ÅSKÅDLIG MATEMATIKUNDERVISNING

AV

GÖSTA SETTERBERG
FIL. D:R, SEMINARIEADJUNKT.

STOCKHOLM
LARS HÖKERBERGS FÖRLAG

STOCKHOLM, 1913
SVENSKA TRYCKERIAKTIEBOLAGET

Åskådlig matematikundervisning.

»Jag har gjort den erfarenheten, att småpojkarna inte kunna begripa matematiken, utan man måste nöja sig med att lära dem räkna mekaniskt.»

Detta yttrande fällde en av mina kamrater på grund av sina rön från undervisningen i andra klassen vid ett av våra elementarläroverk. Och det var ej underligt, att han kommit till en dylik uppfattning. Själv var han »för lärd» för 10- och 11-åringarna, i det att han saknade förmågan att uttrycka sig lättfattligt. Å andra sidan hade han ingen aning om att han vid sin framställning rörde sig med en onödigt invecklad lärdomsapparat. Därför låg det för honom närmast till hands att skjuta skulden på lärjungarnas bristande fattningsförmåga.

Och han är ej ensam om sin åsikt. Det finnes och har städse funnits lärare, som »av egen erfarenhet veta», att endast det mekaniska inlärandet är det, som i praktiken kan utföras.

Denna »erfarenhet» jävas dock av de rön i motsatt riktning, vilka gjorts både nu och i forna tider. Det har visat sig möjligt att redan från början lära barnen *förstå* tankegången vid räkneoperationerna. Härtill fordras blott, att framställningen göres *åskådlig* och anpassas efter barnens utvecklingsgrad. — Att resultatet därvid kan bli gott, framgår av följande siffror. V. t. 1909 mottog jag en andra klass, vilken var så försummad, att jag vid läsårets slut måste ge 14 underbetyg. V. t. 1910, således efter tre terminers undervisning, behövde jag blott ge två underbetyg i tredje klass, som huvudsakligen bestod av samma pojkar. Och dock voro mina fordringar vid förra tillfället relativt ej högre än vid det senare — snarare tvärtom.

Den främste banbrytaren för nyss nämnda idéer torde få anses vara *Henrik Pestalozzi*. När han började sin verksamhet, hade visserligen en allmän fordran på åskådlighet i undervisningen framställts av pedagogikens märkesmän, och principens tillämpning på *matematikundervisningen* hade också varit på tal.

Men de nya metoderna hade ej hunnit beprövas och anpassas efter barnanaturens krav. De första rönen härvidlag var det Pestalozzi och hans lärjungar förbehållet att göra.

Pestalozzi kan ej finna ord nog skarpa att fördöma den gängse undervisningen, som redan hos de små barnen lägger grunden till kommande svårigheter genom att proppa i dem oförstådda minneskunskaper. Dit hör räkneordens mekaniska inlärande, så snart detta sker, utan att barnen begripa deras innebörd. Att Pestalozzi hade rätt i sin uppfattning, bekräftas också av moderna barnpsykologiska undersökningar, vilka ha ådagalagt, att talföreställningarna äro alltför abstrakta för att rymmas i småbarnens hjärnor. Att *säga* »ett, två, tre», o. s. v. är ofantligt mycket lättare än att *inse* ordens betydelse. Få barnen t. ex. lära sig räkna på fingrarna, tro de, att räkneorden äro något, som har med fingrarna att göra, men alls icke beteckningen för abstrakta tal. Och om åskådningsmaterialet är en gatas husnummer, så blir talserien en linje av gatans form.

Vi kunna anföra följande belysande exempel härpå. Vid en gata, som går förbi botaniska trädgården i Berlin, funnos, när nedanstående iakttagelse gjordes, husnumren 1—70 på gatans ena sida, men vid trädgårdens början fortsattes numreringen på den andra. Nu upptäckte *Binet* vid sina undersökningar, att en av de män, vilkas uppfattning han utrönt, bott vid denna gata till två års ålder, och han föreställde sig talserien som en linje av vidstående form med kröken vid 70. 

