OM UNDERVISNING I RÄKNING

av

Torsten Dahlgren
Lärare vid Växjö folkskolor

STOCKHOLM

P. A. Norstedt & Söners Förlag

STOCKHOLM 1924
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
233746

FÖRORD.

Efterföljande framställning vill icke göra anspråk på att ge den enda riktiga metoden för undervisning i räkning. Den vill endast ge en psykologisk-pedagogisk orientering i densamma, belysa räkneundervisningens mål och hur olika medel verka för ernående av detta mål.

Stommen av framställningen är hämtad ur *D:r J. Kühnel, Neubau des Rechenunterrichts*, 1922, (Verlag J. Klinkhardt, Leipzig), 2 bd, 600 sidor. Föreliggande arbete utgör en fri bearbetning av ovanstående original. Jag skulle icke vidtagit åtgärder att publicera denna framställning, om jag icke under flerårigt arbete med räkneundervisningen och dess »problem» i folkskolan kommit till slutsatser, som likna D:r Kuhnels. Originalets vidlyftiga framställning har måst koncentreras i hög grad. Det är därför svårt att angiva vilka partier som äro hämtade därifrån.

Växjö i november 1923.

Torsten Dahlgren.

INNEHÅLL.

Om undervisning i räkning.

Inledning.

Det klagas icke sällan från skilda håll över folkskolebarnens bristande kunskaper och därvid icke minst över deras minimala förmåga att reda sig med de små räkneproblem, som de möta ute i livet. I folkskolans läroböcker i räkning äro ju samlade tusental av exempel från snart sagt alla livets områden. Förberedd är man alltså för alla eventualiteter, men — *minnet* sviker: då det gäller, kan man ej erinra sig, hur ett problem av det slaget skulle räknas ut. Man har glömt »räknesättet», regeln, formeln. Mången pedagog anser som enda botemedel, att lärotiden utsträckes, på det att reglerna må gnuggas in bättre. Men skulle man ej kunna tänka sig ett försök att *med en annan metod åstadkomma bättre resultat på samma tid?* Innan man ger svar på den frågan, måste man tydligen göra klart för sig, huruvida den metod man använder är riktig. Vad skall då vara avgörande för metodens värde? Mången lärare kan nog uppvisa flera exempel på gott resultat, åstadkommet under tillämpning av den gamla metoden, och därför påstå, att metoden är riktig. Men att metoden med *nödvändighet* måste hava dessa andliga resultat, bevisas icke därav. Resultatet har kanske kommit till stånd *trots* det använda lärosättet. Om metoden vore riktig, borde väl flertalet av barnen i t. ex. räkning uppnå de resultat man åsyftar.

En metods värde måste först och främst bedömas efter de grunder, på vilka den stöder sig.

Alla undervisare måste ha någon (medveten eller omedveten) åsikt om hur kunskap kommer till stånd och vid sin undervisning tillämpa denna åsikt. Nu finns det många, som rycka på axlarna, då de höra ordet psykologi och mena sig kunna undvara allt vad därtill hör. Men antag, att en lärare vid sin undervisning i ett moment av ett »ämne» tänker efter som så: hur skall jag kunna lära dem det? Hur lärde jag mig det själv? Vilka vägar gick kunskapstillägnandet hos mig själv? Eller frågar han ett barn för att komma under fund med vilken grad av kunskap barnet har uppnått genom hans dittillsvarande undervisning? Vad är då detta? Jo, psykologi! Fastän introspektiv och ej den förhatliga experimentella! — Nu har ju den introspektiva psykologien redan för länge sedan uppställt den satsen, att »undervisningen skall vara åskådlig». Till yttermera visso har denna teori bekräftats av den experimentella psykologien och, vad mera är, av pedagogisk praxis. Det finns väl ej heller många lärare, som förneka satsens giltighet. De ojämförligt flesta torde erkänna den. Vad ha dessa då att göra? Ja, att först säga, att undervisningen skall vara åskådlig, och sedan trots denna mening »gå på i de gamla ullstrumporna», det kan ju ej leda till något nytt eller bättre resultat. Bland skolans ämnen tillämpas åskådlighetsprincipen minst i räkning. För att icke tala om den även ledes i regel erkända principen om självverksamhet! Vad få barnen laborera med i själva folkskolan? Är det icke så, att krittavlan, kritan, papper och penna i regel är det enda arbetsmaterialet? Vad åstadkommes därigenom? Siffror, siffror och åter siffror! Om barnet kan föreställa sig, vad som ligger bakom siffrorna och räknesätten, ja, då uppnås ju resultat även härvidlag! Men i de flesta fall blir det bara sifferexercis utan innehåll.

Vår nya undervisningsplan säger, att målet för undervisningen i räkning bör vara »insikt och färdighet». Om vi grundligt tänka oss in i dessa två ords betydelse, så måste vi erkänna, att färdighet inte gärna bör eftersträvas och ej heller kan uppnås, förrän en rätt insikt vunnits. Och att när denna insikt väl är förvärvad, färdigheten endast kan uppnås genom övning.

Jag tror, att det är just på denna punkt, som det brister i vår undervisning. En grundlig insikt i eller förståelse för alla de element, som ingå i räkning, är nödvändig, om barnet skall kunna göra några framsteg i lösning av även enkla problem. En bristfällig uppfattning i småskolan av exempelvis talens storlek i förhållande till varandra eller talsystemet eller andra sådana elementära faktorer kan göra det omöjligt för barnet att tillgodogöra sig den senare undervisningen. Man bör därför taga sig väl i akt, så att man ej ägnar för liten tid åt de lägre stadiernas kursmoment av rädsla för att ej »hinna med kursen». Få barnen arbeta in de elementära sakerna grundligt, så medhinnas i stället de efterföljande kurserna så mycket lättare.

Det är sålunda nödvändigt att vid all undervisning och i synnerhet vid räkneundervisning se till, att man ej laborerar med tomma begrepp.

Om någon gör sig möda med att läsa efterföljande framställning i dess helhet, torde han icke dröja länge med att erkänna, att man med nuvarande lärosätt endast ansatsvis praktiserar, vad man i teorien erkänner utan förbehåll. (Det bör kanske från början framhållas, att i det följande kommer att lämnas motivering och redogörelse för en kombination mellan den s. k. »räknemetoden» och »åskådningsmetoden».)

Kritik av det vanliga lärosättet.

En psykologiskt skolad iakttagare måste erkänna:

1. Nuvarande räkneundervisning utgår från *den vuxnes ståndpunkt*, ja, t. o. m. den bildade vuxnes. Denne är i stånd att sammanfatta gemensamma förhållanden i en regel, att ur ofta återkommande företeelser härleda en lag o. s. v. *Denna abstraktionsförmåga överför man nu utan vidare på barnet.* Men människan låter icke före en viss uppnådd mogenhet tvinga sig till abstraktioner. En stor del bildas visserligen redan under barnaåldern, men långsamt och på konkreta grunder, d. v. s. ännu icke lösslitna från representerande föreställningar. Då dock motsatsen ibland synes vara fallet, är detta endast eftersägande, t. ex. multiplikationstabellen, bråkräkning o. dyl.

2. Den vuxna människan har behov att mekaniskt avkorta ofta förekommande företeelser inom sitt verksamhetsområde. Resultatet synes exempelvis i affärslivets räknings- och växelformulär, postala formulär o. s. v. Detta *behov av schematisering* överföres likaledes utan grund på barnet. Man tror, att den räkneundervisning, som vill uppnå praktiska mål, måste utrusta barnet med schema för så många som möjligt av i livet förekommande räkneproblem. Därav uppkommer den väldiga rikedom på stoff, under vilken skolan sedan länge dignat. Frånsidan av denna orientering med avseende på stoffet för undervisningen är en icke ringa brist på psykologisk insikt. En blick på de övriga ämnena i våra skolor (obs! ej blott folkskolor!) ger vid handen, att vår skolundervisning i huvudsak behärskas av denna *ämnesprincip:* de flesta ämnen behandlas i skolan blott och bart för att lärjungen skall »ha läst dem». I bästa fall göres en vinst i formellt avseende, men det är att önska,

att denna vinst betydligt ökas och att dessutom en materiell vinst göres möjlig. Detta kan uppnås genom en förändring av ståndpunkt. Det gäller att icke blott sörja för bevarande av kulturvärdena utan även att egga till höjande av kulturen. Vilja vi framåtskridande, så måste vi lägga om synpunkten: *i stället för ämnesprincipen måste den psykologiska principen bliva den härskande.* Ämnesprincipen må bliva den andra i rangordningen. Detta innebär icke revolution på uppfostrans område utan endast en *förändrad inre inställning*, vilken för övrigt påyrkats av pedagogikens stormän i alla tider.

Vad som avses med denna psykologiska princip förstås bäst, om man härvidlag gör en jämförelse med den redan genomförda förändringen i metod vid exempelvis teckningsundervisningen. Man låter barnen rita av t. ex. flaggor, blommor eller snett ställda lådor, icke för att de i framtiden skola *kunna* teckna sådana föremål utan för att öva deras öga och hand, för att skärpa deras iakttagelseförmåga, för att uppfostra sådana anlag, som framdeles skola bli till förmåga att se och bedöma tingens rent yttre förhållanden. Erinra vi oss sedan, hur vi i räkneundervisningen alltjämt göra till mål att lära barnen, att »*den* sortens uppgifter lösas på *det* sättet» och »den sortens på *det* sättet», så blir det tydligt, att den psykologiska principen, som slagit igenom i teckningsundervisningen (och f. ö. även i flera andra ämnen), ännu är försummad i fråga om räkneundervisningen.

På grund av det redan nämnda kunna den nuvarande räkneundervisningens brister preciseras sålunda:

1. För tidig abstraktion.
2. Överdrivande av den språkliga övningen.
3. Överflöd på mekaniskt stoff.
4. Försummande av den egentliga matematiska bildningen och den praktiska användningen.

Talbegreppet.

Räkneundervisningens objekt är först och främst *talen*. Vad är ett tal? En siffra? Ett ord? Nej, först bakom siffran och ordet ligger det, som vi egentligen få beteckna som ett tal. *Talen äro begrepp, mätandets begrepp.* Det är välbekant, att barn ofta vid inträdet i skolan varken ha en föreställning om t. ex. 4 ting eller talbegreppet 4, fastän väl redan 4-åringar lätt kunna läras att »räkna till 20» och längre. Med talordet är aldrig talbegreppet givet. Talbegreppet växer fram på samma sätt som andra begrepp. Åskådningar av *flera* företeelser, iakttagelser av dem, jämförelse (här med avseende på antal), utsöndrande av det oväsentliga, bildande av totalåskådningar och så — begrepp. Det första talbegrepp, som ett litet barn utvecklar, är en obestämd föreställning om ett flertal av ting. Senare kommer härtill föreställningen om »icke många». Men för de bestämda talbegreppen har barnet på detta stadium ingen förståelse. Det kan icke skilja mellan 4 och 5 likadana ting, endast många från få, och detta t. o. m. endast om motsatsförhållandet är känslobetonat (många karameller — få d:o; många tennsoldater — få d:o; men ej många möbler — få möbler eller många träd — få träd). Begreppsorden »många» och »få» äro bundna vid barnens egen intressesfär.

På detta stadium har icke ens enheten som talbegrepp kommit till medvetande.

På det andra stadiet utvecklas de första *bestämda* talbegreppen. Här skulle barnet tillägna sig en hel serie av sådana, om icke två hinder funnes: det ena är, att omfånget av barnets uppmärksamhet är för litet, det andra, att de symboliska, representerande föreställningarna, talorden (och senare siffrorna) icke stå till förfogande. Självfallet måste det första hindret tagas, innan det andra kan övervinnas. Men naturen kan man icke trotsa, och barnpsykologien har uppvisat, att barnet på stadiet strax före skolåldern har sitt uppmärksamhetsomfång begränsat till 4. Här kunna alltså talbegreppen 2, 3, 4 och 1 vinnas.

Det torde observeras, att man icke gärna kan utgå från begreppet 1. Detta senare lär barnet sig bättre, om det framställes som *kontrast till två* eller flera.

Det följande stadiet, då talbegreppen från och med 5 förvärvas, infaller i början av skolåldern. Begränsning uppåt kan icke göras. Gränsen för stadiet kan ej sättas vid 10 eller 12 eller 20. Det är med hänsyn till talbegreppets psykologiska struktur fullständigt likgiltigt, om barnet lär känna talbegreppet 11 eller 19 eller 24. Barnet känner talbegreppet 1. Uppmärksamhetsomfångets (1—4) utvidgning understödes genom att så småningom en oupphörligt upprepad och därigenom fullständigt mekaniserad ordramsa inläres; denna har den underbara egenskapen, att en *storlekskänsla* förbindes med varje led i den. Denna känslas föreställningsinnehåll, lyft till uppmärksamhetens blickpunkt, ger medvetandet om att ifrågavarande led är *större än alla de föregående* och 1 större än den omedelbart föregående. Om vi lärde ett barn ordramsan i denna ordning nio (1), åtta (2), sju (3) o. s. v., så skulle barnet med de nuvarande talorden förbinda andra begrepp än de nuvarande. Av detta framgår, att det väsentliga i hela denna företeelse *icke är ordserien i sig*, icke ens den fasta ordningen i denna, utan den med varje ord i ordserien förbundna *storlekskänslan*, som endast kan utbildas i association med en gradvis (med 1) växande storhetsserie, som måste abstraheras från tingen själva. Barnet förstår väl »8 plommon»,

»8 öre», »8 ägg» men icke enbart 8. Så småningom uppkommer en svag rumsföreställning, t. ex. av en *tallinje*, som associerar sig med serien av ljud. Denna rumsföreställning är mer eller mindre medveten allt efter de enskilda personernas föreställningstyp.

Talsystemet.

Ett väsentligt framsteg, ett nytt stadium i utvecklingen av talbegreppen är givet därmed, att barnet vinner förståelse för talsystemets decimala byggnad. På det förra stadiet hade barnet fullt upp att göra med att behärska talen som *talserie*. Medan barnet då uppfattade talen som en lång serie, det ena bredvid det andra, får talbegreppet nu en annan struktur. Det träder i relation till flertalet av de övriga av sitt släkte och icke blott till det föregående och det efterföljande (som i den rena talserien).

Långsamt och omärkligt beträder barnet detta stadium. Medlet är *rytmen*. Det är ingenting annat än genomförd och fortskridande rytmisering, då tiotalet sammansättes till hundratal, tusental o. s. v., vilka lyda samma lagar som de elementära talbegreppen 1—10.

Människan har ett starkt rytmiskt anlag. Men det är ett långt steg från barnets svaga rytmkänsla till ett musikkapells högt utvecklade. Den kan icke anses tillräckligt utvecklad i det sjunde levnadsåret, för att barnet då skulle kunna införas i talsystemet. Somliga mena, att rytmiseringen inträder av sig själv, emedan talordserien upprepas. Men — serien är icke känslobetonad, och vidare är steget i rytmen för långt. Dekadsystemet kan följaktligen ej förvärvas, förrän talserien tillägnats. (Talserien kan karakteriseras som 1-takt.) Vidare måste rytmkänslan ha kommit till ett visst utvecklingsstadium, vilket småningom uppnås genom övning av 2-takt, 3-takt o. s. v.

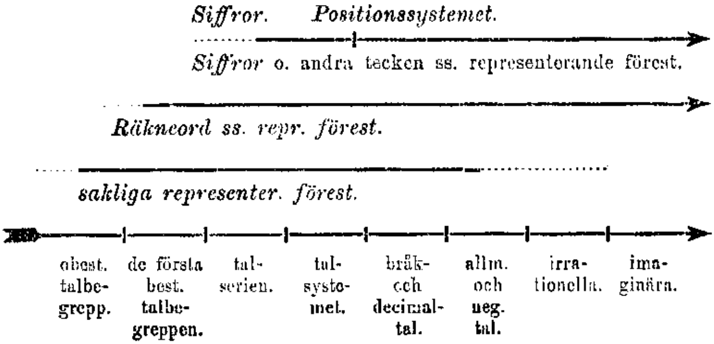
Siffrorna.

Siffran är psykologiskt taget icke något för talbegreppet väsentligt. Den är symbolisk i ännu högre grad än räkneordet. Detta senare är ju symbol för begreppet. Siffran måste fattas som symbol för räkneordet. Det fordras en viss tid, innan associationen mellan sak, begreppsinnehåll, ord och siffra blivit så fast, att ett av dessa element utan vidare reproducerar de övriga. Då detta mål omsider uppnåtts, har det första större steget tagits på vägen till framställning i rummets form av de förvärvade talbegreppen. Det andra, måhända ännu viktigare, är att vinna förståelse för siffrans *positionsvärde*, d. v. s. att siffran har olika värde allt efter sin plats i det skrivna talet. Det har förut påpekats, att kännedom om talordserien icke nödvändigt innebär förståelse för dekadsystemet. På samma sätt måste vi betrakta förhållandet mellan siffra och siffrans positionsvärde: siffran som en symbol för talordet motsvarar ett utvecklingsstadium, kunskapen om siffrans positionsvärde ett högre. Man torde kunna påstå, att det senare stadiet inträffar 1 à 2 år senare än det förra. — Människans behov att i skrift bevara det flyktiga, talade ordet framträdde tämligen sent i mänsklighetens historia. Det gives också i den enskilda människans utveckling en tid, då hon nöjer sig med ord — även då det gäller räkning — och alls icke har behov att bevara sina uträkningar i skrift.

