RÄKNEMETODIK

AF

L. C. LINDBLOM.

Pris: 2 kr. 75 öre.

STOCKHOLM
P. A. NORSTEDT & SÖNER
(I DISTRIBUTION)

STOCKHOLM 1893
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER

Förord.

Genom ingen undervisning utvecklas tankeförmågan så säkert som genom en riktig räkneundervisning. Denna bör vara tankeansträngande, men får ej vara allt för tankeansträngande.

Förr grundades räkneundervisningen i skolorna hufvudsakligen på talens beteckning. Nu grundas den med rätta allt mera på talens innebörd. I sammanhang därmed lägges stor vikt vid de mindre hela talen, hvilka äro de vanligaste. Dock kan deras inbördes storlek beaktas mer och framför allt bättre, än nu vanligen sker.

Förr behandlades bråkläran så, som om intet sammanhang förefunnes mellan hela tal och bråk. Mellan dem finnes dock ett sammanhang, som kan framträda tidigt nog vid undervisningen, redan i småskolan, churu ordet bråk ej behöfver sägas. Läran om hela tal skall behandlas på ett sådant sätt, att öfvergången till bråkläran går lätt för sig.

Förr betonades de s. k. räknesätten så, att mindre eftertänksamma barn vid lösning af den ena praktiska uppgiften efter den andra, som ej var inordnad inom räknesättets på den eller den sidan kännetecknade ram, genast frågade läraren: »Hvilket räknesätt skall jag använda?» »Huru skall jag göra?» Att leda undervisningen från den tankegången är f. n. den svåraste, men på samma gång den nödvändigaste. Räknesättens namn har ingen betydelse vid räkneundervisningen, men innebörden i hvarje särskildt fall har så mycket större betydelse.

Det rätta sättet är att, med fasthållande af det i ett praktiskt exempel, s. k problem, uppgifna, uppdela problemet i flera exempel och utan eftergift kräfva svar på frågan i hvarje sådant enklare exempel. Fördenskull sägas s. k. svar före uträkningen i alla sådana fall, för hvilkas lösning blott ett räknesätt af ålder ansetts erforderligt. Se § 165! Äfven ex., för hvilka blott ett räknesätt fordras, måste stundom uppdelas, hvarvid frågorna eller redogörelsen direkt syfta på målet, ej på räknesättet såsom medel. Se ex. 474 och 476, å sid. 210 och 211! Se för öfrigt s. k. *tankegångar* mångenstädes!

Den skriftliga räkningen skall grundas på uppfattningen af talens innebörd, således på enkel hufvudräkning, utom i några fall i bråkläran, då talens beteckning bör utgöra utgångspunkt, hvarvid man bland annat bör fasthålla de synliga talen, täljare och nämnare, mer, än somliga lärare nu anse lämpligt.

Den klyfta, som förefinnes mellan småskola och folkskola och mellan folkskolans olika klasser med afseende på undervisningssätt i detta ämne, måste utjämnas, om resultatet af undervisningen skall blifva godt. Dock må fordringarna på inhämtade kunskaper rätta sig efter barnens tankeförmåga. Alla normalt utbildade barn kunna lära sig räkna, det ena mer det andra mindre. Men tankeförmågan är mycket olika utvecklad hos olika barn af samma ålder. Fara är, att många, både lärare, föräldrar, inspektörer och andra äldre, ställa för stora fordringar på somliga barn i detta fall. För stor tankeansträngning medför sedan slöhet. Ett oroligt jäktande framåt vare förbjudet! Undervisningen må ske med lugn och bestämdhet, så att alla lärjungarne föras framåt så långt, som deras olika förmåga sträcker sig. Hellre ett litet område väl kändt, än en stor kurs, hvilken blott några mäktat fatta. Hellre en kurs, omfattande den för alla i det dagliga lifvet utom skolan behöfliga kännedomen om de mindre hela talen och de vanligaste bråken, än en fullständigare kurs i hela tal.

Vare sig att uppgifterna äro enkla eller sammansatta, vare sig att det gäller s. k. taluppgifter (sifferexempel vid skriftlig räkning) eller praktiska uppgifter, må den grundsatsen orubbligt fasthållas, att ett formellt riktigt svar skall gifvas på en framställd fråga. I intet ämne står nämligen formen i så nära sammanhang med innehållet som i matematik. Endast om detta beaktas, ledas barnen till en säker självverksamhet i detta ämne.

Länge har jag tänkt framställa mina tankar rörande räkneundervisningen i »Metodiska anvisningar». Tveksam har jag dock länge varit, huruvida de skulle framställas i blott allmänna drag eller mer utförda. Individualiteten skall göra sin rätt gällande. Det ligger en viss sanning i de ofta hörda påståendena: »Man kan väl lära sig räkna, om man ej lär sig på det eller det sättet», och »Man har väl lärt sig räkna förr, ehuru det ej var så krångligt» m. m. Emellertid måste undervisningssättet ändras mycket mot förr för att blifva sakenligt. Det gamla, enkla, som är sakenligt, bevaras; det nya enkla, som är sakenligt, må upptagas, huru mycket inrotade vanor hos individen än lägga hinder därför. Med afseende på vissa allmänna grunder måste individualiteten gifva vika. Då jag slutligen bestämde mig för, att boken skulle få sitt nuvarande omfång, skedde det med hänsyn främst till dem, som utbildas till lärarekallet. Blott några utförda lektioner finnas. Många torde anse dem för långa. I dem finnas åtskilliga meningar med lika innehåll. Men åtskilliga, skenbart lika meningar hafva ej samma innehåll och samma syfte. Om någon åhörare skulle räkna de frågor, som gifvas under en småskolelektion eller folkskolelektion på det lägre stadiet, så skulle han finna antalet betydligt stort.

Grundtanken i följande framställning är läran om det hela och dess delar. Läran om förhållande, som står så nära den förra, upptages i somliga afdelningar af s. k. division i bråk samt tillämpas i de fall, då den tillämpats af gammalt. Lösning af många uppgifter blir därigenom lika enkel som, stundom mycket enklare än genom den s. k. enhetsmetoden, som ju ock grundas på läran om förhållande. Af de många lösningarna för olika ex. i §§ 301—306 må en hvar bedöma, hvilket eller hvilka äro enklast. Lätt är att bilda analogi och beräkna värdet af x på det där angifna sättet. Det leder icke till slentrian mer än enhetsmetoden.

De flesta heltalsorternas och åtskilliga bråksorters namn äro i detta arbete olika mot dem, som förekomma i de nu brukliga räkneböckerna. Se §§ (4), 10, 14, 16, 17, 18 och 23! I enlighet därmed benämnas rummen, i hvilka heltalssiffror och decimaler skrifvas. Se §§ 32 och 39! Talens namn grundas enligt § 30 på den förhandenvarande sortens namn. I §§ 65—68, 299—353 har åtskilligt upptagits, som ej tillhör folkskolekursen.

Måtte ingen till följd af inrotade vanor eller oriktig framställning i räkneböcker taga anstöt däraf, att åtskilliga fel i det nu allmännast använda förfaringssättet blifvit påvisade såsom fel! Måtte det lyckas dem, som erkänna felen, att småningom arbeta bort dem! Måtte de blifvande lärarne ej förvillas af sina ledare! Med god vilja går det att allt mer undvika felen.

Måtte särskildt de yngre lärarne vinnlägga sig om det rätta sättet samt vid brytning med det felaktiga gifva skäl för det rätta!

Slutligen blott det tillägget: Framställningen i boken grundar sig på min egen erfarenhet från flerårig verksamhet i den med seminariet förbundna öfningsskolan (folkskolan), i hvilken flera klasser undervisas samtidigt.

Befogade anmärkningar och meddelanden mottagas välvilligt och tacksamt.

Stockholm i Aug. 1892.

L. C. Lindblom.

Innehållsuppgift.

Första afdelningen.

Allmänna grunder.

Andra afdelningen.

Mer ingående behandling.

Småskolekursen.

Folkskolekursen.

Blandade praktiska uppgifter med hela tal och bråk.

Tredje afdelningen.

Rättelser och tillägg.

Sid.	9	rad	9	nedifrån	står:	600,	skall	vara:	6.
»	27	»	8	»	»	ett,	»	»	en.
»	34	»	8	»	»	storlek,	»	»	antal.
»	36	»	16	»	»	3,	»	»	2.
»	72	»	16	»	»	1, 2,	»	»	2, 1.
»	»	»	13	»	»	1,	»	»	2.
»	74	»	18	»	»	d, e, f,	»	»	e, d, e.
»	118	»	18	»	»	8 min.,	»	»	4 min.
»	»	»	»	»	»	4 tim.,	»	»	8 tim.
»	120	»	16	uppifrån	»	38,	»	»	28.
»	130	»	4	»	»	likadelningstecknet,	»	»	likadelstecknet.
»	132	»	12	nedifrån	»	135,	»	»	235.
»	135	»	13	uppifrån	»	150,	»	»	130.
»	136	»	21	nedifrån	»	6,	»	»	58.
»	»	»	4	»	»	64, återstod 3,	»	»	6, återstod 403.
»	138	»	8	uppifrån	»	11,	»	»	12.
»	156	»	20	»	»	0,4,	»	»	0,4 m.
»	161	»	6	»	»	höger,	»	»	vänster.
»	174	»	7	nedifrån	öfverstrykes 5.				
»	178	»	7	uppifrån	fattas: b)				
»	192	»	17	»	står:	270,	»	»	276.

Vid ex. 560 å sid. 261 och ex. 561 sid. 262 tillägges:

Uppställning					Uppställning				
x	l.	à	0	öre	20	hl.	à	9	kr.
18	»	à	36	»	x	»	à	12	»
$x + 18$	l.	à	16	öre	$20 + x$	hl.	à	9,5	kr.

I slutet af § **326** å sid 281 tillägges:

Märk. 1. $7 \cdot 8 = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{8^2} = \sqrt{7^2 \cdot 8^2}$. Omvändt är

$\sqrt{7^2 \cdot 8^2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{8^2} = 7 \cdot 8$.

2. $\sqrt{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2} = \sqrt{3{,}14^2 \cdot 8^2 \cdot 5^2} = \sqrt{3{,}14^2} \cdot \sqrt{8^2} \cdot \sqrt{5^2} =$
$= 3{,}14 \cdot 8 \cdot 5$.

Första afdelningen.

Allmänna grunder.

Räkneundervisningens mål.

1. Räkneundervisningens mål är kännedom om talens beskaffenhet och användning samt tillämpning i uppgifter, som afse det praktiska lifvet, s. k. sakuppgifter, problem.

I somliga uppgifter förekomma för den skull blott tal; genom andra uppgifter införas lärjungarna i det praktiska lifvets förhållanden. Alltid kräfves strängt följdriktig tankegång. Räkneundervisningen är alltså ett i hög grad både teoretiskt och praktiskt bildningsmedel.

Räkneundervisningens teoretiska betydelse är stor. Genom den utvecklas och uppöfvas tankeförmågan, så att 1) förmåga att uppfatta ett gifvet innehåll utvecklas till följd däraf, att tankarna allt bestämdare riktas på detta innehåll och 2) förmågan att bilda slutledningar uppöfvas, i det att vissa, bestämda slutsatser dragas af gifna förutsättningar.

Räkneundervisningens praktiska betydelse är icke mindre. Denna framträder för lärjungen, så snart sakuppgifter föreläggas honom.

2. Räkneundervisningens mål kräfver af läraren, att han a) meddelar ett gifvet innehåll på det rätta sättet, b) öfvergår från det lättare till det svårare, från åskådning till tal, från tal till tillämpning, c) går sakta framåt i synnerhet i början, så att god kännedom om de mindre hela talen bibringas i sammanhang med flitig användning af åskådningsmateriel, d) fäster afseende vid tals sammansättning och vänjer barnen att uppfatta deras innebörd enligt deras utsägande, e) vid behandling af bråk påvisar och inskärper den befintliga öfverensstämmelsen med de hela talen, f) sammanställer nya fall med liknande, för barnen kända fall, g) är beredd att vid behof lägga åskådningsmateriel till grund för framställningen, då det lämpligt kan ske, h) använder enkla tal för att klargöra sättet i liknande svårare fall, i) icke onödigt använder svårfattliga räknetermer eller fordrar redogörelse för deras innebörd, j) rättar sina fordringar efter barnens förmåga, k) ägnar tillräcklig uppmärksamhet åt de svagt begåfvade barnen, så att de ordentligt lära sig det, som de genomgå, l) genom korta, lämpliga ledfrågor fäster uppmärksamhet på innehållet i praktiska uppgifter, m) genom frågor leder tankarna från utgångspunkten i sammansatta uppgifter till den ena slutsatsen efter den andra, till dess att lärjungen fått hela tankegången för uppgiftens lösning klar för sig, och n) låter uppgifternas så väl form som innehåll växla på ett efter omständigheterna lämpligt sätt.

Konkreta och abstrakta storheter.

3. Allt, som kan delas, kallas *storhet.*

4. En tändsticka är en storhet. En bunt af tändstickor är äfven en storhet. Ett ettöre, ett tioöre, en krona, en tiokrona äro äfven storheter. Hvar för sig äro de blott en enda storhet, och till följd däraf kallas hvar och en af dem *enhet.*

Men tändsticksbunten innehåller flera stickor, och tioöret kan växlas i flera ettören. Därför säges tändsticksbunten vara en större enhet än tändstickan. Likaså är tioöret en större enhet än ettöret.

De konkreta enheterna hafva sina särskilda namn. Ex. Tändsticka, tändsticksbunt; gosse; bord; krona, tiokrona, hundrakrona; öre, tioöre, hundraöre (= krona); ar, hektar; meter, decimeter, centimeter; år, månad, dag. O. s. v.

Hvarje konkret enhet kallas äfven sort. Ex. Tändsticka är en sort, tändsticksbunt är en annan sort, gosse är en tredje sort, bord är en fjärde sort, krona är en femte sort, o. s. v. Det ord, med hvilket man angifver en enhet, angifver samma sort.

Konkret enhet och konkret sort äro alltid liktydiga.

I sammanhang därmed stå uttrycken större sort (= större enhet) och mindre sort (= mindre enhet). Då man vill betona, att det är fråga om en enhet, säges talordet en (ett) före det konkreta namnet på enheten (före den konkreta sorten). Därvid behöfver talordet ej betonas. Ex. En gosse, ett öre. Genom detta tillägg blir enheten bestämdare nämnd, än då blott enhetens namn säges. Däraf följer, att man talar om en enhet af den eller den sorten i st. f. att säga den eller den sorten.

Af gammalt hafva blott de med hvarandra jämförbara konkreta enheterna kallats sorter, nämligen myntenheterna, längdenheterna, ytenheterna, rymdenheterna och viktenheterna. Till följd däraf behandlas sådana afdelningar särskildt, i hvilka redogöres för »tals tillämpning på sorter». Mindre konkreta enheter sammanfattas då i större konkreta enheter, och tvärt om uppdelas större enheter i mindre enheter.

5. Talen användas för att angifva antalet af konkreta enheter i en uppgifven konkret storhet. Ex. Fem öre. I penningsumman fem öre är talet fem örenas antal. Med tal angifves antal af hvilka enheter som helst. För den skull kan man tänka på talen och tala om dem utan att hänföra dem till något bestämdt slag af föremål. I senare fallet är hvarje tal i och för sig något självständigt och en storhet, ehuru det ej är förnimbart för våra yttre sinnen.

Alla tal äro abstrakta storheter.

Märk! 1. De mindre hela talen kunna barnen fatta endast genom åskådande af något konkret, hvarvid de konkreta enheternas antal bestämmes.

2. »47 kronor» är en penningsumma. »38 m.» är en längd. »9 liter» är en rymd. »93 hektar» är en yta. »5 gram» är en vikt. Dessa och dylika mängder (storheter) hafva konkret innebörd och äro således icke tal. I de uppgifna exemplen är 47 kronornas antal (krontal), 38 meternas antal (metertal), 9 literna s antal (litertal), 93 hektarens antal (hektartal) och 5 grammens antal (gramtal).

3. Än mindre är följande exempel ett tal: »Huru mycket väga 3 mjölsäckar, då hvarje mjölsäck väger 112 kg.?» Däremot är ex. 3 + 4 ett tal, hvilket uträknadt är talet sju.

4. Lika litet böra siffra och tal förblandas. Siffrorna äro taltecken och således konkreta. I st. f. att säga »ett tals storlek» bör således ej sägas »en siffras storlek». Ofta säges dock t. ex. siffran trehundrafemtiosex eller dylikt.

Att en förblandning af konkret och abstrakt innebörd äger rum i förenämnda 3 fall, beror dels på arf från den tid, då man vid undervisningen sysslade med blott tal och räknade hufvudsakligen skriftligt, dels på svårigheten att öfvervinna inrotade vanor, dels stundom på liknöjdhet.

Samma förblandning förekommer i de större svenska ordböckerna. I Dalins Ordbok öfver svenska språket (tryckt år 1853) står det: »tia är en siffra, som betecknar talet tio.» I Sundéns svenska ordbok (år 1891) står det: »Tia = talet och siffran 10.»

5. Allt efter de enheter, hvaraf talen beteckna antal, kallas somliga tal *hela tal*, andra tal *bråk*. I enskilda fall kallas de *tiotal*, *tiodelstal*, *hundradelstal*, *femtondelstal*, *procenttal*, o. s. v. Då de skola angifva antal af konkreta enheter, hafva både de hela talen och bråken namn efter de förhandenvarande konkreta enheterna, såsom *krontal*, *öretal*, *millimetertal*, *artal*, *årtal*, *månadtal*, *boktal*, *barntal*, o. s. v. Däraf är klart, att följande uttryck äro olämpliga: »benämnda tal» och »obenämnda tal», »konkreta tal» och »abstrakta tal».

Talens innebörd.

A. De hela talens innebörd.

6. Talet en, ett (1) är utgångspunkt för bildande af alla andra tal. Det kallas för den skull *grundenhet*.

7. Alla tal, som bestå af en eller flera grundenheter, kallas *hela tal*. Ex. Fem, som innehåller fem grundenheter eller fem tal ett; fyrtio, som innehåller fyrtio grundenheter eller fyrtio tal ett; sextisju, som innehåller sextisju delar med ett i hvarje del.

På grund af slarfvigt uttal säges förti i st. f. fyrti.

Genom alla hela tal angifves grundenheternas antal. Af den orsaken säges t. ex. trettiosex äfven så: trettiosex enheter.

8. Somliga talord äro enkla, andra äro sammansatta.

9. De för oss enkla talorden äro en (ett), två, tre, fyra, fem, sex, sju, åtta, nio, tio, elfva, tolf, tjugu, hundra, tusen, million, milliard, (billion, trillion, kvadrillion) o. s. v.

Tusen tal tusen sammanfattas i talet million. Ordet million kommer af ordet mille, som betyder tusen, och häntyder på upprepandet af ordet tusen. Tusen tal million sammanfattas i ordet milliard. Million tal million sammanfattas i talet billion. Ordet billion härledes af orden bis och million, af hvilka det förra betyder 2 gånger. På grund däraf häntyder billion på den tvåfaldiga förekomsten af ordet million. Million tal billion sammanfattas i talet **trillion, af hvilket** ord förstås, att talet skulle kunna angifvas med 3 ord million. Million tal trillion sammanfattas i talet kvadrillion. O. s. v.

Milliard var ursprungligen namn på en penningsumma, tusen millioner francs (läs: frang!).

Af dessa talord äro en, million, milliard, billion, trillion o. s. v. böjliga, de öfriga oböjliga.

10. Talen **tio, hundra, tusen, million, milliard, billion** o. s. v. äro enheter i vissa talserier. De kallas för den skull **stomtal.** När de skola betonas såsom enheter, föregås de af talordet en (ett). I st. f. tio säges då ett tio, i st. f. hundra säges ett hundra, **i st. f.** tusen säges ett tusen, i st. f. million säges en million, i st. f. milliard säges en milliard, o. s. v.

Emedan sortens namn och enhetens namn enligt § 4 äro liktydiga, när det gäller konkreta enheter och det konkreta ligger till grund för uppfattning af det abstrakta i liknande fall, så böra talenheterna äfven betraktas såsom talsorter, då talen tänkas såsom självständiga storheter. **Stomtalen blifva alltså heltalssorter.** Den minsta heltalssorten, grundenhet, brukar ej utsägas vid ett helt tals utsägande. När den utsäges, skall dess namn vara **enhet,** emedan därigenom utmärkes, att den är enhet framför andra enheter. De följande talsortnamnen äro i ordning: **tio, hundra, tusen, million, milliard, billion,** o. s. v.

11. De sammansatta talorden bildas på olika sätt.

a) Serien tretton, fjorton—nitton. Där säges den mindre delen före den större. Men delarna hafva så sammansmält med hvarandra, att de ej omedelbart märkas. Ex. Talet **tretton** består af delarna tre och tio.

b) Serien **tio**, tjugu, trettio eller tretti, fyrtio eller fyrti, **femtio eller** femti, sextio eller sexti, sjuttio eller sjutti, åttio eller åtti, nittio eller nitti.

Alla de talen innehålla ett eller flera (t. o. m. 9) tal tio. I talet tjugu märkes ej, att de delarnas antal är 2, men i alla de andra 7 talen märkes delarnas antal såsom tre, fyra, fem, sex, sju, åtta och nio. Därvid har fyratio sammandragits till fyrtio (fyrti), åttatio till åttio (åtti) och niotio till nittio (nitti).

Rätteligen borde talorden för de af 3 tal tio, 7 tal tio och 9 tal tio sammansatta talen sägas så, att deras sammansättning tydligen märktes, hvarvid första själfljudet skulle vara långt. Det vårdslösa uttalet har småningom ledt därtill, att det efterföljande medljudet i stället blifvit långt och betecknas nu såsom sådant.

c) Serien tjuguen—tjugunio. Vid de talens utsägande utsäges den större delen före den mindre. Ex. Tjuguen består af de 2 delarna tjugu och en.

d) Serien trettioen—nittionio.

Vid utsägandet af alla de tal i den serien, i hvilka 2 olika delar höras, säges äfven den större delen före den mindre. — På samma sätt utsägas alla de följande sammansatta talen.

Delarnas antal med tio i hvarje del uppgår högst till 9.

e) Serien hundra—niohundranittionio.

I denna serie uppgår delarnas antal med hundra i hvarje del till högst 9.

I de följande serierna skrifvas talen oftast med flera ord.

f) Serien tusen—niohundranittinio tusen niohundranittionio.

Delarnas antal med tusen i hvarje del uppgår till högst niohundranittinio.

g) Serien million—niohundranittinio-tusen-niohundranittinio millioner niohundranittinio tusen niohundranittinio.

Märk! Af talens utsägande märkes, 1) att de största lika delarnas antal i d) och e) uppgår till högst 9, 2) att de största lika delarnas antal i f) och g) uppgår till högst ett mindre än grundenheternas antal i talets största enhet, 3) att somliga sammansatta tal kunna på grund af utsägandet uppdelas i blott lika delar, vare sig att hvarje del är 1 eller ett större tal, 4) att andra sammansatta tal kunna uppdelas dels i blott lika delar, då hvarje del är grundenheten, dels i 2 olika delar allt efter den för tillfället påtänkta större enhetens storlek, dels vid en mer ingående sönderdelning i flera delar, hvarvid olika stora stomtal utgöra indelningsgrunden.

Då den större enheten är hundra, sägas tal ej sällan så, att antalet af delar med hundra i hvarje del öfverstiger 9. Ex. år adertonhundranittitvå. Nittiniohundra liter, när den rymden sedan skall sägas såsom nittinio hektoliter.

12. Emedan alla hela tal kunna fördelas så, att hvarje del är en, så kunna de sägas vara af samma sort. Då utsäges ingen sort, utan man utsäger blott det däri ingående antalet. Hvilket helt tal som helst kallas då *ental*.

Fästa vi oss däremot vid de större enheterna a) tio, b) hundra, c) tusen, d) million, e) milliard, f) billion, g) trillion, så blir antalet af sådana enheter (= delarnas antal) begränsadt efter den större enhetens storlek. Så lunda kallas fem *tiotal* i talet femtio, femton *hundratal* i talet femtonhundra, trehundrasjuttifem *tusental* i talet trehundrasjuttifemtusen, hundra *milliontal* i talet hundra millioner, o. s. v.

13. För att barnen må få fullständig uppfattning af de hela talens innebörd och sedan kunna använda dem rätt vid förekommande räkning kräfves uppdelning af tal i serierna c)—g) i § **11** så, att tiotalet (hundratalet) öfverstiger nio och tusentalet öfverstiger niohundranittionio.

Ex. 1. Fyrahundraåttitvå.

a) Det hela talet uppfattas då först såsom innehållande fyra delar med hundra i hvarje del, åtta delar med tio i hvarje del och en del två. Det utsäges då: fyra hundra åtta tio två.

b) Talets två första delar sammanfattas i en del, nämligen fyrtiåtta tio. Den andra delen är två. Det innehåller då de två delarna och utsäges då: fyrtiåtta tio och två.

Här märkes olikheten i innebörd mellan uttrycken »fyrtiåtta tio» och »fyrtiåtta och tio», i st. f. hvilket senare rättast bör sägas: »fyrtiåtta plus tio». Genom det första sammanfattas fyrtiåtta tal till ett tal, genom det senare sammanfattas två tal till ett tal. Det tal, som innehåller delarna fyrtiåtta och tio, är femtiåtta. [Motsvarande olikhet finnes mellan åtta tio och åtta plus tio (åtta till tio)].

Ex. 2. Femton tusen tvåhundrasju.

De två första delarna af talet kunna sammanfattas i hundrafemtitvå hundra. Hela talet innehåller därefter de två delarna hundrafemtitvå hundra och sju.

Ex. 3. Tre millioner åttahundranitton tusen nittifem.

De två första delarna kunna sammanfattas i tretusenåttahundranitton tusen. Sedan innehåller hela talet de två delarna tretusenåttahundranitton tusen och nittifem.

Uppfattningen af stora tal på flera sätt kan bibringas i sammanhang med deras beteckning, emedan det då går lättare, än om barnen skola blott tänka på dem.

14. Talserien tusen—niohundranittinio tusen niohundranittinio fördelas äfven i mindre serier, hvarvid tänkes, att tio af de största enheterna sammanfattas till en ännu större enhet. Den näst efter tusen följande enheten innehåller tio delar med tusen i hvarje del och blir då talet **tiotúsen.** Tio sådana tal sammanfattas i talet **hundratúsen,** emedan det också innehåller hundra tal tusen. De nya enheterna i den stora serien äro alltså **tiotúsen** och **hundratúsen.** I talet 9 tiotúsen kallas således 9 *tiotúsental;* i talet fem hundratúsen kallas fem *hundratúsental* eller är hundratúsentalet fem.

Denna uppdelning är behöflig för dessa tals beteckning och för deras riktiga användande i de s. k. räknesätten.

I serien g) (Se § **11!**) bildas då följande 5 nya enheter: **tiomillión, húndramillión, túsenmillión, tiotúsenmillión, hundratúsenmillión.** Nio blir då det största *tiomilliontalet, hundramilliontalet, tusenmilliontalet, tiotusenmilliontalet, hundratusenmilliontalet* inom hvar sin af de 5 serierna.

15. Emedan således alltigenom tio mindre enheter kunna tänkas sammanfattade i den närmast större enheten, kallas sammanfattningen af de hela talen **tiotalssystemet** eller det **dekadiska systemet.**

Talen en, tio, hundra, tusen, tiotúsen, hundratúsen, million o. s. v. kunna kallas **stomtal** eller **systemtal,** emedan de utgöra stommen i systemet.

Anm. 1. Det grekiska ordet deka betyder tio.

2. Detta system har sin naturliga orsak däri, att vi hafva tio fingrar (tio tår).

3. Äfven andra tal än tio skulle kunna läggas till grund för ett talsystem. I ett system, grundadt på talet tolf, skulle hvarje större enhet innehålla tolf närmast mindre enheter. Då behöfdes två nya taltecken, det ena för talet tio och det andra för talet elfva.

4. Från gammalt finnes ännu kvar några enheter, som ej tillhöra tiotalsystemet: **kast, tolft, dussin, tjog, skock, val** och **gross.** Dessa äro äfven tal.

5. Det första i vårt land på tiotalsystemet grundade systemet för penningar, mått, mål och vikter fastställdes i Kongl. förordn. af den 15 jan. år 1855.

6. Ibland bildas nya enheter, hvarvid hvilket tal som helst lägges till grund för dem. Ex. Ett trettital, ett sjuttital, ett femtal. Genom en dylik sammanfattning vinnes intet i tydlighet. Tvärt om. Ty i allmänhet användas dessa uttryckssätt, då man anser sig kunna uppgifva endast ett tillnärmelsevis riktigt antal. Ex. På mötet var ett femtital personer. Riktigare skulle då sägas: På mötet voro omkring femtio personer.

16. Af sättet att utsäga de hela talen beror, huruvida man vill lägga vikt vid någon större talenhet eller icke.

Ex. 4. a) Tre hundra fem tio sex eller tréhundrafemtiséx.

I a) utsäges talet så, att 5 ord särskiljas. Därigenom betonas de större enheterna hundra och tio. Då märkes tydligt, att talet innehåller 3 delar med hundra i hvarje del, fem delar med tio i hvarje del och sex delar med en i hvarje del. I de flesta fall utsäges talet på det andra sättet. Därigenom betonas, att delarnas antal är större än hundra, ja så stort som hela det utsagda talet, hvarvid hvarje del är grundenheten.

Ex. 5. Sjuhundrasextifyra-tusen-nittiåtta.

Talet tillhör serien f) i § **11.** a) Blott *en* större sort betonas. Det innehåller 2 delar: sjuhundrasextifyra tusen och nittiåtta. Tusentalet är sjuhundrasextifyra och entalet är nittiåtta. — b) Då 2 större sorter (enheter) sägas, uppdelas det i 3 delar: sjuhundrasextifyra tusen, nio tio och åtta. — c) Om första delen uppdelas i de märkbara delarna sjuhundra tusen, sexti tusen och fyra tusen, så kan talet sägas så, att 5 delar märkas: sjuhundra tusen, sextio tusen, fyra tusen, nio tio och åtta.

Samma 5 delar märkas, om de första 2 delarna uttryckas i ännu större sorter (= om de ännu större enheterna hundratusen och tiotusen tänkas): sju hundratusen, sex tiotusen, fyra tusen, nio tio och åtta.

En sådan fördelning som den sista behöfves blott för talets uppskrifning och för framtida beräkningar i vissa fall.

För uppdelning af konkreta storheter och deras utsägande på flera sätt, då så kan ske, är det synnerligen viktigt, att innebörden framställes så som i denna §.

Ex. 6. Uttryck 6 000 dl. i a) liter, b) hl.!

a) Talet 6 000 innehåller 600 delar med tio i hvarje del. Rymden 6 000 dl. innehåller 600 delar med 10 dl. i hvarje del eller 600 delar med 1 l. i hvarje del eller 600 l. — b) 600 l. innehåller 6 delar med 100 l. i hvarje del eller 600 delar med 1 hl. i hvarje del eller 600 hl.

Jämte den riktiga uppdelningen fordras i a) utbytet af rymden 10 dl. mot rymden 1 l., och i b) utbytet af rymden 100 l. mot rymden 1 hl.

I tabellen stå 1 l. = 10 dl., som utsäges: »en liter lika med tio dl.», och 1 hl. = 100 l., som utsäges: »en hl. är hundra l.» Därför bör dl.-talet 6 000 fattas och utsägas såsom innehållande sexhundra delar med tio i hvarje del och litertalet 600 fattas och utsägas såsom innehållande 6 delar med hundra i hvarje del.

Utsägandet af 6 000 såsom 600 tiotal försvårar utbytet af 6 000 dl. mot 600 l. Deciliternas antal är dessutom sextusen, ej 6 tusental, hvadan sextusen deciliter ej bör utbytas mot 6 tusental deciliter.

17. För att ännu tydligare fästa uppmärksamheten vid de större talenheterna, hvaraf högst nio tänkes förekomma i talet, betonas sammanfattningen af tio mindre enheter till en större enhet oftast på följande sätt:

tio = 1 tiotal,
tio tal tio (= hundra tal 1) = 1 hundratal,
tio tal hundra (= tusen tal 1) = 1 tusental,
tio tal tusen = 1 tiotusental,
tio tal tiotusen = 1 hundratusental,
tio tal hundratusen = 1 milliontal.

Där märkes, att entalet tio motsvaras af tiotalet ett,
tiotalet tio eller entalet hundra motsvaras af hundratalet 1,
hundratalet tio eller entalet tusen motsvaras af tusentalet 1,
tusentalet tio eller entalet tiotusen motsvaras af tiotusentalet 1,
tiotusentalet tio eller entalet hundratusen motsvaras af hundratusentalet 1,
hundratusentalet tio eller entalet million motsvaras af milliontalet ett.

Med den utgångspunkten utsäges talet trehundrafemtisex oftast så för att betona de däri ingående större enheterna: tre hundratal fem tiotal sex ental eller tre hundratal fem tiotal sex. Då urskiljas 6 eller 5 ord vid talets utsägande.

Enklast utsäges så väl nyss anförda tal som andra tal på de 2 sätt, som angifvits förut, i § **16.** Endast de 2 sätten göra innebörden af en konkret storhet lättfattlig. Ex. Trehundrafemtisex kronor. Därmed menas en penningsumma, som består af trehundrafemtiosex delar med 1 krona i hvarje del. Kronornas antal (= krontalet) är trehundrafemtisex. Lika väl som talet trehundrafemtiosex kan uppdelas i de 3 delarna trehundra, femtio och sex, så kan penningsumman uppdelas i trehundra kronor, femti kronor och sex kr. — Uppdelningen af talet i tre hundra fem tio och sex motsvaras af penningsummans uppdelning i tre hundrakronor, fem tiokronor och 6 enkr. — Talet kan visserligen uppdelas i tre hundratal, fem tiotal och sex ental, men aldrig uppdelas penningsumman i det dagliga lifvet så: tre hundratal kronor, fem tiotal kronor och 6 ental kronor. Detta beror därpå, att man vill betona penningsummans delar, såsom innehållande lika stora penningenheter eller olika stora penningenheter, men icke vill betona olika stora talenheter. I sammanhang därmed står, att orden tio och krona sammanfattats i en ny enhet tiokrona. — Däremot sammanfattas aldrig orden tiotal och krona till ordet tiotalskrona.

Stundom säges väl hundratals barn, tusentals kronor och dylikt i st. f. flera hundra barn, många tusen kronor o. d., men detta beror mest därpå, att talsorten kallats hundratal, tusental o. s. v.

De större talenheternas utsägande så som i denna § medför 2 olägenheter. Först förloras därigenom sammanhanget mellan ren hufvudräkning och skriftlig räkning. Grund för hufvudräkningen är nämligen talens utsägande på det i § **16** angifna sättet. För det andra blir det därigenom äfven svårare att uttrycka somliga konkreta storheter på olika sätt, emedan bestämda tabeller ligga till grund för de olika utsägesätten. Ex. 1 m. = tio decimeter. Där står icke 1 m. = 1 tiotal decimeter. Däraf följer, att 3 m. bör utbytas mot trettio decimeter, men däraf följer icke, att 3 m. bör utbytas mot 3 tiotal decimeter.

Deras utsägande enligt denna § medför den fördelen, att de framträda tydligare för barnen såsom enheter. Detta vinnes dock genom att utbyta tio mot ett tio, hundra mot ett hundra, lika väl som man brukar utbyta tusen mot ett tusen, krona mot 1 krona, öre mot ett öre, då enheten skall betonas. (Dock har för en tid de hela talens sortnamn enligt den s. k. Folkskolebokskommitténs betänkande af den 24 mars 1887 fastslagits såsom ental, tiotal, hundratal, tusental o. s. v.).

Benägenhet finnes att införa ordet tio och böja ordet hundra (hundror), när sorten skall betonas eller flera dylika enheter angifvas. Det är onödigt och delvis vilseledande. Se småstilsstycket i § 5! Ordet tusen bibehålles, fastän oböjligt. Lika väl kunna de oböjliga orden tio och hundra användas i dylika fall. Det alldagliga uttrycket »tiornas antal» har samma innebörd som det fullständigare: »tiokronornas antal». Likaså är »hundrornas antal» = »hundrakronornas antal». Emellertid vinnes en fördel genom att använda ordet tia och det böjda ordet hundra såsom talsortnamn i st. f. orden tiotal och hundratal, i det att de fullkomligt motsvara bråksorternas namn tiodel, hundradel, så att ordet tiotal sedan fullt motsvaras af ordet (krontal, metertal,) hundradelstal o. s. v.

Säkrast vinnes fasthet i uttrycket genom att icke använda frågan: »Huru många äro tiorna (hundrorna)?» utan i stället fråga: »Huru många tio (hundra) finnas?» Den frågan är lika enkel och tydlig som: »Huru många tusen finnas?» I st. f. att fråga: »Huru många äro tiotalen (hundratalen o. s. v.)?» bör man hellre fråga: »Huru stort är tiotalet (hundratalet o. s. v.)?» Det är i hvarje fall blott ett enda tal, ehuru det kan vara mycket stort eller mycket litet.

18. Det finnes således många sorter af hela tal. Men alla dessa tal kunna tänkas bestå af blott grundenheter. Och fördenskull innehålla alla sammansatta hela tal antal af samma sort (sorter) som delarna.

De sorter, som ligga i talen själfva, såsom grundenhet, tio, hundra, tusen, (tiotusen, hundratusen), million, milliard o. s. v., kallas **talsorter.**

Om orden ental, tiotal, hundratal, tusental o. s. v. kallas talsorter, så blifva äfven tiodelstal, öretal, krontal, metertal, årtal, litertal o. s. v. talsorter.

Märk! Vid utsägande af de hela talen betonas i allmänhet icke någon sort, utan utsäges blott antalet af de däri ingående grundenheterna.

B. Bråkens innebörd.

19. Grundenheten kan delas. Genom dess fördelning i lika delar bildas nya tal. Hvarje del är ett tal och en enhet. Ex. en half, en trettiodel. Talet en half innehåller en af de två lika delar, i hvilka grundenheten delats, eller en af de två lika delar, som grundenheten innehåller, eller en af grundenhetens två lika delar.

20. Dessa mindre enheter äro sedan utgångspunkter för bildandet af andra tal, som innehålla få eller många sådana enheter. Af en half bildas sålunda två halfva, tre halfva o. s. v. Talet fem trettioendelar består af fem tal (= fem delar) så stora som en trettioendel eller innehåller fem af grundenhetens trettioen lika delar. Talet tretton halfva består af tretton tal (= delar) med en half i hvarje del eller innehåller tretton delar, då hvarje del är så stor som en af de delar, hvilka uppstå genom grundenhetens lika tvådelning.

21. De tal, som innehålla en eller flera lika delar af grundenheten (talet 1), kallas brutna tal eller **bråk** och äro af annan sort än de hela talen.

De bråk, som innehålla blott en del, kallas **stambråk.**

22. Alla de bråk äro af samma sort, hvilka uppstå genom grundenhetens lika tvådelning. Likaså äro de genom grundenhetens lika tredelning uppkomna bråken sinsemellan af samma sort, men af olika sort mot de förra. Emedan grundenheten kan tänkas delad i lika delar på nästan otaliga sätt, *blir bråksorternas antal synnerligen stort.*

23. Bråkenheternas namn grundas på deras antal i talet 1. Då 1 innehåller 14 sådana, är enhetens namn fjortondel. Bråkens sortnamn äro alltså sammansatta ord. Den första delen däraf angifver, huru många bråkenheter talet 1 innehåller, och den andra delen är ordet »del». De tretton första bråksorterna blifva alltså: **tvådel, tredel, fyradel, femdel, sexdel, sjudel, åttadel, niodel, tiodel, elfvadel, tolfdel, trettondel** och **fjortondel.**

De 13 första bråksorterna heta nu: half, tredjedel, fjärdedel, femtedel, sjettedel, sjundedel, åttondedel eller åttondel, niondedel eller niondel, tiondedel eller tiondel, elftedel, tolftedel, trettondedel eller trettondel, fjortondedel eller fjortondel. I Sv. Akademiens Ordlista förekomma åttondedel och åttondel, niondedel och niondel, tiondedel och tiondel. Språkbruket sträfvar mot den kortare formen. I st. f. tjuguendedel användes nog nu uteslutande tjuguendel och i st. f. hundradedel användes oftast hundradel. *Oegentligt*, ja, försvårande vid undervisningen *är att*, så som nu sker, *förbinda ordet del än med tydliga ordningstalsformer, än med tydliga grundtalsformer.*

Bäst vore då, att söka åstadkomma enhet i bildning af bråksorternas namn så, som förut nämnes. *) **Märk utsägandet af [illegible], [illegible] i § 54!**

På landsbygden säges stundom treding i st. f. tredjedel.

24. Hvarje bråk innehåller antal af bestämd sort och måste därför utsägas med samt skrifvas i två ord. Det första ordet angifver bråkdelarnas antal i bråket, och det andra angifver sorten. Ex. tre sjuttondelar.

Här skiljes noga mellan det antal, som bråket innehåller, och bråksorten. I bråket 4 femdelar är 4 det antal, som bråket innehåller, och femdel är sorten.

Då heltalssorten skall betonas vid de hela talens utsägande, fordras äfven 2 ord. Ex. Fyra tusen, fyra hundra, fjorton tio. Se § 16!

Fästa vi oss vid ordens betydelse i talen 4 femdelar och 4 tusen. så märkes, att delarnas antal är lika i båda, näml. fyra. Sorten är femdel i det första talet och tusen i det andra talet. Fyra, som är femdelarnas antal i talet 4 femdelar, kallas för den skull femdelstal i det första talet och tusental i det andra talet. — *Orden ental, tiotal, hundratal o. s. v. motsvaras alltså i bråkläran af orden tvådelstal, tiodelstal, femtondelstal o. s. v.*, då vi fästa oss vid ordbildningen för att finna namn på de i talen ingående antalen.

25. Emedan grundenhetens fördelning är den omedelbara grunden för bråks bildande, så skola bråken uppfattas i omedelbart sammanhang med grundenhetens fördelning och jämnsides med deras utsägande. Till följd däraf uppfattas bråken en tiodel, en femtondel lika lätt som bråket en tvådel. Bråkenheternas storlek (storhet eller litenhet) har alltså ingen betydelse, då vi vilja fatta deras innebörd.

26. Liksom man kan åskådliggöra de hela talens bildning genom att hopa en kula (tärning) till en eller flera kulor (tärningar), så kan man äfven i vissa fall omedelbart visa, att allt mindre storheter uppstå genom att dela något i lika delar och sedan dela en (eller flera) af dem i lika delar. Sålunda kan visas, att de största lika delarna uppstå genom delning af det hela i två lika delar, att mindre delar uppstå genom en sådan, stor dels delning i 2 lika delar och att sedan allt mindre delar uppstå genom fortsatt likadelning af de sist funna delarna.

Fästa vi oss vid tal, så blir gången följande. Talet 1 innehåller 2 tvådelar. En 2-del delas i 2 lika delar. Den 2-delen innehåller alltså 2 mindre delar; den andra 2-delen likaså; fördenskull innehåller 1 fyra mindre, lika delar, och till följd däraf är hvarje sådan del en 4-del. På det sättet kan man visserligen sedan tänka sig uppkomsten af mindre bråkenheter, såsom en 8-del, en 16-del, en 32-del, o. s. v.

---

*) I författarens räkneböcker användas tillsvidare uteslutande ordningstalsformer i första delen af sortnamnen. Där står tiondedel, icke tiondel.

Men sättet är icke godt, ty omvägen är lång. Dessutom är sättet omöjligt i många fall, såsom för att klargöra uppkomsten af en 5-del, en 7-del o. s. v.

27. Obefogadt är det påståendet, att innebörden af talet en tiodel lättare uppfattas därigenom, att man först tänker sig uppkomsten af en 2-del eller af en 5-del. I det förra fallet skulle uppfattningen underlättas på det sättet, att en linje lika tvådelades och de då uppkomna delarna sedan lika 5-delades.

Lärjungarnas tankegång skulle då blifva ungefär följande. Det hela är deladt i 2 lika delar. Hvarje sådan del är delad i 5 lika delar. Alltså är det hela slutligen deladt i tio lika delar, hvadan hvarje sådan del är en tiodel.

Här bör märkas, 1) att denna delning ej kan utföras på fri hand inför lärjungarna, 2) att linjen förblandas med talet 1, och 3) att lärjungarna alltid måste eftertänka, huru många mindre delar det hela innehåller, innan hvarje dels storlek kan angifvas, hvadan tanken på större delar blir öfverflödig, ja, vilseledande.

Enklast blir tydligen att hafva linjen på förhand lika tiodelad och sedan på vanligt sätt beräkna delarnas antal, då åskådning lägges till grund för uppfattning af det bråkets storlek.

Allra bäst uppfattas bråket 1 tiodel, då man tänker, att det innehåller en af grundenhetens tio lika delar.

28. Då man vill genom åskådning förmedla uppfattningen af bråks innebörd, bör man således hafva färdiggjord materiel, som är lämplig för det omordade fallet. Ex. en stång, som är lika 2-delad; en annan, som är lika 3-delad; en tredje, som är lika 4-delad; o. s. v. Eller en linje, som är lika 2-delad; en annan, lika lång linje, som är lika 3-delad; o. s. v. Se slutet af § 91!

Därvid äger alls ingen jämförelse rum mellan olika stora delar.

29. Af bråken uppmärksammas nu särskildt de, mellan hvilkas enheter förhållandet är det samma som mellan de hela talens enheter, så att en större bråkenhet innehåller tio närmast mindre enheter. De kallas fördenskull **decimalbråk.**

Ordet decimalbrak härledes af latinska ordet *decem*, som betyder tio.

Till följd af detta sammanhang mellan decimalbråkens enheter bestämmas sortnamnen och enheternas storlek på följande sätt.

Den första af dessa bråkenheter bildas genom grundenhetens lika tiodelning. Alltså är den en **tiodel.** Den skall innehålla tio af nästa sort, hvadan grundenheten innehåller hundra dylika delar. En af dem är alltså 1 **hundradel.** En hundradel innehåller tio enheter af nästa sort. Däraf innehåller grundenheten således tusen, och följaktligen är den nya enheten en **tusendel.** De följande enheterna blifva **1 tiotusendel, 1 hundratusendel, 1 milliondel, 1 tiomilliondel** o. s. v.

Decimalbråkens sorter äro alltså få, och blott de 4 första användas mera allmänt.

Vid decimalbråks utsägande säges blott en sort. Ex. Tvåhundratre tusendelar.

Beaktansvärd är den motsvarighet, som finnes mellan de hela talens sorter och decimalbråkens sorter, ex. mellan tio och tiodel, mellan hundra och hundradel, mellan tusen och tusendel. Den motsättningen äger emellertid rum, att heltalssorterna blifva allt större, under det att decimalbråkssorterna blifva allt mindre.

---

30. Sammanfattning. 1) **Både hela tal och bråk innehålla** en eller flera enheter af bestämd sort, hvilken utsäges utom i det fall, att den är den minsta heltalssorten, då den är självklar.

Ex. 7. 3 tio = 1 tio + 1 tio + 1 tio.

Ex. 8. 3 fyradelar = 1 fyradel + 1 fyradel + 1 fyradel.

Den sort, som ligger innesluten i talet, kallas **talsort.**

Talet 3 kallas *tiotal* i ex. 7, *fyradelstal* i ex. 8.

2) Alla uttryck, hvilka bestå af tal och konkret sort, angifva något, som innehåller en eller flera konkreta enheter.

Ex. 9. a) 3 m. = 1 m. + 1 m. + 1 m.
b) 3 kvm. = 1 kvm. + 1 kvm. + 1 kvm.
c) 3 l. = 1 l. + 1 l. + 1 l.
d) 3 fyradels hl. = 1 fyradels hl. + 1 fyradels hl. + 1 fyradels hl.

En meter är ett längdmått, talet 3 i ex. 9 a) angifver längdmåttens antal i längden 3 m. Därför kallas 3 där *längdmåttstal.* Tre kallas *ytmåttstal* i ex. 9 b), *rymdmåttstal* i ex. 9 c). För att närmare bestämma det ifrågavarande måttets beskaffenhet kallas 3 *metertal* (i st. f. t. ex. dm.-tal) i ex. 9 a), *kvm.-tal* (i st. f. t. ex. kvmm.-tal) i ex. 9 b), *litertal* (i st. f. t. ex. hl.-tal) i ex. 9 c). I ex. 9 d) äro 3 fyradelar och 1 fyradel *hektolitertal.*

Sålunda hafva alla tal namn och namn efter den enhet (sort), af hvilken de beteckna antal.

Talens beteckning.

A. Med blott siffror.

a. De hela talens beteckning.

31. Taltecknen kallas siffror. Blott tio siffror finnas. Af dem beteckna endast nio ett antal. De antalbetecknande siffrornas namn äro: etta, tvåa, trea, fyra, femma, sexa, sjua, åtta och nia. Den tionde siffran kallas nolla.

Blott två siffernamn lyda lika som motsvarande talord, nämligen fyra och åtta. Siffernamnen fyra, åtta äro böjliga, men talorden fyra och åtta äro oböjliga.

Detta är äfven ett skäl att icke använda de feminina orden tia och hundra i st. f. de oböjliga neutrala orden tio och hundra.

I modersmålet är man nu synnerligen angelägen att inskärpa olikheten mellan ljud och ljudtecken. I räkning har man föga vinnlagt sig om att inskärpa olikheten mellan tal och taltecken (siffra).

32. Genom sammanställning af siffror kunna huru stora tal som helst betecknas på ett enkelt sätt, i det att siffrans plats angifver, af hvilken sort det antal är, som hon betecknar.

Hvarje sort utmärkes af sitt bestämda rum: minsta sorten af rummet längst till höger, andra sorten af andra rummet från höger, tredje sorten af tredje rummet från höger, o. s. v. Det finnes alltså *enhetsrum*, *tiorum*, *hundrarum*, *tusenrum*, *tiotusenrum*, *hundratusenrum*.

Om rummen kallas entalsrum, tiotalsrum, o. s. v., så skola decimalbråkssiffrornas rum kallas tiodelstalsrum, hundradelstalsrum.

En sexa kan således stå i olika rum. Då hon står i första rummet (= rummet längst till höger) betecknar hon talet sex (= sex grundenheter). Då hon står i det andra rummet från höger (= tiorummet) betecknar hon sex tio eller sexti, alltså ett tal, som är tio gånger så stort som det förra. Ställes hon i tredje rummet från höger, så betecknar hon sex hundra eller ett tal, som är hundra gånger så stort som sex eller tio gånger sex tio eller tio gånger sexti.

Beteckning af utsagda tal.

33. A. Då eftertänkes först, i hvilken eller hvilka sorter det kan uttryckas så, att antalet icke i någon del öfverstiger nio, eller i hvilket rum de antalbetecknande siffrorna skola skrifvas. De öfriga fyllas med nollor.

Ex. 10. Talet sjuhundra.

Hundratalet är sju. Däraf förstås, att det skall betecknas med en sjua i hundrarummet, d. v. s. tredje rummet från höger, hvadan det betecknas: 700.

Ex. 11. Talet trehundrafem.

Talet uppdelas först i trehundra och fem. Hvarje dels beteckning eftertänkes. Alltså betecknas talet med en trea i tredje rummet och en femma i första rummet från höger. Beteckning: 305.

Ex. 12. Talet åttahundrafemtio.

Förfaringssätt: 1) uppdelning i de två delarna åttahundra och femtio, 2) eftertänkande af sättet att beteckna hvarje del, 3) beteckning: 850.

Ex. 13. Talet tvåhundratjugutre.

Förfaringssätt: 1) uppdelning i tre delar: tvåhundra, tjugu och tre, 2) eftertänkande af delarnas beteckning, 3) beteckning: 223.

Ex. 14. Talet sjuttiosex tio.

Förfaringssätt: 1) uppdelning i två delar sjuttio tio och sex tio, 2) utbyte af sjuttio tio mot sju hundra, 3) beteckning: 760.

B. Stomtalen tusen och million enligt talserierna f) och g) i § 11 kunna också läggas till grund för beteckning af tal, tillhörande de serierna.

a. Före beteckning af talet tusen skall beteckningen af talet niohundranittionio vara känd. Emedan tusen är den fjärde enheten fordras fyllande af a) 4 rum, då tusentalet är högst nio, b) 5 rum, då tusentalet är större t. o. m. nittinio, c) 6 rum, då tusentalet är större t. o. m. niohundranittinio.

Ex. 15. Fyrtitusensextiåtta.

Första delen är fyrtitusen. För dess beteckning fyllas femte rummet med en fyra och fjärde rummet med en nolla. Den andra delen är sextiåtta. För dess beteckning måste andra rummet fyllas med en sexa och första rummet med en åtta. Det tredje rummet fylles med en nolla. Beteckning alltså: 40 068.

Ex. 16. Trehundratolftusensju.

Beteckning af talet trehundratolf eftertänkes. Det betecknas. Tvåan skall stå i fjärde rummet. Sju betecknas med en sjua i första rummet. Alltså fyllas tredje och andra rummen med hvar sin nolla, och betecknas talet så: 312 007.

b. Före beteckning af talet million skall beteckning af talet niohundranittiniotusen-niohundranittionio vara inlärd. Emedan million är den 7:e enheten, fordras fyllande af a) 7 rum, då milliontalet är högst 9, b) 8 rum, då milliontalet är större än 9 och högst 99, c) 9 rum, då milliontalet är större t. o. m. 999, o. s. v.

Ex. 17. Femhundraåtta-millioner-sjutusentretton.

För dess beteckning fordras fyllande af 9 rum. Nionde, åttonde och sjunde rummen fyllas för beteckning af entalet femhundraåtta. Tusentalet är sju, alltså skrifves en sjua i fjärde rummet. För beteckning af talet tretton fyllas andra och första rummen. De mellanvarande fyllas fördenskull med nollor. Beteckning alltså: 508 007 013.

34. På grund däraf, att orden tio och hundra upprepas vid utsägande af somliga tal samt tusen är utgångspunkt för utsägande af stora tal, bruka stora tal afdelas i tresiffriga delar från höger till vänster. Förr användes skiljetecken mellan dessa delar, men nu brukas allt mera att blott göra mellanrummet större före hvar fjärde siffra. Se ex. 15—17!

Skiljetecknet komma (,) är olämpligt, eftersom detta tecken är det lämpligaste skiljetecknet för att afskilja decimalerna från heltalssiffrorna.

Uppfattning och utsägande af betecknade, flersiffriga tal.

35. Därvid utgår man från de antalbetecknade siffrornas plats.

Ex. 18. Talet 6 000.

Det kan uppfattas: 1) såsom innehållande 6 delar med tusen i hvarje del, 2) såsom innehållande sextio delar med hundra i hvarje del, 3) såsom innehållande 600 delar med tio i hvarje del och 4) såsom innehållande sextusen delar med 1 i hvarje del.

Det utsäges således: 1) sex tusen, 2) sextio hundra, 3) sexhundra tio, 4) sextusen.

Redogörelse för utsägssätten 2) och 3). — 2) Talet innehåller 6 delar med tusen i hvarje del; tusen = tio hundra; alltså innehåller det 6 delar med tio hundra i hvarje del eller sextio hundra. 3) Emedan talet innehåller

6 delar med tusen i hvarje del och hvarje del innehåller hundra tal tio, så innehåller hela talet sexhundra tal tio.

Emedan blott *en* antalsbetecknande siffra finnes, utsäges talet i alla fallen i blott *en sort. Då blott en sort säges, säges talet ouppdeladt.*

Eftersom den fjärde innebörden af talet omedelbart kan härledas af den första, så kan den äfven angifvas såsom den andra i ordningen.

Märk! I sammanhang härmed märkes lätt följande sätt att utan ansträngning kunna rätt utsäga ett betecknadt flersiffrigt tal vare sig i en eller flera sorter: *Antalet af en viss sort finnes genom att medtaga alla siffrorna i talet från dess början, sedt från vänster, till och med det rum, som utmärker den sorten.* Då 6 000 utsäges såsom sexhundra tio, medtagas sexan och de två första nollorna eller siffrorna till och med tiorummets siffra.

Ex. 19. Talet 704.

Emedan tredje och första rummen äro fyllda med antalbetecknande siffror, uppdelas det först i 2 delar: sju hundra och fyra. Det innehåller alltså 1) 7 delar med hundra i hvarje del och en del fyra, 2) 70 delar med tio i hvarje del och en del fyra eller 3) sjuhundrafyra delar med 1 i hvarje del. Alltså kan det talet utsägas på tre sätt: 1) sju hundra fyra, 2) sjutti tio fyra, 3) sjuhundrafyra. I 1) och 2) är talet uppdeladt, i 3) är det däremot icke uppdeladt, emedan ingen sort betonas.

Ex. 20. Talet 350.

Emedan de två antalbetecknande siffrorna stå i hundra- och tiorummen, uppdelas talet i de 2 delarna: 3 hundra och 5 tio. Det innehåller alltså: 1) 3 delar med hundra i hvarje del och 5 delar med tio i hvarje del, 2) tre delar med hundra i hvarje del och femti delar med 1 i hvarje del, 3) 35 delar med tio i hvarje del eller 4) trehundrafemtio delar med 1 i hvarje del. I de 2 sista fallen äro delarna lika stora. Det bör följaktligen utsägas på följande sätt: 1) tre hundra fem tio, 2) tre hundra femti, 3) trettiofem tio och 4) trehundrafemtio. — Emellan 3) och 4) kan ordningen med fördel omkastas, emedan det fjärde sättet är lätt funnet af första och andra sätten. I 1) och 2) utsäges talet uppdeladt, i 3) och 4) däremot äro de båda delarna mer sammanfattade, och säges talet utan uppdelning. I 3) säges blott en sort.

Ex. 21. Talet 619.

Emedan alla 3 rummen äro upptagna af antalbetecknande siffror, uppdelas talet först i 3 delar, sedan i 2 olika delar och slutligen sammanfattas delarna. Det innehåller alltså 1) sexhundra + tio + nio, 2) sexhundra + nitton eller 3) 61 tal tio + 9 eller 4) sexhundranitton.

36. Sammanfattning. Vid uppfattning af ett betecknadt helt tal beaktas 1) det antal hvarje siffra betecknar, 2) det rum hon intager i det betecknade talet, 3) att en siffra »vid flyttning ett steg åt vänster» betecknar ett tio **gånger så stort tal** som förut, »vid flyttning två steg åt **vänster» betecknar** ett hundra gånger så stort tal som förut o. s. v. och 4) att en siffra »vid flyttning ett steg åt höger» betecknar ett tal, som är en tiodel af det hon förut betecknade, »vid flyttning två steg åt höger» betecknar ett tal, som är en hundradel af det hon förut betecknade, o. s. v.

37. Beteckning af hela tal och uppfattning af betecknade **hela tal på detta sätt sker efter** den s. k. **positionsgrundsatsen.**

Position betyder ställning, plats.

Detta sätt att skrifva talen uppfanns af hinduerna, som äfven uppfunno nollan. **Före dess uppfinnande kunde talen icke betecknas så enkelt.**

De öfriga siffrorna uppfunno hinduerna eller araberna. Ursprungligen voro taltecknen mycket olika de nuvarande siffrorna.

38. Egyptiorna hade fordom särskilda tecken för talen en, tio, hundra, tusen, tiotusen, hundratusen, million och tiomillion.

Grekerna hade särskilda tecken för talen en, fem, tio, hundra, tusen och tiotusen.

Romarne hade tecken för talen en (= I), fem (= V), tio (= X), femtio (= L), hundra (= C), femhundra (= D) och tusen (= M). De fogade erforderligt många tecken till hvarandra. Talet 33 betecknades så: XXXIII. **Då grundades talens beteckning på sammanläggning.** Emellertid sammanställdes högst tre lika tecken. **I andra fall sattes** ett tecken med mindre betydelse före ett tecken med större betydelse för att utmärka, att ett mindre tal var taget från ett större. Ex. IV = 4; IX = 9; XL = 40; XC = 90. Då grundades talens beteckning på frådragning. — **Ett tal, som innehöll tusenfald af ett annat, på vanligt sätt betecknadt tal, utmärktes genom ett streck öfver det senare talets siffror, och millionfald af det utmärktes dessutom af en klammer.**
Ex. 32 005 = $\overline{\mathrm{XXXII}}\mathrm{V}$; 4 008 017 = $|\overline{\mathrm{IV}}|\overline{\mathrm{VIII}}\mathrm{XVII}$.

b. **Decimalbråkens beteckning.**

39. Emedan decimalbråksenheterna stå i samma förhållande **till hvarandra som heltalsenheterna till hvarandra,**

så kunna decimalbråken betecknas på samma sätt som de hela talen.

Decimalbråkssiffrorna kallas då *decimaler*.

Därvid märkes, att första decimalen skiljes från första heltalssiffran genom ett komma eller en punkt. Det förra skiljetecknet är lämpligt; det senare är olämpligt, emedan punkt har för stor betydelse i andra fall för att här skilja så nära samhörande delar af ett tal från hvarandra, samt emedan punkt på senare tider börjat användas såsom mångfaldstecken i st. f. $\times$, som liknar ett slarfvigt skrifvet *x*.

Rummen hafva namn efter sorterna. Sorternas namn äro tiodel, hundradel o. s. v. Se § 29! Rummens namn blifva alltså: *tiodelsrum*, *hundradelsrum*, *tusendelsrum*, *tiotusendelsrum*, *hundratusendelsrum*, *milliondelsrum*, *tiomilliondelsrum*, *hundramilliondelsrum* o. s. v.

Om heltalsrummen kallas entalsrum, tiotalsrum, o. s. v., så skola decimalrummen kallas tiodelstalsrum, hundradelstalsrum o. s. v.

Ex. 22. Beteckna a) 1 tiodel, b) 7 tiodelar, c) 49 tiodelar!

a) Emedan tiodel är den högsta decimalsorten, skola tiodelarnas antal t. o. m. 9 skrifvas i rummet näst efter det första heltalsrummet. Det heltalsrummet måste fyllas. Alltså betecknas 1 tiodel så: 0,1.

b) 7 tiodelar betecknas: 0,7.

c) 49 tiodelar måste först uppdelas, ty tiodelarnas antal öfverstiger 9.

49 tiodelar = 40 tiodelar + 9 tiodelar. 40 tiodelar = 4 (e.). Alltså betecknas 49 tiodelar så: 4,9.

Ex. 23. Beteckna a) 5 hundradelar, b) 83 hundradelar, c) 326 hundradelar!

a) Emedan hundradel är den andra decimalsorten, skall 5 hdlr betecknas med en femma i andra decimalrummet. Alltså betecknas det så: 0,05.

b) 83 hdlr uppdelas i 80 hdlr och 3 hdlr. 80 hdlr = 8 tiodelar. Alltså betecknas det med en åtta i första decimalrummet och en trea i andra decimalrummet eller 0,83.

c) 326 hundradelar uppdelas i 3 delar: 300 hundradelar, tjugu hdlr och 6 hdlr. 300 hdlr = 3 (e.); tjugu hdlr = 2 tiodlr. Alltså betecknas det med en trea i första heltalsrummet, en tvåa i första och en sexa i andra decimalrummet eller 3,26.

Ex. 24. Beteckna 61 milliondelar!

61 milliondelar = 60 milliondelar + 1 milliondel. 60 milliondelar = 6 hundratusendelar. Hundratusendel är den femte decimalsorten och milliondel den sjette decimalsorten; alltså skola de 4 första decimalrummen fyllas med nollor, och betecknas 61 milliondelar så: 0,000061.

Sammanfattning. Den första decimalsorten fordrar fyllandet af första decimalrummet (= fyllande af både första heltalsrummet och första decimalrummet), andra decimalsorten fordrar fyllandet af de 2 första decimalrummen,... den sjette decimalsorten fordrar fyllandet af 6 decimalrum, o. s. v.

40. Enligt föregående sammanfattning och på grund däraf att ett decimalbråk utsäges i blott en sort, äfven om det kan uppdelas i delar, uttryckta i olika sorter, såsom i ex. 22 c), 23 b) och c) samt 24 här ofvan, gifves en annan utgångspunkt för beteckning af sådana bråk, delarnas antal må vara huru stort som helst. Då eftertänkes först det erforderliga decimalantalet (= de erforderliga decimalrummens antal), sedan det för beteckning af delarnas antal erforderliga sifferantalet och slutligen de dessutom erforderliga nollornas antal.

Ex. 25. Beteckna fyrahundrafem hundratusendelar!

Hundratusendel är den femte decimalsorten, alltså fordras 5 decimaler (eller måste 5 decimalrum fyllas). Delarnas antal är fyrahundrafem. För det talets beteckning fordras 3 siffror, och de blifva de 3 sista decimalerna (= och de skola stå i de 3 sista decimalrummen). För den skull måste de 2 första decimalerna vara nollor. (= Därför måste de 2 första decimalrummen fyllas med hvar sin nolla.) Talet betecknas så: 0,00405.

Ex. 26. Beteckna sjutusennitton tiomilliondelar!

Tiomilliondel är den sjunde decimalsorten. Delarnas antal är sjutusennitton. Vid beteckning af det antalet fyllas de 4 sista decimalrummen. Alltså skall ett heltalsrum och de 3 första decimalrummen fyllas med hvar sin nolla. Beteckning: 0,0007019.

Decimalerna skola skrifvas mindre än heltalssiffrorna.

B. Med siffror och andra tecken.

41. För **beteckning af bråk i allmänhet** fordras 2 tal och ett streck, »bråkstrecket». Det första talet angifver bråkenheternas antal i bråket, det andra talet angifver deras antal i talet 1. Ex. $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{10}$.

Det förra talet kallas *täljare;* det andra talet kallas *nämnare*, emedan det talet leder tanken till sortens namn.

Detta beteckningssätt är fördelaktigare så till vida, att man omedelbart kan afläsa, huru många delar grundenheten innehåller.

Genom den beteckningen märkes ock, att det finnes ett samband mellan hela tals likadelning och bråk, i det att en tre-del af 2 är = 2 tredelar af 1 eller 2 tredelar.

42. På grund af det sambandet säges stundom, att allmänna bråk äro betecknade, men outförda divisioner, och decimalbråk äro utförda divisioner. Men detta är orätt. $\frac{7}{10}$ är nog 7 tiodelar lika väl som 0,7, då man utgår från grundenhetens fördelning. För öfrigt kunna alla decimalbråk betecknas på 2 sätt: antingen på det för dem egendomliga sättet, motsvarande de hela talens beteckning (Se §§ **39** och **40**!), eller på samma sätt som de andra bråken.

Endast rörande stambråken kan ett sådant påstående *skenbart* gälla, att ett allmänt bråk är en betecknad division, ex. $\frac{1}{3}$. Där märkes nämligen både den för bråks uppkomst nödvändiga grundenheten, som är delad i 3 lika delar, och bråkdelarnas antal, hvilket äfven är 1. Att påståendet emellertid ej är riktigt, inses däraf, att division är ett räknesätt, men bråket är ett tal.

---

43. Sedan längre tid tillbaka hafva dessutom både siffror och förbindelsetecken användts för att beteckna tal, då man på samma gång velat angifva, huru det betecknade talet uppstått.

Ex. 27. $4 + 7 + 3 = 14$.

Då $4 + 7 + 3$ står skrifvet, uppmanas lärjungen af läraren att uträkna det talet. Med det talet måste då naturligtvis menas $4 + 7 + 3$. Uträknadt blir det 14. Där finnas alltså 2 sätt att beteckna samma tal. Först framträder talet betecknadt före uträkningen, hvarvid det utmärkande är ett särskildt förbindelsetecken (+), sedan framträder det betecknadt efter uträkningen, då det är betecknadt med blott siffror. Då talen 4, 7 och 3 förbindas med hvarandra genom +, angifves, att de äro delar af det sammansatta talet 4 + 7 + 3 eller 14 eller att 14 vid det tillfället innehåller just de delarna.

Likhetstecknet mellan 4 + 7 + 3 och 14 bevisar äfven, att 4 + 7 + 3 är **ett** tal.

Då 4 afskilts från 18, återstår också 14. För att angifva talets uppkomst på det sättet förbindes 4 med 18 genom ett sådant tecken, att det synes skjutet åt sidan eller afskildt från 18. Därvid betecknas talet så som i ex. 28.

Ex. 28. 18—4. Uträknadt blir det 14.

Ofvan i ex. 27 syntes, att 14 bestod af de 3 talen (delarna) 4, 7 och 3. Det kan innehålla andra tal och alla lika stora, såsom 7 tal 2. Då betecknas talet före uträkningen så som i ex. 29.

Ex. 29. a) $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ eller 7×2.

Talet 14 kan ock vara en af de 2 lika delar, som 28 innehåller. För att betona detta betecknas talet så som i ex. 30.

Ex. 30. a) $28 : 2$ eller b) $\frac{28}{2}$ eller c) $\frac{1}{2} \times 28$.

Talet 14 kan ock vara de lika delarnas antal, då 28 är deladt så, att hvarje del är 2. Det betecknas då såsom i ex. 30 a) och b). — Det säges då också angifva förhållandet mellan 28 och 2.

Det kan dessutom betecknas på många andra sätt allt efter omständigheterna, men i alla de fallen fordras också både siffror och förbindelsetecken.

Ex. 31. Huru mycket är 1 fyradel af 8? Svar: 2.

a) Med kännedom om blott heltalsläran betecknas 1 fyradel af 8 så: $8 : 4$. Därigenom betonas, att antalet af de då ifrågasatta lika delarna är 4.

b) Efter kännedom om bråkläran kan det betecknas så: $\frac{1}{4} \times 8$. Därigenom tillkännagifves tydligare, att talet innehåller *en* af de 4 lika delarna i talet 8.

$8 : 4$ är alltså alldeles det samma som $\frac{1}{4} \times 8$.

Ex. 32. $\frac{3}{4} \times 8$.

Därigenom betonas i sammanhang med beteckningssättet i ex. 31 b), att talet innehåller 3 delar med

$\frac{1}{4}$ af 8 i hvarje del. $\frac{3}{4} \times 8$ kan alltså utbytas mot $\frac{8}{4} + \frac{8}{4} + \frac{8}{4}$ eller $3 \times \frac{8}{4}$.

Ex. 33. $\frac{18}{9}$.

Strecket mellan 18 och 9, hvilket i heltalsläran utsäges »deladt med» sammansluter 18 och 9 så med hvarandra, att $\frac{18}{9}$ angifver antingen 1) en af de 9 lika delarna i talet 18 eller 2) delarnas antal, då 18 delats så, att hvarje del är 9 (i detta fall är strecket förhållandetecken) eller 3) ett tal, som innehåller 18 delar med $\frac{1}{9}$ i hvarje del.

Ex. 34. Huru stor är hvarje del, då a) 2 kr. delats i 5 lika delar, b) 2 delats i 5 lika delar?

Utredning. a). Den sort, i hvilken penningsumman skall uttryckas för att möjliggöra räkningen är själfklar, emedan en penningsumma, som är mindre än 1 kr., skall uttryckas i öre. En 5-del af 2 kr. = en 5-del af 200 öre = 40 öre.

Annat sätt. Först uppdelas 2 kr. i 1 kr. och 1 kr. Sedan beräknas en femdel af den första kronan, så af den andra kronan och slutligen af 2 kr. — En 5-del af 1 kr. är 20 öre. 2 gånger 20 öre = 40 öre.

b). Hvarje del skall uttryckas i bråksort; men sortens namn? Den bestämmes af delarnas antal i det ifrågavarande fallet. Då 1 delats i 5 lika delar, blir hvarje del 1 femdel. Vid delning af hvilket helt tal som helst i 5 lika delar, innehåller hvarje del ett helt antal af sådana delar (enheter). Och därför må vid behof det hela vid fördelning i 5 lika delar uttryckas i femdelar. En femdel af 2 = en femdel af 10 femdelar = 2 femdelar.

Beteckning: $2 : 5 = \frac{2}{5}$.

Annat sätt för lösning af b). Det hela uppdelas i delarna 1 och 1. En femdel af den första delen är 1 femdel, en femdel af den andra delen är äfven 1 femdel, alltså är en femdel af 2 = 2 femdelar. Detta sätt kan sammandragas så. En femdel af 1 är 1 femdel. 2 är 2 gånger 1. Alltså är en femdel af 2 = 2 femdelar. Detta sätt är enklare, då ett stort helt tal delas i många lika delar. — Det motsvarar det andra sättet i a).

Ex. 35. $18 : \frac{9}{11}$.

Äfven här märkes på grund af beteckningssättet, att a) 18 innehåller 9 lika delar eller b) att 18 innehåller sådana delar, att hvar och en är $\frac{9}{11}$. I a) sammanslutas talen 18 och $\frac{9}{11}$ genom punkterna så, att $18 : \frac{9}{11}$ angifver ett tal, af hvilket 18 är $\frac{9}{11}$; i b) angifver $18 : \frac{9}{11}$ delarnas antal, då 18 delats så, att hvarje del är $\frac{9}{11}$.

Ex. 36. Huru många lass grus köras under 1 vecka, då 8 lass köras dagligen?

Svaret på frågan blir först 6 gånger 8 och sedan, efter uträkningen, 48.

Ex. 37. Huru många öre kosta 4 dl. ättika, då 1 liter ättika kostar 30 öre?

Emedan 4 dl. = 0,4 l., så kosta 4 dl. ättika 0,4 af 30 öre. Svaret på frågan betecknas för den skull: $0{,}4 \times 30$. Uträknadt är det 12.

Ex. 38. En ångbåt går 9 mil på 4 timmar. Huru många mil går han på 8 timmar?

Utredningar. 1. Första frågan: Huru många mil går han på 1 timme? Svar: en fyradel af 9. Betecknadt $\frac{9}{4}$. Andra frågan: Huru många mil går han på 8 tim.? Svar: 8 ggr $\frac{9}{4}$ eller betecknadt $8 \times \frac{9}{4}$.

2. Första frågan: Huru många delar med 4 tim. i hvarje del innehålla 8 tim.? (Eller Huru många gånger gå 4 tim. i 8 tim.?) Svar 2 eller betecknadt $\frac{8}{4}$. Lika många delar med 9 mil i hvarje del innehåller den väg, som båten tillryggalägger på 8 timmar. Svar 2×9 eller $\frac{8}{4} \times 9$. På andra frågan kunna alltså 2 svar erhållas: 1) $8 \times \frac{9}{4}$. 2) $\frac{8}{4} \times 9$. Af beteckningssättet märkes tankegången för svarets erhållande. Båda svaren kunna sedan omföras till ett enda, nämligen $\frac{8 \cdot 9}{4}$ eller, uträknadt, 18.

Ex. 39. 7 lika långa och lika breda bräder täcka $4\frac{2}{3}$ kvm. Huru stor yta täcker 1 tolft sådana bräder?

Efter utredning, motsvarande första utredningen i föregående exempel, befinnes ytans kvm.-tal vara $\frac{12 \cdot 4\frac{2}{3}}{7}$. Svaret på exemplets fråga är tydligen $\frac{12 \cdot 4\frac{2}{3}}{7}$ kvm.

Då förbindelsetecken ingå i det betecknade talet, kan talet vara så uppgifvet från början, såsom i ex. 27—33, och då behöfver lärjungen blott uttrycka talet på ett enklare sätt, efter uträkning. I andra fall måste talets mer sammansatta beteckningssätt först eftertänkas, innan någon uträkning börjar. I de fallen föreligga praktiska exempel (problem) till lösning.

---

44. Sammanfattning. 1. För talens beteckning fordras antingen blott siffror (med eller utan skiljetecken) eller både siffror och förbindelsetecken.

2. På en praktisk uppgift kan talet i frågans svar betecknas på det senare sättet. Därigenom betonas det sätt, på hvilket svaret funnits.

3. Det konkreta svaret på en fråga betecknas på motsvarande sätt. Det afviker från det abstrakta svaret blott genom närvaro af konkret sort.

Märk! Då förbindelsetecken förekomma, synes af beteckningssättet, 1) att plus (+) förbinder alla delar af ett tal med hvarandra samt att det tal, som föregås af eller efterföljes af +, är en del af detta betecknade tal, 2) att minus (—) föregår en del af det tal, som står före tecknet —, och att återstoden är en del af samma tal, 3) att $\times$ eller $\cdot$ förbinder 2 tal så till ett tal, att detta innehåller antingen a) ett eller flera sådana delar som det efter tecknet följande talet eller b) en eller flera jämna delar *af* det *efterföljande* talet, 4) att : eller ett streck mellan ett öfverstående och ett understående tal förbinder 2 tal så med hvarandra till ett tal, att detta innehåller a) en eller flera jämna delar af det *föregående* talet eller b) förhållandet mellan det föregående och det efterföljande talet.

Tals jämförelse med hvarandra.

a. Hela tal.

45. Af sättet för de hela talens bildande är gifvet, att hvarje helt tal, som är större än 1, består af delar, som äro hela tal, samt att det kan jämföras med hvarje del. Den största delen är det näst föregående talet och den minsta delen är talet 1. Om talet 2 undantages, så kunna delarna vara flera än två samt olika stora eller lika stora.

46. Närmast jämföres ett helt tal med det näst föregående talet och med 1. Låtom oss utgå från talet 7!

a) Det följande (— näst större talet) bildas genom att lägga 1 till 7. Alltså kan 8 uppdelas i de 2 delarna 7 och 1. Därmed sammanhänger 1) att 8 är 1 mer än 7, 2) att 7 är 1 mindre än 8. 3) att 8 är 7 mer än 1 och 4) att 1 är 7 mindre än 8.

b) Men 8 består äfven af 8 tal 1 eller 8 delar 1. Då innehåller talet 8 lika delar. När vi närmast fästa oss därvid, säga vi, att 8 är 8 gånger 1. Och då omvändt 1 jämföres med 8, säges, att 1 är 1 åttadel af 8.

Denna jämförelse grundas på talens uppräknande efter hvarandra, och därför är detta uppräknande i ordning först framåt till allt större tal och sedan tillbaka till allt mindre tal synnerligen viktigt.

Fördenskull böra barnen i hemmen och i skolan öfvas att räkna föremålen, och därtill bruka de vara hugade.

I b) angifves »*förhållandet*» mellan talen, först mellan 8 och 1, sedan mellan 1 och 8.

47. Men de hela talen jämföras ock med andra tal än med det näst föregående och med 1. Fördenskull uppdelas de i delar, som äro så stora som de tal, med hvilka jämförelsen sker. Det nyss nämnda talet 8 uppdelas då i delarna 5 och 3 eller 4 och 4 eller 2, 2, 2 och 2 o. s. v.

48. Vid en allsidig behandling af de hela talen blir framställningen af läran om det hela och dess delar osökt och okonstlad. Genom att tidigt inskärpa sammanhanget mellan det hela och dess delar vinnas flera fördelar.

a) Därigenom förstå barnen lätt sammanhanget mellan räknesätten. Huru frågan än lyder i ett framställdt exempel, finnas där anknytningspunkter till talet om det hela och dess delar, utom i det fall att orden produkt och faktorer förekomma i exemplet.

Ex. 40. Greta växlade 25 öre och fick 3 slantar. Två af dem voro tioören. Huru stort värde hade den tredje slanten?

Ex. 41. Axel köpte saker för 27 öre, nämligen 1 blyertspenna för 10 öre, 1 svamp för 6 öre och 1 ask. Huru mycket kostade asken?

Ex. 42. En stock var 3 m. 4 dm. lång, en annan var 2 m. 7 dm. och en tredje var 4 m. 6 dm. Huru långa voro alla tillhopa?

b) Därigenom undvikes i många fall den obestämda betydelsen af ordet »det».

Ex. 43. Huru mycket skall läggas till 5, för att »det» skall blifva 8?

Ex. 44. Huru mycket skall tagas från 4, för att »det» skall blifva 3?

I ex. 43 har »det» betydelsen af »det hela» (= allt), men i ex. 44 har »det» betydelsen af den andra delen.

c) Därigenom blir det möjligt att undvika de af gammalt i oriktig betydelse använda uttrycken: »gånger mer» och »gånger mindre».

Af gammalt användas t. ex. frågorna: »Huru många gånger mer än 1 är 8?» och tvärt om »Huru många gånger mindre än 8 är 1?» Dessa frågor grunda sig därpå, att 8 är mer än 1 och att 1 är mindre än 8. Men lika okonstladt framkomma och lika enkla äro de riktiga frågorna: »Huru många delar 1 innehåller 8?» och »Huru stor del af 8 är 1?» Eller i stället för den förra: »Huru många gånger 1 är 8» eller »Hvilken mångfald (= huru stor mångfald) af 1 är 8?» Dock tycker man ofta, att frågan: »Huru många gånger 1 är 8?» är för kort, och då »förtydligas» hon genom att tillsätta ordet mer. Men därigenom blir den rätta innebörden borttagen.

