellan den *första* och den *andra* är lika med förhållandet mellan den *andra* och den *tredje*, så säges: 1:o) de tre storheterna vara *proportionela*, 2:o) den andra vara medelproportional mellan den första och den tredje, 3:o) den tredje vara tredje proportional till den första och den andra.

Anm. 2. Följdsatsen 2 framställes äfven under följande tvänne. 1) När tre räta linier äro proportionela, så är qvadraten på den mellersta lika stor med rektangeln, som innehålles af de bägge öfriga. 2) Om en rät linie är medelproportional mellan tvänne räta linier, så är qvadraten på medelproportionalen lika stor med rektangeln som innehålles af de bägge öfriga.

5. *Om två rektanglar äro lika stora, så är förhållandet mellan basen i den första och basen i den andra lika med förhållandet mellan höjden i den andra och höjden i den första.*

Se figuren till sats 4.

Låt rektanglarne $ABCD$ och $EFGH$ vara lika stora, så skall bevisas, att förhållandet mellan AD och EH är lika med förhållandet mellan EF och AB. Antag förhållandet mellan AD och EH vara $^4/_3$.

Bevis: Emedan $ABCD$ och $EFGH$ äro lika stora, så är deras förhållande 1. Enligt sats 2 är förhållandet mellan $ABCD$ och $EFGH$ produkt af förhållandet mellan AD och EH och förhållandet mellan AB och EF. Enligt antagandet är förhållandet mellan AD och EH $^4/_3$, derför är förhållandet mellan AB och EF $^3/_4$, hvilket tals produkt med $^4/_3$ är 1, derför är förhållandet mellan EF och AB $^4/_3$, och således lika med förhållandet mellan AD och EH.

På samma sätt sker beviset, om förhållandet mellan AD och EH är något annat tal än $^4/_3$.

Anm. Sats 5 framställes äfven under följande form: *När två rektanglar äro lika stora, så äro baser och höjder proportionela i omvänd ordning.*

Följdsats 1: Om fyra räta linier äro så beskaffade, att rektangeln af den första och fjerde är lika stor med rektangeln af den andra och tredje, så äro linierna proportionela.

Anm. Denna sats står i nära sammanhang med följande sats i talläran: Om fyra tal äro så beskaffade, att produkten af det *första* och det *fjerde* är lika med produkten af det *andra* och det *tredje*, så skola talen vara proportionela.

Följdsats 2: Om tre räta linier äro så beskaffade, att rektangeln af den första och den tredje är lika med qvadraten på den andra, så skola linierna vara proportionela.

Anm. 1. Denna sats framställes äfven under följande form: Om af tre räta linier qvadraten på en bland dem är lika stor med rektangeln af de bägge öfriga, så är denna linie medelproportional mellan de tvänne öfriga.

Anm. 2. Denna sats står i nära sammanhang med följande sats i talläran: Om ett tals tvådignitet är lika med produkten af tvänne tal, så är det förra talet medelproportional mellan de två andra talen.

Efter denna redogörelse för de fem satserna om förhållandet mellan rektanglar, borde härefter följa en framställning öfver motsvarande satser om förhållandet mellan 1) parallelogrammer 2) trianglar 3) cirkelsektorer, men emedan dessa satser stå i mycket nära samband med ofvannämda och ordställningen i dem med få förändringar, för hvilka i det följande skall redogöras, är densamma som i nämda satser, är det öfvernödigt att här fullständigt framställa dem.

Om förhållandet mellan likvinkliga parallelogrammer.

De fem satserna om förhållandet mellan likvinkliga parallelogrammer erhållas ur de fem föregående, om ordet "rektanglar" utbytes mot "likvinkliga parallelogrammer" samt "bas" och "höjd" mot "sidorna, som omgifva tvänne lika stora vinklar".

Om förhållandet mellan parallelogrammer hvilka som helst.

Dessa fem satser erhållas ur samma satser genom utbyte af ordet "rektangel" mot "parallelogram".

Om förhållandet mellan rätvinkliga trianglar.

Dessa fem satser erhållas ur samma satser genom utbyte af ordet "rektangel" mot "rätvinklig triangel", samt "bas och höjd" mot "sidorna, som omgifva den räta vinkeln".

Anm. Sidorna, som omgifva den räta vinkeln i en rätvinklig triangel, plägar man kalla *kateter*.

En följdsats till denna afdelning är följande:

Qvadratmetertalet till en rätvinklig triangel är lika med halfva produkten af metertalen till sidorna, som omgifva den räta vinkeln d. v. s. till kateterna.

Om förhållandet mellan tvänne trianglar, som hafva hvar sin lika stor vinkel.

Dessa fem satser erhållas ur samma satser genom utbyte af ordet "rektanglar" mot "trianglar, som hafva hvar sin lika stor vinkel", samt "bas och höjd" mot "sidorna som omgifva de lika stora vinklarne".

Om förhållandet mellan trianglar, hvilka som helst.

De fem satserna erhållas ur samma satser genom utbyte af ordet "rektangel" mot "triangel".

Ur satsen: *Hvarje triangel är hälften af en rektangel, som innehålles af en bland triangelns sidor, hvilken som helst, och den mot sidan svarande höjden,* framgår följande sats:

En rektangel, som innehålles af en sida i en triangel och den mot sidan svarande höjden är lika stor med den rektangel, som innehålles af en annan sida i samma triangel och höjden, som svarar mot denna sida.

Ur denna sats och sats 5 om rektanglars förhållande framgår följande:

Förhållandet mellan tvänne sidor i en triangel är lika med förhållandet mellan höjden, som motsvarar den senare, och höjden som motsvarar den förra.

En annan följdsats till denna afdelning är följande:

Qvadratmetertalet till en triangel är lika med halfva produkten af metertalen till en af sidorna och den mo sidan svarande höjden.

Om förhållandet mellan cirkelsektorer.

Def. Cirkelsektor är en yta, som begränsas af en cirkelbåge och tvänne radier till bågen.

I geometrien äro följande satser bevisade:

1. *En cirkelsektor är lika stor med en triangel, hvars bas är lika stor med bågen och motsvarande höjd lika stor med radien.*

2. *En cirkel är lika stor med en triangel, hvars bas är lika stor med cirkelns omkrets, och motsvarande höjd lika stor med cirkelns radie.*

Följdsats 1: Qvadratmetertalet till en cirkelsektor är halfva produkten af metertalen till radien och bågen.

Följdsats 2: Qvadratmetertalet till en cirkel är halfva produkten af metertalen till radien och omkretsen.

Ur dessa tvänne satser 1 och 2 och satserna om trianglars förhållande kunna följande lätt härledas. Emedan åtskilliga vigtiga följdsatser behöfva tillfogas till denna grupp af satser, upptagas de här fullständigt.

1. *Om två cirkelsektorer hafva lika stora a) radier a) bågar, så är förhållandet mellan cirkelsektorerna lika med förhållandet mellan a) bågarne b) radierna*

2. *Förhållandet mellan två cirkelsektorer är lika stort med produkten af förhållandet mellan bågarne och förhållandet mellan radierna.*

3. *Om radier och bågar i tvänne cirkelsektorer äro proportionela, så är förhållandet mellan cirkelsektorerna tvådignitet af förhållandet mellan radierna eller förhållandet mellan bågarne.*

I geometrien är följande sats bevisad:

Om tvänne cirkelsektorers vinklar äro lika stora, så äro radierna och bågarne proportionela.

Af denna sats och ofvanstående sats 3 framgår följande:

Förhållandet mellan tvänne cirkelsektorer, som hafva lika stora vinklar, är tvådignitet af förhållandet mellan radierna eller förhållandet mellan bågarne.

Emedan cirklar kunna betraktas som cirkelsektorer med lika stora vinklar (360 grader), så äro:

1:o. *Radier och omkretsar till tvänne cirklar proportionela.*

2:o. *Förhållandet mellan tvänne cirklar är tvådignitet af förhållandet mellan radierna eller förhållandet mellan omkretsarne.*

Exempel 1: Om metertalen till tvänne cirklars radier äro $3^3/_4$ och $6^2/_3$, så är förhållandet mellan radierna, äfven som förhållandet mellan omkretsarne $^9/_{16}$ ($3^3/_4$ m. : $6^2/_3$ m.) samt förhållandet mellan cirklarne $^{81}/_{256}$, som är tvådignitet af $^9/_{16}$.

Exempel 2: Om deremot qvadratmetertalen till tvänne cirklar är $3^3/_4$ och $6^2/_3$, så är förhållandet mellan radierna eller förhållandet mellan omkretsarne $^3/_4$, hvaraf $^9/_{16}$ är tvådignitet.

Anm. Emedan en cirkels omkrets och diameter ej hafva någon jämn del d. v. s. icke äro mångfalder af samma längd, så är förhållandet dem emellan hvarken ett helt tal eller bråk. Detta förhållande betecknas i matematiken med grekiska bokstafven π (pi). Vid praktiska beräkningar rörande cirkeln använder man i stället för π bråk eller s. k. närmevärden, hvilka äro nära lika med π. *Archimedes* uppgaf $^{22}/_7$, *Adrian Metius* $^{355}/_{113}$ och *Ludolf von Ceulen* 3,14159265358979 —

$^{22}/_7$ öfverskjuter det verkliga förhållandet med ett tal, som är mindre än $^1/_{700}$

$^{355}/_{113}$ öfverskjuter det verkliga förhållandet med ett tal, som är mindre än $^1/_{1000000}$.

Emedan man vid de vanligast förekommande mätningarne begår ganska betydande fel, och det är öfverflödigt att räkna med större noggranhet, än man mäter, så är det vid de flesta fall fullt tillräckligt att använda $^{22}/_{7}$ eller 3,14. Mycket noggranna svar erhållas genom afvändandet af $^{355}/_{113}$ eller 3,1416.

4. *Om radier och bågar i tvänne cirkelsektorer äro proportionela i omvänd ordning, så äro cirkelsektorerna lika stora.*

Exempel: Om metertalen till radien och bågen i en cirkelsektor *A* äro $2^1/_2$ och $3^1/_5$, samt metertalen till radien och bågen i en cirkelsektor *B* äro $2^2/_3$ och 3, så äro *A* och *B* lika stora, emedan

$2^1/_2$ m. : $2^2/_3$ m. $=$ 3 m. : $3^1/_5$ $=$ $^{15}/_{16}$ d. v. s. radier och bågar i *A* och *B* äro proportionela i omvänd ordning.

5. *Om tvänne cirkelsektorer äro lika stora, så äro bågar och radier proportionela i omvänd ordning.*

Exempel: Tvänne cirkelsektorer *A* och *B* äro lika stora, och metertalen till radien och bågen i *A* äro $3^1|_3$ och $1^1|_2$, samt metertalet till radien i *B* är $^1|_4$. Hvilket är metertalet till bågen i *B*? Sv.: 4.

Lösning: Förhållandet mellan bågen i *B* och bågen i *A* är lika med förhållandet mellan radien i *A* och radien i *B*. Dessa radiers metertal äro $3^1|_3$ och $1^1|_4$, derför är förhållandet mellan radierna $^8|_3$ i *A* och *B* $^8|_3$, och således äfven förhållandet mellan bågen i *B* och bågen i *A* $^8|_3$. Men metertalet till bågen i *A* är $1^1|_2$, derför är metertalet till bågen i *B* 8 tredjedelar af $1^1|_2$, som är 4.

I det föregående har förhållandet mellan tvänne ytor bestämts omedelbart ur ett eller flere förhållanden mellan ytornas gränslinier. Detta sätt att bestämma förhållandet mellan tvänne ytor är ej all tid användbart. I detta fall stöder man sig på den satsen, att "*förhållandet mellan tvänne ytor är lika med förhållandet mellan deras qvadratmetertal.*" Bestämmandet af tvänne ytors förhållande beror således ytterst på bestämmandet af deras qvadratmetertal.