Nästa steg i utvecklingen blir behandlingen av bråktalen och därefter det speciella slag av bråktal, som kallas *decimalbråk*. Så följa *allmänna tal*, *negativa*, *irratio-*

nella, imaginära och *komplexa tal.* Denna ordning måste följas, där man önskar föra den matematiska bildningen till en viss grad av utveckling.

Följande grafiska framställning av talbegreppets utveckling vill framför allt visa, när de representerande föreställningarna (sak, ord, siffra) uppstå och hur de löpa i förhållande till varandra.



Relationerna mellan talen.

Hittills ha vi blott behandlat talföreställningar och talbegrepp, vilka självklart äro det nödvändiga materialet för vårt räknande. Men för att kunna räkna fordras något mer, något högre. Vi erinra oss från logiken, att i ett omdöme, vilket som helst, fastställes ett visst *förhållande* mellan två begrepp. Man torde kunna påstå, att detta fastställande av begreppens ömsesidiga förhållande är nästan viktigare än begreppen själva; ty hela vårt tänkande består egentligen i att jämföra begreppen och konstatera deras relationer. Detta gäller begrepp i allmänhet men i synnerhet talbegreppen.

Ett vanligt enkelt omdöme innehåller minst tre begrepp (ex. »Trädet är högt.» »Solen skiner.» I det sista uttryckes relationen genom verbets presensform.) Låt oss nu betrakta ett enkelt räkneomdöme, t. ex. $5 - 3 = 2$. Detta omdöme innehåller icke tre utan fem begrepp, nämligen tre talbegrepp samt två relationsbegrepp: »minskat med» och »är lika med». Vi ha tydligen här ett *sammansatt omdöme*, närmare bestämt hypotetiskt: om 5 minskas med 3, så finnas två kvar. Detsamma kan påvisas med avseende på alla andra matematiska omdömen. Relationsbegreppet i det andra omdömet: »så finnas» eller »är lika med», innebär ju icke detsamma som logisk likhet, utan vid matematiska satser gäller det att visa, vilket *storleksvärde* förhållandet mellan två begrepp har. Och i den elementära räkneundervisningen vill man ge åt detta förhållande ett *visst värde i dekadsystemet*. Systemvärdet blir en gemensam måttstock, medelst vilken vi kunna jämföra de olika relationerna: t. ex. $6 \cdot 13$ är 1 större än $7 \cdot 11$. Vi inse, att $2 \cdot 12$, $30 - 6$, $10 + 14$, $96 : 4$ äro lika med varandra, sedan det fastställts, att var och en av relationerna har systemvärdet 24. Likhetsbegreppet »är lika med» innebär alltså detsamma för alla matematiska omdömen, som komma i fråga på folkskolestadiet.

Vi måste nu betrakta det *föränderliga relationsbegreppet* och ställa då upp frågan: vilka äro de relationer, som komma i fråga vid räknandet? Eller: vilka äro de räkneoperationer, som kunna förekomma? Av gammal vana svarar mången: addition, subtraktion, multiplikation och division, de »fyra räknesätten». En annan, högre uppfattning framställer sakläget så:

Addition: $4 + 3 + 2 = 9$.
Multiplikation: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$.
Potenser: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$.

samt dessa tre operationers »omvändningar»: av addition subtraktion och av multiplikation division. Potensräkning får två omvändningar: beräkning av rötter och logaritmer. Operationernas antal växer sålunda från 4 till 7. — Men denna uppfattning kan ej godtagas. Den avser det praktiska utförandet av räkneoperationerna men motsvarar icke sakens väsen. Förhållanden mellan tal kunna blott växa fram ur talen själva. Den, som har det klart för sig, frågar genast: varför skall potensräkning nödvändigt ha två omvändningar? Antingen ha de båda övriga grundoperationerna också vardera två omvändningar, eller också är begreppet omvändning använt i mer än en bemärkelse. För att kunna besvara frågan måste vi klargöra, *vilka förhållanden som äro möjliga mellan talen.*

Två tal, t. ex. 8 och 5, äro givna. Vi antaga, att de äro *samtidigt* befintliga och skola jämföras. Detta skulle man kanske enligt traditionell uppfattning vilja åskådliggöra med formeln 8 + 5 = 13. Men den, som betraktar saken djupare, känner genast, att *den* matematiska formeln egentligen förkroppsligar något annat. Vidare: om någon *jämför* de båda talen och därvid säger 8 — 5 = 3, så innebär detta liksom det förra omdömet en relation av enklaste slag. Men formeln kan icke heller här anses täcka operationen, om både begreppet 8 och begreppet 5 *samtidigt* äro förhanden.

I stället kan ju tänkas, att först endast det ena talbegreppet (8) är givet, och att det andra (5) skall följa med den uppgiften att öka den förut givna mängden. Det innebär ett helt annat förhållande mellan de båda talbegreppen 8 och 5 än det ursprungliga. Det är av annan *art*, ty gentemot de båda talbegreppens *vila* i förhållande till varandra i de två första relationerna, karakteriseras denna andra relationsart av *rörelsemomentet.*

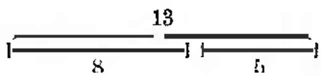
Till skillnad från de första *vilande* relationerna kalla vi denna *fortskridande* eller *operativ*. Ty det väsentliga i detta förhållande är icke uppfattningen av två samtidigt föreställda storheter utan den *uppåtstigande rörelsen* inom talserien, varvid blicken riktas från den förhandenvarande storheten hän mot den nya, som sökes. Grafiskt kan detta framställas så:

Denna åskådning täckes fullständigt av den matematiska formeln: $8 + 5 = 13$.

Denna uppåtstigande rörelse får sin omvändning i en *sjunkande*. Från en bestämd punkt i talserien skall jag gå tillbaka en viss längd. Vart kommer jag? Grafiskt:

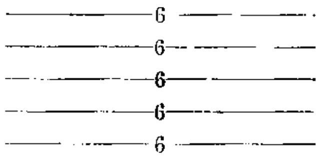
Matematisk form: $82 - 14 = 68$.

Således ha vi två vilande och två fortskridande relationer. Vi förstå nu bättre de två vilande. Den första av dem kalla vi *uppdelning*, den senare *jämförelse*. Grafiskt:

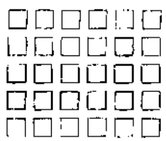
Uppdelning: 

Jämförelse: 

Även vid multiplikation kan särskiljas vilande och fortskridande förhållande. Den *uppåtstigande operativa relationen* består här i att en viss storhet tänkes mångfaldigad: 6 fem gånger taget ger systemvärdet 30. Detta låter sig tänkas så, att 6 fogas fem gånger efter varandra, så att 30 uppnås på tallinjen. Bättre kommer dock stigningsmomentet härvidlag fram, om man föreställer sig operationen så:



eller ännu mera ändamålsenligt:



Den *sjunkande operativa relationen* består här i att sönderdela ett sålunda vunnet antal. Härvidlag frågas: Vilken storhet är det, som måste tagas fem gånger för att ge 30? Det är *delningsoperationen.*

Vid vilande relationsuppfattning ser man härvidlag de fem raderna av sexor färdiga. Man är medveten om vilken struktur ifrågavarande storhet har: $30 = 5 \cdot 6$. Det är *uppdelning i faktorer.*

Vilande relation vid jämförelse råder här, om man jämför de båda storheterna 6 och 30 och frågar sig: Hur många gånger innehålles den ena i den andra? Det är *innehållsdivision* eller helt enkelt mätning av 30 med 6 som måttenhet.

Nu kunna vi få en klarare *överblick över talens relationer*. Den uppåtstigande fortskridande relationen innebär i varje grupp ett förmerande, en ökning. Den sjunkande, fortskridande relationen är överallt en minskning, ett borttagande. Den vilande sönderdelningsrelationen består i uppdelning av tal i addender, i faktorer, i potenser. Den vilande jämförelserelationen slutligen är överallt ett mätande, ett additivt mätande, då man intresserar sig för skillnaden, t. ex. mellan 2 och 8; ett multiplikativt mätande, hur många gånger innehålles 2 i 8; en potentiell mätning, då man frågar: hur många gånger skall 2 multipliceras med sig själv för att 8 skall erhållas?

Översikt:

Fortskridande relation (Operativ ell. aktiv)		Vilande relation	
uppåtstigande	sjunkande	sönderdelning	jämförelse
addera	subtrahera	uppdela i addender	addit. mätande = vanl. enk. jämför.
multiplicera	dela (delningsdiv.)	uppdela i faktorer	mult. mätande = innehållsdivision
potensräkn.	rotberäkn.	uppdela i potenser	pot. mätande = logaritmräkning

Nu äro vi då i stånd att överskåda relationsarterna bättre än förut. Bland de omnämnda fortskridande eller operativa relationerna igenkänna vi räkneundervisningens operationer eller »räknesätt», vilkas antal vi nu fastställa till 4 : 2 stigande och 2 sjunkande. Men vi ha dessutom fastställt, att det förekommer relationer, som äro av annan art än de, som inrymmas under »de fyra räknesätten».

Om vi jämföra de båda arterna, fortskridande och vilande, så visar sig de förra relationernas väsen i, att *ur två förhandenvarande talstorheter vinnes en ny*, som har mer eller mindre substantiell karaktär. Men de vilande äro av annan natur. Vid dem gäller det ej att vinna en ny storhet utan att *allt noggrannare känna de enskilda storheterna*. Vi kunna t. o. m. påstå, att dessa vilande relationer i viss mån intaga en mellanställning i sitt förhållande till talbegreppen och operationerna: de kunna anses som en utveckling av talbegreppen vid sidan av den förut omnämnda från det tredje stadiet. De vilande relationerna ingå så småningom såsom begreppselement i talbegreppen, som väsentliga kännetecken i dem. En 10-åring har exempelvis ej större intresse för 225 än för 226. Men den som har verklig insikt ser detta 225 med andra ögon, ty han är genast medveten om dess uppdelning i $15 \cdot 15$.

Ha de operativa relationerna eller de vilande störst betydelse? Ja, de operativa synas intaga en förhärskande ställning i skola såväl som i det praktiska livet. Med »räknesätt» menar man ju »operationer», andra talrelationer känns man ej vid, och de matematiska formerna äro så gott som uteslutande avsedda för och användbara för de operativa relationerna.[1]

Men om man besinnar, att de vilande relationerna äro ägnade att lyfta de enskilda talbegreppen till ett högre utvecklingsstadium, måste man erkänna, att de betydligt underlätta »operationerna» och medföra större säkerhet i utförandet av dessa. Den, som i ovan anförda avseende verkligen känner till talen 384 och 576, inser *utan räkning*, att differensen mellan dem är 192, vidare att denna

[1] Stigande oper.	relation:	$7 + 3 - 10$;
Sjunkande oper.	» :	$10 - 3 = 7$;
Vilande sönderdeln.	:	$10 - 7 + 3$
» jamförelse	:	(Matematisk form. saknas) 7 är 4 enh. större än 3.

differens innehålles 2 gånger i 384 och 3 gånger i 576, att den själv består av 8 · 24 o. s. v. Barn däremot och även äldre, vilkas talbegrepp icke medelst de vilande relationerna nått den högre utvecklingen, »räkna» sig relativt långsamt till resultatet, och om det händelsevis skulle bli 292 eller 182 i stället för 192, finns i regel ingen känsla av det oriktiga i resultatet. Med hänsyn till det praktiska livets fordringar är det nödvändigt, att åtminstone talbegreppen från 1 t. o. m. 100 nå denna högre grad av utveckling.

Operationsbegreppens utveckling.

Operationsbegreppen, som äro av annan art än talbegreppen, äro icke medfödda och icke heller givna i och med talbegreppen. Även om barnet känner till, vad det innebär att »dela med sig» av godsaker el. dyl. till sina syskon eller kamrater, så är ju denna »delning» ett begrepp med helt annan mening än matematikens »delning». Och även om de båda nämnda delningsbegreppen vore synonyma, så kunna vi invända: ett barn, som har utövat en verksamhet på *ting*, kan icke alltid utan vidare överföra denna verksamhet på *begrepp.* Barnet måste först lära sig operationsbegreppens innebörd. Detsamma gäller kanske i ännu högre grad om *likhetsbegreppet.* Ett barn förökar och förminskar sina skatter utan att göra resultatet klart för sig. En pojke har 12 soldater och får 4 till. Nu kan jag ställa upp en ännu längre rad, säger han i regel. Då det gäller att dela upp t. ex. nötter mellan syskonen, frågar pojken eller flickan kanske, hur många var och en har; men detta sker icke för att fastställa, hur många var och en kan få, utan blott för att förvissa sig om, att ingen fått mer än de andra. —

Meumann[1] säger: »Även efter det talföreställningarna utvecklats, saknar barnet *varje förmåga* att utföra de enklaste operationer.»

En undervisare, som börjat med operationer, medan barnet ännu befinner sig på talbegreppsutvecklingens låga stadium, uppenbarar således sin *okunnighet om barnanaturen*. Efter en dylik början kan icke följa annat än mekanisk dressyr. —

De additiva relationerna.

På det första stadiet av operationsbegreppens utveckling förvärvas de additiva och bland dem de *aktiva operationerna* först (se sid. 15, Översikten, första raden). Därvid möta en rad svårigheter, som icke kunna övervinnas på en gång utan efter hand. Det är fyra från varandra helt och hållet skilda operationer, som skola inses till sitt sammanhang och sitt ömsesidiga förhållande till varandra. Två särskilda svårigheter uppstå, då det gäller att förvärva likhetsbegreppet och förstå den matematiska formen. Det är betänkligt att, som så ofta sker nu för tiden, bjuda likhetsförhållandet och den matematiska formen i anslutning till de första operationsbegreppen. Ett barn kan säga: Jag har sex nötter; sedan får jag två till; då har jag åtta. Men det är något helt annat och helt nytt att därav sluta sig till: 6 och 2 är 8. —

Det är sannolikt, att de flesta av oss icke kunna erinra sig, när och hur vi ha förvärvat kännedom om *de vilande talrelationerna*. Nu rådande undervisningspraxis lägger särskild vikt vid de operativa relationerna. Lärjungen får dock begrepp om de vilande. Denna kunskap uppkommer

---

[1] »Abriss» sid. 379.

så att säga som en biprodukt av undervisningen, även om denna är inriktad på de operativa relationerna, särskilt om man lägger vikt vid att eleven föreställer sig talstorheterna i rummet (ex. tallinjen). — De vilande relationerna övas dock flerstädes, även om detta sker under andra namn. Vanliga former äro sönderdelnings- och fyllnadsövningar, vilka ge bäst resultat i anslutning till talbilder.

De multiplikativa talrelationerna

(Översikten, sid. 15, andra raden) förvärvas under det andra stadiet av denna utveckling. Deras inbördes ordning torde bliva: mångfaldigande, »innehållsdivision», uppdelning i faktorer samt delning. Dessutom måste de olika operationernas inbördes sammanhang bli klart för barnen. Den matematiska formen vållar nu ej så stora svårigheter, emedan förutsättningarna för den givas under behandlingen av de additiva operationerna.

* * *

Förståelse för operationerna vinnes endast genom att de verkligen utföras. Barnet lär sig addera endast genom att i verkligheten utföra sammanläggning upprepade gånger, lär sig mångfaldiga endast genom verkligt mångfaldigande, lär sig dela endast genom verklig delning. Det duger ej att blott bygga på de möjliga erfarenheterna från hemmet och fordra av barnet, att det skall föreställa sig vissa föremål, såsom nötter, äpplen, kulor o. s. v., och så utföra operationerna. Andligen mogna barn, som äro övade i föreställandets svåra konst, kunna nog lära räkna på det sättet, men icke de medelmåttigt eller svagt begåvade. Somliga mena, att övning är det första och förnämsta medlet vid operationernas inlärande. Med övning mena de då oftast t. ex. dagligt upprepande av multiplikationstabellen el. dyl. talserier. Man menar, att dessa relationer måste läras utantill, på det att de må så att säga växa in i lärjungarna. Ja, i och för sig är det riktigt, att dessa relationer måste ligga i beredskap i medvetandet för att räkning överhuvud skall vara möjlig. Men det är å andra sidan ett misstag, då man tror, att övning är ett villkor eller en form för själva förvärvandet av insikten eller *förmågan*. Genom övning kan endast åstadkommas, att en förvärvad förmåga befästes och göres säkrare.

Utvecklingsgången vid varje slag av räkneoperationer är fastmera denna: förmågan måste förvärvas genom *verkligt handlande*; genom upprepat utförande vinnes allt större *klarhet och förståelse* för den; därefter leder det upprepade igenkännandet till *mekaniserad beredskap* eller reproduktion. Denna måste eftersträvas även på folkskolestadiet, ty på den grunden är det, som den matematiska bildningen av alla grader måste byggas.

Det kan härvidlag icke nog upprepas, att »åskådlighet i undervisningen» icke är liktydigt med att en eller två eller kanske tre, fyra gånger *visa* en sak (låta barnen *se* den) utan åskådlighet innebär, att läraren tar barnens *alla* sinnen i anspråk, att barnen lära känna undervisningsobjektet från så många synpunkter som möjligt och *så ofta*, att barnen verkligen känna till saken i fråga.