Att uttrycket »8 är 8 gånger mer än 1» är oriktigt, borde vara tydligt för alla, men det är ej så. Månne dock någon vill medgifva, att »1 gång mer än 1 är 1?» Nej, nog är 1 gång mer än 1 = 2, säger man. Eller uttrycket 1 gång mer än 1 medgifves innebära ett tal, som innehåller 1 och dessutom 1 gång 1. Men då skall väl också »8 gånger mer än 1» innebära ett tal, som innehåller 1 och dessutom 8 gånger 1, eller vara = 9. Somliga barn tänka rätt och säga rätt samt äro beständiga däri, oaktadt läraren säger det oriktiga. Han står här mellan valet att »rätta» det som är rätt, eller rätta det, som är orätt. De flesta ändra det rätta uttrycket till ett oriktigt.

d) Därigenom underlättas öfvergången till bråkläran väsentligt. Då barnen redan i heltalsläran förstått och fått utsäga sådana satser som: »1 är en 8-del af 8» eller »2 är en 16-del af 32», så förstå de omedelbart, att hvarje del är en 8-del af 1, då 1 delats i 8 lika delar. Sedan bringas de lätt till insikt därom, att det är öfverflödigt att utsäga det hela, som är deladt, då det hela är 1, och att således talet 1 hundradel endast kan innebära en hundradel af 1 eller en af delarna, då 1 delats i hundra lika delar. Och därmed har man dessutom vunnit, att barnen kunna omedelbart öfvergå från hela tal till uppfattning af små bråk, således till decimalbråk.

e) Både konkreta storheter och tal kunna vara det hela eller en del af det hela.

49. Lärotiden i skolan medgifver icke allsidig jämförelse mellan synnerligen många tal. Det måste dock ske inom talområdet 1—30, hvarvid talen fördelas i grupper så: 1—5, 1—9, 1—10, tiotalen, 1—19, 1—20, 1—30.

Denna anordning hindrar ej en förberedande öfning i talens uppräknande fram och tillbaka, hvarigenom talens egentliga innebörd framträder.

---

50. Då det hela är tio eller större än tio och utsäges i större sort eller både större och mindre sorter, måste den ena eller båda (alla) delarna också vara uttryckta i samma sort (sorter), om talen skola omedelbart jämföras med hvarandra. — I annat fall kan blott en obestämd jämförelse äga rum, så att det ena talet väl kan sägas vara > eller < det andra talet, men ej huru mycket större eller mindre det förra är än det senare, ej heller i hvilket förhållande de stå till hvarandra.

b. **Bråk.**

51. Genom att så fullständigt som möjligt behandla talen 1—30 (1—100) vinnes, att bråkläran kan behandlas raskare med godt resultat, om undervisaren beaktar hållpunkterna och lärjungarna sakna oriktiga föreställningar.

Hållpunkterna äro: 1) Alla bråk innehålla antal af bestämd sort.

Detta märkes, då bråket utsages, icke då det skrifves på vanligt sätt. Ex. sju fyradelar (ej $\frac{7}{4}$); 31 hundradlr (ej 0,31). ($\frac{7}{4}$ kan utsägas en 4-del af 7, och 0,31 kan utsägas 3 tdlr och 1 hdel). Emedan bråkets beskaffenhet, att innehålla antal af bestämd sort, framträder vid dess utsägande, böra bråken ej för tidigt betecknas, utan lärjungarna vänjas att tänka bråken enligt deras utsägande.

2) De af samma stambråk bildade bråken jämföras med hvarandra så, som de hela talen med hvarandra. Alla de bråken äro uttryckta i samma sort och innehålla alltså enheter af samma sort.

Det är lika lätt att jämföra 2 sjudelar och 6 sjudelar med hvarandra som att jämföra 2 kr. och 6 kr. med hvarandra eller 2 och 6 med hvarandra.

3) Då stambråk eller andra bråk af olika sorter närmare jämföras med hvarandra, måste de uttryckas i samma sort. Detta grundas därpå, att delarna skola innehålla samma sort som det hela.

I detta fall hafva lärjungarna hjälp af nämnaren, då bråket är betecknadt. Ex. $\frac{1}{2}$ jämföres med $\frac{1}{6}$. Nämnaren 2 angifver, att talet 1 är lika 2-deladt; nämnaren 6 angifver, att 1 är lika 6-deladt. Däraf förstås, att $\frac{1}{6}$ är $< \frac{1}{2}$. Men ej nog härmed. Däraf förstås, att 2 af de förra delarna motsvara 6 af de senare, alltså motsvarar 1 af de förra 3 af de senare eller alltså är $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

Man bör beakta den hjälp, som man har af nämnarna, då bråken äro uttryckta i olika sorter, och man önskar förvandla från större eller mindre sort samt uttrycka 2 eller flera bråk i samma sort.

52. Sammanfattning. Af det föregående är klart, 1) att hvarje tal är något helt i och för sig, 2) att det kan tänkas bestå af 2 eller flera delar, 3) att så väl det hela som delarna innehålla tal af samma sort, utom i det fall att mindre enheter sammanfattats till större enheter eller att större enheter fördelats till mindre enheter, samt 4) att talen böra vara uttryckta i samma sort, då de skola närmare jämföras med hvarandra.

De vid räkneundervisningen förekommande matematiska tecknen och uttrycken.

53. Tecknen äro: a) siffror, b) bokstäfver, c) förbindelsetecken (räknetecken), d) likhetstecken, e) olikhetstecken, f) parentes, klammer, g) dignitetstecken, h) rotmärke.

---

54. a. För siffrorna redogöres å sid. 16.

Somliga siffertal äro bekanta, andra äro obekanta och skola beräknas. Då siffror ligga till grund för beteckning af tal, kallas räkneläran *sifferräknelära*.

b. Bokstäfver användas för att beteckna tal, då man vill angifva något allmängiltigt, något som gäller i alla liknande fall.

En bokstaf kan således beteckna hvilket tal som helst, olika tal i olika fall. Bokstafven a kan således en gång beteckna talet tre, en annan gång sju åttadelar, en tredje gång fyra hundradelar och kan således utbytas mot 3 eller $\frac{7}{8}$ eller 0,04. O. s. v.

I somliga fall ligga blott bokstäfver till grund för tals beteckning. Bokstafvens namn är då äfven talord. Ex. $a + a + a$, som är $= 3$ tal a eller kortare $3a$. Det talet kan ej förenklas, så länge a bibehålles. Men utbytes a mot t. ex. 2, så kan $3a$ förenklas till 6. $a + a + b$ förenklas endast till $2a + b$. $a + b + 3a$ förenklas till $4a + b$. $a \times b$ förenklas till ab, hvarvid a och b läsas **tillsammans** ab. $\frac{a}{b}$ eller $a : b$ kan ej förenklas. $\frac{a}{b}$ utsäges 1) a genom b (a deladt med b), 2) 1 b-del af a), 3) a b-delar. $\frac{1}{b}$ utsäges enklast »en b-del». Bokstafsräkneläran kallas *algebra*.

Det genom räkning funna talet betecknas stundom från början med någon af bokstäfverna x, y, z, t, u eller v. Vanligast användes x.

---

55. Förbindelsetecknen kallas allmänt räknesättstecken. Efter de 4 räknesätten kallas de i allmänhet additionstecken, subtraktionstecken, multiplikationstecken och divisionstecken. Genom de senare namnen betonas sammanhanget mellan de vid tecknen stående talen blott i de enklare fallen. Se ex. 27—30 b), 31 a) och 33! Likväl kan läraren betona sammanhanget äfven i de svårare fallen. Se ex. 30 c), 31 b), 32 och 35!

Emedan 2 förbindelsetecken förekomma i de svårare fallen, uträknas ett tal med 2 förbindelsetecken vid en ingående behandling genom 2 räknesätt i de flesta fall. Se ex. 32 och 35 a)! Emellertid finnes tillräcklig öfverensstämmelse mellan innebörden af somliga tal med ett förbindelsetecken och somliga tal med 2 förbindelsetecken, för att dessa skulle sammanföras i en större gemensam grupp.

Ex. 45. 3×8 motsvaras af talet $\frac{3}{4} \times 8$ på det sätt, att båda talen innehålla 3 lika delar. Fördenskull kunna de sammanföras i en och samma större hufvudafdelning vid undervisningen. Om man kallar afdelningen »Mångfaldigande» i heltalsläran, så kan man använda samma namn i bråkläran. Däraf beror uttrycket »mångfaldigande med bråk» (»multiplikation med bråk»).

Den rätta innebörden i det senare fallet betonas i §§ **44** — Märk 3)! —, **270**.

Det svåraste sammansatta fallet är angifvet i ex. 35 a). I *vanliga* praktiska uppgifter förekommer detta blott då, när en storhet innehåller några delar af en viss enhet och enhetens värde skall beräknas. Detta fall motsvarar fullkomligt det fall, då enhetens värde beräknas med användande af blott hela tal, hvarvid likadelning (division) användes. Följaktligen bör enhetens värde i båda fallen kunna betecknas på samma sätt. Däraf beror uttrycket »division med bråk». Från den synpunkten sedt kan uttrycket försvaras. Ex. se nedan (46)!

Ex. 46. Huru mycket kostar 1 l. mjölk, då a) 2 liter mjölk kostar 30 öre, b) då $\frac{2}{5}$ l. mjölk kostar 6 öre, c) då $3\frac{3}{5}$ l. mjölk kostar 54 öre?

Mjölkliterns pris betecknas i a) 30 öre : 2 och kan fördenskull äfven i b) betecknas 6 öre : $\frac{2}{5}$, samt i c) 54 öre : $3\frac{3}{5}$.

I heltalsläran tvekar ingen att använda samma uttryckssätt vid likadelningens utförande, vare sig att en dels storlek eller delarnas antal beräknas, sedan barnen fått klart för sig, huru de skola undgå det felet, att svaret blir för fåsiffrigt. Af den orsaken bör man i bråkläran ej försvåra saken för de mindre begåfvade barnen eller för dem, som under kortare tid besöka skolan, genom att allt för mycket betona olikheten mellan innebörden i olika fall. Fördenskull bör man hellre i början använda samma sätt vid uträkningen i detta fall, oberoende af innebörden, och då använda det lättaste. Det lättaste motsvarar fullkomligt det vanligaste sättet i heltalsläran, hvarvid heltalsorterna frånses. Då uttryckas de gifna talen först i samma bråksort, därefter frånses bråksorten, och bråkdelarnas antal behandlas såsom vanliga hela tal.

Uträkning för besvarande af frågorna i ex. 46.

a) $30:2 = 15$. | 2 i 3 går 1 gång. 1 gång 2 är 2. 2 från 3 återstår 1. Nollan nedflyttas. 2 i 10 går 5 gånger.

b) $6:\frac{2}{5} =$ 30 femdelar : 2 femdelar $= 30:2$. O. s. v.

c) $54:3\frac{3}{5}$. | $\frac{54\cdot5}{5}:\frac{18}{5}=\frac{54\cdot5}{18}=3\cdot5$.

Om $3\frac{3}{5}$ l. utbytts mot 3,6 l., så hade uträkningen blifvit alldeles så som med hela tal

54 : 3,6 = 540 tiodelar : 36 tiodelar = 540 : 36 = 15.

36 i 54 går 1 gång. $1\times36=36$; o. s. v.

Ex. 47. a) 3×8. b) $\frac{3}{4}\times8$.

a) *Tecknet × mellan 3 och 8 sammansluter de talen mer, än som kan ske med plus eller minus, till följd af talens olika betydelse i den förbindelsen.* 3×8 kan nämligen utbytas mot $8+8+8$, då × utsäges »gånger». Däremot skulle det utbytas mot $3+3+3+3+3+3+3+3$, om tecknet × utsades **»multipliceradt med»**. Det första **utsägessättet** är **enklare och** bör därför uteslutande användas i st. f. det senare, som är äldre. 3×8 kr. kan blott utläsas, 3 ggr 8 kr.; 3 kr. × 8 kan blott utsägas 3 kr. mångfaldigadt med 8. Allmänt förklaras det så, att man ej kan multiplicera med någon sort. Rätta grunden är, att 3 i förra utsägessättet angifver delarnas antal, och att 8 i det senare utsägessättet angifver delarnas storlek. När detta betonas, så är själfklart, att de talen ej kunna efterföljas af någon sort i dylika beteckningar.

»Ytan är lika med basen ggr höjden» är ett af de uttryck, hvilkas användning utesluta möjligheten att bringa klarhet i de fall, då mångfaldstecknet förekommer.

Ofta finnes benägenhet att få in det äldre uttryckssättet i svaret på frågan: »Hvad skall man göra?» eller

»Huru skall man göra?» Svar: Multiplicera eller mångfaldiga. Hvarmed? Svar: Med 3. I st. f. dessa 2 frågor behöfves blott en fråga, om den besvaras fullständigt så: 3-faldiga eller beräkna 3-falden af 8. Vill man därefter utsäga det genom trefaldigandet uppkomna talet (storheten) utan uträkning, så säges: 3-falden af 8 (3-falden af 8 kr.) eller 3 gånger 8 (3 ggr 8 kr.).

b) På frågan: »Hvad skola vi göra?» skall svaras: Beräkna 3 fyradelar af 8 (icke: »multiplicera 8 med $\frac{3}{4}$», ej heller: »multiplicera $\frac{3}{4}$ med 8»).

Ofta användes punkter (:) i st. f. strecket i de 2 första fallen i ex. 33. Då kallas strecket uteslutande *bråkstreck*. Stundom brukas punkterna i st. f. strecket i blott det första fallet. Då får strecket vara blott »förhållandetecken» och bråkstreck, som ju vore liktydiga, om endast bråk vore förhållandet mellan 2 tal. Enligt ex. 34 b) kan strecket användas lika väl som punkterna för beteckning af en (= hvarje) dels storlek vid delning i lika delar.

56. Allt efter förbindelsetecknen eller exemplen hafva **talen** länge haft särskilda namn: addend, summand, summa; minuend, subtrahend, rest; multiplikator, multiplikand, produkt; dividend, divisor och kvot.

Då räkneundervisningen sammanställes med åskådning, användas enkla uttryck: **allt, det hela, summa, skillnad, rest, återstod, öfverskott, del, delarnas antal, hvarje del (delarnas storlek), mångfald** och **jämn del.** Då behöfvas således ej de gamla namnen. Då behöfvas ej heller räknesättens namn: addition, subtraktion, multiplikation och division eller orden: addera, subtrahera, multiplicera, dividera. Äfven sedermera blifva de flesta af dessa namn öfverflödiga. Såsom namn på räknesätten kunna ju användas de svenska orden: sammanläggning, fråndragning, mångfaldigande, likadelning. Dessutom användas orden **sammanlägga, fråndraga (dela), mångfaldiga, likadela, öka med, minska med, dela med, deladt med, termer, faktorer, produkt och kvot.**

Lämpliga **namn på förbindelsetecknen** äro: **summatecken** (+), **skillnadstecken** (—), **mångfaldstecken** eller **produkttecken** (× eller ·) och **likadelstecken** eller **kvottecken** (: eller —, då ett tal skrifves ofvanför och ett tal under strecket). Då läran om förhållande upptages, kallas det sista tecknet äfven **förhållandetecken.** Se ex. 27—35!

57. Uttrycken **termer, faktorer, produkt, kvot, dela med och deladt med** gälla ej ett enda, enskildt fall eller flera, fullkomligt lika fall, utan de gälla endera af 2 möjligheter och hvilken som helst af dem.

Ex. 48. $7 + 3 - 2 + 5 - 3 - 2 - 8$.

I detta sammansatta tal brukar hvarje enskildt tal kallas **term**, ehuru somliga hafva $+$, andra hafva $-$ före sig. De förra kallas **plustermer**, de senare **minustermer**. Möjligheterna vid tal om termer äro således, att de kunna föregås af $+$ eller $-$. Äfven talen i ex. 27 och 28 kallas stundom termer, ehuru onödigt.

Ex. 49. När man i talet 3×8 ej vill betona den olika betydelsen af talen 3 och 8, utan kan utbyta 3×8 mot 8×3, emedan båda talen $= 24$, så kallas talen 3 och 8 **faktorer** samt talet 3×8 **produkt.** Produkten af talen 3 och 8 utsäges således: 3 gånger 8 eller 8 gånger 3.

Uttrycket »produkt af 3 och 8» bör aldrig utbytas mot: »produkt af 3 gånger 8». Meningen är nämligen att blott uppräkna de tal, som äro faktorer.

Likaså är meningen att blott uppräkna talen, när man säger: 1) »summan af 7 och 3», 2) »skillnaden mellan 5 och 3», 3) »kvoten af 6 och 2», 4) »förhållandet mellan 6 och 2». Emedan barnen i småskolan oftast säga: »7 och 3 är 10», så händer, att de sedan fatta ordet och i de citerade uttrycken i samma betydelse som »plus» eller »till». Fördenskull bör läraren betona, att uttrycket 2) betecknadt äfven utsäges »5 minskadt med 3», uttrycken 3) och 4) betecknade äfven utsägas »6 deladt med 3».

Ehuru 3×8 kr. är lika mycket som 8×3 kr., betonas i förra fallet, att penningsumman innehåller 3 delar med 8 kr. i hvarje del, och i senare fallet, att hon innehåller 8 delar med 3 kr. i hvarje del. Fördenskull bör en omkastning mellan talen där ej äga rum. Bäst märkes det, då en praktisk uppgift lägges till grund därför. »Hvad kosta 3 stolar à 8 kr.?» och »Hvad kosta 8 stolar à 3 kr.?»

58. Ex. 50. »Om 1 m. tyg betalas med 7 kr., hvad kosta 15 m.?» Alldeles oriktigt är där följande uttryck: »Antalet 15 m. utvisar, att 7 kr. skola tagas 15 gånger.» Likaså är oriktigt att såsom ex. för det påståendet: »Vid teckning af multiplikationsuppgifter är likgiltigt, i hvilken ordning man sätter faktorerna» säga: »4 m. 6 dm. 5 cm. $\times$ 7 tecknas äfven 7×4 m. 6 dm. 5 cm. Är uppgiften ett sakexempel, d. v. s. om en viss sort eller klass af sorter (t. ex. 4 m. 6 dm. 5 cm.) skall tagas ett visst antal gånger, faller det sig naturligast att sätta denna såsom multiplikand och det allmänna siffertalet som multiplikator.» Där påstås 4 m. 6 dm. 5 cm. vara en faktor samt en klass af sorter.

Ex. 51. **Kvoten** af 16 och 2 betecknas 16 : 2 eller $\frac{16}{2}$. Dessa beteckningar utläsas äfven 16 deladt med 2.

I båda fallen är 16 det hela, men 2 kan angifva antingen delarnas antal eller delarnas storlek. Hvilketdera märkes ej. I båda fallen är 16 : 2 = 8.

Endast i det fall, att konkret sort förekommer, märkes olikheten. Ex. 16 kr. : 2, som är = 8 kr., och 16 kr. : 2 kr., som är = 8. I båda fallen utsäges tecknet **deladt med.**

Det latinska ordet **kvot,** som betyder »huru många», bör till följd af sin betydelse användas endast om tal. Man bör således ej säga, att kvoten är 8 kr.

59. Ordet *produkt* användes särskildt med fördel vid *geometriska räkneuppgifters lösning.* Grund är åskådning. Med vissa bestämda längdmått mätas utsträckningarna längd, bredd och höjd, samma mått för mätning af båda utsträckningarna hos en yta och för alla 3 utsträckningarna hos en kropp. Ytor skulle mätas med motsvarande ytmått, så att ytan skulle mätas med måttet 1 kvcm., då längdmåttet är 1 cm. Rymden skulle mätas med motsvarande rymdmått, i detta fall 1 kbcm. Men man räknar hellre, sedan man genom åskådning funnit, att ytans kvcm.-tal är produkt af breddens och längdens cm.-tal eller produkt af längdens och breddens cm.-tal, samt att kroppens kbcm.-tal är produkt af höjdens, breddens och längdens cm.-tal eller produkt af längdens, breddens och höjdens cm.-tal, eller produkt af höjdens cm.-tal och basytans kvcm.-tal.

Genom åskådning finner man, att breddens cm.-tal = radernas antal, då längdens cm.-tal = kvadratcentimeternas antal i en rad, sedan ytan uppdelats så, att hvarje del är 1 kvcm. Se ex. 79 sid. 55 och 80 sid. 60!

Då man talar om dessa tal i allmänhet, kan man använda ordet *längdmåttstal* för att angifva längdmåttens (delarnas) antal i den gifna längden, *ytmåttstal* för att angifva ytmåttens (delarnas) antal i den uppgifna ytan och *rymdmåttstal* för att angifva rymdmåttens (delarnas) antal i den gifna kroppen.

Utsträckningarna af en yta böra hellre kallas *längd* och *bredd* än bas och höjd, emedan den yta, hvarpå en kropp hvilar, också kallas bas, samt *den tredje utsträckningen hos en kropp kallas höjd.*

I detta sammanhang och i bråkläran bör mångfaldstecknet kallas **produkttecken.**

60. Det hela, summa, mångfald, skillnad, rest, återstod, öfverskott, jämn del, kunna användas om något konkret lika väl som om något abstrakt, men termer, faktorer, produkt och kvot blott om något abstrakt, d. v. s. om tal.

Intet tecken har på senare tider missbrukats så mycket som **likhetstecknet.** Det beror på införande af den s. k. *ekvationsmetoden*, på oriktig tillämpning af läran om åskådlighet vid undervisningen, på praktiska behofs tillgodoseende och obetänksamhet.

61. Med **ekvation** menas en likhet mellan 2 uttryck, betecknade med matematiska tecken. Det tal, som står på hvarje sida om likhetstecknet, kallas en *led.*

Ex. 52. $5 + 11 = 16$.

$5 + 11$ är den ena leden, 16 är den andra leden. Den ena leden är där färdigbildad från början, den andra har kommit dit efter uträkning.

Ex. 53. $5 + 11 = x$.

Här äro båda färdiga från början, men den andra leden innehåller blott x, hvilket kan utbytas mot 16. Vid utbytet försvinner x. Det var öfverflödigt från början.

Ex. 54. $5 + x = 16$.

I detta fall är ingendera leden öfverflödig. Blott genom båda ledernas närvaro kan x beräknas och kan svaret finnas på frågan i det ex., som gifvit upphof till ekvationen. Ex. kan lyda: »Hvilket tal skall läggas till 5, för att allt skall blifva 16?» Eller: »Åkare Larsson hade 5 hästar. Huru många fattades, för att han skulle äga lika många som Persson, hvilken hade 16 hästar?» Eller: »Sten hade 5 kr., men behöfde 16 kr. Huru mycket fattades?» I det sista fallet betecknas svarets krontal med x.

Ekvationen är naturligtvis icke något af dessa 3 exempel eller något annat praktiskt exempel, utan den bildas på grund af ett praktiskt ex. för att underlätta beräkning af något tal. Men då blir x bundet vid ett annat tal genom något af förbindelsetecknen.

I ekvationen ingår då ingen konkret sort.

Ekvation i inskränkt mening är alltså en likhet mellan 2 med blott matematiska tecken betecknade uttryck, i hvilka x är bundet vid ett eller flera tal genom något tecken.

62. För bekvämlighets skull anses stundom sådana uttryck som följande dugliga.

Ex. 55. $254 + 16 = 270 - 203 = 67 + 5 = 72 : 4 = 18$.

Där äro 4 likhetstecken; alltså skulle 5 tal vara lika stora. Är $254 + 16 = 270 - 203$ eller $= 67 + 5$ eller $= 72 : 4$ eller $= 18$? Är $254 + 16$ eller $270 - 203$ eller $67 + 5$ lika med 18?

Riktig är däremot följande framställning: $254 + 16 = 270$; $270 - 203 = 67$; $67 + 5 = 72$; $72 : 4 = 18$.

$254 + 16 = 270$ är en fullständig mening och får ej fattas såsom del af en mening. Eftersom punkt ofta användes mellan 2 faktorer, så kan punkten efter 270, 67 och 72 lämpligast ersättas af semikolon (;) för att undvika missförstånd.

Riktig är äfven följande kedja:

$$\begin{array}{r} 254 \\ \underline{16} \\ [illegible] \\ \underline{203} \\ 67 \\ \underline{5} \\ 72 : 4 = 18. \end{array}$$

Genom minustecknet före talet 203 märkes, att skillnaden mellan 270 och 203 skall beräknas. Före 16 och 5 behöfves ej något tecken.

Ex. 56. $5 \times 18 = 90$ kr.

Är talet 5×18 lika med 90 kr.?

Riktigt är däremot 5×18 kr. $= 90$ kr.

Förr skrefvos talen på ett särskildt sätt för uträkningens skull. Så sker ofta nu också, men det behöfves ej, då talen äro lätta. Emellertid må det gamla sättet jämt användas hellre, än att barnen skola vänja sig att fela mot likhetstecknets rätta användande.

63. En annan orsak till likhetstecknets oriktiga användning är sträfvandet i senare tider att beteckna svaret på en fråga före all räkning. Därigenom ådagaläggеs tankegången vid utredningen af exemplet. Då framställes den ena frågan efter den andra. Svar gifvas, hvarvid nya tal intagas. Sammanhanget angifves genom förbindelsetecken.

Ex. 57. »Huru många m. kläde fås för 150 kr., då 18 m. kosta 108 kr.?»

Teckningen skulle enligt mångas mening blifva: 150 kr. : (108 kr. : 18) = x m. Om x m. ej funnits från början, så hade säkerligen 25 m. ditsatts i stället.

Inom parentesen angifves värdet af 1 m. kläde. Det eftertänkes således först. Allt före likhetstecknet angifver svar på frågan. Det bestämmes sist. Svaret på denna skulle ock stå efter likhetstecknet.

I teckningen begås två fel. Först besvaras frågan oriktigt med x m. eller 25 m., ty blott antalet efterfrågas. Dessutom användes likhetstecknet orätt, i det att ett tal skulle vara = en längd. Framställningen blir riktig efter borttagande af sorten m.: 150 kr. : (108 kr. : 18) = x.

Bättre är att först uträkna (ej blott beteckna) värdet af 1 m. kläde och sedan uträkna svaret på frågan i exemplet.

Då skrifves:

108 kr. : 18 = 6 kr. 150 kr. : 6 kr. = 25	Genom understrykning af talet 25 påvisas, att det är svar på frågan.

Eller på det gamla sättet:

108|18 150|6
108| 6 kr. 12 |25
30
30

I detta och dylika fall vinnes intet genom att låta barnen teckna svaret på frågan före uträkningen. Vinst medför den beteckningen blott då, när räkningen sedan kan förenklas på grund af beteckningen. Se talet öfverst å nästa sida!

Barnen böra ej onödigt slösa tid på dylika beteckningar. **Självklart är i detta fall, att svaret på frågan, men icke exemplet, betecknas.**

64. Olikhetstecknen äro > och <. Det förra betyder *större än*, det senare betyder *mindre än*.

Ex. 58. »8 är större än 5» betecknas 8 > 5. Tvärt om betecknas **»5 är mindre än 8» så: 5 < 8.**

---

65. Parentes, ( ), och **klammer, [ ],** användas för att angifva, att 2 eller flera tal (uttryck) närmare sammanhöra med hvarandra än med det öfriga i en sammansatt beteckning. Därmed angifves då äfven den ordning, i hvilken talen skola upptagas vid uträkningen, för att den förut uppgjorda tankegången skall följas.

I det ofvan tecknade svaret på frågan i ex. 57 kan parentesen undvikas, om streck användes i stället för punkterna. Teckningen blir då: $\frac{150 \text{ kr.}}{108 \text{ kr.} : 18}$.

Då bråkläran tillämpas och orden »Huru många m.» inleda hvarje behöflig fråga, så erhålles i stället följande teckning: $\frac{[illegible]0 \cdot [illegible]8}{108}$, som förenklas genom förkortning.

Två eller flera sätt äro alltså stundom användbara. Då bör det enklaste, det, som fortast leder till målet, särskildt beaktas.

Ex. 59. 1) »25 + 38 — (15 + 27)».

Enligt beteckningen sammanläggas först 25 och 38, därefter 15 och 27, hvarefter frandragning äger rum. Om parentesen borttoges, så uppstode i stället: 2) 25 + 38 — 15 — 27. Då kunde först 15 tagas från 25, sedan 27 från 38 och slutligen 10 och 11 sammanläggas.

Vid uträkning af 2) kunde äfven först beräknas summan af 25 och 38, sedan summan af 15 och 27 samt slutligen skillnaden mellan båda summorna.

Ex. 60. »3 516 — 1 358 + 27 — (18 + 378 — 250)».

För uträkning enligt beteckningen fordras 3 fråndragningar. Men om parentesen borttoges, så kunde summan af 1 358, 18 och 378 fråndragas summan af 3 516, 27 och 250, och blott 1 fråndragning behöfvas.

Ex. 61. a) »(5 672 432 + 34 327 568) — (673 803 + 54 129)».

[illegible]

I dessa ex. är den första parentesen fullkomligt onödig.

Båda parenteserna vore onödiga, om + stode där i stället för —. Det beräknade talet blefve lika, i hvilken ordning talen än upptoges.

Uträkningen af b) blefve vida lättare, om inga parenteser vore där. Då skulle nämligen först $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ och $\frac{9}{16}$ sammanläggas. O. s. v.

Ex. 62. $7\frac{15}{16} - (2\frac{3}{4} + 1\frac{3}{8} + \frac{5}{16}) = 7\frac{15}{16} - 2\frac{3}{4} - 1\frac{3}{8} - \frac{5}{16}$.

Där äro 2 bråk liknämniga från början. Fördenskull upptagas de först. Dessförinnan måste parentesen bort och på samma gång tecknen före talen i parentesen ändras. Genom att uträkna talet enligt båda beteckningssätten märkes, att båda sätten äro riktiga, ty »svaret» blir det samma i båda fallen. Därigenom vinnes ock större öfning. Uträkning enligt det ena sättet är synnerligen lämpligt såsom pröfning af räkningens riktighet enligt det andra sättet.

Ex. 63. Beräkna det tal, som är produkt af 2 faktorer 2,25 och 2 faktorer 1,56!

Talet betecknas: $2{,}25 \times 2{,}25 \times 1{,}56 \times 1{,}56$. När ingen parentes finnes, beräknas först $2{,}25 \times 1{,}56$ som är $3{,}51$. Produkten af de andra faktorerna är lika stor. O. s. v.

Om talet betecknades $(2{,}25 \times 2{,}25) \times (1{,}56 \times 1{,}56)$, så blefve räkningen längre, emedan först beräknades 2 tal med hvar sina 4 decimaler och sedan ett tal med 8 decimaler, af hvilka dock de 4 sista vore nollor och således slutligen borttoges.

66. Ex. 64. a) $25 + 8 + 8 + 8 = 25 + 3 \cdot 8 = 49$.

b) $25 + 3 \cdot 8 - 4 = 45$. c) $25 - 8 - 8 = 25 - 2 \cdot 8$.

a) Emedan $8 + 8 + 8$ kan utbytas mot $3 \cdot 8$, förstå vi, att $25 + 3 \cdot 8$ innehåller 4 tal (delar), nämligen 25 och 3 tal 8, samt att talen 3 och 8 genom mångfaldstecknet förbindas närmare med hvarandra än med 25. Talet i b) är 4 mindre än talet i a). Däraf följer att *produkttecknet binder starkare än summa- eller skillnadstecknet.*

Ex. 65. Vilhelm metade först 9,4 kg. fisk och sedan tillsammans med Knut 2,15 kg., som de delade lika mellan sig. Huru många kg. vägde V:s fisk?

Sv.: 1) $9{,}4 + \frac{2{,}15}{2}$ eller 2) $9{,}4 + 2{,}15 : 2$.

Äfven *likadelstecknet* binder starkare än *summa*- eller *skillnadstecknet.*

Vid uträkningen likadelas först, sammanlägges sedan. Riktigheten däraf märktes bäst i 2), om konkret sort stode där. Den skulle stå efter 9,4 och 2,15, emedan 9,4 och 2,15 äro kg.-tal, eller efter 9,4 och 2, emedan 9,4 och $2{,}15 : 2$ äro kg.-tal.

Ex. 66. Lotta väfde 40,5 m. väf. Däraf skulle Ebba hafva 4,7 m. Det öfriga delades lika mellan 5 personer. Huru många m. fick hvar och en af dem?

Sv.: 1) $\frac{40{,}5 - 4{,}7}{5}$ eller 2) $(40{,}5 - 4{,}7) : 5$.

Ex. 67. 3 säckar innehöllo $12\frac{1}{2}$ kg., $8\frac{3}{4}$ kg. och 9 kg. 400 gr. ull. Alltsammans kostade 55 kr. 17 öre. Huru mycket kostade 1 kg. ull?

Svarets krontal: $55{,}17 : (12\frac{1}{5} + 8\frac{3}{4} + 9\frac{3}{5})$ eller $\frac{55{,}17}{12\frac{1}{5} + 8\frac{3}{4} + 9\frac{3}{5}}$.

Ex. 68. Sven, Nils och Axel delade lika försäljningssumman för $8\frac{1}{2}$ famnar ved à 8 kr. 70 öre. Huru många kr. fick S.?

Svar: 1) $8\frac{1}{2} \times 8{,}7 : 3$ eller 2) $\frac{8\frac{1}{2} \times 8{,}7}{3}$ eller 3) $8\frac{1}{2} \times \frac{8{,}7}{3}$ eller 4) $\frac{8\frac{1}{2}}{3} \times 8{,}7$.

Grund för de 2 första teckningarna är, att först bestämmes hela försäljningssummans krontal; grund för den tredje teckningen är, att först bestämmes krontalet till Svens andel i försäljningssumman för 1 famn; grund till den fjärde teckningen är, att först bestämmes, för huru många famnar Sven fick betalning.

Om sammanhanget mellan talen enligt beteckningen strängt följdes, så vore uträkningen enligt tredje sättet enklast. Men om 4) ombildades till 2) och samma faktor sedan borttoges ur talen på ömse sidor om strecket i 2), så vore uträkningen enligt 2) och 4) lika enkel. Ingen parentes behöfves. Räkningen leder till samma tal, vare sig att man först delar eller mångfaldigar enligt beteckningen i 1).

Ex. 69. Jönsson köpte 39 famnar ved. Däraf sågade Larsson $\frac{1}{6}$ efter 2 kr. 50 öre för 1 famn. Huru många kr. förtjänade L.?

Svar: 1) $(39 : 6) \times 2\frac{1}{2}$ eller 2) $\frac{39}{6} \times 2\frac{1}{2}$ eller 3) $\frac{1}{6} \times 39 \times 2\frac{1}{2}$.

Parentes är nödvändig i 1); ty 6 hör närmare tillsammans med 39 än med $2\frac{1}{2}$, och räkningen skulle leda till annat tal, om talen upptoges i annan ordning.

Ex. 70. Hedvig plockade 2 hl. bär och var sysselsatt därmed 5 dagar i veckan samt plockade 8 l. dagligen. Huru många veckor användes därtill?

Svar: 1) 2 hl. : 5×8 l. eller 2) $200 : (5 \cdot 8)$ eller 3) [illegible]

I 1) förstås sammanhanget på grund af de konkreta sorternas närvaro, men i 2) är parentes nödvändig.

67. **Sammanfattning:** 1) Det, som står i en parentes, beräknas alltid först. 2) Emedan det är likgiltigt, i hvilken ordning termer upptagas, och termer med lika tecken sammanläggas, så bör ett mångtermigt uttryck med parentes ändras till ett uttryck utan parentes. Därvid ändras tecknen för termerna inom parentesen så, att + bytes mot — och — mot +, då parentesen föregås af —. 3) Emedan äfven faktorernas ordning är likgiltig, borttages parentes omkring 2 eller flera faktorer. 4) En produkt eller kvot beräknas alltid före en summa eller en skillnad. 5) När en summa eller skillnad skall beräknas före en produkt eller en kvot, måste det utmärkas genom parentes utom i det fall, att kvotstreck användes. 6) Då produkttecknet föregår kvottecknet, är det likgiltigt, i hvilken ordning talen upptagas. Då tecknen stå i annan ordning är parentes nödvändig utom vid användande af likadelsstreck.

68. **Klammer** eller **ytterparentes** [ ], användes kring ett uttryck, då det förut innehåller en parentes.

Ex. 71. Vid ett tillfälle utdelades belöningar för 24 kr. 70 öre. 16 barn fingo hvar sin syask à 1 kr., 18 barn hvar sitt pennfodral à 35 öre och de öfriga barnen hvar sin bok à 30 öre. Huru många voro de belönade barnen?

Barnantalet i de båda första grupperna är kändt. Då barnantalet i den tredje gruppen beräknats, kan frågan besvaras.

Här eftertänkes först den penningsumma, som åtgick åt första gruppen, sedan den penningsumma som åtgick åt andra gruppen, så den summa som åtgick åt den tredje gruppen, därefter barnens antal i den tredje gruppen och slutligen svar på frågan.

Svaret betecknas före all uträkning så:

1) $16 + 18 + \dfrac{\text{24 kr. 70 öre} - 16 \cdot \text{1 kr.} - 18 \cdot \text{35 öre}}{\text{30 öre}}$ eller

2) $16 + 18 + (\text{24 kr. 70 ö.} - 16 \cdot \text{1 kr.} - 18 \cdot \text{35 ö.}) : \text{30 ö.}$ eller

3) $16 + 18 + [\text{24 kr. 70 ö.} - (16 \cdot \text{1 kr.} + 18 \cdot \text{35 ö.})] : \text{30 ö.}$ eller

om det, som hör närmare tillsammans, omslutes af parentes (klammer).

4) $16 + 18 + \{[\text{24 kr. 70 ö.} - (16 \cdot \text{1 kr.} + 18 \cdot \text{35 ö.})] : \text{30 ö.}\}$ el.

5) $16 + 18 + \{[\text{24 kr. 70 ö.} - (16 \times \text{1 kr.}) - (18 \cdot \text{35 ö.})] : \text{30 ö.}\}$;

m. m.

Uppenbart är, att svaret på en sådan fråga aldrig behöfver betecknas före uträkningen, ehuru det å andra sidan kan ske ganska enkelt enligt 1).

---

69. Produkt af 2 eller flera lika faktorer kallas **dignitet.** Allt efter faktorernas antal kallas talet **tvådignitet, tredignitet,** o. s. v.

4×4 betecknas äfven så: 4^2 $4 \times 4 \times 4$ betecknas äfven så: 4^3. Den lilla tvåan (trean) betecknar faktorernas antal och kallas *dignitetstecken.*

Läran om digniteter tillämpas först i fråga om ytor och kroppar. Däraf beror, att 2-dignitet oftast kallas kvadrat och 3-dignitet kub. Men 2-dignitet är namn på tal, kvadrat är namn på en geometrisk storhet, och de böra ej användas i samma betydelse. Motsvarande olikhet finnes mellan betydelsen af 3-dignitet och kub.

Rätteligen säges alltså: (upprita) kvadraten på sidan, som är 4 cm., (beräkna) 2-digniteten af talet 4. Kuben med 4 cm.:s kant. 3-digniteten af 4.

Märk väl olikheten mellan 2-fald af 4 och 2-dignitet af 4!

Hvarje faktor i en dignitet kallas **rot.** Emedan $4 \times 4 = 16$, så är 4 rot ur 16. Emedan $4 \times 4 \times 4 = 64$, så är 4 rot äfven ur 64. Allt efter faktorernas antal kallas roten *tvårot*, *trerot* o. s. v. 4 är 2-rot ur 16, men 3-rot ur 64.

Rotmärket är $\sqrt{}$, uppkommet ur bokstafven *r*. Då faktorernas (rötternas) antal är mer än 2, angifves deras antal med en siffra i $\sqrt{}$. Tvåroten ur 16 skrifves $\sqrt{16}$; treroten ur 64 skrifves $\sqrt[3]{64}$. Uträkningen kallas *rotutdragning*.

Emedan rotutdragning förekommer, då man vill genom räkning bestämma en sidas längd i en kvadrat (äfven andra ytor ibland) och en kants längd till en kub, kallas 2-roten oftast kvadratrot och 3-roten oftast kubikrot.

---

70. Utom de förut nämnda uttrycken må här upptagas orden a) **täljare,** b) **nämnare,** c) **förlänga,** d) **förkorta,** e) **liknämniggöra.** De afse uteslutande den skriftliga räkningen nu såsom förr. Se för öfrigt §§ **252—265**!

a. *Täljare är namn på det tal*, som angifver bråkdelarnas antal i ett bråk.

b. *Nämnare är namn på det tal*, som angifver bråkdelarnas antal i grundenheten (talet 1). Af det talet sluter man sig till sorten.

I heltalsläran förekommer ett liknande fall, då frågan: »Huru stor del af ____?» besvaras. Därvid beräknas delarnas antal, och sedan sluter man sig till svaret på frågan. Se § **46** b)!

c. *Förlänga kallas det dubbla mångfaldigandet,* **hvarigenom ett nytt bråk bildas med önskad** nämnare, då det skall uttryckas i annan sort (= utbytas mot ett bråk, uttryckt i annan sort).

Förlängning behöfver aldrig nämnas i decimalbråksläran. Jfr med utsägande af 6 000 å sid. 18!

Ex. 72. Beräkna a) $0,2 + 0,67$, b) $0,9 - 0,143$, c) $3 \times 0,68$, d) hvarje dels storlek, då 0,85 delas i 5 lika delar! e) Huru många m. tyg köpas för 0,85 kr., då hvarje m. kostar 5 kr.?

Uträkning. a) 7 hdlr är 7 hdlr. En sjua skrifves i hdelsrummet. 2 tdlr till 6 tdlr är 8 tdlr. En åtta skrifves i tiodelsrummet. Den beräknade summan innehåller 8 tiodlr och 7 hdlr eller 87 hdlr.

b)
$$\begin{array}{r} 0,9 \\ -\,0,143 \\ \hline 0,757 \end{array}$$

Hundradels- och tusendelsrummen kunna fyllas med hvar sin nolla. Därefter utföres räkningen så som med hela tal, hvarvid *den ena sorten efter den andra säges* under uträkningen. — Barnen tänka ofta rummen ofvanför fyran och trean fyllda med hvar sitt tal 10 såsom vid heltalsräkningen. Det beräknade talet innehåller alltså de 3 delarna 7 tiodelar, 5 hdlr och 7 tus.-dlr, hvilka sedan sammanfattas i 757 tus.-dlr.

c) $3 \times 0,68 = 2,04$.

3 ggr 8 hdlr = 24 hdlr = 2 tdlr 4 hdlr. En fyra skrifves i hdelsrummet. 3 ggr 6 tdlr = 18 tdlr. 18 tdlr + 2 tdlr = 20 tdlr = 2. Tiodelsrummet fylles med en nolla och heltalsrummet med en tvåa.

d) $0,85 : 5 = 0,17$. En femdel af 0 hela är intet helt tal. En femdel af 8 tdlr = 1 tdel; 5 ggr 1 tdel = 5 tdlr; 5 tdlr från 8 tdlr = 3 tdlr. — 3 tdlr = 30 hdlr; 30 + 5 hdlr = 35 hdlr. En femdel af 35 hdlr = 7 hdlr. O. s. v.

e) $0,85 : 5 = 0,85 : 500$ hdlr $= 85 : 500 = 0,17$.

d. *Förkorta kallas den dubbla likadelningen,* genom hvilken ett nytt bråk erhålles, då det ursprungliga bråket kan uttryckas i större sort.

Då bråken äro betecknade med decimaler, behöfver ordet förkorta (förkortning) aldrig nämnas. Ett sådant bråk utbytes mot ett annat, uttryckt i större sort, genom borttagande af den eller de sista decimalnollorna.

e. Att *liknämniggöra bråk* innebär att bilda nya bråk, som hafva lika nämnare och äro lika med hvar sitt förutvarande.

Liknämniggöra härledes af ordet namn, som i dylika fall af gammalt syftat på tal, nämnaren, hvilken i äldre räkneböcker äfven kallas namn, till följd hvaraf i dem äfven säges: »multiplicera täljarne och namnen korsvis», och dylikt.

Att låta ordet »liknämniggöra» innebära »förvandla till samma sort» och således använda det vid ren hufvudräkning med bråk är onödigt. Samma uttryckssätt, som förut användts i heltalsläran, nämligen att uttrycka i samma sort, bör alltid användas vid ren hufvudräkning och vid uppfattning af bråken. Men vid skriftlig räkning synas nämnarna. Till följd däraf bör hänsyn tagas till dem, och skola uttryck användas, hvilka afse dem. Ett sådant uttryck är ordet liknämniggöra. När bråken äro liknämniggjorda, förstås af de lika nämnarna, att de skola utsägas i samma sort.

Ex. 73. a) $\frac{2}{8} + \frac{3}{8}$; b) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$; c) $\frac{2}{3} + \frac{7}{8}$.

På de lika nämnarna märkes i a), att bråken äro uttryckta i samma sort. På de olika nämnarna i b) märkes, att talen äro uttryckta i olika sorter.

Läroinnehållets fördelning i kurser.

71. Förr genomgicks läran om hela tal fullständigt före bråkläran, hvarvid få eller inga praktiska uppgifter upptogos, därefter behandlades de s. k. allmänna bråken, så decimalbråken, därpå en s. k. tillämpning på sorter och slutligen praktiska uppgifter i flera afdelningar, som också kallades räknesätt, såsom regula de tri, procenträkning, bolagsräkning, alligationsräkning, o. s. v. Då förekom ingen eller föga utredning, utan barnen följde vissa af läraren gifna föreskrifter. Därigenom grundlades snabbhet i att uträkna tal (siffertal).

72. Emedan decimalbråken kunna enklast betecknas så som de hela talen, samt det gamla mynt-, mått och viktsystemet till följd af sina vid räkning besvärliga förhållandetal utbytts mot ett annat, som lämpades efter talsystemet, så trängde sedan den åsikt fram, att decimalbråken skulle behandlas omedelbart efter de hela talen. Samtidigt betonades, att räknesättens antal är blott de gamla 4 (quattor species).

Fordran på utredning skärptes, och man gick stundom för långt.

73. Framstående lärare förklarade öfvergången från hela tal omedelbart till decimalbråk oriktig, emedan barnen ej omedelbart kunde fatta betydelsen af dem utan att hafva förut tänkt på och uppfattat betydelsen af större bråkenheter. På sista tiden har därför en kort framställning af bråks i allmänhet uppkomst och beteckning af många inskjutits mellan behandlingen af hela tal och af decimalbråk. Samtidigt har äfven mer beaktats, att förhållandet mellan heltalsenheterna är det samma som mellan de nya måttsystemens med hvarandra jämförbara enheter.

---

74. Enligt »normalplan» för undervisningen i småskolor och folkskolor har en fullständig behandling af ämnet i folkskolan delats i 4 årskurser.

1:a årskursen: hela tal med exempel, som omfatta högst fyrasiffriga tal, dock endast en- eller tvåsiffriga multiplikatorer och divisorer, och äro inskränkta till uppgifter, för hvilkas lösning blott *ett* räknesätt fordras.

På senare tider har öfverensstämmelsen mellan heltalsenheterna och vissa konkreta enheter betonats så mycket, att metersystemet skall behandlas i sammanhang med denna kurs.

2:a årskursen: de fyra räknesätten i hela tal med öfnings- och tillämpningsexempel inom större talområde, hvarvid äfven må förekomma uppgifter, för hvilkas lösning fordras både addition och subtraktion; allmänna bråks betydelse och beteckning med tillämpning på division med rest.

3:e årskursen: fortsatt öfning af de fyra räknesätten i hela tal med tillämpning jämväl på uppgifter, för hvilkas lösning fordras äfven multiplikation och division; decimalbråk med tillämpningsöfningar.

4:e årskursen: fortsatt öfning af de fyra räknesätten i hela tal och decimalbråk med tillämpning på något svårare uppgifter; allmänna bråk med enklare öfnings- och tillämpningsexempel.

75. Det egendomliga vid den kursfördelningen är, att en afdelning för bråkbegreppets klargörande inskjutes i 2:a årskursen mellan divisionsafdelningen utan rest vid divisionens utförande och divisionsafdelningen med rest vid divisionens utförande. Resten skall sedan användas såsom täljare i ett bråk.

76. Ändamålet med denna anordning kan vara 2-faldigt.

1. Svaret skulle blifva mycket bestämdt uttryckt. Förfaringssättet är riktigt, så länge man håller sig till tal, d. v. s. abstrakta storheter, och stundom i andra fall.

Ex. 74. Huru stor blir hvarje del, då 126 delats i 15 lika delar? Svar $8\frac{6}{15}$.

Ex. 75. Huru många kg. ost köpas för 1 kr., då 1 kg. kostar 60 öre? Svar $1\frac{40}{60}$.

I dylika exempel är förfaringssättet riktigt.

Ex. 76. Huru stor blir hvarje del, då 18 öre delas i 7 lika delar?

Ex. 77. Huru många par kaffekoppar kunna köpas för 2 kr., då 1 par kostar 45 öre?

I sådana fall som i de 2 sista ex. är förfaringssättet oriktigt.

Utdelningen af 18 öre enligt ex. 76 får ej leda till, att hvarje del blir 2¼ öre, utan därtill, att resten 4 öre delas i 4 delar med 1 öre i hvarje del. Fyra af de 7 delarna ökas således från 2 öre till 3 öre, men de andra 3 delarna innehålla hvar sina 2 öre. Delarna blifva visserligen icke lika. Men i praktiken verkställes delningen så, att allt utdelas. Så vid arfskiften.

Svaret på ex. 77 får ej vara $4\frac{20}{45}$. Det blir 4. 20 öres öfverskott uppstår af de 2 kr., men för dem kan ej något par kaffekoppar köpas. De skola alltså bibehållas såsom rest. Svaret blir: 4, med öfverskott af 20 öre.

2. Barnen skulle få någon inblick i bråkläran, om de ej skulle medhinna mer än 2 årskurser i räkning under sin skoltid. Men den inblicken är för liten, ty allt för mycket komma de två orden täljare och nämnare att betonas, hvadan barnen framdeles icke reda sig, ifall de skulle uträkna ett bråkexempel.

77. Det syftet bör fasthållas, att barnen under sin folkskoletid skola, så vidt möjligt är, beredas tillfälle att räkna med bråk, d. v. s. genomgå alla fyra räknesätten i bråk. Därvid upptages blott det nödvändigaste för den händelse, att tiden ej medgifver fullständig behandling af allt dithörande.

78. Genom riktigt användande af åskådningsmateriel vinnes riktig uppfattning af somliga tal. De öfriga talens innebörd uppfattas utan åskådningsmateriel på grund af deras bildningssätt. På det ord, som angifver talsorten, ligger då hufvudvikten. Somliga tals behandling i de olika räknesätten kan äfven åskådliggöras, andra icke. Dock förstås lätt, att man räknar med de senare på samma sätt som med de förra.

Blott de tals uppfattning och behandling klargöras genom åskådningsmateriel, som innehålla jämförelsevis få grundenheter eller jämförelsevis stora delar af talet 1 (delar, som uppstått genom delning af talet 1 i en, ... tio, tolf, tjugu, hundra, tusen lika delar).

Däraf följer, att både heltals- och bråkläran lämpligt kunna delas i 2 kurser. Första heltalskursen omfattar talen 1—999 eller 1—9 999; andra heltalskursen det öfriga. Första bråkkursen omfattar sådana bråk, som innehålla stambråken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . . $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$ ($\frac{1}{60}$, $\frac{1}{80}$), $\frac{1}{100}$ och $\frac{1}{1000}$ ($\frac{1}{10000}$), andra bråkkursen det öfriga.

Anm. 1. Att i den första bråkkursen intaga så liten sort som tiotusendel berättigas däraf, att tiotusendel är = hundradels procent och hundradels procent ganska ofta förekommer vid noggrannare jämförelser. 1 hundradels procent = 0,0001.

Anm. 2. Till första bråkkursen hänföras först och främst additions- och subtraktionsexempel samt sådana ex., i hvilka bråk mångfaldigas och delas med helt tal. Dit *kunna* ock hänföras svårare bråkuppgifter, hvarvid dock ett djupare ingående i betydelsen af bråks delning med bråk ej bör ifrågakomma.

79. Den sväraste delen af första årsklassens kurs i hela tal enligt Normalplanen är delning med ett tvåsiffrigt tal. Då barnen veta förfaringssättet därvid, så veta de äfven förfaringssättet vid delning med större hela tal. Det fattas blott inöfning, eftersom det senare i allmänhet är desto svårare, ju mera flersiffrigt det tal är, hvarmed man delar. Delning med mångsiffriga tal har dock i allmänhet ej stor användning.

80. Nyttigare än att räkna med mångsiffriga hela tal är det således för barnen att medhinna räkning med de vanliga bråken, de som innehålla de i § 78 nämnda stambråken. Hvarmed skall man börja, med de s. k. allmänna bråken eller de s. k. decimalbråken?

81. Likasom en större heltalsenhet innehåller tio närmast mindre enheter, så innehåller (talet 1) grundenheten tio af de största decimalbråksenheterna, en sådan decimalbråksenhet tio närmast mindre o. s. v. Däraf beror decimalbråkens beteckning i öfverensstämmelse med de hela talens. Öfvergången från hela tal till decimalbråk är således synnerligen lättfattlig. Men det oaktadt bör öfvergången göras tillräckligt grundlig, så att barnen få klart för sig så väl förhållandet mellan dem och talet 1 som mellan de olika decimalbråksenheterna sinsemellan.

När barnen veta, att tio innehåller tio delar med 1 i hvarje del, och däraf dragit den slutsatsen, att 1 är 1 tiodel af tio, samt att 1 kan innehålla tio lika delar, så förstå de ock lätt, att 1 sådan del är 1 tiodel af 1. Men liksom det tal, hvilket innehåller tio tal 1, korteligen utsäges tio, så sammandrages 1 tiodel af 1 till 1 tiodel.

Tio betecknas: 10; ett betecknas 1. Däraf märkes, att enheter, som äro 1 tiodel af andra enheter, hafva sin plats till höger om de senare. Alltså skola äfven tiodelsenheterna hafva sin plats till höger om grundenheterna. För att man skall veta, att en siffra betecknar decimalbråksenheternas antal och icke heltalsenheternas antal, måste det första heltalsrummet vara fylldt. Då talet blott innehåller bråk, fylles heltalsrummet med en nolla. Dessutom tillkommer ett *litet* skiljetecken för att skilja bråksiffran från heltalssiffran. Alltså betecknas 1 tiodel: 0,1.

Då barnen lärt sig att beteckna 2-siffriga hela tal, möter ingen svårighet för dem att beteckna talen 1 tiodel t. o. m. 9 tiodelar. Beteckning af bråk, som innehåller flera tiodelar, är också lätt efter en enkel förvandling.

Ex. 78. 25 tiodelar = 2 hela (e.) 5 tiodelar, hvilket tal betecknas 2,5.

Sammalunda kunna barnen lätt uppfatta tal, som innehålla hundradelar, då de lärt sig uppfatta talet hundra. Beteckningen af 1 hundradel t. o. m. 9 hundradelar förstås äfven lätt, då beteckningen af hundra inlärts. — 1 är 1 hundradel af 1 hundra. Enhetsrummet är det andra till höger från hundrarummet. Emedan 1 hundradel är 1 hundradel af 1, skall äfven hundradelsrummet vara det andra rummet till höger om enhetsrummet. Där skall den siffra stå, som betecknar hundradelarnas antal. De föregående rummen, d. v. s. enhetsrummet och tiodelsrummet, skola fyllas med hvar sin nolla. Alltså betecknas 1 hundradel så: 0,01.

Då talet tusen är behandladt, användes samma förfaringssätt för att uppfatta bråk af 3:e sorten och för att beteckna dem.

82. Om detta iakttages, så kunna decimalbråk af de 3 första sorterna behandlas i nära sammanhang med första kursen i hela tal. I omedelbar anslutning till de 4 räknesätten med hela tal kunde barnen genomgå de 4 »enkla» räknesätten i decimalbråk, hvarvid den största »multiplikatorn» och »divisorn» skulle vara 9 eller 10. Se §§ 234—241! Om också likadelning med 2-siffriga tal skulle utbytas mot denna bråkkurs, så vunnes, att barnen fortare komma in i talsystemet och dess praktiska tillämpning på de nu lagliga mynten, måtten, målen och vikterna. Delning med 2-siffriga tal skulle i så fall upptagas i andra årsklassens kurs.

Anm. Planen har enligt f. folkskoleinspektören och lektorn Abr. Rundbäcks inspektionsberättelse för åren 1877—1881 tillämpats inom hans inspektionsdistrikt »med särdeles tillfredsställande resultat i flera skolor».

83. Utom de nya konkreta enheter, som grundas på decimalsystemet, finnas ännu kvar några, andra äldre, nämligen de som afse tid och papper. En större sådan enhet innehåller icke tio, hundra eller tusen mindre. Dessutom äro många s. k. allmänna bråk ännu behöfliga, då bråkenheterna äro stora. Ex. $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$. Vidare medför dessa bråks många sorter större svårighet vid deras behandling. Slutligen afviker deras beteckning väsentligt från öfriga tals, och denna afvikelse medför annat förfaringssätt vid skriftlig räkning. Till följd däraf bör en afdelning med allmänna bråk behandlas och behandlas fullständigt, d. v. s. i alla de fyra räknesätten, emedan kunskapen om dessa bråks beskaffenhet behöfver befästas genom räkning lika väl, som kunskapen om de hela talens beskaffenhet först blir befäst genom räkning med dem.

Läromaterialet skulle då i folkskolan fördelas så: 1. *Hela tal inom mindre talområde* (*uppfattning, beteckning och utsägande af mångsiffriga, hela tal*) *samt de i* § ***82*** *angifna decimalbråken.* 2. *Enklare kurs i bråk.* 3. *Fullständigare kurs i hela tal.* 4. *Fullständigare kurs i bråkläran.*

Endast en ytlig behandling af »Inledningen till decimalbråk» gör det påståendet berättigadt, att barnen icke kunna förstå decimalbråk, så vida de icke förut hafva lärt sig uppfatta bråk i allmänhet. Genom den kursfördelningen kunna de oriktiga frågorna: »Huru många gånger mer» och »Huru många gånger mindre» förr utrotas vid undervisningen. Se § 48!

Anm. Planen i alla de af förf. utarbetade räkneböckerna är sådan, att en dylik fördelning kan göras. För det ändamålet säljas D-räknebokens första och tredje häften sammanbundna i ett band. I det bandet fattas inledande uppgifter för uppfattning, beteckning och utsägande af mångsiffriga hela tal. Men emedan de hela talen utsägas så, att blott antalet utsäges, så finnas många tal för inöfning af mångsiffriga tals utsägande, då endast antalet af den minsta sorten nämnes. Se hela sidorna 146 och 147, som innehålla tabeller för förvandling till och från metersystemet!

Tabellerna 3 och 27 lämpa sig för 5-siffriga hela tal. I tabell 34 finnas 70 tal i ordning, lämpliga för samma ändamål. Tabellerna 1, 3, 4, 9, 11, 15, 16, 17 och 27 innehålla tal med 4 och 5 antalbetecknande siffror, tabellerna 2, 8, 13, 19, 30, 33 och 34 innehålla tal med 5 och 6 antalbetecknande siffror. Barnen uppskrifva de mångsiffriga talen utan de där befintliga skiljetecknen och tänka på samt utsäga de då uppkomna hela talen. Ex. Tabellen 1 innehåller talen 0,2969, 0,5938, 0,8907, 1,1876, . . ., 2,6721. Tiotusendelarnas antal är 2 969, 5 938, . . ., 26 721.

Åskådningsmateriel.

84. Emedan alla tal äro abstrakta och i det dagliga lifvet bundna vid konkreta sorter, bör räkneundervisningen ställas i samband med åskådning. Det är egentligen blott de synliga enheternas antal (eller såsom man äfven säger antalet af den ena eller den andra sorten), som beräknas vid all räkning. Sedan tillfogas den ifrågavarande sorten för bestämmande af den eller den mängden, vikten, längden o. s. v. Lämplig åskådningsmateriel bör alltså användas och alltid vara så nära till hands, att den kan användas, så snart omständigheterna fordra det. Genom flitigt användande af åskådningsmateriel på lämpligt sätt bibringas säker insikt i talens innebörd, deras inbördes storlek, sammanfattning af mindre enheter till större och uppdelning af större enheter i mindre.

85. Det åskådade föremålet är icke detsamma som det därvid bundna talet. Ingen må således säga, att en kula är eller föreställer talet 1, ej heller att en pelare är eller betecknar talet 10, en kvadrat är eller föreställer talet 100; o. s. v.

86. Såsom åskådningsmateriel användas *fingrarna*, *trästickor*, *pappbitar*, *kulramar*, *»räkneramar»*, *räknemaskiner*, *delade kuber*, *»talbilder»* och *planscher*.

87. Lättast tillgängliga äro fingrarna. Odugligt är deras användande, om de användas blott för ett uppräknande af talen, hvarvid blott 1 oupphörligt tillägges;

ty då få barnen svårt att vänja sig af med räkning på fingrarna. Men användes de därjämte för att klargöra, att talen 3—10 bestå äfven af andra delar än talet 1, och få barnen tillräcklig öfning däri, så är deras användande till stor nytta, så väl vid undervisning som vid barnens tysta räkning.

---

88. Af kulramar finnas 3 slag: 1) med raka tenar, 2) med ∩-formigt böjda tenar och 3) med vinkelböjda (˥) tenar.

1. Denna kulram, den s. k. ryska kulramen, består af en fyrkantig träram, försedd med 10 järntenar och 10 rörliga kulor på hvarje ten. På den af Folkskolebyrån antagna sorten kan den nedersta tenen utdragas för ditsättande af 2 reservkulor, hvarefter den tenen har 12 kulor. Alla kulor äro lika stora.

2. Denna, af folkskoleläraren J. Jonzén patenterade, kulram har 5 tenar med 20 kulor på hvarje ten. För uppfattning af talen 1—100 skall apparaten ligga på sidan, då kulorna röras i samma riktning som på n:r 1, eller ock kan den hafva stående ställning, hvarvid kulorna hållas skilda från hvarandra genom insättande på tenarna af till apparaten hörande, lösa fjädrar.

Denna apparat har företräde framför andra kulramar, emedan en fast skärm är anbragt mellan de parallella delarna af tenarna, till följd hvaraf de för tillfället ej behöfliga kulorna kunna undandragas barnens uppmärksamhet.

3. Denna kulram, den s. k. franska kulramen, har blott 9 kulor på hvarje ten, emedan 10 mindre enheter kunna sammanfattas i en större enhet. Alla kulor på samma ten äro lika stora, men kulorna på den öfversta tenen minst, på den därnäst följande större och sedan allt större. Förhållandet mellan olika stora kulor är det samma som mellan olika stora talenheter, men detta kunna barnen omöjligt se. Fördenskull är den olämplig.

Kulramarna äro det lätthandterligaste medlet för klargörande af talen ett—hundra och för införande i en riktig hufvudräkning inom det området.

89. Den delade kuben innehåller 9 skifvor, 9 stänger och 10 lika stora, små tärningar. Hvarje skifva innehåller 10 stänger, och hvarje stång innehåller 10 små tärningar. Därmed klargöres sammanfattningen af mindre (dekadiska) enheter (decimalenheter) till större enheter och uppdelning af större enheter i mindre enheter. Vidare användes den för att klargöra att blott antal af samma sort kunna sammanläggas och närmare jämföras med hvarandra.

a) Den hittills allmännast använda, så delade kuben är 1 kubikfot. På grund af sin storlek är den fortfarande lämpligast för att klargöra förhållandet 1) mellan 1 000, 100, 10 och 1 samt 2) mellan 1, 0,1, 0,01 och 0,001. Därvid vakte man sig dock att angifva den verkliga storleken af delarna, emedan blott metersystemet bör inläras. Vid klargörandet kallas delarna skifvor, stänger och tärningar.

1) Där märkes, att a) tio tärningar kunna sammanfattas i en stång, hvadan hvarje stång innehåller 10 tärningar (tio delar med 1 tärning i hvarje del), b) tio stänger eller hundra tärningar sammanfattas i 1 skifva, c) tio skifvor (eller hundra stänger eller tusen tärningar) sammanfattas till 1 stor kub. På samma sätt tänkas a) tio tal 1 sammanfattade till ett tio, hvadan ett tio innehåller tio tal 1 eller tio delar med 1 i hvarje del, b) tio tio (hundra tal 1) sammanfattade till ett hundra samt c) tio hundra (hundra tio eller tusen tal 1) sammanfattade till ett tusen. Tvärt om är a) 1 tärning 1 tiodel af 1 stång, 1 hundradel af 1 skifva och 1 tusendel af den stora kuben, b) 1 stång 1 tiodel af 1 skifva och 1 hundradel af kuben samt c) 1 skifva 1 tiodel af kuben.

När denna apparat användes för tydliggörande af enheternas i 2) inbördes storlek, är den stora kuben utgångspunkt. Då framträder a) 1 skifva såsom 1 tiodel af kuben, b) 1 stång först såsom 1 hundradel af kuben och sedan såsom 1 tiodel af 1 skifva samt c) en tärning först såsom 1 tusendel af kuben, sedan såsom 1 tiodel af 1 stång och slutligen såsom 1 hundradel af 1 skifva.

b) När en så delad kubikdecimeter användes, kan förhållandet mellan 1 kbdm. och 1 kbcm. samt mellan 1 kbcm. och 1 kbdm. inläras samtidigt. Kubikcentimeternas litenhet är dock en olägenhet.

Med den senare eller delar af densamma klargöres äfven sättet att genom räkning bestämma *storleken af en kub, rät parallellepiped, rät 4-sidig pelare, då längd, bredd* *och höjd äro gifna* (= uppmätta), eller *dess höjd, då dess rymd, längd och bredd äro gifna*, o. s. v.

Ex. 79. a) Emedan 1 skifva är 10 cm. lång och 10 cm. bred, så innehåller hon 10 rader med 10 kbcm. i hvarje rad eller 10 × 10 kbcm. — (Skifvans kbcm.-tal = basytans kvcm.-tal). — 2 skifvor innehålla 2 sådana hvarf eller 2 × 10 × 10 kbcm. Den kroppens höjd är 2 cm. En sådan kropp, som är 10 cm. lång, 10 cm. bred och 2 cm. hög, innehåller alltså 2 × 10 × 10 kbcm. = 2 × 100 kbcm. = 200 kbcm. — Slutsats: *Rymdens kbcm.-tal är produkt af höjdens, breddens och längdens cm.-tal (eller produkt af höjdens cm.-tal och basytans kvcm.-tal).* — Här betonas, att längd, bredd och höjd skola mätas med samma mått = måste vara uttryckta i samma sort.

Märk! Höjdens cm.-tal = hvarfvens antal, då hvarje hvarf är 1 cm. högt (tjockt). Hvarje hvarfs kbcm.-tal = basytans kvcm.-tal.

b) Rymden är 400 kbcm. Längden är 1 dm., bredden 5 cm. Höjdens storlek? — Emedan längden är 10 cm. och bredden är 5 cm., är bottenhvarfvet 5 × 10 kbcm. (eller 10 × 5 kbcm.) Höjdens cm.-tal = hvarfvens antal. Hvarfvens antal = 400 kbdm. : 50 kbdm. = 8. Höjden är alltså 8 cm.

c) Rymden är 600 kbcm., höjden är 1 dm., längden 5 cm. Huru stor är bredden? — Först bestämmes hvarfvens, därefter radernas antal, så tärningarnas antal i en rad, sedan breddens cm.-tal och slutligen svar på frågan.

Höjden är 1 dm. = 10 cm., alltså finnas 10 hvarf. Hvarje hvarf = 1 tiodel af 600 kbcm. = 60 kbcm. Längden 5 cm., alltså finnas 5 rader af tärningar. Hvarje rad är alltså = 60 kbdm. : 5 = 12 kbcm. Bredden = 12 cm.

Märk! Vid redogörelse härför i sammanhang med åskådning eller hufvudräkning utan åskådning bör det uppgifna skrifvas på taflan, på det att barnen skola kunna erinra sig saksammanhanget lättare. T. ex. l. = 10 cm.; b. = 10 cm.; h. = 4 cm.; R. = x kbcm. — l. betyder längden, b. betyder bredden, h. betyder höjden, r. betyder rymden. Om punkt ej skrefves efter bokstäfverna, så betecknade l, b, h och R blott tal, nämligen l = längdens cm.-tal, b = breddens cm.-tal, h = höjdens cm.-tal och R = kroppens kbcm.-tal. I st. f. R kan K användas.

90. »Talbilder» af Nordlund.

Dessa äro cirkelrunda, svarta ytor, tryckta på 12 rektangulära kort af 15 centimeters längd och 9 centimeters bredd med hvar sin bild motsvarande antalen 1—12, så att det första kortet är försedt med 1, det andra med 2 o. s. v., det tolfte med 12 sådana ytor. Figurerna äro ordnade nästan så som på de vanliga spelkorten.

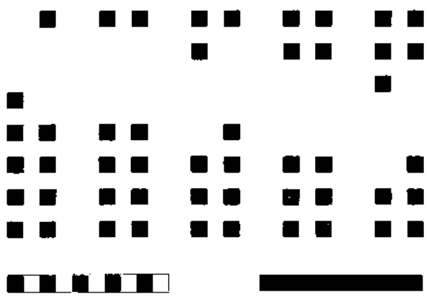
---

91. »Talbilder» af Lindblom.*

Dessa äro ordnade i 2 samlingar, hvaraf den ena afser de hela talen, den andra några bråk, nämligen sådana som innehålla de största och de vanligaste mindre bråkenheterna ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$), samt äro fördelade på 6 planscher, hvaraf den sista syftar på bråken. Planscherna äro uppfodrade på papp.

Plansch 1 innehåller 2 afdelningar a) för talområdet 1—10, b) för tiotalen, emedan 1 t.—9 t. behandlas på samma sätt som talen 1—9.

a) Bilderna innehålla 1 eller flera kvadratcentimeterrutor, ordnade på följande sätt:



Hvarje ruta kallas kvadrat (kvadratcentimeter); hvarje band kallas rektangel.

Här synes, 1) att hvarje följande tal är 1 mer än närmast föregående tal, 2) att hvarje föregående tal är 1 mindre än det närmast följande talet, 3) de delar, lika eller olika stora, af hvilka talen 2—10 bestå, 4) att hvart

* För denna åskådningsmateriel och dess användning lämnas fullständigare redogörelse än för öfrig här uppgifven materiel, emedan den är ny.

annat tal är udda tal och hvart annat tal är jämnt tal, 5) att hvarje udda tal, utom 1, innehåller 2 delar, af hvilka en är ett udda tal, 6) att hvarje jämnt tal, utom 2, innehåller 2 delar, som äro antingen blott jämna tal eller blott udda tal, 7) att skillnaden mellan ett jämnt tal och ett udda tal eller mellan ett udda tal och ett jämnt tal är ett udda tal, 8) att skillnaden mellan 2 udda tal är ett jämnt tal, 9) att skillnaden mellan 2 jämna tal är ett jämnt tal, 10) att talet 10 består af 1 och 9, 2 och 8, 3 och 7, 4 och 6, 5 och 5 (2 tal 5 eller 2 delar 5), 5 tal 2 eller 10 tal 1, 11) att 10 sammanfattas i en större enhet, betonadt genom det nedersta svarta bandet, som är 10 cm. (= 1 dm.) långt och 1 cm. bredt och 12) att denna större enhet kan uppdelas på olika sätt. Genom sammanställning af den nedersta vänstra bilden med den ena efter den andra af de föregående uppfattas antalen elfva—nitton. Den sammanställningen finnes å plansch 2.

b) Bilderna utgöras af lika stora rektanglar. Eftersom 1 rektangel kan jämnt delas, då hvarje del är 2 kvadrater, så kan en samling af sådana rektanglar delas så, att hvarje del blir 2 kvadrater. Hvarje rektangel innehåller 5 sådana delar; följaktligen innehålla 2 rektanglar tio sådana delar (det synes tydligt på plansch 2), 3 rektanglar femton sådana delar, 4 rektanglar tjugu sådana delar, o. s. v. Där märkes nödvändigheten att ibland uttrycka allt det gifna i samma sort.

Plansch 2 har bilder till talen 11—20. Hvarje bild innehåller 2 rader af kvcm.-rutor. Den första raden innehåller tio sådana, hvarannan lika färgad. I den andra raden blir deras antal allt större; äfven där är hvarannan kvadrat lika färgad.

Där märkes allt framgent, att hvart annat tal är udda tal och hvartannat tal är jämnt tal, att summan af 2 eller flera jämna tal är ett jämnt tal, att summan af 2 udda tal är ett jämnt tal, o. s. v.

Denna plansch användes äfven vid beräkning af det tal, som innehåller a) 2 tal tio t. o. m. 10 tal tio, i det man begär, att barnen skola beräkna summan af kvcm.:s antal i första och tredje raderna, i första, tredje och femte raderna, o. s. v., korteligen i hvarannan rad, b) 11 + 2, 11 + 3, ..., 11 + 9, hvarvid 4:de, 6:e, 8:de, 10:de, 12:te, 14:de, 16:de radens kvcm.-tal tilläggos första bildens kvcm.-tal, 12 + 1, 12 + 2, . ., 12 + 8, 13 + 1, 13 + 2 ____, 13 + 7, o. s. v., c) 11 + 12, 11 + 13, ..., 11 + 20, i det att kvcm.:s antal i första och andra eller i första och tredje bilderna sammanläggas, o. s. v., d) 12 + 13, 12 + 14, ..., 12 + 20, i det att kvcm.:s antal i andra och tredje bilderna, i andra och fjärde bilderna sammanläggas, o. s. v., e) 11 + 12 + 13, 11 + 12 + 14, ... 11 + 12 + 20, f) 12 + 13 + 14, ..., 12 + 13 + 20, o. s. v., g) 1 + 2 + 3 + 4 . . . . + 9. Vidare användes den för beräkning af skillnaden mellan a) 11 och 10, 12 och 10, ... 20 och 10, b) 11 och 1, 12 och 2, ... 20 och 10, c) 12 och 11, 13 och 11, ..., 20 och 11, d) 13 och 12, 14 och 12, ..., 20 och 12, o. s. v., e) 11 och 1, 11 och 2, ..., 11 och 10, hvarvid kvcm.:s antal i första bilden minskas med deras antal i andra, fjärde, sjette, åttonde, tionde o. s. v. raden, f) 12 och 1, 12 och 2, ..., 12 och 10, hvarvid kvcm.:s antal i andra bilden minskas så som i e). M. m. [Vidare användes den vid beräkning af 1) 2 × 5, ... 2 × 10; 2) 3 · 4, . . . , 3 · 6, 3) delarnas antal, då 10, 12, 14, 16, 18, 20, 30, 40 . . . ., då hvarje del är 2, o. s. v.]

I sammanhang med sista bilden betonas särskildt, att talet tjugu innehåller tio tal 2 eller tio delar med 2 i hvarje del och att 2 är 1 tiodel af tjugu.

Plansch 3 har 5 bilder, nämligen 1 en-kvcm.:s-bild, 1 tiodelad rektangel, 1 odelad rektangel, 1 hundradelad kvdm., 1 nittondelad kvdm.

Den andra bilden innehåller tio delar, hvarje del så stor som den minsta bilden. I den tredje bilden äro de tio delarna tydligare sammanfattade till en större enhet. Den fjärde bilden innehåller hundra delar, hvarje del så stor som den första bilden. Dess storlek angifves såsom 1) 100 kvcm., 2) 1 kvdm. Därvid räknas delarnas antal i följd t. o. m. hundra, och sedan sammanfattas alla de hundra enheterna till en större enhet. Sammalunda sammanfattas hundra grundenheter till talet ett hundra. — I den femte bilden äro de tio kvcm. i första raden fortfarande särskiljbara från hvarandra, men de tio delarna i de följande nio raderna ej urskiljbara från hvarandra. Den innehåller alltså 9 delar med 10 kvcm. i hvarje del och 10 delar med 1 kvcm. i hvarje del. Därmed förtydligas, att en enhet af tredje sorten innehaller 9 enheter af andra sorten och 10 enheter af första sorten eller 10 enheter af andra sorten. Likaså innehåller talet ett hundra 9 delar med tio i hvarje del och tio delar med ett i hvarje del eller 9 tio + tio.

Dessa bilder motsvara alltså talen ett, tio och hundra.

Plansch 4 har en bild, som är 5 dm. (= 50 cm.) lång och 2 dm. (20 cm.) bred och gjord så, att den synes bestå af antingen tio delar med 1 kvdm. i hvarje del eller hundra delar med 10 kvcm. i hvarje del eller tusen delar à 1 kvcm.

Den bilden motsvarar talet tusen.

Dessa fyra planscher äro närmast afsedda för småskolan men behöfvas stundom äfven i folkskolan. De flesta af de 2 följande planschernas bilder äro 1 m. långa.

Plansch 5 innehåller 7 bilder, af hvilka de 5 första äro lika dem å plansch 3. Den 6:e föreställer en odelad kvdm. och den 7:e en 28-delad rektangel, som är 1 m. lång och 1 dm. bred.

Den 7:e bilden är uppdelad i 9 kvdm., 9 rektanglar och 10 kvcm. Där synes, att den 4:e enheten innehåller 9 enheter af den 3:e sorten, 9 enheter af den 2:a sorten och 10 enheter af första sorten.

Genom plansch 5 förtydligas talsystemet inom området 1—1 000.

De nedre bilderna å plansch 1, somliga bilder å planscherna 2—5 lämpa sig äfven för klargörande af sättet att *genom räkning bestämma en rektangels yta, då dess längd och bredd äro uppmätta* (gifna). Där synes, att 1) längd och bredd skola före räkningen vara uttryckta i samma längdsort (= mätas med samma mått = innehålla enheter af samma sort), 2) ytan innehåller lika delar, som äro hvar sitt motsvarande ytmått, 3) antalet af dessa ytans delar (ytmått) är produkt af längdmåttens antal i längden och längdmåttens antal i bredden eller produkt af längdmåttens antal i bredden och längdmåttens antal i längden, och 4) detta gäller, vare sig att måttet är uttryckt i liten sort eller i stor sort och längdmåttstalen således äro hela tal eller bråk.

Ex. 80 a). Se de nedersta bilderna å plansch 1! De båda bilderna äro lika stora.* Däraf märkes, att den högras storlek icke kan utsägas i ytsort, förr än den fördelats så som den vänstra. Därvid måste längdsidorna först delas så, att hvarje del blir 1 cm., eftersom bredden är 1 cm. (uttryckt i cm.) — Se ock den nedersta bilden å plansch 5!

Ex. 80 b). Se bilden å plansch 4! Längden är 5 dm. Utefter den ligga i 1 rad 5 delar af ytan och hvarje del är 1 kvdm.; alltså är den raden 5 kvdm. Bredden är 2 dm. Därför innehåller ytan 2 sådana rader eller 2 × 5 kvdm. = 10 kvdm.

Eller: Bredden är 2 dm. Utefter den ligga i 1 rad 2 delar af ytan och hvarje del är 1 kvdm. Alltså är den raden 2 kvdm. Längden är 5 dm. Fördenskull innehåller ytan 5 sådana rader eller 5 × 2 kvdm. = 10 kvdm.

Då kan skrifvas: l. = 5 dm.; b. = 2 dm.; y. = x kvdm. Jfr med **märk** i slutet af § 89!

Ex. 81 a). Se en hundradelad kvdm. å plansch 3 eller 5!

En kvcm.:s längd är 0,1 dm. och bredd 0,1 dm. Produkten af längdens och breddens dm.-tal är 0,1 × 0,1 = 0,01. En kvcm. synes vara 0,01 kvdm. — Ytans kvdm.-tal är alltså produkt af längdens och breddens dm.-tal.

Ex. 81 b). Se plansch 4!

Längden är 0,5 m., bredden är 0,2 m. Produkten af metertalen är 0,10. Ytan synes vara 10 kvdm. eller 0,10 kvm. Alltså är ytans kvm.-tal produkt af breddens och längdens metertal.

Allmän regel: En rektangels ytmåttstal är produkt af breddens och längdens längdmåttstal eller produkt af längdens och breddens längdmåttstal.

Emedan ytmåtten äro kvadrater, bör en yta mätas blott med kvadrater, icke med rektanglar. Då en ytas delar hafva form af rektanglar, måste deras storlek uttryckas så, som om de vore uppdelade.

Ex. 82. Längden och bredden af en rektangel beräknas på grund af bilden å plansch 4. Ytan är 10 kvdm. a) Bredden är 2 dm. Huru stor är längden? — Emedan

* Att de äro hvar sina 10 kvcm. synes blott på den första af dem, hvarest längdsidan innehåller 10 delar med 1 cm. i hvarje del eller är 10 cm. och bredden är 1 cm. Den andra figurens längd är 1 dm. och bredd 1 cm. Den enas längd och bredd äro således — den andras. Den förstas längd kan omedelbart afläsas: 10 cm., men den andras längd omedelbart blott: 1 dm., som sedan utbytes mot 10 cm.

bredden är 2 dm., finnas 2 kvdm. i en rad utefter breddsidan. Huru många sådana rader (delar) innehåller hela ytan? (Sv.: 5.) Lika många delar innehåller längden. Hvarje del af längden är 1 dm., alltså är hela längden 5 dm. — b) Längden är 5 dm. Huru stor är bredden? Alldenstund längden är 5 dm., finnas 5 kvdm. i en rad utefter densamma. Huru många sådana rader (delar) innehåller hela ytan? (Sv.: 2.) Bredden innehåller lika många delar. Hvarje del är 1 dm. Alltså är bredden 2 dm.

Regler: 1. Längdens dm.-tal beräknas genom att dela ytans kvdm.-tal med breddens dm.-tal. 2. Breddens dm.-tal beräknas genom att dela ytans kvdm.-tal med längdens dm.-tal.