Är ytan rät och begränsas af blott räta linier (rätlinig), så kan hon delas i trianglar. Stundom delas den rätliniga ytan så, att en eller flere bland delarne blifva s. k. parallelltrapezier d. ä. fyrsidiga ytor, i hvilka tvänne sidor äro jämlöpande (parallela). Om ett parallelltrapezium är i geometrien bevisadt, "*att det är lika stort med en triangel, hvars bas är lika stor* *med de jämlöpande sidornas summa, och motsvarande höjd lika stor med det vinkelräta afståndet mellan de jämlöpande sidorna".* Af denna sats och det föregående framgår, *"att qvadratmetertalet till ett paralleltrapezium är lika med halfva produkten af metertalet till de bägge jämlöpande sidornas summa och metertalet till det vinkelräta afståndet mellan dem".*

När en eller flere af en ytas gränslinier äro krokiga, så kan man på elementarmatematikens ståndpunkt finna hennes qvadratmetertal endast i de fall, då de krokiga gränslinierna äro cirkelbågar. De enklaste bland sådana ytor är cirkelsektorn, hvarom i det föregående är nämdt, och cirkelsegmentet d. ä. en yta, som begränsas af en rät linie och en cirkelbåge. Om cirkelsegmentet är större än en halfcirkel, så kan det genom två radier dragna till bågens ändpunkter delas i en triangel och en cirkelsektor, af hvilkas qvadratmetertal cirkelsegmentets qvadratmetertal är summa. Är cirkelsegmentet mindre än en halfcirkel, så är det skilnad mellan en cirkelsektor och en triangel, mellan hvilkas qvadratmetertal segmentets qvadratmetertal är skilnad. Hvarje plan yta, som begränsas af cirkelbågar och räta linier, kan delas i trianglar och cirkelsegment. Hvarje ytas qvadratmetertal är naturligtvis lika med summan af delarnes qvadratmetertal.

Beräkningen af qvadratmetertalen till en del buktiga ytor stöder man på geometriska satser. Sålunda är det lätt att finna qvadratmetertalen till den buktiga ytan af räta cylindrar och koner samt till ytan af klot eller delar deraf, när af geometrien inhemtas:

1:o. *Att en rät cylinders buktiga yta är lika stor med en rektangel, hvars ena sida är lika stor med basens omkrets och andra sida lika stor med cylinderns höjd.*

Följdsats: Qvadratmetertalet till en rät cylinders buktiga yta är produkt af metertalen till höjden och basens omkrets.

2:o. *Att en rät kons buktiga yta är lika stor med en cirkelsektor, hvars båge är lika stor med basens omkrets, och radie lika stor med konens sida, det är afståndet mellan konens spets och någon punkt på basens omkrets.*

Följdsats: Qvadratmetertalet till en rät kons buktiga *yta är halfva produkten af metertalen till basens omkrets och konens sida.*

Anm. En *sfer* eller *ett klot* kallas det rum, som begränsas af en yta, hvars alla punkter äro lika långt aflägsna från en punkt, som kallas *sferens* eller *klotets* medelpunkt. Afståndet mellan medelpunkten och någon punkt på ytan kallas *sferens* radie, och den cirkel, hvars radie är lika stor med *sferens* radie, kallas sferens *storcirkel*. Skäres en sfer af ett plan i tvänne delar, så kallas hvarje del ett *sferiskt segment* eller *sferisk kalott*. Skäres en sfer af två jämlöpande planer, kallas den del, som ligger mellan dessa planer, en *sferisk zon* eller ett *sferiskt bälte*.

En *sferisk sektor* kallas den del af en sfer, som begränsas af den buktiga ytan till ett sferiskt segment, och den buktiga ytan af en rät kon, hvars spets ligger i sferens medelpunkt, och hvars bas sammanfaller med det sferiska segmentets bas.

3:o. *Buktiga ytan af a) en sferisk kalott b) en sferisk zon är lika med en rektangel, hvars bas är lika stor med omkretsen till sferens storcirkel, och höjd är lika stor med a) kalottens b) zonens höjd.*

Följdsats 1: Buktiga ytan till en sfer är fyrafalden af sferens storcirkel.

Följdsats 2: Qvadratmetertalet till den buktiga ytan af a) ett sferiskt segment b) en sferisk zon är produkt af metertalen till storcirkelns omkrets och a) segmentets b) zonens höjd.

Följdsats 3: Qvadratmetertalet till en sfers yta är produkt af metertalen till storcirkelns omkrets och diameter.

Exempel 1: Om jorden vore en fullkomlig sfer med en diameter af 1720 geografiska mil och höjden till hvar och en af de tempererade zonerna vore 445,65 geografiska mil; hvilket vore då qvadratmetertalet till hvar och en af de tempererade zonernas ytor? Svar 2408087,5..

Anm. Förhållandet mellan en cirkels omkrets och diameter förutsättes vara $^{355}/_{133}$.

Lösning: Emedan miltalet till jordens diameter är 1720, så är miltalet till jordens omkrets $^{355}/_{113} \cdot 1720$ eller $^{610600}/_{113}$. Miltalet till hvar och en af de tempererade zonernas höjder är 445,65, derför är enligt sats 3 qvadratmiltalet till hvar och en af de tempererade zonernas ytor $445{,}65 \cdot {}^{610600}/_{113}$ eller 2408087,5....

Exempel 2: På en jordglob af 1 fots radie äro meridianer uppdragna för hvar tionde grad.

Huru stor är den sferiska tvåhörning, som ligger *mellan tvänne närliggande meridianer?* Sv. 34 qv.-tum 90,6 qv.-lin.

Lösning: Emedan fottalet till jordglobens radie är 1, så är fottalet till jordglobens omkrets $^{355}/_{113} \cdot 2$, qvadratfottalet till jordglobens storcirkel $^{355}/_{113} \cdot$ [illegible] eller $^{355}/_{113}$, till jordglobens yta $4 \cdot {}^{355}/_{113}$, samt till den sferiska tvåhörningen, som är 36-delen af globens yta, $^{1}/_{36} \cdot 4 \cdot {}^{355}/_{113}$ eller $^{355}/_{1017}$. Således är den sferiska tvåhörningen $^{355}/_{1017}$ qv.-fot eller 34 qv.-tum 90,6.... qv.-lin.

Jag öfvergår nu till en framställning af satser om åtskilliga rymder, såsom prismer, pyramider, cylindrar, koner, sferer och sferiska sektorer, samt deras förhållande. Enär dessa satser äfven äro analoga med dem, som handla om rektanglars förhållande, kan denna framställning göras mycket kort. De satser, som komma att afhandlas, motsvara sats 2 om rektanglars förhållande. Likasom satserna 1, 3, 4 och 5 om rektanglars förhållande kunna lätt härledas ur sats 2, så kunna äfven satserna angående rymders förhållande, som äro analoga med ofvannämda satser, äfven lätt härledas ur nedan stående satser.

1:o. *Förhållandet mellan två rätvinkliga parallelipipeder R och S är produkt af förhållandet mellan längderna, förhållandet mellan bredderna och förhållandet mellan höjderna.*

Emedan produkten af förhållandet mellan längderna och förhållandet mellan bredderna är lika med förhållandet mellan parallelipipedernas baser, så kan ofvanstående sats erhålla följande form:

Förhållandet mellan två rätvinkliga parallelipipeder R och S är produkt af förhållandet mellan baserna och förhållandet mellan höjderna.

Kalla *Rs* längd L, bredd B och höjd H, samt *Ss* längd l, bredd b och höjd h. Antag vidare förhållandet mellan L och l vara $^{3}/_{4}$, förhållandet mellan B och b $^{5}/_{7}$ och förhållandet mellan H och h $^{9}/_{10}$, så skall bevisas, att förhållandet mellan R och S är $^{3}/_{4} \cdot {}^{5}/_{7} \cdot {}^{9}/_{10}$ eller $^{27}/_{56}$.

Bevis: En jämn del M till R och S är en rätvinklig parallelipiped, hvar längd är $^{1}/_{3}$ af L eller $^{1}/_{4}$ af l, bredd $^{1}/_{5}$ af B eller $^{1}/_{7}$ af b samt höjd $^{1}/_{9}$ af H

eller $^1/_{10}$ af h. Af denna M är 135 (3 . 5 . 9)-falden och S 280 (4 . 7 . 10)-falden, derför är förhållandet mellan R och S $^{135}/_{280}$ eller $^{27}/_{56}$. På samma sätt sker beviset, om $^3/_4$, $^5/_7$ och $^9/_{10}$ utbytas mot hela tal eller bråk.

Följdsats 1: Förhållandet mellan två kuber A och B är tredignitet af förhållandet mellan en af kanterna till A och en af kanterna till B.

Följdsats 2: Kubikmetertalet till en rätvinklig parallelipiped är produkt af metertalen till längden, bredden och höjden eller

Kubikmetertalet till en rätvinklig parallelipiped är produkt af basens qvadratmetertal och höjdens metertal.

Följdsats 3: Kubikmetertalet till en kub är tredignitet af metertalet till en af kubens kanter.

Ur ofvanstående sats 1 och följande satser hemtade från geometrien kunna följande satser lätt härledas:

a) *Ett prisma* b) *En cylinder är lika stor med en rätvinklig parallelipiped, när deras baser och höjder äro lika stora.*

a) *En pyramid* b) *En kon är tredjedelen af* a) *ett prisma* b) *en cylinder, när deras baser och höjder äro lika stora.*

a) *En sferisk sektor är lika stor med en kon, hvars bas är lika stor med sektorns sferiska yta (bas) och höjd lika stor med sferens radie.*

En sfer är lika stor med en kon, hvars bas är lika stor med sferens yta och höjd lika stor med sferens radie.

Anm. Af ofvanstående sats följer, att *en sfer äfven är 2 tredjedelar af en cylinder, hvars bas är lika stor med sferens storcirkel och höjd lika stor med sferens diameter.*

2:o. *Förhållandet mellan tvänne a) prismer b) cylindrar c) pyramider d) koner är produkt af förhållandet mellan baserna och förhållandet mellan höjderna.*

Följdsats 1: Kubikmetertalet till a) ett prisma b) en cylinder är produkt af basens qvadratmetertal och höjdens metertal.

Följdsats 2: Kubikmetertalet till en a) pyramid b) kon är tredjedelen af produkten af basens qvadratmetertal och höjdens metertal.

3:o. *Förhållandet mellan två sferiska sektorer är produkt af förhållandet mellan sektorernas baser och förhållandet mellan sektorernas radier.*

Följdsats 1: Kubikmetertalet till en sferisk sektor är tredjedelen af produkten af qvadratmetertalet till basen och metertalet till sektorns radie.

Följdsats 2: Kubikmetertalet till en sfer är tredjedelen af produkten af qvadratmetertalet till sferens yta och metertalet till radien eller

Kubikmetertalet till en sfer är 2 tredjedelar af produkten af qvadratmetertalet till sferens storcirkel och metertalet till sferens diameter.

Följdsats 3: Förhållandet mellan tvänne sferer är tredignitet till förhållandet mellan sferernas radier.

När ett sferiskt segment är större än en halfsfer, är segmentet *summa* af en sferisk sektor och en kon, när det sferiska segmentet är mindre än en halfsfer, är det *skilnad* mellan en sferisk sektor och en kon. Konens spets är sferens medelpunkt och bas densamma som segmentets. En sferisk zon är skilnad mellan tvänne sferiska segmenter. Häraf framgår sättet att finna kubikmetertalen till sferiska segmenter och zoner.

Efter denna inledning öfvergår jag till behandlingen af det egentliga ämnet för denna uppsats.

Den följande framställningen "om undervisningen i bråk för nybegynnare" sönderfaller i ett antal öfningar, ordnade till en början efter grundsatsen om *det hela, delarne* och *delarnes antal*, sedermera har blifvit lagd till grund för ordningsföljden grundsatsen om storheters *förhållande*. Innan innehållet af dessa öfningar framställes, förutskickas till läraren några ord, som gälla alla öfningarne.