Dessa moderna rön voro naturligtvis obekanta för Pestalozzi, men att det oförstådda inlärandet av räkneorden hämmade utvecklingen av barnens tankeförmåga, insåg han. Och med sin skarpa pedagogiska blick visste han att träffa huvudet på spiken. Han lät barnen räkna *olika* föremål, ena gången fingrarna, en annan gång ärter eller småstenar o. s. v. Därmed ledde han dem till att själva upptäcka, att talen voro desamma, oberoende av de räknade föremålens beskaffenhet. När detta blev klart för barnet, hade det tagit ett viktigt steg på vägen till abstrakt tänkande.

Den första undervisningen ville Pestalozzi anförtro åt modern i hemmet. Emellertid fick han taga hand om barn i olika åldrar, och vare sig lärjungen inhämtat talbegreppet under hans ledning eller före inträdet i hans skola, blev nästa steg att lära honom addera de hela talen, därpå att multiplicera dem o. s. v. Härtill använde han bl. a. de s. k. *strecktabellerna.* Dessa innehöllo hundra kvadrater, ordnade i tio rader, och i den första raden fanns i varje kvadrat ett streck, i den andra två o. s. v. Skulle $3 + 4$ uträknas, sammanlades strecken i en kvadrat i 3:e raden med d:o i den 4:e. Vid multiplikation av 5 och 7 räknades antalet streck i 7 kvadrater i 5:e raden. O. s. v. Härmed sattes barnet i stånd att på åskådningens väg självt avgöra, vad resultatet av en räkning blir.

För bråkräkningen hade Pestalozzi uppfunnit särskilda *bråktabeller*. Hur han använde dem, framgår ej tydligt av hans skrifter; men att han nådde ett gott resultat med sin undervisning, är ett faktum. Hans lärjungar förvärvade en förvånansvärd räknefärdighet. I viss mån ligger nog hemligheten i hans blick för vikten att vid den fortgående framställningen ej lämna några luckor i lärjungarnas kunskaper — en sak vars betydelse han även i sina skrifter skarpt betonar.

Pestalozzi, vars huvudintresse var de breda folklagrens uppfostran, begränsade helt naturligt sina strävanden till en reform av undervisningen i *aritmetik* och *de mest elementära delarna av geometrin*. Hans krav på verklig insikt och ej blott ett mekaniskt inlärande kan emellertid utsträckas till övriga delar av skolmatematiken. Detta så mycket mera, som lärjungarna vid studiet därav uppnått högre ålder, varmed plägar följa större anspråk på mogenhet och fattningsförmåga.

Med det sagda ha vi naturligtvis ej velat rekommendera något fasthållande vid Pestalozzis ståndpunkt i alla detaljer. Hans idéer äro genialiska och ha i många fall lett honom till att utfinna praktiska metoder, men han har också kommit med åtskilliga mer eller mindre opraktiska förslag. Hans metodik har sålunda befunnits vara i behov av reformer, såsom när strecktabellerna ersatts med räkneramen; men dylika förbättringar innebära endast ett fullföljande av hans princip om åskådlighet vid undervisningen.

Härmed är ej sagt, att man på alla stadier måste vädja till sinnesåskådningar. Ju äldre lärjungarna bliva, desto mer abstrakt förmå de att tänka, och desto bättre återuppliva de i minnet, vad de en gång förnummit. Framställningen kand ärför stundom vädja till minnet utan att förlora i åskådlighet. Med *åskådlig* undervisning mena vi fördenskull en sådan, som är tillräckligt konkret för att vinna genklang i lärjungarnas fattningsförmåga. Att t. ex. utan att förevisa ett äpple tala om dess delning är åskådlig undervisning för 10-åringar, men ej för 4-åringar.

Innan vi gå vidare, måste vi först upptaga till bemötande den uppfattning, som anser begripandet *överflödigt.* Vad barnen ej förstå — heter det — kunna de likväl ha nytta av att ha kvar i minnet, tills eftertanken vid äldre år vaknar. De oförstådda kunskaperna — vare sig i katekesen eller i matematiken — bli härmed ett slags andlig matsäck, som skall medföras ett stycke på livets väg. Låt oss benämna denna åskådning *matsäcksteorin.*

Vart denna teori leder, ligger i öppen dag för var och en, som är någon smula människokännare. Matsäcken fördärvas under vägen och utgör dessutom en besvärlig börda, som trycker ned vandringsmodet. M. a. o. de inlärda reglerna *glömmas i förtid* just på den grund att de äro oförstådda, och *lusten att tillägna sig kunskaper övergår i olust.* Så har dogmen om skolan såsom en plågoanstalt vunnit sitt fotfäste i den allmänna lärjungeopinionen tack vare studiernas meningslöshet.