Plansch 6, som har afseende på bråken, har 14 meterslånga, bandlika bilder. Den första är odelad, den andra lika 2-delad, ... den tionde lika tiodelad, den elfte lika tolfdelad o. s. v. Delarnas antal angifves före hvarje bild. Delarna äro färglagda, för att utbyte af större mot mindre skall ske så lätt som möjligt.

Dessa 6 planscher skola användas både vid omedelbar undervisning och barnens tysta räkning, då de skola vara upphängda framför de räknande barnen. Samtidigt få barnen kännedom om följande metriska enheter: 1 kvcm., 1 kvdm., 1 m., 1 dm., 1 cm. och 1 mm. samt förhållandet mellan dem af dessa, som äro jämförliga med hvarandra.

(Priset för de af Lindblom utarbetade talbilderna är 2 kr. vid rekvisition genom Ecklesiastikdepartementet eller hos förläggarne, P. A. Norstedt & Söner.)

---

92. Användbar är ock en samling af trästickor, af hvilka somliga vid behof sammanbindas i hundrabuntar och tiobuntar.

Därpå grunda sig 1) *den af lektor Nordlund anordnade decimaltaflan* och 2) *den af sem.-adj. Segerstedt anordnade räknetaflan.*

Den förra är »en svartmålad tana af trä, afdelad i tre afdelningar. I den första afdelningen från vänster äro borrade 10 vågräta rader med hål, hvarje rad innehållande 9. Hvarje hål är så stort, att en bunt med 100 stickor kan sättas däri. I den andra afdelningen äro äfvenledes borrade 10 rader med hål, hvarje rad innehållande 9. Hvarje hål inom denna afdelning är så stort, att en bunt med 10 stickor kan sättas däri. I tredje afdelningen äro borrade lika många hål och på samma sätt fördelade som i de förra afdelningarna. Hålen i denna afdelning äro så stora, att en sticka kan sättas i hvart och ett. Medelpunkterna till hålen i motsvarande rader inom de tre afdelningarna äro i rät linje.» (Pris för stickorna — 3 000 stycken — 40 öre, för decimaltaflan 3,35 kr.)

---

93. En samling af kuber, af hvilka hvarje barn behöfver använda högst 20.

---

94. Väl skurna, lagom stora, helst af papp gjorda lappar med påskrift tusen kronor, hundra kronor, tio kronor, en krona, tio öre och ett öre hafva stor betydelse. Af dem bör finnas så stort antal, att de kunna utdelas till lika antal och lika värde åt hvarje barn.

Sådana kan hvarje undervisare göra. Lappar med större värde böra vara större än de med mindre värde. Likgiltigt är, om de hafva fyrkantig eller rund form.

Af dithörande slag äro de af *lärarinnan fröken A. Detthow uppfunna »talbilderna»*. Satsen innehåller 30 små, tunna, med 2 kvadratiska ytor försedda trälappar. På den ena kvadratiska ytan är ett brunt eller ett hvitt, hela ytan täckande papper paklistradt, hvarå tryckts »1 öre» eller »10 öre» på samma sätt som å de verkliga slantarna af samma värde. »Talbilderna» äro ordnade i 3 hvarf i en pappask. Hvarje hvarf innehåller 2 rader med 5 »bilder» i hvarje rad. Ändamålet med den anordningen är att bibringa kunskap om de jämna och udda talen samt därom, att tio enheter sammanfattas i en större. (Pris genom Kongl. Ecklesiastikdepartementet 25 öre.)

I sammanhang därmed stå en af *f. folkskoleinspektören Gustafsson anordnad räknetafla* och *en sats af sedlar, tillhöria den s. k. Nordlundska räknemateriel*en. Sedelsatsen innehåller 50 enkronsedlar, 50 tiokronsedlar och 50 hundrakronsedlar, af stadigt, för olika värden olika färgadt papper. (Pris 1,20 kr.)

---

95. Planscherna öfver de metriska längdmåtten och ytmåtten äro äfven användbara. Genom deras användning vinnes därjämte insikt i den inbördes storleken af hithörande, med hvarandra jämförbara enheter.

---

96. Streck och punkter förmedla äfven uppfattning af talen. Vid behof böra barnen rita sådana på sina taflor.

---

97. a) Räknemaskin för bråk, »bestående af en ställning och 55 horisontalt rörliga cylindrar, som åskådliggöra från enheten till tiondedelen». (Svanström & C:o. Pris 9 kr.)

b) Räknemaskin för decimalbråk, bestående af en 1 m. lång cylinder, tio dylika 1 dm. länga, 10 sådana à 1 cm. och 10 sådana à 1 mm:s tjocklek (= längd). Cylindrarna äro uppträdda på lodräta järntenar, fastsatta i en träfot. (Svanström & C:o. Pris 18 kr.)

---

98. »Elfva papppark, af hvilka det första är deladt i halfark, det andra i tredjedelsark o. s. v. t. o. m. tolftedelsark». Storleken bestämd af lektor Nordlund. De äro afsedda för inlärande af de första grunderna till bråkläran. (Pris 1,20 kr.)

---

99. Åskådningsmateriel är nödvändig för att tydliggöra 1) talområdet ett—tjugo, 2) sammanfattning af mindre heltalsenheter till större, 3) uppdelning af större heltalsenheter i mindre och de tillfällen, då dylik uppdelning fordras, 4) hufvudräkning inom området 1—30 (hundra), 5) grundenhetens fördelning i lika delar samt vissa af dessa delars inbördes storlek.

Oberoende af undervisningen i skolan få många barn kännedom om de mindre myntenheterna (1 tiokrona, 1 krona, 1 tioöre och 1 öre) samt växling af de 3 första. Ju större den kännedomen är, desto mindre nödvändig är annan åskådningsmateriel för dem.

100. Ju mera uttrycken 1 tvådel af . . ., 1 tredel af . . ., o. s. v. t. o. m. 1 tiodel af . . . förekommit i heltalsafdelningen för att utmärka 1 (hvarje) dels storlek, då något lika 2-, 3-, 4-, ..., 10-delats, desto mer kan materiel undvaras för säker kunskaps vinnande i stambråkens (bråkenheternas) uppkomst utan stor ansträngning hos barnen. Se § 48 d)!

Ju mera barnen föras till minnes det utbyte, som ofta gjorts, när hela tal skulle likadelas, hvarvid 1 eller flera större enheter måst utbytas mot mindre enheter, innan delningen utförts, desto mindre är åskådningsmateriel nödvändig för förvandling från större till mindre bråksort. Motsvarigheten märkes af följande 2 ex.

Ex. 83. **En tvådel af 1 t. är ej något helt t. Därför uttryckes 1 t. i e. 1 t. = 10 e. En tvådel af 10 e. = 5 e.**

Ex. 84. Uttryck $\frac{1}{2}$ i 4-delar. **$\frac{1}{2}$ = en tvådel af 1: 1 uttryckes i fyradelar. 1 = 4 fyradelar, $\frac{1}{2}$ = en tvådel af 4 fyradelar eller 2 fyradelar.**

---

101. Emellertid äro somliga barn under den tysta räkningen mer i behof af direkt åskådning och behöfva inskärpa de delar, af hvilka ett tal består, genom att emellanåt se på den bild, som afser det ifrågavarande talet. Tillfälle därtill bör gifvas. För det ändamålet kan hvarje barn hafva sin särskilda åskådningsmateriel, såsom stickor, små kuber, Detthowska talbilderna, eller ock bör en för hela klassen gemensam åskådningsmateriel finnas, så beskaffad, att barnen kunna aktgifva på de för tillfället behöfliga antalen — ett barn på ett antal, ett annat barn på ett annat, o. s. v. Därtill äro så väl kulramar som delade kuber odugliga. Därtill duga blott sådana talbilder som de i §§ **90** och **91** här ofvan nämnda.

I de i § **91** nämnda talbilderna har särskild vikt lagts på tydliggörande af delarna i talet tio, såsom de förminskade bilderna af den första talbildsplanschens vänstra del visa å sid. 57. Talet tio förekommer synnerligen ofta i småskolekursen och sedan. Än skall det uppdelas och en del borttagas, än skall det fyllas med ett gifvet tal eller oftare med en del af ett gifvet tal. Af den nämnda planschen uppfatta barnen lätt både delarna i talet tio och fyllande däraf, då en del är uppgifven. Förmedelst samma plansch inskärpes detta lättare, än med någon annan materiel under den tysta räkningen, ty delarna äro färdigbildade och stå rätt öfver hvarandra.

Hufvudräkning och skriftlig räkning.

102. För all räkning, skriftlig räkning lika väl som hufvudräkning, fordras ju tankearbete, alltså hufvudräkning. Emellertid fattas hufvudräkning såsom en sorts motsats mot skriftliga räkningen. Den senare grundas åtminstone delvis på talens beteckning. Alltså bör hufvudräkning i egentlig mening ej grundas på talens beteckning, utan på deras utsägande. Däraf följer, att hufvudräkning och skriftlig räkning ej alltid böra utföras på samma sätt.

103. Vid hufvudräkning med hela tal fasthålles alltefter talens storlek sorterna tio, hundra och tusen, till dess barnen genom öfning inom området 1—100, kunna frigöra sig från somliga af dem. Först tänkes då t. ex. 5 tio till 3 tio = 8 tio = åttio. Sedan tänkes genast så: femti till trettio är åttio. Vid hufvudräkning med decimalbråk förekommer blott en sort, den hvari bråket utsäges.

Härvid tages hufvudräkning i den betydelse, som den haft af ålder. då många räknade säkert i hufvudet, fastän de ej kunde skrifva en enda siffra.

Nu anse många det för hufvudräkning att uträkna tal, som väl ej uppskrifvas, men som tänkas så, som om de vore skrifna. Därvid tänker man mest på de siffror, hvarmed talen skulle betecknas, om de skrefves. I det fallet uträknas skillnaden mellan fyrtinio och trettifem så i hufvudet: fem från nio återstår fyra; tre från fyra återstår ett; alltså fjorton.

Den riktiga hufvudräkningen öfvas först i småskolan, då barnen i början ej kunna skrifva tal, utan blott höra dem utsägas, och tänka på dem så, som de från början uppfattat deras innebörd och sammansättning. Skillnaden mellan fyrtinio och trettifem beräknas då så: Tre tio från fyra tio återstår tio; fem från nio återstår fyra; tio och fyra är fjorton; alltså fjorton.

104. Då hufvudräkningen bedrifvits riktigt i småskolan, hafva barnen i folkskolans första klass benägenhet att utsäga sorterna tio och hundra äfven vid skriftlig räkning.

105. Oberoende af den skriftliga räkningen skall hufvudräkning sedan öfvas i enlighet med talens utsägande. Då konkret sort förekommer, fästes naturligen äfven afseende därvid.

106. Hufvudräkning med hela tal öfvas isynnerhet inom talområdet 1—100 samt, så långt tiden medgifver, inom området 1—1 000. Talen skola vara sådana, att barnen ej behöfva tänka sig dem skrifna. Summan af 2 eller flera tal (»minuenden», »multiplikanden» och »dividenden», korteligen det hela) må gärna öfverstiga 100 (1 000). Vid mångfaldigande blir räkningen ansträngande, ja, för de flesta för ansträngande, när båda de använda talen innehålla 2 olika stora delar. Vid likadelning blir räkningen lätt, om de uppgifna delarnas antal är mindre än 11 eller om man först kan beräkna större och sedan mindre lika delars storlek. Beräkning af de lika delarnas antal lämpar sig ofta icke för ren hufvudräkning.

Ex. 85. a) Hvilket tal är tvåhundrasjuttiofem mer än trehundraåttioåtta? b) Huru mycket är trehundraåttiotvå mer än tvåhundrasjuttiofem?

Uträkning. a) Två hundra till tre hundra är fem hundra; sju tio till åtta tio är femton tio eller hundrafemtio; femhundra och etthundrafemtio är sexhundrafemtio; fem och åtta är tretton; sexhundrafemtio och tretton är sexhundrasextiotre.

b) Två hundra från tre hundra återstår ett hundra; sjuttio från åttio återstår tio; ett hundra och tio = etthundratio; fem från åtta återstår tre; alltså etthundratretton.

Ex. 86. Huru mycket är a) 7 gånger 18, b) 6 gånger 34?

Uträkning. a) 7 ggr tio är sjuttio; 7 ggr 8 är 56; 70 till 56 är etthundratjugusex. b) 6 ggr 3 tio är 18 tio eller etthundraåttio; 6 ggr 4 är 24; etthundraåttio till tjugufyra är tvåhundrafyra.

Ex. 87. a) 10×1 = tio. b) $10 \times 5 = 5$ tio = femtio. c) $10 \cdot 1$ dm. $= 10$ dm. $= 1$ m. d) $10 \cdot 3$ dm. $= 3$ m. e) $100 \cdot 1$ = hundra = 1 hundra. f) $100 \cdot 7 = 7$ hundra. g) $100 \cdot 1$ öre $= 100$ öre $= 1$ kr. h) $100 \cdot 6$ öre $= 6$ kr. i) $1\,000 \cdot 8$ kbdm. $= 8$ kbm.

Det förenklade sättet att utsäga längden i d) finnes lätt af det förenklade sättet att utsäga längden i c) genom god betoning. Meternas antal i det hela = decimeternas antal i den uppgifna delen. Sammalunda i e)—i).

Ex. 88. Huru mycket är a) 13 gånger 5, b) 13 ggr 54?

Uträkning. a) Tio ggr fem är femtio, 3 ggr fem är femton; alltså sextiofem.

Att beräkna svaret så går tydligen lika lätt, som efter omkastning af talens ordning eller som att beräkna fem gånger tretton, fastän det senare allmänt anses vara lättare. I båda fallen består uträkningen af 2 delar och tillämpas mångfaldstabeller.

b) 10 ggr femtio = 5 hundra; 10 ggr $4 = 40$; 10 ggr $54 = 540$; 3 ggr $50 = 150$; $540 + 150 = 690$; 3 ggr $4 = 12$; $690 + 12 = 702$.

Ex. 89. a) Huru stor är hvarje del, då 42 delats i 3 lika delar? Svar 1 tredel af 42. b) Huru stor är hvarje del, då 2 kr. delats i 5 lika delar?

Uträkning. a) En tredel af trettio är tio; 1 tredel af tolf är fyra; tio och fyra är fjorton.

b) Se det andra sättet för besvarande af frågan i ex. 34 a) å sid. 25!

Ex. 90. Hvad är 1 tolfdel af etthundrafyrtiofyra?

Tankegång: Först beräknas 1 fyradel af 144, sedan beräknas en 3-del af det talet.

Uträkning. a) En 4-del af 100 är 25; en 4-del af 40 är 10; 25 + 10 = 35; en 4-del af 4 är 1. Alltså är en 4-del af 144 = 36. b) En 3-del af trettio är tio; en 3-del af 6 är 2. Alltså är en 3-del af 36 = 12 och en 12-del af 144 äfven 12.

Annan tankegång: Här kan man äfven beräkna först en 2-del af 144 och sedan en 6-del af det talet eller först en 3-del af 144 och sedan en 4-del af det talet.

107. En skriftlig räkning liknande förestående uträkning af ex. 90 förekommer ej så ofta. Dock kan den påvisas.

Ex. 91. 8 fönster innehålla hvar sina 6 rutor. Glaset därtill kostar 36 kr. Huru mycket kostar hvarje glasruta?

Här kan man bestämma antingen först priset för glaset i ett fönster och sedan priset för 1 glasruta eller ock först glasrutornas antal i alla fönsterna och sedan priset för 1 glasruta. Det första sättet motsvarar hufvudräkningen i dylika fall.

Ex. 92. 8 personer delade 36 kr. lika. Hur mycket fick hvarje person?

Svar: En 8-del af 36 kr. eller 4 kr. 50 öre.

Uträkningar. 1) En 8-del af 36 kr. är 4 kr. med en rest af 4 kr., hvilken sedan delas, hvarvid man kan göra på flera sätt.

2) Först beräknas en 4-del af 36 kr. Den är 9 kr. Sedan beräknas en 2-del af 9 kr.

Under uträkningen enligt 1) kan uttryckssättet fullkomligt grunda sig på exemplets innebörd, så att man betonar, att en 8-del af något beräknas. Då undvikes det annars vid den skriftliga räkningen oftast använda uttrycket, som närmast syftar på beräkning af delarnas antal, nämligen 8 i 36 o. s. v.

För den skriftliga uträkningen af ex. 92 förvandla många först från kr. till öre, och därefter delas 3 600 öre i 8 lika delar. Hvarje del bör emellertid ej blott utsägas såsom 4 500 öre utan ock såsom 4 kr. 50 öre. Och däraf inses det sättets olämplighet. I ännu högre grad är det olämpligt vid hufvudräkning.

---

108. Emedan alla bråk äro uttryckta i bestämd sort, är ren hufvudräkning med bråk ofta svår vid förvandlingar, bråks sammanläggning och fördelning i lika eller olika delar. Här gäller isynnerhet att betona å ena sidan delarnas antal i bråken och å andra sidan sorten (sorterna). **Intet tal om eller tanke på täljare och nämnare får finnas.** Behandlingen af decimalbråken underlättas ofta mycket däraf, att dithörande sorter äro få.

109. Hufvudräkningen bör inskränka sig till de vanligaste bråkens uppkomst, innebörd, jämförelse med hvarandra och användning i de s. k. räknesätten.

I enklare fall behöfves ingen åskådningsmateriel, ty sortnamnets innebörd är självklar och god grund är lagd i heltalsläran.

Ex. 93. Huru mycket är a) summan af 23 hundradelar och 39 h.-dlr, b) 39 h.-dlr mer än 25 h.-dlr, c) 6 ggr 23 hundradelar, d) 1 sjudel af $2\frac{5}{8}$? Svar: a) 62 h.-dlr, b) 14 h.-dlr, c) 138 h.-dlr eller 1 e. 38 h.-dlr, d) 3 åttadelar.

Ex. 94. Huru mycket är a) 1 tiodel af 1 tiodel, b) 1 tiodel af 2 tiodelar, c) 3 tiodelar af 2 tiodelar?

Uträkning. a) Emedan 1 tiodel af 1 tiodel icke är någon hel tiodel, måste 1 tiodel uttryckas i mindre sort. 1 tiodel = tio hundradelar. En tiodel af tio hundradelar är 1 hundradel.

b) 1 tiodel af 2 tiodelar = 1 tiodel af 20 hundradelar = 2 hundradelar.

c) 1 tiodel af 2 tiodelar = 2 hundradelar. Emedan talet 3 tiodelar innehåller 3 sådana delar, är 3 tiodelar af 2 tiodelar = 3 · 2 hundradelar = 6 hundradelar.

Ex. 95. Uttryck 3 fyradelar i tolfdelar!

Uträkning. 3 fyradelar = 3 fyradelar af 1 eller 3 fyradelar af 12 tolfdelar eller 9 tolfdelar. — Omedelbart däraf förstås, att 9 tolfdelar = 3 fyradelar.

Ex. 96. Uttryck 8 tolfdelar i 3-delar!

Uträkning. 4 tolfdelar = 1 tredel. Talet 8 tolfdelar innehåller 2 delar med 4 tolfdelar i hvarje del eller 2 delar med 1 tredel i hvarje del; alltså är 8 tolfdelar = 2 tredelar.

110. I svårare fall fordras åskådning, hvarvid 6:e talbildsplanschen användes.

Ex. 97. Uttryck 4 tolfdelar i a) 6-delar, b) 9-delar!

På planschen synes, att 4 12-dlr = 2 6-dlr eller 3 niodelar. Eller ock utbytes först 4 tolfdelar mot 1 tredel, och detta tal sedan mot 2 6-dlr och 3 9-dlr.

Ex. 98. Hvilketdera är mer, a) 3 fyradelar eller 7 åttadelar, b) 75 hundradlr eller 3 fyradelar eller 2 niodlr?

På planschen synes, att a) 7 8-dlr är > 3 4-dlr, att b) 75 h.-dlr = 3 4-dlr och att båda äro > 2 niodlr.

Ex. 99. Huru mycket är en 3-del af en 2-del?

Uträkning. *En* tvådel innehåller 3 sådana delar. Ett innehåller 2 tvådelar. Alltså innehåller talet ett 2 ggr 3 sådana delar eller 6 sådana delar, hvadan hvarje del är 1 sexdel.

Ex. 100. 3 femdelar af en vall var 600 kbm. Huru stor var hela vallen?

Uträkning. En af dess 5 lika delar var 1 tredel af 600 kbm. eller 200 kbm. Alla dessa 5 delar tillhopa eller hela vallen var alltså 5 ggr 200 kbm. eller 1 000 kbm.

Ex. 101. Angif den största jämna delen af a) 1 tvådel, b) 1 tredel, c) 1 fyradel! [Svar: a) 1 4-del, b) 1 6-del, c) 1 8-del.]

Den största jämna delen af något finnes genom att dela i 2 lika delar. Den därnäst stora finnes genom att dela i 3 lika stora delar.

Ex. 102. Angif den största jämna delen af 1 tvådel, 1 tre-del och 1 4-del!

Vid undersökning (åskådning, ren tankeöfning) finnes, att svaret är 1 tolfdel.

Utredning: Emedan 1 fyradel är en jämn del af 1 tvådel, kan man vid den följande undersökningen förbigå 1 tvådel. Då 1 tredel delas i 2 lika delar, blir hvarje del 1 sexdel, men den är ej en jämn del af 1 4-del. Då 1 tredel delas i 3 lika delar, blir hvarje del 1 niodel, men ej heller den är en jämn del af 1 4-del. Den därnäst följande jämna delen är 1 tolfdel och den är äfven jämn del af 1 4-del. Dess jämna delar äro i ordning: 1 åttadel, 1 tolfdel, 1 sextondel, 1 tjugudel, 1 tjugufyradel o. s. v.

111. Hufvudräkningen skall läggas till grund för den skriftliga räkningen. Ett riktigt samband mellan dessa två slag af räkningar **möjliggöres i heltalsområdet blott därigenom, att orden tio, hundra och tusen användas såsom sortnamn äfven vid den skriftliga räkningen.** Härvid beaktas då blott, att tio utbytes mot ett tio, hundra mot ett hundra och tusen mot ett tusen, tio tusen mot ett tiotusen, hundra tusen mot ett hundratusen, när förfaringssättet vid den skriftliga räkningen skall meddelas.

Detta utbyte sker för öfrigt redan vid ren hufvudräkning i småskolan. Ex. Huru mycket är sjuttio och tio tillsammans? — Barnen måste där vägledas att tänka och säga den första delen sjuttio såsom sju tio och den andra delen tio såsom ett tio, innan de förstå, att det hela är åtta tio eller åttio.

112. Utgångspunkt kan vara åskådning. Därtill ansluta sig andra exempel med konkreta sorter (= sakexempel) och sist upptagas exempel med abstrakta sorter, nämligen talsorter. Då påvisas motsvarigheten mellan de konkreta sorterna och talsorterna samt antalens behandling på samma sätt, vare sig att sorterna äro konkreta eller abstrakta. Men blott sådana konkreta sorter, som äro lämpliga i det särskilda fallet, upptagas, för att öfverensstämmelsen skall blifva påtaglig.

Alla 2—flersiffriga hela tal uppdelas i 2 eller flera delar, allt efter de antalbetecknande siffrornas antal. Då man fäster sig vid *en* af dessa siffror, tänker man på *en* del af talet, och denna del uttryckt i bestämd sort. För att barnet skall begripa svarets beskaffenhet, då hvarje sådan del behandlas, tager man åskådning eller barnens erfarenhet eller båda till hjälp.

Vid sammanläggning af 2 tvåsiffriga tal blir förfaringssättet följande.

Ex. 103. Ur den af 9 skifvor, 9 stänger och 10 kuber bestående större kuben tagas t. ex. först 4 stänger och 2 kuber samt sedan 3 stänger och 7 kuber. Dessa bilda tillsammans 7 stänger 9 kuber. Däraf märkes, att blott antal af samma sort sammanläggas, samt att det hela innehåller samma sorter som delarna. Vid uträkningen göres början med antal af minsta sorten.

Ex. 104. På grund af åskådning eller erfarenhet inses, att 4 tioören 2 ettören och 3 tioören 7 ettören tillhopa utgöra 7 tioören 9 ettören. Men så säges ej i allmänhet, utan penningsumman utsäges i detta fall i lägsta sorten ettöre eller öre, hvadan svaret blir 79 öre.

Detta exempel kan vara utgångspunkt.

Ex. 105. Hvad är summan af 4 tio 2 och 3 tio 7?

Uträknadt på samma sätt som i föreg. ex. blir talet 7 tio 9, men det säges enklare sjuttinio. Öfverensstämmelsen med sättet i ex. 104 är fullkomlig. Olikheten ligger väsentligast däri, att talsorten blir öfverflödig i den sista delen af talet och i sista sättet för talets utsägande, emedan sorten är själfklar.

I ex. 104 kunna sorterna tiokrona och krona upptagas (möjligen äfven sorterna dm. och cm. eller cm. och mm., men inga andra konkreta sorter), emedan svaret slutligen bör utsägas i den minsta konkreta sorten.

Ex. 106. Skriftlig sammanläggning af talen 42 och 37.

Här fordras först uppdelning så, att delarna uttryckas i olika sorter så som i föreg. ex. Liksom i de föreg. ex. blott antal af samma sort sammanlades, så ock här. Svaret blir 79, hvilket bör utsägas på 2 sätt: 1) då de genom räkning funna delarna däraf utsägas i olika sorter, alltså sju tio nio, 2) på det enklaste sättet, då blott grundenheternas antal säges: sjuttinio.

Af det skriftliga förfaringssättet vid uträkning af 42 + 37, då färdighet vunnits, så att sorter ej behöfva sägas under uträkningen, utan man kan nöja sig med att säga 7 + 2 = 9; 3 + 4 = 7 och uppskrifva en sjua framför en skrifven nia, kommer sedan följande *s. k. hufvudräkning*, då t. ex. talen 45 och 37 sammanläggas: 7 och 5 är 12; 1 upp och 2 i minnet; 3 och 4 är 7; 1 i minnet är 8; alltså åttiotvå. Då framträda siffrorna lika tydligt som om de vore skrifna, och räkningen måste anses vara mera en sorts skriftlig räkning än hufvudräkning. — Hvar sättes 1 upp? m. m.

Af det sista sättet att räkna kommer påståendet, att man kan räkna »i hufvudet» huru som helst. Läraren är nöjd, blott inga siffror skrifvas.

113. Vid sammanläggning och mångfaldigande förvandlas från mindre till större talsort så ofta som möjligt. Den eller de konkreta sorterna, som finnas från början, bibehållas, tills antalet (antalen) beräknats; först därefter förvandlas från mindre till större konkret sort.

Ex. 107. Huru mycket är a) summan af 47 och 68, b) 3 ggr 68 öre, c) summan af 46 kr. 47 öre och 52 kr. 68 öre, d) 3 ggr 2 kr. 68 öre, e) 3 ggr 0,68.

a) $47 + 68 = 115$.

Uträkning. 8 (e.) till 7 (e.) = 15 (e.) = 1 t. 5 (e.). Det t., som 15 innehåller, tillägges genast. 1 t. + 6 t. = 7 t.; 7 t. + 4 t. = 11 t. = 1 h. 1 t.

Däraf kommer ett annat sätt utan utsägande af sortnamnen. 7 + 8 är 15 eller en af större sort och 5 af samma sort. 1 + 6 är 7; 7 + 4 är 11 eller en af större sort och en af samma sort. Antal af en sort i det beräknade talet skrifves rätt under antal af samma sort i de uppgifna delarna.

b) 3 × 68 öre = 204 öre = 2 kr. 4 öre.

c) Svar: 1) 98 kr. 115 öre, 2) 99 kr. 15 öre.

d) Svar: 1) 6 kr. 204 öre, 2) 8 kr. 4 öre.

e) Svar: 2,04. Se uträkningen i § **70** å sid. 46!

För att man blott skall tänka på talen under räkningen och för att ej bortglömma den konkreta sorten, är bäst att uppskrifva den sorten före beräkningen af dithörande antal. I synnerhet behöfves det, då talen äro många och jämförelsevis mångsiffriga.

Uträkning af c): 46 kr. 47 öre
52 » 68 »
98 kr. 115 öre
= 99 kr. 15 öre.

Först sammanläggas öretalen, sedan sammanläggas krontalen. Före sammanläggning af öretalen uppskrifves sorten öre under strecket. Sedan sammanläggas öretalen på vanligt sätt. Därefter uppskrifves sorten krona. Så sammanläggas krontalen. Slutligen uttryckes summan på vanligt sätt, hvarvid 115 öre uppdelas i 1 kr. 15 öre.

114. Vid delning i olika eller lika delar utbytas större enheter mot mindre enheter (= förvandlas från större sort), dock så litet som möjligt. Vid delning i olika delar utbytes vid behof blott en större enhet mot mindre enheter (uttryckes blott *en enhet af större sort i närmast mindre sort*). Vid likadelning bestämma omständigheterna, huru många större enheter skola utbytas mot närmast mindre enheter. Jfr med ex. 92 å sid. 68!

Ex. 108. Huru mycket är 4 000 kr. 12 öre mer än 392 kr. 25 öre?

Uträkning: 4000 kr. 112 öre
— 392 » 25 »
3607 kr. 87 öre

Först borttages öredelen, 25 öre, sedan borttages krondelen, 392 kr. I följd däraf undersökes först, om öredelen kan borttagas utan att växla 1 kr. af de 4 000 kr. Emedan 25 öre ej kan tagas från 12 öre, så måste 1 kr. tagas och växlas. 1 kr. utbytes då mot 100 öre. Detta lägges till den förut befintliga delen 12 öre. 100 öre till 12 öre är 112 öre. Emedan där står 12 öre, tillskrifves en etta framför 12. Första raden säges sedan så: 3 999 kr. 112 öre. Sedan verkställes uträkningen. Före fråndragningen uppskrifves öresorten; därefter beräknas öretalet, så uppskrifves kronsorten, och slutligen beräknas krontalet.

Ex. 109. Huru stor blir hvarje del, då 64 kr. 80 öre delas i a) 9 lika delar, b) 18 lika delar, c) 180 lika delar? d) 64,8 : 9; e) 64,8 : 18; f) 64,8 : 180.

Svar: a) 7 kr. 20 öre; b) 3 kr. 60 öre; c) 36 öre; d) 7,2; e) 3,6; f) 0,36.

För uträkning af a) bör blott 1 kr. uttryckas i öre, ty 9 × 7 kr. = 63 kr. För b)-svaret böra 10 kr. uttryckas i öre, ty 18 × 3 kr. = 54 kr. I c) bör allt uttryckas i öre, ty hvarje del blir mindre än 1 kr. Sammalunda i d)—f).

Ex. 110. Huru många blifva delarna, då 64 kr. 80 öre delas så, att hvarje del blir a) 36 öre, b) 3 kr. 60 öre? Huru många blifva delarna, när 64,8 delas så, att hvarje del blir d) 0,9, e) 1,8, f) 3,6? Svar: a) 180; b) 18; c) 72, d) 36; e) 18.

För uträkning af a)-svaret behöfver hela krondelen af penningsumman uttryckas i öre. Två sätt äro tänkbara. 1) Delning i först 2 delar, af hvilka den ena är 36 öre, sedan i 3 delar, af hvilka 2 äro hvar sina 36 öre, så i allt flera delar. Under tiden uttryckes den ena kronan efter den andra i öre. Då användes ju »subtraktion». 2) Delning från början i lika delar. Då uttryckes genast hela krondelen, 64 kr., i öre. Men sedan slipper man tänka på öresorten.

För uträkning af b)-svaret äro de samma 2 sätten användbara. 1) Delning i 2 delar, af hvilka den ena delen är 3 kr. 60 öre. Den andra delen blir då omedelbart 61 kr. 20 öre. Så delning af 61 kr. 20 öre i 2 delar, då den ena delen är 3 kr. 60 öre. Den andra delen blir då 57 kr. 60 öre. För dess erhållande uttryckes blott 1 kr. i öre. Under räkningens fortgång uttryckes högst 1 kr. i öre vid hvarje delning. 2) Då man från början delar i lika delar, måste både 64 kr. och 3 kr. uttryckas i öre. Sedan fästes intet afseende vid öresorten.

Motsvarande sätt äro tänkbara vid uträkning af c)—e).

115. Vid behandlingen af **allmänna bråk** blir förfaringssättet delvis annorlunda än inom heltalsområdet och decimalbråksområdet till följd af deras beteckning. Barnen se 2 tal vid skriftlig räkning, men de se ingen sort. Det är orätt att säga, att nämnaren betecknar sorten; ty nämnaren är ett tal lika väl som täljaren. Man fäste sig därför vid nämnaren såsom tal! Endast i det fall, att bråkenheterna äro lätt jämförbara med hvarandra, kunna barnen genom mycken öfning bringas att fasthålla sorten utan en närmare granskning af nämnarna. Hvad alla andra bråk beträffar, förspilles tiden onödigt genom att uteslutande förmå dem att fasthålla sorten. Barnen fästa sig med rätta vid nämnarna såsom tal, nämnarnas närvaro underlättar räkningen för barnen i många fall, och därefter måste undervisningen rättas.

Ex. 111. a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$; b) $\frac{2}{3} + \frac{7}{8}$.

I a) kan ren hufvudräkning läggas till grund för uträkningen, emedan bråket $\frac{1}{4}$ lätt kan uttryckas i 8-delar. I b) böra däremot nämnarna blifva utgångspunkt för beräkningen. Då beräknas först deras minsta gemensamma mångfald (minsta gemensamma dividend) (24) och sedan förlängningstalet till det första bråket (8). Därefter förlänges detta, hvarvid ny täljare (16) och ny nämnare (24) bildas. Sedan beräknas förlängningstalet till det andra bråket (3), och sedan förlänges bråket därmed. Slutligen sammanläggas bråken. Öfvergången till det senare sättet bör göras i sammanhang med uträkning af ett hufvudräkningsexempel, på det att barnen må komma till insikt om det senare sättets riktighet.

Andra afdelningen.

Mer ingående behandling.

Småskolekursen.

Dess ändamål och omfattning.

116. Småskolekursen afser att bibringa kunskap om sådana tals beskaffenhet, som lätt kunna åskådliggöras, och på grund af den insikten förmåga att räkna med dem på enkelt sätt.

Endast de i sammanhang med åskådningen framträdande enkla uttrycken skola användas. Där fästes **hufvudvikten på uttrycken det hela och dess delar.** Där gäller blott 1) att beräkna ett tal (eller efter räkning angifva storleken af det hela), då dess delar äro gifna, 2) att beräkna en dels storlek, vare sig en af två (den öfriga af flera) olika stora delar eller en af två (flera) lika delar, samt 3) att beräkna delarnas antal, hvarvid de i allmänhet äro lika stora.

Vid tyst räkning skola barnen äfven räkna så som vid vanlig hufvudräkning.

117. Kursen omfattar enligt normalplan I. Hufvudräkning: de fyra räknesätten inom talområdet 1—30.

II. Skriftlig räkning: sammanläggning och fråndragning inom talområdet 1—100 äfvensom mångfaldigande och delning med ensiffriga faktorer.

Skriftligt mångfaldigande och skriftlig likadelning bör först och främst omfatta sådana tal, som förekomma i mångfalds- och likadelningstabellerna.

---

118. Vid hvarje tals behandling beaktas: 1) *dess bildande*, 2) *dess fyllande*, 3) *dess uppdelning*, 4) *ömsesidig jämförelse mellan det talet och förut behandlade tal*, 5) *dess användning* och 6) *dess beteckning*.

Inledningsafdelning: Talens bildande i följd.

119. De tio eller tjugo första talen bildas först i följd därigenom, att talet 1 oupphörligt tillägges. Sålunda framträder innebörden af dessa tal enligt talorden.

Ex. 112. Talet sex innehåller 1) sex tal 1 eller sex delar med 1 i hvarje del, 2) delarna 5 och 1.

I sammanhang därmed kan betonas, att 1 är en sexdel af 6 eller fullständigare att 1 är en af de 6 lika delar, som sex innehåller.

Talen betecknas med streck utan eller med +. Genom + tydliggöres talens sammansättning. Likhetstecknet användes. Ex. | + | = ||. För beteckning af tal, som äro större än fyra eller fem, sammanföras strecken i grupper.

+ | = ||||| eller ~~||||~~ |. Tolf betecknas ~~||||~~ ~~||||~~ ||.

Talens allsidiga behandling.

120. Då fördelas talen i grupper: a) talområdet 1—9, b) talet 10, c) tiotalen, d) talen 11—19, e) talen 1—19, f) talen 1—20, g) talen 1—99, h) talet 100, i) inledning till talområdet 1—999, nämligen uppfattning, beteckning och utsägande af 3-siffriga tal.

121. Alla tal utom 2 och 3 bildas äfven annorlunda än i följd och bestå alltså äfven af andra delar än de enligt § **119** angifna. Talet 6 består sålunda af a) 5 och 1, b) 4 och 2, c) 3 och 3, d) 2, 2 och 2, e) 1, 1, 1, 1, 1, 1, f) 1, 2, 3, o. s. v. — Här betonas, att 6 kan utbytas mot a) 5 plus 1, eller b) 4 plus 2, eller c) 3 plus 3, o. s. v.

I sammanhang därmed betonas, 1) att 3 är 1 af de 2 lika delar, som 6 innehåller, eller att 3 är 1 tvådel af 6, och 2) att 2 är 1 tredel af 6.

Talen betecknas och barnen öfvas med sifferskrifning på den till tyst öfning anslagna delen af räknetimmen. Inom talområdet 1—9 sammanställes streckskrifningen med sifferskrifningen vid behof, emedan streckskrifningen förmedlar uppfattningen af det betecknade antalet. Jämte sifferskrifning öfvas samtidigt, att det betecknade talet består af vissa delar och beräkning af den återstående delen, då en eller flera delar borttagits. Första gången talområdet 1—9 behandlas fullständigt, böra blott + och — förekomma.

Ju längre man kan fördröja användande af tecknet ×, utan att det verkar hämmande, och det kan ske åtminstone under första terminen, desto klarare uppfattning få barnen af själfva saken, och desto mer tvingas undervisaren att fråga: »Huru stort är delarnas antal» eller »Huru många äro delarna» i stället för »Huru många gånger», hvadan han så småningom bör vänja sig från frågorna inledda med orden »Huru många gånger mera» och »huru många gånger mindre». — Frågan »Huru många gånger går 7 i 14?» och dylika saknar åskådlig grund vid användning af nu befintlig materiel och är obehöflig på småskolestadiet. Mycket tydligare för barn i den åldern är t. ex. »Huru många delar med 2 dl. i hvarje del innehåller 1 l. (2 l., 3 l.)?» än frågan: »Huru många gånger gå 2 dl. i 1 l. (2 l., 3 l.)?» I all synnerhet framträder fördelen af den förra vid byte (köp).

Ex. 113. Hvad kosta 4 dl. mjölk, då 2 dl. kosta 1 öre?

Redogörelse: 4 dl. innehåller 2 delar med 2 dl. i hvarje del, därför skall priset för 4 dl. innehålla 2 delar med 1 öre i hvarje del eller vara 2 öre.

Användande af ordet *mångfald* förebygger det oriktiga uttrycket »gånger mera».

Då betonas olikheten mellan siffra och tal, och undvikes uttrycket »större (mindre) siffra», då man skall säga »större (mindre) tal».

Talord:	ett,	två,	tre,	fyra,	fem,	sex,	sju,	åtta,	nio.
Siffernamn:	etta,	tvåa,	trea,	fyra,	femma,	sexa,	sjua,	åtta,	nia.

När barnen kunna, skrifva de:

En etta betecknar ett.
En tvåa betecknar två.
En trea betecknar tre.
O. s. v.
En nia betecknar nio.
En nolla betecknar noll (intet).

122. Vid behandling af talen 1—9 förekommer stundom konkret sort vare sig i sammanhang med åskådning eller utan åskådning. Den konkreta sortens närvaro kräfver särskild uppmärksamhet på samband mellan fråga och svar.

Ex. 114. Huru många äro kulorna (= Huru många kulor finnas här)? (Sv. 5.) Barnen räkna då så: en, två, tre, fyra, fem. De säga i enlighet därmed blott »fem», men de säga icke »fem kulor», om icke läraren tvingar dem därtill.

Ex. 115. Huru mycket (= Hvad) är detta? (Sv. 5 kulor.)

123. Behandling af talet tio.

A. Uppfattning och uppdelning af talet.

Det är tillräckligt till en lektion.

Då talet tio skall behandlas, samlas först tio små kuber eller tio kvcm. eller tio ettören eller tio tioören och påvisas samt efterfrågas kubernas antal, kvcm.-s, ettörenas och tioörenas antal. Därefter påvisas och efterfrågas de delar, af hvilka talet tio består: 9 och 1, 8 och 2, 7 och 3, 6 och 4, 5 och 5, samt dess fyllande, när en del är känd. Då frågas: »Hvilket tal skall läggas till nio, för att alltsammans (det hela) skall blifva tio?»

Sedan skrifva barnen så på sina taflor:

a) tio = nio + ett, tio = åtta + två, o. s. v.	Barnen tillhållas att icke säga tie i stället för tio eller nie i stället för nio.

b) nio + ett = tio, åtta + två = tio, o. s. v.	c) tio — ett = nio, tio — två = åtta, o. s. v.	d) tio — nio = ett, tio — åtta = två, o. s. v.

Detta granskas gemensamt, hvarefter barnen öfverläsa det.

B. Beteckning af talet.

Först visas sammanfattningen af tio små kuber till en stång, tio kvcm. till en rektangel (ett band), tio cm. till 1 dm., tio dm. till 1 m., tio ettören till ett tioöre eller tio tioören till 1 krona. Sedan säges: »Sammalunda sammanfattas tio grundenheter till en större enhet: ett tio. — Detta göres, för att I skolen förstå talets beteckning.»

Huru många tio innehåller talet? Svar: ett. Med hvilken siffra skall den enheten betecknas: Svar: en etta. Läraren skrifver en etta och säger: »Men så betecknade vi äfven talet ett. För att nu beteckna, att denna etta betecknar talet tio och icke talet ett, måste vi tänka oss flera rum så: | | |. I rummet till vänster skrifves den etta, som betecknar talet tio. Men man brukar ej draga sådana streck mellan rummen. Därför måste vi hafva det högra rummet fylldt. Det fylles med en nolla, som ej betecknar något antal.» En nolla skrifves i det rummet. Då står det så på taflan: |1|0|. Därefter utstrykas strecken, och talet är betecknadt så: 10. Det utsäges tio eller ett tio. Sedan angifves, att tio betecknas med en etta i andra rummet från höger och en nolla i första rummet från höger, att tiotalet är ett och entalet är noll, samt att rummet, i hvilket ettan står, kallas tiorum och att rummet, i hvilket nollan står, kallas enhetsrum, att tiorummet är det andra rummet från höger, emedan tio är den andra sorten i ordningen. I sammanhang därmed efterfrågas det ena efter det andra af det, som föresagts, så att barnen få säker kännedom därom.

C. Tyst öfning.

1) Först skola de skrifva tio = 1 tio = 10. De uppmanas, att i sammanhang därmed tänka på rummens namn och rummens ordningsföljd. Sedan skola de skrifva:

a) 9 + 1 = 10.	b) 10 = 9 + 1.
8 + 2 = 10.	10 = 8 + 2.
———	———
———	———
1 + 9 = 10.	10 = 1 + 9.
c) 10 — 1 = 9.	d) 10 — 9 = 1.
10 — 2 = 8.	10 — 8 = 2.
———	———
———	———
10 — 9 = 1.	10 — 1 = 9.

Hvarje tabell öfverläses några gånger, sedan den bildats, till dess att säkerhet vunnits. Barnen skola tänka så: a) nio och ett är tio (eller nio till ett är tio eller nio plus ett är tio). c) tio minskadt med ett är nio, o. s. v. Därvid skola de eftertänka, hvilka delar talet tio innehåller.

2) Därefter skola de tillfoga den ena konkreta sorten efter den andra.

a) 9 öre + 1 öre = 10 öre.
O. s. v.

b) 10 öre = 9 öre + 1 öre.
O. s. v.

c) 9 kvcm. + 1 kvcm. = 10 kvcm.
O. s. v.

3) Slutligen skola de skrifva:

a) 9 + x = 10.	x utsäges »äks» (icke »hvad»), så att
8 + x = 10.	barnen läsa: nio och äks är tio. x är
O. s. v.	en obekant del af 10. Den beräknas.

Efter första raden skrifves: $x = 1$. Efter andra raden skrifves: $x = 2$. O. s. v.

Efter den tabellens skrifning frågar läraren: Huru många delar innehåller tio? (Svar: 2.) Huru stor är den första? (Svar: 9.) Huru stor är den andra? (Svar: 1.) Huru är den delen betecknad från början? (Svar: Med äks.) Hvilken del i ordningen är i början betecknad med x? Hvarpå märkes, att delarna äro nio och x? (Svar: Det står och (plus) mellan dem.)

b) $10 = x + 1$. $10 = x + 2$. O. s. v.	Motsvarande frågor göras.
c) $10 - x = 9$. $10 - x = 8$. O. s. v.	Här frågas: Huru är den första delen betecknad i början? (Svar: Med x.) Hvarpå märkes, att x är den

första delen? (Svar: Då x borttagits från tio, återstår 9.) Huru mycket återstår, då 1 borttagits från 10? Huru mycket återstår, då 10 minskats med 1? Huru mycket är tio mer än nio? Huru mycket är 1 mindre än tio?

d) $10 - x = 1$. $10 - x = 2$. O. s. v.	Här frågas så som i c).

D. Dess sammansättning af större lika delar och dess uppdelning i större lika delar.

Det består af 5 tal 2 eller 2 tal 5. Det uppdelas, så att hvarje del är a) 5, b) 2. Det uppdelas i a) 2 lika delar, b) 5 lika delar.

För öfrigt beaktas följande:

1. Den enkla bildningen af orden tiotal, tioöre och tiokrona. Märk! Ordet tiotal motsvarar tioörenas antal eller tiokronornas antal, icke sorten tioöre eller sorten tiokrona.

2. Tio kan utbytas mot ett tio, blott då det är fråga om tal. Utbytet af tio mot ett tio är icke nödvändigt i början.

3. Om lärarinnan sammanfattar de tio grundenheterna till en tia, så må hon noga inskärpa, att *en tia är ett tal* och icke namn på en siffra, emedan den tionde siffran är en nolla.

4. Tiotalet är ett, då man säger tio, öretalet är tio, då man säger tio öre, tioöretalet är tio, då man säger tio tiooren, krontalet är tio, då man säger tio kronor, decimetertalet är tio, då man säger tio decimeter, o. s. v.

5. Aldrig må uttrycket »ett tioöre» utbytas mot »ett tiotal öre» eller uttrycket »en tiokrona» utbytas mot uttrycket »ett tiotal kronor» eller uttrycket »en m.» mot »ett tiotal dm.» De enda riktiga äro i stället uttrycken »tio öre», »tio kronor», »tio dm.» Då 1 tioöre visas i sammanhang med frågan: Huru många öre innehåller den slanten, det myntet? bör alltid svaras: tio (aldrig: ett tiotal).

6. Nu meddelas början af konkreta storheters uttryckande i samma sort i vissa fall.

7. Riktiga ordafkortningar inläras och användas. Tioöre afkortas till t. öre eller tioör., decimeter till dm. (ej till decim. eller dcm.), meter till m. (ej till met.), millimeter till mm. (ej millim.), centimeter till cm. (ej centim.), kvadratcentimeter till kvcm. (ej kvadratcm.), krona till kr. (ej kron.), kg. (ej kilo.), liter till l. (ej lit.), deciliter till dl. (ej decilit.).

8. Först nu inläres nollan, som utsäges: noll.

9. Läraren inskärpe siffrornas namn och ordningsföljd samt det tal, som motsvarar hvarje siffra.

10. I problem väljas äfven sådana tal, att förhållandet mellan tio och dess lika delar 2, 5 framträder.

124. I följande afdelning förekomma antalen 1—9, men de innehålla enheter af tiosort. Dessa tal böra ock utsägas på det vanliga sättet: tio, tjugu, trettio, . . ., nittio. Då skola inga konkreta sorter upptagas.

Färdighet bör vinnas att utbyta 1 t. mot tio, 2 t. mot tjugu, 3 t. mot trettio, 4 t. mot fyrtio, 5 t. mot femtio, 6 t. mot sextio, 7 t. mot sjuttio, 8 t. mot åttio, 9 t. mot nittio och tvärt om.

---

125. Alla talen 11—19 bildas först så af 2 delar, att den första delen är a) tio, b) 1 t. och den andra delen något af talen 1—9.

Ex. 116. Tio och ett är elfva; ett tio och ett är elfva.

Den andra talbildsplanschen tydliggör sammansättningen af dessa tal.

126. Först då ifrågakommer utsägande i 2 delar på grund af beteckningen och utsägande utan uppdelning. I förra fallet skall första delen utsägas på 2 sätt: a) 1 t. och b) tio. I a) betonas, att första delens utsägande såsom 1 t. beror därpå, att den är betecknad med en etta i tiorummet. Ex. 11 utsäges efter uppdelning så: 1 t. 1 (e.) eller tio och ett, och utan uppdelning: elfva.

127. Lätt beräknas x-värdet, d. v. s. den ena delens storlek, i ex. sådana som a) 1 t. 1 e. $= 1$ t. $+ x$; b) 1 t. 1 e. $- 1$ t. $= x$; c) $11 - x = 1$ t., eller $11 - x = 10$; d) 1 t. 1 e. $= x + 1$ eller $11 = x + 1$.

128. Dessutom bildas talen af 3 delar så, att tio är den första och de 2 andra delarna hvar sitt af något tal inom området 1—8. Ex. $14 + 5 = 19$.

Den första eller andra talbildsplanschen lämnar barnen god ledning därvid.

Då lösas lätt sådana uppgifter som a) $14 + x = 19$; b) $x + 4 = 19$; c) $19 - x = 4$; d) $19 - x = 14$; e) $x - 5 = 14$; f) $19 - 6 - 1$; g) $19 - 3 - 4$.

129. Olika konkreta sorter skola ibland upptagas i samma uppgift. Därigenom lära sig barnen än mer å ena sidan olikheten mellan konkreta och abstrakta sorter och å andra sidan öfverensstämmelsen mellan dem.

Öfverensstämmelsen ligger däri, att 1 större enhet innehåller 10 närmast mindre enheter.

Ex. 117. 1 tioöre 4 öre + 4 öre. Detta är en penningsumma, ty sorterna äro penningsorter.

Penningsumman utsäges enklare, sedan öretalen 4 och 4 sammanlagts: 1 tioöre 8 öre och än enklare 18 öre. Eller också utbytes 1 tioöre först mot tio öre, då summan af de båda första delarna blir 14 öre.

Ex. 118. $14 + 4$.

Uträkning. 1) 14 uppdelas i tio och fyra. $4 + 4 = 8$; $10 + 8 = 18$.

Eller 2) bibehålles 14 ouppdeladt.

I hufvudräkningsexempel upptagas äfven enheterna dussin och tolft samt ömsesidig jämförelse mellan dem och 2, 3, 4 och 6. Särskildt beaktas förhållandet och tillämpas det i problem. Ex. Hvad kostar 1 dussin knappar, då 4 knappar kosta 3 öre? Svar: 3 ggr 3 öre eller 9 öre. Tvärt om: Hvad kosta 4 knappar, då 1 dussin knappar kostar 9 öre? Svar: 1 tredel af 9 öre.

---

130. Vid behandling af talområdet 1—19 betonas fyllandet af talet tio. Ex. $6 + 5$. Talet 5 uppdelas i 4 och 1. $6 + 4 = 10$; $10 + 1 = 11$.

Barnens arbete underlättas mycket genom åskådande af första talbildsplanschen, i det att grupperna äro ordnade så, att de 2 rätt öfver hvarandra stående grupperna tillhopa innehålla tio enheter. Ex. 7 + 6. Ofvanför bilden med 7 enheter är bilden med 3 enheter. Då den bredvidstående bilden (6 enheter) delas så, att den ena delen är 3 enheter, är den andra delen 3 enheter. 3 lägges till 7 och därefter 3 till 10, då allt blir 13; 7 + 6 är alltså tretton.

Med hjälp af planschen 1 uppdelas 9 och 8 lätt för fyllande af tio, och sedan beräknas hela svaret.

Då 9 eller 8 tillägges, så kan först tio tilläggas och derefter 1 eller 2 borttagas. Bäst är dock att först uppdela 9 eller 8 så, att talet tio fylles af den ena delen.

För beräkning af en del äro de båda första talbildsplanscherna också till stor hjälp. Ex. 16 — 8. Då borttages först 6 och sedan 2 eller ock borttages först 8 från 10, hvarefter 6 tillägges.

Då 8 eller 9 frångrages, kan först tio frångragas och därefter 2 eller 1 tilläggas.

---

131. Talet 20 utsäges både såsom tjugu och 2 t. I intetdera fallet är det uppdeladt.

Dess användning medför uppdelning af än ett tio, än 2 tio, beroende af de uppgifna delarnas både antal och storlek.

Ex. 119. a) 20—4; b) 20—4—4—4; c) 20—9—9.

För uträkningens skull behöfver i a) 20 uppdelas i tio och tio, hvarefter den ena delen tio uppdelas i 4 och 6; i b) och c) behöfver det ena tio efter det andra uppdelas.

Uträkning af a). 20 utsäges tjugu. Tjugu är tio och tio. Fyra från tio återstår sex. Den första delen tio tillägges. Tio till sex är sexton.

Om barnen ej äro säkra på beteckning af det talet, måste de tänka på uppdelning af sexton i tio och sex.

Vid behandling af talet 20 utbytes det äfven mot 1 tjog och beaktas det ömsesidiga förhållandet mellan det och dess lika delar: 2, 4, 5 och 10. Ex. motsvarande ex. i sista stycket af § **129**.

132. Flitigt användande af åskådningsmateriel och synnerlig öfning kräfva de första 20 talen. Mångfaldstecknet och likadelstecknet skola ej införas för tidigt.

Hellre uteslutas de i hela afdelningen, än att öfning i sammanläggning och frändragning förminskas. *Samtidigt med enkla praktiska uppgifters lösning vänjas barnen att utsäga svaren utan uträkning och att sedan beteckna det utsagda svaret.*

Ex. 120. Johan köpte bröd för 12 öre och papper för 6 öre. a) Huru många öre betalade han? b) Huru mycket betalade han? c) Han köpte 3 kakor bröd och betalade 5 öre för hvarje kaka. Huru mycket kostade alla kakorna?

Svar: a) tolf plus sex. b) tolf öre och 6 öre. c) 3 ggr 5 öre.

Beteckna det! Då skrifves: a) 12 + 6. b) 12 + 6 öre eller 12 öre + 6 öre. c) 3 × 5 öre.

Färdigheten skall bringas därhän, att barnen ej behöfva tänka på fyllandet af talet 10 vid sammanläggning och frändragning.

---

133. I talområdet 21—30 angifver talens sammansättning vissa delar af talen. Tjuguett innehåller de 2 delarna tjugu och ett. Då ordets delar förbindas med hvarandra till *ett* ord, tänkes och säges talet odeladt.

För beteckningens skull måste det uppdelas. Ex. Tjuguett = tjugu + ett. Tjugu betecknas med en tvåa i tiorummet. Alltså skrifves tjuguett med en tvåa i tiorummet och en etta därefter: 21.

Utsägande af 21 blir: a) efter uppdelning: två tio en enhet eller tjugu och ett, (tjugu plus ett), b) utan uppdelning: tjuguett.

---

134. Behandling af talområdet 1—30 medför förvandling af ibland 2 tio, ibland alla 3 t. Jfr med § **131**! De använda talen blifva stundom mer sammansatta och fordra då större ansträngning. Vid behof fylles först talet tio. Jfr med § **130**!

Ex. 121. 15 + 8.

Uträkning. 1) 5 + 8 = tio + tre. Sedan tillägges den gifna delen tio, då allt blir tjugutre.

Uppskrifvandet af första delen 3 omedelbart efter dess beräkning förminskar ansträngningen.

2) Eller ock fylles såsom vid hufvudräkning talet tjugo med fem ur den tredje delen 8. 8 uppdelas i 5 och 3 såsom nyss. Femton och fem = tjugu; tjugu och tre = tjugutre. Därefter skrifves talet.

Ex. 122. 25 — 8.

Här borttages först delen 5, som märkes i talet 25. Sedan uppdelas 20 i tio och tio. Därefter borttages 3. Den andra delen är då tio + sju eller sjutton.

---

135. I den följande afdelningen, talområdet 1—99, utbytes först mindre enheter mot större enheter och tvärt om större enheter mot mindre enheter, samt uppdelas talen så i 2 delar, att 1) den större delen innehåller lika stora enheter som den mindre innehåller, 2) den större delen innehåller större enheter än den mindre innehåller. Barnen böra då tänka på det sagda talet så, som de hört det.

Ex. 123. Utsäg a) fyrtio annorlunda, b) 5 tio annorlunda! c) Uppdela trettiosju! d) Utsäg det tal, som innehåller sju tio! e) Utsäg det tal, som innehåller sex tio och tre!

Likaså utsägas betecknade tal dels utan uppdelning, dels efter uppdelning.

Ex. 124. a) 60 utsäges utan uppdelning: 1) 6 t., 2) sextio. b) 53 utsäges utan uppdelning: femtiotre, efter uppdelning: 1) fem tio tre, 2) femtio och tre.

I ditnörande sakuppgifter fasthålles den konkreta sorten.

Ex. 125. Utsäg a) fyrtio öre i tioören, b) femtiosex öre i tioören och ettören, c) 7 tioören i öre, d) 8 t.-ören 3 ettören i öre!

Utredning för a). Emedan fyrtio innehåller 4 delar med tio i hvarje del, så innehåller fyrtio öre 4 delar med tio öre i hvarje del. Tio öre utbytes mot 1 tioöre, alltså fyrtio öre mot 4 tioören.

b) Först uppdelning i femtio öre och sex öre; sedan såsom i a).

c) Ett tioöre = tio öre. 7 tioören innehålla 7 sådana delar, alltså = sjuttio öre.

Behöfliga ledfrågor inledas ofta med orden: »Huru många.» Alla dylika böra i dessa fall omedelbart efterföljas af en annan fråga, som leder till utsägande af sorten jämte talet. När barnen skola tänka för sig själfva utan ledning, skola de ofta fasthålla sorten, och det möjliggöres blott därigenom. Ex. Huru många öre innehåller 1 tioöre? (10). Hvaremot kan 1 tioöre alltså utbytas? Eller: Hvad kunna vi säga i st. f. 1 tioöre? Eller: Säg svaret i full sats! (Eller: Växla 1 tioöre i öre! Huru mycket blir det då?)

136. I denna afdelning förekomma svårare exempel.

Ex. 126. 34 + 24.

Uträkningar: 1) Trettio och tjugu är femtio; fyra och fyra är åtta; femtio till åtta är femtioåtta.

2) Tjugu till trettiofyra är femtiofyra; fyra till femtiofyra är femtioåtta.

I båda fallen uppdelas 34 och 24.

3) 3 t. + 2 t. = 5 t.; 4 + 4 = 8; allt blir 5 t. 8 = 58 = = femtioåtta.

4) 4 + 4 = 8; 3 t. + 2 t. = 5 t.; allt blir 5 t. 8 = 58.

Sättet 2) är härledt af 1) och enklare efter mycken öfning. Sätten 3 och 4 äro lika enkla; i dem fästes afseende vid siffrornas plats. Men sättet 4) bildar utgångspunkt för enklaste sättet i det fall, att summan af de mindre delarna uppgår till tio. Fördenskull bör sättet 4) användas.

Ex. 127. 35 + 47.

Uträkningar: 1) Trettio och fyrtio är sjuttio; fem och fem är tio; sjuttio och tio är åttio; åttio plus två är åttio två. Därvid uppdelas 7 i 5 och 2.

2) Fyrtio till trettiofem är sjuttiofem; sjuttiofem och fem är åttio; åttio plus två är åttiotvå. — För den uträkningen fordras uppdelning af sju i fem och två.

3) Trettio och fyrtio är sjuttio; fem till sju är tolf; sjuttio och tolf är åttiotvå. I sista delen af uträkningen tänka barnen så: tolf = tio och två; sjuttio till tio är åttio; åttio plus två är åttiotvå.

4) Sju plus fem är tolf; tolf = tio plus två. Två uppskrifves; 1 t. + 3 t. = 4 t.; 4 t. + 4 t. = 8 t. Det betecknas med en åtta i tiorummet.

5) 3 t. + 4 t. = 7 t.; 5 + 7 = tolf = tio plus två; 7 t. plus 1 t. = 8 t.; 8 t. till 2 är åttitvå.

Endast i det fall, att sortnamnen äro tio och enhet, är det rätt att säga: tiotal läggas till tiotal och ental till ental. Såsom åskådlig grund duger ej att säga: »Man kan blott sammanlägga kronor och kronor eller öre och öre, men icke kronor och öre»; ty kronor (silfverslantar) kunna läggas till öre (kopparslantar). Däremot är det sant, att krontal ej kan läggas till öretal.

I 1) och 2) uppdelas 7 för fyllande af tio; i 3) bildas direkt ett tal, som innehåller de gifna talens mindre delar, hvarefter det uppdelas så, att en del blir tio. I 4) och 5) fästes vikt vid siffrornas plats (egentlig skriftlig räkning). Då är 4) enklast.

Sättet 1) brukar vara lättare än 2). Sättet 4) bildar öfvergång till den skriftliga sammanläggningen i allmänhet.

Ex. 128. 19 cm. + 25 cm. + 37 cm.

Här beaktas: 1) Den konkreta sorten frånses under uträkningen. 2) Ej blott det första tiotalet fylles. 9 + 5 + 7 = 21.

Ex. 129. 98 — 63.

Uträkningar: 1) Sextio från nittio återstår trettio; tre från åtta återstår fem; trettio och fem = trettiofem.

2) Sextio från nittioåtta återstår trettioåtta; tre från trettioåtta återstår trettiofem.

3) 6 t. från 9 t. återstår 3 t.; 3 från 8 återstår 5; 3 t. till 5 är trettiofem.

4) 3 från 8 återstår 5; 6 t. från 9 t. återstår 3 t.; 3 t. till 5 är 35.

Utsagan, »ental drages från ental och tiotal från tiotal», är riktig blott i det fall, att sortnamnen äro enhet och tio.

Sätten motsvara sätten för uträkning af talet 34 + 24.

Ex. 130. 72 — 25.

Uträkningar: a) **1.** Uppdelning af sjuttiotvå i sjuttio och två samt af tjugufem i tjugu och fem. **2.** Borttagande af tjugu från sjuttio. Tjugu från sjuttio återstår femtio. **3.** Undersökning om fem kan tagas från två. **4.** Uppdelning af fem i två och tre. **5.** Borttagande af två. **6.** Uppdelning af femtio i fyrtio och tio. **7.** Borttagande af tre från tio. Tre från tio återstår sju. **8.** Eftertänkande af svarets delar. **9.** Beräkning af hela återstoden, hvilket sker genom sammanläggning af dess båda delar. Fyrtio och sju är fyrtiosju.

b) **1.** Uppdelning såsom i a) **1.** **2.** Undersökning om fem kan tagas från två. **3.** Uppdelning af fem i två och tre. **4.** Borttagande af två. **5.** Uppdelning af sjuttio i sextio och tio. **6.** Borttagande af tre från tio. **7.** Borttagande af tjugo från sextio. **8.** Eftertänkande af svarets delar. **9.** Beräkning af hela återstoden, hvilket sker genom sammanläggning af fyrtio och sju.

c) **1.** Uppdelning af 72 i 7 t. och 2 och af 25 i 2 t. och 5. **2.** Undersökning om 5 kan tagas från 2. **3.** Uppdelning af 5 i 2 och 3. **4.** Borttagande af 2. **5.** Uppdelning af 7 t. i 6 t. och 1 t. **6.** Utbyte af 1 t. mot tio. **7.** Borttagande af 3 från tio. (Återstod 7.) **8.** Borttagande af 2 t. från 6 t. (Återstod 4 t.) **9.** Eftertänkande af svarets delar. **10.** Utsägande af svaret på 2 sätt: 1) då sorten tio höres: fyra tio sju, och 2) blott grundenheternas antal: fyrtiosju.

d) **1—2** = c) **1—2.** **3.** Uppdelning af 7 t. i 6 t. och 1 t. **4.** Utbyte af 1 t. mot tio. **5.** Borttagande af 5 från 10. **6.** Sammanläggning af 5 och 2. **7.** Borttagande af 2 t. från 6 t. **8** och **9** = c) **9** och **10.**

e) **1—4** = d) **1—4.** **5.** Läggande af den genom bytet vunna delen tio till den förut befintliga delen 2. **6.** Borttagande af 5 från tolf. **7—9** = d) **7—9.**

Sätten a) och b) åskådliggöras genom kulram samt äro hufvudräkningssätt. Af dem är a) naturligast. Sätten c) och d) åskådliggöras omedelbart och sättet e) medelbart genom den delade kuben och talbildsplanschen n:r 1. Alla de 3 sista sätten gälla 1) den skriftliga räkningen och 2) hufvudräkningen, då den afser sakexempel, innehållande minst 2 konkreta sorter. Om barnen kunna uppdela talen inom talområdet 11—18 i 2 delar, så är e) lika lätt som c) och d).

I alla fallen skrifves på följande sätt:

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot 10}{72} \\ -\,25 \\ \hline 47 \end{array}$$

Eftertänkande af svarets delar medför större tankeansträngning vid ren hufvudräkning, då intet skrifves, än vid skriftlig räkning, hvarvid delen 7 skrifves, innan den största delen (40) eftertänkes.

137. Mångfaldsuppgifterna böra länge blott lösas genom upprepad sammanläggning. Beräkning af de lika delarnas antal bör likaledes en längre tid ske blott genom upprepad frånddragning. När s. k. multiplikations- och divisionsuppgifter lösas på det vanliga sättet, bör det nya betonas såsom förenkling af något förut kändt. Saksammanhanget blir enkelt för barnen genom att påvisa, att närmast före ordet gånger säges (eller närmast före tecknet × eller · skrifves) delarnas antal och närmast därefter hvarje dels storlek.

När delarnas antal beräknas, märkes, att det är en, två .... nio, tio, elfva .... tjugu .... trettio o. s. v. I detta fall bör **aldrig** tio ändras till 1 tio eller tjugu ändras till 2 tio eller trettio ändras till 3 tio. O. s. v.

När hvarje dels storlek beräknas **skriftligt,** bör däremot tio **ändras** till ett tio, tjugu ändras till 2 tio, o. s. v.

Nödvändigast är, att barnen räkna sådana uppgifter, som leda till mångfalds- och likadelningstabellernas inpräglande, så långt omständigheterna medgifva.

138. Mångfaldstabellers bildande.

Ex. 131. a) Hvarje del är talet 2. b) **Det hela innehåller** blott 2 lika, allt större delar.

a) $2 + 2 = 2 \times 2 = 4.$	Första radens fullständiga
$2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6.$	utsägande är: Ett tal, som
$2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2 = 8.$	innehåller 2 delar med 2 i
$5 \times 2 = 10.$	hvarje del är 2 gånger 2
$6 \times 2 = 12.$	(2-fald af 2) eller 4. Det
O. s. v.	kan sammandragas till: 2

delar af 2 är 2-fald af 2 eller **4.**

Sådana långa utsagor som den första bör läraren flitigt **säga, så** att barnen **få sammanhanget** klart. Barnen böra **åtminstone** säga den sammandragna. Tillräckligt är, att barnen skrifva de första raderna så fullständigt, som här skett i de tre första raderna. För hvarje annan rad skola de dock tänka lika fullständigt som förut.

Uttrycket »1 gång 2» tillhör den mekaniska räkningen och behöfves ej i den **lagstadgade** småskolekursen.

b) $1 + 1 = 2 \cdot 1 = 2.$	Utsägande så som i a). Eme-
$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4.$	dan delarna blott äro 2 i alla
$3 + 3 = 2 \cdot 3 = 6.$	fallen, böra barnen i början
$4 + 4 = 2 \cdot 4 = 8.$	skrifva hela tabellens alla rader
O. s. v.	lika fullständiga.

Den del af **tabellerna,** som **står** före **första likhets**tecknet, uteslutes snart, men läraren efterhöre ofta betydelsen af talen bredvid mångfaldstecknet. Osäkerhet **hos barnen må hafva till följd tabellernas uppskrifvande** i fullständigaste form. Inskärpande af talens betydelse här skall vara undangjordt före barnens inträde i folkskolan, hvarest tiden oftast skall delas mellan flera klassers barn.

139. Likadelningstabellers bildande.

Ex. 132.	a) 4 : 2 = 2.	b) 2 : 2 = 1.	c) 4 : 2 = 2.	d) 2 : 1 = 2.
	6 : 3 = 2.	4 : 2 = 2.	6 : 2 = 3.	4 : 2 = 2.
	8 : 4 = 2.	6 : 2 = 3.	8 : 2 = 4.	6 : 3 = 2.
	O. s. v.	O. s. v.	O. s. v.	O. s. v.

a) Första raden utsäges: Då 4 är deladt i 2 lika delar, är hvarje del 2; eller kortare: En 2-del af 4 är 2.

b) Första raden utsäges: Då 2 är deladt i 2 lika delar, är hvarje del 1; eller kortare: En 2-del af 2 är 1.

c) Första raden utsäges: Då 4 är deladt så, att hvarje del är 2, är delarnas antal 2; eller kortare: »2 kan tagas från 4 2 gånger»; eller »2 innehålles i 4 2 ggr».

Uttrycket *»2 i 2 går 1 gång»* (1 i 1 går 1 gång, 3 i 3 går 1 gång, o. s. v.) bör ej införas på småskolestadiet. Det tillhör den s. k. mekaniska räkningen och behöfver förekomma blott då, när talen blifva större än de, som lämpa sig för småskolan.

d) Första raden utsäges: Då 2 är deladt så, att hvarje del är 1, så är delarnas antal 2; eller kortare: »1 kan tagas från 2 2 ggr» eller »1 går i 2 2 ggr».

I a) och b) beräknas hvarje dels storlek, i c) och d) delarnas antal.

Mångfaldstabellen a) ligger till grund för likadelningstabellerna a) och c), mångfaldstabellen b) är grund till b) och d). I sammanhang med en färdigbildad mångfaldstabell — denna må hafva bildats af barnen eller ej — kunna alltså 2 likadelningstabeller självständigt uppgöras af barnen. Hvarje rads innehåll eftertänkes noga och öfverläses några gånger. Pröfning af räkningens (eller svarets) riktighet verkställes på det rätta sättet. I a) utföres räkning och pröfning kortast så: En 2-del af 4 är 2, ty 2 ggr 2 är 4. En tredel af 6 är 2, ty 3 ggr 2 är 6. O. s. v. — Pröfningen af det andra svarets riktighet får icke här utsägas (tänkas) så: 2 ggr 3 är 6.

140. **Uppgifter rörande tiden.**

Sådana föreläggas tidigt och lämpas efter barnens ökade kunskap i talområdet. Åskådningsmateriel a) klockan, b) almanackan.

A. Läraren visar (efterfrågar) den väg minutvisarens spets går under 1 minut och frågar sedan: Huru många minuter förflyta, under det att hans spets rörer sig från minutstrecket vid a) 12 till minutstrecket vid 1, 2, 3, o. s. v., b) 1 till minutstrecket vid 2, 3? O. s. v.

Ex. 133. Huru lång tid förflyter, medan hans spets rörer sig från a) 12 till 3, b) 12 till 6, c) 12 till 9, d) 12 till 12?

Ex. 134. Huru lång tid förflyter, medan timvisarens spets rörer sig från a) 12 till 1, b) 1 till 2, c) 12 till 7, d) 7 till 12, e) 7 till 7, f) 8 till 12, g) 8 till 8?

Ex. 135. Klockan slog a) 12 slag, b) 9 slag. Minutvisarens spets har hunnit till 4. Huru mycket är klockan? (Svar: a) 12 tim. 20 min., b) 9 tim. 20 min.).

Ex. 136. Huru lång tid förflyter från a) klockan 4 tim. f. m. till kl. 12 tim. middagen, b) klockan 12 tim. middagen till kl. 4 tim. e. m., c) kl. 4 tim. på morgonen till kl. 4 tim. e. m., d) kl. 8 tim. f. m. till kl. 4 tim. 38 min. e. m., e) kl. 6. tim. 12 min. f. m. till kl. 6 tim. 30 min. e. m.? O. s. v.

Ex. 137. Smeden Olsson började arbeta kl. 5 tim. f. m. Tre tim. (14 tim.) därefter mottog han 2 söndriga vagnshjul. När skedde det? [Svar: kl. 8 tim. f. m. (kl. 7 tim. e. m.)].

Ex. 138. Huru lång är en undervisningstimme för eder?

Ex. 139. I början läsningen kl. 9 f. m. och sluten den kl. 3 e. m. a) Huru lång är tiden från dess början till dess slut? b) Huru många uppehåll (= raster) hafven I? c) Huru långt är hvarje uppehåll? d) Huru lång tid upptaga samtliga uppehållen? e) Huru lång tid användes här till skolarbete?

B. Ex. 140. Hvad kallas a) årets första månad, b) årets andra månad, c) årets 3 första månader?

Ex. 141. Huru många dagar innehåller a) januari, b) februari i vanliga år (skottår), c) årets 2 första månader tillhopa? O. s. v.

Ordet dag användes i olika betydelser. 1) Den ljusa delen af ett dygn såsom motsats mot natt. 2) = dygn och då a) såsom del af en vecka: måndag, tisdag, o. s. v., b) såsom del af en månad: den 1:sta januari, den 15:e mars. I 2 a) borde man säga veckodag, i 2 b) månadsdag

(= »datum», som egentligen betyder »gifvet»). Hvarje veckodag angifves genom sitt särskilda namn, hvarje månadsdag genom sitt särskilda ordningsnummer.

Ex. 142. Huru många dagar (dygn) innehåller a) 1 vecka, b) 2 v.? o. s. v.

Ex. 143. Huru många veckor innehålla 14 dagar?

Ex. 144. Huru många dygn innehåller tiden a) från onsdagen den ena veckan till onsdagen den följande veckan, b) mellan de samma dygnen, c) från och med onsdagen i den ena veckan till och med onsdagen i följande vecka? (Svar: a) 7, b) 6, c) 8).

Ex. 145. Huru lång är tiden a) från det 2:dra till det 18:e dygnet i en månad, b) mellan det andra och det adertonde dygnet i samma månad, c) från och med det 2:dra till och med det 18:e dygnet i samma månad? (Svar: a) 16 dygn, b) 15 dygn, c) 17 dygn).

I båda ex. 144, 145 a) börjar tiden hvilken timme som helst (såsom kl. 12 tim. middagen), det först uppgifna dygnet och slutar tiden samma timme (såsom kl. 12 tim. middagen) det sist uppgifna dygnet, b) upptagas blott de mellanvarande dygnen, c) upptagas båda de uppgifna dygnen helt och hållet.

Uttrycket »8 dagar i dag» är felaktigt, emedan man menar den närmast föregående eller närmast efterföljande likbenämnda veckodagen; men för att dagtalet skall blifva 8, måste båda de närmaste likbenämnda dagarna vara inräknade i den gångna tiden. Rätteligen skall det heta: 8:e dagen i dag eller 7 dagar i dag. Rätt säges däremot: 14 dagar i dag.

Ex. 146. Huru lång tid förflyter a) från den 1 januari till den 1 februari, b) mellan den 1 januari och den 1 februari, c) från och med den 1 januari till och med den 1 februari? (Svar: a) 31 dygn, b) 30 dygn, c) 32 dygn).

Ex. 147. Huru länge är solen uppe a) den 31 mars, b) den 30 april, c) den 31 maj? o. s. v.

Ex. 148. a) Tillfrågad om sin ålder svarade ett barn: »6 år på det 7:e». Där förekommo 2 svar på en fråga. 1) 6 år, 2) på det 7:de året. I 1) angafs en gången tid (tidslängd), i 2) en innevarande tid (tidpunkt).

b) 7 år senare sade samma barn blott: 13 år. Tiden uppgafs då blott såsom innehållande 13 delar med 1 år i hvarje del, alldeles som den penningsumma, hvilken innehåller 13 delar med 1 kr. i hvarje del, utsäges 13 kr.

Ex. 149. Arvid började sin skolgång, då han var a) 7 år gammal (på 8:e året) och gick 6 år i skolan. Huru gammal var A., då han slutade sin skolgång? Svar: 13 år. (På det 14:de året).

I a) lägges 6 till talet 7; Svaret innehåller talet 13. I b) lägges 6 till det 8:e talet, som är 8. Svaret innehåller det 14:de talet, som är 14.

Här inträffar det märkliga, att årtalet kan vara både 7 och 8. I förra fallet är årtalet de förflutna årens antal, i senare fallet är årtalet den innevarande tidens årtal. Bäst är emellertid att blott upptaga de förflutna årens antal.

---

141. Uppfattning, beteckning och uppnämning af 3-siffriga tal.

A. Uppfattning af talet hundra.

Talet nittionio är utgångspunkt. Då 1 tillagts, har det nya talet *hundra* bildats. Hundra består alltså af nittionio och ett eller nittio, nio och ett eller nittio och tio. I sammanhang därmed angifves hundra såsom sammansatt af nittio, åtta och två, nittio, sju och tre, nittio, sex och fyra, nittio, fem och fem eller af blott 2 delar nittioåtta och två, o. s. v. eller af tio tal tio, då de båda delarna nittio och tio först utbytts mot nio tio och ett tio. Alltså är hundra = hundra grundenheter eller tio tio.

B. Beteckning af talet hundra.

För beteckningens skull sammanfattas de hundra grundenheterna i en enhet 1 **hundra.** Ett hundra är en enhet, som innehåller hundra tal 1 eller hundra delar med 1 i hvarje del. Den betecknas med en etta i **hundrarummet.** Den enheten är den tredje enheten i ordningen; till följd däraf är hundrarummet det tredje rummet i ordningen från höger eller rummet närmast till vänster om tiorummet. De andra rummen skola synas, d. v. s. fyllas. Talet innehåller därjämte intet t. och ingen grundenhet. Följaktligen fyllas de andra rummen med hvar sin nolla, och betecknas talet hundra så: 100.

C. Utsägande af 100.

Det utsäges 1) 1 hundra, 2) tio tio, då nollan i andra rummet medtages för beteckning af ett annat antal, 3) hundra.

D. **1.** Bildande af tal, då hvarje del är 1 hundra (h.). **2.** Uppdelning af sådana tal så, att hvarje del blir 1 hundra. **3.** Utbyte af tal, som innehålla hundratal, mot sådana som innehålla ental (= Förvandling från sorten hundra till sorten grundenhet). **4.** Sammanfattning och uppdelning af tal, som innehålla hundratal och ental (= Sammanfattning och uppdelning af tal, hvilkas delar äro uttryckta i sorterna hundra och grundenhet). **5.** Utbyte af tal, som innehålla hundratal mot sådana, som innehålla tiotal och tvärt om. (= Förvandling från sorten hundra till sorten tio och tvärt om). **6.** Utsägande af tal, som innehålla hundratal och tiotal. **7.** Utsägande af tal, betecknade med 3 antalbetecknande siffror.

Ex. 150. 1 hundra + 1 hundra = 2 hundra.

Ex. 151. 3 hundra = 1 hundra + 1 hundra + 1 hundra.

Ex. 152. 4 hundra = fyrahundra.

Ex. 153. a) 8 h. + 3 = åttahundratre, b) sexhundranio = 6 hundra + nio, c) tvåhundranitton = 2 h. + 19.

Ex. 154. a) 2 hundra = tjugu tio, b) 70 tio = 7 hundra.

Ex. 155. a) 4 hundra 9 tio = 49 tio = fyrahundranittio, b) femhundrasjutti = 5 hundra 7 tio = 57 tio.

Ex. 156. 654 = 6 hundra 5 tio 4 = 6 hundra femtiofyra = 65 tio 4.

Se för öfrigt sid. 17, 19 och 20!

Lektioner för småskolan.

142. För omväxlings skull och bibringande af färdighet att uttrycka sig böra barnen ibland afgifva svaren i full sats. Då märker läraren i tvifvelaktiga fall också, om barnen tänkt rätt.

Talens bildande i följd.

Talet 1.

143. a. Läraren framskjuter 1 kula och frågar: Hvad framförde jag? (1 kula). Huru många kulor framförde jag? (En). Kom och framskjut 1 kula! Huru många kulor framsköt du? (Anna? Birger?) För henne tillbaka Huru många kulor tog du därifrån? Huru många kulor finnas här nu? (Visar på den plats, hvarest kulan var förut). (Ingen). En kula fanns här förut, sedan togs hon bort. Huru många kulor kvar? (Ingen). Huru mycket är kvar, då en tagits från en?