Räkneoperationernas praktiska tillämpning.

Matematiken är ju till sitt väsen ren teori och dock från en annan synpunkt den mest praktiska av alla vetenskaper. Ingen annan vetenskap griper så som den in i alla livets förhållanden, ingen är av så grundläggande betydelse för hela kulturlivet. Matematiken utgör skelettet i fysik, kemi, geometri, astronomi, nationalekonomi, handelsvetenskap o. s. v. Från alla dessa områden hämta vi tillämpningsexempel vid räkneundervisningen. Men knappt ha ett par år förgått, sedan barnen slutat skolan, förrän de äro ur stånd att räkna ut det enklaste problem. Den frågan uppstår då: är månne icke ägandet av talbegreppen och talrelationerna identiskt med matematisk bildning? Somliga besvara en sådan fråga jakande och mena, att vad som därutöver fordras är endast övning. Andra däremot påstå, att om intet annat fordrades än talbegrepp och talrelationer, så skulle bildning vara identiskt med minne, och det är ju en föråldrad åsikt. Nej, talbegreppen och talrelationerna äro det *associativa* materialet, som måste användas *apperceptivt*. D. v. s. materialet står till förfogande, och vår uppmärksamhetsriktning bestämmer, vilken del av detta material, som i det förevarande fallet skall användas. Denna användning är det säkerligen, som man menar, då man talar om »övning». Men det är icke på sin plats här. Härvidlag är det fråga om en högre, mera komplicerad andlig verksamhet, ett urval, en valhandling. Vi taga ett exempel: huru stora mängder av rågbröd och mager ost behöver en man dagligen förtära för att uppehålla sig (frånsett alla biomständigheter)? Följande uppgifter erhållas:

Hans dagliga behov äro av

	äggvita	fett	kolhydrater
	118 gr.	88 gr.	400 gr.
ost inneh. . .	33,8	[illegible]	4,1 %
rågbröd . . .	4,7	0,6	47,9 %
Vidare är . .	5	3	1

förhållandet mellan dessa ämnens näringsvärde vid ömsesidigt utbyte. —

Följande reflexioner och uträkningar göras sedan. (Uppgiften kan lösas på flera sätt. Men alla möjliga lösningar måste taga hänsyn till verkligheten.) Vi antaga, att en man dagligen förtär 1 kg. rågbröd. Då tillföres honom 47 gr. äggvita, 6 gr. fett och 478 gr. kolhdr. Jämför dessa siffror med behovet:

1 kg. rågbröd . .	47 gr. äggvita	6 gr. fett	479 gr. kolhydrater
behov	118 » »	88 » »	400 » »
	— 71 gr. äggvita	— 82 gr. fett	+ 79 gr. kolhydrater

alltså förefinnes ett restbehov av äggvita och fett, ett överskott av kolhydrater. Överskottet användes ju först för behovet av fett, 79 gram kolhydrat omsättes i $^{79}/_{3}$ gr. fett = ung. 26 gr. fett. Det ytterligare behovet skall täckas genom en viss mängd ost.

Och så fortlöper resonemanget och uträkningarna.

Av detta exempel framgår klart, att den matematiska bearbetningen av en uppgift är något väsentligt annat än blott och bart hanterandet med talbegrepp och talrelationer. Vi kallade det nyss en högre andlig verksamhet. Vilja vi nu göra klart för oss, varuti denna består, så kunna vi analysera föregående exempel:

1. Sedan vi gjort klart för oss uppgiftens innebörd, ställa vi oss under inverkan av *föreställningen om målet*. Vi föreställa oss sakförhållandet ännu en gång och rikta uppmärksamheten på luckorna, som skola fyllas.

2. Vi göra upp en *plan* för räkningen, reflektera över verkningarna av vårt görande.

3. Vi tänka efter vilka sifferuppgifter, som behövas, och bedöma, huruvida lämnade sifferuppgifter äro tillräckliga för problemets lösande.

4. Vi använda de erhållna sifferuppgifterna *på den föreställda sakliga verkligheten*, *utvälja* på grund av

denna prövning de erforderliga räkneoperationerna och söka ungefärligen uppskatta resultatet.

5. *Vi utföra operationerna.*

6. *Vi upprepa* tillvägagångssättet under 4. och 5. så ofta det behövs, och *orientera* oss varje gång enligt 1. och 2., målföreställning och räkningsplan, *förbinda* varje gång arbete och resultat med föregående delresultat och *bedöma* dess betydelse för det slutliga målet.

7. Vi utsträcka prövningen till hela räkneprocessen, jämföra resultatet med målföreställningen och söka göra klart för oss, under vilka förhållanden den slutförda räkningen äger giltighet. —

Denna analys visar, att talbegrepp och talrelationer väl bilda det naturliga materialet vid verkligt räknande, men att huvudsaken är något helt annat. Detta andra — för att nu uttrycka det mera sammanfattande — består av *det under inverkan av målföreställningen försiggående urvalet och sammanbindandet av associativt material.*

Någon invänder nu, att denna komplicerade andliga verksamhet icke kan anses försiggå, då det gäller enklare problem. Låt oss därför betrakta ett enklare exempel:

Mor skickar sin pojke till slaktaren för att köpa $^3/_4$ kg. kött. Hon gör sig själv den frågan: Vad kostar $^3/_4$ kg. kött?

Punkt 1 i analysen är oavkortad förhanden. Punkt 2 förenklas, då det här rör sig om endast en enda räknefråga. Punkt 3 är oavkortad: Hon måste veta priset pr kg. Punkt 4 får hos denna person en särskilt utförlig behandling, i det hon först räknar ut priset på $^1/_2$ kg. och sedan $^1/_4$ kg., varefter hon lägger tillsammans dessa båda och så får priset på $^3/_4$ kg. Häri innehålles tydligen punkterna 5 och 6. Punkt 7 gäller också här.

Man ser, att analysen ej kan väsentligen förkortas. De olika momenten i räkneprocessen försiggå blott i raskare tempo, allteftersom de äro mekaniserade. —

För att än tydligare klargöra, vad som fordras utöver talbegrepp och talrelationer, kunna vi nu peka på ett par analogier. En symaskin består av en stor mängd smådelar. Det är icke tillräckligt att vara i besittning av dessa smådelar för att sätta ihop symaskinen. Man måste också känna till och föreställa sig smådelarnas förbindelser och ömsesidiga verkningar. På liknande sätt äro talbegreppen och talrelationerna beståndsdelarna vid räkning, och många barn äga dem. Dock förekommer det ju icke sällan, att de icke kunna »räkna ut» s. k. »benämnda tal».

Den andra analogien är också lärorik. Räknekonsten erbjuder flera jämförelsepunkter med *språket* (frånsett, att språket blott är uttryck för tänkandet överhuvud, medan räknandet utgör delområde av såväl språket som tänkandet). Matematikens talbegrepp motsvara språkets ordbegrepp i allmänhet. Liksom talen stå i relation till varandra, så stå även orden i meningar till varandra i förhållanden, som i varje särskilt fall uttryckas genom ändelser, prepositioner o. s. v. Man torde då ha rätt att påstå, att liksom en dikt eller ett föredrag förhåller sig till en ordbok, på samma sätt förhåller sig den matematiska användningen till det inhämtade förrådet av räknematerial (talbegrepp, talrelationer). Det som gör ord och satser till tankar och avhandlingar, det som gör talbegrepp och räkneregler till problemlösningar av enkel eller mera komplicerad art, det är: det *planmässiga sammanhanget under en ledande idé.*

Räknekonstens väsen är alltså förmågan att under ledning av målföreställningen bland de talbegrepp och operationer, som stå till förfogande, *utvälja* dem, som riktigt, säkert, fort och elegant leda till målet, *bringa sammanhang mellan dem* och *sätta dem så att säga i verksamhet.* Från psykologisk synpunkt är var och en av dessa processer en *viljeprocess.* Därmed är också en antydan given angående denna förmågas utveckling. — Det är två intellektuella komponenter, som deltaga i denna utveckling: *kännedom om och förståelse av tingens måttförhållande* samt *herravälde över talbegreppen och talrelationerna.* Angående måttförhållandena kan sägas, att det ej räcker med kännedom om de s. k. sorterna. Det ligger lika stor vikt vid att det s. k. ögonmåttet får sin övning. Det är också två *emotionella komponenter,* som komma i betraktande vid räkneförmågans utveckling, de högre *intellektuella känslorna* samt *uppmärksamheten.*

Toges vid räkneundervisning tillbörlig hänsyn till dessa fyra komponenters betydelse för räkneförmågans utveckling, skulle man med säkerhet ej så ofta behöva klaga över barns bristande matematiska begåvning, som nu för tiden sker. Och den övriga sakundervisningen är icke utan skuld. Ty är den icke så gott som uteslutande kvalitativ? Nästan överallt rör det sig om *hurudant* ett ting är, eller vart det hör. Det kvantitativa momentet förbigås oftast eller vidröres i förbigående. — Umgängets och uppfostrans (undervisningens) verkningar förblandas förvisso ofta med »bristande anlag».

Ett nytt mål.

Den nya svenska undervisningsplanen anger som räkneundervisningens mål: insikt och färdighet i räkning med särskild hänsyn till det dagliga livets fordringar. Denna formulering gör, att man löper risken, att den i verkligheten första och viktigaste uppgiften blir försummad: den matematiska uppfattningen av verkligheten. Uttrycket »det dagliga livets fordringar» inbjuder dessutom till att inskränka undervisningen till att lära barnen räkna med formler och regler, under det att i allmänhet just arbete utan schemata anses som högre andlig prestation. I matematiskt avseende är icke den bäst bildad, som har lärt sig exempelvis formeln för beräkning av en månghörnings yta, utan den, som är i stånd att — om han händelsevis glömt den — på kortaste tid åter härleda den. Räkneundervisningen får ej bli dressyr, dess område är ej enbart tekniken, dess ändamål ej rutin. Det förhåller sig på liknande sätt med läsnings-, språk- och teckningsundervisningen. Ingen av dem anses som självändamål utan som medel för uppfattning av yttervärlden och för uttryck av den egna inre världen.

Då vår undervisningsplan talar om *insikt* i räkning skulle man möjligen kunna tänka sig, att häri skulle ligga en uppmaning till läraren att ge barnen just denna djupare förståelse för räkningens elementer, talbegreppen och deras förhållanden till varandra, operationerna och deras mening och sammanhang med varandra.

Den matematiska bildningens mål nås ej enbart genom arbetet under räknetimmarna. Geografiundervisningens målsmän ha på senare tider gjort ansatser i av oss avsedd riktning, i det att de allt mer betonat vikten av att begagna grafisk framställning av förekommande sifferuppgifter. Andra ämnen böra följa exemplet. Ty att räkna innebär ej endast att kunna multiplikationstabellen eller att dividera bråk med varandra utan även och framför allt att kunna bedöma tingen och företeelserna i livet med avseende på deras inbördes måttförhållanden. Någon menar kanske, att matematisk bildning är något, som folkskolan ej har med att skaffa. Matematik börjas först med algebra, menar man. En sådan person behöver korrigera sitt begrepp om matematisk bildning. Undervisningen i algebra bedrives ofta, utan att den matematiska bildningen befrämjas, nämligen då den inläres endast såsom tillämpning av vissa regler, som memoreras. Matematik och räkning förhålla sig som förmåga och färdighet. Vi måste sätta *bildningen* eller *insikten* i stället för eller framför *tekniken*.

Lärosätt.

Abstraktion.

Det kan upprepas, vad som på sista tiden omtuggats så ofta: lärjungarnas anlag skola utvecklas. Vad ligger då häri? Jo, förvisso först och främst, att det är förkastligt att mata eleverna med kunskaper eller färdigheter. Dessa skola i stället *förvärvas* av barnen själva. Läraren tjänstgör endast som arrangör. Han skall ordna omständigheterna så, att de eller de iakttagelserna kunna göras. Barnen skola sålunda icke vara inställda på att ***taga emot* utan på att *arbeta sig själva till kunskap*.** — Men den matematiska undervisningen är ju till sitt väsen *abstraktion*. Detta faktum gör, att vi måste dröja **något vid detta begrepp för att kunna leta oss fram till** det lämpligaste lärosättet. — Det anses allmänt, att all abstraktion vilar på åskådningen. Detta behöver ju därför inga särskilda utläggningar. Vi göra endast några erinringar. En åskådning kommer endast till stånd genom *upprepade* iakttagelser. Iakttagelserna måste bedrivas *planmässigt* (från den iakttagandes sida!) och vara *allsidiga* (göras med så många sinnen som möjligt!).

Se vi nu på de begrepp, regler och lagar, som bli resultatet av den abstraherande verksamheten, så finna vi två slags abstraktioner:

1) *mottagna eller ärvda abstraktioner*, t. ex. däggdjuren föda levande ungar; Alperna är en ung bergsformation; romarna voro tappra;

2) *förvärvade abstraktioner*, t. ex. fiskar simma; ättika är sur; det finns fler fattiga än rika.

Mellan de båda slagen kunna vi fastslå följande olikheter:

de mottagna	*de förvärvade*
upptagas lätt och raskt;	förvärvas med svårighet och långsammare;
visa större rörlighet; äro lösliga;	visa större varaktighet; äro fastare;
äro föga känslobetonade;	äro starkt känslobetonade;
bjudas barnet i färdigt språkligt skick;	måste formuleras av barnet självt;
besitta ringa möjlighet till konkretisering, därför mindre klara.	ha stor möjlighet att konkretiseras; därför klara.

Av denna jämförelse framgår något, som för övrigt nästan dagligen bekräftas av erfarenheten: att de mottagna abstraktionerna falla sig betydligt lättare för barnen än de förvärvade. Den psykologiska forskningen har också kommit till det resultat, att barn icke äro i stånd att självständigt bilda abstraktioner före ett visst utvecklingsstadium. (Det kan hänvisas till Max Brahn och Meumann.) Vi böra därför icke för tidigt vänja barnet vid att upptaga abstraktioner utan i stället fordra konkretisering. Framför allt böra vi hindra det mekaniska upptagandet av sådana abstraktioner, som barnet med nödvändighet självt måste förvärva sig.

Vi behöva väl icke särskilt tala för vår åsikt, att *räkning hör till det andra slaget av abstraktioner, till de förvärvade, även i de former, som senare måste mekaniseras.*

Därav draga vi följande slutsatser.

1. Vi få icke låta barnen lära något mekaniskt utantill utan *grunda allt på åskådningen* (upprepad, planmässig och allsidig uppfattning).
2. Vi måste låta barnen *räkna med föremål*, så länge som detta icke blir en börda för dem.
3. Ju *ensidigare man är vid åskådliggörandet* — t. ex. användandet av ett enda åskådningsmedel eller ett sätt att lösa ett slags uppgifter — ju lättare inställer sig abstraktionen i den mottagnas form.
4. Vi böra därför bemöda oss om att *ofta hänföra rena sifferproblem till konkreta fall.*

Talserien.

Vid skoltidens början står barnet vanligtvis färdigt att inträda i det förut omnämnda tredje stadiet, då talserien skall förvärvas. Vad detta stadium fordrar, är egentligen en minnesprestation. Härvidlag urskilja vi två utvecklingsstadier. I början fordras endast igenkännande: *taluppfattning* (t. ex. barnet räknar en hög nötter och säger: det är 8). Senare är det möjligt att skrida till reproduktion, *talframställning* (ex. Jag säger: du får taga dig 6 nötter ur den här korgen. Barnet räknar till sig 6). I början ske bådadera successivt (genom räknande), men genom långvarig övning övergå både uppfattningen och framställningen *så småningom* till att ske simultant (genom hastigt överblickande).

Det första tempot i denna undervisning blir att låta barnen öva sin taluppfattning genom att räkna alla möjliga småsaker. Först räknas föremålen, under det att de flyttas helt litet, allteftersom de räknas. Sedermera vidröras de blott, och slutligen pekar barnet endast på föremålet. Därefter kan man övergå till att räkna ting endast »med ögonen», d. v. s. genom att se efter, hur många det finns först av orörliga kroppar, och när barnet nått färdighet i det, kunna även rörliga saker räknas (ex. sparvar, fjärilar, arbetare på en arbetsplats, spatserande på gatan o. s. v.). Dagligen måste dessa övningar göras. De behöva ju ej nödvändigt förläggas till räknetimmar. (I förbigående nämna vi, att vi anse, att barnet bör få räkna hur långt som helst, så långt som det kan.)

Jämsides med dessa övningar göras *talframställningar med verkliga ting*. När barnen i klassen räknas, heter det t. ex.: 8 barn komma fram; tag upp 10 pärlor ur en låda o. s. v. *Rita* upp 6 blommor, 4 träd o. s. v. (Hur det ritas är likgiltigt, antalet är huvudsaken.) Senare *ritas i luften* och slutligen tillhållas barnen att *föreställa sig* saker av olika antal.