Hvarje öfning inledes af läraren genom lämpliga frågor, till en början mycket enkla, som ställas till alla lärjungarne, som samtidigt undervisas, hvarvid det är nödvändigt, att läraren lemnar dem så lång tid, som är nödig för *alla* att finna svaret på den framstälda frågan. När *alla* lärjungarne uppgifvit sig hafva funnit svaret, låter läraren de minst begåfvade *först* afgifva sina svar. Derigenom *tvingas* dessa att begrunda den framstälda frågan, hvilket ej skulle blifva händelsen, om läraren först affordrade svaren af de bättre begåfvade. De sämre skulle i sådant fall afgifva samma svar som de bättre, äfven om de ej erhållit något svar eller de erhållit ett, som är afvikande från det afgifna. I sammanhang härmed bör påpekas den stora vigten af, att läraren ej upphör att upphämta svaren, sedan han erhållit det rätta, ty det är för läraren vigtigt att få höra de orätta svaren, för att kunna visa, hvari deras oriktighet består. Särdeles är detta förhållandet med sådana orätta svar, som gifvas lika af *två* eller *flere* lärjungar. Att två eller flere afgifva samma oriktiga svar har sin grund *dels* deri, att läraren förut oklart eller oegentligt uttryckt sig, *dels* deri att lärjungarne missuppfattat något yttrande af läraren, och i bägge fallen böra felen så fort som möjligt utrotas. Med skäl kan påstås, att en lärare har mycket att lära af oriktiga svar, förutsatt att han gör sig besvär med att uppsöka deras källa.

När lärjungarne genom frågor blifvit på detta sätt förberedda, låter läraren dem genomgå motsvarande afdelning i en exempelsamling. Emedan de matematiska anlagen hos lärjungar äro i allmänhet mycket växlande, kan man icke vänta, att alla samtidigt afsluta lösningen af sina exempel, hvarför det är nödigt, att läraren har i beredskap åt de lärjungar, som först slutat, en samling uppgifter, som böra vara af något svårare beskaffenhet.

På den mycket omtvistade frågan: "Får lärjunge begagna facitbok?" svarar jag utan betänkande ja, grundande detta ja hufvudsakligen på följande skäl:

1:o. Den kontroll, som skulle ligga deri, att läraren ensam är i besittning af facitboken, är i sjelfva verket ingen kontroll, emedan erfarenheten dagligen visar, att lärjungen kan sjelf anskaffa sig en facitbok i bokhandeln, af en kamrat eller erhålla svaret af en flinkare kamrat. 2:o. Genom att förbjuda lärjunge använda facitbok, förleder läraren honom mången gång att blifva bedräglig. 3:o. Om läraren skall genomgå alla svaren med hvarje lärjunge, så blir ingen tid öfrig för läraren att sköta sin egentliga undervisning.

När alla lärjungarne genomgått alla exemplen i en öfning, bör läraren noga pröfva, huruvida lärjungarne rätt uppfattat exemplen, derigenom att de i klara och tydliga ord få redogöra för tillkomsten af svaren till några exempel, särdeles sådana, som de genom facitboken eller genom omräkning funnit vara oriktigt behandlade. Derigenom erhåller läraren en verklig kontroll och de olägenheter häfvas, som man ansett uppkomma derigenom, att lärjungen sjelf får handhafva facitboken. I sammanhang härmed anser jag mig böra starkt framhålla vigten af, att lärjungarne genomräkna sina exempel tvänne gånger och flere, om de erhållit olika svar, helst böra dessa räkningar verkställas på olika sätt. Emedan ett rätt svar är det, som i första hand bör eftersträfvas, bör all täflan i snabbräkning helt och hållet bannlysas, ty erfarenheten har klart visat till hvilka menliga följder denna täflan har ledt, nämligen slarf med åtföljande osäkerhet.

I det följande öfvergår jag till en redogörelse för hvarje öfning särskildt.

Öfning 1.

Delarnes antal sökes.

På det att lärjungarne må kunna vara sjelfverksamma, bör läraren anskaffa lämpliga hjelpmedel för att underlätta deras tankeverksamhet. Såsom dylika hjelpmedel får jag föreslå följande: 6 st. papppark, 11 st. papp-ark, af hvilka det första delas i två lika delar (halfark), det andra i tre lika delar (tredjedelsark) o. s. v. det elfte i tolf lika delar (tolftedelsark). På hvarje arkdel bör namnet vara angifvet på ena sidan (halfark, tredjedelsark o. s. v.), på det man lätt må finna den arkdel, man för tillfället behöfver. När läraren på svarta taflan uppskrifver exempel, bör han i början af undervisningen i bråkläran skrifva *halfark* i stället för $^1/_2$-ark, *2 tredjedelsark* i stället för $^2/_3$-ark, *3 ark 4 femtedelsark* i stället för $3^4/_5$-ark, emedan den förra beteckningen är för lärjungen tydligare, öfverensstämmer med det beteckningssätt, han är van vid i läran om hela tal, hvarigenom öfvergången till läran om de brutna talen blir mindre skarp. Han kommer till en början att betrakta "halfark", "tredjedelsark" o. s. v. såsom enheter, hvilka jämte "ark", "bok", "ris" och "bal" användas vid mätning af papp, "halfmeter", "tredjedelsmeter", "fjerdedelsmeter" o. s. v. såsom längdenheter jämte de öfriga "kilometer", "meter", "decimeter", "centimeter" och "millimeter".

Skrifver läraren $^7/_8$ ark, $^7/_8$ m. i stället för 7 åttondels ark, 7 åttondels meter, så äro siffrorna 7 och 8 föremålen för lärjungens föreställningsförmåga och ej föremålen 7 åttondels ark och 7 åttondels meter. Läraren bör i allmänhet fästa lärjungens synnerliga uppmärksamhet på vigten af att klart föreställa sig de föremål, som i en räkneuppgift finnas omnämda, och ej blott fästa sig vid de siffror, som användas för att beteckna storheterna.

Ett mycket ofta återkommande fel, som begås af lärjungar, är, att de vid lösningen af räkneuppgifter blott fästa sig vid siffertalen, som ingå i uppgiften. Om det efter ett af talen står *kronor*, efter ett annat *öre*, efter ett tredje står *fot* och efter ett fjerde *tum* kommer dem icke vid, de företaga sig med siffertalen åtskilliga "räkneoperationer", hvilka de utvälja i de flesta fall efter godtycke, svaret, som de erhålla blir ett siffertal, hvars betydelse de ej känna.

Här nedan meddelas några exempel, som höra till denna öfning:

1) Huru många halfark kunna erhållas ur *a*) 3 ark (6) *b*) 7 ark 1 halfark (15)?

2) Huru många sjettedelsark kunna erhållas ur *a*) 4 ark (24) *b*) 1 halfark (3) *c*) 1 tredjedelsark (2) *d*) 6 ark 5 sjettedelsark (41)?

3) Huru många delar erhållas, när 3 ark 3 fjerdedelsark delas så, att hvarje del blir *a*) 1 fjerdedelsark (15) *b*) 1 tolftedelsark (45) *c*) 5 tolftedelsark (9)?

4) Huru många delar erhållas, när 63 niondelsark delas så, att hvarje del innehåller 9 niondelsark (7)?

5) Huru många helark äro lika med *a*) 35 femtedelsark (7) *b*) 54 sjettedelsark (9) *c*) 72 åttondelsark (9) *d*) 378 niondelsark (42)?

6) Huru många helark äro lika med *a*) 17 fjerdedelsark *b*) 43 åttondelsark *c*) 69 sjundedelsark och huru stort är öfverskottet?

7) Hvilket är delarnes antal, då det hela är 3 ark 1 tredjedelsark, och hvarje del är *a*) 1 tredjedelsark (10) *b*) 1 sjettedelsark (20) *c*) 5 sjettedelsark (4)?

8) Hvilket är delarnes antal, då det hela är 4 ark 7 tolftedelsark, den första delen innehåller 1 tolftedelsark, den andra innehåller 5 tolftedelsark mer än den första, den tredje 5 tolftedelsark mer än den andra o. s. v.? Sv. 5.

9) *a*) 7 ark 4 femtedelsark =? femtedelsark =?

tjugondelsark (39, 156) *b*) 88 niondelsark =? ark? niondelsark (9, 7).

Exempel, som höra till denna och de nästföljande öfningarne, böra öfvas genom flitig hufvudräkning.

Genom användande af olika former för frågorna, blifva lärjungarne alt mer förtrogna med frågans andemening och hindras slentrianen att infinna sig, hvilket all tid blir fallet, då läraren oupphörligen använder samma frågform. Dock bör ombyte af frågform ej ske förr, än lärjungen är fullt förtrogen med de föregående.

Öfning 2.

Tillämpning.

Exempel: 1) 2 sjundedels ark papp kosta 5 öre. Hvad kosta *a*) 4 sjundedels ark (10 öre) *b*) 6 sjundedels ark (15 öre) *c*) 3 ark 5 sjundedels ark (65 öre)?

2) 3 fjerdedels ark kosta 7 öre. Hvad kosta *a*) 2 ark 1 fjerdedels ark (21 öre) *b*) 7 ark 1 halfark (70 öre)?

3) 1 sjettedels ark kostar 2 öre. Hvad kosta *a*) 1 halfark (6 öre) *b*) 2 ark 2 tredjedels ark (32 öre) *c*) 5 ark 1 halfark (66 öre).

4) 2 tredjedels ark kosta 16 öre. Hvad kosta *a*) 1 sjettedels ark (4 öre) *b*) 2 ark 5 sjettedels ark (68 öre).

När dessa exempel inledas, bör läraren hafva till hands en mängd öreslantar för att förtydliga räkneuppgifterna.

Öfning 3.

Det hela sökas.

1) Den första delen innehåller 2 sjundedels ark, den andra 4 sjundedels ark och den tredje 5 sjundedels ark. Hvad är det hela? (11 sjundedels ark eller 1 ark 4 sjundedels ark).

2) Den första delen innehåller 7 tolftedels ark, den andra 1 halfark, den tredje 2 tredjedels ark och den tjerde 1 ark 1 fjerdedels ark. Hvad är det hela? (36 tolftedels ark eller 3 ark).

Anm. Exemplen i denna öfning böra väljas så, att den minsta, arkdelen är en jämn del af de öfriga, sålunda är i ex. 2 tolftedels ark en jämn del till halfark, tredjedelsark och fjerdedelsark.

Förklaring: Den första delen innehåller 7 tolftedels ark, den andra 1 halfark eller 6 tolftedels ark, den tredje 2 tredjedels ark eller 8 tolftedels ark och den fjerde af 1 ark 1 fjerdedels ark eller 15 tolftedels ark, således är antalet tolftedels ark i det hela 7, 6, 8 och 15 tillsammans eller 36.

3) Hvad är summan af 1 ark 2 femtedels ark, 2 ark 1 halfark och 7 tiondels ark? (3 ark 16 tiondels ark eller 4 ark 6 tiondels ark).

4) 7 femtondels ark + 4 femtedels ark, + 2 tredjedels ark =? (29 femtondels ark eller 1 ark 14 femtondels ark).

5) Delarnes antal är 4, hvarje del är 7 niondels ark. Hvad är det hela? (28 niondels ark eller 3 ark 1 niondels ark).

6) Hvad är 9-falden af 7 åttondels ark? (63 åttondels ark eller 7 ark 7 åttondels ark).

7) 5 . 7 tolftedels ark =? (35 tolftedels ark eller 2 ark 11 tolftedels ark).

8) 7 . (1 ark 1 åttondels ark) + 3 fjerdedels ark =? (7 ark 13 åttondels ark eller 8 ark 5 åttondels ark).

Öfning 4.

Tillämpning.

1) För 1 öre köpas 4 sjundedels ark. Huru mycket köpes för 5 öre? (20 sjundedels ark eller 2 ark 6 sjundedels ark).

2) För 6 öre köpas 5 sjettedels ark. Huru mycket köpes för 54 öre? (45 sjettedels ark eller 7 ark 3 sjettedels ark).

Förklaring: För 6 öre köpas 5 sjettedels ark, derför köpes för 54 öre, som äro 9-falden af 6 öre, 9-falden af 5 sjettedels ark, som är 45 sjettedels ark eller 7 ark 3 sjettedels ark.