Eller ock användes ordet antal i somliga frågor. Huru stort är de framförda kulornas antal? (Ett.) Huru stort är de borttagna kulornas antal? (Ett.) Huru stort är de kvarvarande antal? (Intet.) Huru mycket är kvar, då ett tagits från ett? — (I detta fall har talordet den form, i hvilken det vanligen säges, då det tänkes självständigt. Att svaret skall innehålla blott tal, märkes bättre af frågorna i detta stycke än af frågorna i föregående stycke).

b. Tagen 1 griffel! Huru många grifflar tog du? Du? Du? Läggen bort 1 griffel! Huru många grifflar har du kvar? Räcken upp 1 finger! Huru många fingrar har du (A., B.) uppräckt? Böjen ned fingret! Huru många fingrar har du uppräckta? Räcken upp 1 hand, 1 arm! Huru många kakelugnar har rummet? O. s. v. Tänken efter några saker, hvaraf det blott finnes en här i rummet!

c. Emma hade en slant och köpte ett pappersark för den. Huru många slantar hade hon sedan kvar? Hon hade ej något pappersark förut. Huru många hade hon sedan? Hon utbytte således slanten mot pappersarket. Hvad fick handlanden i stället för pappersarket? (En slant). Han utbytte således också. Hvad utbytte han? Ett pappersark). Hvaremot utbytte han det? (En slant).

d. Nu skola vi uppskrifva, huru många slantar Emma hade. (Läraren skrifver ett streck). Hvilket tal betecknar detta? (Visar på strecket).

e. Öfning i streckskrifning.

Talet 2.

144. 1. **Bildande.** Lär. framskjuter 1 kula och frågar: Hvad framförde jag? (1 kula.) Huru många kulor framförde jag? (1.) Huru stort är kulornas antal här? Hon framskjuter en kula till och framställer samma frågor. Sedan sammanföras båda kulorna och frågas: Huru många kulor finnas här? (Hon visar på de 2 kulorna.) Svar: 2. Hvad är detta? Huru mycket är detta? (Visar på de sammanförda kulorna.) Svar: 2 kulor. Huru mycket äro 1 kula och 1 kula tillsammans? Huru mycket är allt, då 1 kula lagts till 1 kula? Huru många kulor innehåller alltsammans, då 1 kula lagts till 1 kula? Huru mycket äro 1 och 1 tillsammans? Hvilket tal består af 1 och 1? Af hvilka tal består talet två? Huru mycket äro 1 blad och 1 blad tillsammans? 1 griffel och 1 griffel tillhopa? 1 öre och 1 öre tillhopa? 1 krona och 1 krona tillhopa? 1 öre lägges till 1 öre. Huru många öre innehåller alltsammans? (= Huru stort är öretalet till allt?) Huru många händer, armar, ben, ögon, fötter, näsor, öron, hufvud har du?

2. **Jämförelse.** Kom och skjut fram a) 1 kula, b) 2 kulor! Hvad sköt du fram? Huru många kulor sköt du fram? Hvad är detta? Detta? (Svar 1 kula, 2 kulor.) Huru många kulor innehåller detta? Detta? (1, 2.) — Huru stort är kulornas antal här? Här? — Hvilket tal följer närmast efter 1? Hvilket tal föregår talet 2? Hvilket tal är 1 mer än 1? Hvilket tal är 1 mindre än 2? Hvilket är det första talet i ordningen? Det andra talet i ordningen? Nämn de 2 första talen i riktig ordning! I omvänd ordning!

För öfrigt förekomma öfningar såsom i **143** b, hvarvid äfven 1 tvåöre och 1 tvåkrona kunna upptagas.

De 2 kulorna framföras ett stycke från den första kulan, om de framföras på samma ten, eller strax under den första kulan, om de framföras på en annan ten.

3. **Beteckning.** Beteckna talet 1! (Ett streck skrifves.) För att beteckna antalet 2 skrifva vi först 1 streck och sedan ett streck bredvid. (|| skrifves nedanför.) Vi kunna skilja dem litet mer (| |) och sedan sammanföra dem (||). För att förena dem, när de stå litet längre från hvarandra, skolen I skrifva ett sådant tecken mellan dem på första stället (+ skrifves.) Alltså skrifves talet 2 så: | + | eller ||. Kom och skrif talet två på båda sätten! Huru mycket betecknas här? Här? Är detta (visar på | + |) lika mycket eller mer än detta (visar på ||)? (Lika mycket.) Vi hafva också ett tecken för att visa det (=). Det skrifva vi häremellan. Hvad hafva vi betecknat här (1 + 1)? Svar: Talet två. Det tecknet (+) kunna vi läsa ut »till»

(»*och*») eller »plus» och då läsa vi detta (| + |) så: ett till ett (ett och ett) (ett plus ett). Hvad är betecknadt här (||)? (Talet två.) Därför utsäges detta (| + | = ||) så: ett till ett är 2 (ett och ett är 2.) Omsägande enskildt och i kör.

Där (| + |) äro de 2 tal, hvaraf två består, mera skilda från hvarandra. Af hvilka tal består två?

Innan de 2 kulorna sammanföras, finnas de å samma ten. Barnen se, att allt är 2 kulor, så snart den andra kulan framförts. På samma grund betecknas talet 2 med | + | lika väl som med ||.

Uttrycket »ett till ett är två» är sammandraget af följande: Då ett lagts till ett, är alltsammans två. Uttrycket »ett plus ett är två» är sammandraget af: Det tal, som är ett mer än ett, är 2. Uttrycket »ett och ett är två» är sammandraget af: Det tal, som består af ett och ett, är två.

4. **Öfning i streckskrifning.**

145. På samma sätt ökas med 1 kula, tills det hela (allt) blifvit tio kulor, för att alla barnen må få inskärpt antalen 1—10, som höra till kulan eller kulgrupperna.

Därvid betonas ordningsföljden, att det följande talet är 1 mer än det närmast föregående, och tvärt om, att det föregående är 1 mindre än det närmast följande samt att hvarje tal innehåller så många tal 1, som talordet angifver. Detta framträder tydligt vid beteckningen.

Vid beteckningen af talet tre skrifves
a) | + | + | = |||. Utläses: ett till ett till ett är tre.
b) || + |

Vid beteckningen af talet fyra skrifves
a) | + | + | + | = ||||.
b) ||| + | = ||||.

Barnen hafva här synnerlig hjälp af talbilderna, på hvilka de skola se vid behof, så att alla behöfliga streck skrifvas. Vid skrifning af a) behöfva de se blott på den nya talbilden och eftertänka rutornas antal däri; vid skrifning af b) behöfva de se på både den närmast föregående och den nya talbilden.

146. Vid användning af talbildsplanschen förfares på samma sätt. Den första bilden är 1 ruta (kvadratcentimeter); den andra är 2 rutor, o. s. v. Då läraren visar på första bilden, säges: Detta är 1 ruta. Sedan frågas: Hvad är detta? Huru många rutor är detta? Huru många rutor visar jag nu på? Huru stort är rutornas antal här? O. s. v.

Barnen skola också lära sig rutornas namn, kvadrat, kvadratcentimeter (utan definition förstås) och ordet rektangel, såsom namn på den bild, i hvilken tio, i en rad efter hvarandra ställda rutor sammanfattas.

Talens bildande på olika sätt och uppdelning i delar.

Talet 3.

147. 1. **Dess bildande af 2 tal.** Två kulor framskjutas först på en gång. Därefter framföres 1 kula på lämpligt afstånd från de förra. I sammanhang härmed växla frågorna. Hvad (Huru mycket) har jag (du) framskjutit här? Här? Huru många kulor finnas här? Här? Huru stort är kulornas antal här? Här? Huru många äro alla tillsammans? (Vid sista frågan tänka barnen så: Ett och två är tre, eller två och ett är tre, eller ock är antalet tre så klart för dem, att de säga det utan att tänka på, af hvilka delar det består.) Huru stort är alla kulornas antal? Huru mycket äro 1 och 2 tillsammans? Huru mycket äro 2 och 1 tillsammans? Hvilket tal följer näst efter 2? Hvilket tal är 1 mer än 2?

2. **Dess fyllande.** 2 kulor framföras på en annan tråd. Huru mycket är detta? Huru mycket skall läggas till, för att allt skall blifva tre kulor? Huru många kulor skola läggas till, för att alltsammans skall blifva tre kulor? (1.) Sedan framföres 1 kula till. Därefter sammanföras de tre kulorna och frågas: Hur mycket är detta? Huru många kulor finnas här? För att allt skulle blifva tre kulor, lade vi 1 kula till de 2 kulorna (de 2 kulor, som funnos förut). Hvad gjorde vi, för att alltsammans skulle blifva 3 kulor?

Läraren bortför de tre kulorna. Huru många kulor finnas här nu? (Ingen.) Huru stort är kulornas antal nu? (Intet.) Skjut fram tre kulor i ett tag! Huru många kulor finnas nu? Huru mycket är således intet och tre

(tre och intet)? (Sv. 3.) Svaret säges ock i full sats: 3 till intet är 3. För bort 3 kulor i ett tag! Huru många voro här nyss? Huru många kulor borttog A.? Huru många blefvo kvar? Huru mycket är således kvar, då 3 tagits från 3? (Intet, och i full sats: 3 från 3 är intet.) Huru många kulor lades till 3 kulor, för att alltsammans skulle blifva 3 kulor? Hvilket tal skall du lägga till 2, för att allt skall blifva 3? — Huru mycket skall läggas till tre, för att allt skall blifva tre? — Huru mycket är 3 till intet (noll)? Noll till 3?

148. 3. **Dess delning i 2 delar.** Dela de 3 kulorna i 2 delar så, att den ena delen innehåller 1 kula! Hvad gjorde du (A., B.)? (Delade de 3 kulorna i 2 delar så, att den ena delen innehåller 1 kula.) — Ledfrågor gifvas, emedan svaret är så långt: I huru många delar delade du de tre kulorna? Huru stor är den ena delen? — (Svaret inskärpes väl.) Huru skedde det? (Genom att borttaga eller afskilja 1 kula.) Huru stor är den borttagna delen? Huru stor är den kvarvarande (återstående) delen? Af hvilka delar bestå således 3 kulor? (1 kula och 2 kulor.) Säg det i annan ordning? (2 kulor och 1 kula.) Af huru många delar bestå (= Huru många delar innehålla) 3 kulor nu? (2.) Vi sammanlägga nu dessa delar. Huru mycket blir alltsammans? Det, som består af delar, kallas **det hela.** Hvad kallas det, som består af delar? Huru stort är det hela, då dess delar äro a) 2 kulor och 1 kula, b) 1 kula och 2 kulor? Af hvilka delar bestå 3 kulor? Säg det i full sats!

(Samma kulor.) Huru många kulor äro här? Huru stort är kulornas antal här? De delas såsom nyss. Huru många kulor innehåller den delen? (1.) Huru många kulor innehåller den andra delen? (2.) Huru stort är kulornas antal i denna del? (2.) Af hvilka delar består således talet 3? (1 och 2 eller 2 och 1.) Talet 3 delas i 2 delar så, att den ena delen är 2. Huru stor är den andra delen? Pröfning: 1 + 2 är 3. Af huru många delar består talet 3 då? Äro de lika eller olika stora? Huru mycket (= Hvilket tal) återstår a) då 1 borttagits från 3, b) då 2 borttagits från 3? — I sammanhang därmed inskärpes: 1 från 3 är 2 (1 från 3 återstår 2). Pröfning: 1 till 2 är 3. — 2 från 3 är 1. Pröfning: 2 till 1 är 3. — 3 från 3 är noll; intet från 3 återstår 3.

4. **Jämförelse.** De 3 kulorna framskjutas. 2 kulor framskjutas på närmaste ten. Hvilketdera är mer: 3 kulor eller 2 kulor? Huru mycket 3 kulor äro mer än 2 kulor, se vi, då vi afskilt 2 kulor från de 3 kulorna. Afskilj 2 kulor från de 3 kulorna! Huru mycket äro 3 kulor mer än 2 kulor? Huru mycket är 3 mer än 2? — Hvilketdera är mindre: 3 kulor eller 2 kulor? Huru mycket 2 kulor äro mindre än 3 kulor, märkes också genom att afskilja 2 kulor från 3 kulor. Gör det! Huru mycket mindre äro alltså 2 kulor än 3 kulor. Huru mycket mindre än 3 är 2? — På samma sätt anställes jämförelse mellan 3 och 1 samt mellan 1 och 3.

---

149. 5. **Dess bildande af 3 tal.** a. En kula framföres; en kula till framföres nära den första och ytterligare en kula nära den andra. Huru mycket finnes där? Där? Där? Huru stort är kulornas antal där? Här? Här? Sedan sammanföras de 3 kulorna och frågas: Huru mycket är detta? Huru mycket äro således 1 kula, 1 kula och 1 kula tillhopa? Huru stor är den första delen? (1 kula.) Den andra delen? Den tredje delen? Huru mycket äro alla tre delarna tillsammans? Huru stort är det hela, då det består af 3 delar med 1 kula i hvarje del? Huru mycket är 1, 1 och 1 tillhopa?

Här beaktas också, att man till 1 kula skall lägga 1 kula och sedan till de 2 kulorna ytterligare 1 kula, för att allt skall blifva 3 kulor; att man till talet 1 skall lägga 1 och sedan ytterligare 1, för att allt skall blifva 3.

b. Skjut fram först 1 kula, sedan 1 kula, så 1 kula! Huru mycket framförde du hvarje gång? Huru många gånger framförde du 1 kula? Hvad är 3 gånger 1 kula? I huru många delar fördelade du detta, då du sköt fram det? (3.) Delarnas antal är således lika stort som gångernas antal. Då vi säga 3 gånger 1 kula, mena vi således också, att det hela innehåller 3 delar med 1 kula i hvarje del. Huru många delar innehåller alltså 3 kulor, då du säger: 3 gånger 1 kula är 3 kulor? (3.) Framför hvilket ord säger du ordet tre? (Gånger.) Du säger alltså delarnas antal näst före ordet gånger. (3 gånger.) Huru stor är hvarje del? (1 kula.) 3 gånger 1 kula är 3 kulor. Efter hvilket ord hör du orden en kula? (Gånger.) Du säger alltså ordet gånger mellan delarnas antal och hvarje dels storlek. Hvad säger du närmast före ordet gånger? Efter ordet gånger? — Huru många kulor framfördes hvarje gång? Huru mycket är 3 gånger 1? Huru många delar innehåller talet 3 då? Huru stor är den första delen? Den andra delen? Den tredje delen? Hvarje del? Huru stora äro delarna sins emellan? Huru kan du alltså säga det hela, då det består af 3 delar med 1 i hvarje del? (3 gånger 1.) Räkna ut det! (3.) Säg det på båda sätten! (3 gånger 1 och 3.) Hvilket är större 3 gånger 1 eller 3? Säg, att det ena talet är lika med det andra!

150. 6. **Uppdelning i 3 lika delar.** a. Sedan uppdelas de 3 kulorna i lika delar. Kom fram E.! Dela dessa 3 kulor så, att hvarje del är 1 kula! Hvad gjorde du (A., B.)? Huru många äro delarna? Äro delarna lika eller olika stora? Hvaraf bestå alltså 3 kulor här? (3 delar med 1 kula i hvarje del.) Huru många kulor innehåller a) hvarje del, b) allt? Nu skola vi säga det så, att vi märka, huru många delarna äro och huru stor hvarje del är (både delarnas antal och hvarje dels storlek.) Då säga vi: 1 och 1 och 1 (eller 1 plus 1 plus 1.) Vi kunna alltså säga kulornas antal på två sätt: tre eller 1 och 1 och 1. Hvad kan sägas i st. f. 3? Hvaremot kan 3 utbytas? Säg svaret i full sats!

b. För fram 3 kulor! Tag bort 1 kula, 1 kula till! Huru mycket är kvar? Tag bort denna kula också (den tredje)! Huru mycket är kvar? Hvad återstår, då vi från 3 kulor borttagit a) först 1 kula och sedan 1 kula till, b) först 1 kula, så 1 kula och sedan 1 kula? Huru många kulor återstå, då vi från 3 kulor borttagit a) först 1 kula och sedan 1 kula? (1.) b) först 1 kula, så 1 kula och slutligen 1 kula? Hvilket tal återstår, då vi från 3 tagit a) först 1, så 1, b) först 1, så 1 och slutligen 1? Huru många gånger kan 1 tagas från 3?

c. Nu vet du, att 3 innehåller 3 delar med 1 i hvarje del. Huru många sådana delar innehåller 3? Vi kunna således säga, att **1 är en af de 3 lika delar, som 3 innehåller.** Detta säga vi kortare så: **1 är en tredel af 3.**

Då talbildsplanschen användes, synes, att bilden, som afser talet 3, består af antingen de 2 delarna, 2 kvadrater och 1 kvadrat, eller af tre delar med 1 kvadrat i hvarje del. Däraf märkes ock, att talet 3 består af de 2 delarna och 1 eller de 3 delarna 1, 1 och 1. Lätt märkes där äfven, att 3 är 1 mer än 2, 2 mer än 1 och tvärt om, att 2 är 1 < 3 och 1 är 2 < 3, samt att 1 är 1 tredel af 3.

Vid de muntliga öfningarna kunna dessutom användas grifflar, blyertspennor och stickor, hvilka hållas så, att barnen se de visade föremålen skilda från hvarandra, åtminstone upptill.

---

151. 7. **Praktiska uppgifter.** Ex. 156. Anna köpte 2 grifflar åt sig och 1 griffel åt Robert. Huru många grifflar köpte hon?

Ex. 157. Vid ett bord sitter 1 mamma jämte sina 2 barn. Huru många personer sitta vid bordet? (3.)

Ex. 158. Edvin hade 1 tvåöre och 1 ettöre (1 öre och 1 tvåöre). Huru många öre var alltsammans? (3, 3.)

Ex. 159. Gustaf lade 1 tvåöre i en fattigbössa på samma gång, som Vilhelm lade dit 1 öre. Huru många öre lades då dit? (3.)

Ex. 160. Ernst skulle läsa 3 sidor. Huru många sidor fattades, då han läst 1 (2) sida? (2, 1.)

Ex. 161. I en ask lågo 2 pennor (1 penna). Huru många skulle ditläggas, för att asken skulle innehålla 3 pennor? Huru många pennor skulle ditläggas, om ingen penna funnes där förut? Huru många pennor skulle ditläggas, om där funnes en knapp förut? (1, 2; 3; 3.)

Ex. 162. Nils hade 3 russin. Dem delade han i 2 delar så, att den ena delen innehöll 2 russin. Huru mycket innehöll den andra delen? (1 russin.) Den förra delen behöll han. Den andra delen gaf han bort. Huru många russin a) behöll han, b) bortgaf han? (2, 1.)

Ex. 163. I ett träd sutto 3 fåglar. 1 (2) af dem flög bort. Huru många voro kvar? (2, 1.)

Ex. 164. Karl hade fått 3 öre till bröd. Då han skulle köpa det, hade han blott 2 öre (1 öre). Det öfriga hade han tappat. Huru mycket hade han tappat? (1 öre, 2 öre.)

Ex. 165. På en bänk sutto 1 gosse och några flickor. Flickornas antal var 2 mer än gossarnes. Huru många voro flickorna? (3.)

Ex. 166. I en rad sutto 3 gossar och 1 flicka. a) Huru mycket mindre än gossarnes antal var flickornas? (= Huru många färre än gossarne voro flickorna?) b)

Huru mycket större än flickornas antal var gossarnes? (= Huru många flera voro flickorna?) (a) 2, 2; b) 2, 2.)

Ex. 167. a) Eva köpte 1 griffel åt sig, 1 griffel åt Lisa och 1 griffel åt Stina. Huru många grifflar köpte hon? I huru många delar delade hon dem sedan? (3.) b) Hon betalade 1 öre för hvarje griffel. Huru många öre betalade hon? (3.) Huru mycket betalade hon? (3 öre). c) Lisa och Stina betalade hvar sitt öre. Huru många öre betalade hon själf? (1.) Huru många delar af de tre örena fick Eva af Lisa och Stina? (2.) Huru många delar däraf betalade hon själf? (1.) Huru stora voro delarna sins emellan? (Lika stora.) Huru många lika delar innehåller alltså 3 öre? (3.) Huru stor är hvarje del? (1 öre.)

Ex. 168. Karin köpte 3 m. tyg till förkläden. Till hvarje förkläde åtgick 1 m. Till huru många förkläden räckte tyget? (3.)

Ex. 169. Elsa väfde 1 m. väf hvarje dag. Huru lång väf hann hon på 3 dagar?

Ex. 170. Georg fick 3 äpplen. Dem delade han lika mellan Elin, Knut och sig. Huru många äpplen fick Knut?

---

152. 8. **Beteckning.** a) Huru betecknas talet 2? Nu skola vi beteckna talet 3. Först beteckna vi det så, att vi märka, att den ena delen är 2. Huru stor är den andra delen? 2 + 1 skrifves. Huru mycket är detta? (Tre.) Huru utsäges tecknet mellan siffrorna (delarna)? Hvartill tjänar det tecknet? (Det förbinder delarna med hvarandra.) Huru utsäges den delen af talet? (Visar på tvåan.) (Två.) Hvad kallas siffran? (Tvåa.) Hur utsäges den delen af talet? (Visar på ettan.) (Ett.) Hvad kallas den siffran? (Etta.) Talet tre har också ett eget tecken, som kallas trea och skrifves så: 3. När I skrifven det, skolen I räkna till tre: ett (⁻), två (ᒣ), tre (ʒ). Huru mycket är detta (2 + 1)? (Tre.) Huru mycket är detta (3.)? (Tre.) Skrif nu, att det ena är lika mycket som det andra! (2 + 1 = 3.)

När vi skrifva 1 + 2, så sen I, att delarna äro desamma som nyss, blott ordningen är en annan. Alltså skrifva vi äfven: 1 + 2 = 3.

b) + 1 = 3 skrifves. Hvilken del i ordningen fattas? (Den första.) Huru stor är han? (Två.) Sätt in den delen på sin plats och understryk den! — Sedan skrifves 1)

2 + = 3; 2) 1 + = 3; 3) + 2 = 3, och gifvas samma frågor som vid + 1 = 3.

c) 3 skrifves. Nu skola vi uppdela talet 3 i 2 delar så, att den ena delen är 1. När vi uppdela 3 kulor i två delar så, att den ena delen är 1 kula, så skjuta vi den kulan åt sidan. På samma sätt göra vi nu. Vi skjuta delen 1 åt sidan. Efter trean skrifva vi — 1, som betyder, att 1 är afskildt, borttaget. Hvad betyder — 1? 3 — 1 är således det tal, som uppkommit därigenom, att vi afskilt delen 1 från 3. 3 — 1 är kvar eller den andra delen, Huru stor är den? (Två.) Nu skola vi skrifva, att 3 — 1 är 2. Gör det!

Om vi nu i stället afskilde delen 2 från 3, huru skulle vi beteckna, att det vore gjordt? (3 — 2.) Huru stor är den kvarvarande delen? (1.) Skrif detta (3 —2 = 1.)

153. d) 1 + 1. Huru stor är hvarje del? Huru många äro delarna? Skrif dit en del 1 till! Huru många delar innehåller det talet (1 + 1 + 1)? (3.) Huru stor är hvarje del? (1.) Det talet innehåller 3 delar med 1 i hvarje del. Huru säga vi det talet kort? (Tre.) Nu skola vi skrifva, att det där är 3. Gör det! (1 + 1 + 1 = 3.)

e) + 1 + 1 = 3. Hvad fattas här? (Den första delen.) Huru stor är den? Sätt dit och understryk den!

1 + 1 + =3. Hvad fattas här? (Den tredje delen.) O. s. v.

f) 3 skrifves. Nu skola vi dela talet så, att en del är 1. Huru skola vi visa, att det är gjordt? (Draga ett streck efter trean och skrifva en etta därefter.) Gör det! (3 — 1.) Nu skola vi ytterligare afskilja en del 1. Visa, att det är gjordt! (3 — 1 — 1.) Huru många delar af talet 3 äro nu borttagna? Huru många flera delar innehåller talet 3? Tag bort den också! (3 — 1 — 1 — 1.) Huru många delar äro nu borttagna? (3.) Huru stor är hvarje del? (1.) Huru mycket är således nu borttaget? (1 och 1 och 1 eller 3 delar med 1 i hvarje del.) Huru mycket återstår? (Intet.) Skrif således, att 3 — 1 — 1 — 1 är intet! (3 — 1 — 1 — 1 = 0.)

154. g) 1 + 1 + 1. Huru många äro delarna? (3.) Äro de lika eller olika stora? (Lika stora.) Huru kunna vi följaktligen utsäga det enklare? (3 gånger 1.) Tecknet för ordet gånger är ×. Beteckna 3 gånger 1! (3×1.) Huru stort är det talet? (3.) Skrif det! (3×1 = 3.) 3×1 är således det hela, då det består af 3 delar med 1 i hvarje del.

Skrif äfven 1 gång 3! (1 × 3.) Skrif, huru mycket 1 gång 3 är! (1 × 3 = 3.)

h) 3 skrifves. Nu skola vi genom ett annat tecken visa, att vi delat 3 så, att hvarje del är 1. Det ser ut så : . Före det skrifves det hela, efter det samma skrifves hvarje dels storlek. Skrif, att 3 är deladt så, att hvarje del är 1! (3 : 1.) **Detta angifver delarnas antal,** då 3 delats så, **att** hvarje del är 1. Huru stort är delarnas antal då? (3.) Därför kunna vi skrifva så: 3 : 1 = 3. Detta utsäges så: **Då 3 är deladt så, att hvarje del är 1, så är delarnas antal 3.**

i) Genom samma tecken visa vi äfven, att vi på en gång delat 3 i 3 lika delar. Beteckna, att 3 är deladt i 3 lika delar! (3 : 3). **Detta angifver hvarje dels storlek.** Huru stor är hvarje del? (1.) Därför kunna vi skrifva 3 : 3 = 1. Detta utsäges: **En tredel af 3 är 1.**

Tecknet : kallas *likadelstecken*.

---

155. Allt detta rörande talet 3 medhinnes ej under en lektion. Under första lektionen öfver det talet medhinnas efter omständigheterna kanske ej mer än dess bildning genom tillägg af 1 till talet 2, några dithörande praktiska uppgifter och därmed sammanhängande beteckning, således 1, 7, ex. 156—159 och 8 a, hvarefter barnen såsom tyst öfning skrifva: 2 + 1 = 3 och 1 + 2 = 3. Följande lektion inskärpes detta och genomgås följande underafdelning: Fyllande af talet 3, då den ena delen däraf är gifven (2), motsvarande praktiska uppgifter (7, ex. 160 och 161) samt fyllande af ett tomrum på sidan om + enligt 8 b. Med det sista öfva sig barnen under sin tysta öfning. O. s. v.

Afdelningarna 5 b), 6 c) och 8 g)—i) böra förbigås första gången, då talområdet 1—9 behandlas, på det att barnen må vinna säkerhet i det öfriga, som är grunden för allt det följande.

Genom här framställda enskildheter få barnen från början klart för sig, att talen (storheterna) på ömse sidor om + äro delar af ett och samma hela, att talet (storheten) efter — är en del af det främst stående hela, att återstoden också är en del däraf, att det, som föregår — är det hela. Och den kunskapen är dem nyttig i folkskolan. Därigenom blir det lika lätt för dem att beräkna den s. k. subtrahenden och minuenden som resten.

Talet 6.

(Blott talbildsplanschen användes.)

156. A. **Dess bildande och uppdelande.** Medan läraren sysslar med den eller de andra afdelningarna i rummet för deras tysta öfningars skull, få de barn, som skola lära sig bildning och uppdelning af talet 6, upprita 5 kvadrater på sina rutade taflor. Det, som ej medhinnes före den höga öfningens början, uppritas sedan, då läraren närmare ser på de andra barnens tysta arbete, och då fullbordas den nya figuren ().

a) Läraren (visande på 5-kvadratsbilden): Hvad är detta? (5 kvadrater.) Huru många äro kvadraterna här? (5.) Huru stort är kvadraternas antal? (5.) Om vi nu skulle upprita en kvadrat här (bredvid den ensamma), så skulle hela bilden se ut så (visar på bredvidstående 6-kvadratsbild.) Hvad föreställer den bilden? Huru stort är kvadraternas antal där? (6.) Huru mycket är alltsammans, då 1 lagts till 5? Huru mycket skall läggas till 5, för att allt skall blifva 6? (1.) (Pröfning: 1 till 5 är 6.) Huru mycket skall läggas till 1, för att allt skall blifva 6? (5.) (Pröfning: 5 till 1 är 6.)

b) Läraren sätter en styf papperslapp mellan den 6:e kvadraten och de 5 andra och säger: Nu har jag delat denna bild. I huru många delar? (2.) Huru stor är den ena delen? (5 kv.) Den andra? (1 kv.) Huru stort är kvadraternas antal i den delen? (5.) Den delen? (1.) Af hvilka delar består talet 6? (5 och 1 eller 1 och 5.) Nu skola vi borttaga 1 kv. Läraren lägger pappersbiten på 1 kv. Huru många kv. äro kvar? (= Huru stort är de återstående kvadraternas antal?) (5.) Huru mycket återstår, då 1 tagits från 6? (5.) (Pröfning: 1 till 5 är 6.) Huru mycket är kvar, då 5 borttagits? Hvad återstår, då först 1 borttagits och sedan 5 borttagits? Hvad återstår, när först 5, sedan 1 borttagits?

c) Nu skola vi dela bilden annorlunda. Kom och afskilj de 2 nedersta kvadraterna! I huru många delar är det hela deladt nu? (2.) Huru stor är den nedre delen? (2 kv.) Den öfre delen? (4 kv.) Hvilka äro delarna nu? (2 kv. och 4 kv. eller 4 kv. och 2 kv.) Båda svaren skola sagas. Huru mycket skall läggas till den delen (4 kv.), för att allt skall blifva 6 kv.? (Barnen se på den afskilda nedre delen och säga: 2 kv.) (Läraren borttager det, som skilde de 2 nedre kv. från de öfre 4 kv., och då synes, att allt blir 6 kv.) Huru mycket skall läggas till 4 kv., för att allt skall blifva 6 kv.? — Huru stort är kvadraternas antal i den delen? (2.) I den delen? (4.) Af hvilka delar består alltså talet 6? (2 och 4.) Det höra vi, när vi säga: 2 till 4 är 6. Huru skola vi säga, för att vi skola höra, att 6 består af delarna 2 och 4? (2 till 4 är 6 eller 2 och 4 är 6.) Hvilken är den första delen? Den andra delen? Huru mycket äro 2 och 4 tillsammans? Huru mycket skall läggas till 4, för att allt skall blifva 6? (2.) Huru mycket skall läggas till 2, för att allt skall blifva 6? (4.) Huru mycket återstår, då man tagit 2 från 6? 4 från 6? (Fullständiga svar: 2 från 6 är 4; 4 från 6 är 2.) Huru mycket återstår, då först 2 och sedan 4 borttagits?

Bilden med 4 kvadrater står rätt öfver 6-kvadratsbilden. De jämföras därför lätt med hvarandra. Huru mycket mer innehåller den (nedre) bilden än den (öfre)? Huru mycket mindre innehåller den (öfre) bilden än den (nedre)? (Svar 2 kv.) Huru mycket är a) $6 > 4$, b) $4 < 6$? Hvilket tal är 2 mer än 4? Hvilket tal är 4 mer än 2? Hvilket tal är a) $2 < 6$, b) $4 < 6$?

Af hvilka tal består alltså 6? (1 och 5 eller 2 och 4.)

d) Kom fram och afskilj de 3 kvadraterna till höger! Hur stor är den andra delen? (3 kv.) Huru många äro delarna? Då 6 kv. delats så, att den ena delen är 3 kv., huru stor är den andra delen? Huru stor är den första delen? Den andra delen? Båda delarna tillhopa? Tag bort den ena delen! (Den delen täckes med pappersbiten.) Huru mycket är kvar? (Då 3 kv. tagits från 6 kv., äro 3 kv. kvar.) När vi dela de 6 kv. så, att den ena delen är 3 kv., huru många kv. innehåller den andra? (3.) Huru stort år kvadraternas antal i den delen? (3.) I den delen? (3.) I allt? (6.) Af hvilka delar består således talet 6? (3 och 3 samt i full sats: 6 består af delarna 3 och 3.) Det säges äfven så: 3 till 3 är 6. Huru mycket är 3 till 3? 3 och 3 tillhopa? Huru mycket återstår, då 3 borttagits från 6? Då först 3 borttagits och sedan 3 till borttagits? Huru många tal 3 kunna borttagas från 6? Hvad säga vi om 3, eftersom 6 innehåller 2 sådana delar? (3 är en 2-del af 6.)

Läraren gömmer 3 kv. och frågar: Huru mycket skall läggas till 3 kv., för att allt skall blifva 6 kv.? Läraren borttager täckelset och säger: Nu synes det. Nu äro de 3 kvadraterna tillagda de andra 3 kv. Huru mycket är 3 kv. till 3 kv.? (6 kv. samt i full sats.) — Genom samma förfaringssätt efterfrågas antalen, och blir slutsatsen: 3 till 3 är 6. Nu hafva vi funnit, att 6 består af äfven andra delar än 1 och 5 eller 2 och 4. Hvilka? (3 och 3.) Äro de delarna lika eller olika stora? Huru stora äro de sins emellan? (Lika stora.) Af huru många delar består talet 6 i alla fallen? (2.) Säg nu, af hvilka delar talet 6 kan bestå!

Huru mycket är a) 6 kv. > 3 kv., b) 3 kv. < 6 kv., c) 6 > 3, d) 3 < 6? Hvilket tal är a) 3 mer än 3, b) 3 mindre än 6, c) 2 mer än 4, d) 4 mindre än 6, e) 1 mindre än 6, f) 4 mer än 2? O. s. v.

e) Visa på 2 kv.! Då visas först på de 2 nedersta, så på de 2 mellersta och sist på de 2 öfversta. Dela nu så, att första delen innehåller 2 kv., den andra delen 2 kv., och den tredje delen 2 kv.! Huru många äro delarna? Alltså kunna de 6 kv. delas så, att hvarje del blir 2 kv., och då blir delarnas antal 3. Huru stora äro delarna sins emellan? — Huru stort är kvadraternas antal i den delen (nedersta)? Den delen (mellersta)? Den delen (öfversta)? Då 6 delas så, att hvarje del är 2, huru många äro delarna? Då 6 delas i 3 lika delar, huru stor är hvarje del? Hvad säga vi om två, eftersom 6 innehåller 3 sådana delar? (Två är 1 tredel af 6.) — Delarna sammanfattas. I stället för 6 kunna vi då säga 2 till 2 till 2 eller 2 och 2 och 2. Huru mycket är 2 till 2 till 2? (Full sats!) Hvad återstår, då först 2, så 2 och sedan 2 tagits från 6? Huru många gånger kan 2 tagas från 6?

f) Huru många blifva delarna, då 6 kv. delas så, att hvarje del blir 1 kv.? Huru stor är hvarje del, då 6 delats i 6 lika delar? Hvad kunna vi säga om 1 såsom del af 6? (Ett är en 6-del af 6.) Huru stor del af 6 är 1?

157. B. **Praktiska uppgifter med tillämpning af läran om förhållande.**

Ex. 171. En kula (Ett äpple) kostar 1 öre. Huru mycket kosta 6 kulor (6 äpplen).

Genom åskådning märkes, att 6 kulor innehålla 6 delar med 1 kula i hvarje del. Hvarje kula utbytes mot 1 öre. Alltså skall priset för 6 kulor innehålla 6 delar med 1 öre i hvarje del eller 6 ggr 1 öre eller 6 öre.

(Ledning. Huru mycket kostar det första äpplet, det andra äpplet, de 2 första äpplena tillhopa? O. s. v.)

Ex. 172. En kvadrat ritas på 1 minut. Huru lång tid åtgår för att rita 6 kvadrater?

Ledning. Huru lång tid åtgår för att rita den första kvadraten? O. s. v.

Ex. 173. Beräkna priset för 3 äpplen efter 2 öre stycket!

Tre äpplen innehålla 3 delar med 1 äpple i hvarje del; 1 äpple kostar 2 öre; alltså innehåller priset 3 delar med 2 öre i hvarje del eller 3 ggr 2 öre. Eller: hvarje äpple utbytes mot 2 öre. Alltså innehåller priset för de 3 äpplena 3 delar med 2 öre i hvarje del.

Ex. 174. a) För 1 öre köpte Sigurd 3 knappar. Huru många knappar kunde han köpa för 2 öre? b) För 3 öre fick Lisa 2 knappar. Huru många knappar fick hon för 6 öre?

Ledning. a) Huru många knappar fick han för det första öret? för det andra öret? för alltsammans? b) Huru många delar med 3 öre i hvarje del innehålla 6 öre? Huru många knappar köpas för den första delen? för den andra delen? båda delarna tillhopa?

Svar. a) 3 och 3 eller 2 ggr 3 eller 6. b) 2 ggr 2 eller 4.

Ex. 175. Erik sköt 3 hökar och fick skottpengar, då fötterna lämnades till länsmannen. Huru många hökfötter lämnade han?

Ex. 176. Elin sålde bläck åt a) 6 barn, b) 3 barn, c) 2 barn, lika mycket åt hvarje barn, och fick 6 öre för allt. Huru mycket betalade hvarje barn?

[Svar. a) En af de 6 lika delarna i 6 öre. b) En af de 3 lika delarna i 6 öre. c) En af de 2 lika delarna i 6 öre.] Kortare svar: a) 1 sexdel af 6 öre. b) 1 tredel af 6 öre. c) 1 tvådel af 6 öre.

Folkskolekursen.

A. Hela tal: Mindre talområde.

Inledning.

Kursen enligt Normalplanen angifves i § **74**.

158. Om barnen i småskolan ej användt räknebok, utan blott räknat det, som framställda stafvar innehållit, så böra de första lektionerna uteslutande ägnas till innanläsning och muntlig redogörelse för det lästa. Såsom tyst öfning i sammanhang" därmed lämpa sig omläsning och sifferskrifning.

159. Först åsyftas säkerhet att uppfatta, beteckna och utsäga 1—3-siffriga tal samt att uppfatta, sammanfatta och uppdela konkreta storheter, hvilkas enheter stå i samma förhållande till hvarandra som tiotalsystemets 3 minsta heltalsenheter.

Denna inledning kan utsträckas till uppfattning, beteckning och utsägande af 4-siffriga tal äfvensom till uppfattning, sammanfattning och uppdelning af de konkreta storheter, hvilkas enheter stå i samma förhållande till hvarandra som tiotalssystemets 4 minsta heltalsenheter till hvarandra.

A. Uppfattning, beteckning och utsägande af t. o. m. 4-siffriga tal.

Se §§ **11**, **13**, **16**, **31**—**37**!

160. Ex. 177. a) 500 = 5 hundra = 50 tio = femhundra; b) 350 = 3 h. 5 t. = 3 h. 50 = 35 t. = trehundrafemtio; c) 704 = 7 h. 4 (e.) = 70 t. 4 (e.) = sjuhundrafyra; d) 619 = 6 h. 1 t. 9 (e.) = 6 h. 19 (e.) = 61 t. 9 (e.) = sexhundranitton; e) 4 501 = 4 tus. 5 h. 1 (e.) = 4 tus. 501 (e.) = 45 h. 1 (e.) = 450 t. 1 (e.) = fyratusenfemhundraett.

I a) är hundratalet fem, tiotalet femtio och entalet femhundra.

Ingen uppdelning har ägt rum i a) ej heller då, när 350 utsäges såsom 35 tio och trehundrafemtio, då 704 utsäges sjuhundrafyra, då 619 utsäges sexhundranitton eller då 4 501 utsäges fyratusenfemhundraett.

När uppdelning äger rum så, att blott grundenheternas antal angifves i delarna, så utsäges 350: trehundra och femtio.

161. Tal kunna uppdelas i så många delar som de antalbetecknande siffrornas antal. Däremot betecknar en nolla ingen del af talet. I somliga fall är *en* del af ett tal *betecknad med 2 eller flera siffror*. Då utsäges den delen lättast i den sort, som den sista siffrans i delen plats angifver.

Ex. 178. 9 013.

Den understrukna delen af talet är 90 h., ty nollan står i hundrarummet. — Då den första delen af det talet betecknas med de 3 första siffrorna, så utsäges han 901 t., ty ettan står i tiorummet.

Genom räkning vinnes samma resultat. 1 tus. = 10 h.; 9 tus. innehåller 9 delar med 1 tus. i hvarje del eller 9 delar med 10 h. i hvarje del (eller 9-falden af 10 h.) = 90 h.

Af gammalt sades 10 ggr 9 h. i st. f. 9 ggr 10 h., emedan »reduktionstalet» var tio. Därigenom betonades, att hundratalet är alltid 10 ggr så stort som motsvarande tusental. Då det gifna antalet är stort, förefaller den tankegången enklare. — Tiotalet skulle alltså vara 10 × 90 + 1 eller 901.

För barn, som nyss inkommit i folkskolan är sättet med stöd af siffrornas plats tillräckligt. Det andra sättet kräfver mer ansträngning, ehuru den ansträngningen ej är för stor för de flesta, så länge man sysslar med blott 3-siffriga tal. Det andra sättet kräfver allt större ansträngning, ju flera mindre delar man sammanfattar till en större del.

B. Sammanfattning och uppdelning af konkreta storheter.

Därvid beaktas det, som nämnts vid ex. 6 å sid. 9 samt öfverst å sid. 11.

162. Ex. 179. 400 cm. + 70 cm. = 470 cm.

Uträkning. Centimeternas antal är 400 och 70 eller 470. Då cm.-talet är 470, så är längden 470 cm.

Ex. 180. 360 cm. = a) 300 cm. + 60 cm. = b) 3 m. 60 cm. = c) 36 dm.

Uträkningar: a) Centimetertalet 360 uppdelas i 300 och 60. Delarnas cm.-tal är 300 och 60. Alltså äro delarna 300 cm. och 60 cm.

b) 300 cm. innehålla 3 delar med 100 cm. eller 1 m. i hvarje del, alltså äro 300 cm. = 3 m. Den andra delen blir oförändrad. Alltså 360 cm. = 3 m. 60 cm.

c) Af planschen synes, att **ett** hundra cm. = 10 dm., alltså äro **tre** hundra cm. = 30 dm. Den andra delen 60 cm. = 6 dm., alltså är alltsammans 36 dm.

Ex. 181. 4 m. innehåller 4 delar med hundra cm. i hvarje del, alltså är 4 m. = fyrahundra cm.

I ex. 180 b) och c) har en del eller allt blifvit utbytt mot större enheter, i ex. 181 har allt blifvit utbytt mot mindre enheter. Vid ett dylikt utbyte underlättas barnens tankegång väsentligt genom riktig betoning.

163. I denna afdelning böra åtminstone upptagas sorterna: km., m., dm., cm., mm.; kr., öre, hundrakr., tiokr., tusenkrona; kvm., kvdm., kvcm.; l., dl.; kbm., kbdm., kbcm.; kg. och gr.

C. En del af talsystemet och metersystemet.

164. Såsom en sammanfattning i denna afdelning bör angifvas det ömsesidiga förhållandet mellan förut upptagna, med hvarandra jämförbara enheter.

a.

1 t. = tio.	1 = 1 tiodel af 1 tio.
1 h. = tio tio.	1 t. = 1 tiodel af 1 h.
1 h. = hundra.	1 = 1 hundradel af 1 h.
1 tus. = tio hundra.	1 h. = 1 tiodel af 1 tus.
1 tus. = hundra tio.	1 t. = 1 hundradel af 1 tus.
1 tus. = tusen.	**1 = 1 tusendel af 1 tus.**

b.

1 m. = 10 dm. = 100 cm. = 1 000 mm.
1 dm. = 1 tiodel af 1 m. = 10 cm. = 100 mm.
1 cm. = 1 tiodel af 1 dm. = 1 hundradel af 1 m. = 10 mm.
1 mm. = 1 tiodel af 1 cm. = 1 hundradel af 1 dm. = 1 tusendel af 1 m.
1 kvdm. = 100 kvcm.
1 kvcm. = 1 hundradel af 1 kvdm. — O. s. v.

Allt eftersom kunskapen i metersystemet vidgas, angifves det *ömsesidiga* förhållandet mellan de närmast jämförbara metriska enheterna.

Räknesätten.

Inledning.

165. I alla räknesätten beaktas:

I. Skriftliga inledningsexempel förekomma af 2 slag. Genom det ena slaget införas barnen i sammanhanget mellan räknesätten. Genom det andra slaget betonas, att talen vid den skriftliga räkningen skola uppdelas i så många delar som de antalbetecknande siffrornas antal.

Det mesta af detta är repetition af småskolekursen.

II. Barnen skola öfvas att utsäga svaren på enkla praktiska uppgifter före all uträkning.

III. Då konkreta sorter förekomma, märkes: 1) De införas på ett sådant sätt, att de orsaka minsta besvär. 2) Delarna innehålla samma sort (sorter), som det hela innehåller. 3) Det beräknade talet skall på något ställe förbindas med det gifna.

IV. Nu, om ej förr, inläres betydelsen af x såsom ett tal, som förekommer i stället för ett tal, hvars storlek skall beräknas.

Sammanläggning (Addition).

166. **a.** Ex. 182. a) $2 + 2$; b) $2 + 2 + 2$; ———, i) $2+2+2+2+2+2+2+2+2+2$.

Ex. 183. a) Sammanlägg 2 tal 3! O. s. v.

I detta fall får icke sägas: Sammanlägg 2 tretal! Meningen är nämligen icke att införa någon ny talsort. Däremot kan ex. 183 a) lyda: Hvilket tal innehåller 2 tal 3?

b. Sådana ex. som ex. 126, 127 på sid. 87!

167. Ex. 184. I en ask lågo 4 synålar och 23 knappnålar. Huru många nålar funnos där?

Svar: 4 och 23 eller 4 plus 23. Det betecknas sedan: $4 + 23$ samt uträknas, om så befinnes lämpligt.

Ex. 185. Sven sparade 45 öre under 1 månad och 67 öre under en annan månad. Huru mycket sparade han i allt?

Svar: 45 öre plus 67 öre. Svarets beteckning: 45 öre + 67 öre eller 45 + 67 öre.

---

168. Ex. 186. 5 m. 4 dm. + 6 m. 7 dm.

Decimetertalen sammanläggas för sig och metertalen för sig.

I detta fall är summan af delarna 4 dm. och 7 dm. blott 11 dm., och det kan genast lätt utbytas mot 1 m. 1 dm., hvarefter 1 dm. omedelbart uppskrifves. Summan af delarna 1 m., 5 m. och 6 m. är 12 m., och det uppskrifves äfven omedelbart.

Ex. 187. 7 m. 48 cm. + 5 m. 59 cm. = 12 m. 107 cm. = 13 m. 7 cm.

Räkningen utföres så som 107 c) på sid. 73.

Detta förfaringssätt användes, då 1 större enhet innehåller flera än 10 mindre enheter.

---

169. Ex. 188. Karl kom till skolan klockan 8 timmar 25 min. f. m. och väntade a) 20 min., b) 35 min., innan läsningen började. När började läsningen? [Sv. a) 8 tim. 45 min., b) 9 tim. f. m.]

Ex. 189. Huru lång tid förflyter a) från klockan 9 f. m. till kl. 2 e. m. samma dag, b) från kl. 8 f. m. till kl. 9 e. m. följande dygn?

Utredningar. a) Tiden från kl. 9 tim. f. m. till kl. 2 tim. e. m. innehåller 2 delar: från kl. 9 tim. till kl. 12 tim. middagen och från kl. 12 tim. midd. till kl. 2 tim. e. m. eller 3 tim. + 2 tim.

b) Tiden innehåller 3 delar: 1) från kl. 8 f. m. till kl. 8 f. m. följande dygn, 2) från kl. 8 f. m. till kl. 12 midd. samma dag samt 3) från kl. 12 midd. till kl. 9 e. m. eller 24 tim. + 4 tim. + 9 tim.

Eller ock de 3 delarna: 1) Från kl. 8 f. m. till kl. 8 f. m. följ. dygn, 2) därifrån till kl. 8 e. m. samma dygn och 3) därifrån till kl. 9 e. m. samma dygn eller 24 + 12 + 1 tim.

Före detta ex. skall naturligtvis förekomma beräkning af tiden från kl. 1 f. m., 2 f. m. o. s. v. till kl. 12 midd. samt från kl. 12 middagen till olika timmar e. m. Se § **140** A!

Viktigt är, att barnen tidigt lära sig månadernas namn och deras riktiga längd.

170. I denna afdelning behöfver ej *x* upptagas.

Fråndragning (Subtraktion).

171. **a.** Ex. 190. a) Hvilka tal återstå, då 2 tages från 20 och sedan från återstoden så länge som möjligt? b) Räkna efter, huru många tal slutligen äro borttagna!

b)-frågan kan lyda så: Räkna efter, huru många delar med 2 i hvarje del 20 innehåller!

Svaren på a) blifva: 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2 och 0; på b) 10.

b. Sådana ex. som 129 och 130 på sid. 88.

Vid behof användes åskådningsmateriel.

Så småningom skola barnen vänjas att tänka på det genom utbytet af en större enhet mot närmast mindre enheter erhållna antalet tio utan dess uppskrifvande. Barnen öfvas dessförinnan att utsäga det helas storlek efter sådana utbyten.

Ex. 191. a) 34 = 2 t. och 14, b) 752 = 7 h. 4 t. och 12, c) 725 = 6 h. 12 t. och 5, d) 725 = 6 h. 11 t. och 15, e) 5000 = 4 t. 9 h. 9 t. och 10, f) 3023 = 2 t. 9 h. 11 t. och 13.

Barnen skola ock vänja sig att tänka på antalet af de olika sorterna utan att tänka på sortens namn. Se uträkning af ex. 195!

---

172. Ex. 192. I en låda lågo 144 grifflar. Däraf såldes 46. Huru många voro kvar?

Svar: Skillnaden mellan 144 och 46. Svarets beteckning: 144 — 46.

Ex. 193. En knif kostade 3 kr. 40 öre, en annan kostade 1 kr. 25 öre. Huru mycket a) dyrare var den första, b) billigare var den andra?

Svar: Skillnaden mellan 3 kr. 40 öre och 1 kr. 25 öre.

Om barnen säga föreg. svar så: Skillnaden mellan 3 kr. och 40 öre och 1 kr. och 25 öre, så innehåller det 3 ord och. Det första och det sista, d. v. s. de, som sägas före 40 öre och före 25 öre, skola då sägas svagare än det mellersta. Detta senare är det viktigaste och det enda nödvändiga. Bäst är att säga endast det mellersta och utesluta de båda andra.

Ex. 194. Ett hus var 14 m. 10 dm. högt. Ett annat var 3 m. 65 cm. lägre. Huru högt var det senare?

Svar: Skillnaden mellan 14 m. 10 cm. och 3 m. 65 cm.

---

173. Ex. 195. 324 m. — 182 m.

Under uträkningen fasthållas blott antalen; därför uppskrifves sorten m. först. Sedan räknas.

2 från 4 återstår 2; 8 från 2 går icke. Därför tages 1 af de 3 och utbytes mot mindre enheter (uttryckes i mindre sort). Det blir 10 sådana; 10 + 2 = 12; 8 från 12 återstår 4; 1 från 2 återstår 1. Skillnaden är uträknad: 142 m.

Äfven vid konkreta sorters förekomst öfvas barnen *före beräkning af skillnaden* att eftertänka och utsäga det helas storlek efter utbyte af större enheter mot närmast mindre enheter vid öfvergången till den afdelning, i hvilken sådan förvandling fordras.

Ex. 196. a) 4 m. 5 dm. = 4 m. 15 dm., som utsäges 3 m. 15 dm., b) 3 kr. 2 öre = 3 kr. 102 öre = 2 kr. 102 öre; c) 5 km. 92 m. = 5 km. 1 092 m. = 4 km. 1 092 m. d) 5 kg. 6 hg. 3 gr. = 5 kg. 16 hg. 103 gr. = 4 kg. 15 hg. 103 gr.

Ex. 197. a) 9 l. 8 dl. — 4 l. 5 dl., b) 9 l. 3 dl. — 4 l. 7 dl.

I ex. 197 medför den konkreta sortens fasthållande under räkningen intet besvär. Fördenskull fasthålles den.

Uträkning. a) 5 dl. från 8 dl. återstå 3 dl. Det uppskrifves först. 4 l. från 9 l. återstå 5 l. Det skrifves sedan.

Ex. 198. Se ex. 193 å sid. 116!

Svarets beteckning: 3 kr. 40 öre — 1 kr. 25 öre.

Här undersökes först, om delen 25 öre kan tagas från 40 öre. Emedan det går, uppskrifves först öresorten, och därefter drages 25 från 40, hvarvid inga talsorter sägas, utan räkningen utföres så: fem från noll går icke. Därför tages en af de fyra och utbytes mot mindre enheter. Det blir tio sådana. Fem från tio återstå fem; två från tre återstår ett. Alltså är öretalet 15 och den delen af svaret 15 öre. 1 kr. från 3 kr. återstår 2 kr. Uträknad är skillnaden alltså 2 kr. 15 öre.

Ex. 199. Se ex. 194 å sid. 117!

Svarets beteckning: 14 m. 10 cm. — 3 m. 65 cm.

Emedan cm.-talet 65 ej kan tagas från cm.-talet 10, så tages 1 m. och utbytes mot 100 cm., som tilläggas 10 cm., hvarefter skillnaden skrifves så: 14 m. 110 cm. — 3 m. 65 cm. Nu kan uträkningen utföras så som i föreg. exempel.

Den konkreta sorten uppskrifves före fråndragningen, 1) då *en* sort förekommer, ifall de uppgifna enheternas antal i någondera storheten öfverstiger 10, 2) då flera sorter förekomma, ifall den större enheten innehåller flera än 10 mindre enheter.

---

174. Ex. 200. Huru mycket a) mindre än 40 minuter är 28 minuter, b) mer än 15 min. är 1 tim., c) mer än 10 min. är 1 halftimme, d) mindre än 40 min. är 1 halftimme (1 kvart)?

Ex. 201. Svensson reste bort klockan 20 min. öfver 5 tim. på morgonen och återvände a) kl. 3 tim. e. m., b) kl. 8 min. öfver 4 tim. på e. m. Huru länge var han borta?

Tankegång för uträkning af a) I. Först fylles tiden till kl. 12 tim. middagen och sedan till kl. 3 tim. e. m.

Uträkning då: Tiden från kl. 5 tim. 20 min. till kl. 6 tim. är 40 min., från kl. 6 tim. till 12 tim. är 6 tim., från kl. 12 tim. midd. till 3 tim. e. m. är 3 tim. Alltså är hela tiden 9 tim. 40 min.

Eller II. Från dygnets början till kl. 3 tim. e. m. hafva 15 tim. förflutit. Däraf var han hemma 5 tim. 20 min. Alltså är svaret: Skillnaden mellan 15 tim. och 5 tim. 20 min. Beteckning af svaret: 15 tim. — 5 tim. 20 min.

Uträkning:				
	15	tim.	60	min.
	— 5	»	20	»
	9	tim.	40	min.

Detta senare sätt är lättare, ty det är mindre ansträngande för minnet. Svaret på b-frågan bör beräknas på det sättet.

b)
```
   20 tim. 64 min.
 — 5  »   20  »
 ───────────────
   14 tim. 44 min.
```

Ex. 202. Hvilken dag (= hvilket datum) är inne, då du till den 24 april lägger a) 6 dygn, b) 15 dygn?

Uträkningar. I. För uträkning af b) uppdelas 15 dygn i 6 dygn och 9 dygn. 6 dygn till den 24 april = den 30 april. 9 dygn till den 30 april = den 9 maj.

II. 15 dygn till den 24 april = den 39 april. Men april innehåller blott 30 dygn. Genom att borttaga 30 från 39, beräknas den innevarande dagen i maj. Svar: den 9 maj.

III. 23 dygn gått af april; 15 dygn därefter hafva 38 dygn gått af april. Men den månaden innehåller blott 30 dygn, alltså hafva 8 dygn förflutit af maj månad och den 9 maj är inne.

```
  23 dygn    Eller 3 mån.   23 dygn
  15  »                     15  »
 ─────────         ─────────────────
  38 dygn          3 mån.   38 dygn
—30  »             1  »    —30  »
 ─────────         ─────────────────
   8 dygn          4 mån.    8 dygn = den 9 maj.
```

Ex. 203. Hvilken tid var inne 2 veckor före den 8 mars 1888?

Uträkningar. I. 2 v. = 14 dygn = 8 dygn + 6 dygn. 8 dygn före den 8 mars = den sista (den 29) febr.
6 dygn före den 29 febr. = den 23 febr. Svar: den 23 febr. år 1888.

II. Den 8 mars hade 2 mån. 7 dag. förflutit af året. 2 veckor dessförinnan hade 2 mån. 7 dygn — 14 dygn förflutit.

```
          29
2 mån.     7 dygn
        — 14  »
─────────────────
1 mån.    22 dygn = den 23 febr.
```

Ex. 204. Lars föddes år 1876 den 15 febr. klockan 6 tim. 35 min. e. m., började skolan, då han var 7 år 13 dagar 14 tim. 25 min. gammal. När skedde det?

En del af den gångna tiden vid födelsen är uttryckt såsom innevarande tid (år 1876 den 15 febr.), den andra delen däraf såsom förfluten tid (6 tim. 35 min. e. m. eller såsom man oftast i dagligt tal säger: 5 minuter öfver half 7). Mellantiden mellan födelsetiden och skoltidens början angifves i förfluten tid (7 år 13 dag. 14 tim. 25 min.). Mest öfverensstämmande med räkningen i alla andra fall är att uttrycka all ifrågavarande tid såsom förfluten tid. Den vid födelsen gångna tiden = 1875 år 1 mån. 14 dygn 18 tim. 35 min., och den vid skoltidens början förflutna tiden = 1875 år 1 mån. 14 dygn 18 tim. 35 min. + 7år 13 dygn 14 tim. 25 min. — Uträkning däraf.

1. 1875 år	1 mån.	14 dygn	18 tim.	35 min.	
7 »		13 »	14 »	25 »	
1882 år	1 mån.	27 dygn	32 tim.	60 min.	

Efter utbyte af mindre enheter mot större enheter är den gångna tiden 1882 år 2 mån. 9 tim. och den innevarande tiden: år 1883 den 1 mars klockan 9 tim. f. m.

2. 7 år till år 1876 är år 1883; 13 dygn till den 15 febr. är den 38 febr.; 14 tim. till 6 tim. e. m. eller till 18 tim. är 32 tim.; af dem tillhöra 24 tim. den 28 februari, de öfriga 8 tim. den 1 mars. 25 min till 35 min. är 60 min. eller 1 tim.; 1 tim. till 8 tim. är 9 tim. Alltså år 1883 den 1 mars kl. 9 tim. f. m.

Ex. 205. Gustaf Vasa blef konung år 1523, dog år 1560. Huru många år regerade han? b) Huru länge regerade han?

I. Svaret på a-frågan finnes genom att minska årtalet 1560 med årtalet 1523 och är 37. Svaret på b-frågan finnes genom att tillsätta sorten år till a-svaret och är 37 år.

II. Eller ock eftertänkes först de förflutna årens antal vid båda tillfällena. Vid början af dödsåret hade 1559 år förflutit och vid utkorelseårets början hade 1522 år förflutit från den kristna tideräkningens början. Därefter besvaras frågan så: a) skillnaden mellan 1559 och 1523 och b) skillnaden mellan 1559 år och 1522 år.

Det andra sättet stämmer öfverens med det andra sättet i föreg. ex. och med räkningen i allmänhet, men det kräfver längre tid.

Ex. 206. Gustaf Vasa utnämndes till konung den 6 juni år 1523 och dog den 29 sept. år 1560? Huru länge regerade han?

Uträkningar. I. Från den 6 juni år 1523 till den 6 juni år 1560 är tiden 37 år. Från den 6 juni år 1560 till den 6 sept. samma år är tiden 3 mån. Från den 6 till den 29 sept. är tiden 23 dygn. Svar: 37 år 3 mån. 23 dygn.

II. Då den vid båda tillfällena förflutna tiden först eftertänkts, skrifves följande:

	1559	år	8	mån.	28	dygn
—	1522	»	5	»	5	»
	37	år	3	mån.	23	dygn.

Då tidsorten är år, månad eller dag, beaktas olikheten mellan följande 3 exempels frågor.

Ex. 207. Huru lång är tiden a) från år 1889 till år 1891, b) mellan år 1889 och år 1891 (= mellan åren 1889 och 1891), c) från och med år 1889 till och med år 1891? Svar: a) 2 år. b) 1 år. c) 3 år.

Tiden i c) brukar, då det är fråga om hela kalenderår, i offentliga handlingar ofta sammandragas så: åren 1889—1891. I andra fall, då en ettårsperiod börjar på en annan bestämd månadsdag, än den 1 januari eller i en bestämd månad, utan att månadsdagen alltid är den samma, men årets längd dock är bestämd, såsom de allmänna läroverkens, m. fl. läroanstalters läsår, angifves en ettårsperiod korteligen så: tillverkningsåret 1889—1890, läsåret 1890—1891. (Läsåren 1889—1891 innebär då blott 2 läsår.)

Ex. 208. Huru många månader innehåller tiden a) från juni till oktober, b) mellan juni och oktober månader, c) från och med juni månad t. o. m. oktober månad? (Svar: a) 4, b) 3, c) 5).

Ex. 209. Se ex. 145 å sid. 93!

I alla 3 ex. 207—209 a) är enheternas antal skillnad mellan det större årtalet (månadtalet, dagtalet) och det mindre årtalet (månadtalet, dagtalet). Därvid tänkas fullkomligt motsvarande tidpunkter såsom begynnelse- och sluttider, i ex. 207 a) början af år 1889 (eller den 23 mars år 1889) eller något annat datum samt motsvarande ögonblick år 1891, i ex. 208 a) den första juni (eller den 12 juni) och den första oktober (eller den 12 oktober), i ex. 209 a) dygnets början (klockan 12 på dagen) den 3 juni och dygnets början (klockan 12 på dagen) den 20 juni.

---

175. Ex. 210 a) $71 - x = 6$. b) $37 + x = 41$. c) $x + 29 = 65$. d) $x - 84 = 25$.

Utredning. a) Emedan x är draget från 71, då återstoden är 6, är x en del af 71. Det är den första (ena) delen af 71, då 6 är den andra. Dess storlek beräknas alltså genom att (afskilja) draga 6 från 71. x är således = skillnaden mellan 71 och 6 eller 71 — 6.

b) Talen 37 och x äro till hopa 41. Alltså äro 37 och x de båda delarna af 41 samt $x = 41 - 37$.

c) Summan af x och 29 är 65. Alltså består 65 af de båda delarna x och 29, och är $x = 65 - 29$.

d) Af samma skäl som i a) är 84 en del af x. Den andra delen är 25. x innehåller alltså de båda delarna 84 och 25 eller $x = 84 + 25$.

Mångfaldigande (Multiplikation).

I. **Delarnas antal högst tio.**

a. Hvarje del innehåller blott en sort.

Dit höra 1) uppgörande af de vanliga mångfaldstabellerna samt 2) exempel, i hvilka hvarje del innehåller en större sort, vare sig talsort eller konkret sort.

176. Ex. 211. Hvilket tal innehåller a) 2 delar med 1 i hvarje del, b) 3 delar med 1 i hvarje del? O. s. v.

Svaren blifva: a) 1 plus 1 eller 2 gånger 1 eller 2; o. s. v.

Däraf bildas tabell: $1 + 1 = 2 \times 1 = 2.$
$1 + 1 + 1 = 3 \times 1 = 3.$
O. s. v.

Ex. 212. I ett rum stodo 2 skor på ett ställe och 2 skor på ett annat ställe. Huru många skor stodo i det rummet?

Svar: 2 och 2 eller 2 ggr 2 (2-fald af 2) eller 4.

Ex. 213. Vid en vägg funnos a) 3 fack (= små rum), b) 4 fack, c) 5 fack, d) 6 fack ...... h) 10 fack och 2 skor i hvarje fack. Huru många voro samtliga skorna?

177. På grund af svaren till ex. 212, 213 bildas en tabell så, som uppgifves vid ex. 131 a) å sid. 90. Därvid betonas innebörden af talen i tabellen.

Då tabellen färdigbildats, granskas den af läraren. Sedan skall den vänstra delen af hvarje rad (2 + 2, 2 + 2 + 2, o. s. v.) öfverstrykas, hvarefter det kvarstående öfverläses några gånger, hvarvid de på ömse sidor om likhetstecknen stående talens betydelse noga öfvertänkes. Då läsa barnen så: Två gånger två är fyra. Tre gånger två är sex. O. s. v.

För att undvika tröttande enformighet böra barnen besvara några praktiska exempels frågor så ordnade, att besvarande af frågorna i följd leder till en tabell, som omedelbart öfverläses några gånger.

Ex. 214. I ett fönster funnos 2 bågar. Huru många sådana funnos i a) 2, ... i b) 10 sådana fönster?

Ex. 215. En kärra har två hjul. Huru många hjul hafva a) 2 .... i) 10 kärror.

Sålunda växlar besvarande af praktiska exempels frågor med öfverläsning af de genom svaren bildade tabellerna öfver talen 1—10. *)

178. Ex. 216. Huru mycket är a) 2 gånger 2, b) 2 gånger 2 tioören, c) 2 gånger 2 tio, d) 2 gånger 2 hundra, e) 2 gånger 2 hundrakr.?

I de fall, då svaren bruka utsägas i mindre sort än den uppgifna, tänka barnen det beräknade svaret på 2 sätt: 1) i den uppgifna större sorten, 2) i den vanliga mindre sorten.

Uträkning. b) 2 ggr 2 tioören = 4 tioören = 40 öre.

c) 2 ggr 2 t. = 4 t. = fyrtio.

Härpå grundas talens uppskrifning under hvarandra på följande sätt vid behof:

$$\text{c)}\ \begin{array}{r} 20 \\ \cdot 2 \\ \hline 40 \end{array} \qquad \text{d)}\ \begin{array}{r} 200 \\ \times 2 \\ \hline 400. \end{array}$$

---

b. Hvarje del är uttryckt i två eller flera sorter. Frågorna besvaras 1) utan förvandling till mindre sort, 2) efter förvandling till mindre sort, när det är lämpligt. Under uträkningen förvandlas icke till större sort.

179. Ex. 217. Huru mycket är a) 3 ggr 2 enkr., b) 3 ggr 3 tiokr., c) 3 ggr 3 tiokr. 2 enkr., d) 3 ggr 3 tio 2, e) 3 ggr 32?

c) innehåller lika mycket som a) och b) tillhopa. I c)—e) innehåller den uppgifna delen 2 olika stora delar, uttryckta i olika sorter. I c) och d) framträder det tydligt, men i e) först då, när man tillräckligt uppmärksammar, att trettitvå är betecknadt med 2 siffror och att en trea betecknar antalet 3 samt en tvåa antalet 2.

---

*) Se Lindblom D-räknebok, Folkskolekursen h. I, sid. 22—24!

I c) skall man således fästa sig vid sättet att beteckna, men icke det vanliga sättet att utsäga tal.

Ex. 218. Huru mycket är a) 2 ggr 2 hundrakr. 4 enkr., b) 3 ggr 2 hundra 3 enheter, c) 3 × 201, d) 2 ggr 2 hkr. 1 tiokr. 3 enkr., e) 2 ggr 2 h. 1 t. 3 e., f) 2 × 213?

I a)—c) innehåller den uppgifna delen blott 2 olika delar, men i d)—f) består hvar och en af de 2 delarna af 3 delar, uttryckta i olika sorter. Svaren utsägas först i flera delar och hvarje del i sin sort, sedan på det vanliga sättet. Svar: a) 4 hundrakr. 8 enkr. = 408 enkr. = 408 kr.; b) 6 hundra 9 enh. = sexhundranio; c) 4 h. 2 t. 6 = fyrahundratjugusex.

Ändamål med ex. 218: Då antal af olika sorter mångfaldigas, mångfaldigas först antal af minsta uppgifna sort. Två—flersiffriga tal uppdelas i så många delar som de antalbetecknande siffrornas antal.

---

c. Hvarje del är uttryckt i två eller flera sorter. Under uträkningen förvandlas till större sort. Märk därvid § **113**!

180. Ex. 219. a) Hvad är 2 ggr 6 öre? b) Utsäg det i tioören och ettören! c) Hvad är 2 ggr 3 tioören? d) Huru mycket är 2 ggr 3 tioören 6 ettören? e) Hvad är 2 ggr 3 t. 6 e.? f) Huru mycket är 2 ggr 36?

d) innehåller lika mycket som a) och c) tillhopa. Det tioöre, som erhålles ur 12 öre efter förvandling, tilllägges 2 ggr 3 tioören; alltså uppskrifves först blott 2 ettören.

f) Här utbytes tolf mot 1 t. 2 (e.). Den andra delen, 2, uppskrifves, och 1 t. tilläggcs 2 × 3 t.

Ex. 220. Huru mycket är a) 4 ggr 9, b) 4 ggr 4 t., c) 4 ggr 49, d) 3 ggr 275? Svar: a) 36; b) 16 t.; c) 3 t. 6 + 16 t. eller 19 t. 6 eller 196; d) 825.

I stället för att uppskrifva den i talet 4 ggr 9 inneslutna delen 3 t. kan man behålla den i minnet och lägga den till 4 ggr 4 t. Då uppskrifves först 6 och sedan 19 framför 6.

Så mycken färdighet som möjligt skall vinnas att sammandraga uttrycken under uträkningen, så att talsorterna tio, hundra o. s. v. uteslutas, och blott det ena antalet efter det andra tänkes och skrifves (s. k. mekanisk räkning). c) uträknas då så: 4 ggr 9 är trettisex; 6 upp och 3 i minnet; 4 ggr 4 är 16; 3 till sexton är nitton. Det uppskrifves. d) räknas då så: 3 ggr 5 är femton; 5 upp och 1 i minnet. 3 ggr 7 är tjuguett; ett därtill är tjugutvå; två upp och två i minnet. 3 ggr 2 är sex; 2 därtill är 8.

Ex. 221. En enkrona väger 7 gr. 5 dg. Huru mycket väga 5 enkr.? Svar: 5 ggr 7 gr. 5 dg. = 37 gr. 5 dg.

Uträkning: 5 ggr 5 dg. = 25 dg. = 2 gr. 5 dg.; 5 ggr 7 gr. = 35 gr.; 2 gr. därtill blir 37 gr.

Ex. 222. Eriksson sådde 12 hl. 45 l. säd dagligen. Huru mycket sådde han på 3 dagar?

Svar: 3 × 12 hl. 45 l. = 36 hl. 135 l. = 37 hl. 35 l.

II. **Delarnas antal är ett större stomtal än 1.**

Delarnas antal betecknas då med en etta och en eller flera nollor.

181. Utgångspunkt: Tabellerna öfver mynt, mått, mål och vikter.

Ex. 223. a) 10 × 1 öre = 10 öre = 1 tioöre.
b) 100 × 1 öre = 100 öre = 1 kr.
c) 10 × 1 cm. = 10 cm. = 1 dm.
d) 1 000 × 1 mm. = 1 000 mm. = 1 m.

De enheter i de nämnda tabellerna, som ej inlärts förut, skola inläras i sammanhang härmed.

Beräkningen utföres så, att den gifna sorten bibehålles vid första förenklingen, och den för det praktiska behofvet viktigaste sorten angifves vid den andra förenklingen. I senare fallet bildas nya, större enheter.

Af åskådningsmaterielen för metersystemet synes tydligt, att 10 × 1 cm. är en längd, som innehåller 10 delar med 1 cm. i hvarje del, att 1 000 × 1 mm. innehåller 1 000 delar med 1 mm. i hvarje del, och att den förra sammanfattas i en större enhet: 1 dm., samt att den senare sammanfattas i en större enhet: 1 m.

Där betonas ock, att antalet af de större enheterna i det förenklade svaret (det hela) är lika stort som antalet af de mindre enheterna i den uppgifna delen.

Ex. 224. En l. dricka kostar 8 öre. Huru mycket kostar 1 hl. dricka?

Svar: 100 gånger 8 öre (eller 800 öre) eller 8 kr.

Ex. 225. a) Utsäg 10 × 1, (10 × 16) i större sort! b) Utsäg 100 × 1 (100 × 39) i största möjliga sort! c) Utsäg 1 000 × 1 (1 000 × 5) i största möjliga sort!

III. **Delarnas antal är mångfald af ett större stomtal än 1.**

Delarnas antal betecknas med en antalbetecknande siffra (utom 1) och en eller flera nollor.

182. Inledningsexempel.

Ex. 226. Först skrifvas 2 tal 10×2 under hvarandra, och uträknas de; sedan beräknas ett tal, som innehåller dem båda.

$$10 \times 2 = 20.$$
$$10 \times 2 = 20.$$
$$20 \times 2 = 40.$$

Därvid efterfrågas, huru många ggr 2 (huru många delar med 2 i hvarje del) alltsammans innehåller. (Sv. 20.) Så efterfrågas, huru mycket 20 ggr 2 är. — Vidare inskärpes, att 20×2 innehåller 2 delar med 10 ggr 2 i hvarje del samt att man först beräknar en af de 2 delarna och sedan alltsammans. Slutligen betecknas 20×2 och uppdelas på följande sätt för inskärpande af tankegången hos barnen.

$$20 \times 2 = 2 \times 10 \times 2 = 2 \times 20 = 40.$$

Märk! De båda sista faktorerna i $2 \times 10 \times 2$ upptagas först vid uträkningen. Ingen parentes behöflig.

Talen skrifvas under hvarandra så:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times\ 20 \\ \hline 40. \end{array}$$

183. Talet 40 beräkna vi äfven enkelt så: 2 ggr 2 = 4. Sedan tillsättes en nolla efter fyran. Fyran skrifves rätt under tvåan i talet tjugu. — Eller ock kan man först skrifva en nolla rätt under nollan i talet 20 och sedan 2-faldiga 2.

184. Orätt är att angifva gången vid uträkningen så: »Först multiplicera vi med nollan och sedan med tvåan» samt att skrifva så:

$$\begin{array}{l} 2 \\ \cdot\, 20 \\ \hline 00 \\ 4 \\ \hline 40 \end{array}$$

Orätt är äfven att införa uttrycket »2 tiotal gånger» i detta fall. Barnen förstå saken bättre genom ofvan angifna förfaringssätt. De vilseledas genom uttrycket »2 tiotal gånger». Uttrycket »2 tiotal gånger» öfverensstämmer i formellt afseende fullkomligt med »2 krontal gånger», »2 gosstal gånger» och dylika. Men dessa senare uttryck vill ingen lärare godkänna. Tvärt om arbetar nog hvarje undervisare i räkning med all ifver mot dem.

185. Ex. 227. a) 60×17; b) 300×25; c) $3\,000 \times 3$. Sådana tal uträknas först utan talens uppskrifvande under hvarandra. Därvid tillhållas barnen att först tiofaldiga eller hundrafaldiga eller tusenfaldiga. Fördenskull böra de först uppdela delarnas antal och beteckna talet så, som skett i ex. 226.

Däraf märkes, att 6 × 17 är tiotal i a), att 3 × 25 är hundratal i b), att 3 × 3 är tusental i c). Sedan skrifvas talen under hvarandra så, som skett i ex. 226, och därefter räknas enligt endera af anvisningarna i § **183**.

Genom sådana öfningar vinnes säkerhet att skrifva delprodukternas först skrifna siffra på rätt plats.

Sammanfattning: Då ett tal innehåller a) tio, tjugu .... nittio lika delar, b) hundra, tvåhundra .... niohundra lika delar, så är den sista siffran i det beräknade talet en nolla, c) äro de 2 sista siffrorna i det beräknade talet nollor; o. s. v.

Ex. 228. a) 40 × 30; b) 30 × 120.

Genom samma förfaringssätt inses, att 4 × 3 är hundratal i a) och att 3 × 12 är hundratal i b).

Däraf dragas 3 slutsatser: 1) De sista antalbetecknande siffrorna skrifvas rätt under hvarandra; 2) Sedan räknas så, som om inga slutnollor funnes; 3) Därefter tillsättas så många nollor som slutnollornas antal tillhopa i de gifna faktorerna.

IV. **Delarnas antal är mer växlande, blott mindre än tusen.**

186. Ex. 229. a) 2 · 4; b) 30 · 4; c) 32 · 4.

Uträkningar. a) 2·4=8. b) 30·4=12 tio=hundratjugu. c) innehåller så mycket som a) och b) tillhopa. Alltså uppdelas 32 · 4 i de 2 delarna trettio gånger 4 och 2 ggr 4. Ordningen mellan delarna kan ändras vid uträkningen, ehuru det ej är nödvändigt i detta och dylika exempel, i hvilka den minsta delen af det beräknade talet understiger tio. Emellertid må den minsta delen beräknas först i alla ex. för likformighet i förfaringssättet.

4 · 32 128	2 · 4 = 8. En åtta skrifves rätt under tvåan. Trettio ggr 4 = 12 tio. 12 uppskrifves alltså omedelbart framför den uppskrifna åttan. En tvåa kommer då rätt under trean.

Ändamålslöst är att vid uträkningen skrifva 4 under 32 och sedan räkna så: 4 ggr 2 är 8; o. s. v. Barnen skola först mångfaldiga ett ensiffrigt tal med 2-siffriga tal, innan det svårare föreläggges dem, nämligen att mångfaldiga ett 2- eller flersiffrigt tal med 2-siffriga tal.

När man gjort barnen uppmärksamma på, att c) innehåller summan af a) och b), samt a) och b) förut äro uträknade, så kan man räkna »mekaniskt». 32 · 4 är på grund af a) och b) = 128. Det finner man äfven genom att räkna så: 2 ggr 4 är 8; 3 ggr 4 är 12; 12 uppskrifves till vänster om 8, så att tvåan kommer rätt under trean. 30 ggr 4 beräknas således på det sättet, att man beräknar 3 ggr 4 och uppskrifver första siffran rätt under trean.

Ex. 230. a) 3 × 8; b) 20 × 8; c) 23 × 8; d) 723 × 8.

a) och b) äro tillsammans = c). Alltså uppdelas c) i 2 delar 20 × 8 och 3 × 8. — 3 × 8 = 24; 20 × 8 = 16 t. — Då 24 och 16 t. uppskrifvas under hvarandra för sammanläggningen, ihågkommes, att sexan skall stå i tiorummet, således rätt under tvåan i talet 23.

Uträkning af c): 1) $\begin{array}{r} 8 \\ \cdot\, 23 \\ \hline 24 \\ 16 \\ \hline 184 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 8 \\ \cdot\, 23 \\ \hline 184 \end{array}$

20 × 8 beräknas på det sättet, att man beräknar 2 × 8 och skrifver första siffran rätt under tvåan.

Märk! Då 24 och 16 t. sammanläggas, säges: 4 är 4; 2 och 6 är 8; 1 är 1.

I 1) märkes, att 2 t. och 6 t. sammanläggas. Det kan ske omedelbart utan deras uppskrifvande. 3 × 8 är tjugufyra. Det uppdelas i 2 tio och fyra. Den första delen, 2 tio, behålles i minnet. Så i 2).

Uträkning af d): $\begin{array}{r} 8 \\ \cdot\, 723 \\ \hline 5\,784 \end{array}$

d) är 700 × 8 mer än c). Räkningen utföres så: 3 × 8 = 24; 4 upp och 2 i minnet. — 2 × 8 är 16; 2 i minnet; 2 till 16 är 18; 8 upp och 1 i minnet. — 7 × 8 = 56; 1 i minnet; 1 till 56 är 57, som uppskrifves.

Ex. 231. a) 4 × 38. b) 20 × 38. c) 24 × 38.

c) 24 × 38 består af 4 × 38 och 20 × 38. 4 × 38 = 152; 20 × 38 = 760 eller 76 t.

$\begin{array}{r} 38 \\ \cdot\, 24 \\ \hline 152 \\ 76 \\ \hline 912 \end{array}$

Då 152 och 76 t. sammanläggas, och talen uppskrifvas under hvarandra, så skall sexan stå i tiorummet, alltså **rätt under femman och tvåan i talet 24.**

Ex. 232. a) 205 · 3; b) 205 · 37.

a)
3
· 205
615

Uträkning: 5 ggr 3 är femton; 5 upp och 1 i minnet. 0 og 3 är 0; 1 i minnet är 1, hvilket uppskrifves under nollan. 2 ggr 3 är 6. 6 uppskrifves under tvåan.

b)	Eller
37	37
· 205	· 205
185	185
74	740
7585	7585

Först beräknas 5 × 37; sedan 200 ggr 37, hvarvid man beräknar 2 × 37 och skrifver första siffran rätt under tvåan. — Innan den andra delen beräknas, kan man ock säga 0 gg 37 är 0, hvarvid en nolla skrifves rätt under nollan i talet 205.

Likadelning (Division).

I. **Beräkning af delarnas antal särskiljes från beräkning af delarnas storlek.**

a. *Inlärande (och inskärpande) af likadelningstabellerna. Därvid beräknas än delarnas antal, än delarnas storlek i det närmaste sammanhang med hvarandra.* Vid tillämpning upptages äfven en större sort.

187. Omedelbar åskådning (och talens innebörd) leder först till beräkning af delarnas storlek. Om åskådningsmateriel ej behöfver användas, så är ordningen likgiltig.

Ex. 233. Huru många ggr kan du taga 1 cm. från a) 1 cm., b) 2 cm., c) 3 cm.____ j) 10 cm.?