En annan olägenhet är, att inhämtandet av oförstådda minneskunskaper leder till en falsk föreställning om vad bildning verkligen är. Den halvbildade reflekterar ej över att man kan behöva något eget omdöme. Matematiken är för honom endast ett dogmatiskt eller juridiskt tillämpande av godtyckliga regler och formler, och han saknar varje förmåga att själv tänka en matematisk tanke. Och den, som i fråga om de mera elementära delarna av ämnet endast sitter inne med denna parodi på bildning, möter på grund av förtvinad tankeförmåga större svårigheter vid det fortsatta studiet. Den, vilken t. ex. endast mekaniskt lärt sig reglerna vid bråkräkning, kommer till algebran med mindre uppövad tankekraft och stupar lättare på dess stötestenar. Här ha vi enligt min mening den förnämsta anledningen till att detta ämne så ofta utgör skolungdomens fasa. Naturligtvis finnas *även* individer med ringa fallenhet för ämnet, men mig synes det troligt, att vad som kallas bristande begåvning minst lika ofta är resultatet av bristande grunder. Vi ha nog skäl att tänka högt om människans utvecklingsmöjligheter, ehuru praktiken visar, att de i regel mer eller mindre förkvävas.

Allt synes följaktligen tala för en undervisning i Pestalozzis anda. Och att hans idéer gå att praktisera, det veta åtskilliga av oss lärare genom egen erfarenhet. Vi skola i det följande visa, hur utförandet gestaltar sig i fråga om bråkräkning och inhämtande av begreppet obekant tal. Vi välja dessa områden, emedan lärjungarna där möta åtskilliga svårigheter, som ofta leda till en falsk tro på matematikens mystiska karaktär. Vad särskilt bråkräkningen beträffar, äro åtskilliga delar därav endast teoretiskt konstruerade metoder utan praktiskt värde. Framför allt gäller detta om division med ett bråk till divisor. Konstgreppet att vända upp och ned på divisorn är ju mycket intressant för den teoretiskt anlagda men saknar så gott som all betydelse för livet. Det finner man bäst, när man i någon exempelsamling letar efter eller själv söker sätta ihop praktiska problem härpå. Låt oss taga ett dylikt ur högen.

»Om $^2/_7$ kg. kostar $^3/_5$ kr., vad kostar 1 kg?»

För det första är det i regel priset pr kg. och ej pr $^2/_7$ kg., som plägar vara givet för köparen, och detta pris uttryckes i *kronor och öre*, ej i delar av kronor. Men även om man någon enstaka gång skulle behöva besvara en fråga av ovanstående art, så reder man sig lika bra utan kännedom om teorin för division i bråk. När $^2/_7$ kg. kostar 60 öre, kostar $^1/_7$ kg. 30 öre och 1 kg. 2,10 kr.

Så enkel är saken, blott läraren slipper veckla in den för att få tillämpning på en i förväg uppkonstruerad princip.

För det andra säljas varor ej i bråkdelar av viktsenheterna utom möjligen i halvor och fjärdedelar. Således innebär praktiken en ytterligare förenkling av det problem, vi i skolan krångla till.

Lika litet har det någon större praktisk betydelse att kunna multiplicera ihop två bråk. Även här kan man i förekommande fall reda sig ändå. Om det gäller att beräkna priset på $^3/_4$ kg. à 75 öre, så finner man lätt, att $^1/_4$ kg. kostar 18 $^3/_4$ öre, således $^3/_4$ kg. 56 $^1/_4$ öre. vilket sedan lätt jämnas av till hela ören.

Även addition och subtraktion i bråk förekomma sällan i livet, då man så gott som undantagslöst har delarna uttryckta antingen i lägre sort eller i decimalbråk.