3) För 25 öre köpas 1 ark 7 åttondedels ark, huru mycket köpes för 1 kr. 75 öre? (7-falden af 1 ark 7 åttondels ark, som är 7 ark 49 åttondels ark eller 13 ark 1 åttondels ark).

Öfning 5.

Repetition.

Hvar femte öfning anser jag böra innehålla en repetitionskurs af det föregående hufvudsakligen det, som blifvit genomgånget i de närmast föregående fyra öfningarne. Nyttan och vigten af en flitig repetition erkännas af hvarje lärare, hvarför angifvande af några skäl härför är obehöfligt.

1) Det hela är 4 ark 8 niondels ark, hvarje del är 4 niondels ark. Hvilket är delarnes antal? (11).

2) 67 åttondels ark =? ark? åttondels ark (8, 3).

3) 2 ark 7 tolftedels ark =? tjugufjerdedels ark (62).

4) Delarnes antal är 8, hvarje del är 1 ark 5 sjundedels ark. Hvad är det hela? (8 ark 40 sjundedels ark eller 13 ark 5 sjundedels ark).

6) För 20 öre köpas 2 ark 3 fjerdedels ark, huru mycket köpes för 1 kr. 20 öre? (6-falden af 2 ark 3 fjerdedels ark, som är 12 ark 18 fjerdedels ark eller 16 ark 2 fjerdedels ark).

7) 3 ark 1 halfark kosta 42 öre, huru mycket kosta *a*) 1 fjerdedels ark (3 öre) *b*) 2 ark 3 fjerdedels ark (33 öre)?

8) Hvad är summan af 5 sjettedels ark, 4 niondels ark och 7 adertondels ark? (30 adertondels ark eller 1 ark 12 adertondels ark).

9) 7 . 4 niondels ark + 5 adertondels ark =? (61 adertondelsark eller 3 ark 7 adertondels ark).

Öfning 6.

Hvarje del sökes.

Uppgiften att bestämma storleken på hvarje del af ett bråk, då det delas i lika stora delar, *eller* att bestämma en jämn del hvilken som helst af ett bråk är för lärjungarne en af de svåraste. Det är derför af största betydelse, att läraren vid undervisningen i denna vigtiga del af bråkläran väl ordnar sitt arbete. Här om någonsin kan läraren genom ett oklokt förfaringssätt skapa svårigheter, som komma att förorsaka såväl läraren som lärjungen mycket bekymmer och öfverflödigt arbete.

Emedan delning af bråk icke möter några synnerliga svårigheter, då delarnes antal är en jämn del af bråkets täljare, bör man börja med dylika delningar med åtföljande tillämpning. I förevarande öfning 6 komma blott sådana exempel att väljas, i hvilka delarnes antal är en jämn del af arkdelarnes antal. I öfningen 8, som kommer att blifva en fortsättning till öfningen 6, upptagas *dels* sådana delningar, då delarnes antal är en *mångfald* af arkdelarnes antal, dels sådana, då delarnes antal hvarken är en jämn del eller en mångfald af arkdelarnes antal. Öfningarne 7 och 9 komma att innehålla tillämpningar, den förra till öfningen 6, den senare till öfningen 8. Emedan läraren med ledning af nedanstående exempel sjelf lätt kan finna, huru denna öfning med användning af arkdelarne skall inledas, äro några anvisningar öfverflödiga, deremot skola sådana meddelas till öfningen 8, der de torde vara mera behöfliga.

1) 6 sjundedels ark äro delade i *a*) 2 *b*) 3 *c*) 6 lika delar. Hvad innehåller hvarje del? *a*) 3 sjundedels ark *b*) 2 sjundedels ark *c*) 1 sjundedels ark.

2) Hvad är *a*) fjerdedelen *b*) sjundedelen af 3 ark 1 niondels ark? *a*) 7 niondels ark *b*) 4 niondels ark.

3) 14 ark 2 femtedels ark äro delade i lika delar. Delarnes antal är *a*) 8 *b*) 9 *c*) 24. Hvaraf består hvarje del? *a*) 1 ark 4 femtedels ark *b*) 1 ark 3 femtedels ark *c*) 3 femtedels ark.

4) 5 ark 5 sjettedels ark äro delade i 7 lika delar. Hvad innehåller *a*) hvarje del *b*) 4 delar tillsammans? *a*) 5 sjettedels ark *b*) 20 sjettedels ark eller 3 ark 2 sjettedels ark.

5) Hvad är *a*) tredjedelen *b*) 2 tredjedelar af 2 ark 2 femtedels ark? *a*) 4 femtedels ark *b*) 1 ark 3 femtedels ark.

6) Fullborda följande satser:

4 niondelar af 6 ark 3 fjerdedels ark äro..... (3 ark).

5 åttondelar af 7 ark 1 niondels ark äro..... (4 ark 4 niondels ark).

3 fjerdedelar af..... äro 4 ark 4 femtedels ark (6 ark 2 femtedels ark).

4 femtedelar af..... äro 5 ark 1 tredjedels ark (6 ark 2 tredjedels ark).

7) *a*) 8 niondels ark : 2 =? (4 niondels ark) *b*) 6 ark 2 niondels ark : 8 =? (7 niondels ark).

Öfning 7.

1) För 3 öre köpas 2 ark 1 fjerdedels ark, huru mycket köpes för *a*) 1 öre *b*) 5 öre? *a*) 3 fjerdedels ark *b*) 3 ark 3 fjerdedels ark.

2) För 18 öre köpas 5 ark 1 fjerdedels ark, huru

mycket köpes för *a*) 6 öre *b*) 42 öre? *a*) 1 ark 3 fjerdedels ark *b*) 12 ark 1 fjerdedels ark.

3) Fullborda följande satser:

a) När man för 36 öre köper 8 ark 4 sjundedels ark, så köper man för 9 öre..., för 81 öre... och för 12 öre... (2 ark 1 sjundedels ark, 19 ark 2 sjundedels ark, 2 ark 6 sjundedels ark).

b) När man för 2 kr. 25 öre köper 16 ark 1 femtedels ark, så köper man för 75 öre..., för 25 öre..... och för 3 kr. 75 öre... (5 ark 2 femtedels ark, 1 ark 4 femtedels ark, 27 ark).

Öfning 8.

Hvarje del sökes.

Såsom förut är nämdt, är denna öfning en fortsättning af öfningen 6. Innan lärjungarne åläggas genomräkna exempel, som höra till denna öfning, är det mycket vigtigt, att läraren noggrant förbereder dem genom en mängd inledande frågor. Se här några anvisningar till dessa inledningsfrågor.

L. = läraren *M.* = lärjungen.

L. (uppvisar ett halfark). Föreställen eder detta halfark deladt i tre lika delar. Huru många sådana delar tillsammans äro lika med 1 ark?

M. 6. Emedan 2 halfark tillsammans äro lika med ett ark, och 3 sådana delar tillsammans äro lika med ett halfark, så måste 2-falden af 3 eller 6 sådana delar vara lika med ett ark.

Anm. Skulle någon lärjunge icke kunna besvara frågan under denna form, så bör läraren taga ett halfark skrifpapper, låta lärjungen dela detta halfark i 3 lika delar, och sjelf undersöka, huru många sådana delar tillsammans äro lika med ett ark.

L. Huru benämnes således hvarje sådan del?

M. Sjettedels ark.

Sedan lärjungarne kunna redogöra för halfarkets jämna delar, företagas samma öfningar med tredjedelsarket, fjerdedelsarket o. s. v.

När lärjungarne ledigt kunna besvara dessa bägge frågor, framställer läraren sedan blott den andra frågan med förbigående af den första.

L. (uppvisar 1 femtedels ark). Föreställen eder detta femtedelsark deladt i 4 lika delar. Huru benämnes hvarje sådan del?

M. Tjugondelsark. Emedan 5 stycken femtedels ark tillsammans äro lika med ett ark och 4 sådana delar tillsammans äro lika med ett femtedels ark, så måste 5-falden af 4 eller 20 sådana delar vara lika med ett ark, derför är hvarje sådan del ett tjugondels ark.

Derefter väljer läraren den kortare frågformen: "Hvad är hälften, tredjedelen o. s. v."

Sedan lärjungarne vunnit tillräcklig säkerhet i delning af 1 arkdel, hvilken som helst, öfvergår läraren till delningen af flere arkdelar, då delarnes antal är en *mångfald* af arkdelarnes antal.

Denna öfning bör inledas med delning af helark.

L. (uppvisar 2 stycken ark). Om dessa 2 ark delas lika mellan 6 kamrater, hvad erhåller hvar och en?

M. 1 tredjedels ark. Om hvarje ark delas i tre lika delar, så blifva de bägge arken delade i 6 lika delar. Hvar och en erhåller således tredjedelen af ett ark, som är 1 tredjedels ark.

Sedan läraren öfvats med att bestämma jämna delar af helark, hvilkas antal är en jämn del af delarnes antal, öfvergår han till motsvarande öfningar med arkdelarne.

L. (uppvisar 2 stycken tredjedels ark). Om dessa 2 stycken tredjedels ark delas lika mellan 4 kamrater, hvad erhåller hvar och en?

M. 1 sjettedels ark. Om hvarje tredjedels ark delas i 2 lika delar, så blifva de bägge tredjedelsarken delade i 4 lika delar. Hvar och en erhåller en sådan del, som är hälften af 1 tredjedels ark eller 1 sjettedels ark.

Sedermera använder läraren den kortare frågformen: Hvad är *a*) sjettedelen *b*) niondelen *c*) tolftedelen o. s. v. af 3 sjundedels ark? Sv. *a*) 1 fjortondels ark *b*) 1 tjuguendels ark *c*) 1 tjuguåttondels ark.

Derefter öfvergår läraren till delningen af flere arkdelar, då arkdelarnes antal hvarken är en mångfald eller en jämn del af delarnes antal. Äfven denna öfning bör inledas med delning af helark.

L. (uppvisar 2 stycken ark). Om dessa 2 ark delas i 3 lika delar, hvad kommer hvarje del att innehålla?

M. 2 tredjedels ark. Delas 1 ark i tre lika delar, så kommer hvarje del att innehålla 1 tredjedels ark, delas således 2 ark i tre lika delar, så måste hvarje del innehålla 2 tredjedels ark.

L. Hvad är fjerdedelen af 17 ark?

På denna fråga kan *M.* *antingen* svara 17 fjerdedels ark, i hvilket fall han ger följande skäl: Fjerdedelen af 1 ark är 1 fjerdedels ark, fjerdedelen af 2 ark är 2 fjerdedels ark o. s. v. och fjerdedelen af 17 ark är således 17 fjerdedels ark, *eller* 4 ark 1 fjerdedels ark, då han ger följande skäl: Fjerdedelen af 16 ark är 4 ark, fjerdedelen af det återstående arket är 1 fjerdedels ark, derför är fjerdedelen af 17 ark 4 ark 1 fjerdedels ark.

L. (uppvisar 2 stycken tredjedels ark). Hvad är tredjedelen af dessa 2 tredjedels ark?

M. 2 niondels ark. Tredjedelen af 1 tredjedels ark är enligt det föregående 1 niondels ark, derför är tredjedelen af 2 tredjedels ark 2 niondels ark.

L. (uppvisar 2 ark och 1 halfark). Hvad är sjundedelen af dessa 2 ark och 1 halfark.

M. 5 fjortondels ark. Sjundedelen af 1 halfark är enligt det föregående 1 fjortondels ark, derför är sjundedelen af 2 ark 1 halfark eller 5 halfark 5 fjortondels ark.