Ex. 234. Huru många äro delarna, då a) 2 cm., b) 3 cm., c) 4 cm.____ i) 10 cm. delats så, att hvarje del är 1 cm.?

Ex. 235. Huru stor är hvarje del, då a) 2 cm. delats i 2 lika delar, b) 3 cm. delats i 3 lika delar, c) 4 cm. delats i 4 lika delar, ... i) 10 cm. delats i 10 lika delar?

Ex. 233 kan utbytas mot: Huru många gånger går (innehålles) 1 cm. i a) 1 cm.____ j) 10 cm.?

Ex. 234. a)—i) hafva samma innebörd som ex. 233

Riktigheten af hvarje svar pröfvas blott på ett sätt och det rätta sättet enligt § **139**. För somliga barn medför den konkreta sortens närvaro en större säkerhet i och för pröfningen. Svaret på ex. 233 c) är 3. Pröfning: 3 gånger 1 cm. är 3 cm. Oriktig är pröfningen: 1 gång 3 cm. är 3 cm. eller 1 gång 3 är 3. Bestämmande för det rätta pröfningssättet är frågans inledningsord: »Huru många ggr» i ex. 233 och frågesatsen i ex. 234. Därpå skall barnens uppmärksamhet särskildt fästas.

Här betonas, att före likadelningstecknet skrifves alltid det hela, efter det skrifves ibland delarnas storlek, ibland delarnas antal.

För öfrigt se § **139** å sid. 91!

Lika lätt är svarets beräknande, om större sort förekommer, då endast de i mångfaldstabellerna förekommande talen upptagas.

Ex. 236. a) Huru mycket är 1 niodel af 63 tio? Huru många äro delarna, då 63 tioören delas så, att hvarje del är b) 9 tioören, c) 7 tioören?

I alla afdelningarna kan x upptagas. a) $8 : x = 2$; b) $x : 5 = 75$; c) $7 \cdot x = 63$; d) $x \cdot 9 = 477$.

---

b. *Beräkning af hvarje dels storlek, då det hela innehåller 2 delar, uttryckta i olika sorter och delarnas antal är högst tio.*

188. 1. Intet utbyte af större enheter mot mindre enheter behöfligt under räkningen. 2. Utbyte af större enheter mot mindre enheter nödvändigt under räkningen.

Därunder inskärpes, att hvarje del innehåller samma sort som det hela.

Ex. 237. Huru mycket är 1 tredel af a) 6 tioören 9 ettören, b) 6 t. 3 e., c) 63, d) 18 t. 6 (e.)?

Då det hela kan delas jämt i lika delar, kallas hvarje del *jämn del* af det hela.

Svaren uttryckas då först i de uppgifna sorterna, sedan i den minsta gifna sorten, då sådant är lämpligt, d. v. s. då det sker i det dagliga lifvet, men ej i några, för tillfället gjorda, nya fall. Sålunda förvandlas i svaret från hundrakr. och tiokr. till kr., från tioöre till öre, eller eftertänkes det mot tiotalet svarande entalet. Däremot förvandlas icke från m. till dm., från hl. till l., från kvm. till kvdm. o. s. v.

Ex. 238. I 5 lika delar delas a) 2 tioören, b) 2 tio, c) 7 tioören, d) 7 t. e) 8 tio 5. Huru stor blir hvarje del?

I a) och b) förvandlas först och likadelas sedan. I c) och d) likadelas en del af det hela först, förvandlas den andra delen däraf sedan till mindre sort och likadelas denna andra del slutligen. I e) framträda under räkningen 3 delar af det hela: 5 t., 3 t. och 5. Efter utbyte af 3 t. mot trettio tillägges den tredje delen fem, hvarefter summan af de två delarna likadelas. Uträkningen af e) är ganska ansträngande för barnen till följd af de många delar, af hvilka den består. Fördenskull är det icke nog, att barnen besvara en mängd frågor, som gälla enskilda delar af uträkningen, utan de måste beredas tillfälle att uträkna hela exemplet så självständigt som möjligt, innan uträkningen däraf öfverlåtes åt dem såsom tyst öfning.

Uträkning af e):

— 5 1 t. 7 = 17.
35
35
0

1 femdel af 8 t. är (något mer än) 1 t., ty 5 ggr 1 t. är 5 t. — (5 t. uppskrifves under 8 t. för fråndragningens skull.) 5 t. från 8 t. återstår 3 t. — En 5-del af 3 t. är ej något t. Fördenskull utbytes 3 t. mot trettio. — 5 tillägges. — Trettio och fem = trettiofem. — En 5-del af trettiofem är 7. — 5 ggr 7 = trettiofem. — Trettiofem från trettiofem återstår intet (noll).

Till pröfningen af första delens af svaret riktighet höra 3 moment: 1) 5 ggr 1 t. = 5 t. — 2) 5 t. från 8 t. är 3 t. — 3) En femdel af 3 t. är ej något helt t.

Pröfning af hela svaret utföres sedan.

Åtskilliga exempel uträknas så, d. v. s. med fasthållande af de olika sorterna.

189. Sedan omräknas samma exempel, eller uträknas nya exempel utan fasthållande af sorterna. I båda fallen beräknas endast hvarje dels storlek.

Uträkningen af ex. 238 e) utföres då på följande sätt:

En 5-del af 8 är (något mer än) 1. — 5 ggr 1 är 5. — (5 uppskrifves under 8.) 5 från 8 återstår 3. — En 5-del af 3 är intet helt tal. Fördenskull eftertänkes motsvarande tal af mindre sort. 3 är 30 af den sorten. — 5 tillägges. 5 till 30 är 35. — En 5-del af 35 är 7. 7 uppskrifves till höger om 1 (eller en sjua uppskrifves till höger om ettan). 5 ggr 7 är 35. — 35 från 35 återstår noll.

Under uträkningen på det sista sättet kan uttrycket »nedflyttas» inläras.

Här beaktas äfven nödvändigheten af barnens självständiga, sammanhängande räkning under lärarens omedelbara öfverinseende före all tyst uträkning.

Öfvergången till barnens självständiga uträkning af dessa exempel försvåras 1) därigenom, att lär. frågar t. ex.: Huru många t. blir det i hvarje del, då 8 t. delas i 5 lika delar?, emedan svaret på den frågan bör innehålla blott antal (1) men ingen sort t., 2) därigenom, att ofta inga mer omfattande frågor gifvas, sedan ex. är uträknadt, 3) därigenom, att endast de jämförelsevis mer begåfvade barnen få räkna högt i sammanhang. Däremot underlättas barnens självständiga räkning därigenom, att 1) frågor genast gifvas, som leda till sort i svaret, t. ex.: Huru stor blir hvarje del, då 8 t. delas i 5 lika delar? eller: Huru mycket är 1 femdel af 8 t.? — såsom ledfråga kan då med fördel gifvas: Huru många t. innehåller 1 femdel af 8 t.? — 2) barnen få omräkna samma exempel, hvarvid lär. gifver svårare eller mer omfattande frågor vid behof men ej frågar onödigt för att själf få säga något. Då frågas icke: Huru många t. återstå, då 5 t. tagas från 8 t.? eller Huru mycket återstår, då 5 t. drages från 8 t.? I stället frågas: Hvad skola vi göra nu? Sv.: Taga 5 t. från 8 t. (Odugligt är svaret: taga 5 från 8; ty enheternas storlek skall angifvas för det följande utbytets skull.) Gör det! — Eller ock: Emedan barnen funnit, att svaret är ett 2-siffrigt tal, så kan den uppgiften gifvas: Jöns, gå fram och beräkna den första delen af svaret! Då han funnit, att den blir blott 1 t., ehuru med återstoden 3 t., så får en annan beräkna den andra delen af svaret.

190. Ex. 239. a) 705 m. : 3; b) 7 m. 2 cm. : 6; c) 12 tjog 3 st. : 9.

I a) beräknas metertalet 135 så som i ex. 238 c). Därefter tillskrifves sorten m.

Uträkning af b):

7 m. 2 cm. : 6 = 1 m. 17 cm. — 6 » 1 m. = 100 cm. 2 » 102 cm. O. s. v.	En 6-del af 7 m. = 1 m. 6 ggr 1 m. = 6 m. 6 m. från 7 m. återstår 1 m. — 1 m. = 100 cm. (Ingen förvandling till dm.) 2 cm. tilläggas. — En 6-del af 102 cm. beräknas som i a).

Odugligt är att skrifva följande kedja:
1 m. = 100 cm. + 2 cm. = 102 cm.

Uträkning af c):

12 tjog 3 st. : 9 = 1 tjog 7 st.
— 9 »
3 tjog = 60 st.
3 »
63 st.
— 63 »
0

Redogörelsen motsvarar redogörelsen i b).

Odugligt är att skrifva: 3 tjog = 60 st. + 3 st. = 63.

---

c. *Beräkning af delarnas antal.*

191. Ex. 240. Huru många blifva delarna, då 1 tioöre delas så, att hvarje del är a) 2 öre, b) 5 öre? Svar: a) 5; b) 2.

Uträkning a). 1 tioöre : 2 öre = 10 öre : 2 öre = 5.

Här äro de gifna storheterna uttryckta i olika sorter och måste alltså **först uttryckas i samma sort.** Sedan är sortens närvaro obehöflig, och kan sorten öfverstrykas (icke utstrykas) på båda ställena. Dess närvaro skadar icke. Understundom medför dess närvaro fördel. Så i ex. 246.

Ex. 241. Huru många blifva delarna, då 2 tioören delas så, att hvarje del är a) 2 öre, b) 5 öre? Svar: a) 10, b) 4.

I detta ex. äro delarna dubbelt så många som i ex. 240, emedan det hela är dubbelt så stort i ex. 241 som i ex. 240, och delarna äro lika stora i båda ex.

192. På samma sätt visas genom flera exempel, lämpade efter likadelningstabellerna, d. v. s. sådana, att delarnas antal icke öfverstiger 10, att delarnas antal på bestämdt sätt blir beroende af det helas förändring, då delarnas storlek är oförändrad, så att a) delarnas antal blir 3 ggr så stort, då det hela blir 3 ggr så stort o. s. v. t. o. m. b) delarnas antal 10 ggr så stort, då det hela blir 10 ggr så stort.

Ex. 242. Huru stort är delarnas antal, när a) 6 delats så, att hvarje del är 3, b) 60 delats så, att hvarje del är 3, c) 200 delats så, att hvarje del är 2, d) 600 delats så, att hvarje del är 2?

I sådant fall skall 60 blott utläsas: sexti (sextio), aldrig 6 tio, d. v. s. det hela skall ej uttryckas i större sort.

a) Uträknas enkelt enligt tabellen.

Uträkning af b): När 6 delats så, att hvarje del är 3, så är delarnas antal 2. Men här delas 60, som är 10 ggr 6; alltså bör delarnas antal vara 10 ggr så stort eller 10 × 2 eller tjugu.

193. Därefter påvisas öfvergången till den vanliga räkningen. Då användas uttrycken »innehålles i», »går i».

Svaret 20 i b) skolen I nu beräkna så, att I först uträknen, huru många ggr 3 går i 6, och sedan tillsätten en nolla efter tvåan, emedan det står en nolla efter sexan.

Först här behöfva barnen använda uttrycken a) 2 i 2 går 1 gång, b) 3 i 3 går 1 gång, ... i) 10 i 10 går 1 gång, j) 11 i 11 går 1 gång. O. s. v.

Ex. 243. Huru många blifva delarna, då a) 26 delas så, att hvarje del är 2, b) 396 delas så, att hvarje del är 3?

Omedelbart förstås i a), att först 20 och sedan 6 delas, och i b) att först trehundra, sedan nittio och sist 6 delas. Svaret bör blifva ett 2-siffrigt tal i a) och ett 3-siffrigt tal i b).

a) Då tjugu delas, blifva delarna 10 till antalet, och då 6 delas blifva delarna 3 till antalet, alltså är delarnas antal tillhopa tretton eller betecknadt 13.

Ex. 244. Huru många ggr går a) 2 i 26, b) 3 i 396?

Detta ex. har samma innehåll som föregående exempel. Formen i föregående ex. underlättar begripandet af orsaken till uppdelningen. Samma uppdelning göres i detta ex. som i ex. 243.

Sedan utföres räkningen på det s. k. mekaniska sättet. Uträkning af a):

$2\cancel{6}\,\vert\,2$ $2\;\;\vert\,\overline{13}$ 6 -6	Talet 13 finnes äfven genom att räkna så: 2 i 2 går 1 gång, 1 gång 2 är 2; 2 uppskrifves rätt under 2 och fråndrages. 2 från 2 återstår noll. — 6 nedflyttas. 2 i 6 går 3 ggr; en trea uppskrifves till höger om ettan; 3 ggr 2 är 6; 6 från 6 återstår noll.

Då barnen inlärt mångfaldigande med ett 2-siffrigt tal, böra de pröfva riktigheten af talet 13. Pröfning: 13 ggr 2, icke 2 ggr 13, ty 13 angifver delarnas antal. Pröfning utföres enligt ex. 229 c).

194. Enligt ex. 238 angifver 85 : 5 hvarje dels storlek, då 85 är deladt i 5 lika delar. Men det kan ock beteckna delarnas antal, då 85 är deladt så, att hvarje del är 5. I det fallet utföres räkningen endast på följande (»mekaniska») sätt:

$8\cancel{5} : 5 = 17$ 5 35 -35 $\overline{0}$	5 i 8 går 1 gång; 1 gång 5 är 5; 5 från 8 återstår 3; 5 i 3 går ingen gång; 5 (efter 8) nedflyttas; (femman öfverstrykes då); 5 i 35 går 7 ggr; 7 ggr 5 är 35; 35 från 35 återstår 0. Delarnas antal är alltså 17 eller 5 går 17 ggr i 85.

Nu skola barnen öfva in räkningen endast på detta sätt i åtskilliga exempel för att vinna säkerhet i uttryckssättet.

Samma ex., som de förut uträknat och i hvilka ej angifvits i räkneboken, att det uteslutande gällt beräkning af en dels storlek, d. v. s. s. k. sifferexempel, böra nu omräknas med fasthållande af det nya innehållet. Därigenom få barnen klart för sig, att samma beteckningssätt användes, vare sig det är fråga om beräkning af delarnas antal eller det är fråga om beräkning af hvarje dels storlek, och att det »mekaniska» sättet, som sist anförts, är dugligt äfven då, när hvarje dels storlek beräknas.

Ex. 245. a) 5 bröd väga 150 gram. Huru mycket väger 1 dylikt bröd? b) Ett nystan vägde 5 gram. Huru många sådana vägde 130 gram?

a) Grammens antal är 130 : 5. Efter beräkning däraf tillsättes sorten gram, hvarvid svaret blir 26 gram.

b) Nystanens antal är äfven 130 : 5. Uträknadt blir svaret: 26.

Det latinska ordet »qvot», som betyder »huru många», bör till följd af sin betydelse ej användas såsom a-frågans svar 26 gram, emedan detta är en vikt (tyngd). Däremot kan det fortfarande användas såsom namn på talet 26, hvilket är ett tal, och då i både a) och b), ehuru det är obehöfligt.

Pröfning. Efter vunnen kännedom därom, att samma »mekaniska» uträkningssätt kan användas för beräkning af delarnas antal som för beräkning af delarnas storlek, må barnen använda samma sätt att pröfva riktigheten af alla svar, funna genom likadelning. Alltså må riktigheten af svaret 26 i ex. 245 a) och b) pröfvas på samma sätt eller 5 ggr 26 är 130.

195. På praktiska uppgifter, i hvilka delarnas antal beräknas, kunna svaren före uträkningen ej tydligt angifvas så enkelt som på dem, i hvilka delarnas storlek beräknas. Tydligast angifves svaret på ex. 245 b) så före uträkningen: Så många som delarnas antal, då 130 gr. delats så, att hvarje del blir 5 gr. Kortare, ehuru i början mindre klart, är följande: Så många som 130 gr. deladt med 5 gr. eller 130 gr. deladt med 5 gr. eller, emedan *samma* sort förekommer på båda ställena, 130 deladt med 5.

Tyngre är svaret: så många som det antal gånger 5 gr. innehållas i 130 gr. Till följd däraf bör det ej användas.

d. Delning i lika och olika delar eller likadelning med återstod.

196. Denna afdelnings innehåll hör till föreg. afdelningar, men upptages särskildt för sin stora praktiska betydelses skull.

Ex. 246. Huru många femören innehålla **63** öre?

Uträkning:

63 öre: 5 öre = 12.	Här märkes **vikten af att behålla** sorten öre i beteckningen af svaret, om nämligen återstoden skall angifvas. Annars blir svaret lätt 12, rest 3. Men återstoden är icke 3, utan 3 öre.
— 5	
13	
— 10	
3 öre	

Eller ock betecknas femörenas antal 63 öre : 5 öre, därefter utföres räkningen på ett annat ställe af taflan, och slutligen tillskrifves öfverskottet efter det beräknade talet 12. — 63 öre : 5 öre = 12, återstod 3 öre.

Dit höra äfven sådana uppgifter som 125 b).

Ex. 247. 58 kr. : 9 = 6 kr. 44 öre, rest 4 öre.

Uträkningen utföres så som i ex. 239.

Häraf förstås, att 6 kr. så när som 4 öre kunna jämnt delas i 9 lika delar, samt att vid fullständig fördelning af de 58 kr. 4 delar blifva hvar sina 6 kr. 45 öre och 5 delar hvar sina 6 kr. 44 öre.

Ex. 248. 637 : 8 = 79, återstod 5.

En tolkning, motsvarande den i föreg. ex. gifna, kan förekomma i detta ex.

Se äfven ex. 77 å sid. 49!

II. **Beräkning af delarnas antal särskiljas icke från beräkning af delarnas storlek.**

a. *Delning med stomtalen 10, 100 eller 1 000.*

197. Utgångspunkt: mångfaldigande med dessa tal.

Ex. 249. 10 × 64 = 640. Däraf förstås, att 640 : 10 = 64 och att 647 : 10 = 64, återstod 7.

Ex. 250. 100 × 75 = 7 500. **Däraf förstås, att** 7 500 : 100 = 75, samt att 7 505 : 100 = 75, rest 5.

Ex. 251. 1 000 × 6 = 6 000. Däraf förstås, att 6 000 : 1 000 = 6 och att 6 403 : 1 000 = 64, återstod 3.

Slutsatser: 1) *Då det hela delas med a) 10, b) 100, c) 1 000, så är svarets ental lika stort, som a) det helas tiotal, b) det helas hundratal, c) det helas tusental.* 2) *Enklast delas skriftligt med dessa tal så, att man tänker sig a) den sista, b) de två sista, c) de tre sista siffrorna afskilda såsom restsiffror.*

---

b. *Delning med mångfalder af de större stomtalen.*

198. Ex. 252. a) 60 : 20 = 6 t. : 2 t. = 6 : 2 = 3. *Pröfning:* 3 × 20 = 60.

Här tänkes så, som om det vore fråga om beräkning af delarnas antal, i det att båda talen först utbytas mot tal, som innehålla samma större enhet (= uttryckas i samma större sort), hvarefter sorten kan försvinna. Då svarets riktighet pröfvas, måste svaret ställas i samband med de gifna talen. I annat fall märkes icke, om något fel insmugit sig vid förvandlingen.

Eller ock bildar »3 × 20 = 60» utgångspunkt. Däraf märkes äfven, att 60 : 20 = 3. Sedan uttryckas de gifna talen i t. O. s. v.

b) 800 : 40 = 80 t. : 4 t. = 80 : 4 = 20.
c) 600 : 300 = 6 h. : 3 h. = 6 : 3 = 2.
d) 9 000 : 3 000 = 9 tus. : 3 tus. = 9 : 3 = 3.

Slutsats: *Lika många nollor kunna öfverstrykas (frånses) i de gifna talen före räkningens början.*

I detta fall fordras särskild uppmärksamhet, när öfverskott uppstår.

Ex. 253. 760 : 60 = 12, återstod 40.

Uträkning:	$7\cancel{6}0$	60	Återstoden 4 är af samma sorts tal som 12, 14 och 76. Alltså är återstoden 4 tio. eller 40.
	— 6	12	
	16		
	— 12		
	4		

---

c. *Delning med tal, betecknade med 2 eller flera antalbetecknande siffror.*

199. a. Svaret ensiffrigt.

I. Utgångspunkt: åskådning.

Ex. 254. 3 stänger 6 tärningar delas så, att hvarje del är 1 stång 2 tärningar. Huru många blifva delarna?

Svar: 3. Pröfning: 3 delar med 2 tärningar i hvarje del hopsamlas. 3 delar med 1 stång i hvarje del hopsamlas sedan och läggas i samma hög som de förra 3 delarna.

II. Utgångspunkt: mångfaldigande.

Ex. 255. a) 3 × 12 = 36. b) 36 : 12 = 3.

Af huru många lika delar består 36 här? (Svar: 3.) Huru stor är hvarje del? (Svar: 12.) Om 36 delas så, att hvarje del blir 12, huru många blifva delarna? Beteckna det! 36 : 12. Uträkna det! Då tillskrifves = 3.

Därefter betonas, att både 36 och 12 skola uppdelas: 36 i 3 t. och 6 och 11 i 1 t. och 2, att man sedan eftertänker, huru många ggr delarna af talet 12 innehållas (gå) i motsvarande delar af talet 36. — 1 t. i 3 t. går 3 ggr. 2 i 6 går äfven 3 ggr. Alltså går 12 3 ggr i 36.

Ex. 256. a) Utgångspunkt: 4 × 23. b) Följd. 92 : 23 = 4. Under uträkningen af 4 × 23 skall 4 × 3 eller tolf utbytas mot 1 t. och 2. Likaså blir nödvändigt att utbyta en större enhet mot mindre enheter, när 92 : 23 skall beräknas. Vid utredningen af tankegången uppdelas så som i ex. 255: — Tiotalet 2 går mer än 4 ggr men mindre än 5 ggr i tiotalet 9. Entalet 3 går ingen gång i entalet 2, men eftersom den föreg. delen 2 t. är mycket större än 3, så går hela talet 23 4 ggr i 92.

Ex. 257. 112 : 16 = 7.

Här sammanfattas de 2 första delarna af det hela (112) till *en* del, 11 t. 16 kan nämligen ej gå 10 ggr i 112, ty 10 × 16 = 160. 112 är mycket mindre än 160, därför går 16 kanske 7 ggr i 112. Försök!

Hithörande exempel med flersiffriga tal kunna vara lättare än ex. 256 och 257. Ex. 2 648 : 1 324 = 2.

200. b. Svaret 2-siffrigt.

Utgångspunkt: mångfaldigande.

Ex. 258. 24 × 38 = 912.

Slutsatser: a) 912 : 24 = 38. b) 912 : 38 = 24.

Innebörden i a) leder till följande uträkning: En 24-del af 9 h. är intet helt h. Därför utbytes 9 h. mot nittio t. Tiotalet 1 tilläggcs. 1 t. till 90 t. = 91 t. En 24-del af 91 t. = 3 t.; 24 × 3 t. = 72 t. O. s. v. Eller ock medtagas de båda första delarna af talet 912 från början. Uträkning då: En 24-del af 91 t. är 3 t. O. s. v.

Innebörden i b) leder till följande tankegång: 10 × 38 = 380. Därför innehålles 38 mer än tio ggr i 912. Det beräknade talet blir alltså 2-siffrigt. Fördenskull uppdelas 912 i 2 delar så, att tvåan hör till andra delen. Och sedan räknas »mekaniskt»: 38 i 91 går 2 ggr. O. s. v.

Om man ej fäster sig vid den olika innebörden i a) och b), så beaktas, att det redan färdiga svaret 38 i a) är 2-siffrigt. Här gäller då blott att visa barnen det enklaste sättet för beräkning af talet 38. Fördenskull uppdelas 912 i 2 delar så, att den första delen betecknas med de två första siffrorna, emedan 24 är 2-siffrigt. 24 i 91 går 3 ggr, 3 ggr 24 = 72; 72 från 91 återstår 19; 2 nedflyttas. 24 i 192 går 8 ggr, ty $8 \times 24 = 192$. Talet 38 är riktigt, ty vi visste det från början. — Detta sätt är fullt tillräckligt.

Ex. 259. 1 125 : 15.

Emedan 15 ej går någon gång i 11, men några ggr i 112, så skola alla de 3 första siffrorna medtagas för erhållande af svarets första del. Alltså blir det beräknade talet ett 2-siffrigt tal.

Slutsats: Vid likadelning kan på förhand bestämmas, huru mångsiffrigt det beräknade talet skall blifva, sedan det blifvit klart, huru många af de i det hela befintliga siffrorna skola medtagas för den första svarsiffrans erhållande.

III. **Mångfaldstabellernas fullständigare tillämpning.**

201. Emedan alla hela tal äro mångfald af 1 eller kunna uppdelas i delar, som hvar för sig äro så stora som 1, samt alla konkreta storheter, som äro mångfald af motsvarande enhet, äfven kunna uppdelas i delar, som äro så stora som motsvarande enhet, så är det lätt att lösa praktiska räkneuppgifter, i hvilka uppgifvas 3 storheter i sådant sammanhang med hvarandra, att en 4:e storhets storlek kan beräknas på grund af det sammanhanget. (S. k. reguladetriuppgifter.) De enklaste dithörande hänföras till vanligt mångfaldigande och likadelning. — Nu införes uttrycket: **»Huru stor del af»**.

Ex. 260. Huru mycket kosta 3 kg. fläsk, då 1 kg. kostar 90 öre? Svar: 3×90 öre.

Rätteligen ifrågakommer ett dubbelt förhållande i ex. 260: 1) mellan 3 kg. och 1 kg. och 2) mellan x öre och 90 öre. Och man tänker så: Då fläsket väger 3 ggr så mycket, så skall det kosta 3 ggr så mycket. Eller då vikten är 3 ggr så stor, skall värdet vara 3 ggr så stort. Att 3 kg. är 3 ggr 1 kg., är självklart.

Ex. 261. 7 lika dyra bläckflaskor kostade 1 kr. 40 öre. Huru mycket kostade 1 sådan flaska?

Svar: En 7-del af 1 kr. 40 öre.

Åskådning förmedelst kulram. 2 kulor framskjutas på 1 ten och 10 kulor på en annan ten. 2 kulor kosta 7 öre. Huru mycket kosta 10 kulor? — Först delas de 10 kulorna så, att hvarje del blir 2 kulor. Delarnas antal blir 5. Hvarje del kostar 7 öre. Alltså kostar alltsammans 5 · 7 öre.

På taflan skrifves: 1) 10 kulor : 2 kulor = 5. 2) 5 · 7 öre = 35 öre.

Utgångspunkten kan äfven skrifvas så:

2 kulor 7 öre.	Det utläses så:	2 kulor kosta 7 öre.
10 » *x* öre.		10 kulor kosta *x* öre.

I alla dylika ex. eftertänkes först delarnas antal.

Ex. 262. Priset för a) 2 hg. socker är 14 öre, b) 5 hg. socker är 36 öre. Huru mycket kostar 1 kg?

Sv.: a) 5 × 14 öre. b) 2 × 36 öre.

I a) tänkes så: 1 kg. är mer än 2 hg. Det innehåller 5 delar med 2 hg. i hvarje del. Priset för första delen 14 öre, för andra delen 14 öre o. s. v. Alltså skall priset för 1 kg. socker innehålla 5 delar med 14 öre i hvarje del.

Annars användes uttrycket (»går i») »innehålles i». Redogörelse då: 2 hg. innehålles 5 ggr i 1 kg. Därför blir priset för 1 kg. 5 ggr 14 öre.

Ex. 263. 1 kg. kaffe kostar 1 kr. 90 öre. Hvad kostar a) 5 hg., b) 2 hg. däraf? — Sv.: a) En 2-del af 1 kr. 90 öre, b) en 5-del af 1 kr. 90 öre.

I detta exempel tänkes så: 5 hg. är en del af 1 kg. Därefter beräknas, huru många sådana delar 1 kg. innehåller. Delarnas antal är 2. Därför skall 1 kr. 90 öre också innehålla 2 sådana delar och hvarje del vara 1 tvådel af 1 kr. 90 öre.

Uträkning af a). 1) 1 kg. : 5 hg. = 2. 2) 1 kr. 90 öre : 2.

Se för öfrigt D-räkneboken sid. 34, ex. 348—354, och sid. 46—48, ex. 475—497, sid. 83—85, sid. 131 och 184!

Ex. 264. a) 25 cm. tyg fås för 50 öre. Huru mycket tyg fås för 1 kr.? b) 10 cm. tyg fås för 25 öre. Huru mycket tyg fås för 1 kr.? c) 1 tjog ägg kostar 1 kr. 15 öre. Huru mycket kosta 4 ägg (8 ägg)? d) 1 tjog ägg kostar 90 öre. Huru mycket kosta 5 ägg?

Svar: a) 2 · 25 cm., b) 4 · 10 cm., c) 1 kr. 15 öre : 5 = 23 öre (2 · 23 öre), d) 90 öre : 2 : 2 = 23 öre.

B. Hela tal: Större talområde.

Inledning.

Uppfattning, beteckning och utsägande af större tal än 9 999.

202. Ex. 265. Lägg 1 till niotusen-niohundra-nittio-nio!

1 till 999 är tusen; niotusen och tusen är tio tusen. Tio tusen sammanfattas till 1 tiotusen.

Ex. 266. Beteckna a) 1 tiotusen, b) 5 tiotusen, c) det tal, som innehåller 9 tiotusen, 4 hundra och 5 tio, d) 876 hundra, e) det tal, som innehåller 65 tusen och 13, f) sjuttio tusen fjorton!

Jämför med §§ **11, 13, 16, 31—37**!

Redogörelse för a) Tiotusen är den 5:e talsorten i ordningen, alltså skall talet 1 tiotusen betecknas med en etta i 5:e rummet från höger. De 4 rummen till höger därom fyllas med nollor. **Alltså betecknas 1 tiotusen så:** 10 000.

Ex. 267. Utsäg a) 10 000, b) 10 040, c) 40 100, d) 75 032, e) 82 365!

a) 10 000 kan blott utsägas utan uppdelning, ty blott *en* antalbetecknande siffra.

b) 10 040 kan uppfattas såsom innehållande 2 delar: tiotusen och fyrtio eller 1 tiotusen och 4 tio eller 10 tusen och 4 tio eller 100 hundra och 4 tio eller 1 tiotusen och 40, o. s. v.; 2) utan uppdelning: tiotusenfyrtio.

Jämför med §§ **160** och **161**!

I frågor med sammandragen form, hvarå flera svar skola gifvas, behöfva svaren ofta här sägas i full sats.

Ex. 268. Af hvilken talsort betecknar hvarje siffra i talet 49 236 antal?

Här kan svaras: Fyran tiotusen, nian tusen o. s. v.

Ex. 269. Hvilket antal af mindre sorter angifver hvarje siffra i talet 49 236?

Svar: Fyran betecknar fyrtio tusen eller fyrahundra hundra eller fyratusen tio eller fyrtiotusen.

203. På samma sätt behandlas flersiffrigare tal, hvarvid betonas de nya talsorternas ordningsföljd och i sammanhang därmed det rum, hvari sådana enheter skola skrifvas.

Här inskärpes äfven mångsiffriga tals fördelning i 3-siffriga delar från höger utan något skiljetecken. 4 160 083.

Heltalssystemet.

204. Sammanhanget mellan enheterna uttryckes på följande sätt:
A. 1 tio = 10 (e.) — 1 h. = 10 t. = 100 (e.).
1 tus. = 10 h. = 100 t. = 1 000 (e.).
1 tiotusen = 10 tus. = 100 h. = 1 000 t. = 10 000 (e.).
1 hundratusen = 10 tiotus. = 100 tus. = 1 000 h. = 10 000 t. = 100 000 (e.).
1 million = 10 hundratusen = 100 tiotus. = 1 000 tus. = 10 000 h. = 100 000 t. = 1 000 000 (e.). — O. s. v.
B. 1 är a) 1 tiodel af 10, b) 1 hundradel af 100, c) 1 tusendel af 1 000, d) 1 tiotusendel af 10 000, e) 1 hundratusendel af 100 000, f) 1 milliondel af 1 000 000.
10 är a) 1 tiodel af 100, b) 1 hundradel af 1 000, c) 1 tusendel af 10 000, d) 1 tiotusendel af 100 000, e) 1 hundratusendel af 1 000 000.
100 är a) 1 tiodel af 1 000, b) 1 hundradel af 10 000, c) 1 tusendel af 100 000, d) 1 tiotusendel af 1 000 000.
1 000 är a) 1 tiodel af 10 000, b) 1 hundradel af 100 000, c) 1 tusendel af 1 000 000.
10 000 är a) 1 tiodel af 100 000, b) 1 hundradel af 1 000 000.
100 000 är 1 tiodel af 1 000 000.

Räknesätten.

205. Först genomgås enkla exempel för tals sammanläggning, sedan för tals frändragning, så blandade uppgifter, hvarvid äfven sådana uppgifter upptagas som ex. 59—61 a), 278, 279, sedan mångfaldsuppgifter, hvarvid lösning af mera sammansatta sådana särskildt beaktas (såsom ex. 270), samt likadelningsuppgifter, äfven somliga af dem mera sammansatta än förut. Om enkla geometriska räkneuppgifter icke upptagits i föregående kurs, så skola dylika upptagas i denna kurs. Vidare upptagas sådana ränteuppgifter, som lösas med blott ett räknesätt.

Ex. 270. Lund förtjänade 18 öre i timmen. Huru stor var hans förtjänst under 1 vecka, då han arbetade 10 timmar dagligen?

Tankegången: Först beräknas den dagliga förtjänsten, sedan eftertänkes arbetsdagarnas antal i veckan, och slutligen besvaras frågan.

(Svaret kan omedelbart betecknas så: 6 × 10 × 18 öre.)

Ex. 271. Se ex. 91!

Ex. 272. Huru mycket kostar 1 knapp, då 324 dussin dylika kosta 233 kr. 28 öre?

Tankegång: I. Först beräknas värdet af 1 dussin knappar och sedan värdet af 1 knapp.

Eller II. Först beräknas alla knapparnas antal och sedan värdet af 1 knapp.

Uträkning på båda sätten är det bästa sättet att pröfva räkningens riktighet.

Blandade uppgifter.

Ränteuppgifter.

Ränta är afgift för lånade pengar.

206. Utgångspunkt är vanligen räntan för 100 kr. Men lika viktigt är att betona räntans storlek för 1 kr. Procentbegreppet ligger till grund för båda. »Procent» betyder »för hundra», alltså »5 procent» = »fem för hundra» eller tillämpadt *»5 kr. för hundra kr.»*, *»5 öre för 100 öre»* eller 5 flickor för 100 flickor, 5 pennor för hundra pennor, 5 kg. för 100 kg. O. s. v. I stället för att säga »5 öre för hundra öre» säges *»5 öre för 1 kr.»*

Olikheten mellan **»räntans storlek»** och **»räntans höjd»** beaktas. Räntans storlek uttryckes i penningsort. Ex. Räntan är 2 kr., 3 kr. 50 öre. Räntans höjd uttryckes i procent. Ex. Huru hög är räntan? Sv. 5 procent, 4 procent, 3 procent. O. s. v. Räntans höjd kallas *räntefot* eller *räntesats*. Ex. Räntefoten är 5 procent. *Räntans höjd* eller räntefoten *angifver förhållandet mellan räntan och kapitalet.* Då procenttalet är stort, är räntan hög; då procenttalet är litet, är räntan låg. Räntan på en stor penningsumma blir stor äfven i senare fallet.

Rätt är att säga: Räntan beräknas efter 5 procent, ty uttrycket 5 procent är den allmänna utgångspunkten i detta fall för räntans beräkning. Olämpligt är att säga: Räntan är 5 procent; ty räntan är en penningsumma, men 5 % är något abstrakt, ett tal, hvars betydelse ej kan framställas fullt klart i heltalsläran.

Då ordet ränta först förklaras, kunna de närvarande möjligen tänkas lånande, så att man frågar: Huru stor ränta skall du (jag) betala efter 5 %, 4 %, 6 %? Huru mycket skulle jag få i ränta för 1 kr.?

Men sedan användes uteslutande det bestämda, allmänna korta uttrycket: Huru stor är räntan för 1 kr. efter 5 %, 4 %, 6 %? Huru stor är räntan för 18 kr.? O. s. v.

Bättre är uttrycket: »Huru stor ränta gifves» än uttrycket: »Huru stor ränta fås?», emedan skyldigheten att betala räntan bör betonas, eftersom folk har så stor benägenhet att låna. Betonas bör äfven, att räntan är en berättigad ersättning, som skall betalas jämte den lånade summan, så att barnen ej kunna tänka, att räntan gifves i st. f. den lånade summan. Den riktiga uppfattningen befästes kanske genom att använda ordet »på» i st. f. ordet »för». Huru stor är räntan på 1 kr.?

Då bestämda tider införas i uppgifterna, är utgångspunkten 1 år eller 1 månad. Ex. Räntan beräknas efter 5 procent under 1 år, eller 5 procent under 1 månad. Eller: Årsräntan beräknas efter 5 procent, månadsräntan beräknas efter 5 %.

Förr var allmänhetens penningeomsättning ringa. Ränta betalades i allmänhet blott då, när lånade pengar användes längre tid. Ett år var då lämplig utgångspunkt. Nu måste ränta ofta erläggas för lån på kort tid. I det fallet blir 1 månad lämplig utgångspunkt.

207. Ex. 273. Räntan för 1 kr. är 4 öre. Huru stor är räntan för 5 kr.?

Svar: 5 × 4 öre eller 20 öre.

Talet 5 angifver den utlånade summans krontal och delarnas antal i hela räntan.

Ex. 274. Räntan för 100 kr. är 6 kr. Huru stor är räntan för 500 kr.?

Svar: 5 × 6 kr.

Ex. 275. Räntan beräknas efter 5 procent. Huru stor är räntan för a) 7 kr., b) 800 kr., c) 807 kr.?

Sv.: a) 7 × 5 öre, b) 8 × 5 kr., c) 8 · 5 kr. + 7 · 5 öre.

I c) uppdelas alltså 807 kr. i 800 kr. och 7 kr. Om ingen sådan uppdelning sker, så är svaret: 807 × 5 öre.

Ex. 276. Huru mycket betalas i st. f. 807 kr., då ränta beräknas efter 5 %? Svar 1) 807 kr. och ränta. 2) 807 kr. + 8 × 5 kr. + 7 · 5 öre eller, om ex. 275 c) uträknats förut, 807 kr. och 40 kr. 35 öre.

Det första svaret angifver riktig tankegång och är tillräckligt, om tiden ej medgifver muntlig uträkning.

208. Sättet att beräkna kapitals storlek är naturligtvis omvändt mot sättet att beräkna räntans storlek.

Ex. 277. Räntan för 1 kr. är 4 öre. Huru många kr. lånas, för att räntan skall blifva 20 öre?

Jämför med ex. 273!

Eller ock förmedlas uppfattningen genom åskådning. De 20 örena delas så, att hvarje del blir 4 öre. Delarnas antal räknas. Det är 5. Alltså är kronornas antal i den lånade summan 5 eller alltså är den lånade penningsummans krontal 5.

Slutsats: Hela räntan delas så, att hvarje del blir räntan för 1 kr.

Ex. 278. a) Huru stor är räntan under 1 år, då månadsräntan är 2 öre? b) Huru stor är månadsräntan, då den är 60 öre på 1 år?

---

209. Enligt Normalplanen skall här ordentligt behandlas blott sådana sammansatta heltalsuppgifter, för hvilkas lösning fordras både addition och subtraktion. Dessutom inläras allmänna bråks betydelse och beteckning med tillämpning på division med rest.

Ex. 279. 20 340 — 3 672 + 48 — 589 — 5 438 + 7 572 — 2 164.

Ex. 280. Ek hade 5 kr. 60 öre på måndagen, köpte fläsk för 87 öre och bröd för 62 öre, förtjänade sedan 1 kr. 55 öre och 2 kr. 75 öre, utgaf därefter för mat 2 kr. 64 öre och för kläder 1 kr. 33 öre. Huru stor var hans behållning?

I ex. 280 äro flera sätt tänkbara.

1. Först bestämmes behållningen efter fläskköpet, sedan behållningen efter brödköpet, så hans kassas storlek efter första förtjänsten, därefter dess storlek efter den andra inkomsten, därpå behållningen efter matköpet och slutligen behållningen efter klädesköpet.

2. Först bestämmas utgifterna för fläsket och brödet tillhopa, sedan behållningen af den ursprungliga kassan, så summan af de båda inkomstposterna, därefter den då befintliga kassans storlek, därpå utgifterna för mat och kläder tillhopa och (slutligen svaret på frågan eller) sist den slutliga behållningen.

3. Först bestämmes summan af alla inkomsterna (måndagens uppgifna kassa inberäknad), sedan summan af alla utgifterna och därpå frågans svar.

Det sista sättet är enklast, men då medtagas uppgifterna ej i ordning.

210. Rörande bråks betydelse och beteckning samt tillämpning däraf på division med rest hänvisas till §§ 76 och 77.

Normalplanens begränsning är god, emedan läraren på grund däraf kan undvika ett oroligt jäktande för att hinna lång kurs med de medelmåttigt begåfvade barnen. Men allt efter omständigheterna medhinna somliga barn äfven uppgifter af följande sammansatta art.

211. Ex. 281. 5 kg. kött kosta 3 kr. 40 öre. Hvad kosta 8 kg.?

Först beräknas värdet af 1 kg.

Ex. 282. Hvad betalar Kristoffer för 4 karaffer à 1 kr. 35 öre och 1 dussin glas à 20 öre?

Ex. 283. Sandberg köpte 3 754 m. kläde à 16 kr. och sålde det för 18 kr. metern. Huru stor vinst fick han på allt?

Här äro 2 sätt möjliga: 1) Då beräknas först inköpssumman för allt, sedan försäljningssumman och slutligen vinsten. 2) Då beräknas först vinsten för 1 m., sedan vinsten för allt. Det sista sättet bör föredragas, ty enklast.

Ex. 284. Af 54 673 kr. erhåller Nils först 28 kr. Sedan delas återstoden lika mellan Nils, Johan och Lovisa. Huru mycket får hvar och en af dem?

212. Ex. 285. Hvad är a) 1 sextondel af 12 848, b) 3 sextondelar af 27 464 kr., c) 15 sextondelar af 352.

Ledning för b): 3 sextondelar af 27 464 kr. är en penningsumma, som innehåller 3 delar med 1 sextondel af 27 464 kr. i hvarje del.

Ex. 286. 18 öre skola delas i 2 delar så, att den ena är dubbelt så mycket som den andra. Huru stora äro delarna?

Saksammanhanget kräfver betoning däraf, att 18 öre skola delas i de 2 uppgifna delarna, men ej i 3 delar. Därför användas i redogörelsen blott uttrycken den större delen och den mindre delen. Om delarna vore flera, så skulle man i stället säga den första, andra, tredje delen o. s. v. alldeles så som i det då föreliggande exemplet.

Uttrycket: »den ena delen är dubbelt så mycket (stor) som den andra» innebär, att den större delen innehåller 2 sådana delar som den mindre delen.

Redogörelse: Den större delen innehåller 2 sådana delar som den mindre. När då den andra delen tillägges, så innehåller allt sammans 3 sådana delar som den mindre. Alltså är den mindre delen 1 tredel af allt eller 1 tredel af 18 öre.

Att 12 öre innehåller 2 delar med 6 öre i hvarje del, och att 18 innehåller 3 delar med 6 öre i hvarje del, veta barnen förut, äfven om dessa penningsummor icke delas.

213. Ex. 287. För 1 par stönar betalades 8 kr., för ett annat par stöflar 10 kr. och för ett tredje par 14 kr. Huru många kr. kostade a) alla 3 paren tillhopa, b) hvarje par, om de varit lika dyra (= hvarje par i medeltal).

Om frågan a) lydt: Huru mycket kostade alla 3 paren tillhopa, så skulle b-frågan lydt: Huru mycket skulle hvarje par kostat, om de varit lika dyra? eller »Huru stort var medelpriset för hvarje par?» Då duger ej att fråga: »Huru mycket kostade hvarje par i medeltal?» emedan *priset* för hvarje par *är icke ett tal.*

Ex. 288. 6 hl. råg à 9 kr. sammanblandas med 2 hl. hvete à 12 kr. Huru mycket kostar 1 hl. af blandningen?

En för folkskolan mindre viktig del af heltalsläran äro uppdelning i faktorer (äfven primfaktorer) samt nu, sedan de mångsiffriga allmänna bråken förlorat sin betydelse, beräkning af minsta gemensamma mångfalden (minsta gemensamma dividenden). Någon beräkning af den minsta gemensamma mångfalden är erforderlig, ehuru den bör gälla blott små tal, då den är lätt att beräkna.

Hela tals uppdelning i heltalsfaktorer.

A. Enkla sätt att undersöka hela tals jämna delbarhet med några tal.

214. Af talsystemets beskaffenhet beror, att a) alla tio äro jämt delbara med 10, b) alla hundra äro jämt delbara med 100, c) alla tusen äro jämt delbara med 1 000.

Af de hela talens beteckning beror, att a) *de tal, hvilkas sista siffra är 0, äro jämt delbara med 10,* b) *de tal, hvilkas 2 sista siffror äro nollor, äro jämt delbara med 100,* c) *de tal, hvilkas 3 sista siffror äro nollor, äro jämt delbara med 1 000.*

Ex. 289. **Hvilka af följande tal äro jämt delbara med a) 10, b) 100, c) 1 000: 950, 364, 500, 730, 4 000, 569, 5 670, 63 000, 8 700,** 59 000, 3 600, 240?

215. Alla jämna tal kunna tänkas bestå af flera eller färre tal 2. Därför *äro alla jämna tal jämt delbara med 2.* Deras sista siffra kan vara 0, 2, 4, 6 eller 8.

216. Alla mångfalder af 5 sluta på 5 eller 0. Därför *äro alla de tal, som sluta på 5 eller 0, jämt delbara med 5.*

Ex. 290. Hvilka af följande tal äro jämt delbara med a) 2, b) 5: 15, 16, 33, 72, 70. 54, 155, 810?

217. $4 \times 25 = 100$.

Alla hundra äro således jämt delbara med 4 och 25. Däraf följer. att *de tal äro jämt delbara med a) 4, b) 25, hvilkas 2 sista siffror äro nollor eller beteckna ett tal, som är jämt delbart med a) 4, b) 25.*

Ex. 291. Hvilka af följande tal äro jämt delbara med a) 4, b) 25: 600, 60, 6, 256, 325, 470, 4 700, 150, 168, 575, 572, 3 875?

c) Inlär alla de tal till och med 100, som äro jämt delbara med 4! — **(Eftertänk, huru många gånger 4 innehålles i dem!)**

218. $8 \cdot 125 = 1\,000$.

Alla **tusen äro således jämt delbara med 8 och 125.** Däraf följer. **att** *alla de tal äro jämt delbara med a) 8, b) 125, hvilkas 3 sista siffror äro nollor eller beteckna ett tal, som är jämt delbart med a) 8, b) 125.*

Ex. 292. Hvilka af följande tal äro jämt delbara med a) 8, b) 125: 3 000, 500, 4 256, 932, 8 625, 16 372, 3 875, 3 184?

Ex. 293. **Huru stort blir öfverskottet, då a) alla jämna** hundra delas med 8, b) alla udda hundra delas med 8?

Ex. 294. Hvilka tal till och med 1 000 äro jämt delbara med 125?

219. $3 \times 3 = 9$; $3 \cdot 33 = 99$; $3 \cdot 333 = 999$; $3 \times 3\,333 = 9\,999$.

Talen 9, 99, 999, 9 999 äro **således** jämt delbara med 3. **Då** 1 (2, 3 ...) tio eller 1 (2, 3 ...) hundra eller 1 (2, 3 ...) tusen eller 1 (2, 3 ...) **tiotusen delas med** 3, **uppstår** således ett **öfverskott af 1** (2, 3 ...) eller lika många enheter, som antalet af det delade talets tio, hundra, tusen eller tiotusen o. s. v. Då detta öfverskott är **jämt delbart med 3, är hela talet** jämt **delbart med** 3. **Då ett tals delbarhet** med 3 undersökes, och det har flera antalbetecknande siffror, sammanläggas således *antalen* af de olika talsorterna. Om den summan är jämt **delbar med 3, så är hela talet** jämt **delbart med** 3.

Talet 2 346 innehåller 2 tus. 3 h. 4 t. 6. Summan af antalen 2, 3, 4 och 6 är 15. Då antalen af de olika talsorterna sammanläggas. **uppstår talets tvärsumma.** Tvärsumman i **2 346 är således 15. Talet** 2 346 är jämt delbart med 3, tvärsumman är också jämt delbar med 3.

Slutsats: *Det tal är jämt delbart med 3, hvars tvärsumma är jämt delbar med 3.*

Ex. 295. a) Huru stor är tvärsumman i talen 714, 329, 931. 894, 2 589. 9 888? b) Hvilka af dessa tal äro jämt delbara med 3?

220. $9 \cdot 1 = 9$; $9 \cdot 11 = 99$; $9 \cdot 111 = 999$; $9 \cdot 1\,111 = 9\,999$.

Talen 9, 99, 999 och 9 999 äro således jämt delbara med 9. **Vid undersökning rörande tals jämna delbarhet med 9 uträknas således** också deras **tvärsumma.** *Det tal är jämt delbart med 9, hvars tvärsumma är jämt delbar med 9.*

Ex. 296. **Hvilka af följande tal äro jämt delbara med** 9: 657. 405. 8 143, 9 738, 78 696?

221. $11 \times 10 = 110$; $11 \times 45 = 495$; $11 \times 59 = 649$; $11 \times 357 = 3\,927$.

I talet 110 är summan af första och tredje antalen (1 och 0) = det andra (1). Likaså i talet 495. I talet 649 är summan af första och tredje antalen (6 och 9) 11 mer än det andra antalet (4). I talet

3 927 är summan af första och tredje antalen (3 och 2) 11 mindre än summan af andra och fjärde antalen (9 och 7).

Slutsats: *Vid undersökning om ett tals jämna delbarhet med 11 beräknas summan af antalen i hvartannat rum, således summan af antalen med udda ordningsnummer och summan af antalen med jämt ordningsnummer. Om de båda summorna äro lika eller om skillnaden mellan dem är 11 (en mångfald af 11), så är hela talet jämt delbart med 11.*

Ex. 297. Hvilka af följande tal äro jämt delbara med 11: 111, 121, 726, 1 541, 4 444, 78 356, 53 207?

222. 100 är jämnt delbart med 2 och 5 så, att både 2 och 5 ingå såsom faktorer däri. Men 2 × 5 = 10. Talet 100 är ock jämnt delbart med 10.

Då §§ **215—218** här ofvan jämföras med **214,** inses, att ett tal är jämt delbart med produkten af 2 andra tal, då *båda dessa* på en gång ingå såsom faktorer däri.

Ex. 298. Med hvilket tal äro de tal jämt delbara, hvari finnas a) båda faktorerna 2 och 3, b) båda faktorerna 3 och 4, c) båda faktorerna 3 och 5, d) båda faktorerna 2 och 9, e) båda faktorerna 4 och 9, f) båda faktorerna 8 och 9?

Ex. 299. Hvilka af efterföljande tal äro jämt delbara med a) 6, b) 12, c) 15, d) 18, e) 36, f) 72, g) 20, h) 45: 45, 64, 72, 360, 2 430, 3 780, 294, 4 272, 5 285, 5 236?

223. B. Tillämpning af de i §§ **214—222** härledda reglerna.

Ex. 300. 114 = 2 · 57 = 3 · 38 = 6 · 19.

De tal, som kunna uppdelas i *blott* 2 faktorer, af hvilka den ena är talet själft och den andra är talet 1, kallas *primtal.* Då primtalen äro faktorer i större tal, kallas de *primfaktorer.*

Hela tals uppdelning i primfaktorer.

224. Ex. 301. Uppdela 132 i primfaktorer!

Utredning: I. Först uppdelas 132 i **2 × 66**. Därefter uppdelas 66 i **2 × 33**, så 33 i **3 × 11**. Alltså är 132 = 2 × 2 × 3 × 11.

II. Först uppdelas 132 i **4 × 33**, sedan uppdelas 4 i **2 × 2** och 33 i **3 × 11**. Alltså är 132 = 2 × 2 × 3 × 11.

III. Först uppdelas 132 i **6 × 22**, sedan 6 i **2 × 3** samt 22 i **2 × 11**. Efter ordnande af faktorerna blir 132 = 2 × 2 × 3 × 11.

I I. började delningen med det minsta primtalet (utom 1). Där framkomma faktorerna i ordning efter sin storlek. — I II började delningen med ett större tal, som ej är primtal. Båda de då uppkomna faktorerna delades sedan i faktorer. — Båda sätten äro användbara.

För att underlätta räkningen kan uppdelningen ske sålunda:

I.	II.	III.
132	132	132
2 × 66	4 × 33	6 × 22
2 × 33	2 × 2 × 3 × 11	2 × 3 × 2 × 11
3 × 11		2 × 2 × 3 × 11

225. Primtalen inom området 1—999 framställas i följ. tabell *)

1	41	101	167	239	313	397	467	569	643	733	823	911
2	43	103	173	241	317	401	479	571	647	739	827	919
3	47	107	179	251	331	409	487	577	653	743	829	929
5	53	109	181	257	337	419	491	587	659	751	839	937
7	59	113	191	263	347	421	499	593	661	757	853	941
11	61	127	193	269	349	431	503	599	673	761	857	947
13	67	131	197	271	353	433	509	601	677	769	859	953
17	71	137	199	277	359	439	521	607	683	773	863	967
19	73	139	211	281	367	443	523	613	691	787	877	971
23	79	149	223	283	373	449	541	617	701	797	881	977
29	83	151	227	293	379	457	547	619	709	809	883	983
31	89	157	229	307	383	461	557	631	719	811	887	991
37	97	163	233	311	389	463	563	641	727	821	907	997

226. Tabell öfver sådana sammansatta tal under 1 000, hvilkas primfaktorer beräknas med större svårighet. *)

49 = 7 · 7	377 = 13 · 29	623 = 7 · 89	833 = 7 · 7 · 17
91 = 7 · 13	391 = 17 · 23	629 = 17 · 37	841 = 29 · 29
119 = 7 · 17	403 = 13 · 31	637 = 7 · 7 · 13	851 = 23 · 37
133 = 7 · 19	413 = 7 · 59	667 = 23 · 29	871 = 13 · 67
161 = 7 · 23	427 = 7 · 61	679 = 7 · 97	889 = 7 · 127
169 = 13 · 13	437 = 19 · 23	689 = 13 · 53	893 = 19 · 47
203 = 7 · 29	469 = 7 · 67	697 = 17 · 41	899 = 29 · 31
217 = 7 · 31	481 = 13 · 37	703 = 19 · 37	901 = 17 · 53
221 = 13 · 17	493 = 17 · 29	707 = 7 · 101	917 = 7 · 131
247 = 13 · 19	497 = 7 · 71	713 = 23 · 31	923 = 13 · 71
259 = 7 · 37	511 = 7 · 73	721 = 7 · 103	931 = 7 · 7 · 19
287 = 7 · 41	527 = 17 · 31	731 = 17 · 43	943 = 23 · 41
289 = 17 · 17	529 = 23 · 23	749 = 7 · 107	949 = 13 · 73
299 = 13 · 23	533 = 13 · 41	763 = 7 · 109	959 = 7 · 137
301 = 7 · 43	551 = 19 · 29	767 = 13 · 59	961 = 31 · 31
323 = 17 · 19	553 = 7 · 79	779 = 19 · 41	973 = 7 · 139
329 = 7 · 47	559 = 13 · 43	791 = 7 · 113	989 = 23 · 43
343 = 7 · 7 · 7	581 = 7 · 83	793 = 13 · 61	
361 = 19 · 19	589 = 19 · 31	799 = 17 · 47	
371 = 7 · 53	611 = 13 · 47	817 = 19 · 43	

*) Denna tabell är tagen ur »Aritmetik för elementarläroverken» af Lars Phragmén.

Minsta gemensamma mångfalden.

(Minsta gemensamma dividenden.)

227. Den minsta gemensamma mångfaldens beräkning fordras för allmänna bråks liknämniggörande, men det hör i sig själft till heltalsläran.

Grund är mångfaldstabellerna. Enligt dem äro talen 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 och 40 de 10 minsta mångfalderna af 4. Enligt dem äro 5, 10, 15, 20, 25. 30, 35, 40, 45 och 50 de 10 minsta mångfalderna af 5. Af dessa tal äro 20 och 40 mångfalder af både 4 och 5, eller, såsom man säger, deras gemensamma mångfalder. 20 är det minsta af dem, och därför kallas 20 den *minsta gemensamma mångfalden* (*m. g. m.*) af 4 och 5.

228. De uppgifna talen sakna gemensamma faktorer.

Emedan talen 4 och 5 icke hafva några gemensamma faktorer, är produkten af 4 och 5 den m. g. m. af dem.

Af samma skäl är $3 \times 4 \times 35$ m. g. m. af 3, 4 och 35. Här märkes, att både 4 och 35 äro sammansatta af hvar sina 2 faktorer, men ingen är 3 eller gemensam för 4 och 35.

229. Af de uppgifna talen är ett mångfald af det eller de andra uppgifna.

Då 2 uppgifna tal äro sådana, att det ena är mångfald af det andra, så är det större den m. g. m. af båda. Likaså är ett tal m. g. m. af flera andra, då det är mångfald af hvart och ett af dessa.

Ex. 302. 36 är m. g. m. af a) 12 och 36, b) 36 och 9. c) 36 och 18, d) 6 och 36, e) 4 och 36, f) 3 och 36, g) 2 och 36.

Ex. 303. 36 är m. g. m. af 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 och 36.

230. Alla eller några af de uppgifna talen innehålla en eller flera gemensamma faktorer.

I detta fall måste den m. g. m. vara större än det största af de uppgifna talen, men mindre än produkten af den.

Ex. 304. Uppsök den minsta gemensamma mångfalden af talen 84, 96, 72 och 108!

Beräkningen kan utföras på 3 hufvudsätt.

1. a.	84	96	72	108	
	21	24	18	27	4
	7	8	6	9	3
		4	3		2
			1	3	3
	1				7
		1			4
				1	3

Redogörelse. Först delas alla talen med den gemensamma faktorn 4. Sedan delas faktorerna 21, 24, 18 och 27 med 3. Därpå delas faktorerna 8 och 6 med 2. Därefter delas faktorerna 3 och 9 med 3. Så delas faktorn 7 med 7. Vidare delas faktorn 4 med 4 och slutligen faktorn 3 med 3.

M. g. m. är $= 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 7 \times 4 \times 3 = 6\,048$.

Här märkes, 1) att $84 = 4 \times 21$; $96 = 4 \cdot 24$; $72 = 4 \times 18$; $108 = 4 \times 27$. O. s. v.

2) att 84 innehåller 3 faktorer (ty 3 tal stå därunder), nämligen 4, 3 och 7, att 96 innehåller de 4 faktorerna 4, 3, 2 och 4, att 72 innehåller de 4 faktorerna 4. 3, 2 och 3, o. s. v.

b. $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ eller $\mathbf{4} \times \mathbf{3} \times 7$.

$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ eller $\mathbf{4} \times \mathit{2} \times 2 \times 2 \times \mathbf{3}$.

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ eller $\mathbf{4} \cdot \mathit{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathit{3}$.

$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ eller $\mathbf{4} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathit{3} \cdot 3$.

Här märkes, att 2×2 eller 4 är gemensam för alla talen, att en faktor 3 äfven är gemensam för alla talen, att en faktor 2 är gemensam för 2 af dem och en faktor 3 likaledes gemensam för 2 af dem, samt att för öfrigt en faktor 7, 2 faktorer 2 och en faktor 3 förekomma i blott hvar sitt af de gifna talen.

2. $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ eller $4 \times 3 \cdot 7$.
$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.
$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Redogörelse: I detta fall uppdelas talen i faktorer, helst i primfaktorer. Sedan upptagas det första talets alla faktorer: 2, 2, 3 och 7 i m. g. m. Därefter upptagas de i det ena talet efter det andra talet befintliga faktorer, som ej upptagits förut.

3. *Redogörelse.* Talen uppdelas så som i det andra sättet. Emedan talet 96 innehåller de flesta faktorerna 2, så upptagas först i den m. g. m. så många faktorer 2, som där finnas, nämligen 5. Emedan talet 108 innehålla de flesta faktorer 3, näml. 3 sådana, så upptagas sedan 3 faktorer 3 i den m. g. m. Emedan talet 84 icke innehåller så många (ej flera) faktorer 2 och 3 som (än) förut äro upptagna i den m. g. m., behöfva de ej upptagas. Emedan 84 innehåller 1 faktor 7, men någon sådan icke upptagits i m. g. m., så insättes en faktor 7 där. Den m. g. m. skall alltså vara $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$.

Detta tal innehåller 5 faktorer 2, 3 faktorer 3 och 1 faktor 7. Det kan därför betecknas kortare så: $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$.

Sättet 1 a) är det äldsta och det lättaste, då talen äro flera. Där märkes omedelbart, att deras m. g. m. innehåller de gemensamma och de icke gemensamma faktorerna.

Då talen äro två och deras m. g. m. skall beräknas, beräknas deras m. g. m. därigenom, att det ena talet mångfaldigas med den i det andra befintliga icke gemensamma faktorn. Då talen äro flera, mångfaldigas hvarje tal med produkten af de faktorer, som finnas i de andra talen, men saknas hos det talet.

Ex. 305. Beräkna den m. g. m. af a) 24 och 36, b) 18, 15 och 25.
$3 \cdot 6$ | $3 \cdot 5$ | $5 \cdot 5$.

a) Talen 24 och 36 hafva faktorn 12 gemensam. Dessutom innehåller talet 24 en faktor 2 och talet 36 en faktor 3. Deras m. g. m. är därför antingen 3-falden af 24 eller 2-falden af 36. Uträknad blir den 72.

b) Deras m. g. m. är lättast funnen såsom 25×18. — Om talet 15 vore utgångspunkt för dess beräkning, så måste den innehålla faktorerna 6, 5 och 15 eller vara $6 \cdot 5 \cdot 15$. — Om talet 25 vore utgångspunkt, så skulle han innehålla faktorerna 18 och 25 eller vara $18 \cdot 25$. I alla fallen är han uträknad = 450.

Det s. k. nioprofvet.

För att pröfva riktigheten af en beräknad produkt eller faktor användes stundom det s. k. nioprofvet.

231. Detta sätt att pröfva riktigheten af en beräknad produkt verkställes sålunda:

a) Den ena faktorns tvärsumma delas med 9. Om öfverskott uppstår, så antecknas det.

b) På samma sätt förfares med den andra faktorn.

c) De båda återstoderna multipliceras. Den därvid uppkomna produktens tvärsumma delas med 9. Återstoden antecknas.

d) Hufvudproduktens tvärsumma delas med 9. Om den då erhållna återstoden är lika stor som den i c) funna, så är räkningen sannolikt riktigt utförd.

Ex. 306. $296 \times 278 = 82\,288$.
296 lämnar till återstod 8.) $8 \times 8 = 64$. $64 : 9 = 7$, rest 1.
278 » » » 8.} Däraf proftal 1.
82 288 lämnar till återstod 1; således troligen riktig produkt.

Märk! Detta prof är dock icke tillfredsställande, emedan därigenom icke upptäckes, om ett antal blifvit lika mycket för stort som ett annat för litet eller om någon siffra ställts på orätt plats.

232. Vid undersökning om en beräknad faktor är riktig, verkställes denna pröfning så, som synes af följ. ex.:

Ex. 307. $294\,817 : 799 = 368$, med rest 785.

Tvärsumman i resten 785 är 20. $20 : 9 = 2$, rest 2. Proftal således 2.

Tvärsumman i 294 817 är 31, $31 : 9 = 3$, rest 4. Proftal således 4.
$4 - 2 = 2$.

Den kända faktorns tvärsumma är 25; proftal 7.
Den beräknade faktorns tvärsumma är 17; proftal 8.
$8 \times 7 = 56$. Dess proftal är också 2.

Om restens proftal skulle vara större än produktens, så ökas denna med 9, hvarefter fråndragning verkställes.

Läran om bråk.

233. För bråklärans fördelning i afdelningar finnas olika indelningsgrunder.

1. Emedan läran om de hela talen bildar utgångspunkten för all räkning, emedan decimalbråksenheterna stå i samma förhållande till hvarandra som de hela talens enheter till hvarandra samt i följd däraf decimalbråken enklast betecknas i öfverensstämmelse därmed och enklare fall af decimalbråksläran lösas på samma sätt som motsvarande fall i heltalsläran, så att en enklare kurs af decimalbråksläran kan omedelbart sammanställas med en kortare kurs i heltalsläran, så behandlas här läran om decimalbråk före all behandling af bråk i allmänhet, samt

fördelas innehållet i en mycket enkel kurs (§§ **234—241**), och en fullständig kurs. Den enkla kursen behandlas med fördel före den fullständiga heltalskursen. Se §§ **81** och **82**! Likaså är läran om allmänna bråk fördelad i 2 kurser, en enklare och en fullständigare. Den förra är dock omfångsrikare än första decimalbråkskursen.

2. En annan anordning är förenlig med nuvarande kursfördelning och följes i de flesta räkneböcker. Den anordningen är häfdvunnen och har dessutom godt stöd för sig. Se **Märk** i § **44**, ex. **45** och **46** i § **55** å sid. 33! Den grundas därpå, att den s. k. multiplikatorn är ett förhållandetal och att detta kan vara helt tal, bråk eller blandadt tal.

Vid decimalbråks likadelning göres början helst med beräkning af en dels storlek, på det att decimalkommats rätta plats må inskärpas. Vid allmänna bråks likadelning är beräkning af delarnas antal i allmänhet mycket lättare än beräkning af hvarje dels storlek. Fördenskull kunde början göras med beräkning af delarnas antal. Men alldenstund den s. k. inledningen bör behandlas så grundligt, att beräkning af en jämn del af en större bråkenhet alls icke möter någon svårighet (se § **263**!) och en allmän sammanfattning om nämnarens mångfaldigande bör inskärpas, så kan ordningsföljden mellan de olika afdelningarna rörande allmänna bråks likadelning vara densamma som i decimalbråksafdelningen.

En storhet, som är lika med *en* jämn del af en annan storhet, kan i bråkläran betecknas på 2 sätt: 1) med användande af likadelstecknet, 2) med användande af produkttecknet. Dessa båda beteckningssätt kunna sammanföras i en afdelning, hvilken då omedelbart föregår den afdelning, i hvilken frågan är att beräkna en storhet, som innehåller några jämna delar af en efterföljande storhet.

Den sammanfattande behandlingen af läran om förhållande, en lära som hör till både heltals- och bråkläran, bör företagas efter bråklärans behandling, sedan barnen dessförinnan dock fått inskärpa saken och äfven höra (använda) namnet.

Decimalbråk. Enklare kurs.

234. Vare sig att en mindre del af heltalsläran eller en kortare kurs i allmänna brak föregår decimalbråksläran, bör första delen af denna, nämligen uppfattning af de största enheterna, utbyte af större enheter mot mindre enheter och tvärt om, beteckning och utsägande af tal med 2—3 decimaler genomgås grundligt, så att verklig kunskap erhålles däri.

235. Utgångspunkt kan vara åskådning (§ **89**), förbunden med exempel, inledda med orden: »Huru stor del af», eller ock omedelbar delning af talet 1. Se § **48** d)!

Ex. 308. Huru stor är hvarje del, när talet 1 delats i 10 lika delar? — **Svar:** 1 tiodel af 1 eller 1 tiodel.

Ex. 309. Huru många tiodelar innehåller a) 1, b) ett och 3 t.-dlr, c) 3 och 4 t.-dlr? d) Utsäg 4 och 8 t.-dlr i t.-dlr! (Svar: a) 10; b) 15; c) 34; d) 48 t.-dlr.)

Ex. 310. a) Hvilket helt tal motsvarar 80 tiodlr? b) Utsäg i helt tal och tiodlr 56 tiodlr! (Svar: a) 8; b) 5 och 6 tiodlr.)

Ex. 311. Huru mycket är a) 3 ggr 8 tiodelar, b) 10 ggr 8 tiodlr, c) 1 tiodel af 8?

Uträkning. a) 3 ggr 8 tiodlr = 24 tiodlr = 2 hela 4 tiodlr.

b) 10 ggr 8 tiodlr = 80 tiodlr = 8. — Eller 10 ggr **1** tiodel = **1**; 10 ggr **2** tiodlr = **2**; .... 10 ggr **8** tiodlr = **8**. I senare fallet skola barnen genom god betoning märka, att det beräknade entalet är lika stort som tiodelarnas antal i den uppgifna delen.

c) 1 tiodel af 8 är ej ett helt tal. Följaktligen utbytes 8 mot 80 tiodlr. 1 tiodel af 80 tiodlr = 8 tiodlr. — Eller 1 tiodel af **1** är **1** tiodel; 1 tiodel af **2** är **2** tiodelar; .... 1 tiodel af **8** = **8** tiodlr. I senare fallet betonas så, att barnen märka, att tiodelarnas antal i den beräknade delen är lika stort som entalet i det uppgifna hela. — Att 1 tiodel af 8 är 8 tiodlr, härledes äfven omedelbart af b).

Öfvergång till beteckning af decimalbråk angifves i § **39** och senare delen af § **81**. Härvid märkes den nödvändiga uppdelningen i somliga fall. Se ex. 78!

Ex. 312. Utsäg a) 5; b) 0,5; c) 2,7; d) 39,8! e) Utsäg den penningsumma, som innehåller 5 kr. och 0,6 krona! f) Uppdela 2,9 m.!

0,5 utsäges blott 5 tiodelar (icke 0 hela 5 tiodelar). — c) utsäges på 2 sätt: 1) det vanliga: 2 och 7 tiodlr eller 2 hela 7 tiodelar; 2) i den minsta förekommande sorten: 27 tiodlr. — d) utsäges på 3 sätt: 1) 39 (hela) och 8 tiodlr, 2) 398 tiodlr, 3) 3 tio 9 enheter 8 tiodlr. Sätten 1) och 2) äro viktigast. — e) Svar: 5 hela och 6 tiodels kronor eller 5 och 6 tiodels kronor. — f) Två m. och 9 tiodels m.

Del tal, som består af helt tal och bråk, kallas *blandadt tal.*

Ex. 313. Uttryck a) 1 (8) dm. i m., b) 1 (6) dg. i gr., c) 1 (7) dl. i l.!

Sv.: a) En tiodels m. (8 tiodels m.).

Ex. 314. Utsäg a) 1 tiodels m. (3 tiodels m.) i dm., b) 5 och 4 tiodels m. i m. och dm., c) 9,8 liter i l. och dl.!

I b) uppdelas längden först i de 2 delarna 5 m. och 0,4 m. Därefter utbytes 0,4 mot 4 dm.

---

236. Öfvergång till sorten hundradel kan ske så.

Ex. 315. a) Huru många tiodelar innehåller 1? b) Om hvarje tiodel delades i 10 lika delar, huru många sådana delar innehölle 1? (Eller: I huru många sådana delar vore 1 deladt?) c) Då 1 är deladt i hundra lika delar, är hvarje del 1 hundradel.

Ledning för b). Huru många mindre delar innehåller 1) den första tiodelen, 2) andra tiodelen, 3) 2 tiodelar, 4) 3 tiodelar, o. s. v.? Svaret på den tredje och följande ledfrågor kan först sägas utan uträkning 2 ggr 10 eller tjugu, 3 ggr 10 eller 30, ... 10 × 10 eller hundra.

Eller också börjas med följande exempel.

Ex. 316. a) Huru stor är hvarje del, när talet ett (1) delats i hundra lika delar? (Sv.: En hundradel af 1 eller 1 hundradel.) b) Huru många hundradelar innehåller ett? (Sv.: Hundra.) c) Huru många hundradelar innehåller 1 tiodel? (Sv.: 1 tiodel af hundra eller tio.)

Omedelbart därefter upptagas följande exempel.

Ex. 317. Utsäg a) 1 i h.-dlr, b) 1 tiodel i h.-dlr! Hvilket helt tal motsvarar c) 100 h.-dlr, d) 800 h.-dlr?

Uppdela i helt tal och bråk e) 306 h.-dlr, f) femhundrasjutton h.-dlr!

Ex. 318. Utsäg i h.-dlr a) 1 tiodel, b) 4 tiodlr, c) 3 tiodlr 2 h.-dlr! Huru många h.-dlr är a) 1 tiodel. b) 5 tiodlr, c) 6 tiodlr 8 h.-dlr?

Ex. 319. Utsäg i tiodlr a) 10 h.-dlr, b) 70 h.-dlr! Utsäg i tiodlr och h.-dlr c) 57 h.-dlr, d) 98 h.-dlr!

Ex. 320. Huru stor del af 1 tiodel är 1 hundradel?

Ex. 321. Emedan 1 hundradel är 1 tiodel af 1 tiodel, skall han betecknas i rummet närmast till höger om tiodelsrummet. a) I hvilket rum i ordningen från första heltalsrummet? (Svar: Det 2:a till höger därom.) b) Hvarmed måste första heltalsrummet och tiodelsrummet fyllas? (Svar: Hvar sin nolla.) c) Beteckna 1 h.-del! d) Huru många siffror (decimaler) fordras för att beteckna 1 h.-del, ... 9 h.-dlr, ... 99 h.-dlr, 745 h.-dlr? [d) Svar: 3 (2).]

Här betonas, 1) att första (andra) decimalbråksorten är tiodel (h.-del) och att fördenskull första (andra) decimalrummet är tiodelsrum (h.-delsrum), 2) det erforderliga decimalantalet för beteckning af tal, uttryckta i tiodlr och h.-dlr.

Ex. 322. Beteckna a) 17 h.-dlr. b) 39 h.-dlr, c) 485 h.-dlr!

Talen uppdelas, de större delarna utbytas mot större enheter, så att riktiga rum fyllas med antalbetecknande siffror.

a) 17 h.-dlr = 10 h.-dlr + 7 h.-dlr; delen 10 h.-dlr utbytes mot 1 tiodel. Alltså betecknas det med en etta i tiodelsrummet och en sjua i h.-delsrummet. — Eller ock eftertänkes det erforderliga decimalantalet (= två). Med 2 siffror betecknas talet sjutton. Det betecknas. Då äro decimalrummen fyllda; därefter fylles heltalsrummet, och decimalkommat insättes.

I c) är nog att uppdela i 2 delar, 400 h.-dlr och 85 h.-dlr. Därefter utbytes den första delen mot helt tal.

Ex. 323. Medan föregående exempels tal äro uppskrifna, frågas: Huru många tiodelar finnas i a) 17 h.-dlr, b) o. s. v.? Huru många h.-dlr finnas dessutom? Huru stor är den första delen, den andra delen? (Svar: a) 1, b) 3, c) 48. — a) 7, b) 9, c) 5. — a) 1 tiodel, b) 3 tiodlr, c) 4 hela. — a) 7 h.-dlr, b) 9 h.-dlr, c) 85 h.-dlr. Om båda de första decimalerna medtagas för den första delen, så är den 48 tiodlr och den andra delen 5 h.-dlr.)

Vid uppdelningen och utbytet märkes, att h.-dlrnas antal är 10 ggr så stort som tiodelarnas.

Sakuppgifter genomgås, liknande ex. 313 och 314.

Ex. 324. Utsäg a) $3,_{17}$ kr., b) $5,_{4}$ kr. i kr. och öre!

Ledning för a): $0,_{01}$ kr. = 1 öre.

b): Emedan $0,_{01}$ kr. = 1 öre, bör den andra delens krontal vara uttryckt i h.-dlr före den delens utsägande i öre. Alltså utbytes först $0,_{4}$ mot 40 h.-dlr. Öretalet är således 40, och penningsummans andra del = 40 öre.

Här kunna upptagas exempel med alla de saksorter, mellan hvilkas enheter förhållandet är det samma som mellan 1 kr. och 1 öre (1 öre och 1 kr.).

237. I samma ordning upptagas uppgifter för uppfattning, beteckning och utsägande af tal med mindre enheter samt tillämpningsuppgifter. I somliga uppgifter förvandlas då från tiodelar till tusendelar.

Ex. 325. Uttryck a) $5,_{124}$ kbm., b) $7,_{8}$ kbm. i kbm. och kbdm.!

b) Den andra delens kbm.-tal $0,_{8}$ utbytes först mot $0,_{800}$.

Tal, som uppgifvas i tusendelssort och tiotusendelssort, böra äfven, om det medhinnes, uttryckas i h.-delssort.

Ex. 326. a) 1 tusendel är 1 tiodel af 1 h.-del; b) 5 tus.-dlr = 5 tiodlr af 1 h.-del; c) 69 tus.-dlr = $6,_{9}$ h.-dlr. — d) 1 tiotusendel = 1 h.-del af 1 h.-del; e) 7 tiotus.-dlr = 7 h.-dlr af 1 h.-del eller 7 h.-dels h.-del.

Beteckning då: $0,_{001} = 0,_{1}$ h.-del; $0,_{005} = 0,_{5}$ h.-del; — $0,_{0001} = 0,_{01}$ h.-del; $0,_{0007} = 0,_{07}$ h.-del; $0,_{0754} = 7,_{54}$ h.-dlr.

Hundradelarnas antal märkes lättast, om decimalkommat tänkes flyttadt efter hundradelssiffran i det ursprungligen betecknade talet.

238. Däraf att den (de) i decimalbråket befintliga antalbetecknande siffran (siffrorna) behålla sin plats i samma rum, vare sig att en eller flera nollor efterfölja, förstås, att *decimalbråks värde blir oförändradt, då decimalnollor tillsättas eller borttagas i slutet af ett betecknadt decimalbråk.*

Liksom hela tal utsägas decimalbråken i den minsta förekommande sorten. *Det tal, som betecknas genom decimalerna, angifver delarnas antal. Decimalernas antal angifver sorten.* — Då ett decimalbråk skall betecknas, eftertänkes först det erforderliga decimalantalet och därefter det för beteckning af delarnas antal erforderliga sifferantalet.

Räknesätten.

239. Räkningen utföres så som i hela tal. Se § **113** samt ex. 109 och 110 i § **114**!

Ex. 327. a) 2,9 + 3,2; b) 74,3 — 8,96; c) 9 × 5,6; d) 10 × 0,4; e) 10 × 4,7; f) 10 × 7,86; g) 100 × 2,25; h) 100 × 0,9; i) 1 000 × 0,743; j) 1 000 × 0,28.

I början utsägas sorterna under räkningen. I sådana ex. som d)—h) är det alltid fördelaktigt. Räkningen är då alldeles lika ren hufvudräkning. Se för öfrigt uträkning af ex. 72 a)—c) å sid. 46.

Uträkning af d): 10 × 0,4 = 40 tiodlr = 4.

e) 10 × 4 = 4 tio; 10 × 0,7 = 7; 10 × 4,7 = 47. Den ena delen af svaret efter den andra skrifves, då den är beräknad.

g) 100 × 2 = 2 hundra; 100 × 20 hdlr = tjugu = 2 tio; 100 × 5 hdlr = 5; alltså 100 × 2,25 = 225.

h) Enklaste räkning, när 0,9 utbytts mot 0,90. Eller ock beräknas först 10 × 0,9, som är 9, och sedan 10 × 9, som är 90.

j) Där utbytes 0,28 mot 0,280.

Slutsatser af 327 d)—j). 1) Då ett decimalbråk a) tiofaldigas, b) hundrafaldigas, c) tusenfaldigas, är produktens ental lika stort, som a) tiodelarnas antal i bråket, b) hundradelarnas antal i bråket, c) tusendelarnas antal i bråket.

2) Skriftligt a) tiofaldigande, b) hundrafaldigande, c) tusenfaldigande af ett decimalbråk utföres enklast därigenom, att decimalkommat tänkes flyttadt a) 1 steg åt höger, b) 2 steg åt höger, c) 3 steg åt höger.

240. Mångfaldigande med ett helt tal, som innehåller 2 eller flera antalbetecknande siffror.

Under uträkningen tänkes ej på bråksorten. Före uträkningen kan bråksorten (decimalernas antal) bestämmas. Det hela innehåller samma sort som den uppgifna delen. Till följd däraf kunna decimalerna i det beräknade hela vid sammanläggningen genast skrifvas mindre än heltalssiffrorna.

Ex. 328. 35 × 7,28.

7,28
35
3640
2184
254,80

Vid talens uppskrifvande under hvarandra skrifvas de sista antalbetecknande siffrorna rätt under hvarandra.

Uträkning. 5 × 8 = 40; 0 upp, 4 i minnet .... 3 × 8 = 24; 4 upp, 2 i minnet: I delprodukterna 3640 och 2184 äro alla siffrorna lika stora, emedan blott antalet beräknats. I hufvudprodukten tänkes däremot på sorten före sammanläggning af antalen. En del uttryckes i h.-dlr och den betecknas med mindre siffror samt afskiljes från den föregående delen.