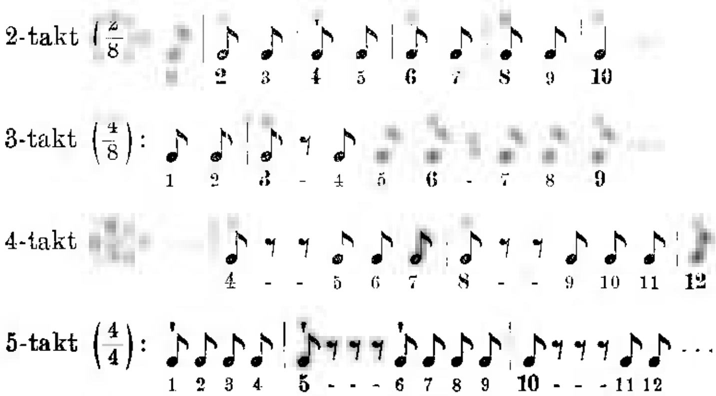
* * *

Då barnen nått en viss grad av utveckling i nämnda former, kan man gå över till taluppfattning och talframställning på *symboler för ting*. Dessa övningar tagas på samma sätt som övningarna med verkliga ting. Vid talframställningarna få vi här röra oss med yt- och linjesymboler (cirklar och streck). Man jämföre dessa övningar med de motsvarande på förra stadiet: där ritades 4 pepparkakshjärtan kanske så , här kunna samma ting företrädas av streck / / / /. Framsteget i abstraktion är tydligt. Men man måste låta dessa övningar skrida fram i långsamt tempo. Flera veckor måste de omfatta, och man återgår titt och tätt till de verkliga tingen. Övningarna göras så länge, att barnen äro mäktiga att föreställa sig talen som ett antal enheter av en eller annan form, kulor, kuber eller dyl. —

Nu menar man kanske, att vi hittills gjort oss skyldiga till en svår försummelse. Vi ha ju ej infört *siffran* som symbol för talen. Det må då endast sägas, att det eventuella resultatet av hittills gjorda övningar helt och hållet skulle kastas över ända, om vi nu införde siffrorna. *Siffran är icke symbol för talet utan en symbol för räkneordet*, således en abstraktion av ännu högre grad än räkneordet. —

* * *

Nästa steg blir taluppfattning och talframställning under *rytmiskt räknande* (f. ö. samma gång som i förra stadiet). Särskilt bör då övas 2-takt, 3-takt, 4-takt och 5-takt. Av dessa torde särskilt 2- och 5-takten uppmärksammas. Dessa, den minsta mångfald som finns och den största, som vi kunna omedelbart uppfatta simultant, äro de faktorer, på vilka dekadsystemet sedan bygges. — Vid de olika rytm-arterna räknas på följande sätt. (Märk pauserna, varigenom takterna avgränsas från varandra, samt de markerade ställena, där starkare tonvikt lägges!)



Man torde observera, att detta tillvägagångssätt ger multiplikationstabellens produktserier alldeles gratis. De obetonade utsägas så småningom allt svagare, slutligen tyst, och då ha vi ju serierna där. —

Dessa övningar med rytmisk räkning göras nu en längre tid. Svårighetsgraden ökas småningom. Vid talframställningen med tingsymboler läggas t. ex. 9 stavar icke så ||||||||| utan
så || || || || | eller så ||| ||| |||
eller så |||| |||| | eller så ||||| |||| och på samma sätt med streck eller ringar, som ritas. Övningarna måste naturligtvis göras känslobetonande. En stor glädjekälla för barnet ligger dock redan i att det får gå till nästa svårighetsstadium.

* *

Då större tal (30—40) skola framställas, kännes snart behovet att gå till nästa övningsgrupp, *taluppfattning genom enbart överblickande.* Det blir vårt nya mål, och för att nå det måste vi ordna enheterna på flera rader. Därmed komma vi in på *talbildernas* område. Det finns flera former av talbilder, och ingen av dessa synes oss alldeles obrukbar. Dominospelets brickor visa en sorts talbilder. Det finns dock ett annat slag, som äger vissa fördelar, varigenom det skiljer sig från mängden. Det är *Borns* talbilder, som se ut så:

o. s. v.

Man ser, att de bygga på 2- och 5-talet. Varje ny talbild innehåller i sig den föregående. Den viktigaste fördelen är dock, att *de förbereda för tillägnandet av dekadsystemet.* Detta system av talbilder gör det möjligt för barnet att icke blott uppfatta tiotalet som enhet utan även att efter någon övning uppfatta flera tiotal som enheter, vilket var och en lätt kan övertyga sig om. 10-grupperna ordnas i 5 rader under varandra med 2 10-grupper i varje rad. Därigenom kan även hundratalet lätt överblickas. Det är ju ganska lätt att överblicka nedanstående talbilder och angiva, vilket tal var och en betecknar:

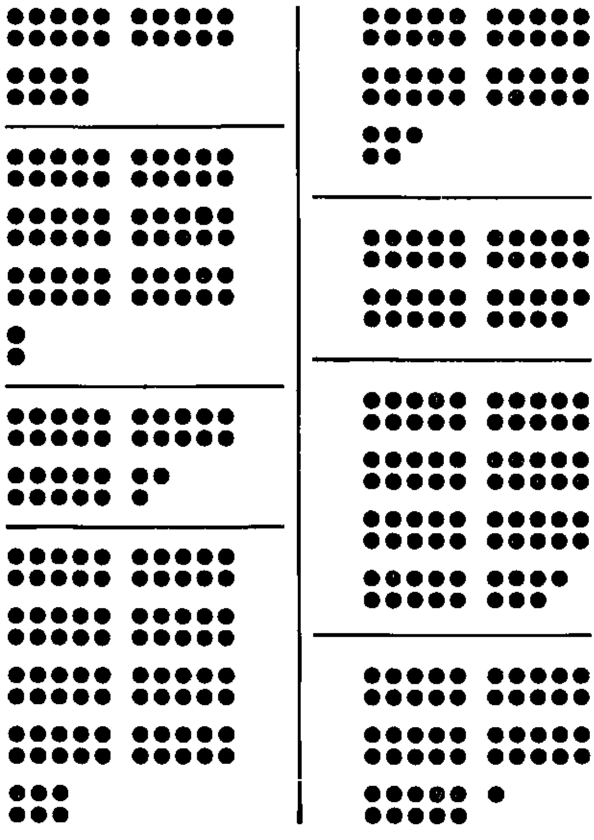


Bild 1.

Övningarna med dessa talbilder ordnas nu t. ex. så: Talbilderna av talen 1 till 100 anbringas på åskådningstavlor av papp i storleken 35 × 42 cm. Pappskivornas båda sidor användas. De svarta »punkterna» göras lämpligen 25 mm. i diameter. Läraren visar dessa tavlor från katedern. Barnen tillsägas i början att gissa antalet punkter. Snart nog uppskattas alla talbilderna korrekt av de flesta barnen. Övningarna kunna arrangeras så, att de taga mycket kort tid i anspråk. Två eller flera barn få tävla om vem som kan uppvisa de flesta riktiga resultaten. De övriga tjänstgöra då som intresserade åskådare och kontrollanter. —

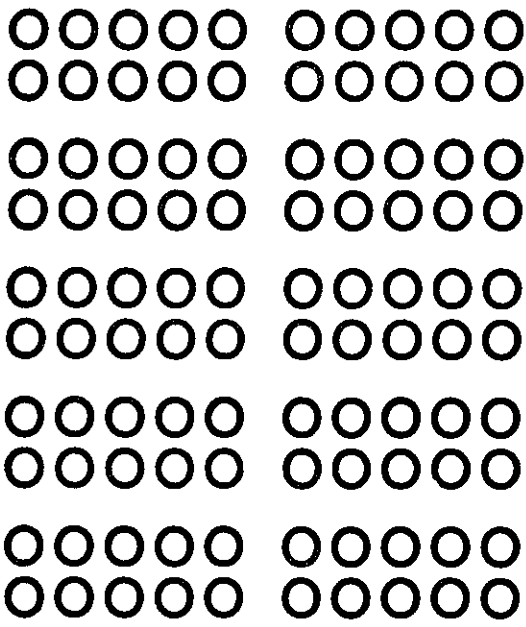
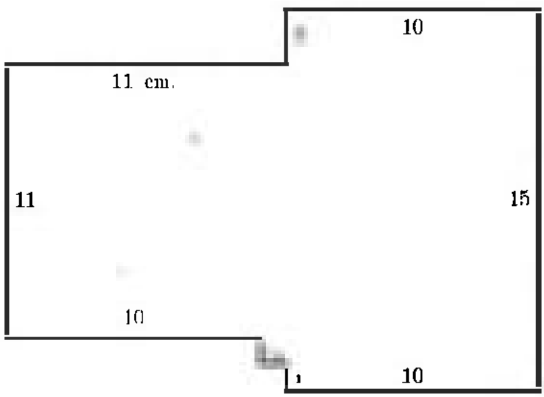


Bild 2.

På detta sätt övar man bäst taluppfattningen. För att alla barnen skola kunna deltaga i *talframställningen* på detta övningsstadium fordras talbildstavlor av annan form. Varje barn bör hava en mindre, lätthanterlig skiva med talbilden 100. Denna kunna de tillverka själva. Med ett runt håljärn (diameter 9 mm.) hugger läraren ut några tusen smålappar av kulört papper. Dessa klistra barnen sedan upp på ett ljusare, tjockare pappersblad eller en pappskiva i grupper med 10 i varje grupp, så att talbilden 100 åstadkommes. Regelbundenheten mellan de skilda 10-grupperna lämnar dock säkerligen åtskilligt övrigt att önska vid detta småbarnens arbete. Dylika 100-talsbilder kunna liksom all annan här nämnd materiell erhållas hos Verlag Julius Klinkhardt, Leipzig (mycket billigt).

Punkterna äro där ersatta med ringar, som barnen få färglägga eller svärta, innan övningarna börja (bild 2). För dessa övningar erfordras dessutom ett s. k. täckblad av följande utseende:



Detta blad, som också lätt kan tillverkas av barnen själva, får ej vara av alltför mjukt papper.

Övningarna i talframställning försiggå nu utan svårigheter. Läraren säger exempelvis: Visa 30! Visa 40! Visa 60! 34! 56! o. s. v. Barnen hantera täckbladet så, att det önskade talet synes, och allt det övriga av 100-tavlan täckes. Vid jämna tal har täckbladet samma läge som på bilden å föreg. sida. Vid ojämna tal måste den dubbla inskärningen vara överst. Det behöver ju icke särskilt påpekas, att nu talframställningsövningar kunna göras i mängd på kort tid, att *alla* barnen få vara med, att lärarens arbete blir minimalt, att barnen själva kunna arbeta gruppvis eller parvis, så att ett barn ger uppgiften, ett annat utför den. Man kan och bör naturligtvis även omväxla med taluppfattningsövningar på samma 100-tavla.

Sådana övningar måste ju anses värdefullare än själlöst inlärande av ord utan sinnlig bakgrund, även om man förut bjudit på »åskådning» en eller flera gånger. Vilka mängder av tid kunna icke sparas genom detta räknematerials lätthanterlighet, jämfört med andra åskådningsmedels.

Vart vilja vi egentligen komma med dessa övningar? Kort sagt: *Barnen skola lära sig uppfatta och framställa tal.* De skola genom eget arbete och egen upplevelse småningom komma till klart medvetande om talens storlek, t. ex. att 73 är mer än 37, 64 mer än 46, 58 icke mycket mindre än 62 o. s. v. I början nöjer man sig med ungefärlig uppskattning, den finare iakttagelsen kommer efteråt av sig själv.

Att sådana övningar i taluppfattning och talframställning utgöra en ändamålsenlig förberedelse för inlärandet av räkneoperationerna skall visas längre fram men inses väl av läsaren redan nu. Än så länge rör det sig om frågan: *hur många är det?*, icke om frågan: *hur många blir det?*

Dekadsystemet.

Det är ett misstag, om man tror, att man ger barnet begrepp om talsystemet genom behandlingen av talområdet 10—20. Vi ha visat, att talserien t. o. m. 100 kan givas en för barnet översiktlig gestaltning. Men barnet har icke därför nödvändigt fått begrepp om dekadsystemet. Detta tillägnar sig barnet på ett högre utbildningsstadium.

Om det sålunda är fastslaget, att det råder en principiell åtskillnad mellan de båda områdena, så är det å andra sidan klart, att införandet i systemet förberedes genom vissa övningar.

Till dessa förberedande moment höra först och främst *räkneorden*. Men med dessa ger man icke själva systemet. Med symbolen ger man icke den därmed betecknade saken. Själva behandlingen av systemet kräver först ett medel att åskådliggöra det. Ett vanligt sätt är att bunta ihop 10 stickor och så laborera med dessa buntar som symboler för 10-talen. Detta åskådningsmedel har ju sina fördelar men också en svår nackdel: tiotalen måste tagas i god tro, det går ej att kontrollera antalet i varje bunt utan att taga isär den. Det betyder tids- och energiförlust. Översiktligheten lämnar också åtskilligt övrigt att önska. Förut omnämnda *talbildstavlor* göra det däremot möjligt för barnet att ögonblickligen uppfatta 10-talet dels som 10 enheter och dels som en enhet av högre grad. Då barnen använda dessa talbildstavlor, kontrollera de halvt medvetet och oavbrutet, att varje tio-tal innehåller sina 10 enheter.

Givetvis böra icke sådana åskådningsmedel som *meter-*

mått och *mynt* försummas, då det gäller att införa barnen i dekadsystemet. Decimeter-delarna böra vara färglagda (varannan röd, varannan vit el. dyl.). Förekomma siffror, böra dessa vara mycket små, annars fastnar uppmärksamheten vid dem, och ändamålet förfelas.

Genom att under övningarna mer och mer *betona tiogruppen som enhet* inför man småningom barnet i systemet. (Exempel: Lär. säger: Om man vill räkna 60 stycken ettor, tar det lång tid. Nu räknar jag i stället 6 stycken 10-grupper. Det gick fortare, men är ändå lika mycket.) — Vidare övas förvandling av 10-tal till ental och tvärtom. Allt under användning av eller hänvisning till verkliga ting eller talsymboler.

Bråktalet.

Något klart och tydligt begrepp om bråktalet få ej ens de flesta barn vare sig vid den s. k. »division med rest» eller den senare bråkräkningen, om man försummar att dessförinnan låta dem själva handskas med verkliga ting, som de själva få dela. Ett bra hjälpmedel är *pappersark, som vikas.* 3 blad vikas till halva, fjärdedelar och åttondelar, 3 till tredjedelar, sjättedelar och niondelar och 2 till femtedelar och tiondelar. På varje del skrives dess värde. Dessa blad tjäna sedan till uppfattnings- och framställningsövningar. Man visar olika antal olika delar, och barnen säga, vad det är. Man säger: Visa på era egna »bråkblad» $^4/_5$, $^3/_{10}$, $^7/_8$, $^2/_6$ o. s. v. Senare: Jämför $^1/_6$ och $^1/_{12}$ med varandra! Vilken är störst? — Jämför $^4/_8$ med $^5/_{10}$! o. s. v. Alltjämt se barnen på »bråkbladen». — Senare göras liknande övningar på bråkdelar, som erhållits genom att vika pappersblad av annan storlek. Då ha vi större fjärdedelar och mindre fjärdedelar o. s. v. Småningom står det klart för barnet, att bråktalets verkliga storlek beror av den enhet, som delats. Då är tiden inne att låta pappersbladet föreställa ett större *tal*. Här kan förut omnämnda 100-tavla åter göra god tjänst. En sådan sönderbrytes i fyra lika delar. På varje fjärdedel komma 25 punkter o. s. v. En del av tavlan (t. ex. med 40 punkter) brytes i 8 delar: åttondelen av 40 p. är således 5 p. ser och säger barnet då. Och dock kan det icke »räkna bråk», vilket ej heller är meningen. Detta är endast övning i bråkuppfattning.

Operationerna.

Av psykologiska skäl är det nödvändigt att dela på uppgiften sålunda, att vi först arbeta på att barnen fatta de olika operationernas *innebörd* och därefter rikta deras uppmärksamhet på *resultatet* av de genom operationerna vidtagna förändringarna. —

Barnet måste *kunna* lägga till, draga ifrån eller taga bort, dela upp, fylla ut, mångfaldiga, dela i lika delar, lösa upp i faktorer och undersöka, hur många gånger t. ex. 3 kulor kunna tagas ur en viss hög. Detta kan barnet icke utan att självt ha fått göra det upprepade gånger och med olika material. Barnen påminnas också om små händelser ur det dagliga livet, då mor eller handelsmannen eller någon annan drar ifrån, lägger till, delar upp o. s. v. Småningom blir det klart, att räknekonstens terminologi är hämtad just ur det dagliga livet, fastän de olika uttrycken här användas i trängre bemärkelse. Naturligtvis göras icke alla erinringar på en gång, utan meningen med t. ex. mångfaldigande göres klar, innan man går närmare in på denna art av operationer o. s. v. Detta inträngande i operationernas innebörd skulle vi kunna kalla operationsuppfattning och operationsframställning utan några som helst tal, endast med uppmärksamheten riktad på själva den konkreta verksamheten.

* * *

Ett övergångsstadium blir det, om man sedan låter barnen utföra operationer *med tal* utan aktgivande på resultatet. Läraren säger: En hop barn gå från skolan (vi räkna dem icke, men varje barn symboliserar dem med stickor, pärlor, stenar el. dyl. och utför, vad som sedan kommer). 3 stanna vid grinden och vänta, 2 gå in i en butik. 1 av de första 3 kommer springande och sällar sig till hopen o. s. v.