Det är i synnerhet frågor likartade med de bägge sistnämda, som förefalla lärjungarne svåra att besvara. I synnerhet om arkdelarne ej äro åtskilda. Om man tager *ett* stycke, som är 2 tredjedelar af ett ark, delar detta i 5 lika delar, så finna de i början högst sällan, att hvarje del är 2 femtondels ark. Tager man deremot 2 stycken tredjedels ark, så finna de mycket lättare svaret. På samma sätt förhåller det sig, då man uppritar *en* linie, som är $^3/_4$ meter, och delar denna i t. ex. 5 lika delar, så hafva de äfvenledes mycket svårt att afgöra, att hvarje del är $^3/_{20}$ meter. Uppritar man deremot trenne linier, af hvilka hvar och en är $^1/_4$ meter, så besvara de samma fråga mycket lättare. Läraren bör derför uppmana lärjungarne att i början föreställa sig t. ex. $^3/_4$ meter såsom summa af 3 stycken längder, af hvilka hvar och en är 1 fjerdedels meter, hvarigenom de lättare erhålla svaren på framstälda delningsfrågor.

Innan jag afslutar dessa anvisningar, är det nödigt påpeka följande, som förekommer vid dessa öfningar. När man förelägger en lärjunge att dela t. ex. 7 niondels ark i 3 lika delar (arkdelarnes antal är större än delarnes antal), så lägger han först i hvarje del 2 niondels ark, delar det återstående niondels arket i 3 lika delar, hvarför han svarar, att hvarje del innehåller 2 niondels ark och 1 tjugusjundedels ark. Delningen är naturligtvis rätt verkstäld och svaret riktigt; dock bör läraren sedan tillsäga honom att bestämma summan af 2 niondels ark och 1 tjugusjundedels ark, som är 7 tjugusjundedels ark. Läraren bör fästa lärjungens uppmärksamhet på, att det slutliga svaret erhålles snabbare, om han föreställer sig hvarje niondels ark deladt i 3 lika delar, men att detta delningssätt är brukligt, när hela ark skola delas, såsom ofvanför är visadt.

1) 1 femtedels ark är deladt i *a*) 2 *b*) 4 *c*) 5 lika delar. Hvad innehåller hvarje del?

a) 1 tiondels ark *b*) 1 tjugondels ark *c*) 1 tjugufemtedels ark.

2) Hvad är fjerdedelen af *a*) 1 sjundedels ark *b*) 1 femtondels ark?

a) 1 tjuguåttondels ark *b*) 1 sextiondels ark.

3) Det hela är 5 ark, delarnes antal är 15 och delarne äro lika stora. Hvaraf består hvarje del? (1 tredjedels ark).

4) Hvad är *a*) åttondelen *b*) tolftedelen *c*) tjugondelen af 4 ark?

a) 1 halfark *b*) 1 tredjedels ark *c*) 1 femtedels ark.

5) *a*) 1 tredjedels ark : 4 =? (1 tolftedels ark) *b*) 3 ark : 9 =? (1 tredjedels ark).

6) Om 5 sjettedels ark delas i *a*) 10 *b*) 25 lika delar. Hvad innehåller hvarje del?

a) 1 tolftedels ark *b*) 1 tretiondels ark.

7) Hvad är *a*) sjettedelen *b*) 5 sjettedelar af 3 fjerdedels ark?

a) 1 åttondels ark *b*) 5 åttondels ark.

8) *a*) 4 niondels ark : 8 =? (1 adertondels ark) *b*) 2 tredjedels ark : 10 =? (1 femtedels ark).

9) Om 5 sjundedels ark delas i *a*) 3 *b*) 8 *c*) 10 lika delar, hvad innehåller hvarje del?

a) 5 tjuguendels ark *b*) 5 femtiosjettedels ark *c*) 1 fjortondels ark.

10) Hvad är *a*) hälften *b*) tredjedelen *c*) femtedelen *d*) 4 femtedelar af 3 ark 1 tredjedels ark?

a) 1 ark 2 tredjedels ark *b*) 1 ark 1 niondels ark *c*) 2 tredjedels ark *d*) 2 ark 2 tredjedels ark.

11) *a*) 5 sjettedels ark : 3 =? (5 adertondels ark) *b*) 2 ark 1 tredjedels ark : 5 =? (7 femtondels ark).

12) 7 åttondels ark : 2 + 5 . 3 fjerdedels ark =? (3 ark 3 sextondels ark).

Öfning 9.

Tillämpning.

1) För 2 öre köpes 1 tredjedels ark. Huru mycket köpes för 1 öre?

1 sjettedels ark.

2) För 6 öre köpes 1 halfark. Huru mycket köpes för *a*) 3 öre *b*) 2 öre *c*) 1 öre?

a) 1 fjerdedels ark *b*) 1 sjettedels ark *c*) 1 tolftedels ark.

3) För 10 öre köpes 1 fjerdedels ark? Huru mycket köpes för *a*) 5 öre *b*) 35 öre *c*) 2 öre *d*) 18 öre?

a) 1 åttondels ark *b*) 7 åttondels ark *c*) 1 tjugondels ark *d*) 9 tjugondels ark.

4) För 18 öre köpas 5 ark. Huru mycket köpes för *a*) 9 öre *b*) 6 öre *c*) 3 öre?

a) 2 ark 1 halfark *b*) 1 ark 2 tredjedels ark *c*) 5 sjettedels ark.

5) För 12 öre köpes 5 sjettedels ark. Huru mycket köpes för *a*) 6 öre *b*) 4 öre *c*) 3 öre?

a) 5 tolftedels ark *b*) 5 adertondels ark *c*) 5 tjugufjerdedels ark.

6) För 40 öre köpas 2 ark 1 tredjedels ark. Huru mycket köpes för *a*) 8 öre *b*) 56 öre *c*) 5 öre *d*) 45 öre?

a) 7 femtondels ark *b*) 3 ark 4 femtondels ark *c*) 7 tjugufjerdedels ark *d*) 2 ark 15 tjugufjerdedels ark.

10.

Repetition.

1) Huru utfaller delningen, när 3 ark 1 halfark delas så, att hvarje del innehåller 1 åttondels ark?

Sv. Delarnes antal blir 28.

2) Huru utfaller delningen, när 3 ark 1 halfark delas så, att delarne blifva stora och deras antal är 8?

Sv. Hvarje del blir 7 sextondels ark.

Anm. Dessa bägge mindre bestämda former för delningsfrågor äro nyttiga att använda, emedan lärjungen derigenom *tvingas* att noga gifva akt på frågan för att erhålla ett rätt svar.

3)	*Del. ant.*	*Hvarje del.*	*Det hela.*
a)	8	5 sjundedels ark	?
b)	?	5 åttondels ark	3 ark 3 fjerdedels ark
c)	5	?	4 ark 1 sjettedels ark
d)	6	?	5 ark 1 halfark.

a) (5 ark 5 sjundedels ark) *b*) (6) *c*) (5 sjettedels ark) *d*) (11 tolftedels ark).

4) *a*) 6 ark 1 åttondels ark : 7 =? (7 åttondels ark) *b*) 7 . (6 ark 1 åttondels ark) =? (42 ark 7 åttondels ark) *c*) 5 ark 3 femtedels ark : 4 femtedels ark =? (7).

5) Hvad innehåller det hela, när delarne äro 7 tjugondels ark, 4 femtedels ark och 3 fjerdedels ark? (1 ark 18 tjugondels ark).

6) 5 tjuguåttondels ark + 1 ark 3 fjerdedels ark — 4 sjundedels ark =? (1 ark 10 tjuguåttondels ark).

7) 7 ark 5 sjundedels ark kosta 36 öre. Hvad kosta *a*) 6 sjundedels ark *b*) 3 ark 3 sjundedels ark *c*) 1 ark 2 sjundedels ark?

a) 4 öre *b*) 16 öre *c*) 6 öre.

8) För 1 kr. 50 öre köpes 2 ark 5 sjettedels ark. Huru mycket köpes för *a*) 75 öre *b*) 25 öre?

a) 1 ark 5 tolftedels ark *b*) 17 tretiosjettedels ark.

Öfning 11.

Det hela eller en af delarne sökes.

Innan följande exempel, i hvilka det hela eller en af delarne sökes, föreläggas lärjungarne, bör läraren öfva dem att bestämma jämna delar till två eller flere arkdelar, dock böra exemplen väljas så, att den största jämna delen till de uppgifna arkdelarne blir större än ett hundradels ark, hvarigenom man undviker att, såsom förberedande öfning, genomgå läran om tals minsta mångfald och största jämna del, hvilken lära förefaller lärjungarne svår och bör utskjutas till den tid, då de hunnit den mognad, att de kunna uppfatta den.

Se här några anvisningar!

L. (tager ett halfark). Kan detta halfark delas så, att hvarje del blir ett tredjedels ark? *M.* Nej. — *L.* Kan det delas så, att hvarje del blir ett fjerdedels ark? *M.* Ja. — *L.* Hvilket blir delarnes antal? *M.* Två.

På detta sätt förfar läraren, till dess lärjungarne finna, att fjerdedelsarket, sjettedelsarket, åttondelsarket o. s. v. — d. v. s. hvarannan arkdel — äro jämna delar till ett halfark. Derefter företagas samma öfningar med tredjedelsarket, fjerdedelsarket, femtedelsarket o. s. v. Sedan lärjungarne kunna uppgifva i ordning efter storleken de jämna delarne till en arkdel hvilken som helst, tager läraren t. ex. 1 halfark och 1 tredjedels ark och frågar: Hvilka jämna delar af ett ark äro äfven jämna delar till detta halfark och detta tredjedelsark? Kan någon af lärjungarne ej finna svaret: sjettedelsark, tolftedelsark, adertondelsark o. s. v., så låter läraren honom först uppräkna i ordning de jämna delarne till ett halfark, och derefter till ett tredjedelsark, då de finna, att den största jämna delen till dessa arkdelar är 1 sjettedels ark, hvarifrån de sedan lätt leda sig till de öfriga jämna delarne. Derefter uppmanas lärjungarne att föreställa sig halfarket och tredjedelsarket uppdelade i sjettedelsark, hvarefter de lätt finna, att summan af ett halfark och ett tredjedelsark är 5 sjettedels ark och skilnaden är 1 sjettedels ark. Efter några dylika öfningar låter läraren dem öfvergå till exemplen.

1) Hvaraf består det hela, när delarne äro 2 tredjedels ark, 3 fjerdedels ark och 5 sjettedels ark? (2 ark 3 tolftedels ark).

2) Hvad är det hela, när den första delen är 4 niondels ark och den andra är 1 halfark större än den första delen? (1 ark 7 adertondels ark).

3) En gosse gaf bort 1 ark 3 åttondels ark och hade qvar 7 tolftedels ark. Huru mycket hade han från början? (1 ark 23 tjugufjerdedels ark).

4) Det hela är 5 sjettedels ark, den ena delen är 4 niondels ark. Hvilken är den andra delen? (7 adertondels ark).

5) Hvad är skilnaden mellan 8 niondels ark och 5 tolftedels ark? (17 tretiosjettedels ark).

6) 7 tiondels ark + 3 fjerdedels ark + 1 femtedels ark =? (1 ark 13 tjugondels ark).

7) 11 femtondels ark — 7 tjugondels ark =? (23 sextiondels ark).

8) Fullborda följande satser!

a) 19 tjugondels ark är 5 tolftedels ark *mer* än..... (32 sextiondels ark).

b) 19 tjugondels ark är 5 tolftedels ark *mindre* än..... (1 ark 22 sextiondels ark).

Öfning 12.

Jämna delar af metern.

För att inleda denna öfning är det nödigt, att läraren jämte metermåttet anskaffar 11 stycken träribbor, hvilkas längder äro 1 half meter, 1 tredjedels meter o. s. v. till och med 1 tolftedels meter. Längden på hvarje träribba bör vara angifven. Läraren förbereder denna öfning på det sätt, att han uppdrar på svarta taflan flere jämnlöpande linier och tillsäger lärjungarne i ordning, att med användning af träribborna på de särskilda linierna afskära stycken, hvilkas längder äro t. ex. 2 tredjedels meter, 3 fjerdedels meter, 5 tolftedels meter o. s. v. Derefter öfvas lärjungarne att bestämma längder i skolrummet än med halfmetern än med tredjedelsmetern o. s. v. som mått. Denna öfning innehåller exempel liknande dem, som förekomma i öfningarne 1, 3, 6, 8 och 11. Skilnaden består blott deri, att *arket* är utbytt mot *metern*. Innan exemplen föreläggas lärjungarne, böra de af läraren noggrant förberedas. Se föregående anvisningar.