Av läran om bråk skulle följaktligen endast det allra elementäraste behöva inhämtas, om man tager hänsyn till de praktiska syftena med undervisningen. I folkskolan och elementarläroverkens tre första klasser vore fördenskull en ansenlig reduktion av det matematiska kunskapsstoffet högst befogad. Härpå skulle ej den matematiska bildningen förlora något. Tvärtom vore det en vinst att få inrikta våra strävanden på att bibringa barnen *kvalitativt mer och kvantitativt mindre kunskaper.*

Denna uppfattning av vad som behöves i det praktiska livet har jag också funnit hos åtskilliga affärsmän. Det vore emellertid intressant att härvidlag skaffa sig ett vidsträcktare statistiskt material genom att under lämplig kontroll utsända en detaljerad förfrågan till några större och mindre firmor för att få uppgift på, huruvida och i vilka fall deras funktionärer ha nytta av de olika delarna av räkneläran. På grundval härav skulle också skolkurserna kunna anpassas så, att de genom sin praktiska läggning eggade de ungas verksamhetslust.

Emellertid föreligger för oss lärare en given kurs att inlära barnen, vare sig vi anse densamma motsvara deras behov eller ej. Uppgiften blir då att framställa det lagstadgade kunskapsstoffet så åskådligt som möjligt.

Hur går detta till?

Samma resultat kan givetvis uppnås medelst olika metoder, av vilka den ena passar för en lärare, den andra för en annan. Det torde därför vara omöjligt att experimentellt påvisa, att så och så är det bästa sättet att sköta undervisningen. I stället för experimentella undersökningar ha vi att tillgripa den forskningsväg, som vi med prof. *Bertil Hammer* kunna benämna den *intuitions-analytiska*. Denna består däri, att när den praktiserande läraren når ett verkligt gott resultat på grund av sin intuitiva blick, har pedagogen att »komma efter för att anteckna, analysera och förklara de krafter, som i uppfostran äro verksamma». Så fastslås på fullt empirisk väg, att en viss lösning av de pedagogiska uppgifterna *kan* leda till målet. Sedan har en annan praktiker att taga upp därav, vad som lämpar sig för honom, och anpassa de givna råden efter sin individualitet — liksom efter lärjungarnas, vilket sistnämnda ej är mindre viktigt.

För att få ett svar på nyss uppställda spörsmål skall jag i det följande redogöra för de rön, jag personligen gjort — som sagt utan att förneka, att även andra vägar lika väl kunna leda till samma mål.

Vi börja med bråks förlängning, vilket åskådliggöres genom att för tanken dela upp t. ex. $^1/_2$ apelsin i $^2/_4$ eller genom att inför lärjungarnas ögon dela upp ett pappersstycke på samma sätt. Det senare göra flera av barnen efter av egen drift, och så tages deras självverksamhet i anspråk, vilket ökar intresset. Sedan är det ej svårt att leda uppmärksamheten från själva verksamheten: papperets sönderdelande, till resultatet: likheten mellan $^1/_2$

och $^2/_4$*. Det går också bra att variera exemplen, så länge man håller sig till ensiffriga eller smärre tvåsiffriga täljare och nämnare — alltför stora tal förlora nämligen sin åskådlighet. När småningom övningen givit barnen *tillräckligt fasta idéassociationer* av typen

$$^1/_2 = {^2/_4} = {^3/_6} = \ldots,$$

äro de mogna för påpekandet, att täljare och nämnare äro multiplicerade med samma tal.

Därefter kommer problemet att genom fortsatta exempel utröna, om denna regel *alltid* gäller. Ehuru metoden är induktiv, skärper den lärjungarnas matematiska omdömesförmåga och kritiska sinne mer än någon deduktion, som på deras stadium vore ofattbar.

När förlängningen är klar, följer förkortningen av sig själv. Då

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6},$$

så är också

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Påpekas detta, så inse barnen med lätthet regeln.

Sedan ha vi bråks addition och subtraktion. Själva komma de stundom på idén att addera täljare till täljare och nämnare till nämnare. Men genom uppdelning av en pappersbit eller en figur på tavlan övertygar man dem, att t. ex.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

och således ej $= \frac{2}{6}$.