241. Vid likadelning beräknas först en dels storlek med utsägande af sorterna för inskärpande af decimalkommats rätta plats i svaret. Då användas uteslutande sådana uttryck, hvilka afse innebörden, såsom »1 femdel af», hvilka på inga villkor få utbytas mot sådana, som syfta på beräkning af de lika delarnas antal, såsom »5 går i». Förblandning i detta fall medför stor svårighet för barnen. Sedan kan man räkna på det senare sättet, »mekaniskt», då barnen fått klart för sig, att den sista heltalssiffran i det beräknade talet är uppskrifven, då den sista heltalssiffran i det uppgifna hela är upptagen, eller att den första decimalen skall inkomma i svaret, sedan den första decimalen nedflyttats, hvadan decimalkommat skall insättas före fortsatt räkning.

Ex. 329. a) $0{,}_{52} : 4$; b) $425{,}_2 : 8$; c) $8{,}_{05} : 10$; d) $8{,}_{05} : 49$; e) $1\,667{,}_9 : 65$; f) 6 hl. säd kostar $56{,}_1$ kr. Huru mycket kostar 1 hl. däraf?

Uträkning. a) En 4-del af 0 hela är ingen hel. En nolla jämte decimalkommat skrifves. En 4-del af 5 tiodelar = 1 tiodel. O. s. v. Se uträkn. af ex. 72 d) å sid. 46! Se äfven ex. 109 d)—f) å sid. 74!

b) En 8-del af 42 tio = 5 tio; 8×5 tio = 40 tio. O. s. v.

c) **1.** En tiodel af 8 är ingen hel. En nolla jämte decimalkommat skrifves. 8 = 80 tiodlr. O. s. v. Eller **2.** En tiodel af 8 = 8 tiodlr. Det betecknas $0{,}_8$. En tiodel af 0 tiodlr = 0 h.-dlr. En nolla skrifves i h.-delsrummet. En tiodel af 5 h.-dlr = 5 tusendlr. En femma skrifves i tusendelsrummet.

d) Talet $8{,}_{05}$ innehåller en heltalssiffra, alltså skall det beräknade talet innehålla en heltalssiffra.

e) Af det gifna märkes, att det beräknade talet skall innehålla 2 hufvuddelar, af hvilka den första är ett tvåsiffrigt helt tal. Där räknas blott så: 65 i 166 går 2 ggr. O. s. v.

Märk! 1. Af talsystemets beskaffenhet beror, att både det hela och hvarje del innehålla lika stort antal vid lika a) tiodelning, b) hundradelning, o. s. v., men att sorten blir allt mindre. 2) Vid skriftlig lika a) tiodelning,

b) hundradelning o. s. v. af ett helt tal, kan man följaktligen tänka sig a) den sista siffran afskild såsom decimal, b) de 2 sista siffrorna afskilda såsom decimaler; o. s. v. 3) Vid skriftlig lika a) tiodelning, b) hundradelning o. s. v. af ett decimalbråk tänkes decimalkommat flyttadt a) 1 steg åt höger, b) 2 steg åt höger; o. s. v.

I 2) motsvarar afskiljandet af siffror till decimaler afskiljandet af siffror såsom restsiffror i heltalsläran. Se § **197**.

Mark! 2. I denna afdelning upptagas äfven sådana sammansatta uppgifter, för hvilkas lösning fordras både vanligt mångfaldigande och vanlig likadelning. De uppdelas då i 2 uppgifter.

Ex. 330. Beräkna priset för a) 3 dm. tyg, då 1 m. sådant tyg kostar 2,5 kr., b) 2 m. 7 dm. tyg, när priset för 1 m. är 0,70 kr., c) 1 kg. kaffe, när priset för 6 hg. sådant kaffe är 7,38 kr., d) 28 cm. tyg, när priset för 1 m. är 3,6 kr.!

242. Ex. 331. a) 38 : 20; b) 1 140 : 6 000.

a) Genom att räkna på vanligt sätt blir talet 1,9. Uträkningen kan utföras på 2 andra sätt. I. Först delas med 10, sedan med 2. 38 : 20 = 3,8 : 2 = 1,9.

[illegible]
20
18
— 18

20 i 38 går 1 gång, rest 18. I stället för att utbyta 18 mot mindre enheter, då det blir 180 sådana, behålles 18 oförändradt, men öfverstrykes nollan i 20. Då insättes skiljetecknet efter ettan. 2 i 18 går 9 ggr; 9 ggr 2 = 18.

I b) öfverstrykes först den sista nollan i båda talen (jfr med § **198**), och under uträkningen öfverstrykes den ena efter den andra af de 2 öfriga nollorna i talet 6 000. Vinsten med de andra sätten är, att färre siffror skrifvas.

243. Om närmevärden.

Ex. 332. a) Bråket 0,324 är 0,004 mer än 32 h.-dlr, men 0,006 mindre än 0,33. Alltså är dess värde närmare 0,32 än 0,33. Om blott 2 decimaler (2 delar) medtoges, så skulle det afkortas till 0,32. b) Huru mycket är 0,32 för litet? (Sv. 4 tus.-dlr.) c) Bråket 0,32 är 0,02 mer än 0,3, men 0,08 < 0,4. Om 0,32 afkortades, så skulle det afkortas till 0,3. d) Huru mycket är 0,3 för litet?

(Sv. 2 h.-dlr.) e) Huru mycket är 0,4 för stort? (Sv. 8 h.-dlr.) — Om 0,3 jämföres med 0,324, hvars båda sista delar i så fall borttagits, så är 0,3 24 tus.-dlr för litet.

Genom flera exempel visas, att intet afseende fästes vid den sista delen af bråket vid afkortningen, så snart den innehåller mindre än 5 enheter, men att den ökas till 10 enheter, då den uppgår till eller öfverstiger 5 enheter. Därigenom ökas näst sista delen med en enhet. Så kan man fortgå med afkortningen, till dess att blott en decimal behålles.

Ex. 333. 2,6935 ... afkortas till a) 2,694, b) 2,69, [illegible]

Att den sista delen i a) icke medför ökande af näst-föregående del i b), beror därpå, att den icke innehåller 5 enheter. För att utmärka afkortadt tal, när sista delen (delarna) är borttagen (äro borttagna), skrifvas ofta punkter efter det genom afkortning uppkomna talet.

Märk! Siffran höjes icke.

Ex. 334. a) $1 : 3 = 0,3333 \ldots$. Det afkortas till b) 0,333, c) 0,33.

Ex. 335. a) $1 : 6 = 0,6666 \ldots$. Det afkortas till b) 0,667, c) 0,67.

Ex. 336. $97 : 165 = 0,5878 \ldots$.

I ex. 334 innehåller hvarje uträknad bråkdel antalet 3. Däraf förstås, att hvarje följande del äfven innehåller antalet 3. I följd däraf kunna huru många treor som helst tillskrifaas i st. f. punkterna. Vid afkortning kan den sista delen icke ökas. I ex. 335 innehåller hvarje bråkdel antalet 6. Fördenskull ökas hvarje del vid afkortningen.

Vid likadelning' uppstå ofta närmevärden. För öfnings skull brukar räkning ofta fortgå till dess, att det beräknade talet innehåller 5 decimaler. Men för praktiskt behof är nog, om det innehåller än 2, än 3, än 4 decimaler, allt efter de konkreta sorternas beskaffenhet och den för tillfället erforderliga noggrannheten. — Ofta uttryckes en penningsumma, längd, yta, rymd eller vikt i blott en sort: kr., m., kvm., hektar, kbm., l., hl. eller kg. Vid mätning och vägning uppstår i allmänhet ett fel, som kan uppgå till några tusendelar af den ifrågavarande enheten. Fördenskull behöfver det beräknade talet i allmänhet blott innehålla 3 decimaler. När en penningsumma uttryckes i kronsort, fordras blott 2 decimaler. När det är fråga om ytor, bör det beräknade talet helst innehålla 4 decimaler, emedan fel vid förvandling till mindre ytsort annars lätt uppstår.

Ex. 337. a) 17 kr. : 56 = 0,30 kr. = 30 öre; b) 17 m. : 56 = 0,304 m. = 3 dm. 4 mm.; c) 17 hektar : 56 = 0,3036 har = 30 ar 36 kvm.

Uträkn. 170 : 56 = 0,3035
```
168
---
 200
 168
 ---
 320
 280
 ---
  40
```

Emedan resten 20 är < $\frac{1}{2}$ af 56, blir det följande antalet < 5. Det blir 3, när räkningen fortsättes. — Emedan resten är > $\frac{1}{2}$ af 56 (eller 3 är > $\frac{1}{2}$ af 5), så blir det följande antalet > 5. Då räkningen fortsättes, uppstår resten 40. — Emedan 40 > $\frac{1}{2}$ af 56, blir äfven det följande antalet > 5. Om räkningen fortsattes, så blefve det 7. O. s. v.

Barnen öfvas genom uträkning att af restens storlek sluta sig till det följande, oberäknade antalets ungefärliga storlek för att sedan bestämma det riktigaste närmevärdet.

När rest uppstår vid likadelningen, huru länge man än räknar, uppstå blott närmevärden, och de beräknade bråken kallas *oafslutade* (*periodiska*) *decimalbråk*. Det därvid oupphörligt återkommande antalet kallas *period*. I ex. 334 är perioden 3. Vid uträkning af 1 : 3 uppstår oupphörligt resten 1. Däraf förstås, att alla delarna i det beräknade talet skola innehålla antalet 3. Sammalunda förstås af den oupphörliga resten 2 i ex. 335, att det beräknade bråkets alla delar skola innehålla antalet 6. — I ex. 336 är den första resten 145, den andra resten 130, den 3:e resten 145. Däraf förstås, att blott de 2 resterna 145 och 130 uppkomma under räkningens fortsättning, samt att antalet 87 oupphörligt skall förekomma i det beräknade bråket. — Blott bråkets första del innehåller ett annat antal. — Perioden är där 2-siffrig. — I andra fall är den flersiffrig.

244. Beräkning af förhållande mellan 2 storheter. Därvid beräknas blott delarnas antal.

a. Båda de gifna storheterna äro uttryckta i en och samma sort.

Ex. 338. Huru många äro delarna, då a) 4 kulor delats så, att hvarje del är 2 kulor, b) 4 tiodelar delats så, att hvarje del är 2 tiodelar, c) 4 h.-dlr delats så, att hvarje del är 2 h.-dlr, d) 50 tiodelar delats så, att hvarje del är 5 tiodelar?

b. De gifna storheterna äro uttryckta i olika sorter.

Ex. 339. Huru många äro delarna, då a) 5 kr. delats så, att hvarje del är 4 öre, b) 100 delats så, att hvarje del är 8 tiodlr, c) 4 tiodlr delats så, att hvarje del är 8 h.-dlr? I alla sådana fall uttryckes det hela i samma sort som den uppgifna delen.

c. En af de uppgifna storheterna eller båda äro uttryckta i 2 eller flera sorter.

Ex. 340. a) 41,4 : 0,18; b) 8,1 : 5,4; c) 7,2 kg. : 1,2 kg.; d) 1,16 hl. råg räcker under 1 månad. Huru många män. räcka 17,4 hl.?

I a) utbytes 41,4 mot 4 140 h.-dlr, därefter frånses sorten. Barnen skrifva alltså: 41,4 : 0,18 = 4 140 h.-dlr : 18 h.-dlr = 4 140 : 18 och räkna sedan ut detta.

I b) frånses först sorten kg. Därefter göres som i a).

Första lektionen i läran om decimalbråk med folkskolans lägsta klass.

A. Utgångspunkt: Det förut inlärda om hela tal.

Redan i småskolan skall vara inlärdt, att hvarje del är 1 tiodel af tio, när tio delats i tio lika delar. Det inskärpes från början af folkskolekursen.

245. Uppfattning af första sortens decimalbråk.

Ex. 341. Huru stor är hvarje del, när a) tio delats i 10 lika delar, b) när hundra delats i tio lika delar, c) när ett delats i tio lika delar?

Alla svaren afgifvas 1) utan uträkning: a) 1 tiodel af tio, b) 1 tiodel af hundra, c) 1 tiodel af ett; 2) efter uträkning: a) ett, b) tio. När c-svaret skall angifvas uträknadt, säger läraren: I st. f. 1 tiodel af ett säga vi 1 tiodel. När vi utsade det tal, som innehåller tio tal ett, sade vi kortligen tio. På samma sätt säga vi nu korteligen 1 tiodel, när vi tala om det tal, som är en tiodel af 1. Hvad säga vi således i st. f. 1 tiodel af 1? (Sv.: 1 tiodel.) Huru uppstå sådana delar som 1 tiodel? (Sv.: Genom att dela 1 i tio lika delar.) En tiodel är således ett tal, som innehåller en af de 10 lika delarna i talet 1. (Eller: En tiodel är ett tal, som innehåller en af grundenhetens 10 lika delar.) Huru utsäges det tal, som innehåller en af de tio lika delarna i talet ett? (Sv.: 1 tiodel.) Hvad menas med 1 tiodel? (Sv.: Ett tal, som innehåller en af de tio lika delarna i talet ett.) Huru skola vi utsäga det tal, som innehåller 2 (3, 4, o. s. v. t. o. m. tio) sådana delar? [Sv.: 2 (3, 4 . . . 10) tiodelar.] Hvad menas med 2 tiodelar? (Sv.: Ett tal, som innehåller 2 af grundenhetens tio lika delar.)

Huru många ord hören I, när jag säger: a) 1 krona, b) 1 tiodel? [Sv.: a)—b) 2.] Hvad angifver talet 1, när jag säger 1 kr.? (Sv.: Kronornas antal.) Hvad angifver ordet krona? (Sv.: Sorten.) Likaså angifver ordet ett tiodelarnas antal, när jag säger 1 tiodel. Hvad angifver ordet tiodel? (Sv.: Sorten.) Hvilken sort sägen I således, när I sägen a) 1 tiodel, b) 3 tiodelar, o. s. v.? Huru stort är tiodelarnas antal, när I sägen a) 1 tiodel, b) 3 tiodelar, o. s. v.? Huru många tiodelar innehåller talet a) 1 tiodel, b) 3 tiodelar, o. s. v.?

Ex. 342. Huru mycket är summan af a) 3 tiodelar och 4 tiodelar, b) 2 tiodelar och 8 tiodelar? [Sv.: a) 7 tiodlr, b) 10 tiodelar eller ett (en hel).]

Ex. 343. Huru mycket är skillnaden mellan a) 8 tiodelar och 2 tiodelar, b) 1 hel och 6 tiodelar?

I b) utbytes först 1 hel mot 10 tiodelar.

Om tiden medgifver, så kunna äfven ex. 309—311 å sid. 155 genomgås muntligt. Det göres äfven beroende af barnens föregående kunskap.

De tal, som I förut hört omtalas, hafva innehållit blott hela grundenheter. De kallas fördenskull **hela tal.**

Emedan grundenheten fördelats eller liksom brutits, kallas sådana tal, som vi nu talat om, **brutna tal eller bråk.** Hvilken bråksort hafven I nu hört omtalas? Sådana bråk, som innehålla tiodelar, kallas **decimalbråk.** Tiodel är alltså den första decimalbråksorten och närmast mindre än heltalssorten enhet. Det skolen I komma ihåg för beteckningens skull.

246. Beteckning af första sortens decimalbråk.

Huru beteckna vi talet ett? (Sv.: Med en etta.) Hvad kallas det rum, i hvilket ettan skrifves? (Sv.: Enhetsrum.) Huru betecknas talet 1 tio? (Sv.: Med en etta och en nolla.) Hvad kallas de rum, som då fyllas? (Sv.: Tiorum och enhetsrum.) Huru betecknas talet 1 hundra? (Sv.: Med en etta och 2 nollor.) Hvilka rum äro då fyllda? (Sv.: Hundrarummet, tiorummet och enhetsrummet.) Hvilket rum fylles således alltid, när ett helt tal betecknas? (Sv.: Enhetsrummet.) Hvarmed fylles det, när talet blott innehåller större enheter? (Sv.: En nolla.) Likaså måste enhetsrummet alltid fyllas, när vi beteckna mindre tal än ett. Hvarmed skall det då fyllas? (Sv.: En nolla.) När vi skola beteckna 1 tiodel, hvad skola vi då först göra? (Sv.: Fylla enhetsrummet.) Hvarmed? (Sv.: En nolla.) (En nolla skrifves.) Huru skola vi beteckna, att tiodelarnas antal är 1? Det rum, i hvilket ettan skall skrifvas, kallas *tiodelsrum* efter sorten *tiodel*. Eftersom 1 tiodel är en mindre enhet än talet ett, så skall den ettan skrifvas mindre än nollan och efter nollan. (En lägre etta skrifves efter nollan.) Dessutom insättes ett litet skiljetecken, ett komma, mellan nollan och ettan. (Kommat insättes, hvarefter det skrifna ser ut så: 0,1.) Huru skall detta (0,1) utläsas? (Sv.: 1 tiodel.)

På frågan: Hvad betecknar ettan? skall svaras: tiodelarnas antal, men icke tiodel.

Ex. 344. a) Hvilka rum skola fyllas, då talet 2 tiodelar betecknas? b) Huru betecknas således talet 2 tiodelar? (Sv.: Med en nolla, ett komma och en mindre tvåa.) c) Beteckna 2 tiodelar!

Ex. 345. Beteckna a) 3 tiodlr, b) 6 tiodlr, o. s. v.

Ex. 346. Hvilket är det största antalet af tiodelar, som kan skrifvas i tiodelsrummet?

Om tiodelarnas antal är större, måste vi utbyta hela det gifna bråket eller en del däraf mot helt tal.

Ex. 347. Hvaremot kan talet a) 10 tiodelar utbytas, b) 11 tiodelar utbytas? O. s. v. [Sv.: a) En hel, b) 1 hel 1 tiodel.] c) Beteckna det tal, som innehåller a) 10 tiodelar, b) 11 tiodelar! O. s. v.

B. Utgångspunkt: Åskådning. Den delbara kuben. Därvid bör den i 9 stänger och 10 små kuber delade skifvan ligga underst, så att man lätt kan höja en eller flera af de andra skifvorna.

247. Huru många skifvor innehåller hela denna kub? (Sv.: Tio.) Äro de lika eller olika stora? Huru många skifvor innehåller den delen? (Läraren tager en skifva och håller upp den för barnen.) (Sv.: En.) Denna skifva är således en af kubens tio lika delar. Huru stor är således den skifvan? (Sv.: En af kubens tio lika delar eller 1 tiodel af kuben.) Läraren tager en annan skifva och frågar: Huru stor är den skifvan? (Sv.: En tiodel af kuben.) Läraren lägger båda skifvorna på hvarandra och frågar: Huru mycket är detta? (Sv.: 2 tiodelar af kuben. — Om barnen svara: 2 skifvor, så erinras de om utsagan rörande hvarje skifva och tillsägas, att de skola utsäga det, som de se, såsom del af hela kuben.)

Barnen skola äfven gå fram och lyfta en mindre eller större del af kuben och utsäga den delen såsom del af kuben. Kom fram, Erik! Tag den del af kuben, som innehåller 1 af de 10 lika delarna, 5 af de 10 lika delarna! O. s. v. Tala om, huru mycket du (han) tagit!

Huru stor del af kuben är a) den skifvan, b) den skifvan, c) båda skifvorna tillhopa? O. s. v. [Sv.: a) 1 tiodel; b) 1 tiodel; c) 2 tiodelar.]

Sedan kan visas på längden af en lika tiodelad meterstång eller på ett på en plansch afbildadt, så deladt meterband i sammanhang med därefter afpassade, liknande frågor som ofvan.

På samma sätt som I sen den kuben fördelad, kunnen I tänka eder talet ett deladt i tio lika delar. Huru stor är hvarje del då? (Sv.: 1 tiodel af ett.) Fortsättning såsom i § 245.

Decimalbråk: Fullständigare kurs.

248. Den innefattar uppfattning, beteckning och utsägande af flersiffrigare decimalbråk än i förra kursen, räkning på samma sätt som i §§ 239—244 samt svårare (sammansatta) fall. Till de svårare fallen höra 1) beräkning af ett tal, som innehåller delar, hvilka äro lika med hvar sin jämna del af ett efterföljande tal (§§ **249, 250**), 2) beräkning af förhållandet mellan storheter, då förhållandet är ett bråk eller blandadt tal (§ **251**) och 3) beräkning af ett tal, hvilket innehåller delar, som äro lika med hvar sin jämna del af en föregående storhet (§ **252**), eller med andra ord: beräkningar i de fall, att förhållandet mellan 2 tal (storheter) är ett decimalbråk eller ett blandadt tal med decimaler.

När förhållandet är uttryckt med helt tal, hänföras dylika uppgifter till »multiplikations- och divisionsuppgifterna». När förhållandet är bråk, brukar man äfven hänföra dem till afdelningarna »multiplikation med bråk» och »division med bråk». Huru de än sammanföras, äro de sammansatta uppgifter, som kunna lösas på grund af ex. 327 c), 328 och 329 c) i §§ **239—241**. Jfr med **Märk** i § **44**!

I inledningen kräfves ej så ingående behandling som i §§ **235—237**.

Om en afdelning, behandlande de största allmänna bråken, ej upptagits förut, så bör en sådan behandlas före denna afdelnings genomgående. I följande §§ är framställningen sådan, som den bör vara, i fall ingen afdelning af läran om allmänna bråk föregått.

249. Inledningsexempel, i hvilka beräknas *en* dels storlek, då något delats i a) 10, b) 100, c) 1 000 lika delar.

Ex. 348. Huru mycket är a) 1 tiodel af 1 (5), b) 1 hundradel af 1 (2), c) 1 tusendel af 1 (16)?

Först beräknas svaren utan uppskrifning. När 1 tiodel af 5 beräknas, kunna såsom ledfrågor gifvas: Huru mycket är 1 tiodel af 1, af 2, af 3 och af 4? Jfr med ex. 34 b)!

Utredning för a). Hvad menas med 1 tiodel af 1? (Svar: En tiodel af 1 är en af de 10 lika delar, i hvilka 1 delats.) Huru hafven I betecknat det förut? (Barnen skrifva 1 : 10.) Vid den beteckningen betonas, att 1 delats i 10 lika delar. Nu skolen I vid beteckningen betona, att det är fråga om *en* sådan del. Det sker genom att använda talet 1 tiodel. En tiodel *af* 1 betecknas då så: $0{,}1 \times 1$. Där är 1 tiodel af 1 betecknad. — Utsägandet inskärpes. Hvad betecknas först? (Svar: 1 tiodel.) Hvad betecknas sedan? (Sv.: Af.) Huru hafven I utsagt det tecknet förut? (Sv.: Gånger.) Så kunna vi ej säga nu; ty talet $0{,}1 \times 1$ är < 1, det är således blott en del af 1. Därför utsäges det tecknet här med ordet »af». Huru mycket är 1 tiodel af 1? (Sv.: 1 tiodel.) Skrif det! (Barnen skrifva $= 0{,}1$.) Läs det skrifna!

b) Beteckna 1 h.-del af 1 på båda sätten! Uträkna det! Skrif det beräknade talet bredvid! — c) På samma sätt.

Flera sådana uppgifter gifvas, hvarvid äfven betecknas en sådan jämn del af decimalbråk och blandade tal. Barnen uträkna sedan de sålunda betecknade talen såsom ex. 94 i § **109**.

250. Beräkning af tal, innehållande flera jämna delar af ett gifvet, efterföljande tal.

Ex. 349. Huru mycket är a) 1 tiodel af 2, b) 2 tiodlr af 2, ... i) 9 tiodlr af 2?

Utredning af b). 2 tiodlr af 2 är ett tal, som innehåller 2 sådana delar som 1 tiodel af 2. Huru många delar innehåller 2 tiodlr af 2? (Svar: 2.) Huru stor är den första? den andra? När det talet beräknas, beräknas först 1 sådan del. Huru stor är den? (Sv.: 2 tiodlr.) Huru stort är det tal, som innehåller 2 sådana delar? Svara utan uträkning! (Sv.: 2 ggr 2 tiodlr.) Uträknadt? (Sv.: 4 tiodlr.) Tankegången inskärpes genom frågorna: Hvad uträknades först? (Sv.: 1 tiodel af 2.) Sedan? (Sv.: 2 tiodlr af 2.) — Det omräknas i sammanhang så: 1 tiodel af 2 är 2 tiodlr; 2 ggr 2 tiodlr är 4 tiodlr. Det uppskrifves, allt eftersom det uträknats, så: $0{,}2 \times 2 = 0{,}4$. — $0{,}1 \times 2 = 0{,}2$; $2 \times 0{,}2 = 0{,}4$. Detta skall kvarstå på taflan och tjänar till ledning för den tysta räkningen. $0{,}2 \times 2 = 0{,}4$ bör stå på särskild rad.

I c) och följande efterfrågas innebörden och tankegången och vänjas barnen att utsäga tankegången så: Först uträknas $0{,}1$ af 2, sedan uträknas $0{,}3$ af 2. Stor vikt lägges på tankegångens självständiga, *fullständiga* utsägande af barnen i sammanhang.

Ex. 350. a) $0{,}4 \times 0{,}4$; b) $0{,}23 \times 0{,}9$; c) $0{,}4 \times 6$ kr.; d) $0{,}07 \times 0{,}8$ m.; e) $5{,}4 \times 3{,}675$.

Emedan 1) $0{,}1 \times 1 = 0{,}1$, 2) $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$, 3) $0{,}1 \times 0{,}01 = 0{,}001$, 4) $0{,}01 \times 1 = 0{,}01$, 5) $0{,}01 \times 0{,}1 = 0{,}001$, o. s. v., så kan man äfven före uträkningen bestämma bråksorten eller decimalernas antal i det beräknade talet och sedan räkna såsom i hela tal. Se uträkningen af ex. 328!

Uträkning.

$$\begin{array}{r} \text{b)}\quad 0{,}9 \\ \times\, 0{,}23 \\ \hline 0{,}207 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{e)}\quad 3{,}675 \\ 5{,}4 \\ \hline 14700 \\ 18375 \\ \hline 19{,}8450 \end{array}$$

b) $0{,}23 \times 0{,}9 = 23 \times 0{,}009$.

e) utsäges 54 tiodlr af $3{,}675$. Emedan det talet är $> 3{,}675$, utläses det oftast 5 och 4 tiodels ggr 3,675. Det senare utsägesättet är ej så godt som det förra.

Oduglig är utsagan: 5 och 4 tiodelar ggr 3,675.

Ex. 351. En stack innehöll 56 kbm. 600 kbdm. hö. Den åtgick på 10 veckor vid lika fördelning. Huru mycket användes under a) 6 veckor, b) 8 veckor?

Svar: a) 0,6 × 56 kbm. 600 kbdm.

Vid uträkningen utbytes 56 kbm. 600 kbdm. mot 56,600 kbm. eller 56 600 kbdm.

Ex. 352. Berg sådde 2 hl. 65 l. råg. Skördens korntal var 7,3. Huru stor var skörden?

Skördens korntal var 7,3, betyder, att skörden var 73 tiodlr af utsädet eller att 7,3 hl.:s skörd erhölls af 1 hl.:s utsäde. Svaret på frågan betecknas i förra fallet 7,3 × 2 hl. 65 l., i senare fallet 2,65 × 7,3 hl., hvilket helst utläses 265 h.-dlr af 7,3 hl.

251. Förhållandet mellan den föregående och den efterföljande storheten är ett bråk eller blandadt tal.

I förra fallet duger frågan: »**Huru stor del af ....?**» I senare fallet äro **blott sådana frågor dugliga,** som inledas med orden: »**Hvilket tal angifver förhållandet mellan ....?**» Därvid sägas äfven storheterna i den ordning, i hvilken de skrifvas, då förhållandet betecknas. Detta underlättar beteckningen af svaret.

Ex. 353. Huru stor del af a) 3,5 är 0,7, b) 29 kr. 45 öre är 65 öre!

Uträkning enligt anvisning i § **244.**

Pröfning a): 0,2 × 3,5 = 0,70 = 0,7. b) 0,45 × 29 kr. 45 öre = 65 öre.

Ex. 354. a) 765 : 34; b) 180 : 25; c) 26,64 : 7,4.

Svar: a) 22,5; b) 7,2; c) 3,6.

I a) och b) är den efterföljande storheten ett helt tal. I c) kan den genvägen användas att mångfaldiga båda de gifna talen, så att den efterföljande storheten blir ett helt tal. Därigenom vinnes, att de vid uträkningen använda siffrornas antal blir mindre. I annat fall räknas så, som angifvits vid ex. 331.

Ex. 355. a) 0,8 l. mjölk kostar 10 öre. b) 2,5 l. kosta 20 öre. Huru mycket kostar 1 l.?

Det skall vara samma förhållande mellan värdena som mellan mängderna. Fördenskull beräknas först i a) förhållandet mellan 1 l. och 0,8 l.

Uträkning. a) 1 l. : 0,8 l. = 1,25, som läses **125 h.-dlr.** — 1 l. är 1,25 × 0,8 l., alltså skall priset för 1 l. vara 1,25 × 10 öre = 12,5 öre.

b) 1 l. : 2,5 l. = 0,4. Emedan 1 l. är 0,4 af 2,5 l., skall 1 l. kosta 0,4 × 20 öre = 8 öre.

Annan redogörelse och uträkning finnes i ex. 358.

252. Åskådningsmateriel: ett snöre, som genom knutar afdelats i 10 lika delar, eller en lika tiodelad linje.

Ex. 356. Lär. visar den del af snöret, som innehåller 2 lika delar. Antag, att den delen är 14 cm.! Han säger sedan: Här sen I en bit af snöret. Den är 14 cm. och lika delad genom den knuten. Huru stor är hvar och en af de lika delarne? Svara utan uträkning! (Svar: 1 tvådel af 14 cm.) Den biten är 0,2 af hela snöret. Huru stor del af hela snöret är hvarje mindre del? (Sv.: 0,1.) Säg svaret i full sats! (Sv.: Hvarje mindre del är 0,1 af hela snöret.) När 0,2 af hela snöret är 14 cm., huru lång är 1 tiodel af snöret? (Sv.: 1 tvådel af 14 cm.) — Sedan visas på flera stycken af snöret, hvilka innehålla olika många, lika delar, och frågas på ungefär samma sätt. Därpå efterfrågas hela snörets längd, då 0,1 däraf är 7 cm. Slutligen efterfrågas hela snörets längd, då 0,2 däraf är 14 cm., 0,3 däraf är 21 cm., o. s. v.

Här betonas, att 1 af hela snörets 10 lika delar är 1 af de 2 lika delarna i den påvisade biten.

Utsagan: »2 tiodelar af snöret är 14 cm.» bör ej sammandragas till: »2 tiodlr är 14 cm.»

När hela snörets längd skall eftertänkas, betonas, att först eftertänkes längden af en af de 2 lika delarna och sedan längden af 10 sådana delar tillhopa.

Ex. 357. Ett annat snöre (en annan linje), som innehåller flera delar än det förra, hvarje del lika med en af det förras lika delar, visas (uppritas), och dess längd efterfrågas. Antag att delarnas antal är 12!

Det längre snöret innehåller 12 delar, hvar och en så stor som hvar och en af det kortares 10 delar. Hvarje del är 0,1 af det kortare snöret, alltså är hela det längre snöret 12 tiodlr af det kortare.

Hvarje del af det kortare snöret är 1 tolfdel af det längre. Alltså är det kortare snöret 10 tolfdelar af det längre snöret. Detta kan ej betecknas på grund af bråkläran förr än en kurs i allmänna bråk genomgåtts. Tills vidare betecknas det: 10 × $\frac{84 \text{ cm.}}{[illegible]}$.

Ex. 358. a) 8 l. mjölk kostar 1 kr.; b) 0,8 l. mjölk kostar 10 öre. Huru mycket kostar 1 l. sådan mjölk?

I båda fallen beräknas värdet af en enhet. I a) är priset för några sådana enheter kändt, i b) är priset för några delar af enheten bekant. Svaret på a) betecknas så: 1 kr. : 8. I enlighet därmed betecknas b-svaret så: 10 öre : 0,8. — Svaret på a) är 12,5 öre.

Fyra olika utredningar anföras för lösning af b).

1. Först eftertänkes priset för 0,1 l., sedan för 1 l. Enligt den utredningen blir svaret: $10 \times \frac{10}{8}$ öre = $10 \times 1{,}25$ öre = **12,5** öre.

2. Om mjölkmängden tiofaldigas, blir äfven värdet tiofaldigadt. $10 \times 0{,}8$ l. = 8 l.; 10×10 öre = 100 öre. Beräkning sedan som i a).

Enligt det andra sättet eftertänkes först en mjölkmängd, som är mångfald af de gifna, och en sådan mångfald, att bråket blir utbytt mot helt tal. Detta senare sätt är lättare för barnen och användbart, när tiden blir otillräcklig för behandling enligt första sättet. Därvid betonas, 1) **att man betecknar svaret på samma sätt som i heltalsläran, då värdet af en enhet skall beräknas,** och 2) **att man sedan mångfaldigar båda de gifna talen så, att helt tal (hela tal) uppstår i st. f. bråket (bråken, eller blandade tal).**

Huru värdet af en enhet betecknas före uträkningen, då värdet af dess mångfald är känd, skall vara inhämtadt i heltalsläran och har ytterligare inskärpts i bråkläran. Se ex. 329 f)!

3. Liksom man vid hela tals likadelning temligen snart verkställer uträkningen på samma sätt, vare sig att en jämn dels storlek eller de likadelarnas antal beräknas, så kan man äfven i föreliggande och liknande exempel frånse innebörden. Svarets öretal betecknas före uträkningen: 10 : 0,8. Detta uträknas enligt ex. 339 och 340. 10 : 0,8 = 100 tiodlr : 8 tiodlr = 100 : 8 = 12,5.

Hufvudsaken är, att barnen få klart för sig, huru värdet af en enhet betecknas före uträkningen, då värdet af enhetens mångfald eller värdet af några dess delar är kändt. Om barnantalet i skolan är stort, eller de äldre barnen på grund af omständigheterna besöka skolan ojämnt, samt läraren har svårt att gå ifrån gammal tankegång och använda läran om förhållande, så kan man i bråkläran frånse den olika innebörden i dylika fall lika väl, som man gör det i heltalsläran, och därigenom inlära **ett** sätt säkert.

4. Se ex. 355 a)! **Detta sätt är bäst; ty lätt och enligt innebörden.**

Allmänna bråk. Enklare kurs.

Inledning.

253. Uppfattning af bråk.

Utgångspunkt är antingen åskådning eller hela tals likadelning.

A. Utgångspunkt är åskådning.

Ex. 359. Ett ark delas i a) 2 lika delar, b) 3 lika delar, c) 5 lika delar. Huru stor är hvarje del?

Svar: a) *En 2-del af 1 ark* eller sammandraget: *ett tvådelsark* eller, emedan barnen känna till sorten halfark, *ett halfark*.

Det första svaret bildas på samma sätt som svaren i heltalsläran, då en jämn del af något angifves före uträkningen. Det är mångordigt. De 2 andra svaren uttryckas med blott 2 ord, af hvilka det första angifver delarnas antal och det andra angifver den genom delningen uppkomna nya sorten. Sortnamnet *tvådelsark* angifver, att ett *ark* är lika *tvådeladt*. Denna nya sort skall betonas. Fördenskull är det olämpligt att i början utsäga hvarje del så: ett halft ark. I sista fallet bibehålles den gamla sorten ark, men är arktalet ändradt från 1 till ett halft.

Vid utsägandet fordras riktig betoning, så att barnen böra det nya sortnamnet såsom *ett* ord.

I sammanhang härmed sammanfattas de 2, 3, 5 delarna till det ursprungliga hela.

Ex. 360. Utsäg 2 tvådelsark (2 halfark) i ark!

Ex. 361. a) Huru stor är hvarje del, då 1 m. delats i 2 lika delar? b) Utsäg 2 2-delsm. (2 halfmeter) i meter!

Sortnamnet tvådelsm. angifver, att 1 m. lika 2-delats.

Det från heltalsläran härledda svaret (Se första svaret på frågan i ex. 359!) bör äfven användas, ty däraf härledas lätt svar på frågor, inledda med orden: »Huru stor del af».

Ex. 362. Huru stor del af a) 1 ark är 1 halfark, b) 1 m. är 1 tredelsm., c) 1 m. är 1 tiodelsm.?

Svar: a) 1 tvådel; b) 1 tredel; c) 1 tiodel.

Den 6:e af förf:s talbildsplanscher innehåller hithörande åskådningsmateriel.

Här märkes, att bilderna ej äro talen. En del af ett band är ett kortare band, en del af en linje är en kortare linje, en del af ett ark är ett mindre papper, en del af en kulgrupp är en mindre kulgrupp. Ingen sådan del kan vara ett bråk.

B. Utgångspunkt är hela tals likadelning. Denna utgångspunkt är ensam tillräcklig.

Ex. 363. Huru stor är hvarje del, när 1 lika 2-delats?

Svar: 1 tvådel af 1. Då grundenheten fördelats, behöfver det hela ej utsägas i svaret. Vi säga alltså här korteligen: En tvådel.

Ex. 364. a) Huru många tvådelar innehåller 1? b) Hvaremot kan 1 utbytas? c) Hvaremot kan talet 2 tvådelar utbytas? d) Utsäg 1 i tvådelar! e) Utsäg 2 tvådelar såsom helt tal!

Sedan beräknas en dels storlek, då talet 1 lika 3-delats, lika 4-delats, o. s. v. Därefter kunna dessa stambråk jämföras med hvarandra så, att det ena angifves vara > eller < det andra, och slutligen kunna bråk som innehålla likadana enheter närmare jämföras med hvarandra.

Ex. 365. Hvilketdera är större: 1 tredel eller 1 tvådel?

Ex. 366. a) Huru mycket är talet 2 tredelar (3 tredelar) större än 1 tredel? b) Huru mycket är talet 1 tredel < 2 tredelar (1 hel)? c) Huru många delar med 1 tredel (2 tredelar) i hvarje del innehåller talet 2 tredelar (4 tredelar)? d) Huru stor del af 2 tredelar (10 tredelar) är 1 tredel (5 tredelar)?

254. Sammanhang mellan bråk och hela tal.

Ex. 367. a) En 2 m. lång tråd delas i 4 lika delar. Huru lång är hvarje del? b) Huru stor är hvarje del, då talet 2 lika 4-delats? c) Huru stor är hvarje del, när 5 5 lika 12-delats?

Svar: a). 1) 1 fyradel af 2 m.; 2) 2 fyradelar af 1 m. b). 1) 1 fyradel af 2; 2) 2 fyradelar. — c). 1) 1 tolfdel af 5; 2) 5 tolfdelar.

Redogörelse för erhållandet af det andra svaret = utredningen vid ex. 34 å sid. 25. Därvid inskärpes det andra sättet. Synnerligen god betoning fordras. Flera exempel, liknande b), gifvas. I b) är *fyradelarnas antal i den beräknade delen = enheternas antal i det uppgifna hela talet.*

Lösning af c). En tolfdel af **ett** är **en** tolfdel. 5 innehåller 5 delar 1. Fördenskull innehåller 1 tolfdel af 5 **fem** delar med 1 tolfdel i hvarje del. — Detta sammandrages till: En tolfdel af **ett** är **en** tolfdel. 5 är 5 gånger 1. Alltså innehåller 1 tolfdel af 5 **fem** tolfdelar.

255. Beteckning och utsägande af betecknade bråk. Se §§ **41** och **42**!

Ex. 368. Huru stor är hvarje del, då a) 1, b) 2 delats i 6 lika delar?

Svaren sägas först utan uträkning, sedan på enklaste sätt: a) 1 sexdel af 1 och 1 sexdel. b) 1 sexdel af **2** och **2** sexdelar.

Beteckna 1 sexdel af 1! Om barnen skrifva 1 : 6, så efterfrågas ett annat sätt med användande af ett annat likadelstecken. Barnen skola då skrifva: $\frac{1}{6}$. Huru utsäges detta? (Svar: 1 sexdel af 1.) Huru säges det kortare? (Sv.: 1 sexdel.) Huru är en sexdel betecknad? (Med en etta, ett streck därunder och en sexa under strecket.) Huru många tal fordras alltså för beteckning af 1 sexdel? Huru många delar innehåller bråket 1 sexdel? (Sv.: En.) Hvar står det? (Sv.: Ofvanför strecket.) Huru **många** sådana delar innehåller talet ett? (Sv.: sex.) Hvar står det? (Sv.: Under strecket.) Ettan betecknar alltså delarnas antal i bråket, och sexan betecknar delarnas antal i talet ett. Hvad betecknar ettan? Hvad betecknar sexan? Emedan talet 1 här betecknar delarnas antal i bråket, kallas det *täljare.* Hvad kallas det tal, som angifver delarnas antal i bråket? Hvad menas med täljare? — Emedan talet 6 angifver delarnas antal i talet 1 (i grundenheten) och talsorten nämnes på grund af detta **antal**, så **kallas talet** 6 *nämnare.* Hvad kallas det tal, som angifver delarnas antal i talet 1? Hvad menas med nämnare? Hvarför kallas det nämnare? (Sv.: Talsorten nämnes efter delarnas antal i talet 1.)

På två sätt utsägas flera så skrifna tal. Genom båda ussägesätten, utsagda efter hvarandra, inskärpes svarets bråkdel, när rest uppstått vid hela **tals** likadelning.

Ex. 369. Huru stor är hvarje del, då 84 delats i 5 lika delar?

Svar: 1) enligt heltalsläran 16, rest 4 och 2) bestämdare $16\frac{4}{5}$, ty 1 femdel af 4 är 4 femdelar.

256. Beteckning vid förekomst af konkret sort.

Ex. 370. En 8-dels m. betecknas först $\frac{1 \text{ m.}}{8}$ sedan $\frac{1}{8}$ m., emedan metertalet är $\frac{1}{8}$.

257. Innebörd, beteckning och utsägande af blandadt tal och af konkret storhet, hvilkens antal är ett blandadt tal.

Ex. 371. Det tal, som innehåller 2 grundenheter och 3 sjudelar, utsäges 2 hela och 3 sjudelar eller kortare 2 och 3 sjudelar. I senare fallet utsäges talet så, att orden tre och sjudelar höras närmare sammanslutna än orden två och tre. Det betecknas: $2\frac{3}{7}$.

Vid beteckningen bör heltalssiffran skrifvas midt för bråkstrecket.

Ex. 372. 4 m. och $\frac{1}{2}$ m. Delarnas metertal äro 4 och $\frac{1}{2}$. Fördenskull sammanfattas hela längden så: $4\frac{1}{2}$ m.

Ex. 373. $7\frac{3}{4}$ kr. uppdelas tvärt om i 7 kr. och $\frac{3}{4}$ kr.

258. Förvandling från och till hela tal.

Ex. 374. Utsäg a) 1, b) 5. c) 9 e. 4 åttadelar i 8-delar!

Redogörelse. b) 1 = 8 åttadelar; 5 är 5 ggr 1; alltså är 5 = 5 · 8 åttadelar = 40 åttadelar.

c) 1 = 8 åttadelar; 9 = 9 · 8 åttadelar = 72 åttadelar; 4 åttadelar därtill gör 76 åttadelar.

Regel för skriftlig räkning: Beräkna den mångfald af nämnaren, som det hela talet angifver! Tillägg täljaren! Summan blir täljare. Den gifna nämnaren blir nämnare.

Det bråk, som är $<$ 1, kallas *egentligt bråk*. Det bråk, som är = eller $>$ 1. kallas *oegentligt bråk*. Det förra bråkets täljare är $<$ nämnaren. Det senare bråkets täljare är $>$ nämnaren. — Uttrycken »egentligt bråk» och »oegentligt bråk» behöfva aldrig nämnas vid undervisningen.

Ex. 375. Uttryck a) 16 fyradelar, b) 27 fyradelar såsom helt eller blandadt tal!

Uträkning: a) 4 fyradelar = 1. Alltså delas 16 fyradelar så, att hvarje del blir 4 fyradelar. 4 i 16 går 4 ggr. Alltså är 16 fyradelar = 4.

b) = a). Det hela talet blir 6, men det blir 3 fyradelar öfver. Alltså är 27 fyradelar = 6 hela 3 fyradelar eller 6 och 3 fyradelar.

Regel för skriftlig räkning: Dela täljaren med nämnaren! Svaret blir helt tal. Återstoden är af samma sort som förut. Jfr med ex. 77!

259. Förvandling från allmänt bråk till decimalbråk och tvärt om.

a. Förfaringssättet grundas alltid därpå, att det gifna bråket är = en jämn del af ett helt tal. Ex. $\frac{2}{3}$ = 1 tredel af 2.

Ex. 376. a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{35}{65}$; c) $\frac{155}{365}$.

a) = 0,8. b) = 0,5385. c) 0,4247.

I a) är det nya bråket ett afslutadt bråk, men i b) och c) är bråket blott närmevärde, såsom det vanligen blir i det allmänna lifvets uppgifter. Jfr med § **243** ex. 333!

Ej alltid innehåller decimalbråket mindre delar än det gifnas delar: $\frac{155}{365}$ kr. = 0,42 kr. Fördenskull är det orätt att hänföra denna afdelning till bråks förlängning. Dessutom böra icke några obestämda värden (närmevärden) bildas genom förlängning. Vidare betonas, att bråk skola förlängas för liknämniggörande samt att både täljare och nämnare då mångfaldigas med **helt** tal. Korteligen de vid bråks behandling använda uttryckens innebörd utesluta möjligheten att hänföra denna afdelning till bråks förlängning.

Däremot är den delvis en ersättning för det gamla sättet att förkorta bråk med »den största gemensamma divisorn», för hvars beräknande ofta kräfdes mycket arbete med föga eller intet resultat. Ty oftast befanns den vara 1 — utom i räkneböcker förstås! *)

Om en kort inledningskurs i bråk enligt Normalplanen föregår decimalbråk, så kan denna afdelning ingå bland det i §§ **241** och **242** behandlade.

Då procentuppgifter behandlas och lösas med hjälp af bråkläran, är det vanligast fråga om förhållandet mellan storheter. Förhållandet angifves då ofta genom ett allmänt bråk, som sedan utbytes mot ett decimalbråk, uttryckt i h.-dlr, tus.-dlr eller tiotus.-dlr.

Ex. 377. Af 576 personer dogo 13 pers. Angif förhållandet mellan de dödas antal och hela antalet i procent!

Förhållandet är $\frac{13}{576}$ = 0,0225 = 0,0226 = 2,26 %.

b. Ett **afslutadt** decimalbråk kan i vissa fall utbytas mot annat (andra) bråk genom förkortning eller förlängning.

Ex. 378. 0,60 = $\frac{60}{100}$ = $\frac{12}{20}$ = $\frac{3}{5}$ = $\frac{180}{300}$.

Ex. 379. 0,43 kan däremot icke utbytas mot ett allmänt bråk, uttryckt i större sort.

*) I förf:s flesta räkneböcker har denna afdelning fördenskull införts i sammanhang med läran om bråks förkortning.

260. Jämförelse mellan bråk, uttryckta i samma sort. När bråk, uttryckta i samma sort, jämföras med hvarandra, sedan de betecknats, så att både täljaren och nämnaren synas, böra barnen tänka på bråken ej blott så, som de sägas, utan äfven så, som de skrifvas. Därigenom inskärpes betydelsen af täljare och nämnare.

Ex. 380. Huru mycket är a) $\frac{7}{9} > \frac{2}{9}$, $\frac{5}{8} < 1\frac{7}{8}$?

Af täljarna märkes i a), att $\frac{7}{9}$ innehåller 7 delar och att $\frac{2}{9}$ innehåller 2 delar eller att $\frac{7}{9}$ är $\frac{5}{9}$ mer än $\frac{2}{9}$, och att svaret blir $\frac{5}{9}$.

Därvid gifvas frågorna: a) Huru stort är niodelarnas antal i bråket $\frac{7}{9}$? (Sv.: 7.) b) Huru stort är niodelarnas antal i $\frac{2}{9}$? (Sv.: 2.) c) Huru mycket större är niodelarnas antal i $\frac{7}{9}$ än i $\frac{2}{9}$? (Sv.: 5.) d) Huru mycket är $\frac{7}{9}$ större än $\frac{2}{9}$? (Sv.: 5 niodelar.)

Ex. 381. a) Ordna följande bråk efter deras storlek och börja med det minsta: $\frac{3}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{12}{9}$ och $\frac{24}{9}$! b) Beräkna summan af alla dessa bråk! c) Beräkna skillnaden mellan $\frac{12}{9}$ och $\frac{2}{9}$! Sammanställ två och två af bråken så, att det första är d) dubbelt så stort som det andra, e) 3 ggr så stort som det andra, f) 4 ggr så stort som det andra, g) $\frac{1}{3}$ af det andra! O. s. v.

Svar: b) $\frac{52}{9} = 5\frac{7}{9}$; c) $\frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$; d) $\frac{8}{9}$ och $\frac{4}{9}$; $\frac{24}{9}$ och $\frac{12}{9}$; e) $\frac{3}{9}$ och $\frac{1}{9}$; $\frac{12}{9}$ och $\frac{4}{9}$; $\frac{24}{9}$ och $\frac{8}{9}$; f) $\frac{4}{9}$ och $\frac{1}{9}$; $\frac{12}{9}$ och $\frac{3}{9}$; g) $\frac{1}{9}$ och $\frac{3}{9}$; $\frac{4}{9}$ och $\frac{12}{9}$; $\frac{8}{9}$ och $\frac{24}{9}$.

Här betonas, att bråk med lika nämnare, s. k. liknämniga bråk, kunna sammanläggas och närmare jämföras med hvarandra, emedan de utsägas i samma sort.

261. Jämförelse mellan olika stora bråkenheter. När bråk med lika stora täljare, med olika stora nämnare jämföras med hvarandra, beaktas nämnarnas inbördes storlek.

Ex. 382. Hvilketdera är större a) $\frac{1}{5}$ eller $\frac{1}{4}$, b) $\frac{3}{5}$ eller [illegible]

Här eftertänkes, i hvilketdera fallet hvarje (en) del blir större: när talet 1 är deladt i flera eller färre lika delar.

Äfven i detta fall kunna bråken ordnas efter sin storlek. Däremot kunna de ej sammanläggas eller närmare jämföras med hvarandra. Förhållandet kan angifvas, när den ena nämnaren är mångfald af eller jämn del af den andra. Se ex. 391, 392 och 394 i § **263**.

Bråks uttryckande i mindre eller större sorter. Därvid utbytes bråk af en sort mot bråk af en annan sort.

A. *Hufvudräkning.*

a. Utgångspunkt är åskådning.

262. Ex. 383. Af 6:e talbildsplanschen märkes, att a) 1 tvådel af 1 m. = 2 fyradelar af 1 m., b) 2 tvådelar af 1 m. = 4 fyradelar af 1 m. Däraf förstås, att a) 1 tvådel af 1 eller 1 tvådel = 2 fyradelar och b) 2 tvådelar = 4 fyradelar. Sedan kan beräknas, att 3 tvådelar = 6 fyradelar, o. s. v. Sammanhanget upptages äfven i omvänd ordning: a) 2 fyradelar = 1 tvådel, b) 4 fyradelar = 2 tvådelar, c) 6 fyradelar = 3 tvådelar, o. s. v.

Svaren på frågorna böra utsägas både i full sats och på enklaste sätt.

Annat sätt för a). Sedan lär. efterfrågat längden af andra bandets påvisade första del, frågas: Huru stor del af hela bandet är den delen? (Svar: 1 tvådel.) Därefter påvisas den del af 4:e bandet, hvilken är lika stor som den nyss påvisade delen af andra bandet, och efterfrågas den delens längd (2 fyradelar af 1 m.) Sedan frågas: Huru stor del af 1 m. är den delen? (Sv.: 2 fyradelar.) På planschen synes, att båda delarna äro lika långa och att den ena är lika stor del af 1 m., som den andra är. Alltså är 1 tvådel = 2 fyradelar.

Genom räkning inläres sedan, att 2 tvådelar = 4 fyradelar, o. s. v. Därvid fordras god betoning. Därvid duger ej att stanna vid frågan: »Huru många 4-delar är 1 tvådel (2 tvådelar)?» På dessa frågor duga inga andra svar än: 2 (4), om barnen skola få sammanhanget klart. Om dylika frågor gifvas, måste de efterföljas af dessa: »Mot hvilket tal kan 1 tvådel (2 tvådelar) utbytas?» eller »Hvilket tal kunna vi säga i st. f. 1 tvådel (2 tvådelar)?»

Omedelbart efter några dylika exempel kunna likheterna skrifvas.

Ex. 384. a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; b) $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$; c) $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$; och omvändt:
Ex. 385. a) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; b) $\frac{4}{4} = \frac{2}{2}$; c) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Af planschen märkes äfven, att $\frac{1}{3}$ af 1 m. = $\frac{2}{6}$ af 1 m., o. s. v. Beteckning sker så som i ex. 384 och 385.

b. Utgångspunkt är talet 1.

263. Ex. 386. Uttryck a) 1 i 2-delar, b) 1 i 4-delar!

Svar: a) 2 tvådelar, b) 4 fyradelar.

Ex. 387. Huru stora äro talen 2 tvådelar och 4 fyradelar sinsemellan? (Svar: Lika stora.) b) Utsäg svaret i full sats! c) Jämför 2 tvådelar med 4 fyradelar! d) Tvärt om!

Ex. 388. Huru mycket är a) 1 tvådel, uttryckt i 4-delar, b) 2 fyradelar, uttryckt i 2-delar? c) Jämför 1 tvådel med 2 fyradelar! d) Uttryck 2 fyradelar i 2-delar! Säg svaret i full sats!

Redogörelse för a-svaret: 1 = 4 fyradelar; 1 tvådel är 1 tvådel af 1; alltså är 1 tvådel = 1 tvådel af 4 fyradelar = 2 fyradelar. Här betonas, att 1 utbytes mot 4 fyradelar.

Fyradelarnas antal är alltså 2 ggr 2 delarnas antal.

Att betona delarnas antal i bråket är stundom nödvändigt, stundom mindre nödvändigt. Här är det nödvändigt. Emellertid märkes bäst i bråkläran, att barnen hafva svårare att fatta saken, när de i heltalsläran tillhållits att säga sort i svaret på frågor, som inledts med orden: »Huru många».

Ex. 389. På samma sätt beräknas, att a) 1 tvådel = 3 sexdelar, b) 1 tvådel = 4 åttadelar, o. s. v.

I omedelbart sammanhang härmed beräknas följande.

Ex. 390. Utsäg a) 2 fyradelar, b) 3 sexdelar, c) 4 åttadelar, d) 5 tiodelar, e) 6 tolfdelar, f) 7 fjortondelar, g) 8 sextondelar, h) 9 adertondelar **i 2-delar**! O. s. v.

Tvådelarnas antal är 1 tvådel af 4-delarnas. O. s. v.

Ex. 391. Huru stor är hvarje del, när 1 tvådel a) lika 2-delats, b) lika 3-delats? O. s. v.

Grund till a-svaret är: 1 tvådel = 2 fyradelar (Se ex. 388—390!)

Ex. 392. Uttryck 1 tredel i a) 6-delar, b) 9-delar, c) 12-delar!

Ex. 393. Utsäg a) 2 6-delar, b) 3 9-delar, c) 4 tolfdelar, d) 4 sexdelar, e) 6 niodelar, f) 8 tolfdelar **i 3-delar**!

d-svaret erhålles af a-svaret så: Talet 4 sexdelar delas så, att hvarje del är 2 sexdelar, emedan 2 sexdelar = 1 tredel. Delarnas antal blir 2. Lika stort är 3-delarnas antal. Alltså är svaret 2 tredelar. Detta synes äfven af planschen.

Ex. 394. Huru stor är hvarje del, när 1 tredel a) lika 2-delats, b) lika 3-delats, c) lika 4-delats?

Märk! 1. Ex. 388 a), 390 a) och 391 a) höra tillsammans och böra genomgås omedelbart efter hvarandra. Det samma gäller om 389 a), 390 b), 391 b), o. s. v. Likaså 392 a), 393 a) och 394 a), o. s. v.

Märk! 2. Då ledfrågor förekommit, inledda med orden: Huru många, böra de omedelbart efterföljas af frågor, inledda med orden: »Uttryck i», »utsäg i», »förvandla till», »hvaremot kan du utbyta», så att barnen vänja sig att säga bråk.

Märk! 3. Svaren böra ofta utsägas i full sats. Det motsvarar beteckningen, när bråken skrifvas, förenade med likhetstecken.

Märk! 4. Denna afdelning bör grundligt genomgås, hvarvid de viktigaste bråksorterna upptagas.

Märk! 5. I denna afdelning genomgås både sådana ex., i hvilka förvandlas från större till mindre sort, och sådana, i hvilka förvandlas från mindre till större sort. I följande afdelningar, d. v. s. vid skriftlig räkning, särskiljas de från hvarandra. Dessförinnan inläras de erforderliga reglerna.

B. *Skriftlig räkning.*

a. *Inledning.*

264. Utgångspunkt är det förut genomgångna. I sammanhang med några lämpliga frågor, lika dem i föreg. afdeln., betecknas några likheter mellan bråk, uttryckta i olika sorter.

Ex. 395. a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$. b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$.

Ex. 396. a) $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. b) $\frac{4}{12} = \frac{2}{6} =$

265. Eller ock kan talet 1 vara utgångspunkt.

Ex. 397. $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{6}{6} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10} = \frac{12}{12}$. Däraf fås,

Ex. 398. a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$, o. s. v. b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$, o. s. v.

Ex. 399. a) $\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, o. s. v.

Slutsatser: 1) Genom att beräkna lika mångfald af ett bråks både täljare och nämnare bildas ett bråk, som är lika med det förra. 2) Genom att beräkna samma jämna del af ett bråks både täljare och nämnare bildas ett bråk, som är lika med det förra.

Det dubbla mångfaldigandet kallas *förlängning*. Det dubbla likadelandet kallas *förkortning*.

Att förlänga med 2 består alltså i 2-faldigande af både täljare och nämnare. Förkortning med 2 består alltså däri, att både täljare och nämnare lika 2-delas.

Annan förklaring: 1) Att förlänga bråk är att insätta samma faktor i både täljare och nämnare. 2) Att förkorta bråk är att borttaga samma faktor ur både täljare och nämnare.

Märk! 1. Andamålet med både förlängning och förkortning är att uttrycka bråk i annan sort.

Märk! 2. Blott om allmänna bråk säges, att de förlängas och förkortas. Då hela tal och bråk med decimaler uttryckas i annan sort, säges aldrig, att det sker genom förlängning eller förkortning. Orsaken till namnen i fråga om bråk, är att både täljare och nämnare blifva nersiffrigare vid förlängning och fåsiffrigare vid förkortning. Emedan decimalerna äfven i dylika fall blifva flera eller färre, kunna orden förlänga och förkorta användas äfven i decimalbråksläran, ehuru det är onödigt.

Märk! 3. Emedan man fäster sig vid talen täljare och nämnare, är klart, att förlängning och förkortning blott skola sägas vid skriftlig räkning.

Här betonas, 1) att bråk förlänges med hvilket tal som helst, 2) att bråk förkortas med blott det tal, som går jämt upp i både täljare och nämnare, eller det tal, hvarmed både täljare och nämnare äro jämt delbara, 3) att förlängningstalet och förkortningstalet angifva de små delarnas antal i en större del.

Bråks förkortning.

266. Bråks förkortning bör föregå bråks förlängning, emedan bråks förlängning står i det närmaste sammanhang med bråks liknämniggörande och deras behandling i räknesätten.

Genom förkortning bildas enklare bråk.

Ex. 400. Förkorta $\frac{12}{20}$!

Uträkning. 1) $\frac{12:2}{20:2} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5}$; 2) $\frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5}$.

Det andra sättet bör föredragas, och barnen förkorta med åtminstone största möjliga ensiffriga tal samt 10 eller

100. Fördenskull behöfves i den enklare kursen blott kännedom om mångfaldstabellen, men ej om det, som står i §§ **214—230**.

a) $\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{3}{5}$. | Detta sätt inöfvas slutligen, ty det användes mest vid tillämpningar. De ursprungliga talen öfverstrykas, så att blott de sist beräknade faktorerna synas.

Bråks förlängning.

267. Först upptagas uppgifter, i hvilka ordet förlänga förekommer, sedan sådana, i hvilka det nya bråkets nämnare angifves, slutligen sådana, i hvilka den nya bråksorten angifves.

Ex. 401. Förläng $\frac{3}{4}$ med 8!

Uträkning: $\frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 4} = \frac{24}{32}$.

I dylika uppgifter påvisas, att den nya nämnaren (32) är jämt delbar med den gamla (4) eller att den gamla nämnaren går jämt upp i den nya. 4 går jämt 8 ggr i 32. Med 8 är bråket förlängdt.

Ex. 402. Utbyt $\frac{2}{3}$ mot ett bråk med nämnaren 12!

Redogörelse. 3 i 12 går 4 ggr. Med 4 skall alltså bråket förlängas. Från början skrifves: $\frac{2}{3} = \frac{}{12}$, sedan förlänges med 4. $4 \times 2 = 8$, som skrifves ofvanför strecket. $4 \times 3 = 12$. — 12 står förut i nämnaren, men »$4 \times 3 = 12$» säges äfven, emedan därigenom pröfvas, om 4 är det rätta förlängningstalet.

Ex. 403. Uttryck a) $\frac{1}{2}$ i fjortondelar, b) både $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{5}$ i tjugudelar!

$\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$. | a). Först skrifves $\frac{1}{2}$, sedan redogöres så: Då sorten är fjortondel, är nämnaren 14. Alltså förlänges $\frac{1}{2}$ med 7.

$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$. | b). Först skrifves $\frac{3}{4}$ och därunder $\frac{3}{5}$. Näm-
$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$. | naren skall blifva 20. — 4 i 20 går 5 ggr. Alltså skall $\frac{3}{4}$ förlängas med 5. — 5 i 20 går 4 gånger. Alltså skall $\frac{3}{5}$ förlängas med 4.

Ex. 404. Uttryck $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ och $\frac{3}{8}$ i åttadelar!

Ex. 405. Uttryck a) $\frac{1}{4}$ och $\frac{5}{6}$, b) [illegible], [illegible] och $\frac{3}{4}$ i **tolfdelar!**

I ex. 403 b), 404 och 405 hafva 2 eller flera bråk blifvit uttryckta i samma sort. De bråk, som äro uttryckta i samma sort, kallas *liknämniga* bråk, emedan de hafva lika nämnare.

Bråks liknämniggörande.

268. Innebörden af att liknämniggöra bråk angifves i § **70** e) å sid. 46.

I ex. 403 b) äro de nya bråkens nämnare produkt af de gamlas nämnare, emedan den produkten är det minsta tal, i hvilket de gå jämt upp. I ex. 404 är den ena nämnaren 8 det minsta tal, i hvilket alla de gifna nämnarna gå jämt upp. I ex. 405 a) är den nya nämnaren < produkten af 4 och 6, emedan de gå jämt upp i ett tal, som är < produkten af dessa tal. I ex. 405 b) är 12 det minsta tal, i hvilket de gifna nämnarna gå jämt upp.

I alla dessa ex. är den nya nämnaren det minsta tal, hvari de gamla nämnarna gå jämt upp. Emedan bråks sammanläggning och fråndragning utföres lättare, ju mindre täljarna och nämnarna äro, så beräknas alltid **det minsta tal, i hvilket alla de gifna nämnarna gå jämt upp,** när bråk göras liknämnaga **för bråks sammanläggning och fråndragning.** Se vid ex. 429 c) å sid. 193.

För bråks liknämniggörande fordras förlängning.

Liksom för hela tal gäller det för bråk, att blott antal af samma sort kunna sammanläggas eller närmare jämföras med hvarandra.

När de gifna bråkens nämnare äro några af talen 2—10, 12, 16, 20, 100, 1000 eller andra lätta tal, så beräknas lätt det tal, som är gemensam mångfald af dem (= i hvilket de gå jämt upp). Då behöfver ej sådan fullständig uppdelning i faktorer förekomma, som angifves i § **230**. Bäst är att till en början blott liknämniggöra sådana bråk, hvilkas nämnare icke äro större än faktorerna i mångfaldstabellerna, eller sådana, att en nämnare är mångfald af den (de) andra nämnaren (nämnarna). Här beaktas närmast, att den nya nämnaren måste vara > eller = den största af de gifna.

Ex. 406. Liknämniggör a) $\frac{3}{5}$ och $\frac{7}{9}$; b) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$ och $\frac{5}{6}$!

a) $\frac{3}{5} = \frac{27}{45}$. | Den minsta mångfalden af både 5 och
$\frac{7}{9} = \frac{35}{45}$. | 9 är 45. Alltså är den nya nämnaren 45.
5 i 45 går 9 ggr. Således förlänges $\frac{3}{5}$ med 9. O. s. v.

b) $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$. | Det minsta tal, i hvilket alla 3 talen
$\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$. | 4, 8 och 6 gå jämt upp, är 24. Den nya
$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$. | nämnaren är således 24. Bråket $\frac{3}{4}$ förlänges med 6, $\frac{1}{8}$ förlänges med 3, och $\frac{5}{6}$ med 4.

Sättet att lösa hufvudräkningsuppgifter, som motsvara denna afdelning, angifves i § **110** ex. 101 och 102. Lösningen af dem är svårare än af alla andra hufvudräkningsuppgifter och bör förekomma högst litet, om ens något, samt alltid i sammanhang med åskådning.

Räknesätten.

269. **Sammanläggning.**

Först uträknas ett par hufvudräkningsexempel med **hela tal** och saksorter, sedan exempel med blott bråk. Därvid påvisas, att förfaringssättet är likadant som i hela tal, d. v. s. blott antal af samma sort sammanläggas.

Ex. 407. Huru mycket är summan af a) 2 kr. och 6 kr., b) 3 åttadelar och 4 åttadelar, c) 5 niodelar och 4 niodelar, d) 3 femdelar och 4 femdelar?

Svar: a) 8 kr.; b) 7 åttadelar; c) 9 niodelar eller 1; d) 7 femdelar eller 1 och 2 femdelar.

I början efterfrågas, om bråken äro uttryckta i samma eller olika sorter.

Efter ren hufvudräkning, hvarvid inga nämnare synas eller påtänkas, upptagas exempel för skriftlig räkning.

Ex. 408. Hvad är summan af a) 5 sexdelar och 2 sexdelar, b) 5 tolfdelar och 11 tolfdelar?

a) uträknas först genom ren hufvudräkning. Svaret blir 7 sexdelar. Sedan betecknas, att summan af talen är 7 sexdelar, och efterfrågas förfaringssättet.

$\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$. | Huru skola vi göra för att beräkna täljaren 7? (Sv.: Sammanlägga täljarna 5 och 2.) Huru skola vi tänka för att skrifva riktig nämnare? (Sv.: Nämnaren skall vara lika stor som i de andra bråken.) Af hvilken orsak? (Sv.: Ty alla bråken skola vara uttryckta i samma sort.) — Huru skola vi således göra? (Sv.: Först efterse, om bråken äro liknämniga. Om de äro liknämniga, sammanläggas täljarna. Därefter skrifves lika stort tal som nämnare i det nya bråket som i de gifna.) Hvad skall sedan göras? (Sv.: Uttrycka svaret annorlunda.) Gör det!

Om man vill, så inläres nu, att täljarna kunna skrifvas på samma bråkstreck. Uträkningen af a) får då följande utseende: $\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5+2}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

b) $\frac{5}{12} + \frac{11}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Där tillkommer förkortning, hvilken bör företagas så fort som möjligt.

Af grundsatsen, att blott tal af samma sort sammanläggas, följer, att de i termerna ingående hela talen sammanläggas för sig och bråken för sig.

Ex. 409. a) $7\frac{1}{2} + 4\frac{5}{8} + 2\frac{3}{5} = 13 + 1\frac{29}{40} = 14\frac{29}{40}$.

b) $7\frac{1}{2}$ kg. + $4\frac{5}{8}$ kg. + $2\frac{3}{5}$ kg. = $14\frac{29}{40}$ kg.

Här finnas både hela tal och oliknämniga bråk. De hela talen sammanläggas först. Sedan sammanläggas bråken, men dessförinnan måste de liknämniggöras. Detta sker helst på särskild plats.

$$\frac{1}{2} = \frac{20 \cdot 1}{20 \cdot 2} = \frac{20}{40}.$$
$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 8} = \frac{25}{40}.$$
$$\frac{3}{5} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{24}{40}.$$
$$\frac{20+25+24}{40} = \frac{69}{40} = 1\frac{29}{40}.$$

I den nya nämnaren skola alla 3 de gifna nämnarna gå jämt upp. För bestämmandet af den nya nämnarens storlek behöfva vi ej tänka på nämnaren 2, ty den går jämt upp i 8. Alltså blir den nya nämnaren det minsta tal, i hvilket 8 och 5 gå jämt upp. Det talet är 40. Sedan skola vi beräkna förlängningstalet till hvarje bråk. Först till $\frac{1}{2}$. Huru beräknas det? (Genom att dela 40 med 2.) Gör det! O. s. v.

Då konkreta sorter förekomma, medtagas de ej under räkningen.

b) Sedan summan af kg.-talen beräknats såsom i a), skrifves den beräknade summan af vikterna i omedelbart sammanhang med den förut betecknade summan så, som synes här ofvan.

Odugligt är: 1) $7\frac{1}{2} + 4\frac{5}{8} + 2\frac{3}{5} = 13 + 1\frac{29}{40} = 14\frac{29}{40}$ kg.

2) $7\frac{1}{2}$ kg. + $4\frac{5}{8}$ kg. + $2\frac{3}{5}$ kg. = $13 + 1\frac{29}{40} = 14\frac{29}{40}$ kg.

I 1) finnes likhet mellan det, som står på ömse sidor om det första likhetstecknet, men saknas likhet mellan det, som står på ömse sidor om det andra likhetstecknet. — I 2) finnes likhet mellan det, som står före första likhetstecknet, och det, som står efter andra likhetstecknet. Däremot är det mellan likhetstecknen stående hvarken lika med det föregående eller med det efterföljande. Felet undvikes lättast genom att utesluta det, som står mellan likhetstecknen.

Dugligt är: $7\frac{1}{5} + 4\frac{5}{8} + 2\frac{3}{5}$ kg. $= 13 + 1\frac{29}{40}$ kg. $= 14\frac{29}{40}$ kg. Först angifvas då de 3 delarna af det sedan beräknade kg.-talet $14\frac{29}{40}$.

Se äfven §§ **61—63** å sid. 38—40!

Frändragning.

270. Genom att först muntligt uträkna ett heltalsexempel med saksort och sedan ett bråkexempel med blott bråksort märkes, att man förfar såsom i hela tal: Antal af en sort kan blott fråndragas antal af samma sort.

Ex. 410. Huru mycket är återstoden, sedan a) 5 knappar borttagits från 11 knappar, b) 4 niodelar borttagits från 7 niodelar, c) 2 och 3 femtondelar tagits från 7 och 8 femtondelar?

Ex. 411. Huru stor är skillnaden mellan a) 7 tolfdelar och 5 tolfdelar, b) 13 (hela) och 8 nittondelar och 6 (hela) och 4 nittondelar?

Här märkes, att och mellan de blandade talen i ex. 411 b) betonas mer än de andra och. Annars är framställningen oklar.

a) uträknas först genom ren hufvudräkning. Svaret är 2 tolfdelar, hvilket genast kan förenklas. Därefter betecknas, att skillnaden mellan 7 tolfdelar och 5 tolfdelar är 2 tolfdelar. Slutligen efterfrågas förfaringssättet.

$\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Det skrifves äfven så:

$\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7-5}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Huru beräknas täljaren 2? (Sv.: Genom att taga tälj. 5 från tälj. 7.) Huru stor är svarets nämnare? (12.) Jämför den med de gifna bråkens nämnare! Hvarför skall den vara lika stor som de? — Slutligen förkortas. Hvarpå märkes, att $\frac{2}{12}$ kan förkortas?

b). Där förekommer fråndragning af helt tal. Uträkningen innehåller 3 hufvuddelar: 1) fråndragning af **helt tal; 2) fråndragning af bråk; 3) sammanläggning af svarets beräknade delar.**

Ex. 412. a) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$; b) $5\frac{3}{5} - 2\frac{1}{4}$.

I både a) och b) skola bråken först liknämniggöras. Sedan förfares så som i ex. 411.

271. I denna afdelning måste förvandlas från helt tal till bråk, hvarvid alltid blott *ett* (en grundenhet) uttryckes i bråksort. Antingen är bråksorten gifven från början, eller bestämmes den efter liknämniggörande.

Ex. 413. **a)** $1 - \frac{4}{5}$; b) $7 - \frac{3}{8}$; c) $5\frac{1}{6} - \frac{5}{6}$; d) $9\frac{1}{3} - 6\frac{3}{4}$.

Uträkning. a) $1 - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$.

b) $7 - \frac{3}{8} = 6\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = 6\frac{5}{8}$.

c) $5\frac{1}{6} - \frac{5}{6} = 4\frac{7}{6} - \frac{5}{6} = 4\frac{2}{6} = 4\frac{1}{3}$.

d) $9\frac{1}{3} - 6\frac{3}{4} = 9\frac{4}{12} - 6\frac{9}{12} = 8\frac{16}{12} - 6\frac{9}{12} = 2\frac{7}{12}$.

I d) märkes från början, att $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$. Till följd däraf kan 9 först uppdelas i 8 och 1 samt 1 uttryckas i 3-delar. Därefter kan 6 omedelbart dragas från 8.

Ex. 414. $9\frac{2}{3} - 8\frac{3}{4} - \frac{3}{8}$.

Här borttages först $8\frac{3}{4}$, sedan $\frac{3}{8}$. Men enklast är att först beräkna summan af $8\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{8}$, emedan liknämniggörandet af $\frac{3}{4}$ och $\frac{3}{8}$ är så lätt samt 2 fråndragningar är svårare än en sammanläggning och en fråndragning, då det kan ske för beräkning af samma tal.

Se dessutom ex. 61 b) och 62 å sid. 41!

272. Ex. 415. a) Hvilket tal är $\frac{3}{4}$ mer än $\frac{1}{2}$? b) Huru mycket är $\frac{3}{4}$ mer än $\frac{1}{2}$? c) Hvilket tal är $\frac{1}{2}$ mindre än $\frac{3}{4}$? d) Huru mycket är $\frac{1}{2}$ mindre än $\frac{3}{4}$?

Märk! 1. Det efterfrågade talet innehåller i a) summan af $\frac{3}{4}$ och $\frac{1}{2}$, i b)—d) skillnaden mellan $\frac{3}{4}$ och $\frac{1}{2}$. I b) jämföres talet $\frac{3}{4}$ med $\frac{1}{2}$. I c) efterfrågas det tal, som jämföres med $\frac{3}{4}$. I d) jämföres $\frac{1}{2}$ med $\frac{3}{4}$. Fördenskull äro svaren: a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$; b)—d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$.

Märk! 2. Olikheten mellan frågorna i a) och b) utgöres af inledningsorden »hvilket tal» och »huru mycket».

---

273. Beräkning af ett tal, som innehåller flera lika delar med ett gifvet bråk eller blandadt tal i hvarje del.

Räkningens öfverensstämmelse med räkningen inom heltalsområdet påvisas genom exempel.

Ex. 416. Huru mycket är a) 9 ggr 2, b) 9 ggr 2 femdelar?

Om b) bildar utgångspunkt till den skriftliga räkningen, så betonas, att endast täljarna innehåller bråkdelarnas antal i det gifna bråket, hvadan blott täljaren niofaldigas. Däremot blir nämnaren i det beräknade talet = den förutvarande. Jfr med § **52** mom. 3! Uträkningen sker för den skull så:

$9 \times \frac{2}{5} = \frac{9 \cdot 2}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

Ex. 417. a) $6 \times \frac{5}{6}$; b) $2 \times 3 \times \frac{5}{9}$; c) $6 \times \frac{5}{9}$.

Uträkning. a) $6 \cdot \frac{5}{6} = \frac{6 \cdot 5}{6} = \frac{30}{6} = 5$. Eller $\frac{6 \cdot 5}{6} = 5$.

Talet $\frac{30}{6}$ blir öfverflödigt, om $\frac{6\cdot5}{6}$ förkortas med 6, i det att båda faktorerna 6 borttagas. Därvid öfverstrykas de båda sexorna.

b) $2\cdot3\cdot\frac{5}{9} = 2\cdot\frac{3\cdot5}{9} = 2\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Först beräknas 3-falden af $\frac{5}{9}$, sedan 2-falden af det talet.

c) $6\cdot\frac{5}{9}$ är lika mycket som b). Det kan tänkas hafva uppstått af b), därigenom, att $2\cdot3$ först beräknats. När $6\cdot\frac{5}{9}$ beräknas, uppdelas 6 först i faktorerna 2 och 3, och därefter förkortas bråket $\frac{6\cdot5}{9}$ med 3. — $6\cdot\frac{5}{9} = \frac{6\cdot5}{9} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

Ex. 418. $15\times3\frac{7}{10}$.

Två sätt äro tänkbara. 1. Först beräknas $15\cdot3$, sedan beräknas $15\cdot\frac{7}{10}$. Detta sätt öfverensstämmer med sättet under hela den föregående skoltiden och leder fortast till målet. — 2. Först utbytes $3\frac{7}{10}$ mot $\frac{37}{10}$ (= uttryckes det blandade talet i bråk), och därefter utföres räkningen så som i 417 c).

Uträkningar. 1. $15\times3\frac{7}{10} = 45\ \frac{15\cdot7}{10} = 45+10\frac{1}{2} = 55\frac{1}{2}$.

2. $15\cdot3\frac{7}{10} = 15\cdot\frac{37}{10} = \frac{15\cdot37}{10}$, o. s. v.

I 1) beräknas 15-falden af bråket lämpligen på särskild plats.

---

274. Beräkning af ett tal, som innehåller *en* jämn del af ett tal.

A. Ex. 419. Huru stor är hvarje del, när 1 m. lika 5-delats, b) 2 m. lika 5-delats, c) 8 m. lika 5-delats, d) 17 lika 6-delats?

b) Se § 254. I c) innehåller svaret 1 m. och $\frac{1}{5}$ af 3 m. = $1\frac{3}{5}$ m.

Om 1 m. visas vid utredningen, är det lämpligt att upptaga sorten m. i exemplet. Annars är upptagandet af så väl den som hvarje annan konkret sort olämpligt i inledningsexemplen.

Efter muntlig lösning af dylika uppgifter betecknas svaret både före uträkningen och efter uträkningen så: a) 1 m. : 5 = $\frac{1}{5}$ m. samt $\frac{1}{5}\times1$ m. = $\frac{1}{5}$ m. — Jfr med § 249!

B. Ex. 420. Huru stor är hvarje del, när 4 femdelar lika 2-delats?

Muntlig uträkning på 2 sätt: 1) såsom i heltalsläran, hvarvid hvarje del innehåller samma sort som det hela.

2) Därvid innehåller uträkningen 2 delar. Först beräknas $\frac{1}{2}$ af $\frac{1}{5}$, sedan $\frac{1}{2}$ af $\frac{4}{5}$.

Skriftliga uträkningar: 1) $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{2}{5}$.

2) $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{2 \cdot 5} = \frac{2}{5}$ eller $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{2 \cdot 5}$ (eller $\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5}$).

Grunden för det senare sättet inöfvas i följande afdelning.

C. Vid öfvergång till denna afdelning, i hvilken den beräknade delen vanligen blir uttryckt i annan bråksort än den, i hvilken det uppgifna hela är uttryckt, ligger mycket stor vikt på genomgång af sådana ex., som förekomma i § **263**. Redogörelse sammanställes med skrifning så, att barnen förstå den nya nämnarens uppkomst. Ur redogörelsen måste nämnarens 2-faldigande, 3-faldigande, o. s. v. framgå. Här betonas, att 2-faldigandet af blott nämnaren i ett bråk gifver upphof till ett bråk, som är $\frac{1}{2}$ af det förra. O. s. v. För att beräkna ett bråk, som är $\frac{1}{2}$ af ett annat bråk, måste alltså det senares nämnare 2-faldigas.

Liksom i § **250** skall den nya sorten först bestämmas. Det sker därigenom, att de nya delarnas antal i talet 1 beräknas. Sålunda bildas den nya nämnaren.

Ex. 421. Huru stor är hvarje del, när a) $\frac{1}{2}$ lika 3-delats, b) $\frac{1}{3}$ lika 2-delats, c) $\frac{1}{5}$ lika 4-delats, d) $\frac{2}{5}$ lika 4-delats?

a)-svaret: $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$, eller $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$.

Märk den riktiga ordningen mellan faktorerna 3 och 2 i nämnaren!

d) Hvarje del är dubbelt så stor som i c); ty det hela är dubbelt så stort.

$\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{4 \cdot 5} = \frac{1}{10}$ eller $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{1}{10}$.

Ex. 422. a) $2\frac{1}{2} : 4$; b) $12\frac{3}{8} : 12$.

I stället kan skrifvas: a) $\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{12} \times 12\frac{3}{8}$.

a) $2\frac{1}{2} : 4 = \frac{5}{2} : 4 = \frac{5}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8}$ eller $\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 2}$.

b) $12\frac{3}{8} : 12 = \frac{99}{8 \cdot 12} = \frac{33}{32} = 1\frac{1}{32}$. Eller

$12\frac{3}{8} : 12 = 1 + \frac{3}{8} : 12 = 1\frac{1}{32}$.

Det senare sättet i b) kan sällan tillämpas.

I sammanhang med denna afdelning upptagas med fördel beteckning och uträkning af ett tal, som innehåller flera jämna delar af ett efterföljande tal.