1) Huru många blifva delarne, när 3 fjerdedels meter delas så, att hvarje del blir en åttondels meter? (6).

2) Huru stor blir hvarje del, när 3 fjerdedels meter delas i åtta lika delar? (3 tretiotvådels meter).

3) Huru utfaller delningen, när 2 meter 1 halfmeter, delas så, att hvarje del blir en sjettedels meter? (Delarnes antal blir 15).

4) Huru utfaller delningen, när 2 meter 1 halfmeter delas i 6 lika delar? (Hvarje del blir 5 tolftedels meter).

5) Hvad är summan af 2 tredjedels meter och 3 fjerdedels meter? (1 meter 5 tolftedels meter).

6) Delarnes antal är 7, hvarje del är 3 femtedels meter. Hvad är det hela? (4 meter 1 femtedels meter).

Anm. I det följande användas följande förkortade beteckningssätt: $^3/_4$ m. i stället för 3 fjerdedels meter, $^7/_8$ m. i stället för 7 åttondels meter, $2^5/_6$ m. i stället för 2 meter 5 sjettedels meter o. s. v.

7) *Del. antal.* *Hvarje del.* *Det hela.*

a)	7	$^5/_8$ m.	?	($4^3/_8$ m.).
b)	4	?	$2^2/_5$ m.	($^3/_5$ m.).
c)	5	?	$2^2/_5$ m.	($^{12}/_{25}$ m.).
d)	?	$^5/_6$ m.	$12^1/_2$ m.	(15).

8) $^3/_8$ m. + $^7/_{12}$ m. + $^2/_3$ m. =? ($1^{15}/_{24}$ m.).
9) 5 . $^7/_9$ m. — $1^5/_6$ =? ($2^1/_{18}$ m.).
10) $8^2/_5$ m. : 7 =? ($1^1/_5$ m.).
11) $2^2/_3$ m. : 7 =? ($^8/_{21}$ m.).
12) $9^1/_3$ m. : $1^1/_6$ m. =? (8).

Öfning 13.

Tillämpning.

1) $^2/_3$ m. tyg kosta 96 öre. Hvad kosta *a*) $^1/_{12}$ m. *b*) $^3/_4$ m.?

a) Åttondelen af 96 öre, som är 12 öre *b*) 9-falden af 12 öre, som är 1 kr. 8 öre.

2) $^5/_6$ m. tyg kosta 75 öre. Hvad kosta $1^5/_9$ m.? (1 kr. 40 öre).

Lösning 1. När $^5/_6$ m. tyg kosta 75 öre, så kostar $^1/_{18}$ m. (en jämn del till $^5/_6$ m. och $1^5/_9$ m.), som är 15-delen af $^5/_6$ m., 15-delen af 75 öre, som är 5 öre, derför kosta $1^5/_9$ m., som äro 28-falden af $^1/_{18}$ m., 28-falden af 5 öre, som är 140 öre eller 1 kr. 40 öre.

Lösning 2. När $^5/_6$ m. tyg kosta 75 öre, så kosta $1^5/_9$ m., som äro 28 femtondelar af $^5/_6$ m., 28 femtondelar af 75 öre, som äro 140 öre eller 1 kr. 40 öre.

Lösning 3. När $^5/_6$ m. tyg kosta 75 öre, så kostar $^1/_6$ m., som är femtedelen af $^5/_6$ m., femtedelen af 75 öre, som är $^{75}/_5$ öre, och 1 m., som är 6-falden af $^1/_6$ m, 6-falden af $^{75}/_5$ öre, som är $\frac{6 . 75}{5}$ öre, och $^1/_9$ m., som är niondelen af 1 m., niondelen af $\frac{6 . 75}{5}$ öre, som är $\frac{6 . 75}{9 . 5}$ öre, samt $1^5/_9$ m., som äro 14-falden af $^1/_9$ m., 14-falden af $\frac{6 . 75}{9 . 5}$ öre, som är $\frac{14 . 6 . 75}{9 . 5}$ öre eller efter förkortning 140 öre.

3) För 56 öre köpas $1^1/_2$ m. tyg. Huru mycket köpes för 24 öre? ($^9/_{14}$ m.).

Lösning 1. När man för 56 öre köper $1^1/_2$ m. tyg, så köper man för 8 öre (den största jämna delen till

56 öre och 24 öre), som äro sjundedelen af 56 öre, sjundedelen af $1^1/_2$ m., som är $^3/_{14}$ m., och för 24 öre, som äro 3-falden af 8 öre, 3-falden af $^3/_{14}$ m., som är $^9/_{14}$ m.

Lösning 2. När man för 56 öre köper $1^1/_2$ m., så köper man för 24 öre, som äro 3 sjundedelar af 56 öre, 3 sjundedelar af $1^1/_2$ m., som äro $^9/_{14}$ m.

Lösning 3. När man för 56 öre köper $1^1/_2$ m., så köper man för 1 öre, som är 56-delen af 56 öre, 56-delen af $1^1/_2$ m., som är $\frac{3}{56 \cdot 2}$ m., och för 24 öre, som äro 24-falden af 1 öre, 24-falden af $\frac{3}{56 \cdot 2}$ m., som är $\frac{24 \cdot 3}{56 \cdot 2}$ m. eller efter förkortning $^3/_{14}$ m.

Anm. 1. Det *första* lösningssättet i ex. 2 och 3 bör flitigt användas vid den första undervisningen i bråk, emedan det är särdeles tankeöfvande. Det *andra* lösningssättet, som blott är en sammandragning af det *första*, är lämpligt att använda, då begreppet förhållande skall inläras. För öfrigt äro dessa bägge lösningssätt användbara vid hufvudräkning, då de i räkneuppgifterna förekommande talen äro enkla och lättfattliga. Det *tredje* lösningssättet lämpar sig bäst, då talen äro mera invecklade, samt då räknaren vill erhålla ett rätt svar med den minsta möjliga ansträngning af tankekraften, emedan det är det mäst slentrianmessiga bland de tre.

Anm. 2. Ännu ett *fjerde* lösningssätt kan anföras, men emedan detta i praktiskt hänseende är mindre lämpligt, har det ej blifvit användt i ex. 2 och 3. För att gifva läsaren en föreställning om detta sätt meddelas här nedan tvänne enkla uppgifter jämte lösning.

1) För 18 öre köpas 57 nötter, huru mycket köpes för 12 öre?

Lösning. När man för 18 öre köper 57 nötter, så köper man för 36 öre (minsta mångfalden till 18 öre och 12 öre), som äro 2-falden af 18 öre, 2-falden af 57 nötter, som är 114 nötter, och för 12 öre, som äro tredjedelen af 36 öre, tredjedelen af 114 nötter, som är 38 nötter.

2) $1^1/_2$ m. tyg kosta 45 öre. Hvad kosta $^3/_5$ m.?

Lösning. När $1^1/_2$ m. tyg kosta 45 öre, så kosta 3 m. (minsta mångfalden till $1^1/_2$ m. och $^3/_5$ m.), som äro 2-falden af $1^1/_2$ m., 2-falden af 45 öre, som är 90 öre, och $^3/_5$ m., som är femtedelen af 3 m., femtedelen af 90 öre, som är 18 öre.

4) $2^1/_2$ m. tyg kosta 1 kr. 20 öre. *a*) Huru mycket kostar 1 m. tyg? *b*) Huru mycket tyg köpes för 1 kr.?

a) 48 öre *b*) $2^1/_{12}$ m.

5) Fullborda följande satser:

a) När $2^2/_3$ m. tyg kosta 1 kr. 60 öre, så kosta $1^5/_6$ m..... och $2^3/_4$ m..... (1 kr. 10 öre, 1 kr. 65 öre).

b) När man för 2 kr. 75 öre köper $4^2/_5$ m., så köper man för 4 kr.____ och för 8 kr. 25 öre....
($6^2/_5$ m., $13^1/_5$ m.).

Öfning 14.

Utbyte af enheter.

1) Hvilket är öretalet till *a*) 1 half krona *b*) 3 fjerdedels krona *c*) $^4/_5$ kr. *d*) $^7/_{10}$ kr.?
a) 50 *b*) 75 *c*) 80 *d*) 70.

2) Hvilket är minuttalet till *a*) $^3/_4$ tim. *b*) $^5/_6$ tim. *c*) $^7/_{20}$ tim.?
a) 45 *b*) 50 *c*) 21.

3) *a*) $^7/_{12}$ tim. =? min. *b*) $^4/_5$ tjog =? stycken *c*) $^7/_{25}$ hl. =? l. *d*) $^3/_8$ dygn =? tim. *e*) $^2/_3$ vecka =? dygn *f*) $^7/_8$ km. =? m.
a) 35 *b*) 16 *c*) 28 *d*) 9 *e*) $4^2/_3$ *f*) 875.

4) *a*) 20 min. =? tim. *b*) 9 stycken =? dussin *c*) 15 ark =? bok d) 60 gr. =? hg. *e*) $2^2/_3$ dygn =? vecka.
a) $^1/_3$ *b*) $^3/_4$ *c*) $^5/_8$ *d*) $^3/_5$ *e*) $^8/_{21}$.

Förklaring till *e*). 1 dygn är lika med $^1/_7$ vecka, derför är $^1/_3$ dygn lika med tredjedelen af $^1/_7$ vecka, som är $^1/_{21}$ vecka, och $2^2/_3$ dygn lika med 8-falden af $^1/_{21}$ vecka, som är $^8/_{21}$ vecka.

5) 8 l. = 3 k:or, derför är *a*) 1 l. =? k:or, *b*) 17 l. =? k:or, *c*) 1 k:a =? l. och *d*) 20 kbt =? l.
a) $^3/_8$ *b*) $6^3/_8$ *c*) $2^2/_3$ *d*) $^8/_{15}$.

6) *a*) 4 tolftedels meter =? fjerdedels meter (1) *b*) 9 tolftedels meter =? fjerdedels meter (3) *c*) 15 tjugondels meter =? fjerdedels meter (3).

7) Angif följande längder med den största möjliga jämna del af metern som enhet *a*) 15 adertondels meter *b*) 27 tretiosjettedels meter *c*) $^{25}/_{45}$ m. *d*) $^{42}/_{54}$ m. *e*) $^{21}/_{24}$ m. *f*) $^{33}/_{55}$ m. *g*) $^{24}/_{64}$ m.

Sv.: *a*) 5 sjettedels meter *b*) 3 fjerdedels meter *c*) $^5/_9$ m. *d*) $^7/_9$ *e*) $^7/_8$ m. *f*) $^3/_5$ m. *g*) $^3/_8$ m.

Förklaring till *a*) 3 adertondels meter (3 är största jämna delen till 15 och 18) är lika med 1 sjettedels meter, derför är 15 adertondels meter lika med 5 sjettedels meter.

Förklaring till *d*) $^6/_{54}$ m. = $^1/_9$ m., derför är $^{42}/_{54}$ m. = $^7/_9$ m. (6 är den största jämna delen till 42 och 54).

Öfning 15.

Repetition.

1) En qvadrats omkrets är *a*) $2\frac{2}{5}$ m. *b*) $3\frac{1}{2}$ m. Huru stor är hvarje sida?

a) $\frac{3}{5}$ m. *b*) $\frac{7}{8}$ m.

2) En rektangels omkrets är $2\frac{1}{2}$ m. och höjd är $\frac{2}{5}$ m. Hvilket är metertalet till rektangelns bas? ($\frac{17}{20}$).

3) Fullborda följande satser:

a) 5 niondelar af $3\frac{1}{3}$ m. är....

b) 5 niondelar af.... är $3\frac{1}{3}$ m.

a) $1\frac{23}{27}$ m. *b*) 6 m.

4) 3 kg. = 7 ℔, derför är *a*) 18 kg. = ? ℔, *b*) $5\frac{1}{2}$ kg. = ? ℔, *c*) 63 ℔ = ? kg. och *d*) 15 ℔ = ? kg.

a) 42 *b*) $12\frac{5}{6}$ *c*) 27 *d*) $6\frac{3}{7}$.