Härav finna de också, att båda bråken måste vara fjärdedelar, alltså samma sort. Genom några vidare exempel, då det ena bråket ej behöver förändras och det andra skall förlängas med 2 eller 3, få de in i sitt medvetande nödvändigheten av

* Att *redan från början* dela på tavlan uppritade linjer eller ytor har jag funnit mindre praktiskt. Sedan barnen fått klart för sig, vad frågan gäller, lämpar sig detta förfaringssätt, men innan dess synes det vålla de mindre begåvade en viss svårighet att få in i sitt medvetande, att bilden, som utgör *en del* av tavlan, skall föreställa *en självständig enhet*.

liknämniggörandet. Sedan ökas siffrornas storlek något, men ej alltför hastigt, utan innötandet måste ske medelst relativt små tal. Hur stora tal man vid varje tillfälle kan våga sig på, finner den vakne läraren själv av barnens svar.

Så kommer, när det föregående är säkert inhämtat, plötsligt ett exempel av typen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Detta går ej enligt nyss angivna metod, ty vi lyckas inte hitta på något helt tal, som 2 skall multipliceras med för att bli 3. Härom kunna även medelmåttorna ge upplysning. Sålunda möter nu ett nytt problem. Kommer något av klassens ljushuvud på idén att göra allt till sjättedelar, så är det ju förträffligt. Men därpå kan läraren ej räkna. Endast kvarsittarna vilja lysa med sina gamla kunskaper, men det är ju intet intelligensprov, och deras viftningar tages ingen hänsyn till. Ett ögonblick få lärjungarna fundera på saken, så att de hinna fixera problemet och förvåna sig över att de här påträffa något nytt. Sedan få de lösningen till skänks.

På detta följer ett nytt tal av samma art, så ännu ett o. s. v. Slutligen, när principen är klar, bli siffrorna så stora, att den minsta gemensamma nämnaren ej omedelbart inses. Låt oss antaga, att detta första gången inträffar vid exemplet

$$\frac{3}{14} + \frac{1}{4}$$

Då få de bestämma de olika delar, vartill vartdera bråket kan göras. Uppteckningen kan t. ex. ske under följande form:

$$\frac{3}{14} + \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{cc}
28 & 8 \\
42 & 12 \\
56 & 16 \\
 & 20 \\
 & 24 \\
 & 28
\end{array}$$

Metoden är visserligen opraktisk för den vane räknaren, men för barnen är den lättfattlig, och då är den pedagogiskt praktisk. Det synes omedelbart, att minsta gemensamma nämnaren är det understrukna talet 28.

Här har termen »minsta gemensamma nämnaren» använts för korthets skull, ehuru vid undervisningen en omskrivning bör göras, så att *ordet* ej kommer in, förrän *saken* är begripen. Man talar t. ex. om att göra bråken till samma slags delar och lämnar därhän det förvillande spörsmålet, om den funna nämnaren är den minsta.

Emellertid mognar snart barnasinnet för att fatta begreppet minsta gemensamma nämnaren. Nu kan man göra en avstickare och genomgå eller repetera upplösning i faktorer samt deras hopmultiplicerande. När detta står färskt i minnet, upptäckas lätt reglerna för liknämniggöringen.

I samband med addition och subtraktion förekommer också förvandling från oegentligt bråk till blandat tal och tvärtom. Även här böra naturligtvis inga oförstådda regler inläras, såsom att dividera täljarn med nämnarn, göra resten till täljare o. s. v., eller såsom att »låna» en hel och göra den till delar. Det är ej svårt att få barnen att inse, att när $\frac{5}{5}$ utgöra en hel, äro $\frac{10}{5}$ 2 hela, samt att $\frac{1}{5}$ räcka till 2 hela, och därvid få vi $\frac{\text{[illegible]}}{5}$ över. Sedan denna tankegång genom flerfaldiga exempel nötts in i hjärnan, *först då* må regeln komma. — Likaså om det gäller att beräkna