* * *

Nästa stadium blir att även konstatera resultatet. Addition och subtraktion övas samtidigt. I början ökas eller minskas endast med talen 1—4 (5). Ex.: »Det är mammas födelsedag. Greta vill ge henne en blombukett och går därför ut och plockar blommor. Hon finner 3 blåklockor (Barnen rita upp 3 symboler för dessa tre, mer eller mindre liknande blåklockor.) — 3 smörblommor (Barnen rita 3 figurer till och konstatera: nu har hon sex!) — 4 förgätmigejer (Barnen som förut.) — 2 prästkragar o. s. v. — Ingen anledning finns att ej gå över 10-talet. Liknande räkneexempel formulera barnen sedan lätt själva. Exempel med enbart addition eller subtraktion omväxla med sådana, innehållande båda operationerna.

Sådana additions- och subtraktionsövningar kunna nu lämpligen också göras med talbilderna på barnens förut omnämnda tavlor.

* * *

Innan addition och subtraktion övas med talen 5—10, måste *uppdelning* och *jämförelse* göras med dem. Barnet

måste ha klart för sig **att exempelvis** 7 **består av** 1 och 6 eller 2 och 5 eller 3 och 4. Här nedan ett exempel på hur därvid kan förfaras:

1. »Rita upp 10 påskägg! — — — — Rita upp 13 ägg i en rad under de föregående! — Vilken rad innehåller de flesta äggen? Hur många fler?» —

På samma sätt 8 och 14, 17 och 20, 10 och 12, 10 och 15, 10 och 18 o. s. v. —

2. »Otto har 30 tennsoldater. Han ställer upp dem i 2 led. Rita upp dem! — Hur många har du i varje led?»

En har ritat 20 och 10, en annan 18 och 12, en tredje 15 och 15 eller 14 och 16 o. s. v.

På detta sätt kan uppdelning och jämförelse övas, innan barnen äro färdiga att inlära följande serier:

a) 9 + 5 (dessutom 19 + 5, 29 + 5, 39 + 5 o. s. v.)
8 + 5 (18 + 5, 28 + 5, 38 + 5 o. s. v.)
7 + 5
6 + 5

b)	c)	d)	e)
9 + 6	9 + 7	9 + 8	9 + 9
8 + 6	8 + 7	8 + 8	8 + 9
7 + 6	7 + 7	7 + 8	7 + 9
6 + 6	6 + 7	6 + 8	6 + 9
5 + 6	5 + 7	5 + 8	5 + 9
	4 + 7	4 + 8	4 + 9
		3 + 8	3 + 9
			2 + 9

eller

9 + 5 (19 + 5, 29 + 5 o. s. v.) och	8 + 5	7 + 5 o. s.
9 + 6	8 + 6	7 + 6
9 + 7	8 + 7	7 + 7
9 + 8	8 + 8	7 + 8
9 + 9	8 + 9	7 + 9

Alla dessa »operationer» utföras i verkligheten med tillhjälp av exempelvis tärningsspel, dominobrickor o. dyl. Exempel hämtas ur barnens dagliga liv, och man laborerar med ting ur barnens egen värld.

*   *

Det gäller sedan addition och subtraktion med större tal. Härtill bilda operationer med rena tiotal en förberedelse. Vi ha exempelvis 17 + 10 (naturligtvis konkretiserat!). Barnen föreslå själva utförandet. Någon vill göra så: 17 + 3 + 7. En annan: 10 + 10 + 7. Båda sätten godkännas. Barnen välja nog snart själva det mest tidsbesparande. Och just genom att barnet självt valt det, har det de största förutsättningar att bli dess egendom. »Handgripligen» kunna samtliga hithörande övningar utföras med 100-talstavlan med täckblad, om man endast skaffar sig ännu ett täckblad men genomskinligt (t. ex. av gelatin). 55 + 28 skall utföras. Med det senare bladet täcker barnet över de övre 55 punkterna, lägger till 5, 20 och 3 och avgränsar där med det ogenomskinliga bladet. Bild 3 visar tillvägagångssättet.

Vid subtraktion börjar man med det ogenomskinliga nerifrån. Exempel: 66 — 29. 66 punkter avgränsas. Därifrån »borttagas» 29 (först de 6, så 20 och slutligen 3). Resultatet (de återstående övre) täckas med det genomskinliga bladet. — Var och en inser, hur fördelaktigt detta hjälpmedel nu visar sig vara. Man kan ju med det bedriva addition och subtraktion inom talområdet 1—100 *utan siffror*.

*   *   *

Komma vi så till *multiplikation* och *division*. Förberedelserna äro ju redan gjorda genom vissa föregående övningar.

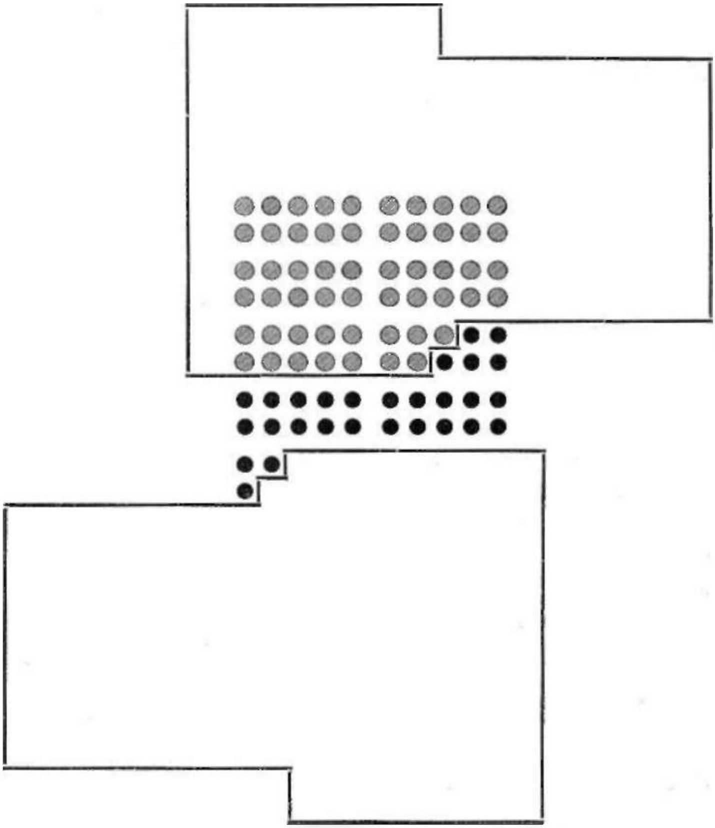


Bild 3.

T. ex. denna sorten:

Läraren: »Ställ upp dina soldater i led med 4 i varje led!» — Barnet lägger stickor eller ritar streck, 4 i varje led bakom varandra, *och säger:* »Där är 4, 8, 12, 16, 20,» o. s. v.

Läraren: »Kan ni andra göra likadant?» Alla göra efter och räkna samtidigt. De få ställa upp led så länge deras stickor räcka, även om de skulle komma långt förbi talet 40. Det är ej tillräckligt att göra detta *en* gång och sedan förelägga serien 4, 8, 12 o. s. v. till inlärande, utan stickorna böra läggas, till dess att serien går någorlunda utan räkning av mellanliggande tal. För att kontrollera detta kan man låta barnen tala om, hur många som gå i *ett* led, i *två*, i *tre*, i *fyra* o. s. v.

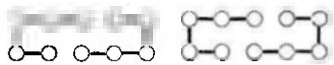
På liknande sätt böra multiplikationstabellens övriga serier framställas av barnen själva. En repetition av förut genomgångna bör göras då och då. Memorerandet blir då betydligt lättare. Det blir av en annan art, än om man endast visade ett eller ett par fall och hänvisade till dessa vid den fortsatta inlärningen. Denna behandling kräver lång tid, men — då den verkliga inlärningen *ej kan* åstadkommas på kort tid, måste ju tiden ökas. Längre fram under skoltiden blir det i stället tidsvinst, om de grundläggande momenten äro ordentligt *inarbetade.*

Vi öva senare mångfaldigande och »innehållsdivision» jämsides med varandra. Multiplikationstabellens satser äro abstraktioner av alla de konkreta fall, där en viss storhet tages ett visst antal gånger. Satsen $6 \cdot 8 = 48$ är en abstraktion av alla de konkreta fall, där enheten 8 tages sex gånger. Man uppnår abstraktionen bäst genom att behålla det konkreta fallet i bakgrunden av medvetandet. Vi vilja därför vänja barnet vid det. Vi välja våra räkneexempel fördelaktigast från hemmets hushållsområde, och en huvudfråga på detta stadium blir: Vad kosta så och så många, när en kostar så och så mycket? Omväxlande med den använda vi denna: Hur många stycken får man för så och så mycket? Exempel:

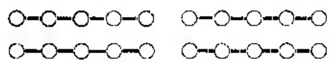
1. Far, mor och 4 barn vilja ha var sitt äpple. Varje

kostar 5 öre. Vad kosta de? — Räkna högt! — (Det är 6 personer. Behövs 6 äpplen. De kosta 6 femöringar. Det är 30 öre.) Räkna ut hur mycket 4, 5, 7, 8, 2 äpplen då skulle kosta! — Gör själv andra liknande uppgifter!

2. Tänk efter: hur många skulle man få för 15 öre? för 20 öre? Kan man visa det på 100-talstavlan? Visa! Liknande exempel göras, där det talas om frimärken, brevkort, blyertsar, gummin, skrivböcker, apelsiner o. s. v. Läraren gör ett och annat. Barnen tillverka med nöje resten, om de blott få impulser. När så behövs framletas resultatet med hjälp av 100-talstavlan eller annat åskådningsmedel. Barnen formulera snart själva sådana satser som: 10 går 4 gånger i 40; $3 \cdot 5 = 15$ o. s. v. Dessa ha då ett helt annat värde, än om man hade föresagt dem till inlärande, i hopp att meningen med dem nog skulle klarna sedan. — Ännu större klarhet uppnås, om talbildstavlan behandlas på exempelvis följande sätt: [1]



eller så:



$= 4 \cdot 5$

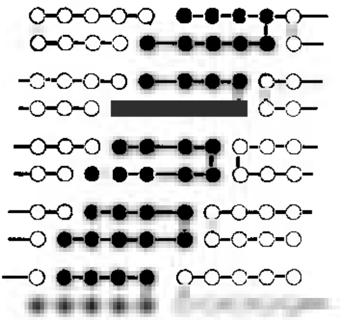
Genom denna sammanbindning bli femmorna mera iögonfallande. Varannan »femma» kan ju också färgläggas. Därigenom framträda de ännu bättre. — Senare jämföras också de olika operationerna. 3 20-öres kakor kosta lika mycket som 6 10-öres. $3 \cdot 20 = 60$; $6 \cdot 10 = 60$ o. s. v. Barnen få själva klara ut sammanhanget.

*

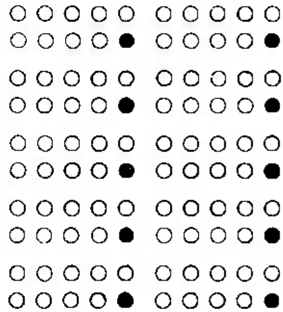
[1] Tavlorna äro ju i förhållande till sitt värde så billiga, att man ej bör snåla på dem.

På liknande sätt inläras sedan multiplikationstabellens 2:a, 4:a, 8:a, 3:a, 6:a, 9:a och 7:a i nu nämnd ordning. För var och en prepareras ett särskilt 100-talsblad, så att de ifrågavarande talen tydligt framträda. Vi vilja endast påpeka, hur man lämpligen förfar med 9-seriens blad.

Så:



eller så:



Båda formerna föranleda till att uppsöka relationer, och barnen glädja sig enligt erfarenhet åt att finna dem. »De vita till vänster bli färre och färre: 9, 7, 5, 3, 1.» Varför? »De vita till höger ökas i jämn serie: 2, 4, 6, 8.» Varför? »I mitten är det omvänt med de svarta.» Vem kan förstå varför det måste vara så? — Eller på den andra formen: »I varje 10-grupp fattas en punkt (svart).» — »Då kan man tänka 4 · 9 är nästan 40, bara tag bort de 4 svarta.» — Vi påstå, att denna metod befordrar matematisk insikt.

Det dagliga livet ger sällan anledning till enbart *delningsdivision.* Därför övas denna i sammanhang med mångfaldigande och med innehållsdivision.

Ex.: För 3 färgpennor har Karl betalat 24 öre. Jag vill ha 5. Vad kosta de? — Eller: hur många får Johan då för 40 öre?

På så sätt går man efterhand igenom hela multiplikationstabellen i förut nämnd ordning: 10, 5, 2, 4, 8, 3, 6, 9, 7. Särskild uppmärksamhet bör fästas vid det *inre sammanhanget* mellan de enskilda uppgifterna. Ex.: Om 10 ägg kosta 2 kr. Vad kosta då 5? — (Hälften så mycket.) — 7 blyertsar kosta 35 öre. Hur mycket kosta 6? (Ett fem-tal mindre.) — 9 sådana blyertsar kosta 5 öre mindre än 10 st. o. s. v. Om barnet vants vid sådant, kan det självt reda sig, om det skulle ha glömt vad $8 \cdot 8$ är. Det resonerar då $10 \cdot 8 = 80$; $8 \cdot 8 = 80 - 16 = 64$. Vi använda 100-talstavlan allt mindre. Men så snart något barn visar sig osäkert i operationerna, får det friska upp associationerna genom att återgå till sin 100-talstavla och medelst den klara sina rumsföreställningar i det ifrågavarande fallet.

* * *

Uppdelning i faktorer är ju icke obetingat nödvändig på detta stadium men kan utgöra en nyttig komplettering av hittills gjorda övningar. Det torde vara synnerligen värdefullt att åtminstone fästa barnens uppmärksamhet vid det förhållandet, att ex. både $9 \cdot 4$ och $4 \cdot 9$ är 36. Detta sker lättast genom att på svarta tavlan rita följande:

och

(4 niorader) (9 fyrarader)

* * *

Efter att nu ha behandlat samtliga operationer kunna vi göra följande sammanfattning.

1. Principiellt gäller, att varje räkneresultat skall vinnas genom *överblick* men prövas genom räknande.

2. Varje övning framskrider i 4 stadier, så att den först utföres på *verkliga ting*, sedan på *symboler* för *ting*, så på *symboler för tal* (talbilder) och slutligen så, att talsymbolerna blott *föreställas*. Övergångarna ske naturligtvis småningom.

3. Samtliga uppgifter skola ha *konkret* innehåll. Det räknas alltså alltid med ören, kronor, äpplen, frimärken el. dyl., även om benämningen snart nog ibland avsiktligt utelämnas för att småningom bana väg för räkningens allmängiltighet. Barnen måste dock alltid vara i stånd att till någon uppgift, som givits dem i rena tal, genast föreställa sig ett passande sakläge.

4. *Barnen få själva bilda uppgifter.*

I full överensstämmelse med det hittills sagda fortsättes räknearbetet med större tal, under betonande av tiotalen och hundratalen som enheter. Särskilt framhållas följande huvudmoment:

a) Addition och subtraktion med rena tiotal:
(17 tiotal + 2 tiotal; 67 tiotal — 4 tiotal;
25 tiotal + 14 tiotal; 48 tiotal — 17 tiotal).

b) Addition och subtraktion med tiotal och ental:
(27 tiotal + 9 ental; 25 tiotal — 3 ental;
38 tiotal + 65 ental; 44 tiotal — 78 ental).

c) Addition och subtraktion med rena 100-tal:
(4 hundratal + 5 h.; 9 h. — 2 h.).

d) Addition och subtraktion med hundratal och tiotal:
(7 h. + 3 t.; 8 h. — 5 t.).

e) Hundratal, tiotal och ental:

540 + 26;	450 — 38;
640 + 220;	850 — 530;

630 + 13 tiotal 666 — 34 tiotal
451 + 213 564 — 313
687 + 265 924 — 567

f) Multiplikation och division: 9 · 50; 50 i 400.

g) Multiplikation av tvåsiffriga tal med ensiffr. och motsvarande division:
72 · 4 66 i 396

h) Multipl. av tvåsiffr. tal med tvåsiffr. och motsvarande division:
27 · 36 52 i 780

Att gå längre än till tvåsiffriga faktorer är ändamålslöst. Ingen vuxen räknar i praktiken 587 · 36 i huvudet. Och det är huvudräkning, som vi hittills uteslutande fäst oss vid. — Jämte den symboliska framställningen övas även på detta stadium mer och mer det blott föreställande räknandet, om vi så få kalla det, och tränger så småningom undan användningen av symboler. Det vill med andra ord säga, att vi småningom tillåta abstraktion, men endast den självförvärvade, icke den upptagna, formulerade.

Den matematiska formen.

Under behandlingen av föregående avdelning gör sig behovet av siffran som symbol för talet allt starkare kännbart. — Det har säkert ofta hänt mången lärare, att ett barn sagt: jag kan räkna exemplet, men jag vet inte, hur jag skall skriva upp det. Särskilt ofta händer det vid sådana uppgifter som följande: Du sparar varje vecka 5 öre. Hur många veckor har du sparat, då du har 35 öre? — Hur många 10-öres-blyertsar kan du köpa för 8 5-öringar? — Hur mycket är hälften av 20? —

Hur stor är skillnaden mellan 20 och 41? — Hur många 5-öringar skall jag ha för en 2-krona? o. s. v.