5) *a*) $3\frac{1}{2}$ fjerdingsväg = ? mil = ? fot *b*) 2 dygn 8 tim. = ? dygn = ? vecka.

a) $\frac{7}{8}$, 31500 *b*) $2\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$.

6) $2\frac{2}{3}$ kg. mjöl kosta 16 öre, hvad kosta $5\frac{1}{2}$ kg. mjöl? (33 öre).

7) Under $1\frac{3}{4}$ tim. tillryggalägger ett järnvägståg $5\frac{5}{6}$ mil. *a*) Huru långt hinner det på 1 timme? *b*) Huru lång tid använder det för att tillryggalägga 1 mil?

a) $3\frac{2}{3}$ mil *b*) 18 min.

8) Angif följande längder med den största möjliga jämna del af metern såsom enhet:

a) $\frac{45}{63}$ m. *b*) $\frac{48}{56}$ m. *c*) $\frac{26}{39}$ m. *d*) $\frac{52}{65}$ m. *e*) $\frac{40}{72}$ m. *f*) $\frac{49}{91}$ m.

Sv.: *a*) $\frac{5}{7}$ m. *b*) $\frac{6}{7}$ m. *c*) $\frac{2}{3}$ m. *d*) $\frac{4}{5}$ m. *e*) $\frac{5}{9}$ m. *f*) $\frac{7}{13}$ m.

Öfning 16.

Jämna delar af qvadratmetern och qvadratdecimetern.

För att inleda denna öfning bör läraren anskaffa en qvadratisk pappersruta, hvars sida är 1 m., 8 stycken qvadratiska pappersrutor, hvilkas sidor äro *a*) $\frac{1}{2}$ m. *b*) $\frac{1}{3}$ m. *c*) $\frac{1}{4}$ m. *d*) $\frac{1}{6}$ m. *e*) $\frac{1}{10}$ m. *f*) $\frac{1}{12}$ m. *g*) $\frac{2}{3}$ m. *h*) $\frac{3}{4}$ m., 6 stycken rektangulära pappersrutor, hvilkas baser och höjder äro *a*) 1 m. och $\frac{1}{3}$ m. *b*) $\frac{1}{2}$ m. och $\frac{1}{3}$ m. *c*) $\frac{1}{3}$ m. och $\frac{1}{4}$ m. *d*) $\frac{1}{4}$ m. och $\frac{1}{6}$ m. *e*) $\frac{5}{26}$ m. och $\frac{2}{3}$ m. *f*) $\frac{3}{4}$ m. och $\frac{5}{6}$ m.

Till dessa rutor användes s. k. takpapper. Kostnaden för det papper, som åtgår för dessa rutor, är omkring 50 öre. Rutorna böra uppsättas på en af skolrummets väggar.

Se här några anvisningar om sättet att begagna dem!

L. (pekar på den rektangulära ruta, hvars bas är 1 m. och höjd är $^1|_3$ m.). Huru många dylika rutor åtgå för att täcka denna? (*L.* pekar på den ruta, hvars sida är 1 m.).

M. 3.

L. Huru benämnes således denna rutas yta?

M. tredjedels qvadratmeter.

På samma sätt förfar läraren med de öfriga qvadratiska och rektangulära rutorna, hvilkas ytor äro jämna delar af qvadratmetern. Derefter anställas dylika öfningar, i hvilka qvadratmeterrutan utbytes mot en annan.

L. (pekar på den ruta, hvars sida är $^1|_{12}$ m.). Huru många dylika rutor åtgå för att täcka denna ruta? (*L.* pekar på den ruta, hvars sida är $^1|_2$ m.).

M. 36. Emedan $^1|_2$ m. är 6-falden af $^1|_{12}$ m., så blir rutornas antal i hvarje rad 6, och radernas antal äfven 6, derför blir alla rutornas antal 36.

L. Hvilken jämn del är således den föra rutans yta af den senares?

M. 1 tretiosjettedel.

L. (pekar på den ruta, hvars sida är $^1|_1$ m.). Huru många dylika rutor åtgå för att täcka denna ruta? (*L.* pekar på den rektangulära ruta, hvars bas är $^5|_6$ m. och höjd $^2|_3$ m).

M. 80. Emedan $^5|_6$ m. är 10-falden af $^1|_{12}$ m., så blir rutornas antal i hvarje rad 10, och emedan $^2|_3$ m. är 8-falden af $^1|_{12}$ m., så blir radernas antal 8, således blir alla rutornas antal 80.

L. Hvilken jämn del är således den förra rutans yta af den senares?

M. 1 åttiondel.

Sedan lärjungarne erhållit tillräcklig säkerhet i dylika frågors besvarande, öfvar läraren dem att bestämma förhållandet mellan en rutas yta och qvadratmetern, då ytan ej är en jämn del af qvadratmetern.

L. (pekar på den ruta, hvars bas är $^3|_4$ m. och höjd $^5|_6$ m.). Hvilken yta är en jämn del till denna yta och qvadratmetern?

M. En rektangel, hvars bas är $^1|_4$ m. och höjd $^1|_6$ m.

L. Huru benämnes denna jämna del?
M. $^1|_{24}$ qvm.
L. Hvilken mångfald är denna ruta af denna jämna del?
M. 15-falden.
L. Huru benämnes således denna ruta?
M. 15 tjugufjerdedels qvadratmeter eller $^5|_8$ qvm.

Emedan lärjungarne i början af denna öfning hafva behof af att åskådliggöra dylika uppgifter genom figurer på sina taflor, har i de första exemplen af denna öfning blifvit tagen till enhet qvadratdecimetern, hvilken de böra upprita i ena hörnet på sina taflor.

Lärjungarne böra ej tillåtas att för beräkningarne använda satsen: "En rektangels qvadratmetertal är produkt af basens metertal och höjdens metertal", förr än de fullt fatta och klart kunna redogöra för tillkomsten af svaret på dylika uppgifter.

1) Hvilket är qvadratdecimetertalet till en qvadrat, hvars sida är *a)* $^1|_5$ dm. *b)* $^1|_7$ dm. *c)* 1 cm.?
a) $^1|_{25}$ *b)* $^1|_{49}$ *c)* $^1|_{100}$.

2) Hvilket är qvadratdecimetertalet till en rektangel, hvars bas och höjd äro *a)* $^1|_2$ dm. och $^1|_4$ dm. *b)* $^1|_6$ dm. och $^1|_9$ dm. *c)* $^1|_4$ dm. och 1 cm.?
a) $^1|_8$ *b)* $^1|_{54}$ *c)* $^1|_{40}$.

3) Hvilket är qvadratdecimetertalet till en qvadrat, hvars sida är *a)* $^2|_3$ dm. *b)* $1^1|_2$ dm. *c)* $2^2|_3$ dm. *d)* $2^2|_3$ cm.?
a) $^4|_9$ *b)* $2^1|_4$ *c)* $7^1|_9$ *d)* $^{64}|_{900} = {}^{16}|_{225}$.

4) Hvilket är qvadratdecimetertalet till en rektangel, hvars bas och höjd äro *a)* 3 dm. och $^1|_4$ dm. *b)* 5 dm. och $^3|_4$ dm. *c)* $^5|_6$ dm. och $^3|_8$ dm. *d)* $^3|_4$ dm. och $3^1|_2$ cm. *e)* $2^3|_4$ dm. och $5^1|_2$ dm. *f)* $3^1|_2$ dm. och $1^2|_3$ cm.?
a) $^3|_4$ *b)* $3^3|_4$ *c)* $^5|_{16}$ *d)* $^{21}|_{80}$ *e)* $15^1|_8$ *f)* $^7|_{12}$.

5) Hvilket är qvadratmetertalet till en qvadrat, hvars omkrets är *a)* $2^1|_2$ m. *b)* $3^1|_5$ m. *c)* $2^2|_5$ dm.?
a) $^{25}|_{64}$ *b)* $^{16}|_{25}$ *c)* $^9|_{2500}$.

6) Hvilket är qvadratmetertalet till en rektangel, hvars omkrets är $4^1|_2$ m. och bas är $^3/_5$ m.? ($^{99}/_{100}$).

Öfning 17.

Jämna delar af kubikmetern och kubikdecimetern.

För att inleda denna öfning behöfver läraren: 2 stycken qvadratiska figurer, sammansatta af träribbor, hvilkas längder äro 1 meter, samt 4 stycken lösa träribbor, hvilkas längder äfven äro 1 meter. I alla hörnen af de bägge qvadratiska figurerna borras hål, i hvilka inpassas ändarne af de 4 träribborna. De bägge qvadratiska figurerna och de 4 träribborna omfatta ett rum, som är en kubikmeter.

Dessutom behöfvas: 1 kubiskt litermått af bleck, 10 stycken kuber af trä, hvilkas kanter äro i ordning *a*) 1 dm. *b*) $^1/_2$ dm. *c*) $^1/_3$ dm. *d*) $^1/_4$ dm. *e*) $^1/_6$ dm. *f*) $^1/_{10}$ dm. *g*) $^1/_{12}$ dm. *h*) $^2/_3$ dm. *i*) $^3/_4$ dm. *k*) $1^1/_2$ dm., 4 stycken rätvinkliga parallelipipeder af trä, hvilkas längder, bredder och höjder äro i ordning *a*) 1 dm., 1 dm. och $^1/_3$ dm. *b*) 1 dm., $^1/_2$ dm. och $^1/_3$ dm. *c*) $^1/_2$ dm., $^1/_3$ dm. och $^1/_4$ dm. *d*) $^2/_3$ dm., $^4/_5$ dm. och $^7/_9$ dm. Dessa saker kunna erhållas för billigt pris hos hvarje snickare.

Några cigarrlådor af olika dimensioner.

Af de anvisningar, som förekomma i inledningen till föregående öfning, kan läraren sjelf finna, huru dessa föremål skola användas.

1) Hvilket är kubikdecimetertalet till en kub, hvars kant är *a*) $^1/_2$ dm. *b*) $^1/_5$ dm. *c*) $^1/_7$ dm.?

a) $^1/_8$ *b*) $^1/_{125}$ *c*) $^1/_{343}$.

2) Hvilket är kubikdecimetertalet till en rätvinklig parallelipiped, hvars längd, bredd och höjd äro *a*) 1 dm., $^1/_4$ dm. och $^1/_5$ dm. *b*) $^1/_3$ dm., $^1/_6$ dm. och $^1/_7$ dm?

a) $^1/_{20}$ *b*) $^1/_{126}$.

3) Hvilket är kubikdecimetertalet till en kub, hvars kant är *a*) $^2/_3$ m. *b*) $^5/_6$ m. *c*) $1^3/_4$ m.?

a) $^8/_{27}$ *b*) $^{125}/_{216}$ *c*) $5^{23}/_{64}$.

4) Hvilket är kubikdecimetertalet till en rätvinklig parallelipiped, hvars längd, bredd och höjd är *a*) 2 dm., $^2/_3$ dm. och $^3/_4$ dm. *b*) 1 m., $^5/_6$ dm. och 4 cm. *c*) $3^1/_2$ dm., $2^2/_3$ dm. och $5^1/_2$ cm.?

a) 1 *b*) $3^1/_3$ *c*) $5^2/_{15}$.

5) En kubs kant är $1^1/_2$ dm. Hvilket är *a*) decimetertalet till summan af kubens kanter? *b*) qvadratdecimetertalet till summan af kubens ytor? *c*) kubikdecimetertalet till kuben?

a) 18 *b*) $12^1/_2$ *c*) $3^3/_8$.

6) En cigarrlådas längd utvändigt är $2^1/_3$ dm., bredd $1^1/_4$ dm. och höjd $7^1/_2$ cm. Hvilket är *a*) decimetertalet till summan af cigarrlådans yttre kanter? *b*) qva-

dratdecimetertalet till summan af cigarrlådans yttre ytor? *c*) kubikdecimetertalet till cigarrlådan?

a) $8^2/_3$ *b*) $11^5/_{24}$ *c*) $2^3/_{16}$.