275. Beräkning af ett tal, som innehåller flera jämna delar af ett efterföljande tal.

Stor vikt ligger därpå, att barnen i sammanhang redogöra för innebörden af ett sådant tal. Jfr med § **250** och ex. 32 sid. 24! Se ock ex. 45 sid. 33!

Ex. 423. Hvad menas med a) $\frac{3}{8}$ af 4, b) $\frac{5}{6}$ af 12 hl.?

a) $\frac{3}{8}$ af 4 är ett tal, som innehåller 3 delar med $\frac{1}{8}$ af 4 i hvarje del. b) $\frac{5}{6}$ af 12 hl. är en rymd, som innehåller 5 delar med $\frac{1}{6}$ af 12 hl. i hvarje del.

Ex. 424. Huru mycket är a) $\frac{3}{8}$ af 4, b) $\frac{5}{6}$ af 12 hl.?

Tankegången består i alla dylika fall af 2 delar: 1) Bestämmande af en sådan del, 2) besvarande af frågan.

a) $\frac{1}{8}$ af 4 är 4 åttadelar; $\frac{3}{8}$ af $4 = 3$ ggr $\frac{4}{8} = 3$ ggr $\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Beteckning. a) $\frac{3}{8} \times 4$; b) $\frac{5}{6} \times 12$ hl.

Inskärpande af tankegången sker så: $\frac{3}{8} \times 4 = 3 \times \frac{4}{8}$.

Vid förekomst af konkret sort frånses den konkreta sorten alltid under uträkningen, och rättas det skrifna därefter, ty blott bråk förkortas. Sorten skrifves efter bråket.

$\frac{5}{6} \times 12$ hl. $= \frac{5 \cdot 12}{6}$ hl.

Ex. 425. Huru mycket är a) $\frac{1}{3}$ af $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$ af $\frac{1}{2}$, c) $\frac{4}{5} \times \frac{3}{10}$?

a) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \cdot 2}$; b) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}$; c) $\frac{4}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 10}$.

Den betecknade produkten bör före all förkortning sammanfattas i **ett** bråk, annars förstå barnen icke förkortningen.

Om tiden medgifver, så kan s. k. »förkortning korsvis» inläras och inskärpas. Med *förkortning korsvis menas att dela ett bråks täljare och ett annat bråks nämnare med lika tal.*

Ex. 426. a) $\frac{7}{8} \times 5\frac{3}{5}$; b) $3\frac{3}{4} \times 5\frac{3}{5}$.

I a) kan visserligen beräknas först $\frac{7}{8}$ af 5 och sedan $\frac{7}{8}$ af $\frac{3}{5}$. Men detta sätt medför i allmänhet besvärliga räkningar. Fördenskull uttryckes talet $5\frac{3}{5}$ först i bråk. Sedan utföres räkningen så som i ex. 425.

I b) kan uträkningen bestå af 5 delar: 1) 3×5; 2) $3 \times \frac{3}{5}$; 3) $\frac{3}{4} \times 5$; 4) $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$; 5) Summan af de 4 talen. Men uträkningen blir i allmänhet synnerligen besvärlig. — Bäst är att först uttrycka alla faktorerna i bråk och sedan utföra räkningen så som i 425 c). $3\frac{3}{4} \times 5\frac{3}{5} = \frac{15}{4} \times \frac{28}{5} = 21$.

Den första faktorns uttryckande i bråk leder till det bästa sättet att utsäga hela det gifna talet. Det är mindre lämpligt att säga $3\frac{3}{4}$ gånger $5\frac{3}{5}$ än att säga $\frac{15}{4}$ af $5\frac{3}{5}$.

Ex. 427. Huru mycket kosta 5 bräder, då 1 tolft sådana kostar 7 kr. 80 öre?

Tankegångar: I. Först eftertänkes värdet af 1 bräde, sedan af 5 bräder.

II. Först eftertänkes, huru stor del af 1 tolft bräder 5 bräder är (= förhållandet mellan 5 bräder och 1 tolft bräder).

Uträkningar: I. a) Heltalsläran tillämpas. Svar: $5 \times \frac{780}{12}$ öre.

b) Bråkläran tillämpas. Svar: $5 \times \frac{7,80}{12}$ kr. eller $5 \times \frac{7\frac{8}{10}}{12}$ kr.

II. Bråkläran tillämpas. Svar: $\frac{5}{12} \times 780$ öre eller $\frac{5}{12} \times 7,80$ kr. eller $\frac{5}{12} \times 7\frac{4}{5}$ kr.

När $5 \times \frac{7,80}{12}$ uträknas, skola talen 7,80 och 12 först hundrafaldigas. Då öfverstrykes decimalkommat i talet 7,80 samt tillsättes faktorn 100 bredvid 12. Därigenom bildas $5 \times \frac{780}{100 \cdot 12}$, hvarefter talet blir $\frac{5 \cdot 780}{100 \cdot 12}$, hvilket sedan förkortas. Eller ock användes den genvägen att först dela både 7,80 och 12 med samma tal. Denna genväg motsvarar innehållet i §§ **198** och **242**.

---

270. Om förhållandet mellan storheter.

A. Förhållandet är ett helt tal.

Grund för beräkningen lika som i § **244**.

Ex. 428. Huru många äro delarna, när a) 12 kr. delats så, att hvarje del är 2 kr., b) 12 femdelar delats så, att hvarje del är 2 femdelar? Svar: a)—b) 6.

Efter och i omedelbart sammanhang med muntlig lösning betecknas svaret både så, att förhållandetecknet skrifves, och efter uträkning. Vidare inskärpes, att hänsyn bör tagas lika litet till de lika nämnarna i de liknämniga bråken som till den uppgifna sorten, då denna är utskrifven.

Skriftligt. b) 1) 12 femdelar : 2 femdelar = 12 : 2 = 6; samt

2) $\frac{12}{5} : \frac{2}{5} = \frac{12}{2} = 6$. *Pröfning:* $6 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$.

I senare fallet böra punkterna under räkningen utbytas mot strecket för blifvande förkortnings skull. I början är det ej behöfligt, men emedan det är nödvändigt sedermera, så är bäst, att det sker från början.

I 2) märkas på nämnarna, att talen äro uttryckta i samma sort. Sorten frånses, alltså frånses nämnarna, och den förra täljaren delas med den senare.

Ex. 429. Huru många äro delarna, när a) 1 tioöre delats så, att hvarje del är 2 öre, b) 1 delats så, att hvarje del är $\frac{1}{5}$, c) $\frac{1}{2}$ delats så, att hvarje del är $\frac{1}{10}$?

Skriftligt. b) $1 : \frac{1}{5} = \frac{5}{5} : \frac{1}{5} = \frac{5}{1} = 5$.

$\frac{5}{1}$ utsäges icke 5 endelar. I det talet angifver 5 femdelarnas antal i det hela och 1 femdelarnas antal i den uppgifna delen. Det bör utsägas: 5 genom 1.

c) Bråken göras liknämniga. Här kan den nya nämnaren vara huru stor som helst, ty den uträknas icke, utan man frånser den, så snart de liknämniga bråken bildats. De nya täljarna uträknas i allmänhet icke heller genast. Fördenskull blir liknämniggörandet enklare än i det fall, att summan af eller skillnaden mellan bråk beräknas. Jämför med det tredje stycket af § 268!

$\frac{1}{2} : \frac{1}{10} = \frac{10 \cdot 1}{10 \cdot 2} : \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 10} = \frac{10}{2} = 5$.

Ex. 430. a) $4\frac{1}{2} : \frac{3}{8}$; b) $6\frac{3}{4}$ kg. : $1\frac{7}{20}$ kg.; c) $2\frac{1}{4}$ hg. : 15 gr.

Uträkning. a) $4\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{9}{2} : \frac{3}{8} = \frac{8 \cdot 9}{8 \cdot 2} : \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 8} = \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 12$.

b) $6\frac{3}{4}$ kg. : $1\frac{7}{20}$ kg. $= 6\frac{3}{4} : 1\frac{7}{20} = \frac{27}{4} : \frac{27}{20} = \frac{20 \cdot 27}{20 \cdot 4} : \frac{4 \cdot 27}{4 \cdot 20}$.

c) $2\frac{1}{4}$ hg. : 15 gr. $= 2\frac{1}{4}$ hg. : $\frac{15}{100}$ hg. $= \frac{9}{4} : \frac{15}{100}$; o. s. v.

Förvandling från hg. till gram medför tillämpning af heltalsläran.

B. Förhållandet är ett bråk eller blandadt tal.

Ex. 431. Huru stor del af a) 6 är 1, b) 5 är 3?

Genom muntlig beräkning af svaren och därpå följande beteckning af dem märkes, att de beräknas genom att dela den uppgifna delen med det hela.

a) $1 : 6 = \frac{1}{6}$; b) $3 : 5 = \frac{3}{5}$. Pröfning: $\frac{1}{6}$ af $6 = 1$. b) $\frac{3}{5}$ af $5 = 3$.

Ex. 432. Huru stor del af 1 m. är a) 1 dm., b) 9 dm.?

a)-svaret betecknas så som i ex. 431. 1 dm. : 1 m. Därefter måste både den uppgifna delen och det hela uttryckas i samma sort. Detta är kändt förut; här måste det inskärpas. Den konkreta sorten frånses sedan liksom i ex. 430.

1 dm. : 1 m. = 1 dm. : 10 dm. $= 1 : 10 = \frac{1}{10}$.

Pröfning: $\frac{1}{10}$ af 1 m. = 1 dm.

b) 3 dm. : 1 m. = 3 dm. : 10 dm. $= 3 : 10 = \frac{3}{10}$.

Pröfning: $\frac{3}{10}$ af 1 m. = 3 dm.

Denna pröfning motsvarar pröfningen i ex. 428 b).

Ex. 433. Huru stor del af $2\frac{1}{16}$ är $\frac{51}{70}$?
$\frac{51}{70} : 2\frac{1}{16} = \frac{51}{70} : \frac{33}{16} = \frac{16 \cdot 51}{16 \cdot 70} : \frac{70 \cdot 33}{70 \cdot 16} = \frac{16 \cdot 51}{70 \cdot 33} = \frac{136}{385}$.

Ex. 434. Beräkna förhållandet mellan a) $\frac{1}{4}$ hl. och $\frac{1}{2}$ hl., b) $42\frac{1}{2}$ kg. och $\frac{7}{8}$ kg.!

a) $\frac{1}{4}$ hl. : $\frac{1}{2}$ hl. $= \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Pröfning: $\frac{1}{2}$ af $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

b) $42\frac{1}{2}$ kg. : $\frac{7}{8}$ kg. $= 42\frac{1}{2} : \frac{7}{8} = \frac{85}{2} : \frac{7}{8} = \frac{8 \cdot 85}{8 \cdot 2} : \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 8} = \frac{8 \cdot 85}{2 \cdot 7} = \frac{340}{7} = 48\frac{4}{7}$. Pröfning: $\frac{340}{7} \times \frac{7}{8}$ kg. $= 42\frac{1}{2}$ kg.

Märk! Vid pröfningen användes bråket $\frac{340}{7}$, icke det blandade talet $48\frac{4}{7}$.

---

277. Omvända förhållanden.

Ex. 435. a) Förhållandet mellan 3 och 1 är $3:1$ eller 3. b) Det omvända förhållandet, förhållandet mellan 1 och 3, är $1:3$ eller $\frac{1}{3}$.

Ex. 436. a) Förhållandet mellan 3 och 5 är $3:5$ eller $\frac{3}{5}$. b) Det omvända förhållandet, förhållandet mellan 5 och 3, är $5:3$ eller $\frac{5}{3}$.

Ex. 437. a) Förhållandet mellan $42\frac{1}{2}$ och 1 är $42\frac{1}{2}$ eller $\frac{85}{2}$. b) Omvändt är förhållandet mellan 1 och $42\frac{1}{2}$ talet $1 : 42\frac{1}{2}$ eller $\frac{2}{85}$.

I ex. 436 a) märkes af täljaren och nämnaren, att bråket innehåller 3 lika delar, och att talet 1 innehåller 5 sådana delar. I b) märkes tvärt om, att bråket innehåller 5 lika delar och att talet 1 innehåller blott 3 sådana delar. — I ex. 437 b) kan förhållandet uttryckas både med talet $42\frac{1}{2}$ och talet $\frac{85}{2}$. Beskaffenheten af det omvända förhållandet märkes icke af talet $42\frac{1}{2}$, men af talet $\frac{85}{2}$. Af det talet märkes omedelbart, att det omvända förhållandet till $\frac{85}{2}$ är $\frac{2}{85}$.

---

278. Två lika förhållanden.

Sådana förekomma i praktiska uppgifter (problem), s. k. regula-de-triuppgifter. Därvid äro flera fall tänkbara. De enklaste motsvarande hafva förekommit i afdelningarna hela tals mångfaldigande och likadelning. Se äfven § **201**!

A. Värdet af en enhet uppgifves. Man skall beräkna värdet af en mångfald af den uppgifna enheten eller af en del af denna enhet. Denna del innehåller antingen blott *en* jämn del däraf eller några jämna delar däraf.

Ex. 438. 1 kg. ost kostar $\frac{3}{4}$ kr. Huru mycket kosta 4 kg. sådan ost?

Utredning. 4 kg. innehåller 4 delar med 1 kg. i hvarje del. Värdet af 4 kg. skall då äfven innehålla 4 delar med $\frac{3}{4}$ kr. i hvarje del. Svar: $4 \times \frac{3}{4}$ kr. $= 3$ kr.

Ex. 439. 1 kg. ost kostar 80 öre. Huru mycket kostar a) $\frac{1}{2}$ kg., b) $\frac{4}{5}$ kg. (= 800 gr.)?

Utredning. a) $\frac{1}{2}$ kg. är $\frac{1}{2}$ af 1 kg. Alltså skall värdet vara $\frac{1}{2}$ af 80 öre. — Skriftligt: $\frac{1}{2} \times 80$ öre eller 80 öre : 2.

b) $\frac{4}{5}$ kg. är $\frac{4}{5}$ af 1 kg. Alltså skall värdet af $\frac{4}{5}$ kg. vara $\frac{4}{5}$ af 80 öre. — Skriftligt: $\frac{4}{5} \times 80$ öre $= \frac{4 \cdot 80}{5}$ öre $=$ 64 öre.

B. Värdet af en mångfald uppgifves. Då beräknas värdet af en enhet, uttryckt i samma sort, eller af en del af en sådan enhet.

Ex. 440. 7 kg. ost kosta $5\frac{1}{4}$ kr. Huru mycket kostar a) 1 kg., b) $\frac{3}{5}$ kg. (= 6 hg. = 600 gr.)?

Utredning. a) 1 kg. är $\frac{1}{7}$ af 7 kg.; värdet af 7 kg. är $5\frac{1}{4}$ kr.; alltså är värdet af 1 kg. $\frac{1}{7}$ af $5\frac{1}{4}$ kr. — Skriftligt: $\frac{1}{7} \times 5\frac{1}{4}$ kr. eller $5\frac{1}{4}$ kr. : $7 = \frac{21}{7 \cdot 4}$ kr. $= \frac{3}{4}$ kr. $=$ 75 öre.

b) Värdet af $\frac{3}{5}$ kg. skall vara lika stor del af värdet af 7 kg. som $\frac{3}{5}$ kg. är del af 7 kg. *Eller.* Förhållandet mellan värdet af $\frac{3}{5}$ kg. och värdet af 7 kg. skall vara = förhållandet mellan $\frac{3}{5}$ kg. och 7 kg.

Den andra utsagan är lättare att säga, ty den är språkriktigare.

Tankegång. Först beräknas förhållandet mellan $\frac{3}{5}$ kg. och 7 kg., sedan besvaras frågan.

Uträkning. 1) $\frac{3}{5}$ kg. : 7 kg. $= \frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{5} : \frac{5 \cdot 7}{5} = \frac{3}{5 \cdot 7} = \frac{3}{35}$.

2) $\frac{3}{35} \times 5\frac{1}{4}$ kr. $= \frac{3 \cdot 21}{35 \cdot 4}$ kr. $= \frac{9}{20}$ kr. $=$ 45 öre.

Eller ock eftertänkes först värdet af 1 kg., sedan värdet af $\frac{3}{5}$ kg.

Uträkning då: $\frac{3}{5} \times \frac{5\frac{1}{4}}{7}$ kr. $= \frac{3 \cdot 21}{5 \cdot 7 \cdot 4}$ kr. $= \frac{9}{20}$ kr.

C. Värdet af en storhet, som innehåller några lika delar af en enhet, uppgifves. Värdet af enheten beräknas.

Ex. 441. Hvad kostar 1 kg. garn, då $\frac{2}{5}$ kg. däraf kostar $2\frac{4}{5}$ kr.?

Förhållandet mellan 1 kg. och $\frac{2}{5}$ kg. $= \frac{5}{5}$ kg. : $\frac{2}{5}$ kg. $= \frac{5}{2}$. — Emedan 1 kg. är $\frac{5}{2}$ af $\frac{2}{5}$ kg., måste värdet af 1 kg. vara $\frac{5}{2} \times 2\frac{4}{5}$ kr. $= \frac{5}{2} \times \frac{14}{5}$ kr. $=$ 7 kr.

Märk! Beräkningen af förhållandet mellan 1 kg. och $\frac{2}{5}$ kg. bör stanna vid talet $\frac{5}{2}$. Det talet bör ej ändras till $2\frac{1}{2}$. Om så skedde, så skulle $2\frac{1}{2}$ sedan åter utbytas mot $\frac{5}{2}$.

D. Värdet af en storhet, som innehåller både några enheter och några delar af den enheten, uppgifves. Värdet af en annan storhet, som innehåller enheten eller några sådana enheter och några delar af densamma, beräknas.

Ex. 442. $42\frac{1}{2}$ kg. sill kosta 17 kr. Huru mycket kostar a) 1 kg., b) $\frac{7}{8}$ kg., c) $2\frac{3}{4}$ kg. däraf?

a) Förhållandet mellan 1 kg. och $42\frac{1}{2}$ kg. beräknas. Det är 1 kg. : $42\frac{1}{2}$ kg. $= \frac{2}{2} : \frac{85}{2} = \frac{2}{85}$. Alltså kostar 1 kg. $\frac{2}{85}$ af 17 kr.

b) Förhållandet mellan $\frac{7}{8}$ kg. och $42\frac{1}{2}$ kg. $= \frac{7}{8} : \frac{85}{2} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 8} : \frac{8 \cdot 85}{8 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 7}{8 \cdot 85} = \frac{7}{340}$. Alltså kostar $\frac{7}{8}$ kg. $\frac{7}{340} \times 17$ kr. $=$ 35 öre.

c) Förhållandet mellan $2\frac{3}{4}$ kg. och $42\frac{1}{2}$ kg. $= \frac{11}{4} : \frac{85}{2} = \frac{2 \cdot 11}{4 \cdot 85} = \frac{11}{170}$. Alltså kostar $2\frac{3}{4}$ kg. $\frac{11}{170} \times 17$ kr. $= 1{,}1$ kr.

E. Värdet af en del af en enhet är uppgifvet. Värdet af en annan del af densamma efterfrågas.

Ex. 443. $\frac{1}{2}$ hl. hvete kostar $9\frac{1}{2}$ kr. Huru mycket kostar $\frac{1}{4}$ hl.?

Förhållandet mellan $\frac{1}{4}$ hl. och $\frac{1}{2}$ hl. $= \frac{1}{4}$ hl. : $\frac{1}{2}$ hl. $= \frac{1}{2}$. Värdet är $\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{2}$ kr.

F. Två värden och en mängd, som har det ena värdet, äro kända. En mängd, som har det andra värdet, efterfrågas.

Ex. 444. För 5 kr. 40 öre köptes 7 tjog 4 ägg. Huru många ägg köptes för 2 kr. 85 öre?

Förhållandet mellan 2 kr. 85 öre och 5 kr. 40 öre är $\frac{285}{540}$. Antalet af de för 2 kr. 85 öre köpta äggen var således $\frac{285}{540} \times 7\frac{1}{5}$ tjog $= \frac{285 \cdot 36}{540 \cdot 5}$ tjog $= 3\frac{4}{5}$ tjog.

Detta sätt är lika enkelt som att först beräkna värdet af 1 tjog ägg eller af 1 ägg, hvilket äfven här kan ske.

Om värdet af 1 tjog ägg först eftertänkes, så kan det betecknas 5 kr. 40 öre : $7\frac{1}{5}$ enligt samma grund, som är angifven i tredje uträkningen vid ex. 358 å sid. 172. Öretalet kan då också beräknas enligt det där angifna sättet, sedan det betecknats så: $540 : 7\frac{1}{5}$. Uträkningen däraf skulle då ske på följ. sätt: $540 : 7\frac{1}{5} = \frac{5 \cdot 540}{5} : \frac{36}{5} = \frac{5 \cdot 540}{36} = 75$. Detta sätt, som icke beror på exemplets innebörd, och som ju fördenskull kan sägas vara ett konstladt sätt, behöfver aldrig förekomma, när läran om förhållande tillämpas så, som skett i denna §. Sedan värdet af 1 tjog ägg beräknats, skall hufvudfrågan besvaras. — Sättet att beräkna värdet af 1 tjog ägg, utan att så mycket skrifves som enligt denna paragraf, kräfver större tankeansträngning och behandlas fördenskull i den andra bråkkursen i § **283** ex. 452.

Allmänna bråk. Fullständig kurs.

279. Denna kurs omfattar svårare fall af bråks liknämniggörande och af bråks likadelning.

280. För **bråks liknämniggörande** fordras då fullständigare kännedom om hela tals uppdelning i faktorer och primfaktorer, till följd hvaraf det, som är framställdt i §§ **214—230**, dessförinnan genomgås.

Ex. 445. Liknämniggör $\frac{55}{84}$, $\frac{17}{96}$, $\frac{35}{72}$ och $\frac{59}{108}$!

Uträkningen består af 3 delar. 1. Den nya nämnarens bestämmande, ej uträknande. 2. Beräkning af förlängningstalen. 3. Förlängning af de olika bråken, allt eftersom förlängningstalen beräknats.

De nya bråkens nämnare bestämmes enligt uträkningen af ex. 304 å sid. 151. Den är $4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 7 \times 4 \times 3$ eller $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7$ eller $2 \cdot 3^3 \cdot 4^2 \cdot 7$. Det talet behöfver ej uträknas. Sedan beräknas det tal, med hvilket $\frac{55}{84}$ skall förlängas. Då den nya nämnaren delats med 84, som är $= 4 \cdot 3 \cdot 7$, så uppstår ett tal, som innehåller de öfriga faktorerna (utom 4, 3 och 7) i den nya nämnaren nämligen 2, 3, 4 och 3. Det talet är $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$ eller, uträknadt, 72. Alltså förlänges $\frac{55}{84}$ med 72. — På samma sätt finnes, att $\frac{17}{96}$ skall förlängas med $3 \cdot 3 \cdot 7$ eller 63, att $\frac{35}{72}$ skall förlängas med $7 \cdot 4 \cdot 3$ eller 84, och talet $\frac{59}{108}$ skall förlängas med $2 \cdot 7 \cdot 4$ eller 56.

$\frac{55}{84} = \frac{72 \cdot 55}{72 \cdot 84} = \frac{3960}{6048}$. $\quad \frac{17}{96} = \frac{63 \cdot 17}{63 \cdot 96} = \frac{1071}{6048}$.

$\frac{35}{72} = \frac{84 \cdot 35}{84 \cdot 72} = \frac{2940}{6048}$. $\quad \frac{59}{108} = \frac{56 \cdot 59}{56 \cdot 108} = \frac{3304}{6048}$.

281. I sammanhang därmed kan beräknas summan af de gifna bråken och skillnaden mellan 2 och 2 af dem.

Ex. 446. Huru mycket är summan af $\frac{55}{84}$, $\frac{35}{84}$ och $\frac{59}{108}$?

Uträkning. $\frac{55}{84} + \frac{35}{84} + \frac{59}{108} = \frac{3960 + 2940 + 3304}{6048} = \frac{10204}{6048} = 1\frac{4156}{6048} = 1\frac{1039}{1512}$.

Det mångsiffriga bråket kan afkortas genom att utesluta en eller två siffror i både täljaren och nämnaren. $\frac{1039}{1512}$ blir därigenom i det närmaste $= \frac{103}{151}$ eller $\frac{10}{15}$ eller efter dettas förkortning $\frac{2}{3}$. Om det först beräknade bråket $\frac{10204}{6048}$ afkortades, så uppstode i stället $\frac{1020}{604}$ eller $\frac{102}{60}$, som är $1\frac{42}{60} = 1\frac{7}{10}$. Detta tal är något riktigare närmevärde af den beräknade summan än talet $1\frac{2}{3}$.

282. Tals omvända värde.

Jämför med § 277!

Ex. 447. Omvändt **värde mot** hvarandra hafva a) $\frac{2}{3}$ och $\frac{3}{2}$, b) 5 och $\frac{1}{5}$, c) $\frac{7}{9}$ och $\frac{9}{7}$, d) $\frac{4}{11}$ och $\frac{11}{4}$ ($2\frac{3}{4}$), e) $\frac{3}{4}$ kg. och $\frac{4}{3}$ kg. ($1\frac{1}{3}$ kg.), f) $\frac{2}{9}$ kr. och $\frac{9}{2}$ kr. ($4\frac{1}{2}$ kr.).

283. De svårare likadelningsexemplen äro de, i hvilka storleken (värdet) af en enhet, det hela, beräknas, när man känner storleken (värdet) af det, som innehåller några lika delar af denna enhet, af det hela. Därvid skrifves ej så mycket som enligt § **278**, utan användes den s. k. enhetsmetoden. Tankegången består af 2 delar: 1) En af de lika delarnas storlek (värde) bestämmes och betecknas. 2) Storleken eller värdet af samtliga delarna bestämmes.

I några inledningsexempel betonas innebörden af sådana uttryck som: $\frac{2}{3}$ af något, $\frac{3}{8}$ af något, o. s. v. och beräknas sedan *en* sådan dels storlek eller värde. I andra inledningsexempel beräknas storleken eller värdet af samtliga delarna i en större enhet, när en sådan dels storlek eller värde är kändt. Jämför med ex. 356!

Ex. 448. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{3}{8}$ af en stenhög innehöll 24 stenar. Huru många stenar innehöll a) $\frac{1}{3}$ af högen, b) $\frac{1}{8}$ af högen?

Ledning. a) De 2 delarna äro tillsammans 24. En af dem är alltså en 2-del af 24. b) Stenarnas antal i *en* af de 3 delarna är 1 tredel af 24.

Uppfattningen underlättas genom att betona delarnas antal så, som skett vid denna ledning. Däremot försvåras uppfattningen, i fall man fasthåller bråkuttrycken $\frac{2}{3}$ och $\frac{1}{3}$.

Då skulle man säga: $\frac{2}{5}$ är 24; men det är tydligen ofattbart för barnet, ty $\frac{2}{5}$ är blott $\frac{2}{5}$. Meningen är riktig, men barnen förstå den ej. Där underförstås »af alla». Då de orden upptagas i meningen, är saken klar för barnen: $\frac{2}{5}$ **af alla är 24.** En sådan sammandragning som »$\frac{2}{5}$ är 24» må läraren ej tillåta sig.

I ex. 448 betonas ett **tal.** En annan gång betonas något **konkret.** Då passar äfven att säga t. ex.: De 2 delarna innehålla tillsammans 24 gossar. Däremot passar ej att säga: $\frac{2}{5}$ är 24 gossar.

Ex. 449. a) En 5-del af ett snöre är 2 dm. lång. Huru långt är hela snöret?

En af snörets 5 lika delar är 2 dm. Hela snöret innehåller 5 **sådana** delar. Alltså är det 5×2 dm.

Ex. 450. $\frac{2}{5}$ **af ett snöre** är 4 dm. Huru långt är **hela** snöret?

Tankegångar. 1. a) Först eftertänkes, huru lång en **af de 2** delarna är. b) Sedan eftertänkes längden **af 5** sådana delar tillhopa eller längden af hela snöret.

2. Först bestämmes, huru långt $\frac{1}{5}$ af snöret är, sedan hela snörets längd.

Beteckning. a) $\frac{4}{2}$ dm., icke [illegible]
b) $5 \times \frac{4}{2}$ dm. $= \frac{5 \cdot 4}{2}$ dm.

Barnen skola öfvas att angifva tankegången i ett sammanhang och icke blott svara på specialfrågorna: a) Huru lång är en del? b) Huru långt är hela snöret?

Odugligt är att säga: Först beräknas (eftertänkes) $\frac{1}{5}$, sedan $\frac{5}{5}$.

Genom betoning däraf, att det efterfrågade innehåller 5 delar **med 1** af de 2 gifna delarna i hvarje del, lära barnen sig, att svaret på hufvudfrågan är $\frac{5}{2}$ af 4 dm., och att det kan betecknas $\frac{5}{2} \times 4$ dm.

Pröfning: $\frac{2}{5} \times 10$ dm. $= 4$ dm.

På grund af den pröfningen inses, att svaret på frågan i ex. 450 kan omedelbart betecknas så: 4 dm. : [illegible]
4 dm. : $\frac{2}{5}$ angifver alltså en längd, af hvilken 4 dm. är $\frac{2}{5}$.

Märk! 1. Emedan 4 dm. : $\frac{2}{5} = \frac{5}{2} \times 4$ dm., förstås, att 4 vid uträkningen mångfaldigas med det omvända värdet till $\frac{2}{5}$. Det kan angifvas såsom regel i detta fall.

Märk! 2. Den ingående redogörelsen vid uträkningen i dylika fall leder visserligen till innebörden af det märkvärdiga uttrycket »vända upp och ned på divisorn». Men den leder dessutom nödvändigt därtill, att ordningen mellan talen bör ändras på samma gång. **Orätt** är det alltså att skrifva: $4 : \frac{2}{5} = 4 \times \frac{5}{2}$. **Rätt** är däremot $4 : \frac{2}{5} = \frac{5}{2} \times 4$. Emellertid bör uttrycket »vända upp och ned på divisorn» aldrig användas. Se sista raden på föregående sida!

Märk! 3. I dylika ex. hafva barnen stor hjälp af nämnaren, som i ex. 450 angifver, att talet $4 : \frac{2}{5}$ eller det hela innehåller 5 delar. Täljaren 2 däremot angifver antalet af sådana delar i talet 4.

Ex. 451. a) 12 kr. : $\frac{8}{9}$ angifver en penningsumma, af hvilken den uppgifna delen 12 kr. innehåller $\frac{8}{9}$. b) 5 hl. : $\frac{4}{7}$ angifver en rymd, af hvilken 5 hl. innehåller $\frac{4}{7}$.

Se äfven ex. 466 å sid. 207!

Ex. 452. 7 tjog 4 ägg kosta 5 kr. 40 öre. Huru mycket kostar 1 tjog ägg?

Utredning. 7 tjog 4 $= 7\frac{1}{5}$ tjog $= \frac{36}{5}$ tjog. $\frac{36}{5}$ tjog innehåller 36 delar så stora som 1 af de 5 lika delarna i 1 tjog. Tvärt om innehåller 1 tjog 5 sådana delar som 1 af de 36 lika delarna i $\frac{36}{5}$ tjog eller är 1 tjog $= \frac{5}{36}$ af $\frac{36}{5}$ tjog. Till följd däraf skall priset för 1 tjog ägg vara $\frac{5}{36}$ af priset för $\frac{36}{5}$ tjog ägg eller $\frac{5}{36}$ af 5 kr. 40 öre.

Svaret på frågan: 5 kr. 40 öre : $7\frac{1}{5}$ = 540 öre : $7\frac{1}{5}$ = 75 öre.

Uträkning. $540 : 7\frac{1}{5} = 540 : \frac{36}{5} = \frac{5}{36} \times 540 = \frac{5 \cdot 540}{36} = 75.$

---

284. Dessutom beaktas af läraren följande.

Ex. 453. a) $10 \times \frac{4}{5} = 8$. b) $\frac{4}{5} \times 10 = 8$.

Däraf härledas c) $8 : 10 = \frac{4}{5}$, d) $8 : \frac{4}{5} = 10$.

c) kan härledas af både a) och b). När c) är härledt af a), angifver $8 : 10$ hvarje dels storlek, då 8 lika tiodelats. Pröfning: $10 \times \frac{4}{5} = 8$. — När c) härledes af b), angifver $8 : 10$ förhållandet mellan 8 och 10 och kan $8 : 10$ alltså vara svar på frågan: Huru stor del af 10 är 8? Pröfning: $\frac{4}{5} \times 10 = 8$. Då märkes, att 8 innehåller 4 delar med $\frac{1}{5} \times 10$ i hvarje del. Innebörden i detta fall motsvarar fullkomligt innebörden vid hela tals likadelning i det fall, att delarnas antal beräknas.

Likaså kan d) härledas af både a) och b). I förra fallet angifver $8 : \frac{4}{5}$ delarnas antal, när 8 delats så, att hvarje del är $\frac{4}{5}$ (= förhållandet mellan 8 och $\frac{4}{5}$). Pröfning: $10 \times \frac{4}{5} = 8$. — I senare fallet angifver $8 : \frac{4}{5}$ det tal, af hvilket 8 är $\frac{4}{5}$. Pröfning: $\frac{4}{5} \times 10 = 8$.

Här märkes alltså, att innebörden af ett s. k. sifferexempel med likadelstecken alltid kan vara 2-faldig. Jämför med sista stycket af § **139** och ex. 51 å sid. 37! Däremot har ett så betecknadt »sakexempel» blott en innebörd. Se ex. 239 a), b), 337, 340 c), 430 b), c) och 452!

Förhållande.

A. Storheters inbördes storlek.

Se §§ **45—51**!

285. Storheters jämförelse med hvarandra grundas på läran om det hela och dess delar. Den större storheten innehåller antingen blott 2 olika delar, af hvilka den ena är gifven. Den andra delen kan då beräknas, och genom denna angifves sambandet mellan de uppgifna storheterna. Eller ock innehåller den större storheten 2 eller flera lika delar så stora som den mindre eller ock innehålla båda storheterna sådana lika delar, att hvarje del af den ena är = hvarje del af den andra.

Ex. 454. Penningsumman 20 kr. innehåller delarna 18 kr. och 2 kr. Det betecknas: 20 kr. = 18 kr. + 2 kr.

Ex. 455. Penningsumman 20 kr. innehåller 10 delar med 2 kr. i hvar del. Betecknas: 20 kr. = 10×2 kr.

Ex. 456. a) 20 kr. innehålla 20 delar, hvar och en så stor som 1 af de 7 delarna af 7 kr. eller, som det säges kortare, 20 kr. är tjugu sjudelar af 7 kr. Det betecknas 20 kr. = $\frac{20}{7} \times 7$ kr. b) Omvändt innehålla 7 kr. 7 delar, hvar och en så stor som en af de 20 delarna i 20 kr. Kortare säges fördenskull om 7 kr.: 7 kr. är 7 tjugudelar af 20 kr.

286. Ex. 457. På grund af ex. 454 kan a) 20 kr. jämföras med 18 kr., b) 20 kr. jämföras med 2 kr. och c) 18 kr. jämföras med 20 kr., samt d) 2 kr. jämföras med 20 kr.

I a) besvaras frågan: Huru mycket äro 20 kr. mer än 18 kr.? Svaret betecknas: 20 kr. — 18 kr. Uträknadt, blir det 2 kr. Jämförelsen gäller då 20 kr. Och därom utsäges i full sats så: 20 kr. äro 2 kr. mer än 18 kr.

I b) besvaras frågan: Huru mycket äro 20 kr. mer än 2 kr.? Svaret betecknadt: 20 kr. — 2 kr., uträknadt: 18 kr.

I c) besvaras frågan: Huru mycket mindre än 20 kr. äro 18 kr.? Svar: 20 kr. — 18 kr. eller 2 kr. Utsagan gäller då 18 kr. Därom utsäges i full sats så: 18 kr. äro 2 kr. mindre än 20 kr.

I d) besvaras frågan: Huru mycket mindre än 20 kr. äro 2 kr.? Svar: 20 kr. — 2 kr. eller 18 kr. Här jämföras 2 kr. Därom säges i full sats så: 2 kr. äro 18 kr. mindre än 20 kr.

I fullständiga satser jämföras 20 kr. och 2 kr. med hvarandra enligt ex. 457 sålunda:

a. 20 kr. äro 18 kr. mer än 2 kr.

b. 2 kr. äro 18 kr. mindre än 20 kr.

Ex. 458. a) På grund af ex. 455 jämföras 20 kr. med 2 kr. genom att besvara frågan: Huru många äro delarna, då 20 kr. delats så, att hvarje del är 2 kr.? eller: Huru många ggr innehållas 2 kr. i 20 kr.? eller: Huru många ggr 2 kr. äro 20 kr.? Svaren betecknas i alla fall: 20 kr. : 2 kr., som uträknadt blir 10. Sambandet mellan 20 kr. och 2 kr. angifves då genom talet 10. Om 20 kr. säges då: 20 kr. äro 10 ggr 2 kr. Betecknas: 20 kr. $=$ 10 $\times$ 2 kr.

b) **Omvändt** jämföras 2 kr. med 20 kr. genom att besvara frågan: Huru stor del af 20 kr. äro 2 kr.? I heltalsläran betecknas detta svar icke före uträkningen, utan utsäges blott svaret 1 tiodel, som härledes däraf, att 2 kr. innehålla en af de 10 lika delarna af 20 kr. Då bråk kunna betecknas, betecknas det däremot före uträkningen så: 2 kr. : 20 kr., som uträknadt blir 0,1. Sambandet mellan 2 kr. och 20 kr. angifves då genom talet 0,1. På grund däraf bildas följande utsaga om 2 kr.: 2 kr. äro 1 tiodel af 20 kr. Beteckning: 2 kr. $= \frac{20}{10}$ kr. Eller 2 kr. $=$ 0,1 $\times$ 20 kr.

I fullständiga satser jämföras 20 kr. och 2 kr. med hvarandra enligt detta ex. sålunda: a) 20 kr. äro 10 ggr 2 kr., och b) 2 kr. äro 1 tiodel af 20 kr.

B. Förhållande.

287. Då den större storheten är mångfald af den mindre eller den mindre är jämn del af den större eller båda äro mångfalder af deras gemensamma jämna del, och de jämföras med hvarandra, angifves *förhållandet* mellan dem. Den, som säges (skrifves) först, kallas då den *föregående storheten*, och den, som säges (skrifves) sist, kallas den *efterföljande storheten*. Se ex. 458! I a) angifves förhållandet mellan 20 kr. och 2 kr., i b) angifves det *omvända* förhållandet, d. v. s. förhållandet, då storheterna upptagas i omvänd ordning, förhållandet mellan 2 kr. och 20 kr. Sambandet mellan storheterna, talen 10 i a) och 0,1 i b), kallas *förhållandetal*. Tecknet mellan de 2 uppgifna storheterna kallas *förhållandetecken*.

Då den ena är mångfald af den andra, kan det ömsesidiga förhållandet lätt angifvas utan kännedom om bråkläran. Förhållandet mellan den större och den mindre kan då alltid angifvas med helt tal, som är delarnas antal. Däraf sluter man sig till förhållandet mellan den mindre och den större, hvilket då icke kan betecknas med tal på vanligt sätt utan med talet 1 och ett utskrifvet ord. Se ex. 458!

Märk! Noga beaktas, hvilkendera af de gifna storheterna jämföres och med hvilken han jämföres. Den, som jämföres, är alltid subjekt i satsen och skall således sägas (skrifvas) först. Om barnen hafva benägenhet att kasta om ordningen, måste den rätta ordningen inskärpas. I heltalsläran blifva de vana att jämföra den större med den mindre. Så sker äfven, när de säga: 2 i 20 går 10 gånger. Det märkes bäst vid pröfningen: 10×2 är 20. Men därvid får det ej alltid stanna, utan ibland måste utsagan gälla den mindre storheten. Då är det ej tillräckligt, att läraren säger det rätta påståendet, utan barnen måste omsäga det, så att de väl inskärpa det riktiga. Pröfning blir då: 1 tiodel af 20 är 2. Denna sista sats hafva de lärt sig i en af likadelningstabellerna.

Ex. 458*. Emedan 20 kr. och 2 kr. kunna fördelas i delar med 1 kr. i hvarje del, kunna följande utsagor bildas: a) 20 kr. äro 20 tvådelar af 2 kr. och b) 2 kr. är 2 tjugudelar af 20 kr.

a. Då måste först eftertänkas den storhet, som är jämn del af båda. 1 kr. är en sådan storhet och den största. 20 kr. innehålla 20 sådana delar, och 2 kr. innehålla 2 sådana delar. 1 kr. är alltså 1 tiodel af 2 kr. Emedan 20 kr. innehålla 20 delar med 1 tvådel af 2 kr. i hvarje del, äro 20 kr. 20 tvådelar af 2 kr. — Tankegången innehåller således 4 delar: bestämmande af 1) den gemensamma jämna delen, 2) förhållandet mellan denna del och den efterföljande storheten, 3) förhållandet mellan den föregående storheten och den jämna delen, 4) förhållandet mellan den föregående och efterföljande storheten.

b. Tankegången består äfven här af 4 delar: Bestämmande af 1) den gemensamma jämna delen, 1 kr., 2) förhållandet mellan den och 20 kr., 3) förhållandet mellan 2 kr. och 1 kr., 4) förhållandet mellan 2 kr. och 20 kr.

Ex. 459. Angif det ömsesidiga förhållandet mellan 1 m. och 7 dm.!

Denna uppgift innehåller 2 uppgifter. a) Angif förhållandet mellan 1 m. och 7 dm.! b) Angif förhållandet mellan 7 dm. och 1 m.!

Emedan den större storheten 1 m. ej kan fördelas så, att hvarje del är 7 dm., så måste båda delas så, att hvarje del blir jämn del af både 1 m. och 7 dm. Därför måste de först uttryckas i samma sort.

a) Förhållandet mellan 1 m. och 7 dm. är 10 sjudelar. Om 1 m. säges därför: 1 m. är 10 sjudelar af 7 dm. b) Förhållandet mellan 7 dm. och 1 m. är 7 tiodelar. Om 7 dm. säges fördenskull: 7 dm. är 7 tiodelar af 1 m.

Om de icke uttryckas i samma sort, så kunna de jämföras med hvarandra blott på följande obestämda sätt: 1 m. är mer än 7 dm., och 7 dm. är mindre än 1 m.

Uppgiften 459 a) kan icke utbytas mot: »Huru många äro delarna, då 1 m. delats så, att hvarje del är af 7 dm.?» ej heller mot: »Huru många ggr gå 7 dm. i 1 m.?» ty svaret är icke ett helt tal. Ej heller kan man fråga: »Huru stor del af 7 dm. är 10 dm.?» ty svaret är större än 1. I detta fall är blott det uttryck lämpligt, i hvilket ordet förhållande säges.

288. Förhållandet mellan 1 m. och 7 dm. betecknas och uträknas så: 1 m. : 7 dm. eller $\frac{1 \text{ m.}}{7 \text{ dm.}} = \frac{10 \text{ dm.}}{7 \text{ dm.}} = \frac{10}{7}$.

Det omvända förhållandet, förhållandet mellan 7 dm. och 1 m., betecknas och beräknas så: 7 dm. : 1 m. $= \frac{7}{10}$.

Talet, som angifver förhållandet mellan 1 m. och 7 dm., är $\frac{10}{7}$ ($1\frac{3}{7}$).

Talet, som angifver förhållandet mellan 7 dm. och 1 m., är blott $\frac{7}{10}$.

Då de äro mångfalder af en gemensam jämn del, bör förhållandet mellan dem ej omtalas förr, än bråkläran behandlats. Se ex. 456!

Rätteligen angifves alltid förhållandet mellan den mindre storheten och den större med ett bråk: Ex. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$.

Ex. 460. I st. f. att fråga: Huru många äro delarna, då a) 20 kr. delats så, att hvarje del är 2 kr., b) 12 m. delats så, att hvarje del är 3 m., kan således frågas: Hvilket tal angifver förhållandet mellan a) 20 kr. och 2 kr., b) 12 m. och 3 m.?

Ex. 461. I st. f. att fråga: Huru stor del af a) 20 kr. äro 2 kr., b) 12 m. äro 3 m., kan man alltså fråga: Hvilket tal angifver förhållandet mellan a) 2 kr. och 20 kr., b) 3 m. och 12 m.?

Märk! Frågan »huru stor del af —» är nödvändig i heltalsafdeln., om ordet förhållande ej införes där, emedan blott därigenom det oriktiga uttrycket »Huru många ggr mindre än» kan utrotas.

---

289. Däraf att 20 kr. äro 18 kr. mer än 2 kr., erhålles ett mer sammansatt sätt att angifva förhållandet mellan 20 kr. och 2 kr. Om 20 kr. säges då så: 20 kr. äro 9 ggr mer än 2 kr. Utsagan är sammandragen af följande: 20 kr. äro 9 ggr 2 kr. mer än 2 kr.

I enlighet därmed skulle man om 2 kr. kunna säga så: 2 kr. äro 9 ggr 2 kr. mindre än 20 kr. Den utsagan bör dock ej sammandragas till: 2 kr. äro 9 ggr mindre än 20 kr.

290. 4 m. innehåller 3 m. + 1 m. eller 1 m. mer än 3 m.; 3 m. = $\frac{3}{3}$ af 3 m., och 1 m. är $\frac{1}{3}$ af 3 m. Däraf härledes följande utsaga: 4 m. är $\frac{1}{3}$ af 3 m. mer än 3 m. eller kortare: 4 m. är $\frac{1}{3}$ mer än 3 m.

3 m. innehåller 3 sådana delar som $\frac{1}{4}$ af 4 m. och är således 1 sådan del mindre än 4 m. I följd däraf, kan uttrycket: 3 m. är $\frac{3}{4}$ af 4 m. utbytas mot: 3 m. är $\frac{1}{4}$ af 4 m. mindre än 4 m. eller kortare 3 m. är $\frac{1}{4}$ mindre än 4 m.

Motsvarande förkortade uttryck förekomma ofta i procentuppgifter.

Märk! Då ordet gånger förekommer omedelbart framför ordet mer, så underförstås alltid den af storheterna med afseende på hvilken jämförelsen sker (= den efterföljande storheten). Däraf beror, att olika tal förekomma i samlandet mellan storheterna, då ordningsföljden ändras.

Till följd däraf är utsagan: 2 kr. äro 9 ggr mindre än 20 kr. ej lämplig. Dessutom bör beaktas, att svaret på frågorna: »Huru mycket mer är en storhet än en annan?» och: »Huru mycket mindre är en storhet än en storhet?» i allmänhet blott bör utsägas såsom skillnad mellan de uppgifna storheterna. Se ex. 457! **Aldrig böra de frågorna användas, då man vill, att barnen skola svara, t. ex. 10 eller 1 tiodel eller dylikt.**

291. Märk olikheten mellan följande 2 uttryck: a) Hvad är $\frac{1}{3}$ mer än 3 m.? (Svar: 4 m.) b) Hvad är $\frac{1}{3}$ m. mer än 3 m.? (Svar: $3\frac{1}{3}$ m.)

Märk äfven olikheten mellan följande 2 uttryck: c) Hvad är $\frac{1}{4}$ mindre än 4 m.? (Svar: 3 m.) d) Hvad är $\frac{1}{4}$ m. mindre än 4 m.? (Svar: $3\frac{3}{4}$ m.)

När talstorheter jämföras med hvarandra, så underförstås alltid »af 1» vid användande af det i § **290** angifna förkortade uttryckssättet.

Ex. 462. a) Hvilket tal är $\frac{1}{3}$ mer än 3? Svar: $3\frac{1}{3}$. b) Hvilket tal är $\frac{1}{4}$ mindre än 4? Svar: $3\frac{3}{4}$.

292. Ex. 463. Bergman har $25\frac{1}{5}$ kg. råg. Danielsson har a) $\frac{1}{3}$ mer, b) $\frac{1}{3}$ mindre, c) [illegible] mindre. Huru mycket har Danielsson?

Utredning. a): Danielsson har $\frac{1}{3}$ mer än $25\frac{1}{5}$ kg. eller $25\frac{1}{5}$ kg. + $\frac{1}{3}$ af $25\frac{1}{5}$ kg. eller, emedan $25\frac{1}{5}$ kg. är $\frac{3}{3}$ af $25\frac{1}{5}$ kg., $\frac{4}{3}$ af $25\frac{1}{5}$ kg. Det betecknas: $\frac{4}{3} \times 25\frac{1}{5}$ kg.

b) Danielssons förråd är $\frac{1}{3}$ mindre än $25\frac{1}{5}$ kg. eller $25\frac{1}{5}$ kg. så när som $\frac{1}{3}$ af $25\frac{1}{5}$ kg. Det kan betecknas på 2 sätt: 1) $25\frac{1}{5}$ kg. $- \frac{1}{3} \times 25\frac{1}{5}$ kg. 2) Emedan det är 1 af de 3 delarna i $25\frac{1}{5}$ kg. mindre än $25\frac{1}{5}$ kg., så innehåller det så mycket som de öfriga 2 delarna af $25\frac{1}{5}$ kg. eller $\frac{2}{3}$ af $25\frac{1}{5}$ kg.

Af samma skäl c-svaret: 1. $25\frac{1}{5}$ kg. $- \frac{2}{5} \times 25\frac{1}{5}$ kg. eller
2. $\frac{3}{5} \times 25\frac{1}{5}$ kg.

Ex. 464. I en församling dogo 140 personer ett år. Ett annat 5 % mindre. Huru många dogo det året?

Svar: 1) $140 - 0{,}05 \times 140$ eller 2) $0{,}95 \times 140$.

Svaret 2) härledes af 1) så: När 5 af de hundra delarna i 140 äro borttagna, återstå **95** sådana delar.

Ex. 465. Borrar af en sort kosta $\frac{3}{4}$ kr. stycket. Huru mycket kostar 1 dussin af en annan sort, som är $\frac{1}{3}$ dyrare?

Ex. 466. Andersson köper 24 hl. hafre. Detta är blott $\frac{3}{11}$ af Gustafssons förråd. Huru stort är detta?

Af uppgiften märkes, att 24 hl. är $\frac{3}{11}$ af det efterfrågade förrådets storlek eller att 24 hl. innehåller 3 af de 11 lika delarna af det efterfrågade. Detta innehåller alltså 11 delar med $\frac{1}{3}$ af 24 hl. i hvarje del eller är $\frac{11}{3}$ af 24 hl.

Ex. 467. Axel betalade till Birger $\frac{7}{16}$ af sin skuld med 224 kr. Huru mycket återstod?

Utredningar: 1. Först eftertänkes hela skulden, sedan återstoden.

$\frac{7}{16}$ af skulden var 224 kr. Följaktligen innehöll afbetalningen, 224 kr., 7 af skuldens 16 lika delar. Omvändt innehöll hela skulden 16 delar, hvar och en så stor som 1 af de 7 delarna af 224 kr. eller $\frac{16}{7}$ af 224 kr. Återstoden var $\frac{16}{7}$ af 224 kr. — 224 kr.

2. Först eftertänkes förhållandet mellan återstoden och afbetalningen.

Afbetalningen, 224 kr., innehöll 7 af skuldens 16 lika delar. Alltså innehöll återstoden de öfriga 9 delarna eller 9 så stora delar som 1 af de 7 delarna af 224 kr., eller var förhållandet mellan återstoden och 224 kr. $\frac{9}{7}$. Alltså svaret $\frac{9}{7} \times 224$ kr.

Ex. 468. Om man till ett tals fjärdedel och femtedel lägger $13\frac{3}{4}$, så erhålles hela talet. Hvilket tal är det?

Utredning: Talet innehåller 3 delar: $\frac{1}{4}$ däraf, $\frac{1}{5}$ däraf och $13\frac{3}{4}$. Först beräknas förhållandet mellan summan af delarna och det hela (= huru stor del af hela talet summan af de båda första delarna innehåller). Sedan beräknas förhållandet mellan den tredje delen och det hela (= huru stor del af det hela den tredje delen är) och slutligen talets storlek.

Uträkning: Summan af de båda första delarna är $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ af det hela eller $\frac{9}{20}$ af det hela. Den innehåller alltså 9 af det helas 20 lika delar. Tredje delen innehåller de öfriga 11 delarna. En af dem är följaktligen $\frac{1}{11}$ af $13\frac{3}{4}$. Det hela eller alla 20 delarna tillhopa = $\frac{20}{11} \times 13\frac{3}{4}$ eller 25.

Ofta säges, att den första delen är $\frac{1}{4}$ och den andra delen $\frac{1}{5}$. Men i det fallet skulle hela talet vara $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + 13\frac{3}{4} = 14\frac{1}{5}$.

Om ekvation bildades på grund af uppgiften, minskades tankeansträngningen, och kunde de nu vanliga felen vid redogörelse och uträkning undvikas.

Ex. 469. Fru Larsson köpte kött för $\frac{3}{8}$ af sin kassa, fisk för $\frac{1}{5}$ däraf, diverse grönsaker för $\frac{1}{4}$ däraf och såpa för $\frac{1}{10}$ däraf samt hade sedan 18 öre öfver. Huru stor var hennes kassa?

Lösning 1. = lösning af ex. 468. Då beräknas först, huru stor del af kassan var utgifven för alla köpen = förhållandet mellan summan af alla utgifterna och hela kassan ($\frac{3}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{37}{40}$). Sedan beräknas, huru stor del af kassan den öfriga delen, 18 öre, var (= förhållandet mellan 18 öre och hela kassan). ($\frac{40}{40} - \frac{37}{40} = \frac{3}{40}$). Slutligen beräknas hufvudfrågans svar. 18 öre innehåller $\frac{3}{40}$ af kassan. Omvändt innehåller kassan $\frac{40}{3}$ af 18 öre.

Lösning 2. Ekvation bildas på grund af exemplet. Svaret betecknas då från början med x öre. I ekvationen upptagas blott öretalen. Enligt ex. bildas följande ekvation:

$$1.\quad x - \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{10}x = 18.$$

Sedan beräknas, huru stor del af x summan af de 4 första delarna innehåller. $\frac{3}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{37}{40}$.

Därefter erhålles ekvation 2) $x - \frac{37}{40}x = 18$.

Emedan $\frac{40}{40}x - \frac{37}{40}x = \frac{3}{40}x$, uppstår ekvation 3) $\frac{3}{40}x = 18$.

Emedan $\frac{3}{40}$ af $x = 18$, så är ekvation 4) $x = \frac{40}{3} \times 18$ eller $\frac{40 \cdot 18}{3} = 240$. x öre = 240 öre = 2 kr. 40 öre.

Den första ekvationen kan ombildas till

1) $x - \frac{3x}{8} - \frac{x}{5} - \frac{x}{4} - \frac{x}{10} = 18$, 2) $\frac{40x}{40} - \frac{15x}{40} - \frac{8x}{40} - \frac{10x}{40} - \frac{4x}{40} = 18$, 3) $\frac{3x}{40} = 18$; däraf fås 4) $3x = 40 \cdot 18$; 5) $x = \frac{40 \cdot 18}{3} = 240$.

Den ursprungliga ekvationen kan äfven hafva följande utseende:

$$x - (\tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{10}x) = 18.$$

eller $x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{10}x + 18$.

---

293. Om framställningen af **lika** delars antal förekommer från början af räkneundervisningen i småskolan och får fortgå hela småskolekursen igenom följdriktigt, så möter ingen svårighet att i folkskolan införa ordet

»förhållande» vid behandling af läran om hela tal i lämpliga fall. Det behöfver ej förekomma i de enklaste fallen, då hela tal användas. Men de enklaste fallen skola framställas på ett sådant sätt, att de bilda en säker öfvergång till uppfattning af ordet förhållande.

Ex. 470. Huru många äro delarna, då 10 öre delats så, att hvarje del är a) 1 öre, b) 2 öre, c) 5 öre?

Huru stora äro delarna sins emellan i a), i b) i c)? Hvad är uppgifvet i dessa 3 ex.? Svar: Det hela och en af dess lika delar.

När vi säga: delarna äro a) 10, b) 5, c) 2, hafva vi angifvit: a) förhållandet mellan 10 öre och 1 öre, b) förhållandet mellan 10 öre och 2 öre samt c) förhållandet mellan 10 öre och 5 öre. Det höres, då vi säga: a) 10 öre är 10 ggr 1 öre; b) 10 öre är 5 ggr 2 öre; c) 10 öre är 2 ggr 5 öre. I alla fallen tala vi om 10 öre och jämföra den penningsumman med en annan penningsumma.

Ex. 471. Hvilket tal angifver förhållandet mellan a) 10 öre och 5 öre, b) 10 öre och 2 öre, c) 10 öre och 1 öre? Svar: a) 2, b) 5, c) 10. — Svaren pröfvas: a) 2 ggr 5 öre är 10 öre. O. s. v.

Ex. 472. Hvilken mångfald af a) 5 öre är 10 öre, b) 2 öre är 10 öre, c) 1 öre är 10 öre? Svar: a) 2-fald, b) 5-fald, c) 10-fald. Pröfning.

Därvid påvisas, att förhållandet också angifves mellan samma storheter som i föreg. ex. Sedan ombytes ordningsföljden mellan de förut upptagna storheterna.

Ex. 473. Huru stor del af 10 öre är a) 1 öre, b) 2 öre, c) 5 öre.

Härvid betonas i heltalsläran, att man först **måste** eftertänka de lika delarnas antal. Sedan besvaras frågan: Svar: a) 1 tiodel, b) 1 femdel, c) 1 tvådel. Se f. ö. § **48**! Sedan angifves, att det i dylika frågor är fråga om förhållandet mellan en af de lika delarna och det hela, och att detta märkes vid svarets utsägande i full sats: a) 1 öre är 1 tiodel af 10 öre. Delen säges då före det hela. Då ordningsföljden mellan storheterna så omkastats, angifves ett »omvändt förhållande» mot förut. Förhållandet mellan 10 öre och 1 öre är 10; omvändt är förhållandet mellan 1 öre och 10 öre 1 tiodel. — Detta inöfvas.

Märk! 1. **Alla tal, så väl hela tal som bråk, äro förhållandetal.**

2. Man bör ej uppskjuta för länge att meddela innebörden af ordet förhållande. Det går lätt, då man under hela den föregående tiden fasthåller läran om det hela och dess delar, huru olika exemplen än lyda.

3. I heltalsläran kan förhållandet betecknas blott då, när det är helt tal, och utsägas blott då, när det är helt tal eller ett däremot svarande omvändt förhållande.

C. Om 2 lika förhållanden.

294. Sådana förekomma vid lösning af flerehanda praktiska uppgifter, som bruka hänföras till »mångfaldigande» och »likadelning».

Ex. 474. Hvad kosta 3 kg. socker, då 1 kg. socker kostar 70 öre?

Utredning: 3 kg. socker innehålla 3 delar med 1 kg. socker i hvarje del. Därför skall priset för 3 kg. socker innehålla 3 delar med priset för 1 kg. socker i hvarje del.

Först verkställes utredningen så: Huru mycket kostar a) det första kg.? b) det andra? c) det tredje? d) alltsammans? (Svar: a) 70 öre, b) 70 öre, c) 70 öre, d) 3 ggr 70 öre.)

Eller så: Huru mycket kostar den första delen, 1 kg.? den andra delen? den tredje delen? alltsammans?

Därefter påvisas, att värdet af 3 kg. socker innehåller 3 lika delar lika väl som 3 kg. Och sedan saken inskärpts under småskoletiden och första delen af folkskoletiden, möter ingen svårighet att öfvergå till uttryck, som innehålla ordet förhållande. Vid nu anförda exempels lösning, skulle då sägas ungefär så: Då man säger »3 kg. är 3 ggr 1 kg.» angifves förhållandet mellan 3 kg. och 1 kg. Det märkes på orden *3 gånger*. Då jag säger 2 kr. 10 öre är 3 ggr 70 öre, så säger jag också *3 ggr* vid jämförelsen. Därför är förhållandet mellan priset för 3 kg. och priset för 1 kg. lika stort som förhållandet mellan 3 kg. och 1 kg.

Exempel gifvas för inskärpande däraf. Svaren böra sägas i full sats.

Ex. 475. a) Angif förhållandet mellan 3 kg. och 1 kg.! Svar: 3 kg. är 3 ggr 1 kg. b) Angif förhållandet mellan priset för 3 kg. och priset för 1 kg.! Svar: Priset för 3 kg. är 3 ggr priset för 1 kg.

Fastän barnen före behandlingen af detta kunna jämföra någorlunda stora tal, böra små eller lätt jämförbara tal och lätt jämförbara konkreta storheter upptagas i exemplen, på det att barnens uppmärksamhet må riktas på det nya i detta fall. Öfningarna blifva äfven företrädesvis hufvudräkningsöfningar, hvarvid all tanke på skrifna tal måste vara aflägsnad. Här gäller uteslutande, att barnen höra lärarens frågor och tänka därpå, för att uppfattningen skall blifva riktig. Dessa öfningar kunna vara gemensamma för folkskolans alla klasser, då första klassen nått en viss mognad, oberoende af det område, hvarmed de olika barnen äro sysselsatta vid den tysta räkningen.

Oaktadt räkningen är ren hufvudräkning, är en sådan uppställning som vid ex. 261 å sid. 140 ofta lämplig.

295. De mot föregående fall omvända lika förhållandena inläras och inskärpas.

Ex. 476. 3 m. domestik kosta 78 öre. Huru mycket kostar 1 m. däraf?

Utredning: 1) 1 m. är 1 af de 3 lika delarna af 3 m. Därför skall priset för 1 m. vara 1 af de 3 lika delarna af priset för 3 m. Svaret på frågan blir alltså omedelbart: 1 tredel af 78 öre, eller betecknadt $\frac{78 \text{ öre}}{3}$ eller $\frac{78}{3}$ öre. Då talet 1 tredel kan betecknas, betecknas svaret på uppgiftens fråga äfven så: $\frac{1}{3} \times 78$ öre.

2) 1 m. är 1 tredel af 3 m., alltså skall priset för 1 m. äfven vara 1 tredel af priset för 3 m. eller 1 tredel af 78 öre.

3) Förhållandet mellan priset för 1 m. och priset för 3 m. är lika stort som förhållandet mellan 1 m. och 3 m.

Märk! Vid användning af den s. k. enhetsmetoden tillämpas således också läran om förhållande.

D. Bildande af analogi.

296. Likhet mellan 2 förhållanden kallas analogi.

Ex. 477. a) Förhållandet mellan 10 m. och 2 m. är lika med förhållandet mellan 4 kr. och 80 öre betecknas så: 10 m. : 2 m. = 4 kr. : 80 öre.

b) Likheten mellan de omvända förhållandena betecknas så: 2 m. : 10 m. = 80 öre : 4 kr.

Då en af de 4 storheterna är obekant, kan den beräknas på grund af bildad analogi. I denna analogi betecknas antalet af den obekanta storhetens enheter med x.

Ex. 478. a) Huru mycket kostar 10 m. tyg, då 2 m. kostar 80 öre? b) Huru mycket kostar 300 gr. smör, när $2\frac{1}{2}$ kg. likadant smör kostar 4 kr. 13 öre?

Svaret bör helst från början bestämmas till x öre. Men har då ett kort och bestämdt uttryck att fasthålla.

Emedan förhållandet mellan x öre (priset för 10 m. tyg) och 80 öre (priset för 2 m. tyg) är lika med förhållandet mellan 10 m. och 2 m., så bildas först analogien.

$$x \text{ öre} : 80 \text{ öre} = 10 \text{ m.} : 2 \text{ m.}$$

Då analogi bildas, kan det konkreta bibehållas, huru det än är uppgifvet från början.

Sedan beräknas förhållandet mellan 10 m. och 2 m. Det är 5. Följaktligen är 10 m. 5 gånger 2 m. Likaså är x öre = 5 gånger 80 öre. Uträknadt blir det 400 öre = 4 kr.

b) Förhållandet mellan x öre och 413 öre = förhållandet mellan 300 gr. och $2\frac{1}{2}$ kg. Alltså analogien: x öre : 413 öre = 300 gr. : $2\frac{1}{2}$ kg.

Förhållandet mellan 300 gr. och $2\frac{1}{2}$ kg. $= \frac{3}{25}$. Emedan 300 gr. är $\frac{3}{25}$ af $2\frac{1}{2}$ kg., är x öre $= \frac{3}{25} \times 413$ öre $= 50$ öre.

Märk! Den första storheten är större än, lika stor som eller mindre än den andra, allt eftersom den tredje storheten är större än, lika stor som eller mindre än den fjärde.

E. Orsaker till återupptagande af ordet förhållande vid räkneundervisningen.

297. 1. Enhetsmetoden är en enskild tillämpning af läran om förhållande. Se ex. 474 och 475!

2. Många enkla uppgifter, som tillhöra heltalsläran, kunna annars ej lösas på enklaste sätt med tillämpning af heltalsläran.

Ex. 479. Hvad kostar 1 tjog ägg, då 4 ägg kosta 25 öre?

Ett tjog ägg innehåller 5 delar med 4 ägg i hvarje del eller är 5 ggr 4 ägg. Alltså kostar 1 tjog ägg 5×25 öre.

3. Nu, när bråkläran behandlas på ett allt mera förståndigt sätt, så att barnen verkligen få kunskap i densamma, möter ingen svårighet att direkt öfvergå från en mångfald till en annan mångfald af en storhet. Se ex. 442 och 444!

När bråk förekomma, är enhetsmetoden ofta mer ansträngande. Se ex. 508!

Ex. 480. Hvad kostar 17 dm. tyg, då 1 m. kostar 50 öre?

Barnen böra förut hafva fått lära sig, att 17 dm. är $\frac{17}{10}$ af 1 m. Enligt **294** förstå de då omedelbart, att tygstycket kostar $\frac{17}{10}$ af 50 öre, som betecknas: $\frac{17}{10} \times 50$ öre och uträknas sålunda: $\frac{17}{10} \times 50$ öre $= \frac{17 \cdot 50}{10}$ öre $= 17 \cdot 5$ öre $= 85$ öre.

4. Vid bråks förlängning, förkortning, liknämniggörande användas oupphörligt förhållandetal, då man säger: »Förläng med 4!» o. s. v.

5. Innebörden af uttryck, innehållande ordet procent, blir aldrig klar för lärjungarna genom det nu ofta använda sättet. I ordet procent ligger nyckeln till ett sätt att angifva förhållandet mellan 2 storheter.

Ex. 481. »Folkmängden i Uppsala utgjorde vid 1875 års slut 12 644 personer och vid 1885 års slut 20 202. Med huru många procent ökades folkmängden under denna 10-årsperiod?»

Svaret angifves ibland så: »$\frac{20\,202 - 12\,644}{126{,}44} = 59{,}8$ %.»

Där användes en enhetsmetod, i det att 1 procent af 12 644 först beräknats.

Talet $\frac{20\,202 - 12\,644}{126{,}44}$ är riktigt. Det är procenttalet. Här eftertänkes först, med huru många personer befolkningen ökats, sedan huru mycket 1 % af personernas antal vid slutet af år 1885 är, och slutligen huru många sådana delar den skillnaden innehåller. Sättet är riktigt. Men sedan följer det oriktiga slutsvaret 59,8 %. Procenttecknet får ej finnas där. När det tillsättes, försvinner den förut befintliga likheten, som angifves genom likhetstecknet.

Det exempel, som leder till svaret 59,8 %, bör lyda ungefär så:

Ex. 482. Folkmängden i Uppsala utgjorde 12 644 personer vid slutet af år 1875 och 20 202 personer vid slutet af år 1885. Angif förhållandet mellan folkmängdstillökningen och folkmängden vid 1875 års slut i %! Då kan det ofvan angifna riktiga sättet användas.

Flera lösningar angifvas i ex. 518 å sid. 238.

Vid ränteberäkning är utgångspunkten alltid förhållandet mellan räntans storlek och kapitalets storlek.

Ex. 483. Huru stor är räntan för 257 kr. efter 6 procent (eller efter 6 för hundradet)?

»Efter 6 för hundradet» innebär »efter 6 kr. för 100 kr.» Där märkes, att räntan är $\frac{6}{100}$ af kapitalet eller att förhållandet mellan räntan och kapitalet är $\frac{6}{100}$ eller 6 %.

Svar på frågan då: $\frac{6}{100} \times 257$ kr.

Ex. 484. Huru stor är räntan för 257 kr. under a) 4 mån., b) 5 mån. 8 dag. efter 6 % för år?

Till uppgifterna i ex. 483 har här kommit uppgift om tiden, under hvilken kapitalet var utlånadt. Det nya är då att eftertänka förhållandet mellan a) 4 mån. och 1 år, b) 5 mån. 8 dag. och 1 år.

a. Emedan 4 mån. är $\frac{1}{3}$ af 1 år, så är svaret $\frac{1}{3} \times \frac{6}{100} \times 257$ kr. $= \frac{6 \cdot 257}{3 \cdot 100}$ kr.

b. Emedan 5 mån. 8 dag. är 158 dagar samt förhållandet mellan 158 dagar och 1 år är $\frac{158}{360}$, så är svaret $\frac{158}{360} \times \frac{6}{100} \times 257$ kr. $= \frac{158 \cdot 6 \cdot 257}{360 \cdot 100}$ kr.

Däraf erhålles den allmänt använda *formeln för beräkning af räntans storlek* enligt gammal ordningsföljd mellan faktorerna: $r = \frac{kpt}{100}$. Enligt förestående ordningsföljd mellan faktorerna bör formeln ändras till: $r = \frac{tpk}{100}$.

Märk! 1. **Formel** kallas **en likhet**, som ligger till grund för beräkning af en storhet i alla liknande fall. Däri användas bokstäfver, emedan hvarje bokstaf kan utbytas mot hvilket tal som helst. Se sid. 32 och slutet af sid. 56!

Märk! 2. I denna formel betecknar r räntans krontal, k kapitalets krontal, p procenttalet och t antalet af år, under hvilka kapitalet är utlånadt. I formeln säges blott bokstäfvernas namn, icke ränta, kapital och dylikt. Det kan utläsas: »r är lika med tpk deladt med (genom) hundra.» **Aldrig säge** man »räntan är lika med tiden ggr procenten ggr kapitalet genom hundra» eller dylikt.

Blandade praktiska uppgifter med hela tal och bråk.

298. Dessa kunna fördelas i grupper 1) med afseende på sin enklare eller svårare, mer sammansatta beskaffenhet, 2) med afseende på sitt olika innehåll, hvarvid de, som hafva samma eller likartadt innehåll, sammanföras i en grupp.

I.

299. För de enklaste uppgifternas lösning fordras blott ett räknesätt. Svårigheten tilltager ofta, allt eftersom antalet af uppgifna storheter ökas. Sammansatta uppgifter kunna ofta lösas på flera sätt. Sådana exempel äro: 36, 37, 38, 46, 50, 75, 77, 92, 147, 149, 188, 189, 193, 194, 200—209, 221, 222, 224, 260; 100. — 70, 71, 72, 280, 264; 65, 67, 68, 69. M. fl.

Ex. 485. Per köpte $\frac{1\frac{1}{2}}{12}$ ton järn efter $23\frac{13}{25}$ kr. och $2\frac{3}{4}$ tusen spik samt betalade för allt 31 kr. 46 öre. Huru mycket kostade 1 000 spik?

Tankegång: Först eftertänkes värdet af järnet, sedan värdet af all spiken och slutligen svaret på frågan.

Ex. 486. På en $59\frac{1}{2}$ m. lång bro skall körbanan omläggas. Huru många tolfter plank erfordras, då hvarje planka är $3\frac{1}{2}$ m. lång, och banan upptager 18 plankor i bredd?

Tankegångar. **1.** Först eftertänkes, huru många plankor läggas i en rad, sedan huru många plankor åtgå i allt och slutligen svaret på frågan.

Beteckning: $\left(18 \times \frac{59\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}\right) : 12$. Det talet förenklas sedan till $\frac{18 \cdot 59\frac{1}{2}}{12 \cdot 3\frac{1}{2}}$ eller $\frac{18 \cdot 59\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}}{12}$.

2. Först eftertänkes, huru många meter (sträckmeter) 1 tolft plank innehåller, sedan huru många tolfter plank åtgå till en plankrad, sedan radernas antal, därefter svar på frågan.

Beteckning: $18 \times \frac{59\frac{1}{2}}{12 \cdot 3\frac{1}{2}}$.

3. Först eftertänkes, huru många plankor skola ligga bredvid hvarandra, sedan huru många sådana delar behöfvas till hela bron, sedan huru många plankor behöfvas i allt och slutligen svaret på frågan.

Beteckning: $\left(\frac{59\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} \times 18\right) : 12.$

Ex. 487. En handlande köpte 36 m. kläde efter $1\frac{3}{4}$ kr. Hälften däraf sålde han efter $2\frac{1}{2}$ kr. och det öfriga efter 3 kr. metern. Huru stor var vinsten?

Tankegångar: **1.** Först eftertänkes inköpspriset för allt, sedan försäljningspriset för den första delen, därefter försäljningspriset för den andra delen och slutligen svaret på frågan.

Beteckning: $\frac{36}{2} \times 2\frac{1}{2}$ kr. $+ \frac{36}{2} \times 3$ kr. $- 36 \times 1\frac{3}{4}$ kr.

2. Först eftertänkes vinsten för 1 m. af den första delen, sedan vinsten på den delen, så vinsten för 1 m. af den andra delen, därefter vinsten för den andra delen och slutligen vinsten för allt.

Beteckning: $\frac{36}{2} \times (2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4})$ kr. $+ \frac{36}{2} \times (3 - 1\frac{3}{4})$ kr.

3. Först eftertänkes medelförsäljningspriset för 1 m., sedan medelvinsten för 1 m. och slutligen svaret på frågan.

Beteckning: $36 \times \left(\frac{[illegible]}{[illegible]} - 1\frac{3}{4}\right)$ kr.

Detta sätt är ganska lätt i detta fall, emedan delarna af tyget äro lika stora.

Ex. 488. En handlande köpte 4 176 kg. hvetemjöl för 1 169 kr. 28 öre. Försäljningspriset var 3 öre mer för hvarje kg. Huru stort var a) inköpspriset för 1 kg., b) försäljningspriset för 1 kg.? c) Huru stor var vinsten för allt, då han bortvägde $\frac{1}{48}$ af förrådet?

Svar: a) 1 169 kr. 28 öre : 4 176 = 28 öre.

b) 28 + 3 öre = 31 öre.

Vid uträkning af c) beaktas, att summan af de försålda delarna väger mindre än 4 176 kg., emedan något bortväges vid hvarje försäljning såsom öfvervikt eller damm.

Tankegångar vid beräkning af c).

1. Först eftertänkes vikten af alla de försålda delarna tillsammans, sedan försäljningssumman för allt det sålda och slutligen vinsten.

Utredningar: Alla de försålda delarna väga tillsammans $4\,176 - \frac{4\,176}{48}$ kg. Försäljningssumman därför är $(4\,176 - \frac{4\,176}{48}) \cdot 31$ öre. Inköpssumman är 1 169 kr. 28 öre eller 116 928 öre. Vinsten alltså $(4\,176 - \frac{4\,176}{48}) \cdot 31$ öre — 116 928 öre eller 9 831 öre eller 98 kr. 31 öre.

Eller: Emedan 1 af de 48 lika delarna bortvägts, innehåller summan af de försålda delarna de öfriga 47 delarna eller $47 \times \frac{4\,176}{48}$ kg. eller $\frac{47}{48} \times 4\,176$ kg. Försäljningssumman är alltså $\frac{47}{48} \times 4\,176 \times 31$ öre, och vinsten $\frac{47}{48} \times 4\,176 \times 31$ öre — 116 928 öre.

2. Först eftertänkes, huru mycket de sålda delarna tillsammans innehöllo, sedan vinsten, om intet betalts för det bortvägda, därefter värdet af den mjölmängd, som förlorats vid försäljningen, och slutligen vinsten för allt.

Utredningar: Emedan 1 fyrtioåttadel af allt bortvägdes, innehåller summan af de försålda delarna 4 176 kg. så när som 1 fyrtioåttadel däraf eller $4\,176 - \frac{4\,176}{48}$ kg. För hvarje kg. vunnes 3 öre, om intet betalts för den förlorade delen. Vinsten skulle alltså i det fallet blifva $(4\,176 - \frac{4\,176}{48}) \times 3$ öre. Vid inköpet betalades äfven den bortvägda delen. Dess inköpspris var 1 fyrtioåttadel af hela inköpssumman eller $\frac{1\,169 \text{ kr. } 28 \text{ öre}}{48}$. Den penningsumman skall således borttagas. Vinsten var sålunda blott skillnaden mellan $(4\,176 - \frac{4\,176}{48}) \cdot 3$ öre och $\frac{1\,169 \text{ kr } 28 \text{ öre}}{48}$ eller såsom den kan betecknas: $(4\,176 - \frac{4\,176}{48}) \times 3$ öre $- \frac{1\,169 \text{ kr } 28 \text{ ore}}{48}$.

Eller: Emedan 1 af förrådets 48 lika delar bortvägts, innehåller summan af de försålda delarna 47 sådana lika delar eller är den $\frac{47}{48}$ af 4 176 kg. För hvarje kg. vunnes 3 öre, o. s. v.

Eller: Om intet bortvägts, hade vinsten varit $4\,176 \times 3$ öre. Den verkliga vinsten var mindre, ty den bortvägda delen betalades vid inköpet. Dessutom ingår i $4\,176 \times 3$ öre äfven vinsten för den bortvägda delen. Alltså skall $4\,176 \times 3$ öre minskas med både inköpspriset för den bortvägda delen och den förut tänkta vinsten efter 3 öre för hvarje kg. däraf. Svaret blir alltså betecknadt så:

$$4\,176 \times 3 \text{ öre} - \frac{1\,169 \text{ kr. } 28 \text{ öre}}{48} - \frac{4\,176}{48} \times 3 \text{ ore}.$$

3. Först eftertänkes vinsten, om intet bortvägts, sedan förlusten för det bortvägda och slutligen hela vinsten.

Utredning: Om intet bortvägts, hade vinsten varit $4\,176 \times 3$ öre. I den penningsumman ingår både inköpspriset för den bortvägda delen och den antagna vinsten för den samma. Alltså är förlusten för hvarje kg. däri $28 + 3$ öre eller 31 öre. Den bortvägda delen är $\frac{4\,176}{48}$ kg. Hela förlusten är alltså $\frac{4\,176}{48} \times 31$ öre. Den skall borttagas. Alltså blir den verkliga vinsten: $4\,176 \times 3$ öre — $\frac{4\,176}{48} \times 31$ öre.

Ex. 489. 1 hl. råg, som vägde 70,4 kg. och kostade 10,56 kr., maldes. Därvid bortgingo 2,9 kg. i tull och 1,5 kg. såsom damm. Huru mycket kostade 1 kg. mjöl?

Den del af spannmålen, som stundom lämnas såsom ersättning för malningen, kallas *tull.*

Tankegång: Först beräknas den vid malningen förlorade delen af säden, sedan det erhållna mjölet och slutligen priset för 1 kg. mjöl.

Ex. 490. En bagare malde 35 hl. råg. Hvarje hl. vägde 70,4 kg. och kostade 10,56 kr. Omkostnaderna för malning och bakning uppgingo till 88 öre för 10 kg. säd. Af 1 kg. säd erhölls 1,4 kg. mjukt bröd. a) Huru mycket mjukt bröd erhölls? b) Huru mycket kostade 1 kg. bröd?

Tankegång för a): Först bestämmes vikten af det bröd, som erhölls af 1 hl. säd, sedan frågans svar.

Svar: $35 \times 70{,}4 \times 1{,}4$ kg. eller 3 449,6 kg,

b) **1.** Först bestämmes värdet af all spannmålen, sedan omkostnaderna för allt, därefter alla utgifterna, så vikten af allt brödet och slutligen priset för 1 kg. bröd.

Den tankegången framträder vid svarets beteckning så:

$$\left(35 \cdot 10{,}56 \text{ kr.} + \frac{35 \cdot 70{,}4}{10} \times 88 \text{ öre}\right) : (35 \cdot 70{,}4 \cdot 1{,}4).$$

Eller **2.** Först eftertänkes inköpspriset för 1 kg. säd, sedan öfriga omkostnaderna för 1 kg. säd, därefter alla utgifterna, slutligen priset för 1 kg. bröd.

Utredning då: **70,4 kg. säd kostar 10,56 kr.**, alltså kostar 1 kg. $\frac{10{,}56}{70{,}4}$ kr. Omkostnaderna för 1 kg. säd $= \frac{88}{10}$ öre. Alla utgifterna för 1 kg. säd $= \frac{10{,}56}{70{,}4}$ kr. $+ \frac{88}{10}$ öre. Emedan 1,4 kg. bröd erhölls af 1 kg. säd, så var priset för 1,4 kg. bröd = priset för 1 kg. malen säd och således priset för 1 kg. bröd $= \left(\frac{10{,}56}{70{,}4}\text{ kr.} + \frac{88}{10}\text{ öre}\right) : 1{,}4.$

Ex. 491. Axel sade till Anna: Du har nu $3\frac{1}{2}$ kg. smör. Om du säljer mig $\frac{2}{3}$ däraf, så har jag $2\frac{1}{6}$ kg. mer, än du har kvar. Huru mycket har jag nu?