$$2\frac{3}{6} - \frac{4}{6}$$

Här kan tankegången göras konkret t. ex. genom att man tänker sig $2\frac{3}{6}$ äpplen, varav $\frac{4}{6}$ skola bortgivas. Då de 3 sjättedelarna ej räcka till, måste vi dela sönder ett av de hela i sjättedelar, varvid lätt erhålles

$$1\frac{9}{6} - \frac{4}{6}$$

Efter detta komma vi till bråks *multiplikation* och *division*. Genom uppdelning av delar i mindre delar åskådliggöres på samma sätt som vid förlängning, att $\frac{1}{4}$ är hälften av $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ tredjedelen av $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ o. s. v. Genom småsiffriga bråk klargöres sålunda, hur värdet ändras, när nämnaren multipliceras eller divideras. Inflytandet av täljarens förändring är ännu lättare insett. Det är ej besynnerligare, att $2 \cdot \frac{2}{5}$ är $\frac{4}{5}$, än att $2 \cdot 2$ päron är 4 päron.

När man genom exempel hunnit tillräckligt innöta detta, göra barnen lätt själva den sammanställning, som behöves för att besvara frågorna: »Hur många sätt ha vi att multiplicera (resp. dividera) ett bråk med två?», »med tre?» o. s. v. Det går också lätt för dem att uttänka, vilketdera av de två sätten ger kortaste svaret, och vilketdera fördenskull är att föredraga, när båda kunna praktiseras.

Härmed är grunden lagd till kännedomen om multiplikation och division, då ena faktorn, resp. divisorn är ett helt tal. För att multiplicera ihop två bråk klargör man först *genom exempel med hela tal*, att om ena faktorn minskas, så blir produkten mindre i samma proportion, t. ex.

$$2 \cdot 15 = 30,$$
$$2 \cdot 5 = 10.$$

Efter erforderligt antal dylika exempel komma andra av typen

$$\left.\begin{array}{l} [illegible] \\[2ex] [illegible] \end{array}\right| \begin{array}{l} 5 \cdot \frac{[illegible]}{3} [illegible] \frac{[illegible]}{3} \\[2ex] 5 \cdot \frac{[illegible]}{6} = \frac{[illegible]}{[illegible]} \end{array} \left| \begin{array}{l} 10 \cdot \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{20}{3} \\[2ex] 5 \cdot \frac{[illegible]}{3} = \frac{10}{3} \end{array}\right|$$

Därefter erbjuder det ingen svårighet att göra analogislutet

$$3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$
$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

När lärjungarna tillräckligt länge fått räkna efter denna metod, kommer tiden för den självklara upptäckten, att man skall multiplicera täljare med täljare och nämnare med nämnare. — Naturligtvis får ej läraren försumma upplysningen, att $\frac{3}{[illegible]}$ gånger» betyder »$\frac{[illegible]}{[illegible]}$ av».

Kan i ett föreliggande exempel förkortning korsvis ske, bråkar man likväl ej därmed, utan förkortar efter hopmultipliceringen i stället. *Två* teoretiska nyheter på en gång är nämligen för mycket för outvecklade barnahjärnor. Innan den korsvisa förkortningen kan tillämpas, ger man heltalsexempel av typen

$$7 \cdot 8 = 56,$$
$$14 \cdot 4 = 56.$$

Hur kommer det sig, frågar man nu, att produkten blir lika, fastän första faktorn i senare fallet fördubblats?

Härmed ledes uppmärksamheten på det faktum, att produkten blir oförändrad, om ena faktorn multipliceras och den andra divideras med samma tal. Den saken — liksom åtskilliga andra förövningar — innötes bäst genom att *i förväg* ägna några minuter av varje lektion åt dylika exempel. Sedan har man blott att plocka den mogna frukten av föregående tankearbete, när man tillämpar den nyupptäckta regeln på en bråkprodukt såsom

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8}$$

Har man samtidigt sörjt för att lagarna för bråks multiplicering och dividering med hela tal äro aktuella i lärjungarnas minne, inses omedelbart, att vi få

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{2}$$

Den nyfunna räknemetoden innötes naturligtvis på flerfaldiga exempel, så att den blir riktigt väl förstådd, förrän någon regel uttalas. Om det dröjer, innan *termen* förkortning korsvis införes, så gör det ingenting.