Öfning 18.

Förhållande.

Denna öfning, som är den vigtigaste i bråkläran, bör af läraren noggrant förberedas. Se här några anvisningar.

På svarta taflan uppritas en rät linie, hvilken delas i t. ex. 8 lika delar.

A B C D E F G H I

Låt denna linie vara *AI*, som genom punkterna *A*, *B*, *C*, *D* o. s. v. är delad i 8 lika delar.

L. Jämför *AC* med *AB* och uttryck i en sats sambandet emellan dem!

M. *AC* är 2-falden af *AB*.

L. Jämför *AF* med *AB*!

M. *AF* är 5-falden af *AB*.

L. Jämför *a*) *AI* med *AC* *b*) *AB* med *AD* *c*) *CD* med *AF* *d*) *AC* med *CF* *e*) *AD* med *DI* *f*) *AF* med *AD* *g*) *AI* med *AF* o. s. v.

M. *a*) *AI* är 4-falden af *AC* *b*) *AB* är tredjedelen af *AD* *c*) *CD* är femtedelen af *AF* *d*) *AC* är 2 tredjedelar af *CF* *e*) *AD* är 3 femtedelar af *DI* *f*) *AF* är 5 tredjedelar af *AD* *g*) *AI* är 8 femtedelar af *AF*.

Läraren bör fästa lärjungarnes synnerliga uppmärksamhet, att de noga iakttaga, hvilken linie det är, som jämföres, och hvilken linie det är, hvarmed den jämföres, emedan det är mycket vanligt att de omkasta ordningen mellan den föregående och den efterföljande. Sedan de ernått säkerhet häruti, öfvergår läraren till följande öfning.

L. Upprita en rät linie på edra taflor! Upprita bredvid denna en annan, som är 3 fjerdedelar af denna linie!

Sedan läraren öfvertygat sig, att hans befallning blifvit rätt utförd, låter han en af lärjungarne redogöra för sättet att erhålla denna linie.

M. Jag delade linien i 4 lika delar, sedan uppritade jag en linie, som var lika stor med 3 sådana delar tillsammans.

L. Upprita en rät linie på edra taflor! Upprita bredvid denna en annan, hvaraf den först uppritade linien är 3 fjerdedelar! Huru erhöll du denna linie?

M. Jag delade den först uppritade linien i 3 lika delar, sedan uppritade jag en linie, som var lika med 4 sådana delar tillsammans.

Efter dylika öfningar öfvergår läraren slutligen till inlärandet af begreppet förhållande. Dels af inledningen af denna uppsats, dels af efterföljande exempel kan läraren sjelf lätt finna lämpliga förberedande öfningar.

1) En linie *m* är $^{5}|_{8}$ m., en linie *n* är $^{11}|_{12}$ m. *a*) Hvilken är den största längd, som är en jämn del af *m* och *n*? Hvad är förhållandet mellan *b*) *m* och denna jämna del? *c*) *n* och denna jämna del? *d*) *m* och *n*?

a) $^{1}|_{24}$ m. *b*) 15 *c*) 22 *d*) $^{15}|_{22}$.

2) Förhållandet mellan tvänne längder *r* och *s* är $^{8}|_{3}$. Hvilket är förhållandet mellan *a*) *r* och summan af *r* och *s*? *b*) *s* och skilnaden mellan *r* och *s*? *c*) mellan summan af *r* och *s* och skilnaden mellan *r* och *s*?

a) $^{8}|_{11}$ *b*) $^{3}|_{5}$ *c*) $^{11}|_{5}$ eller $2^{1}|_{5}$.

3) En linie *k* är delad i tre delar, *m*, *n* och *r*. *m* är lika stor med *n*, och förhållandet mellan *m* och *r* är $^{4}|_{7}$. Hvad är förhållandet mellan *a*) *m* och *k*? *b*) *r* och *k*?

a) $^{4}|_{15}$ *b*) $^{7}|_{15}$.

4) *A* går $1^{1}|_{2}$ m. och *B* $1^{2}|_{3}$ m. under hvarje sekund. Hvilket är förhållandet mellan de väglängder, som *A* och *B* tillryggalagt under *samma* tid? ($^{9}|_{10}$).

Efter denna öfning skola följa öfningarne 19 och 20. Öfningen 19 bör innehålla tillämpningsexempel till den föregående och öfningen 20 repetitionsexempel till de närmast föregående fyra öfningarne. Då i det föregående blifvit vidlyftigt redogjordt för begreppet förhållande och dess användning vid lösningen af en mängd räkneuppgifter, anser jag det vara öfverflödigt att här bifoga några exempel till dessa öfningar.

Med dessa 20 öfningar anser jag inledningen till den allmänna bråkläran vara afslutad. Efter denna förberedande kurs är den allmänna bråkläran lätt genomgången, med undantag af läran om bråks liknämniggörande och förkortning, hvilken förutsätter läran om största jämna delen och minsta mångfalden till hela tal. Emedan denna lära är alt för abstrakt och således kräfver en större mognad hos lärjungen, än den man kan begära på detta skede af deras utveckling, är det ur pedagogisk synpunkt lämpligast att framflytta denna lära efter läran om decimalbråk, samt derefter komplettera läran om bråks liknämniggörande och förkortning och den i sammanhang dermed stående läran om beräkningen af bråks summor och skilnader. Vid den första kursen i den allmänna bråkläran böra således vid bestämmande af summor och skilnader endast förekomma sådana bråk, hvilkas nämnares minsta mångfald är mindre än 100, då den är lätt att finna med hufvudsaklig ledning af mångfaldstabellen (multiplikationstabellen).

Såsom läsaren finner af ofvanstående, är min åsigt, att läran om decimalbråk bör följa efter läran om de allmänna bråken. Emedan det på senare tiden blifvit ganska allmänt att låta läran om decimalbråken föregå läran om de allmänna bråken, är jag skyldig att angifva de skäl, som *framtvingat* min afvikande åsigt.

När jag år 1853 inträdde i skolans tjenst som lärare, var det min fasta öfvertygelse, att läran om decimalbråken borde omedelbart följa efter läran om de hela talen, hvarför jag genast vidtog denna anordning vid undervisningen. Genom min föregående enskilda lärareverksamhet hade jag mig väl bekant, att räkningen med decimalbråk föreföll lärjungar mycket svår, och det hände ganska ofta, att ynglingar i studentexamen och i den då brukliga kameralexamen blefvo underkända i följd af bristande insigter i decimalbråk, men detta hindrade mig ej från utförandet af min föresats, emedan jag trodde, att orsaken till de bristande insigterna var att söka i en felaktig undervisning och ej i lärjungarnes bristande förmåga att uppfatta decimalbråken. Redan efter de första lektionstimmarne började min öfvertygelse om den vidtagna anordningens ändamålsenlighet att vackla. Den *heuristiska metoden*, efter hvilken jag under den senare delen af min skoltid som lärjunge blifvit undervisad, fann jag mycket snart icke kunna användas; jag tillgrep då *föredragsmetoden*, men fann, att äfven den var oanvändbar; i min förtviflan och för att kunna på något sätt komma till ett slut, grep jag till *regelmetoden* — den första och sista gången — men äfven med mycket ringa framgång, ty de exempel, som lärjungarne den ena lektionen kunde få rätt beräknade, misslyckades de med under en annan lektion, och trots alla ansträngningar var det omöjligt att ens bibringa mina lärjungar en säker kännedom om decimalbråkens *mekaniska* behandling. När sedan denna ytliga kunskap skulle tillämpas på lösningen af praktiska räkneuppgifter, blef det ännu värre, ty då bestormades jag helt naturligt med frågor af ungefär följande innehåll: "hvilket räknesätt skall jag använda?" eller "huru skall jag ställa upp?" Orsaken till mitt misslyckade försök anade jag redan då vara den, *att lärjungarne ej voro förtrogna med bråkbegreppet samt att decimalbråken, som äro för svårfattliga, ej kunna användas för att hos lärjungarne inplanta detta begrepp.* Denna min aning har sedermera under min långa lärareverksamhet öfvergått till full visshet, och har jag derunder kommit till den åsigten, att bråkläran är elementarmatematikens svåraste del, hvars bibringande kräfver af läraren den största omtänksamhet och ansträngning. Ett oundgängligt vilkor för att lyckas är, att läraren börjar med de enklaste bråken $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_3$, $^2/_3$ o. s. v. och så småningom öfvergår till de mera invecklade.

Särdeles upplysande har min verksamhet som lärare vid en afton- och söndagsskola under de sista 18 åren varit. Flere bland de lärjungar, som derstädes åtnjutit undervisning, hafva vid inträdet uppgifvit sig ega kunskaper i decimalbråk, men befunnits vid anstäld pröfning sakna sådana. Oaktadt lärjungarnes antal derstädes uppgår i medeltal till 80, och deras ålder växlar mellan 10 och 40 år, så har jag ej ännu lyckats påträffa *en enda*, som egt försvarliga insigter i decimalbråk, och som varit okunnig i den allmänna bråkläran. På samma gång har jag gjort den bedröfliga erfarenheten, att lärjungar, som genomgått decimalbråken före de allmänna bråken, sedan haft svårare att lära sig decimalbråken efter den allmänna bråklärans genomgående än de öfriga. Detta har berott derpå, att de från sin förra verksamhet medfört ovanan att gissa, hvilken all tid uppammas, då man låter lärjungar sysla med ämnen, för hvilka de ej äro mogna.

Omkring år 1860 utkom ett påbud under form af "råd till lärare", att låta läran om decimalbråk omedelbart följa efter läran om de hela talen. Detta "råd" väckte min stora förvåning, hvilken dock minskades, sedan det blifvit bekant, att det var gifvet af en man, som ej varit i tillfälle att pröfva, huruvida "rådet" var godt eller icke. Att komiten för granskning af läroböcker i matematik och naturvetenskap äfven yrkade på samma ordningsföljd, anser jag äfven bero derpå, att dess medlemmar, som äro mycket kunniga i matematik, i följd af sina tjenster, icke haft tillfälle att noggrant pröfva sitt förslag i skolan. Mot dessa auktoriteter kunna uppställas flere andra, som äro fullt lika betydande, så är det i Frankrike — ett land, der den matemetiska undervisningen är bättre ordnad än i något annat — genom lag föreskrifvet, att i lyceerna (motsvarande våra allmänna läroverk) skall läran om de allmänna bråken föregå läran om decimalbråken. I alla tyska läroböcker och exempelsamlingar i aritmetik, som jag varit i tillfälle att se, förekommer äfven samma ordningsföljd. Mycket mera kunde anföras så väl för den ena som för den andra åsigten, men det sagda må för denna gång vara nog.

Af det, som blifvit anfördt framgår tydligen, att frågan kräfver en noggran undersökning. Det finnes ett säkert sätt att snart komma till full klarhet i denna fråga, och det är, att den högsta styrelsen för vårt undervisningsväsende utsänder opartiske skolmän med matematisk underbygnad, som samvetsgrant pröfvar tillståndet i våra skolor angående förevarande fråga. Afgifva då desse män det intyg, att en grundlig kunskap i decimalbråk ej är möjlig att bibringa utan föregående kunskap i den allmänna bråkläran, så bör det ofvannämda påbudet genast upphöra att hafva gällande kraft. Särskildt får jag fästa uppmärksamheten på, att de läroböcker och exempelsamlingar i aritmetik, i hvilka läran om decimalbråk föregår läran om de allmänna bråken, mycket väl kunna användas i händelse ordningsföljden mellan ofvannämda delar ändras, hvarför något hinder för sakens genomförande ifrån detta håll icke möter.

Och nu till sist ett hjärtligt tack till dem bland Veckobladets läsare, som haft tålamod att följa min uppsats till slutet. De tankar om undervisningen i räkning, som i den blifvit framlagda, hafva blifvit väckta till lif, pröfvade och ordnade under ett långvarigt och träget arbete i skolans tjenst. Kunna de blifva mina medlärare till något gagn, vore det för mig mycket glädjande.

K. Nordlundh.