Vid alla dessa uppgifter voro både talföreställningar och operationsföreställningar klara. Barnen kunde också tala om, hur de kommit till det rätta resultatet. Men den korta matematiska formen kunde de ej åstadkomma, eller också voro de ofta mycket tveksamma angående den. Dock var det kanske de bättre lärjungarna, sysselsatta med att »räkna i förväg». — Vi anse oss därför ha skäl att påstå, att den matematiska formen utgör *en särskild svårighet* för barnen. Mången har iakttagit, hur barn förväxla de matematiska formerna, hur barn i fortsättningsskolor fort glömt mycket enkla matematiska former o. s. v. Och detta trots att man i skolan redan från första början givit, övat och fordrat dessa former. Man menar dock, att vad som fattas är tillräcklig övning, och så söker man att ytterligare inpränta den matematiska formen genom mekanisk övning (Obs! En sådan siffersamling som Ehlins »Räknetabell» kan göra mycken skada, om den användes för tidigt!) — »Av det faktum, att barn kunna behärska och lösa en räkneuppgift utan att dock vara i stånd att åstadkomma den matematiska formen, draga vi för vår metodik följande tre slutsatser: 1) *den matematiska formen får icke synas från början* (helst icke förr än behovet att uttrycka sig kortare framträder); 2) *då den så bjudes, måste den införas långsamt* (samt under påpekande av, att den endast är ett *medel* till att spara tid och åstadkomma korthet men alls icke är självändamål). Man bör därför icke ensidigt hålla på en form utan uppmuntra till omväxling. — 3) *Den matematiska formen måste anses och behandlas som en särskild deluppgift i varje räkneproblem.*» (Se vidare sid. 65 ff.)

Den mekaniska färdigheten.

Satser sådana som $7 + 6 = 13$; $7 \cdot 6 = 42$ måste naturligtvis inpräglas och övas, för att mekanisk färdighet skall uppnås. Men innan man börjar arbeta på det målet, måste följande fordringar vara uppfyllda:

1) talserien måste vara tillägnad; 2) uppfattningen om talsystemet måste ha framskridit så långt, att barnet exempelvis uppfattar 27 som 20 och 7 eller 30 som 3 tiotal; 3) lärjungen måste vara hemmastadd på sådant som omvändning och omställning, t. ex. $7 + 2 = 9$; $2 + 7 = 9$; $6 \cdot 3 = 18$; $3 \cdot 6 = 18$ samt $9 - 2 = 7$ och 3 i 18 går 6 gånger.

Under dessa förutsättningar kan man skrida till inprägling och övning av följande grupper:

$2 + 2 = 4$	$3 + 3 = 6$	$4 + 4 = 8$	$5 + 5 = 10$
$2 + 3 = 5$	$3 + 4 = 7$	$4 + 5 = 9$	
$2 + 4 = 6$	$3 + 5 = 8$	$4 + 6 = 10$	
$2 + 5 = 7$	$3 + 6 = 9$		
$2 + 6 = 8$	$3 + 7 = 10$		
$2 + 7 = 9$		16 additioner;	
$2 + 8 = 10$			

$9 + 2 = 11$	$8 + 3 = 11$	$7 + 4 = 11$	$6 + 5 = 11$
$9 + 3 = 12$	$8 + 4 = 12$	$7 + 5 = 12$	$6 + 6 = 12$
$9 + 4 = 13$	$8 + 5 = 13$	$7 + 6 = 13$	
$9 + 5 = 14$	$8 + 6 = 14$	$7 + 7 = 14$	
$9 + 6 = 15$	$8 + 7 = 15$		
$9 + 7 = 16$	$8 + 8 = 16$		
$9 + 8 = 17$		20 additioner.	
$9 + 9 = 18$			

Härtill kommer slutligen den tredje gruppen, varvid bör beaktas, att fördubbling av ett tal ingår redan i additionsgrupperna:

3 · 3 = 9	4 · 4 = 16	5 · 5 = 25	6 · 6 = 36
3 · 4 = 12	4 · 5 = 20	5 · 6 = 30	6 · 7 = 42
3 · 5 = 15	4 · 6 = 24	5 · 7 = 35	6 · 8 = 48
3 · 6 = 18	4 · 7 = 28	5 · 8 = 40	6 · 9 = 54
3 · 7 = 21	4 · 8 = 32	5 · 9 = 45	
3 · 8 = 24	4 · 9 = 36		
3 · 9 = 27			

7 · 7 = 49	8 · 8 = 64	9 · 9 = 81
7 · 8 = 56	8 · 9 = 72	
7 · 9 = 63		28 multiplikationer.

Subtraktion, delnings- och innehållsdivision, uppdelning i termer och faktorer innebära — som förut antytts — intet nytt utöver dessa talrelationer.

Dessa 64 satser äro alltså hela den associativa grundval, på vilken icke blott skolans utan även det praktiska livets räknande bygger. De böra alltså inpräglas i minnet. Som enda medel härtill anses nu *övning* och *upprepning* (repetition): upprepning för att »slå fast» satserna i minnet, övning i att åstadkomma hastig »beredskap». Detta menar man sig nå genom inprägling av ordserierna (sju gånger sju är fyrtionio, sju gånger åtta är femtiosex o. s. v.). Ofta »övas» multiplikationstabellen genom sådant dagligt upprabblande. Det skall icke förnekas, att det mekaniska ordminnet har stor betydelse, då det gäller att tillägna sig färdighet i räkning. Vi opponera oss dock mot att orden inläras endast såsom tomma ord. *Det mekaniska ordminnet är fullständigt omdömeslöst.* Ett barn, som övas på det sättet, lär med samma ro $7 \cdot 8 = 54$ som $6 \cdot 9 = 56$. Det är svårt att få bort en falsk association, som blivit till en viss grad befäst. Man löper ej samma risk för falska associationer, då barnet lär ett poem eller ett ordspråk utantill, ty då ligger meningen klar bakom orden. Omdömeslösheten vid matematiska ordassociationer har sin grund i samma psykiska fenomen, som så ofta konstaterats, nämligen att likartade processer i själen störa varandra desto mera, ju homogenare de äro, eller med andra ord: satser, som likna varandra, ha böjelse att smälta tillsammans (blandas ihop).

Vidare är ordfärdigheten alldeles *ofruktbar*. Även efterblivna barn kunna lära sig att rabbla upp multiplikationstabellen, men *använda den kan endast den, som har föreställningarna och begreppen, vilka höra till orden och som orden symbolisera.* Menar man, att ordkunskapen kan bära frukt senare, så genmäla vi, att detta innebär stor energiförlust: att först skaffa barnet ett kärl, som sedan eventuellt skall fyllas.

Ordinpräglingen blir icke en börda utan en hjälp, om den inträder först när barnen trängt så långt in i kunskapen om talens relationer, *att en förmåga av känslomässig uppskattning står till deras förfogande.* Denna känsla säger barnet, att resultatet av t. ex. operationen $9 + 8$ måste ligga inom området 10—20, men att resultatet av operationen $9 \cdot 8$ måste vara ett tämligen stort tal, bortemot 80; eller att $8 \cdot 7$ är mycket mer än $6 \cdot 6$, då däremot $5 \cdot 8$ icke mycket skiljer sig från $7 \cdot 6$ o. s. v. Då sådan känslomässig ungefärlig uppskattning kan presteras, då må man utan fara skrida till utanläxorna. *Inpräglingen av orden är då en hjälp för en process, som redan av sig själv börjat.* — Ordinpräglingen måste ibland rent av förhindras för att gynna sakföreställningen. Barnen skola icke tänka i ord eller i siffror, om de exempelvis skola komplettera 80 till hundra, utan de skola därvid se för sig ting eller symboler eller symboliska rumsföreställningar, om än aldrig så svaga. Alla räknetekniska övningar måste ställas på åskådlighetens grundval. Dessutom måste man sträva efter att gestalta dessa övningar så, att barnet genom dem kommer till allt klarare talföreställningar och talrelationer. Detta mål befrämjas genom praktiska arbetsmetoder, vilka vi sålunda böra vänja barnen vid. Vi tillåta oss påpeka några för att klargöra, vad vi här mena.

Vid addition och subtraktion bör barnet få upp blicken för fördelen att gå till närmaste tiotal eller hundratal.

Ex.: $73 + 29$ så: $73 + 7 = 80, + 22 = 102$;
$88 + 24 = 100 + 12 = 112$;
$272 + 159 = (272 + 28 =) 300 + 131 = 431$;
$81 - 29 = (81 - 21 - 8 =) 60 - 8 = 52$;
$237 - 41 = 200 - 4 = 196$.

Vid multiplikation räknar man praktiskt på följande sätt:

$9 \cdot 7 =$ nästan 70, endast 7 mindre, nämligen 63.
$9 \cdot 4 =$ » 40, » 4 » , » 36.
$9 \cdot 13 =$ » 130, » 13 » , » 117.
$9 \cdot 88 =$ » 880, » 88 » , » 792.
$18 \cdot 18 = 20 \cdot 18 - 36 = 324$;
$18 \cdot 14 = 20 \cdot 14 - 28 = 252$;
$7 \cdot 28 = 140 + 56 = 196$ o. s. v.
$8 \cdot 19 =$ nästan 160, endast 8 mindre, nämligen 152.
$7 \cdot 49 =$ » 350, » 7 » , » 343.

På detta sätt behärskas även större tal lätt:

$6 \cdot 249 = 1500 - 6$
$7 \cdot 497 = 3500 - 21$ o. s. v.

Ännu intressantare äro följande exempel:

5 · 18 =	hälften	av	10 · 18,	nämligen	10 · 9
15 · 14 =	»	»	30 · 14,	»	30 · 7
50 · 46 =	»	»	100 · 46,	»	2300

* * *

Förut omnämnda talbildstavlor kunna med fördel användas till omväxling vid detta slags övningar. Man visar t. ex. talbilden 47 och säger: Hur mycket fattas i 100? Eller i 80? Eller i 66? o. s. v. Eller man ger i uppgift att alltjämt minska de tal, man visar, med något visst tal. Eller: fördubbla de tal, som jag nu visar! På samma sätt kan ju även division övas, men uppgifterna bli härvidlag onödigt lätta.

Bruket av siffror.

Som förut påpekats är siffran en symbol för ordet, icke för begreppet, således en symbol av 2:a ordningen. Om man inser och medger detta, måste man också medge, att *barn icke lämpligen kunna laborera med siffror, så länge de föreställa sig talstorheterna uteslutande konkret.* Först då ordet har blivit huvudsaklig »vikarie» för talbegreppet, då abstraktionen i tal- och operationsuppfattning i någon mån framskridit, först då kan en grafisk symbolisering av den språkliga abstraktionen börja. Siffran måste alltså bannlysas från den första räkneundervisningen. Det kan ju förefalla mången förvånande, att man vill sätta i gång räkning utan siffror, men av det föregående framgår, att detta icke är omöjligt. Flera olika sätt och hjälpmedel ha ju bjudits i det föregående.

Enligt vår åsikt bör man undvika siffran icke blott de första veckorna eller månaderna, icke någon viss tidslängd, utan till dess att barnet vid sin räkning känner behov av att till minnes notera vissa uppgifter eller delresultat, alltså till dess barnet blivit medvetet om, att det är ändamålsenligt att använda siffran för att spara både sig själv och sin tid. Siffran bör alltså enligt vår mening en längre tid endast ha karaktären av en matematisk stenografi; först senare får den betyda en ställföreträdare för talbegreppet. Detta senare behöver ej bli fallet, förrän talen, med vilka barnet arbetar, äro så stora, att det vållar svårigheter att föreställa sig dem. Men enligt vår erfarenhet möta inga svårigheter i detta avseende under behandlingen av talserien till 100. —

Muntligt och skriftligt räknande. Muntligt räknande måste alltså stå i förgrunden på lågstadiet. När man så småningom börjar med skriftlig räkning, bör man akta sig för operationstecknen. Ett vanligt skrivsätt är detta: /// + // = /////. Men här ha icke skrivits 5 streck utan 10. Eller: ///// — // = ///. I stället för att här taga 2 streck från de 5 lägger man här till 3 lodräta och 2 vågräta (likhetstecknet)! — Det är icke vid operationernas *form*, som man på lågstadiet bör lägga tyngdpunkten, utan på deras *innehåll*. Det är nödvändigt att utföra operationerna i verkligheten, icke att antyda dem genom symboliska tecken. Symbolen får icke komma, förrän barnet behärskar saken. Mången begår det stora misstaget att tro, att ett barn, som behärskar formen, också behärskar saken, och förvånas sedan över att kunskapen glömmes så lätt! Man måste betänka, att skriftlig räkning av en uppgift innebär ett helt annat lösningssätt. Ett exempel: 37 + 16 + 48 skulle man kunna räkna i huvudet så 37 + 3 = 40, + 13 = 53, + 7 = 60, + + 41 = 101. Eller så: 37 + 64 = 101 emedan 37 + 63 = = 100 Men vid skriftlig räkning sätter man ju termerna under varandra och lägger tillsamman först entalen och så tiotalen. Men detta senare sätt *förutsätter, att barnen blivit till en tämligen hög grad införda i systemet;* vidare, att barnen kommit till klarhet angående siffrans positionsvärde, och slutligen, att siffran blivit den huvudsakligaste ställföreträdaren för talbegreppen. Men eftersom dessa förutsättningar saknas, där utvecklingen ej nått ett visst stadium, och eftersom denna utveckling icke får påskyndas, *så kan skriftlig räkning i egentlig mening icke lämpligen uppträda,* förrän barnet nått en viss mognad i avseende på taluppfattning, operationsuppfattning och operationsteknik. —

Huvudregel för senare skolåldern: Räkna ej ett problem skriftligt, om det kan räknas i huvudet!

Bråkräkning.

I en föregående avdelning har visats, hur barnen kunna bringas till förståelse av bråktalet. Nu komma operationer med denna talform. Övningarna böra göras i följande ordning:

1. *Förvandling* a) av hela tal till bråk, b) av bråk till hela tal, c) av bråk till bråk.

2. *Addition och subtraktion* av bråk utan förvandling; med förvandling b vid addition, a vid subtraktion, c vid båda (förvandling se mom. 1!).

3. *Multiplikation:* ena faktorn är ett bråk; båda faktorerna äro bråk; därtill kommer förvandling b och c.

4. *Division:* a) dividend och divisor äro hela tal, endast kvoten är bråk, t. ex. $5 : 8 = \frac{5}{8}$,

b) dividenden är ett bråk, t. ex. $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$,

c) divisorn är ett bråk, t. ex. $7 : \frac{2}{3} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$,

d) båda äro bråk, t. ex. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

Denna översikt får icke tagas som en kursplan, utan den är avsedd att tjäna som ledning för arbetsmetoden. Övningarna böra göras i tre särskilda avdelningar.

På det första *grundläggande stadiet* övas operationerna (enl. översikten) med sådana bråk, vilkas praktiska betydelse är sådan, att de redan trätt fram i barnets intressesfär. Vilka bråk är det, som ha en sådan betydelse? Man kan snart själv förvissa sig om, att det endast är dessa tre: *halva*, *fjärdedelar* och *tiondelar*.

Sedan barnen nått en viss säkerhet i räkning med dessa bråk, vidgas arbetsområdet med några mindre vanliga men dock bekanta bråk; till halva och fjärdedelar fogas *åttondelar*, till tiondelar *femtedelar* och *tjugondelar*, och så ha vi gruppen *tredjedelar*, *sjättedelar* och *tolftedelar*. Översiktens övningar genomgås nu även med dessa bråk, naturligtvis fortfarande på åskådlighetens grundval och så, att barnen själva få göra exempel i största möjliga utsträckning. Man bör handskas försiktigt med s. k. fantasiuppgifter och i det längsta hålla sig till verkligheten. Det verkar kanske löjligt och verklighetsfrämmande att tala om $\frac{1}{12}$ dussin, men å andra sidan kan det vara av viss betydelse att få klart för sig att $\frac{1}{3}$ kg. visserligen är omöjligt att exakt uppväga med våra vikter, men att den vikten dock är tänkbar. — På detta stadium bör barnet få klart för sig, att t. ex. $12 \cdot \frac{2}{5}$ är detsamma som $\frac{2}{5}$ av 12. I sammanhang med multiplikation övas även innehållsdivision. Multiplikation av bråk med bråk uppskjutes dock till nästa övningsstadium. — De fall, där ett bråk divideras med ett helt tal, torde på detta stadium ej behöva bli så talrika. Följande komma i betraktande: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ t. o. m. $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{5}$ t. o. m. $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{10}$ t. o. m. $\frac{9}{10} : 2$; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} : 3$; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5} : 4$; $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} : 5$; $\frac{1}{3} : 6$; $\frac{1}{2} : 10$. Därvid bilda sådana som $\frac{2}{6} : 2$; $\frac{4}{5} : 2$; $\frac{9}{10} : 3$ o. s. v., en grupp för sig, eftersom de egentligen icke erbjuda några svårigheter utöver dem, som förekomma i hela tals division. Men då barnen på detta stadium även få klart för sig hemligheten i förkortning och förlängning, så klaras även en sådan uppgift som $\frac{1}{5}:2$ med lätthet. Barnet resonerar (om det fått tillräcklig åskådlig grundval att bygga på) så: $\frac{1}{5}$ är lika mycket som $\frac{2}{10}$, $\frac{2}{10}:2=\frac{1}{10}$; på samma sätt $\frac{1}{4}:3=\frac{3}{12}:3=$ $=\frac{1}{12}$ o. s. v. —

Det *tredje* stadiet kalla vi *abstraktionsstadiet;* men detta icke i lektionsmetodikens vanliga mening. Vi mena därmed endast, att de båda föregående stadierna böra vara i huvudsak fria från abstraktion, de böra röra sig med »brutna» ting och »brutna» mått för att bereda väg för de nu kommande abstraktionerna. Men det stora flertalet barn — icke blott i folkskolan utan även i högre läroanstalter — äro enl. psykologiens resultat icke tillgängliga för abstraktioner förrän under 13. eller 14. året, åtminstone ej i samma grad, som man i allmänhet tror. Somliga barn komma självfallet ej att överskrida det grundläggande stadiet i bråkräkning, andra göra det senare än övriga. De medelmåttiga begåvningarna finna i allmänhet redan på det andra stadiet så många abstraktioner, att de därav ha tillräcklig förberedelse för de uppgifter, som kunna möta dem ute i livet, ja, man kan säga, att de med dem ha fått den matematiska bildning, som motsvarar deras ålder och intelligens. Abstraktionsstadiet bör icke beträdas av andra än dem, som verkligen passerat de båda övriga.