Härmed är multiplikationen klar, och vi gå nu till divisionen. Till förövning krävas heltalsexempel, som visa, att kvoten blir 2, 3, 4 . . . gånger så stor, när divisorn göres 2, 3, 4 . . . gånger så liten.[1] Därpå ger man t. ex. följande uppgift:

»Hur långt räcka 20 äpplen, om 5 delas ut pr man?»

---

[1] I detta sammanhang må påpekas lämpligheten av att redan från början vänja barnen att säga »två gånger så mycket» resp. »så litet» och ej »två gånger större» resp. »mindre». Det senare verkar alltför stötande på ett logiskt sinne. Är ett tal två gånger mer än 5, måste det nämligen betyda, att det är 10 mer än 5, d. v. s. 15. Saken blir påtaglig, om man tänker på uttrycket $^1/_2$ gång mer, vilket ingen skulle falla på idén att låta betyda annat än $1\,^1/_2$ gång så mycket.

Sedan: »Hur långt räcka 20 äpplen, om 2 $^1/_2$ delas ut pr man?»

Svaret i senare fallet finnes lätt med hänsyn till att det bör räcka åt dubbelt så många man, när portionerna äro hälften så stora. Dessutom kan man med säkerhet — om man över huvud har lärjungarna med sig — påräkna ett riktigt svar på frågan, vad det är för räknesätt i vartdera fallet.

Följaktligen kan man skriva upp på tavlan:

$$20 : 5 = 4,$$

$$20 : \frac{5}{2} = 8.$$

När man genomgått tillräckligt många liknande exempel, kan man saklöst våga sig på obenämnda tal av ovanstående form, där divisorn först är ett helt tal och i följande exempel en bråkdel av samma hela tal. Efter hand innötes tankegången så fullständigt, att dess tillämpning på brutna dividender faller av sig själv. Till sist upptäckes, att man ständigt multiplicerar täljare med nämnare och nämnare med täljare. Nu är man på ett naturligt sätt framme vid regeln om divisorns invertering.

Här ovan har föga talats om de praktiska tillämpningarna på konkreta och alldagliga exempel. Dessa äro naturligtvis nödvändiga, ehuru vi på grund av deras teoretiska enkelhet ej behövt taga upp spörsmålet därom. Vårt syfte har i stället varit att visa, att bråkläran kan framställas på ett intelligensodlande och intresseväckande sätt, blott man stegvis skrider framåt och länge — dock ej alltför länge, så att leda uppstår — låter barnen dväljas vid åskådliga föreställningar. Härmed lägges ock en solidare grund för deras framtida abstraktionsförmåga över huvud — liksom speciellt för de abstraktare årskurserna av matematiken, om de få fortsätta att studera.

* * *

Även *algebran* kan inläras lika åskådligt, utan att något mystiskt x i förtid uppträder och suggererar de unga att tro på ämnets obegriplighet. Man utgår från enkla problem, t. ex. följande:

Arvid säger till Erik: »Jag har 25 öre.» Varpå Erik svarar: »Om jag finge 7 öre till, vore min kassa dubbelt sa stor som din». Hur mycket äger Erik?

Nu yttrar läraren ungefär följande: »Vi skola teckna upp talet på tavlan, men för att slippa skriva så mycket sätta vi x i stället för Eriks kassa.»

Arvids dubbla kassa är ju 50 öre, varför det kommer att stå:

$$x + 7 = 50,$$

vilket läraren utläser: »Eriks kassa, ökad med 7 öre, är 50 öre.» Sedan följer naturligtvis ingen »överflyttning» av 7:an, utan läraren frågar: »Om vi inte lägga till de 7 örena till Eriks kassa, vad få vi då?» Härpå är svaret lätt funnet.

Något värre hade det varit, om vi i stället haft x — 7. Men även den saken kan klaras ut genom åskådliga exempel, vilka helst böra gå i förväg.* Lärjungarna inse utan svårighet, att 1 kr. är 7 öre mer än 1 kr. minskad med 7 öre. Och efter åtskilliga sådana exempel går det av sig självt att fatta, att x utan att minskas med 7 är 7 enheter mer än x minskat med 7. Om vi således ha

$$x - 7 = 50,$$

så blir

$$x = 57.$$

Sedan är steget helt kort till att lösa ett problem, som med nyss nämnda operation ger oss 2 x eller 3 x o. s. v. Är 2 gånger en kassa 28 kr., så är ju kassan 14 kr.