I abstraktionsstadiet arbeta vi med *alla bråk.* Det är klart, att trettiondelar, fyrtiondelar, femtondelar, tjugofemtedelar, sjundedelar och niondelar böra förekomma oftare än exempelvis tjugotredjedelar. Nu jämföra vi också alla olika bråk med varandra. Bråktalets värde minskas allteftersom nämnaren ökas (täljaren oförändrad). Detta faktum bör nu klart inses, även om regeln ej uttalas och inläres. Vid bråks förkortning och förlängning samt vid liknämniggörande gäller det även att akta sig för regler.

Även på detta stadium börjas med addition och subtraktion. Barnen göra uppgifter själva snart nog och få röra sig med vilket slags nämnare som helst. Men icke heller här lär man dem, »hur man adderar bråk», d. v. s. ingen regel. Först efteråt, då själva saken längesedan är klar, kan läraren exempelvis be dem redogöra för tillvägagångssättet vid sammanläggning av bråk. Säkerligen kunna många klargöra saken så: Man lägger helt enkelt ihop dem, exempelvis så: $\frac{1}{5}$ och $\frac{2}{5}$ är $\frac{3}{5}$, och om bråken ej passa att lägga tillsamman, så gör man nämnarna lika. Det är självklart för dem då. Därhän vilja vi komma med vår matematiska uppfostran.

Det hela gäller ju egentligen en inre befrielse från känslan av blott individuell giltighet av sådan kunskap, som barnen redan ha. Barnet låter exempelvis hejda sig inför uppgiften $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}$. Det är då icke regeln: Bråk multipliceras med bråk genom att .... o. s. v. som bjudes, utan man bör erinra om ett lättare fall, exempelvis $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$. Där gäller det att taga fjärdedelen av $\frac{1}{3}$. Detta användes på det nya fallet: av $\frac{2}{7}$ skall fjärdedelen sökas och detta sedan återigen tagas 3 gånger. Detta tar längre tid än den mekaniska räkningen, men det skadar icke. Det är *självverksamhet*. Alla kunna glömma, men den, som fått matematisk bildning, kan hjälpa sig själv till kunskapen igen. — Om det t. ex. gäller uppgiften $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$, så kan ett barn, som är vant vid att föreställa sig storheterna åskådligt i rummets form, bilda följande tankeserie: $\frac{3}{4} \cdot 2$, det är $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{4}$ till; $\frac{3}{4} \cdot 1$ är $\frac{3}{4}$; men $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ måste då vara mindre än $\frac{3}{4}$. Jag kan således säga $\frac{3}{4}$ av $\frac{3}{4}$. Jag tar en fjärdedel av $\frac{3}{4}$, d. v. s. jag måste först dela varje fjärdedel i fyra lika delar; det ger $\frac{3}{16}$; tar jag 3 sådana, har jag $\frac{9}{16}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ är således $\frac{9}{16}$; jag hade alltså kunnat räkna 3 · 3 och 4 · 4, d. v. s. multiplicera de båda nämnarna och så de båda täljarna. — Ett barn, som icke kan gå denna tankeväg självständigt, bör förskonas från sådana uppgifter. Det är långt ifrån moget för detta stadium.

Division med bråk fordrar ännu högre grad av abstraktion. Jämförelsevis lätt går det väl för sig, om man håller sig till innehållsdivisionens form med liknämniga bråk ($\frac{2}{3}$ i $\frac{7}{8}$ = $\frac{16}{24}$ i $\frac{21}{24}$ = 16 i 21 = $1\frac{5}{16}$). Men vid ren division blir det värre, ty att nämnaren kan utelämnas är ej här så självklart. —

* * *

Exempel på undervisning i bråkräkning:

1. Som vanligt tagas 5 à 10 min. av timmen till taluppfattnings- och operationsövningar med talbildstavlorna: a) Hur många ser du? b) Hur många fattas i 100? c) Lägg till 15! d) Drag ifrån 18! e) Fördubbla! f) Multiplicera med 3 (4, 5 o. s. v.)! g) Multiplicera med 10 (eller 100)! h) Halvera! i) Tag tredjedelen därav! (eller 4:e, 5:e, 6:e, 8:e, 10:e, 12:e-delen, 7:e, 9:e, 15:e-delen o. s. v.)

Efter behov inledes med *några* av ovan antydda övningar. Som synes är stoffet så gott som outtömligt, om man använder talbildstavlorna.

2. Övningen i) här ovan är ju bråkräkning om man i stället säger: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ o. s. v.

Senare kan man säga: tag $\frac{2}{3}$ av det antal du ser! Eller $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{10}$, [illegible] o. s. v. Att öva sig taga t. ex. $\frac{7}{21}$ av något skulle vara opraktiskt på detta stadium!

3. Förvandla $\frac{1}{2}$ till andra bråk! Likaså $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ o. s. v.

4 »I dag ska vi gå till handlanden och bilda uppgifter med de bråk, vi lärt känna. Vi gör några lod-

räta kolumner. Överskrifter i dem: 1. Varor. 2. Pris (pr kg. eller liter). 3. Mängd (inköpt). 4. Pris (för den). 5. Mängd (för en person i familjen). 6. Kostnad (för en person). 7. Mängd (för 1 dag). 8. Kostnad (för 1 dag).

När kolumn för varor (de vanligaste i hushållet använda varorna) och priserna på dem äro uppskrivna, kommer bråkräkningen. En pojke säger: »Vi köpa alltid $1\frac{1}{2}$ kg. socker, vi äro 6 därhemma.» Priset på $1\frac{1}{2}$ kg. och mängden, som kommer på en person, tarvar då bråkräkning, multiplikation och division, mängden och kostnaden för 1 dag likaså.

En flicka säger: »Mor köper alltid $\frac{1}{4}$ kg. kaffe. Vi äro 3 därhemma. Då blir det på var och en $\frac{1}{12}$ kg., om vi delade det jämnt på var och en. 1 kg. sådant kaffe kostar 3 kr. $\frac{1}{4}$ kg. kostar då $\frac{3}{4}$ kr.; det är 75 öre. För en person blir det 25 öre ($\frac{1}{3}$ av 75 öre). På var och en av veckans 7 dagar kommer då $\frac{1}{4}$ kg.: 7, d. v. s. $\frac{1}{28}$ kg. och kostnaden för det skulle bli [illegible] = [illegible] = [illegible] $= 10\frac{5}{7}$ öre o. s. v.»

* * *

Hur skall det gå med den rent mekaniska färdigheten, om barnet ej får öva sig mekaniskt. Vi fördöma ingalunda mekaniseringsövningar, men vi varna för att låta dem börja för tidigt och för att tro för mycket på deras verkan. Den riktiga förståelsen av de matematiska företeelserna ger som biprodukt den rätta mekaniseringen. Ty — all mänsklig verksamhet har ju en inneboende tendens att mekaniseras. Och för tidig mekanisering har till följd just de brister i kunskapshänseende och färdigheter, som man så mycket klagar över och vill avhjälpa. —

* * *

Decimalbråk böra som en speciell form av bråk behandlas efter de vanliga bråken. Om man nämligen vill att barnen skola uppfatta dem som bråk och icke endast som ett speciellt skrivsätt, t. ex. 3,50 kr., kortare skrivsätt för 3 kr. 50 öre o. s. v. Även dessa bråk behandlas i tre *svårighetsstadier*. Liksom vi förut påpekat vid framställningen av undervisningens stadier, så utgör vart och ett av dessa stadier i viss mån ett avslutat helt. Ett barn, som endast förmått att arbeta sig igenom de förberedande stadierna i vanliga bråk och decimalbråk, lider icke av några väsentliga luckor i sin utbildning för de fordringar, som det dagliga livet kan komma att ställa på just honom. De som ej äro mäktiga de högre stadiernas abstraktioner kunna ej ha någon som helst nytta eller glädje av att »kunna dem» i ord, utan få stanna, medan de övriga föras vidare. Utan att någondera parten blir lidande, tillgodoses alltså båda genom dessa svårighetsstadier. Den tekniska förutsättningen härvidlag är dock att barnen själva bilda problem.

Den metodiska behandlingen i övrigt av decimalbråk erbjuder inga större nyheter, utöver vad som framgått i det föregående. Andan är densamma. —

* * *

Ordningsföljden mellan de undervisningsmoment, som här omtalats.

1. Talserien, taluppfattning och talframställning på ting och symboler medelst räknande, senare rytmiskt räknande.

2. Operationernas mening genom verkligt utförande och utan avseende på resultatet eller på den matematiska formen.

3. Addition och subtraktion med ting och symboler

inom den talserie. som står till förfogande (2:a addenden och subtrahenden hämtas ur området 1—4).

4. Taluppfattning och talframställning medelst överblickande på ting och grafiska symboler (talbilder).

5. Införande i talsystemet genom betonande av 10-talet som enhet.

6. Addition och subtraktion med talen 1—10 som 2:a addend och subtrahend. — Övningar med uppdelning.

7. Multiplikation i anslutning till rytmiskt räknande. Multiplikationstabellen (mångfaldigande och innehållsberäkning).

8. Siffran och den matematiska formen.

9. Självständig bildning av uppgifter.

10. Talsystemet utvidgas (100-talet).

11. Addition och subtraktion med tvåsiffriga tal.

12. Multiplikationstabellen: mångfaldigande, innehållsberäkning, delning, uppdelning i faktorer.

13. Mekanisering av den matematiska formen, dock med betonande av rumsföreställningen.

14. Uppskattning (uppfattning av antal »på känn» och av operationsverkningarna).

15. Självständigt klargörande av det matematiska sakläget.

16. Talsystemet (ännu högre enheter). Bråkbegreppet (förvandling mellan hela tal och bråk).

17. Samtliga operationer med större tal.

18. Skriftlig räkning i allmänhet.

19. Självständig problembearbetning.

20. Uppfattning och framställning av bråktal. Jämförelse mellan bråken sinsemellan.

21. Operationer med bråk (2:a stadiet).

22. Decimalbråk.

23. Procenträkning.

24. Allm. bråk och decimalbråk (abstraktionsstadiet).

25. Självständig problembildning,

26. Tillämpningsräkning. Stoff hämtas från hemmets hushållsområde och det praktiska livet i övrigt, geografien, biologien, fysiken och kemien. Ändamål: att barnen skola komma till en uppfattning om vad som är hälsosamt, ekonomiskt, ändamålsenligt; eller nyttan av att göra upp en hushållsplan.

* * *

Att dessa moment ej i verkligheten kunna uppträda så strängt åtskilda, som de göra i en sådan uppräkning som ovan, är naturligt. Här avses endast att visa den huvudsakliga ordningsföljden mellan deras första uppträdande i undervisningen. Varandra närliggande moment torde självklart blanda sig med varandra i undervisningen. Sådant som taluppfattning och talframställning (n:r 4) medelst talbilder bör flitigt övas under alla åren. Några minuter i början av en timme då och då är mycket lämpligt att ägna åt detta, på det lägre stadiet varje timme, på det högre mera sällan. För övrigt kunna oftast de återstående övningarna anslutas till dessa övningar med talbildstavlorna, vilket väl tydligt har framgått av den föregående framställningen (ex. sid. 55 och 61).

Räkning efter mönster.

Om läraren vid ett nytt moment i räkneundervisningen påpekar, att »så räknas sådana tal» eller »så går man tillväga, när det gäller det räknesättet» eller dyl., så ligger häri en underförstådd uppfordran till barnet att fästa uppmärksamheten vid *sättet* för uträkningen. Följden blir helt naturligt, att sakförhållandet, orsakssammanhanget, ej kommer till klarhet. En sådan räkning efter mönster understödjer mekaniseringen av räknandet.

Men detta mekaniserande får under inga förhållanden inträda, förrän *sakförhållandet så att säga passerat medvetandet*, d. v. s. vunnit full förståelse. Icke främjas insikten i räkning genom denna mönsterräkning! Det blir däremot fallet, om olika tillvägagångssätt icke blott tolereras utan rent av uppmuntras. Och — barnen böra få tillfälle att själva tänka sig fram till ett lämpligt lösningssätt helst *utan* lärarens vägledande frågor. En orsak till dåligt undervisningsresultat är just, att läraren gör det för *lätt* för barnen. Endast genom att övervinna svårigheter lär man sig något. Av räknefelen, som barnen begå, är det, som de skola lära sig en hel del.

Men då måste de först själva komma till klarhet om, att ett fel är begånget. Och det göra de endast genom att se följden av felet. (Härom mera längre fram under rubriken »Ungefärlig uppskattning och prövning».)

Här nedan några exempel för att ytterligare klargöra, hur man kan tänka sig olika lösningssätt, ägnade att befordra den matematiska insikten. »Mönster» framför ett lösningssätt betyder, att detta oftast är det, som brukar bjudas barnen som det »vanliga».

1. I ett stort hus bo 102 personer. En höst flytta 5 personer ut och 8 in. Hur många bo där sedan? — Mönster: $102 - 5 = 97$; $97 + 8 = 105$. Men om ett barn tänker sig saken så, att de inflyttade voro 3 mer än de utflyttade, och därför lägger 3 till 102, så vittnar ju detta om självverksamhet.

2. $15 \cdot 43 = x$.
Mönster: $15 \cdot 43 = 10 \cdot 43 + 5 \cdot 43 = 430 + 215 = 645$.
Annat sätt: $15 \cdot 43 = 15 \cdot 40 + 15 \cdot 3 = 600 + 45 = 645$.

3. En husfader jämför sina utgifter och inkomster under ett kvartal. Inkomster: 250 kr., 240 kr. och 300 kr. Utgifterna: 240, 200 och 250 kr. Behållning?

Mönster: $250 + 240 + 300 = 790$ kr.
$240 + 200 + 250 = 690$ kr.
$790 - 690 = 100$ kr.

Annat sätt: Första månaden sparar han 10, andra 40 och tredje 50 kr. Tillsammans: 100 kr.

4. $380 - 250 = x$.

Mönster: $380 - 200 = 180$; $180 - 50 = 130$.

Annat sätt: $300 - 200 = 100$ och $80 - 50 = 30$.

Eller: Jag tar först bort 80 från 380, sedan 50 från resten, så får jag 250. Då har jag tagit bort 130.

Eller: Jag utgår från 250. Lägger till vad som behövs för att få 380. Det är 130. —

Icke ens vid den skriftliga räkningen är det nödvändigt med mönster:

$$\text{Ex. } \begin{array}{r} 466 \\ 878 \\ +\ 597 \\ \hline \mathbf{1941} \end{array}$$

Antag, att något barn vill börja additionen med hundratalssiffrorna! *Det är icke fel!* Men resultatet får då följande utseende:

$$\begin{array}{r} \mathbf{466} \\ 878 \\ +\ 597 \\ \hline 1700 \\ \mathbf{220} \\ +\ 21 \\ \hline 1941 \end{array}$$

Visserligen har det sina fördelar att räkna på detta sista sättet (minnessiffra behöves ej, och varje rad kan lättare kontrollräknas), men de flesta barnen förstå nog. att det första sättet är mera praktiskt, därför att det i längden sparar tid. Därför använda vi det. Ej för att det är det enda rätta sättet. —

$$\text{Ex.}\quad \begin{array}{r} 1000 \\ -\ 437 \\ \hline 563 \end{array}$$

Barnens matematiska insikt minskas ej, om de få upp blicken för, att denna matematiska form icke heller är nödvändig. I stället för att draga ifrån och »låna» kan man ju söka det tal, som man skall lägga till 437 för att få 1000. Alltså: 7 och 3 (trean skrives) är 10. 1 och 3 och 6 (sexan skrives) är 10. (Observera minnessiffran!) 1 och 4 och 5 är 10. — Denna kompletteringsmetod använda vi ju redan, då det gäller att pröva subtraktionstal. Den är att föredraga vid subtraktion, då lån behöver förekomma. Den tvingar till uppmärksamhet. —

Ex. $412 \cdot 327 = x$.

Mönster: 412 tages först 7 gånger, sedan 20 gånger (men barnen räkna väl i de flesta fall mekaniskt: 2 gånger!), sedan 300 gånger; och så adderas delprodukterna. — Men det går också på annat sätt. Man kunde ju först taga 412 20 gånger, sedan 300 gånger och till slut 7 gånger. Då skulle räkningen se ut så:

$$\begin{array}{r} 412 \\ 327 \\ \hline 8240 \\ 123600 \\ 2884 \\ \hline 134724 \end{array}$$

Eller om man låter faktorerna byta plats och räknar $327 \cdot 10, \cdot 2, \cdot 400$:

$$\begin{array}{r}
327 \\
412 \\
\hline
327 \\
654 \\
1308 \\
\hline
134724
\end{array}$$

För insiktens skull kan man t. o. m. låta barnen en eller ett par gånger gå denna långa omväg: $327 \cdot 412 = x$.

$$\begin{array}{r|rcr}
300 & 400 & = & 120000 \\
300 & 10 & = & 3000 \\
300 & 2 & = & 600 \\
20 & 400 & = & 8000 \\
20 & 10 & = & 200 \\
20 & 2 & = & 40 \\
7 & 400 & = & 2800 \\
7 & 10 & = & 70 \\
7 & 2 & = & 14 \\
\hline
 & & & 134724
\end{array}$$

Utelämnande av nollorna vid skriftlig division har säkerligen stor skuld till, att barnen så ofta befinnas ha alldeles mekaniskt tillägnat sig den matematiska formen för division.

Ex. $32435 : 13 = 2495.$

$$\begin{array}{l}
26 \\
\hline
64 \\
52 \\
\hline
12 \text{ o. s. v.}
\end{array}$$

Denna vanliga form borde ej få användas, förrän barnen tillräckligt länge övat följande:

32 435 : 13
26 000 : 13 = 2 000 (26 tusen delas först)
6 435
5 200 : 13 = 400 (52 hundra delas sedan)
1 235
1 170 : 13 = 90 (117 tiotal delas därefter)
65 : 13 = 5 (65 ental delas sist)
Delkvoterna adderas: 2 495

Härigenom blir det tydligt, att kvotsiffran blir av samma systemvärde som dividenden i varje särskilt fall.

* * *

Av ovanstående torde det tillräckligt tydligt framgå, att det gäller göra klart för barnen, att *det icke fordras att lära sig några patentlösningssätt utan i stället att sätta sig in i och tänka över sakförhållandet i varje särskilt fall.*

* * *

Övning och tillämpning.

Det torde vara på sin plats att här också peka på den väsentliga skillnad, som finnes mellan begreppen *övning* och *tillämpning*. Då ett räknesätt blivit klargjort för barnen, brukar man låta dem öva sig i det. Men det är inte alldeles säkert, att man därigenom också tar deras eventuella tillämpningsförmåga i anspråk. Genom övning vill man medelst upprepning i möjligaste mån mekanisera ett förlopp (för att spara energi). Men genom tillämpning vill man pröva sin förmåga att med tillgängliga medel, som man fritt får välja, lösa en uppgift. —

På skolans lägre stadier, där allt är nytt för barnen, utgör nästan allt tillämpning för dem, men på de högre är det klent beställt med den praktiska tillämpningen. Räknelärorna ha ju t. o. m. rubriker, som ge upplysning om vilket räknesätt som skall användas för tal, som f. ö. vanligtvis ej äro tillämpningsexempel utan endast övningsexempel. Ty man torde lägga märke till, att »benämnda tal» icke nödvändigt äro tillämpningsövningar. Om barnen ha övat sig med att lägga tillsamman 2-siffriga och 1-siffriga tal, och jag ger dem i uppgift att taga reda på, hur mycket 17 kr. och 5 kr. utgör tillsammans, så är detta fortfarande endast övning, icke tillämpning. Benämnda och obenämnda tal är f. ö. en distinktion, som ej borde förekomma så mycket i barndomsskolan, ty *barnet* räknar ej med obenämnda tal. Abstraktionsförmågan saknas. Till förekommande av ordrabbel borde läraren därför *ofta* tillhålla barnet att konkretisera även s. k. obenämnda övningsexempel, som förekomma i läroböcker. Annars blir följden, att barnet, när räkningen med siffror börjat, helt enkelt glömmer sakförhållandet och efter uträkningen av ett problem svarar: »talet blir ——» eller »det blir ——», utan tanke på att ha löst någon uppgift eller på vad uppgiften gällde.

Uppskattning och prövning.

En beräkning har naturligtvis endast då någon mening, när jag är fullt säker på, att resultatet är riktigt. Denna obetingade säkerhet befrämjas i hög grad genom att före uträkningen göra en ungefärlig uppskattning av resultatet. Så ofta det finns tillfälle, bör man egga barnen till att tänka efter, hur mycket det kan bli ungefär. Men — ungefärlig uppskattning är ej detsamma som att gissa! —

Detta gissande kan i viss mån förebyggas genom att barnen få öva sig i en uppskattning av annat slag. De kunna få tillfälle att bedöma föremåls längd, jämföra och bedöma korta och långa föremål, deras vikt, ytors storlek o. s. v. Därigenom får man på köpet en helt annan och djupare insikt i vårt mått- och viktsystem, än som nu kommer barnen till del. De få nu höra och utsäga orden meter, kilogram, ar o. s. v., medan sällan eller aldrig någon tillämpning förekommer.

* * *

Prövningen har nära sammanhang med uppskattningen. Prövningen visar uppskattningens större eller mindre noggrannhet. Därför bör i varje skolsal finnas metermått, våg och vikter. — Prövningsmetoderna för uträknade tal böra de flesta av barnen själva kunna komma underfund med, om de tänkt sig in i problemet. T. ex. att man bör få tillbaka det hela, om man åter lägger tillsammans delarna, o. s. v.

Tillämpningsuppgifter.

Som ovan nämnts utgör ett benämnt tal icke alltid tillämpning utan endast i det fall, att det innebär ett verkligt *problem*.

Sådana problem böra endast sparsamt förekomma på lågstadiet. I folkskolans högre klasser bör man däremot ofta låta barnen få tillfälle att lösa sådana.

Vilka anspråk bör man då sätta på dessa problem, för att de må lämna största möjliga valuta, största möjliga matematiska insikt? Sifferuppgifter och fakta, som givas i uppgiften, böra överensstämma med de verkliga förhållanden, som man ju vill göra barnet förtrogen med. Men det måhända allra viktigaste är, att själva problemställningen är naturlig. Ex.: A. betalade 750 kr. i hyra. Denna höjdes med 8 %. Hur mycket betalade han sedan? — Sällan eller aldrig ställer livet ett sådant problem. Naturligt är däremot det omvända: Höjningen är 60 kr. Hur många procents ökning var detta?

* * *

Hur skola dessa problem behandlas i skolan? De vägledande frågorna äro ju bekanta. Barnen bruka ledas fram till den rätta lösningen och behöva ej arbeta mycket själva. (Utom att det kan vara rätt påkostande för somliga att tvingas se saken på samma sätt som läraren.) Att rekommendera är däremot att helt enkelt säga till barnen: Räkna! Men sätt er noga in i saken först! (Obs.! Detta går naturligtvis ej genast med de barn, som redan vants vid utfrågningsmetoden.) Medan de sätta sig in i saken, böra de ha rätt att fråga om sådant, som de ej förstå eller som ej är alldeles klart för dem. (Naturligtvis böra de ej få svar på frågor om räknesättet eller lösningssättet!) Det är en arbetsmetod barnet bör sätta sig in i vid problemlösningarna, ej räknesätt. Huvudsaken är naturligtvis att söka få barnet dithän att överlägga med sig självt om sakläget i problemet, innan det tänker på »räknesätt». På god väg är man, om man vänjer barnen vid att göra klart för sig först »vad vi få veta» och sedan vad »vi vill veta» i det förhandenvarande problemet. Har man icke dessa båda saker fullt klart för sig, så kan det ju icke alls bli tal om någon lösning av problemet. Detta måste alltså bli utgångspunkten för det resonemang, som till resultat ger lösningssättet. Man skulle kunna säga, att det är föreställningskraften, som bör övas, om någon *varaktig* förmåga att räkna problem skall kunna tillägnas. Det som kallas »matematisk begåvning» är ingenting annat än en sådan föreställningsförmåga. Därför är det av vikt, att denna övas redan på lågstadiet (vid de »benämnda» talen, som icke äro några egentliga problem), för att barnen högre upp skola kunna på egen hand resonera sig fram. —

Självständig problembildning.

Ett sätt som är mycket givande, då det gäller att vänja barnet vid att sätta sig in i sakläget, är, att låta barnen göra uppgifter själva. T. o. m. barn på ganska lågt stadium. Mången tror kanske, att detta blir att låta allt gå vind för våg, men — försök! En inledning härtill sker på följande sätt. Man ger t. ex. dessa sakuppgifter: Mor hade 10 kr. med sig på torget. Hon köpte för 2 kr. ägg, 3 kr. smör och 2 kr. kött. — Vad kan vi nu räkna ut? — Säkert ha de flesta barn klart för sig, att vi kunna taga reda på vad varorna kostade och hur mycket hon hade över av tian. —

Sedan kan man be barnen försöka tänka på en annan »fru», vad hon köpte o. s. v. Eller på ett besök i en affär, en järnvägsresa o. dyl. Kort sagt, barnen böra få bilda uppgifter efter mönster av lärobokens eller lärarens. Detta bör upprepas icke allt för sällan. När det förekommer, bör naturligtvis uppmärksamheten fästas vid, att orimliga uppgifter eller orimliga mått och priser ej förekomma. Det praktiska vardagslivets förhållanden skola ligga till grund. Då barnen emellertid ha minst sagt bristfälliga föreställningar om priser o. dyl., måste man skaffa sig hjälpmedel för att nå vad som genom denna barnens självverksamhet åsyftas. (En pojke, mycket ivrig och stolt över att ha hittat på ett tal, sade: En bonde kom till torget i stan och sålde potatis för 10 kr., en gris för — 2 kr. o. s. v.) — Man kan exempelvis låta barnen klippa ur de torgprislistor, som varje vecka förekomma i en del tidningar. Där finns material för åtskilliga »benämnda tal» på lågstadiet och för problem för högre skolstadier. Skaffar man så alla möjliga andra prislistor, kataloger, tidtabeller med priser, geografiska, statistiska och andra tabeller o. s. v., så kunna problem göras, som äro intimt sammanbundna med verkliga livet. Och det inses utan vidare, att barnen härigenom få en hel del kunskap och färdigheter på köpet genom att arbeta på detta sätt. —

Några exempel skola ytterligare klargöra meningen med ovanstående. (Varje exempel är taget ur en räknelära. Under vart och ett angives hur man kan behandla det, för att barnen skola få tillfälle till självverksamhet.)

1. 1 hekto karameller kostar 65 öre. Hur mycket får man då för 1 kr. 95 öre? —

I stället säger man: »En pojke gick och köpte **karameller.»** — Allt det övriga blir barnens sak. Hur mycket han köpte. Hur mycket pengar han hade. Priset pr hekto. Hur mycket han skulle betala. Hur mycket han fick tillbaka. Alla dessa frågor böra barnen eggas att själva framställa. *Annars få de ej upp blicken för, att just de uppgifter, som stå i talet, äro nödvändiga för uträkningen.*

2. Far och mor resa med sina 2 barn, 6 och 8 år gamla, till N. Biljettpriset är 1:50 för vuxna. Hur mycket skall far betala? —

Självverksamhet: En sommarsöndag reser ni ut på landet med tåget. Tag upp tidtabellen! Vart skall vi resa? Vad kostar det? (Står ej priset, kan det räknas ut enl. zontaxan.) Vad kostar det för far och mor? För barnen? För allesammans i er familj?

3. En handlande sålde en tredjedel av sitt smörlager för 138 kr. och förtjänade då 18 kr. Inköpspriset var 3 kr. pr kg. Hur stort var hela partiet? —

Annan formulering: »En handlande hade köpt mycket smör för att sedan sälja det med förtjänst. En dag förtjänade han på sålt smör 18 kr.» — Denna formulering måste ge anledning till resonemang om skälig affärsvinst. Då denna är fastställd, kommer man helt naturligt till inköps- och försäljningssummorna och med ledning av dagspriset på smör till partiets storlek.

4. Geografiens olika grenar kunna liksom fysik och kemi ge rikligt material för självständig problembildning och problemlösning. Man bör ej alltid endast fråga var, när, hur, varför, utan också ibland då det passar: hur mycket? Besvarandet av den frågan kan inom många av skolämnena i hög grad bidraga till att ge klarare begrepp. —

Den som lagt märke till, hur de begåvade och duktiga eleverna i våra skolor ofta få hållas tillbaka och därför bli ointresserade genom att läraren så mycket måste syssla med de svaga, han inser, att denna självständiga problembildning kan användas så, att ingen behöver sitta sysslolös under någon del av en lektionstimme. Hemarbete i form av självständig problembildning får ett helt annat värde och helt annat intresse för barnen än det nuvarande.

Sammanfattning.

Det torde vara lämpligt att nu göra en återblick över framställningen av lärosättets principer. Särdeles förmånligt torde det vara att göra klart för sig motsatsförhållandet mellan det gamla och det nya.

1. Det gamla systemets målsmän eftersträva att så snart som möjligt frigöra barnet från åskådning, detta av fruktan för att barnet skall hänga fast vid dessa sakföreställningar, ej kunna frigöra sig från »åskådandet». —

Då emellertid detta för tidiga lösgörande från åskådningstänkandet är en av huvudorsakerna till nuvarande räkneundervisnings dåliga resultat, måste man i stället eftersträva *en verkligt allsidig, planmässig, ofta upprepad åskådning*, under användning av så många sinnen som möjligt (i synnerhet på småskole- och det lägre folkskolestadiet).

2. »Rena begrepp» kunna barn icke arbeta med. — Det tidiga bruket av siffror är ett ont, som ej kan nog fördömas. —

I stället är det nödvändigt att vänja barnen vid att låta sina räkneord åtföljas av *rumsföreställningar* och operationsbegreppen av *rörelseföreställningar*. När abstraktionsförmågan är utvecklad, då är tiden inne att arbeta med abstrakta begrepp, och då sker abstraktionsprocessen spontant.

3. Utanläsning av sådant, som ej är fullt förstått, bör ej förekomma. (Oftast syndas härvidlag genom multiplikationstabellens mekaniska inlärande.) —

Multiplikationstabellen t. ex. måste vara för barnet resultatet av självständiga iakttagelser, ej endast minnessak.

4. Nuvarande lärosätt inom räkneundervisningen är mer än i något annat ämne anlagt på att *mekanisera* färdigheterna. —

Då man emellertid ej kan *lösa problem* mekaniskt, inses att det i stället fordras en *övning*, som leder till större insikt i sak.

5. Om barnen få vänja sig vid att lösa problem efter mönster, så leder detta till osjälvständighet och mekanisering. —

De böra i stället från början få tillfälle att *självständigt söka efter olika vägar för lösningen*. Detta verkar utvecklande på omdömesförmågan.

6. Att alltjämt ge barnen räkneuppgifter och problem innebär att försumma det givande medel, som ligger däri, att *barnen själva få bilda uppgifter och problem.*

* * *

Naturligtvis går det icke att tillämpa en ny metod vid undervisning av barn, som i flera år vants vid en annan. Om barn fått vänja sig vid att bli matade, så kunna de icke hux flux äta själva. På dem måste metoden tilllämpas med vissa modifikationer och så småningom. — Vidare: det är ogörligt att hinna ordentligt genomarbeta samma stoff, som man förut behandlat endast ytligt, såvida ej tiden för ämnet ökas. Då en sådan ökning knappast kan ifrågakomma, återstår intet annat än att minska stoffet. Man torde utan olägenhet för den praktiska räkne*förmågan* kunna utrangera sådant, som hör till den rena yrkesräkningen, och sådana problem, som sällan eller aldrig förekomma i det verkliga livet (detta är ju f. ö. i överensstämmelse med undervisningsplanens bestämmelser). Denna kursplanernas överfullhet av stoff orsakar en flyktig behandling av varje moment. Och vad värre är: barnet får en känsla av att »ha läst» allt möjligt i skolan och tycker sig ej ha behov av någon fortsatt utbildning. — Åtskilligt av det, som nu står på folkskolans kursplan, *borde* överflyttas till fortsättningsskolan, lärlings- och yrkesskolan.

* * *

En mängd räkneläror ha sett dagen under de senare åren. De skilja sig dock föga från varandra. Bäst är att ha en räknelära, som är så mycket som möjligt neutral i fråga om lärometoden, om man själv har arbetat sig till en personlig metod.[1] Mest överensstämmande

[1] En i denna mening »neutral» lärobok är Wahlström och Vikbergs »Exempelsamling i räkning».

med andan i denna framställning är emellertid Hellstens »Räknelära i tal och bild», av vilken dock endast tre häften utkommit hittills. I dessa förekommer emellertid ingen användning av talbilder, vilket dock är lätt att avhjälpa. Övningar med talbilder kunna ju inläggas i lektionerna i alla fall. Det är att hoppas, att fortsättningen av Hellstens Räknelära blir utarbetad i samma anda som början utlovar. I så fall skulle denna handledning kunna bidraga till att sätta läraren in i motiveringen för och syftet med en så pass exklusiv lärobok som Hellstens.