Efter åtskilliga exempel i samma stil komma lärjungarna själva på idén att ej blott *skriva* »x», utan också *utläsa* »x» i stället för den långa upprepningen av vad bokstaven betecknar. Detta visar, att de lärt sig tänka mera abstrakt, och nu äro de mogna att förstå innebörden av uttrycket: »x betecknar det och det». — Naturligtvis klarnar insikten härom ej hos alla på en gång, och till denna oliktidighet har läraren att i tillbörlig mån taga hänsyn, så att han ej bedömer klassens ståndpunkt efter de mest begåvades.

Så lägges en åskådlig grund för ekvationsräkningen. Först kommer förståendet av operationernas innebörd och sedan — efter tillräcklig övning genom exempelräkning — blir det tid att påpeka reglerna om teckenändring vid överflyttning m. m.

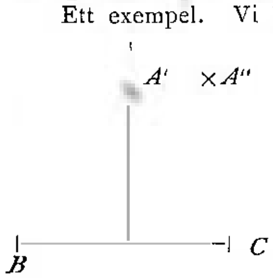
Äro en gång första gradens ekvationer med en obekant säkert inlärda, blir det i fortsättningen vida lättare att förstå de mera invecklade algebraiska spörsmålen.

* *
*

* Om man försummat detta, är saken dock ej så farlig. Elevernas uppmärksamhet ledes lätt från problemet till förövningen och tillbaka igen.

Även *geometrin* torde kunna läggas mera på åskådlig grund genom att längre dröja vid det elementära, ehuru härvidlag en viss svårighet möter i bristen på lämplig lärobok. I våra folkskolor, även de mest tidsenliga, lägges studiet på en *åskådning utan bevisföring i strängare mening.* Detta tyckes mig ha sitt fulla berättigande på grund av att våra ungdomar ha sitt sinne för logiskt tänkande föga utvecklat. Synes en sats riktig för åskådningen, anse de varje bevis *obehövligt;* och är satsen ej tillräckligt åskådlig, få de *trots beviset ingen varaktig insikt.*

Ett exempel. Vi hade i klass 4 vid ett läroverk bevisat, att om punkten A ligger på mittpunktsnormalen, så äro dess avstånd till B och till C lika stora (sats 1). Ligger den däremot utanför mittpunktsnormalen, så äro nämnda avstånd olika (sats 2). Sedan kom satsen: Om A ligger lika långt från B som från C, så befinner den sig på mittpunktsnormalen.



Efter några förberedande vinkar, som för ett logiskt sinne bort göra saken klar, frågade jag: »Följer detta av sats 1 eller av sats 2?» Lärjungarna fingo tillräcklig tid på sig att tänka, och jag hade dessutom förvissat mig, att de ej förväxlade satsnumren. Vid omröstning genom handuppräckning blev resultatet, att endast två eller tre av mera än 20 röstade på sats 2, de övriga på sats 1. Det är ju troligt, att en del av de röstande följde med strömmen; men i varje fall är det uppenbart, att de inte voro mogna för att begripa sig på någon logisk kontraponering. Härom förvissade jag mig ytterligare genom ett fruktlöst försök att klargöra saken. — Samma erfarenhet har jag f. ö. gjort även i högre klasser. Väl kan det genom lärarens energi lyckas att *för tillfället* få eleverna att förstå en abstraktare tankegång; men en insikt, som ligger över deras utvecklingsståndpunkt, går snart förlorad och lämnar blott efter sig en avsmak för det svårfattliga ämnet.

Åskådlighet i stället för logisk bevisföring borde således vara geometriundervisningens lösen. På folkskolans stadium och i motsvarande klasser vid läroverken uppskattas som nämnt ej bevisen, om saken genom åskådningen synes självklar. Men därpå bleve för vidlyftigt att här ingå.