Tankegång: Först angifves vikten af det smör, som Axel skulle sälja till Anna, sedan bestämmes återstoden af Axels förråd, då han sålt Anna en del, därefter Annas dåvarande smörmängd och slutligen svaret på frågan.

Utredning: Det från Axel köpta smöret var $\frac{2}{3}$ af $3\frac{1}{2}$ kg., återstoden af Axels förråd var $\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{2}$ kg. Annas dåvarande förråd vägde $2\frac{1}{6}$ kg. mer än vikten af Axels dåvarande förråd eller $2\frac{1}{6}$ kg. + $\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{2}$ kg. Däraf var det från Axel köpta eller $\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{2}$ kg. en del, alltså skall den delen borttagas, hvadan hennes smörmängd från början var $2\frac{1}{6}$ kg. + $\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{2}$ kg. — $\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{2}$ kg.

Uträkning i sammanhang med utredning: Annas af Axel köpta smör vägde $\frac{2}{3}$ af $3\frac{1}{2}$ kg. eller $2\frac{1}{3}$ kg. Återstoden af Axels smör vägde $\frac{1}{3}$ af $3\frac{1}{2}$ kg. eller $1\frac{1}{6}$ kg. Annas dåvarande förråd vägde $2\frac{1}{6}$ kg. mer än Axels kvarvarande förråd eller $2\frac{1}{6}$ kg. + $1\frac{1}{6}$ kg. eller $3\frac{1}{3}$ kg. Däraf voro $2\frac{1}{3}$ kg. köpta af Axel. Hennes eget var från början alltså $3\frac{1}{3}$ kg. — $2\frac{1}{3}$ kg. eller 1 kg.

Ex. 492. 2 personer, A. och B., läto tillsamman uppföra ett hus, hvarvid A. betalade $\frac{2}{5}$ af omkostnaderna. Årliga hyrorna utgöra 400 kr. utom för deras bostäder, som beräknas till 260 kr. för A. och 300 kr. för B. Rustning går till 25 kr. 25 öre. a) Huru hög ränta får hvardera på sina utlagda penningar? b) Huru mycket erhåller hvardera af de 400 kr.?

Tankegång för a): Emedan byggnadssumman ej är uppgifven, kan a-frågan ej besvaras.

b) Först eftertänkas samtliga inkomsterna, hvilka bestå af samtliga hyrorna, deras egna inberäknade, därefter behållningen, sedan hvarderas andel af behållningen och slutligen hvarderas andel af de kontanta hyresmedlen 400 kr.

Utredning och uträkning: Samtliga inkomsterna utgöra 400 + 260 + 300 kr. = 960 kr. Behållningen 960 kr. — 25,25 kr. = 934,75 kr. Emedan A:s utgifter för husets byggande varit $\frac{2}{5}$ af hela byggnadssumman, så blir hans andel af behållningen $\frac{2}{5}$ af 934,75 kr. Därifrån afgår hyra för hans bostad 260 kr. Alltså blir hans kontanta andel $\frac{2}{5} \times 934{,}75$ kr. — 260 kr. = 373,90 — 260 kr. = 113,90 kr.

B:s andel blir $\frac{3}{5} \times 934{,}75$ kr. — 300 kr. = 560,85 kr. — 300 kr. = 260,85 kr.

Pröfning: 113,90 + 260,85 + 25,25 kr = 400 kr.

II. S. k. Regula-de-tri-uppgifter.

300. Dit höra sådana uppgifter, i hvilka 3 eller ett större, udda antal af bekanta storheter äro gifna i det sammanhang med hvarandra, att förhållandet mellan 2 och 2 af dem kan beräknas, på grund hvaraf förhållandet mellan den obekanta och öfverblifna bekanta storheten kan bestämmas för beräkning af den obekanta storheten. De kunna hafva hvarjehanda innehåll. Vissa af dem hafva särskilda namn, såsom procent-, ränte-, rabatt-, bolags-, blandnings- och medelvärdeuppgifter.

Intill midten af detta århundrade bildades först analogi, d. v. s. skrefs först likhet mellan 2 förhållanden. Sedan följdes vissa bestämda regler, hvilkas sanning oftast ej var insedd af den räknande. Fördenskull har skrifning af analogier och lösning enligt de förut gifna reglerna öfvergifvits, och man har infört den s. k. enhetsmetoden, d. v. s. det sätt, att vid räkningen öfvergå från mångfald till enhet och från enhet till mångfald, emedan den skulle befordra en redig tankegång. Dess användning medför dock i somliga fall så stora svårigheter för barnen, att den då bör förkastas. I andra fall, ehuru de oftast förekomma blott i räkneböcker, i de s. k. sammansatt-regula-de-tri-uppgifterna, blir den långtrådig och enformig. I andra fall, då talen äro lätt jämförbara med hvarandra och de konkreta storheterna likaså, bör man öfvergå från en mångfald omedelbart till en annan mångfald. Då den s. k. enhetsmetoden användes, böra ledfrågorna inledas med orden: »Huru många», så att svaret på dem blir blott ett tal. Om hufvudfrågan inledes annorlunda, så angifves svaret på henne sedan.

S. k. enkel-regula-de-tri-uppgifter.

A. **301.** Se ex. 36—39, 57, 174, 260—264, 330, 351, 352, 355, 427, m. fl.!

Ex. 493. 5 m. väf köpes för 10 kr. Huru mycket dylik väf köpes för 9 kr.?

På grund af exemplet uppskrifvas följande satser i sammandragen form: 5 m. köpas för 10 kr.; x m. köpas för 9 kr.

5 m. 10 kr.	eller	x m. 9 kr.	När x m. understrykes, märkes, att svaret skall innehålla sorten m. och icke innehålla blott tal.
x » 9 »		5 » 10 »	

Två fördelar vinnas genom en sådan uppskrifning. 1) Böckerna hallas renare, emedan barnen ej så ofta behöfva taga i dem med sina smutsiga fingrar. 2) Lättnad beredes för läraren att uppskrifva exempel på taflan.

1. Tankegångar enligt enhetsmetoden: a) Blott hela tal förekomma. Först beräknas priset för 1 m., sedan huru många m. köpas för 9 kr., därefter priset för 1 dm. och slutligen huru många dm. dessutom köpas.

1 m. kostar 10 kr. : 5 = 2 kr. För 9 kr. köpas så många meter som delarnas antal, då 9 kr. delats så, att hvarje del är 2 kr. 9 kr. : 2 kr. = 4, med öfverskott 1 kr. — 1 dm. kostar 1 tiodel af 2 kr. eller 20 öre. Alltså räcker 1 kr. till så många dm. tyg som delarnas antal, då 1 kr. delats så, att hvarje del är 20 öre, eller 1 kr. : 20 öre = 100 öre : 20 öre = 5. Svaret blir: 4 m. 5 dm.

b) Bråk förekomma. — Först eftertänkes, huru många m. köpas för 1 kr., sedan huru många m. köpas för 9 kr.

Frågorna och svaren blifva då: Huru många m. köpas för 1 kr.? Svar: 1 tiodel af 5, som betecknas $\frac{5}{10}$. Så många meter köpas för 1 kr. Huru många m. köpas för 9 kr.? Svar: 9 ggr så många, eller såsom det betecknas, $\frac{9 \cdot 5}{10}$. Detta är metertal. Detta är ej = ett helt tal och bör ej förkortas, emedan det är metertal. Uträknadt är det 4,5. Då metertalet är 4,5, är längden 4,5 m. eller 4 m. 5 dm. Om det betecknade metertalet $\frac{9 \cdot 5}{10}$ förkortats och uttryckts såsom blandadt tal, så hade det blifvit 4_2. Men med förkortningen vinnes intet, om längden skall utsägas i både m. och dm.

2. Tankegång vid öfvergång från den ena mångfalden till den andra. Först eftertänkes förhållandet mellan 9 kr. och 10 kr. Det är 0,9. 9 kr. är 0,9 af 10 kr. Samma förhållande skall det vara mellan längden af det tyg, som fås för 9 kr., och längden af det tyg, som fås för 10 kr. Alltså skall 0,9 af 5 m. köpas för 9 kr.

3. Analogibeteckning enligt redogörelsen i **2.** x m. : 5 m. = 9 kr. : 10 kr. eller 9 kr. : 10 kr. = x m. : 5 m.

På grund af denna analogi beräknas först förhållandet mellan 9 kr. och 10 kr. Det är 0,9. Lika stort skall förhållandet vara mellan x m. och 5 m. Alltså vet man, att x m. är 0,9 af 5 m. eller, såsom det betecknas, x m. $= 0{,}9 \times 5$ m.; x är 4,5; x m. alltså = 4,5 m.

Bildandet af analogi och lösning på detta här angifna sättet leder till en lika redig och säker tankegång som någonsin enhetsmetoden, då bråk behandlats. Man behöfver blott fasthålla, att **den obekanta storheten skall vara föregående storhet i ettdera förhållandet.** Detta beror därpå, att den obekanta storhetens storlek efterfrågas.

Ex. 494. $\frac{1}{2}$ kg. snus kostar 60 öre. Huru mycket kostar $\frac{3}{4}$ kg. likadant snus?

1. Lösning enligt enhetsmetod. $\frac{1}{2}$ kg. kostar 60 öre. Huru många öre kostar 1 kg. eller $\frac{2}{2}$ kg.? Svar: 2×60. Så många öre kostar 1 kg. Huru många öre kostar $\frac{1}{4}$ kg.? Sv.: $\frac{1}{4}$ af 2×60 eller kortare: $\frac{1}{4}$ däraf. Beteckning: $\frac{2 \cdot 60}{4}$. Så många öre kostar $\frac{1}{4}$ kg. Huru många öre kostar $\frac{3}{4}$ kg.? Sv.: 3 ggr så många. Beteckning: $\frac{3 \cdot 2 \cdot 60}{4}$, som efter förkortning blir 90. Öretalet är 90, priset alltså 90 öre.

2. Enklare lösning: $\frac{1}{2}$ kg. kostar 60 öre. Huru många öre kostar 1 kg.? Sv.: 2×60. — Då 1 kg. kostar så många öre, huru många öre kostar $\frac{3}{4}$ kg.? Sv.: $\frac{3}{4}$ däraf. Beteckning: $\frac{3}{4} \times 2 \cdot 60$ eller $\frac{3 \cdot 2 \cdot 60}{4}$. O. s. v.

3. Andra lösningar sedan $\frac{1}{2}$ kg. utbytts mot $\frac{2}{4}$ kg. a) $\frac{2}{4}$ kg. kostar 60 öre. Huru många öre kostar $\frac{1}{4}$ kg. Sv.: 1 tvådel af 60, som betecknas: $\frac{60}{2}$. Då $\frac{1}{4}$ kg. kostar så många öre, huru många öre kostar $\frac{3}{4}$ kg.? Sv.: 3 ggr så många eller betecknadt $3 \times \frac{60}{2}$, som är $= \frac{3 \cdot 60}{2}$. O. s. v.

b) Då $\frac{2}{4}$ kg. kostar 60 öre, huru mycket kostar $\frac{3}{4}$ kg. Sv.: $\frac{3}{2}$ af 60 öre, som sedan skrifves så: $\frac{3 \cdot 60}{2}$ öre.

Märk! Öre måste i 3 b) skrifvas efter talet $\frac{3 \cdot 60}{2}$, ty det talet betraktas sedan som ett bråk, hvilket i detta fall kan förkortas. Om svaret skrefves så: $\frac{3 \cdot 60 \text{ öre}}{2}$, så finge ingen förkortning utföras, ty $\frac{3 \cdot 60 \text{ öre}}{2}$ är ej något bråk, och blott bråk förkortas.

Af föregående märkes, att ett streck skall dragas i radens riktning. Detta kan dragas först, och ordet öre, m. eller dylikt skrifvas därefter. Sedan vidtager frågandet, hvarvid frågorna inledas med orden: »Huru mycket».

4. Emedan det skall vara samma förhållande mellan priset för $\frac{3}{4}$ kg. och priset för $\frac{1}{2}$ kg. som mellan $\frac{3}{4}$ kg. och $\frac{1}{2}$ kg., så bildas lätt följande analogi:

$\frac{3}{4}$ kg. : $\frac{1}{2}$ kg. $= x$ öre : 60 öre.

Förhållandet mellan $\frac{3}{4}$ kg. och $\frac{1}{2}$ kg. beräknas. Det sker så: $\frac{3}{4}$ kg. : $\frac{1}{2}$ kg. $= \frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$. Alltså är $\frac{3}{4}$ kg. $\frac{3}{2}$ af $\frac{1}{2}$ kg. Därför skall x öre äfven vara $\frac{3}{2}$ af 60 öre eller såsom det skrifves: x öre $= \frac{3}{2} \times 60$ öre $= 90$ öre.

Uträkning: $x = \frac{3}{2} \cdot 60 = \frac{3 \cdot 60}{2} = 90.$

B. 302. Ex. 495. Huru många 4-öres frimärken äro värda så mycket som a) 60 femöres, b) 9 tjuguöres?

a) *Tankegång.* Först eftertänkes värdet alla 5-öresmärkena, sedan svaret på frågan. **Sv.:** $\frac{60 \cdot 5 \text{ öre}}{4 \text{ öre}}$.

b) *Tankegångar.* **1.** = för a). Sv.: $\frac{9 \cdot 20}{4}$.

2. Först eftertänkes, huru många 4-öres-märken motsvara 1 tjuguöresmärke, sedan svaret på frågan. Sv.: $9 \times$ [illegible].

3. Fyraöresmärkenas antal skall vara större än tjuguöresmärkenas. 4 öre är $\frac{1}{5}$ af 20 öre; alltså skall tvärt om **4-öres-märkenas antal vara 5 ggr 20-öres-märkenas** eller 5×9.

4. Emedan 4-öres-märkenas antal skall vara $>$ 20-öres-märkenas, så bildas analogien $x : 9 = 20 : 4$, hvaraf åter $x = \frac{20}{4} \times 9$.

Ex. 496. 15 arbetare kunna utföra ett arbete på 13 dagar. Huru många arbetare medhinna det på 5 dagar?

För snabbare uppfattning af sambandet **uppskrifvas de jämförbara storheterna under hvarandra.**

15 arb. 13 dag.
x » 5 »

Det utläses: 15 arb. utföra arbetet på 13 dag.
x » » » » 5 »

Lösningar. **1.** Enhetsmetod. 15 arbetare utföra arbetet på 13 dagar. Huru många arbetare kunna utföra det på 1 dag? Allmänt sammanhang mellan det uppgifna och svaret: Ju kortare tiden är, desto flera arbetare. Särskild tillämpning i detta fall: 1 dag är $\frac{1}{13}$ af 13 dagar, alltså fordras 13 ggr så många arbetare. Beteckning: 13×15. Så många (13×15) arbetare medhinna det på 1 dag. Huru många arbetare medhinna det på 5 dagar? Allmänt sammanhang: Ju längre tiden är, desto färre arbetare. Särskild tillämpning här: Tiden 5 dagar är 5 ggr så lång som 1 dag; alltså skall arbetarnas antal vara blott 1 femdel af det förra eller $\frac{1}{5}$ af 13×15. Beteckning: $\frac{13 \cdot 15}{5}$.

Märk! 1. Odugligt är att blott upptaga talen, när grunden angifves, och säga: 1 är $\frac{1}{13}$ af 13 samt att 5 är 5 ggr 1. Därigenom vinnes nämligen ingen ledning för den riktiga slutsatsen.

Märk! 2. I detta fall förekomma omvända förhållanden på 2 ställen i redogörelsen. De undvikas alltså ej genom att använda den s. k. enhetsmetoden. I 2) och 3) tänker man blott en gång på omvändt förhållande, i det att förhållandet mellan 13 dag. och 5 dag. eftertänkes. I 3) underlättas beräkningen af detta förhållande, i det att det först betecknas.

2. Tiden är kortare, alltså flera arbetare. Följaktligen skall det vara ett omvändt förhållande mellan arbetsstyrkorna mot förhållandet mellan arbetstiderna. Alltså skall förhållandet mellan arbetarnes antal i den mot 5 dagar svarande arbetsstyrkan (x) och 15 vara lika stort som förhållandet mellan 13 dag. och 5 dag. eller $\frac{13}{5}$. Svaret på frågan blir $\frac{13}{5}$ af 15.

3. Tiden är kortare, alltså flera arbetare. Förhållandet mellan x man och 15 man skall alltså ej vara lika med förhållandet mellan 5 dag. och 13 dag., utan lika med det omvända förhållandet 13 dag. : 5 dag. Däraf bildas analogien x man : 15 man = 13 dag. : 5 dag.

4. Enklast. Samma arbete skall utföras i båda fallen. Därför erfordras samma arbetskraft, ehuru den fördelas på olika sätt. Det arbete, som utföres af 1 man under 1 dag, kallas *dagsverke.* Här bestämmes alltså först de för det hela arbetet erforderliga dagsverkenas antal. Det är 15×13 eller $13 \cdot 15$. Arbetet fördelas på 5 dagar. Alltså blir dagsverkenas antal hvarje dag $\frac{1}{5}$ af $15 \cdot 13$. Arbetarnas antal är lika stort. Deras antal alltså = 1 femdel af $15 \cdot 13$, hvilket betecknas $\frac{15 \cdot 13}{5}$.

Pröfning. Svaret är riktigt, om det utförda arbetet, uttryckt i dagsverken, blir lika i båda fallen: 13×15 dagsverken $= 195$ dagsverken. $5 \cdot 39$ dagsverken $= 195$ dagsverken. — På samma sätt pröfvas svarens riktighet i alla exemplen i denna afdelning.

Ex. 497. 15 arbetare utföra ett arbete på 13 dagar. Huru många dagar åtgå därtill för 20 arbetare?

Huru mycket arbete utföres i allt? Sv.: $13 \cdot 15$ dagsverken. Huru mycket arbete utföres dagligen? 20 dagsverken. Huru många dagar behöfvas? Lika många som förhållandet mellan $13 \cdot 15$ dagsverken och 20 dagsverken. Betecknadt: $\frac{13 \cdot 15}{20}$.

Ex. 498. En garnbunt räcker till en 24 m. lång väf, då den är 1 m. bred. Huru lång skulle väfven blifva däraf, om den vore 9 dm. bred?

Emedan samma garnbunt skulle räcka till den ena eller andra väfven, måste ytan af den ena vara lika stor som ytan af den andra. Därför bestämmes först ytans kvdm.-tal (kvm.-tal) och sedan längdens dm.-tal (m.-tal). Längdens dm.-tal är $\frac{240 \cdot 10}{9}$.

Märk reglerna å sid. 61 och 62!

Ex. 499. Huru många hl. hvete väga lika mycket som $38\frac{1}{2}$ hl. korn, då 1 hl. korn väger 64 kg. och 1 hl. hvete väger 84 kg.?

De båda sädesmängderna skola väga lika mycket. Emedan både kornets mängd och dess vikt pr hl. äro uppgifna, så bestämmes först vikten af allt kornet. — Kornets vikt är $38\frac{1}{2} \times 64$ kg. Lika mycket väger allt hvetet. Dess hl.-tal är då lika stort som förhållandet mellan $38\frac{1}{2} \cdot 64$ kg. och 84 kg. eller [illegible]

Ex. 500. I en fästning finnas lifsmedel för 12 000 man under 3 mån. Besättningen ökas med 4 000 man. Huru länge räcker förrådet?

Först eftertänkes besättningens storlek i senare fallet. Samma förråd användes i båda fallen. Det innehåller många delar, som kallas matportioner eller kortare portioner. Den del, som åtgår åt 1 man under 1 dag, kallas *dagsportion.* Den portion, som åtgår åt 1 person under 1 månad, kallas *månadsportion.* I detta ex. kan man tänka sig förrådet uppdeladt i a) månadsportioner eller b) dagsportioner. I a) bestämmes först månadsportionernas antal och sedan månadernas antal i den okända tiden. I b) bestämmes först dagsportionernas antal och sedan den okända tidens dagtal. I ena fallet innehåller förrådet $12\,000 \times 3$ månadsportioner eller $16\,000 \cdot x$ månadsportioner. I det andra fallet innehåller det $12\,000 \cdot 90$ dagsportioner eller $16\,000 \cdot x$ dagsportioner.

a) Den obekanta tidens månadtal beräknas genom att dela $12\,000 \cdot 3$ månadsportioner så, att hvarje del blir 16 000 månadsportioner, eller genom att beräkna förhållandet mellan $12\,000 \cdot 3$ månadsportioner och 16 000 månadsportioner. Det är $\frac{12\,000 \cdot 3}{16\,000} = 2\frac{1}{4}$. Tiden alltså $2\frac{1}{4}$ mån. = 2 mån. $7\frac{1}{2}$ dag.

b) Dagarnas antal är $\frac{12\,000 \cdot 90}{16\,000} = 67\frac{1}{2}$. Tiden alltså $67\frac{1}{2}$ dag. = 2 mån. $7\frac{1}{2}$ dag.

Ex. 500*. Se föreg. ex.! Huru länge skulle förrådet räcka i senare fallet, om hvarje portion blefve $\frac{1}{3}$ mindre?

Först uttryckes hvarje mindre portions storlek i förhållande till hel portion på enklare sätt. Emedan hvarje portion är $\frac{1}{3}$ mindre än hel portion, så är den $\frac{2}{3}$ af hel portion eller $\frac{2}{3}$ portion.

Lösning 1. Först eftertänkes antalet af sådana mindre portioner i hela förrådet, sedan månadernas antal i den tid, under hvilken förrådet skulle räcka åt 16 000 man, slutligen svar på frågan.

1) $12000 \cdot 3$ månadsportioner : $\frac{2}{3}$ månadsport. = 54 000. 2) $\frac{54\,000}{16\,000} = 3\frac{3}{8}$. 3) $3\frac{3}{8}$ mån.

Lösning 2. Uppställning. $2\frac{1}{4}$ mån. 1 portion.

$\underline{x \quad » \quad \frac{2}{3} \quad »}$

Emedan hvarje portion är mindre, måste förrådet räcka längre. Alltså är förhållandet mellan tiderna omvändt mot förhållandet mellan portionernas storlek. Däraf analogi

x mån. : $2\frac{1}{4}$ mån. = 1 portion : $\frac{2}{3}$ portion.

x mån. : $\frac{3}{2} \times 2\frac{1}{4}$ mån. = $3\frac{3}{8}$ mån.

Lösning 3. Enhetsmetod. Då eftertänkes först, huru många mån. förrådet skulle räcka, om hvarje man finge blott $\frac{1}{3}$ portion, sedan huru många mån. det räcker, när hvarje man får $\frac{2}{3}$ portion. — Allra först utbytas $2\frac{1}{4}$ mån. mot $\frac{9}{4}$ mån. Svaret blir då: $\frac{3\cdot 9}{2\cdot 4}$ mån.

Märk! **Rätt** är att beteckna månadernas antal så: $2\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$; ty tiden innehåller 3 delar med $\frac{1}{2}$ af $2\frac{1}{4}$ mån. i hvarje del. — **Orätt** är däremot att beteckna det så: $2\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times 2\frac{1}{4}$, ty då skulle tiden innehålla 4 delar med $\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{4}$ mån. i hvarje del.

Ex. 501. $10\frac{1}{2}$ tjog ägg erhållas för en viss summa, då äggen kosta 1 kr. 20 öre tjoget. Huru mycket kostar tjoget af de ägg, af hvilka erhålles $\frac{3}{4}$ tjog mer för samma summa?

Först beräknas den andra äggmängden. $10\frac{1}{2}$ tjog + $\frac{3}{4}$ tjog $= 11\frac{1}{4}$ tjog.

Värdet af allt är lika i båda fallen. Det eftertänkes alltså först, sedan besvaras frågan.

Utredning. Huru mycket kostar $10\frac{1}{2}$ tjog ägg à 1 kr. 20 öre? Svar: $10\frac{1}{2} \times 120$ öre, om det skrifves, eller $\frac{21}{2}$ af 120 öre, om det säges. Detta skrifves sedan så: $\frac{21\cdot 120}{2}$ öre. Huru mycket kostar 1 tjog ägg, när $11\frac{1}{4}$ tjog ägg kosta så mycket? Svaret säges icke utan skrifves så: $10\frac{1}{2} \cdot 120$ öre : $11\frac{1}{4}$ eller $\frac{21\cdot 120}{2}$ öre : $11\frac{1}{4}$.

Om barnen ej kunna beteckna det, så frågas: Huru mycket skulle 1 tjog ägg kosta, om 11 tjog ägg kostade så mycket ($\frac{21\cdot 120}{2}$ öre)? — När orden »så mycket» sägas, visas på det uppskrifna. — Barnen skola då svara: 1 elfvadel af detta eller detta deladt med 11. Därefter säger lär.: På samma sätt skolen I beteckna värdet af 1 tjog ägg, när $11\frac{1}{4}$ tjog ägg kostar så mycket.

Uträkningar. **1.** Öretalet $x = \frac{21\cdot 120}{2} : 11\frac{1}{4} = \frac{21\cdot 120}{2} : \frac{45}{4} = \frac{4\cdot 21\cdot 120}{4\cdot 2} : \frac{2\cdot 45}{2\cdot 4} = \frac{4\cdot 21\cdot 120}{2\cdot 45} = 112$. Uträkningen utföres då så, som angifves öfverst å sid. 194.

2. Eller också kan den genvägen påvisas, att täljaren $21\cdot 120$ mångfaldigas med det andra bråkets nämnare 4, att täljaren 45 mångfaldigas med det första bråkets nämnare 2, och att de nya nämnarna ej behöfva uppskrifvas. Därigenom erhålles $\frac{4\cdot 21\cdot 120}{2\cdot 45}$ omedelbart efter $\frac{21\cdot 120}{2} : \frac{45}{4}$.

3. Sedan $\frac{21\cdot 120}{2} : 11\frac{1}{4}$ ombildats till $\frac{21\cdot 120}{2} : \frac{45}{4}$, kan man tänka så. Talet $\frac{21\cdot 120}{2}$ är $\frac{45}{4}$ af x, alltså är tvärt om $x = \frac{4}{45} \times \frac{21\cdot 120}{2} = \frac{4\cdot 21\cdot 120}{45\cdot 2}$.

Ett af de 3 sätten må användas. Det första kräfver mindre tankeansträngning och är tillräckligt. Det motsvarar redogörelsen 3 vid ex. 358 å sid. 172.

Ex. 502. Erik använde 50 tim. för att gå från ett ställe till ett annat, då han gick 4 km. i timmen. Huru många timmar skulle åtgå. om han ginge 4,8 km. i timmen? b) Huru långt skulle han gå i timmen för att gå samma väg på 37 tim. 30 min.?

a) 50 tim.	**(behöfvas)**	**4**	**km.**	**i tim.**	**b) 4 km.**	**i tim.**	**50**	**tim.**
x	»	4,8	»	»	x »	»	37½	»

Vid denna uppskrifning i sammandragen form måste orden »i timmen» skrifvas; ty annars får det skrifna annat innehåll. Om de orden vore borta, så lästes första raden i a) så: På 50 tim. går han 4 km.

a) $x = \frac{50 \cdot 4 \text{ km.}}{4{,}8 \text{ km.}}$ Sedan orden km. öfverstrukits och talen 50 · 4 och 4,8 tiofaldigats, erhålles $\frac{10 \cdot 50 \cdot 4}{48} = \frac{5 \cdot 25}{3} = 41\frac{2}{3}$.

Ex. 503. Ett fartyg med 24 personer är försedt med lifsmedel för 3 månader. 15 dagar efter afresan upptagas 8 skeppsbrutna. Huru länge räcker förrådet a) sedan, b) i allt? c) Huru mycket mat skulle sedan dagligen utdelas åt hvarje person, för att förrådet skulle räcka 3 mån.?

a) Tankegång: Först eftertänkes de kvarvarande dagsportionernas antal vid de skeppsbrutnas upptagande, sedan svaret på frågan.

Uträkning: Huru många dagsportioner funnos från början? 3 · 30 · 24. Huru många dagsportioner hade åtgått före de skeppsbrutnas upptagande? Sv.: 15 · 24. Huru många dagsportioner voro då kvar? 3 · 30 · 24 — 15 · 24 eller 1 800. Huru många personer funnos sedan? Sv.: 32. Huru många dagsportioner åtgingo sedan dagligen? Sv.: 32. Huru många dagar räckte alltså de 1 800 portionerna? Sv.: 1 800 : 32 eller 56¼. Tiden alltså 56¼ dag = 1 mån. 26¼ dag.

b) 15 + 56¼ dagar = 71¼ dagar.

c) **Lösning 1.** Först eftertänkes den öfriga delen af 3 mån. Den är 90 — 15 dag. = 75 dag. Sedan eftertänkes, huru mycket mat åtgår åt alla under 1 dag och åt hvarje person under 1 dag.

1 800 portioner : 75 : 32 = $\frac{3}{4}$ portion.

Pröfning. 32 · 75 · $\frac{3}{4}$ portion = 1 800 port.

Lösning 2. Förhållandet mellan portionernas storlek är omvändt mot förhållandet mellan personernas antal.

Analogi. x port. : 1 portion = 24 : 32.

x portion = $\frac{24}{32} \times 1$ portion = $\frac{3}{4}$ portion.

Ex. 504. 56 man behöfvas till ett arbete. Huru många behöfvas till ett annat lika stort arbete, om 7 af de senare göra lika mycket som 8 af de förra?

Utredning: Emedan 7 arbetare af de senare göra lika mycket som 8 arb. af de förra, så gör hvarje grupp af 7 arbetare i senare fallet lika mycket som hvarje grupp af 8 man i det förra fallet. Gruppernas antal är lika i båda fallen. Alltså bestämmes först gruppernas antal och sedan svaret på frågan.

Gruppernas antal är $\frac{56}{8}$ eller 7. Arbetarnes antal i senare fallet alltså 7 × 7 = 49.

Sammanfattning: För att undvika talet om omvändt förhållande och den i dylika fall ofta olämpliga enhetsmetoden bör man i fall sådana som i ex. 495—502 först eftertänka det hela, hvilket lätt kan bestämmas på grund af det i exemplet uppgifna.

Märk! Både enhetsmetod och läran om förhållande kunna undvikas på följande sätt.

Se ex. 501! Eftersom flera ägg erhållas i senare fallet, är ett tjog ägg då billigare än i förra fallet. Alltså delas med det större tjogtalet och mångfaldigas med det mindre tjogtalet. Däraf blir svarets öretal betecknadt så:

$$\frac{104 \times 120}{114}.$$

303. S. k. sammansatt-regula-de-tri-uppgifter.

Ex. 505. Om 4 karlar förtjäna 52 kr. 80 öre under 1 vecka, huru mycket förtjäna 7 karlar på 4 dagar?

Denna uppgift tänkes sammansatt af 2 enklare uppgifter.

Före behandling af densamma uteslutas de uppgifna tiderna och tänkes arbetsförtjänsten gälla samma tid i båda fallen. Alltså löses först följande uppgift: 4 karlar förtjäna 52 kr. 80 öre under en viss tid. Huru mycket förtjäna 7 karlar under samma tid? Svaret är 92,4 kr. Sedan löses följande uppgift: 7 karlar förtjäna 92,4 kr. under en vecka. Huru mycket förtjäna de under 4 dagar? Svar: 61,6 kr. eller 61 kr. 60 öre. Slutligen sammanfattas de uppgifterna så som i ex.

Uppställning då: 4 karlar 52,8 kr. 6 dagar.
7 » x » 4 »

Tankegång 1: Liksom vi i den första uppgiften nyss ej fäste oss vid de olika tiderna, så göra vi ej heller nu i början. För öfrigt tänka vi såsom i de föregående enklare uppgifterna.

Utredning. Huru många kr. förtjänar 1 karl? Sv.: 1 fyradel af 52,8 eller betecknadt $\frac{52,8}{4}$. Så många kr. förtjänar 1 karl. Huru många kr. förtjäna 7 karlar? Sv.: 7 ggr så många. Betecknas: $\frac{7 \cdot 52,8}{4}$. Nu skola vi medtaga tiderna. [Då säges ej i satserna 7 karlar, utan blott karlarna (de), på det att barnen skola få in blott de nödvändiga talen (storheterna) i utsagorna.] Så många kr. förtjäna de under 6 dagar. Huru många kr. förtjäna de under 1 dag? Sv.: 1 sexdel däraf $\left(\text{af } \frac{7 \cdot 52,8}{4}\right)$. Betecknas: $\frac{7 \cdot 52,8}{6 \cdot 4}$. Så många kr. förtjäna de under 1 dag. Huru många kr. förtjäna de under 4 dagar? Sv.: 4 ggr så många. Betecknas: $\frac{4 \cdot 7 \cdot 52,8}{6 \cdot 4}$. Uträknadt blir det 61,6. Detta är krontal. Frågans i exemplet svar är alltså 61,6 kr. eller 61 kr. 60 öre.

Märk! 1. Vid förenklingen af det först betecknade krontalet borttagas först de båda faktorerna 4. Därefter delas 52,8 och 6 med 6 eller borttagas de båda faktorerna 6. Af dem är en synlig och den andra innesluten i talet 52,8.

Märk! 2. I st. f. att uttrycka den gifna förtjänsten i kr., hade den kunnat uttryckas i öre. Då hade blott hela tal förekommit i uppställningen, och ett betecknadt öretal först bildats.

Märk! 3. **Odugligt** är detta: 4 karlar 52 kr. 80 öre 6 dag.
7 » x » x » 4 »

samt detta: **4 karlar 52 kr. 80 öre 6 dag.**
7 » x 4 »

Orsak: x är i *ett* exempel blott *en* sorts tal, i detta fall antingen krontal eller öretal.

Märk! 4. I stället för att först utesluta de olika tiderna kunde man först uteslutit de olika arbetskrafterna. Då skulle man först tänka, att arbetsstyrkan varit lika stor i båda fallen.

Märk! 5. Om uträkningen af sådana problem stödjes på heltalsläran, så *beräknas* **svaret på den ena frågan i** utredningen efter den andra. Emedan krontalet är > 4, så behöfves från början ingen förvandling från kr. till öre.

Tankegång **2:** Först bestämmes storleken af det utförda arbetet, uttryckt i dagsverken, sedan ersättningen för 1 dagsverke (dagspenningen för 1 karl) och slutligen svaret på frågan.

Utredning: **4 karlar förrätta 4 · 6 dagsverken för 52,8 kr. Huru många kr. förtjänas för 1 dagsverke? Svar:** 52,8 deladt med 4 · 6 eller betecknadt: $\frac{52{,}8}{4 \cdot 6}$. Huru många dagsverken göra 7 karlar under 4 dagar? Svar: 7×4. Så många kr. $\left(\frac{52{,}8}{4 \cdot 6}\right)$ förtjänas för 1 dagsverke. Huru många kr. förtjänas för 7 · 4 dagsverken? Svar: 7 · 4 ggr så många. Betecknadt: $\frac{7 \cdot 4 \cdot 52{,}8}{4 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 528}{10 \cdot 4 \cdot 6}$.

Det sista talet erhålles därigenom, **att talen på ömse** sidor om strecket tiofaldigats.

Ex. 506. Föregående uppgift kan förökas därmed, att dagspenningen för de senare är a) 1 femdel, större än för de förra, b) 1 femdel mindre än för de förra. Huru stor är hela förtjänsten?

Sedan förtjänstens **krontal betecknats enligt utredningen af** föregående ex. $\frac{4 \cdot 7 \cdot 52{,}8}{6 \cdot 4}$, **så upptages tillägget** i detta exempel.

a) *Utredning:* När dagspenningen är $\frac{1}{5}$ större än förut, blir hela förtjänsten äfven $\frac{1}{5}$ större än förut eller $\frac{6}{5}$ af den förra förtjänsten. Alltså blir den $\frac{6}{5} \times \frac{4 \cdot 7 \cdot 52{,}8}{6 \cdot 4}$ kr. eller

$\frac{6 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 52{,}8}{5 \cdot 6 \cdot 4}$ kr. O. s. v.

b) En femdel mindre än = $\frac{4}{5}$ af. Hela förtjänsten = $\frac{4}{5} \times \frac{4 \cdot 7 \cdot 52{,}8}{6 \cdot 4}$ kr.

Märk! Om det tillika uppgifvits, att de senares arbetstid är 1 timme längre dagligen, så hade förtjänstens storlek ej kunnat beräknas. Men om därjämte uppgifvits, att de förras dagliga arbetstid är 10 timmar eller något annat, så hade frågan kunnat besvaras.

304. Ex. 507. Med 2 par dragare hinner man på 12 timmar plöja ett rektangulärt åkerstycke, som är 200 m. långt och 100 m. bredt. Huru bredt stycke kan plöjas med 3 par dragare på 3 timmar, om det är 150 m. långt?

Uppställning.	100 m. br.	200 m. l.	2 par	12 tim.
	x » »	150 » »	3 »	3 »

Lösningar. **1.** Ett 100 m. bredt stycke plöjes med 2 par dragare. Huru bredt jordstycke plöjes med 1 par dragare? Sv.: 1 tvådel af 100 m. Betecknas $\frac{100}{2}$ m. Så bredt stycke plöjes med 1 par dragare. Huru bredt stycke plöjes samtidigt med 3 par dragare? Svar: $\frac{3}{2}$ af 100 m. Beteckning: $\frac{3 \cdot 100}{2}$ m. — Så bredt jordstycke plöjes, då det är 200 m. långt. Huru bredt jordstycke skulle kunna plöjas, om det vore blott 1 m. långt? Svar: 200 gånger så bredt eller $\frac{200 \cdot 3 \cdot 100}{2}$ m. — Så bredt jordstycke skulle kunna plöjas, om det vore 1 m. långt. Huru bredt stycke kan samtidigt plöjas, då det är 150 m. långt? Svar: $\frac{1}{150}$ däraf eller $\frac{200 \cdot 3 \cdot 100}{150 \cdot 2}$ m. — Så bredt stycke kan plöjas på 12 timmar. Huru bredt stycke kan plöjas på 3 timmar? Svar: $\frac{1}{4}$ däraf eller $\frac{200 \cdot 3 \cdot 100}{4 \cdot 150 \cdot 2}$ m.

2. Först bestämmes ytan af den första åkern, sedan bredden af den andra åkern, i fall samma arbetskraft användes för dess plöjning som för den första åkerns. O. s. v.

Huru stor är den första åkern? Sv.: 200 · 100 kvm. Åkrarna äro lika stora. Huru bred är den andra åkern? Sv.: $\frac{200 \cdot 100}{150}$ m. Så bred åker plöjes med 2 par dragare. Huru bred åker plöjes med 1 par dragare? Sv.: 1 tvådel däraf. Betecknadt: $\frac{200 \cdot 100}{150 \cdot 2}$ m. Så bred åker plöjes med 1 par dragare. Huru bred åker plöjes med 3 par dragare? Sv.: 3 gånger så bred. Betecknadt: $\frac{3 \cdot 200 \cdot 100}{150 \cdot 2}$ m. Så bred åker plöjes på 12 timmar. Huru bred åker plöjes på 3 timmar? Sv.: 1 fyradel däraf. Det betecknas: $\frac{3 \cdot 200 \cdot 100}{4 \cdot 2 \cdot 150}$ m.

Ex. 508. Af $2\frac{1}{5}$ kg. garn väfves en väf, som är 36 m. lång och 0,7 m. bred. Huru lång väf väfves af 5,5 kg. garn, då den skall blifva 0,9 m. bred?

Tankegång. Först eftertänkes den första väfvens storlek (kvm.-tal), sedan metertalet till den andra väfvens längd, om $2\frac{1}{5}$ kg. garn användes, slutligen längdens metertal, då 5,5 kg. garn användes.

Redogörelse och uträkning. Då väfven är 36 m. lång och 0,7 m. bred, så är ytan $36 \cdot 0{,}7$ kvm. Den andra väfven är 0,9 m. bred. Alltså är metertalet till dess längd $\frac{36 \cdot 0{,}7}{0{,}9}$. Det skall vara samma förhållande mellan längderna som mellan garnmängderna. Det betecknas så:

x m. : $\frac{36 \cdot 0{,}7}{0{,}9}$ m. $= 5{,}5$ kg. : $2\frac{1}{5}$ kg. Efter analogiens bildande beräknas det andra förhållandet. Det är $\frac{5}{2}$. Alltså är x m. $= \frac{5}{2} \times \frac{36 \cdot 0{,}7}{0{,}9}$ m. $= \frac{5 \cdot 36 \cdot 0{,}7}{2 \cdot 0{,}9}$ m. **Först kunna båda nollorna och decimalkommata öfverstrykas.** Därigenom tiofaldigas egentligen båda talen. Sedan förkortas på vanligt sätt. O. s. v.

I st. f. metertalen 0,7 och 0,9 kunna decimetertalen 7 och 9 upptagas från början. Likaså kunna kg.-talen utbytas mot hg.-tal. Därigenom underlättas lösningen för dem, som ej äro så kunniga i bråkläran.

Ex. 509. Huru mycket lättare att hugga är björkveden än ekveden, då 8 man hugga $33\frac{1}{3}$ famnar björkved på 5 dagar med 12 timmars dagligt arbete, och 9 man från och med måndagen den 10 februari till och med den 26 samma månad med 8 timmars daglig arbetstid hugga $52\frac{1}{2}$ famnar ekved?

1. *Tankegång.* Eftertänk 1) den behöfliga tiden för att hugga 1 famn björkved, 2) den behöfliga tiden för att hugga 1 famn ekved, 3) förhållandet mellan svårigheten att hugga björkved och svårigheten att hugga ekved, 4) svaret på frågan!

Redogörelse. 8 man hugga $33\frac{1}{3}$ famnar björkved på 5 dagar med 12 timmars daglig arbetstid. Därtill behöfvas alltså $8 \cdot 5 \cdot 12$ timmar eller 480 timmar. För huggning af 1 famn åtgå alltså: 480 timmar : $33\frac{1}{3} = 14{,}4$ timmar.

För huggning af $52\frac{1}{2}$ famnar ekved arbeta 9 man 15 dag. 8 tim. dagligen eller åtgår $9 \cdot 15 \cdot 8$ timmars arbete. För huggning af 1 famn åtgå alltså $\frac{9 \cdot 15 \cdot 8}{52\frac{1}{2}}$ timmar eller $\frac{144}{7}$ tim.

Svårigheterna stå i samma förhållande till hvarandra som tiderna till hvarandra, alltså beräknas förhållandet mellan $14{,}4$ och $\frac{144}{7}$ tim. $14{,}4$ tim. : $\frac{144}{7}$ tim. $= 0{,}7$.

Da svårigheten att hugga björkved är $0{,}7$ af svårigheten att hugga ekved, är svårigheten att hugga björkved $0{,}3$ mindre än svårigheten att hugga ekved eller är björkveden $0{,}3$ lättare att hugga.

2. *Tankegång.* Beräkna 1) famnarnas antal i den björkved, som hugges på samma tid som $52\frac{1}{2}$ famnar ekved, 2) förhållandet mellan ekvedsfamnarnas och björkvedsfamnarnas antal, 3) svaret på frågan!

Uträkning. 1) $\frac{9 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 100}{8 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 3} = 75$. 2) $52\frac{1}{2} : 75 = \frac{7}{10}$. 3) — 4) i sättet 1. Andra sätt gifvas äfven.

305. **Lösning, då läran om hela tal tillämpas.**

Svaret på hvarje särskild fråga beräknas.

Ex. 510. Huru länge räcka 60 kg. bröd åt 6 personer, då 12 kg. räcka 14 dagar åt 3 personer?

Tankegångar. **1.** Huru många delar med 12 kg. i hvarje del innehåller 60 kg.? Huru många dagar räcka 60 kg. bröd åt 3 pesoner? åt 1 person? åt 6 personer? Svar på frågan. — Svar: 35 dagar.

2. Huru länge räcka 12 kg. bröd åt 1 person? åt 6 personer? Huru många 12-kg.-delar innehålla 60 kg.? Huru länge räcka 60 kg. åt 6 personer?

Ex. 511. En förman betalar 243 kr. åt 9 arbetare för 3 veckors arbete. Huru mycket skola 12 lika dugliga arbetare hafva för 5 veckors arbete?

Tankegång: 1) Huru stor veckopenning får hvarje arbetare? 2) Huru stor är veckoaflöningen åt 12 arbetare? 3) Svar på frågan. — Svar: 540 kr.

Ex. 512. Han utbetalade 150 kr. åt 5 andra, som hade lika stor dagspenning som de förra. Huru länge hade de arbetat?

Tankegång: Eftertänk 1) de förras dagspenning, 2) dagaflöningen åt alla 5 arbetarna, 3) antalet af dagar i den tid de arbetat, 4) svar på frågan! Svar: 20 dagar.

Ex. 513. Om 8 flickor sticka 4 täcken på 3 dagar, huru många täcken hinna 4 flickor sticka under 1 vecka?

Tankegång: Eftertänk 1) dagsverkenas antal i förra fallet, 2) dagsverkenas antal i senare fallet, 3) svaret på frågan! Svar: 4.

Procentuppgifter.

A. Af allmän art.

306. Ex. 514. Af 280 bjälkar voro 5 % odugliga. a) Huru många voro odugliga? b) Huru många procent voro dugliga? Svar: a) 14, b) 95.

Innebörden af 5 % är »5 för hundra» (»5 af hundra» i detta fall).

a. Uppställning: 5 bjälkar 100 bjälkar.
x » 280 »

Det uppskrifna kan utsägas så: 5 bjälkar motsvara 100 bjälkar, x bjälkar motsvara 280 bjälkar. Det leder till följande sätt att besvara frågan.

Uträkningar. **1.** Enhetsmetod. Då 5 bjälkar motsvara 100 bjälkar, huru många bjälkar motsvara 1 bjälke? Sv.: 1 hundradel af 5. Beteckning: $\frac{5}{100}$. Då så många bjälkar motsvara 1 bjälke, huru många bjälkar motsvara 280 bjälkar? Sv.: 280 ggr så många. Beteckning: $\frac{280 \cdot 5}{100}$.

2. Enhetsmetod. Därvid eftertänkes först 1 procent af 280 och sedan 5 % af 280.

3. Förhållande i enlighet med de förra sätten, i det att 5 % angifver förhållandet mellan de odugliga bjälkarnas antal och hela antalet.

Svar då omedelbart: $\frac{5}{100} \times 280$ eller $0{,}05 \times 280$.

4. Förhållande på grund af uppställningen. Förhållandet mellan x (bjälkar) och 5 (bjälkar) skall vara lika med förhållandet mellan 280 (bjälkar) och 100 (bjälkar). Svar: $\frac{280}{100} \times 5$.

5. Analogibildning, hvaraf x-värdet i 4 lättare märkes.

$$x : 5 = 280 : 100.$$

6. Analogibildning, då utgångspunkten är det i 5 % liggande förhållandet.

$$x : 280 = 5 : 100 \qquad x = \frac{5}{100} \times 280.$$

7. På grund af heltalsläran. Beräkna först, huru många delar med 5 bjälkar i hvarje del 100 bjälkar innehålla. Lika många delar med odugliga bjälkar innehålla 280 bjälkar.

$$100 : 5 = 20. \qquad 280 : 20 = 14.$$

a. Annan uppställning. 280 bjälkar (motsvara) 100 %.
x » 5 »

Lösningar. **1.** Först eftertänkes, huru många bjälkar motsvara 1 %, sedan huru många bjälkar motsvara 5 %.

$$x = 5 \times \frac{280}{100} \text{ eller } x = \frac{5 \cdot 280}{100}.$$

2. Förhållandet mellan x och 280 = förhållandet mellan 5 och 100. Alltså är $x = \frac{5}{100} \times 280$.

b. 3 sätt angifvas.

1. Utgångspunkt är uppgiften, att 5 % af bjälkarna voro odugliga.

Emedan den odugliga delens procenttal är 5 och det helas procenttal är 100, så är den dugliga delens procenttal 100 — 5 = 95.

2. Utgångspunkt är det beräknade a-svaret.

Först eftertänkes de dugligas antal, sedan 1 % af hela antalet 280 och slutligen svaret på frågan.

De dugligas antal är 280 — 14. En procent af 280 är $\frac{280}{100}$. Svaret på frågan är = delarnas antal, när 280 — 14 delats så, att hvarje del är $\frac{280}{100}$ eller $(280 - 14) : \frac{280}{100}$.

Annan beteckning: $\frac{280 - 14}{280 : 100}$.

De dugligas antal kan äfven först *beräknas*. (266.) Då undvikes parentesen.

3. Utgångspunkt är det beräknade a-svaret. Därefter bildas analogi på grund däraf, att förhållandet mellan den dugliga delens procenttal och 100 = förhållandet mellan de dugligas antal och hela antalet.

$x : 100 = (280 - 14) : 280.$ $\quad x = \frac{[illegible]}{[illegible]} \times 100.$

Ex. 515. Årliga nettobehållningen på en egendom efter 4 % var 14 476 kr. Huru stort var egendomens värde?

Uppställning: 100 kr. 4 kr.
x » 14 476 »

Lösningar 1. Enhetsmetod. 100 kr. motsvaras af 4 kr. Huru mycket motsvaras då af 1 kr.? Sv.: 1 fyradel af 100 kr. eller $\frac{100}{4}$ kr. Så mycket motsvaras af 1 kr. Huru mycket motsvaras af 14 476 kr? Sv.: 14 476 ggr så mycket.

Beteckning: $\frac{[illegible]4[illegible] \times 4}{100}$ kr.

2. Enhetsmetod. Först bestämmes 1 % af egendomsvärdet, sedan frågans svar.

1) 1 % af egendomsvärdet var 1 fyradel af 14 476 kr. $= \frac{14\,476}{4}$ kr. Hela egendomsvärdet innehöll 100 sådana delar. (Här säges icke »var 100 hundradelar».) Svar alltså: $\frac{100 \cdot 14\,476}{4}$ kr.

3. Enhetsmetod. Emedan 4 af de 100 delarna innehöllo 14 476 kr., innehåller 1 del 1 fyradel af 14 476 kr. och 100 sådana delar $100 \times \frac{14\,476}{4}$ kr.

4. Förhållande. Då $\frac{4}{100}$ af egendomsvärdet var 14 476 kr., var egendomsvärdet omvändt $\frac{100}{4} \times 14\,476$ kr.

5. Analogibildning.

x kr. : 100 kr. = 14 476 kr. : 4 kr.

x kr. $= \frac{14\,476}{4} \times 100$ kr.

6. Analogibildning. Förhållandet mellan 100 kr. och 4 kr. är lika med förhållandet mellan x kr. (egendomsvärdet) och 14 476 kr.

100 kr. : 4 kr. = x kr. : 14 476 kr. $\quad x$ kr. $= \frac{100}{4} \times 14\,476$ kr.

Ex. 516. Vid riksdagsmannavalet i Stockholm år 1878 funnos 9 600 röstberättigade. Af dem röstade 5 013. Huru många % af de röstberättigade röstade?

Uppställning. 5 013 personer 9 600 personer.
x » 100 »

Lösningar 1. Huru många delar med 100 i hvarje del innehåller 9 600? Sv.: 96. Lika många delar med x i hvarje del innehåller 5 013. Alltså är $x = \frac{5\,013}{96}$.

Eller, om de gifna talen upptagas, $x = \frac{5\,013}{9\,600 \cdot 100}$.

2. Enhetsmetod. Beräkna 1 af de 100 lika delarna af 9 600 eller 1 % af 9 600! Beräkna sedan antalet af sådana delar i 5 013!

$$1)\ 9\,600 : 100. \quad 2)\ \frac{5\,013}{9\,600 : 100}.$$

3. Analogibildning. Det är samma förhållande mellan x pers. och 5 013 pers. som mellan 100 pers. och 9 600 pers.

$$x : 5\,013 = 100 : 9\,600. \quad x = \frac{100}{9\,600} \times 5\,013.$$

4. Analogibildning. Det är samma förhållande mellan x pers. och 100 pers. som mellan 5 013 pers. och 9 600 pers.

$$x : 100 = 5\,013 : 9\,600. \quad x = \frac{5\,013}{9\,600} \times 100.$$

Denna analogi härledes omedelbart af frågan, i det att »huru många % af de röstberättigade?» innebär: »Huru många röstberättigade af hundra röstberättigade?»

Annan uppställning. 100 % motsvara 9 600 pers.
x » » 5 013 »

5. Enhetsmetod. 100 % motsvara 9 600 pers. Huru många % motsvarar 1 person? Sv.: $\frac{100}{9\,600}$. Så många procent motsvara 1 person. Huru många procent motsvara 5 013 pers.? Sv.: $\frac{5\,013 \cdot 100}{9\,600}$.

6. Förhållande. Samma förhållande mellan x och 100 som mellan 5 013 pers. och 9 600 pers.; alltså $x = \frac{5\,013}{9\,600} \times 100$.

7. Förhållande. Därvid märkes, att procenttalet är ett hundradelstal. Alltså skall förhållandet uttryckas i hundradelar, och sedan eftertänkes hundradelstalet. Detta kan vara helt eller blandadt tal. Allt efter erforderlig noggrannhet beräknas förhållandetalet, så att det har 2, 3, 4 eller 5 decimaler.

Vanligast beräknas det med 4 decimaler, för att man skall kunna märka olikheten mellan flera fall, då olikheten är liten. Så är fallet i uppgifter, då förhållandet mellan döda och lefvande m. m. skall angifvas för ett ställe under olika tider eller flera ställen på lika tider.

1) Eftertänkes förhållandet mellan de röstandes och de röstberättigades antal. 2) Uttryckes detta tal i hundradelar (tiotusendelar). 3) Eftertänkes hundradelstalet (= procenttalet).

1) $\frac{5\,013}{9\,600}$. 2) $\frac{5\,013}{9\,600} = 0{,}52\underline{22}$. 3) Hundradelstalet (= procenttalet) $52{,}2\underline{2}$.

Här märkes, att procenttalet är hundrafald af förhållandetalet. Till följd däraf kan procenttalet betecknas så från början: $100 \times \frac{5\,013}{9\,600}$.

Ex. 517. I stället för 90 kr.:s fordran fick Asp en gång i utdelning $32{,}49$ kr. Uttryck i % förhållandet mellan a) utdelningen och fordran, b) mellan tillgångar och skulder! c) Huru många % af skulderna voro tillgångarna?

a). **Lösningar 1.** Enhetsmetod.

Uppställning. 100 % motsvara 90 kr.
x » » $32{,}49$ »

100 % motsvara 90 kr. Huru många % motsvara 1 kr.? Sv.: $\frac{100}{90}$. Så många % motsvara 1 kr. Huru många % motsvara $32{,}49$ kr.? Sv.: $\frac{32{,}49 \cdot 100}{\text{[illegible]}}$.

2. Förhållande. Förhållandet mellan $32{,}49$ och 90 kr. bestämmes. Samma förhållande skall det vara mellan x % och 100 %. Alltså är $x \% = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} \times 100 \% = 36{,}1 \%$.

3. Analogibildning. $x \% : 100 \% = 32{,}49$ kr. : 90 kr.

Uträkning: $x \% = \frac{32{,}49}{90} \times 100 \% = 36{,}1 \%$.

b). Förhållandet mellan tillgångar och skulder är = förhållandet mellan utdelningen åt A. och hans fordran.

c). Af a) eller b) märkes, att procenttalet (= svaret på frågan) är $36{,}1$.

Ex. 518. Se ex. 482 å sidan 213!

Lösning 1. Förhållandet mellan folkmängdstillökningen och folkmängden år 1875 beräknas. Lika stort är förhållandet mellan x % och 100 %.

Lösning 2. Tankegång. Först bestämmes folkmängdstillökningen, sedan bildas analogi.

Folkmängdstillökningen 20 202 pers. — 12 644 pers.

Analogi $x\ \% : 100\ \% = (20\,202 - 12\,644) : 12\,644$.

Uträkning. $x\ \% = \frac{20\,202 - 12\,644}{12\,644} \times 100\ \%$; $x\ \% = 59{,}8\ \%$.

Ex. 519. År 1881 voro af 2 997 svenska fartyg 2 440 segelfartyg, de öfriga ångfartyg. Huru många % af segelfartygen utgjorde ångfartygen?

Först bestämmes ångfartygens antal, sedan bildas analogi.

Ångfartygens antal $= 2\,997 - 2\,440$.

Analogi. $x : 100 = (2\,997 - 2\,440) : 2\,440$.

$x = \frac{2\,997 - 2\,440}{2\,440} \times 100 = 22{,}827 = 22{,}83$.

Ex. 520. År 1882 förbrukades i Stockholm 61 614 900 hl. gas, utgörande en tillökning af 2,4 % mot år 1881. Huru mycket åtgick då?

Exemplet kan ändras så: Mot förbrukning af 102,4 hl. gas år 1882 svarade förbrukning af 100 hl. gas år 1881. År 1882 förbrukades 61 614 900 hl. gas. Huru mycket förbrukades år 1881?

Lösningar 1. Enhetsmetod. Då eftertänkes först, huru många hl. svarade mot 0,1 hl., sedan huru många hl. svarade mot 1 hl., därpå huru många hl. svarade emot 61 614 900 hl., och slutligen svar på frågan.

Svar: $\frac{61\,614\,900 \times 10 \times 100}{1\,024}$ hl.

2. Analogi x hl. : 61 614 900 hl. $= 100 : 102{,}4$.

$$x \text{ hl.} = \frac{100}{102{,}4} \times 61\,614\,900 \text{ hl.}$$

eller, om $100 : 102{,}4$ förenklas något,

$$x \text{ hl.} = \frac{1000}{1024} \times 61\,614\,900 \text{ hl.}$$

Ex. 521. 1 kg. hvetemjöl kostar 30 öre. 1 kg. rågmjöl är 40 % billigare. 1 kg. hafremjöl är 40 % dyrare. Huru mycket kostar a) 1 kg. rågmjöl, b) 1 kg. hafremjöl?

a. 4 sätt angifvas. I de 3 första sätten uträknas först prisskillnaden, sedan svaret på frågan. I det 4:e sättet uttryckes först förhållandet mellan rågmjölspriset och hvetemjölspriset på ett enklare sätt.

Lösningar 1. Enhetsmetod.

1) 100 öre 40 öre.	40 öre motsvara 100 öre. Huru
30 » x »	många öre motsvarar 1 öre? 30

öre? $\frac{30 \cdot 40}{100} = 12$. Prisskillnaden är således 12 öre.

2) Priset är $30 - 12$ öre $= 18$ öre.

2. Enhetsmetod. 1) 1 % af 30 öre $= \frac{30}{100}$ öre. 40 % af 30 öre $= \frac{40 \cdot 30}{100}$ öre $= 12$ öre. 2) $30 - 12$ öre $= 18$ öre.

3. Förhållande. 1) $\frac{40}{100} \times 30$ öre $= 12$ öre. 2) $30 - 12$ öre $= 18$ öre.

4. Förhållande. Emedan 30 öre är $\frac{100}{100}$ af 30 öre och rågmjölspriset är 30 öre så när som $\frac{40}{100}$ af 30 öre, så är rågmjölspriset $\frac{60}{100}$ af 30 öre. Detta kan äfven beräknas på följande sätt: 30 öre $- \frac{40}{100} \times 30$ öre $= \frac{100}{100} \times 30$ öre $- \frac{40}{100} \times 30$ öre $= (\frac{100}{100} - \frac{40}{100}) \times 30$ öre $= \frac{60}{100} \times 30$ öre.

I detta fall eftertänkes således först ett enklare förhållande mellan rågmjölspriset och hvetemjölspriset än det från början uppgifna. Här är det $\frac{60}{100}$ eller 0,60.

b. Lösningarna motsvara lösningarna af **a.** I 4:e lösningssättet är förhållandet mellan hafremjölspriset och hvetemjölspriset $\frac{140}{100}$.

Ex. 522. 1 kg. sötmjölksost kostar 90 öre; 1 kg. kumminost 72 öre. Huru många % a) dyrare än den första, b) billigare än den senare?

a. 1. Enhetsmetod. 1) $90 - 72$ öre $= 18$ öre. 2) $0{,}01 \times 72$ öre $= 0{,}72$ öre. 3) 18 öre : 0,72 öre $= 25$.

2. Förhållande. 1) $90 - 72$ öre $= 18$ öre.

2) 100 % motsvarar 72 öre.	$x : 100 = 18 : 72;$
x » » 18 »	$x = \frac{18}{72} \times 100.$

3. Förhållande.

100 % motsvarar 72 öre.	$x = \frac{90}{72} \times 100 = 125.$
x » » 90 »	$125 - 100 = 25.$

b. 1. Enhetsmetod. 1) $90 - 72$ öre $= 18$ öre. 2) $0{,}01 \times 90$ öre $= 0{,}90$ öre. 3) 18 öre : 0,9 öre $= 20$.

2. Förhållande. 1) $90 - 72$ öre $= 18$ öre.

2) 100 % motsvarar 90 öre.	$x : 100 = 18 : 90.$
x » » 18 »	$x = \frac{18}{90} \times 100.$

3. Förhållande.

1) 100 % motsvarar 90 öre.	$x = \frac{72}{90} \times 100 = 80.$
x » » 72 »	2) $100 - 80 = 20.$

Ex. 523. Stenberg önskar erhålla 6 % nettobehållning af sin gård, som kostar 16 250 kr. Reparationer gå till 78 kr. och skatten till 97 kr. Hans egen bostad beräknas till 200 kr. Huru mycket utgöra de kontanta hyresmedlen för 1 år?

Bruttobehållningen, d. v. s. samtliga hyresmedlen, är $\frac{6}{100} \times 16\,250$ kr. + 78 kr. + 97 kr. Däri ingår hans egen hyra med 200 kr. Det öfriga utgör de kontanta hyresmedlen.

Ex. 524. Af 30 kg. järnmalm erhållas 15 kg. järn. a) Angif förhållandet mellan järnmängden och malmmängden i %! Huru mycket järn bör erhållas ur 630 kg. malm, då denna är b) 20 % bättre, c) 20 % sämre än den förra? Huru mycket erhålles af 630 kg. malm, om malmen enligt a) vore d) 20 % bättre, e) 20 % sämre än den senare?

a. Uträknas såsom ex. 517. Sv.: $\frac{15 \cdot 100}{\text{[illegible]}}$ % = 50 %.

Vid besvarande af b)—c) märkes följande. Då den är 20 % bättre, skall man ur den få 20 % mer järn än ur den förra. Först eftertänkes, huru mycket järn erhålles, om den senare malmen vore lika god som den förra, sedan eftertänkes, huru mycket järn erhålles ur den senare malmen allt efter dess bättre eller sämre beskaffenhet.

b. 1. Om den senare vore lika god, så vore den erhållna järnmängden $\frac{630 \cdot 15}{\text{[illegible]}}$ kg. (eller på grund af a-svaret $\frac{630 \cdot 50}{100}$ kg. eller $\frac{50 \cdot 630}{100}$ kg.) Den är 20 % bättre, eller förhållandet mellan dess godhet och den förras godhet är [illegible] Alltså erhålles $\frac{120}{100} \times \frac{630 \cdot 15}{\text{[illegible]}}$ kg.

2. Enhetsmetod. Uppställning. 30 kg. 15 kg. 100 %.
630 » x » 120 %.

15 kg. järn erhålles af 30 kg. malm. Huru mycket järn erhölles ur 630 kg. malm, om den vore lika god som den förra? Sv.: $\frac{630 \cdot 15}{30}$ kg. Så mycket erhölles, om förhållandet angåfves med 100 %. Huru mycket erhölles, om förhållandet angåfves med 1 %? Sv.: 1 hundradel däraf? Bet.: $\frac{630 \cdot 15}{100 \cdot 30}$ kg. Så mycket erhölles om förhållandet angåfves med 1 %. Huru mycket erhålles, när förhållandet angifves med 120 %? Sv. $\frac{120 \cdot 630 \cdot 15}{\text{[illegible]}}$ kg.

I st. f. att säga »förhållandet angifves med 100 %» (120 %) kan sägas: »då 100 kg. järn erhållas ur en viss mängd malm» (då 120 kg. järn erhållas ur samma malmmängd).

c. Då den är 20 % sämre än den förra, är dess godhet 80 % af den förras godhet (eller fås 80 kg. järn ur en malmmängd, som är lika stor som den mängd af den förra malmen, hvarur fås 100 kg. järn).

Svaret är $\frac{80}{100} \times \frac{630 \cdot 15}{30}$ kg. $= \frac{80 \cdot 630 \cdot 15}{100 \cdot 30}$ kg.

d. Då den förra är 20 % bättre än den senare, är dess godhet 120 % af den senares eller fås 120 kg. järn ur ett malmstycke, som väger lika mycket som det malmstycke af den andra sorten, hvarur fås 100 kg. järn. Tvärt om är den senares godhet $\frac{100}{120}$ af den förras.

Svaret är $\frac{100}{120} \times \frac{630 \cdot 15}{30}$ kg. $= \frac{100 \cdot 630 \cdot 15}{120 \cdot 30}$ kg.

e. Då den förra är 20 % sämre än den senare, är dess godhet 80 % af den senares, eller fås 80 kg. järn ur ett stycke, som väger lika mycket som det malmstycke af den andra sorten, hvarur fås 100 kg. järn. Tvärt om är den senares godhet $\frac{100}{80}$ af den förras.

Svaret är $\frac{100}{80} \times \frac{630 \cdot 15}{30}$ kg. $= \frac{100 \cdot 630 \cdot 15}{80 \cdot 30}$ kg.

B. Ränteuppgifter.

307. Hufvudräkning.

Härvid märkes, att 1) månadsräntan för 1 kr. är $\frac{1}{2}$ öre efter 6 % under 1 år, 2) månadsräntan för 1 kr. är $\frac{1}{3}$ öre efter 4 % under 1 år, 3) månadsräntan för 1 kr. är $\frac{1}{6}$ öre efter 2 % för år, 4) månadsräntan för 100 kr. är 50 öre ($\frac{1}{2}$ kr.) efter 6 % under 1 år, 5) månadsräntan för 100 kr. är 25 öre ($\frac{1}{4}$ kr.) efter 3 % på år, 6) dagliga räntan för 100 kr. är 1 öre efter 3,6 % på år, 7) räntan för en viss summa efter $4\frac{1}{2}$ % är $\frac{3}{4}$ af räntan för samma summa efter 6 % på samma tid.

308. Skriftlig räkning.

Se exemplen 273—278 på sid. 144 och 145 samt ex. 483 och 484 å sid. 214!

Ex. 525. På huru lång tid är **räntan** 65 öre för 13 kr. efter 4 % på år?

Lösningar. 1. Enhetsmetod. Eftertänk 1) räntan för 1 kr. under den tiden, 2) räntan för 1 kr. under 1 år, 3) antalet af år i tiden, 4) svaret på frågan.

Uträkning. 1) 65 öre : 13 = 5 öre. 2) Efter 4 % är räntan för 1 kr. 4 öre på 1 år. 3) 5 öre : 4 öre = $1\frac{1}{4}$. 4) Svar: $1\frac{1}{4}$ år = 1 år 3 mån.

2. På grund af formeln $r = \frac{xpk}{100}$. $t = x$.

$r = \frac{xpk}{100}$. Emedan r = 1 hundradel af xpk, så är 1 hundradel af $xpk = r$, och $xpk = 100r$; $xpk = x \times pk$. Eftersom $x \times pk = 100r$, så är $x = \frac{100r}{pk}$.

Rörande bokstäfvernas betydelse se ex. 484 à sid. 214!

$t = \frac{100r}{pk} = \frac{100 \cdot 0{,}65}{4 \cdot 13} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. Tiden alltså $= 1\frac{1}{4}$ år.

Ex. 526. För hvilket kapital är räntan 4 kr. under 9 mån. efter $4\frac{1}{2}$ % under 1 år?

Först uttryckes 9 mån. i år.

Lösningar. 1. Enhetsmetod.

Uppställning:	100 kr.	$4\frac{1}{2}$ kr.		1 år.	
	x	»	4	»	$\frac{3}{4}$ »

Eftertänk 1) huru många kr. gifva $\frac{1}{2}$ kr. i ränta under en viss tid, 2) huru många kr. gifva 1 kr. i ränta på samma tid, 3) huru många kr. gifva 4 kr. i ränta på samma tid, 4) huru många kr. gifva samma ränta på $\frac{1}{4}$ år, 5) huru många kr. gifva samma ränta på $\frac{3}{4}$ år!

2. Enhetsmetod. Utan uppställning. Eftertänk 1) för huru många kr. räntan är 4 kr. efter $4\frac{1}{2}$ %; 2) för huru många kr. räntan är så stor på $\frac{1}{4}$ år, 3) för huru många kr. räntan är så stor på $\frac{3}{4}$ år?

Uträkning: 1) Kapitalets krontal är så stort som delarnas antal, då 4 kr. delats så, att hvarje del är $4\frac{1}{2}$ öre. 4 kr. : $4\frac{1}{2}$ öre $= \frac{2 \cdot 400}{9} = \frac{800}{9}$. 2) Eftersom tiden är blott $\frac{1}{4}$ af den förra tiden, måste kapitalet vara 4 ggr så stort och dess krontal vara $\frac{4 \cdot 800}{9}$. 3) Då tiden är 3 ggr så stor, behöfves blott $\frac{1}{3}$ af det förra kapitalet. Alltså är det $\frac{4 \cdot 800}{3 \cdot 9}$ kr.

3. I detta och dylika ex. förekommer omvändt förhållande 2 gånger vid användning af enhetsmetoden. Vid analogibildning förekommer omvändt förhållande blott en gång.

Samma förhållande mellan 2 kapital som mellan deras räntor.

Analogi: x kr. : 100 kr. $=$ 4 kr. : $4\frac{1}{2}$ kr.

$$x \text{ kr.} = \frac{4}{4\frac{1}{2}} \times 100 \text{ kr.}$$

Omvändt förhållande mellan kapitalen mot mellan tiderna

x **kr.** : $\frac{[illegible]0}{4\frac{1}{2}}$ kr. $=$ 1 år : $\frac{3}{4}$ år; x kr. $= \frac{4}{3} \times \frac{[illegible]0}{4\frac{1}{2}}$ kr.

eller, om tiden uttryckes i månader,

x kr. : $\frac{4 \cdot 100}{4\frac{1}{2}}$ kr. $=$ 12 mån. : 9 mån. x kr. $= \frac{12}{9} \times \frac{4 \cdot 100}{4\frac{1}{2}}$ kr.

4. På grund af formeln $r = \frac{tpn}{[illegible]}$. $k = x$.

[illegible] $= \frac{[illegible]}{100}$, alltså $100r = tpx$ eller $100r = tp \times x$; $x = \frac{[illegible]r}{[illegible]}$.

$$k = \frac{100 \cdot 4}{\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{2}} = \frac{100 \cdot 4}{\frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 2}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 4}{3 \cdot 9} = [illegible]$$

Ex. 527. Huru hög är räntan, då hon är 44 kr. 10 öre för 490 kr. på 2 år?

Lösningar. 1. Enhetsmetod utan särskild uppställning. Beräkna 1) räntan för 1 kr. under 2 år, 2) för samma summa under 1 år! 3) Svara på frågan!

Uträkning. 1) 4 410 öre : 490 $=$ 9 öre. 2) 9 öre : 2 $=$ $4\frac{1}{2}$ öre. 3) Emedan procenttalet är lika stort som räntans öretal, då kapitalet är 1 kr., och räntans öretal här är $4\frac{1}{2}$, så är procenttalet $4\frac{1}{2}$, och frågans svar $4\frac{1}{2}$ %.

2. Enhetsmetoden på grund af vidstående uppställning.

44,1 kr. 490 kr. 2 år.

x » 100 » 1 »

3. Förhållande. Förhållandet mellan räntorna lika stort som mellan kapitalen. Förhållandet mellan 100 kr. och 490 kr. är $\frac{100}{490}$; alltså är räntan $\frac{100}{490} \times 44{,}1$ kr. på samma tid. Förhållandet mellan räntorna $=$ förhållandet mellan tiderna; alltså är räntan $\frac{1}{2} \times \frac{100}{490} \times 44{,}1$ kr. $= 4\frac{1}{2}$ kr.

Procenttalet är lika stort som räntans krontal, då kapitalet är 100 kr. Räntans krontal är $4\frac{1}{2}$; alltså är procenttalet $4\frac{1}{2}$, och svaret på frågan $4\frac{1}{2}$ %.

4. Vid analogibildning kan procenttalet omedelbart framträda, om blott tal förekomma där.

Förhållandet mellan räntornas krontal $=$ förhållandet mellan kapitalens krontal.

$x : 44{,}1 = 100 : 490. \qquad x = \frac{100}{490} \times 44{,}1 = \frac{100 \cdot 44{,}1}{490}.$

Förhållandet mellan räntornas krontal = förhållandet mellan tidernas årtal.

$x : \frac{100 \cdot 44{,}1}{490} = 1 : 2. \qquad x = \frac{1}{2} \times \frac{100 \cdot 44{,}1}{490}.$

x är räntans krontal eller procenttalet.

5. På grund af formeln $r = \frac{tpk}{100}$. $p = x$.

$r = \frac{txk}{100}$ eller $r = \frac{x \cdot tk}{100}$ eller $\frac{x \cdot tk}{100} = r$. Eftersom 1 hundradel af $x \cdot tk$ är r, så är $x \cdot tk = 100r$ och $x = \frac{100r}{tk}$.

$p = \frac{100 \cdot 44{,}1}{2 \cdot 490}$ o. s. v.

Ex. 528. Svensson lånade 275 kr. den 21 januari, afbetalade 50 kr. den 1 mars, 40 kr. den 31 mars, 10 kr. den 25 april, 40 kr. den 15 maj, 40 kr. den 30 sept., 10 kr. den 2 okt., 50 kr. den 3 nov. allt år 1882 och 30 kr. den 31 januari år 1883. Räntefoten är 6 % för år. Det öfriga erlades jämte räntor den 12 april år 1883. Huru mycket betalade han då?

Viktigt är att ihågkomma, att dagarnas antal i en månad alltid är 30, så att tiden från den 1 febr. till den 28 febr. är 29 dagar, likaså tiden från den 1 mars till den 31 mars också är 29 dagar.

Här äro 2 sätt tänkbara. 1) Ränta beräknas för det ena innestående kapitalet efter det andra. 2) Ränta beräknas för den ena återlämnade delen efter den andra för den tid den varit lånad.

1) är egentligast. Räntans krontal betecknas då:

$$\frac{40 \cdot 6 \cdot 275}{360 \cdot 100} + \frac{29 \cdot 6 \cdot 225}{360 \cdot 100} + \frac{25 \cdot 6 \cdot 185}{360 \cdot 100} + \frac{20 \cdot 6 \cdot 175}{360 \cdot 100} + \frac{135 \cdot 6 \cdot 135}{360 \cdot 100} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 95}{360 \cdot 100} + \frac{31 \cdot 6 \cdot 85}{360 \cdot 100} + \frac{87 \cdot 6 \cdot 35}{360 \cdot 100} + \frac{72 \cdot 6 \cdot 5}{360 \cdot 100} = 1{,}83 + 1{,}09 + 0{,}77 + 0{,}58 + 3{,}04 + 0{,}03 + 0{,}44 + 0{,}51 + 0{,}06.$$

2) Räntans krontal betecknas: $\frac{40 \cdot 6 \cdot 50}{360 \cdot 100} + \frac{69 \cdot 6 \cdot 40}{360 \cdot 100} +$

$$+ \frac{94 \cdot 6 \cdot 10}{360 \cdot 100} + \frac{114 \cdot 6 \cdot 40}{360 \cdot 100} + \frac{249 \cdot 6 \cdot 40}{360 \cdot 100} + \frac{251 \cdot 6 \cdot 10}{360 \cdot 100} + \frac{282 \cdot 6 \cdot 50}{360 \cdot 100} + \frac{369 \cdot 6 \cdot 30}{360 \cdot 100} + \frac{441 \cdot 6 \cdot 5}{360 \cdot 100} = 0{,}33 + 0{,}46 + 0{,}1\underline{6} + 0{,}76 + 1{,}66 + 0{,}4\underline{2} + 2{,}35 + 1{,}8\underline{5} + 0{,}3\underline{7}.$$

Genväg i dylika fall, då kapitalet innehåller delar med 10 kr. eller tiofald af 10 kr. eller hundrafald af tio kr., o. s. v., i hvarje del: $\frac{6}{360 \cdot 100} \times (40 \cdot 275 + 29 \times 225 + 25 \cdot 185 + 20 \cdot 175 + 135 \cdot 135 + 2 \cdot 95 + 31 \times 85 + 87 \times 35 + 72 \cdot 5)$.

Först beräknas produkterna af motsvarande dagtal och krontal, sedan summan af dessa produkter och slutligen produkten af talet $\frac{6}{360 \cdot 100}$ och den summan.

I detta exempel medför det sättet ingen genväg.

Ex. 529. Hvilket kapital växer till 506 kr. 25 öre under 3 mån., när ränta beräknas efter 5 % för år?

Här eftertänkes först, hvartill 1 kr. växer under samma tid efter samma % för år, och sedan svaret på frågan.

1 kr. växer till 1 kr. + $\frac{5}{4}$ öre = 1 kr. 1,25 öre = 1,0125 kr. = 101,25 öre.

Uppställning. x kr. 506 kr. 25 öre.
1 » 1 » 1,25 »

x kr. : 1 kr. = 506 kr. 25 öre : 1 kr. 1,25 öre.

$x = \frac{506{,}25 \text{ kr.}}{1{,}0125 \text{ kr.}} = 500.$ Eller $x = \frac{50\,625 \text{ öre}}{101{,}25 \text{ öre}} = 500.$

Sv.: 500 kr.

Ex. 530. Hvartill växa 1 500 kr. på 3 år med ränta på ränta efter a) 3,6 %? b) Hvilket kapital växer till 1 500 kr. under 15 år, då ränta beräknas på ränta efter 4 % för år?

a) *Anvisning:* Då räntan beräknas efter 3,6 %, växer 1 kr. till 1,036 kr. under första året. Hvarje följande års slut blir kapitalet 1,036 × kapitalet vid årets början. Alltså växer 1 kr. under 2 år till 1,036 × 1,036 kr. och under 3 år till 1,036 × 1,036 × 1,036 kr.

Enklast besvaras dylika frågor medelst tabellen å sid. 255.

Emedan blott 4 decimaler äro medtagna i tabellen å sid. 255, uppstår stundom ett fel, som kan uppgå till 4—5 öre på 1 000 kronors kapital.

Svar enligt tabellen: a) 1 500 × 1,1119 kr. b) $\frac{1\,500}{1{,}8009}$ kr.

Ex. 531. a) För Gustaf insattes 10 kr. samma dag årligen under 10 års tid i en bank mot ränta på ränta efter $4\frac{1}{2}$ % för år. Huru mycket fanns att lyfta vid det 10:e årets slut?

Utredning och uträkning. Den första insatsen förräntades under 10 år, den 2:dra under 9 år, ..., den

10:e under 1 år. Enligt tabellen å sid. 255 hade 1 kr. af 1:a insatsen vuxit till 1,553 kr., 1 kr. af 2:a insatsen vuxit till 1,4861 kr., ..., 1 kr. af sista insatsen vuxit till 1,045 kr. Alltså hade 10 kr. vuxit till $10 \times (1,553 + 1,4861 + \ldots\ldots + 1,045)$ kr. eller till 128,41 kr.

Ex. 531. b) Huru stor penningsumma skall årligen insättas, för att slutsumman efter 10 år skall blifva 128 kr. 41 öre, när ränta på ränta beräknas efter $4\frac{1}{2}$ % för år.

På grund af a) märkes, att slutkapitalet skall delas med summan af slutkapitalen till 1 kr. under tiden 1—10 år enligt förenämnda tabell. Dess krontal är:

$128,41 : 12,841 = 10.$

Ex. 532. En församling lånade 4 500 kr. att amorteras (dödas) (betalas) på det sätt, att $\frac{1}{20}$ af kapitalet och ränta efter 5 % för år å oguldna delen af lånet betalades hvarje 6:e månad. Huru stor var a) den första inbetalningen, b) den andra inbetalningen, c) summan af alla inbetalningarna?

Svar: a) $\frac{4\,500}{20} + \frac{5 \cdot 4\,500}{2 \cdot 100}$ kr. b) $\frac{4\,500}{20} + \frac{5 \cdot 4\,275}{2 \cdot 100}$ kr. c) Summan af kapitalet och alla räntorna.

Räntorna äro i ordning: 112,50 kr., 106,88 kr., 101,25 kr., 95,63 kr., 90 kr., 84,38 kr., 78,75 kr., 73,13 kr., 67,50 kr., 61,88 kr., 56,25 kr., 50,63 kr., 45 kr., 39,38 kr., 33,75 kr., 28,13 kr., 22,50 kr., 16,88 kr., 11,25 kr. och 5,63 kr. Summan af dem är 1 181,30 kr.

Märk! 1. Räntan minskas hvarje halfår med 5,625 kr. Hvarannan räntebetalning är alltså 0,5 öre för stor. Om de 10 ränteförhöjningarna borttoges, så vore summan af alla räntorna 1 181,25 kr.

Märk! 2. Räntesumman 1 181,25 kr. kan beräknas på enkelt sätt på grund däraf, att räntorna oupphörligen minskas lika mycket. Summan af 1:a och 20:e räntorna = summan af 2:a och 19:e räntorna = summan af 3:e och 18:e räntorna = ... = summan af 10:e och 11:e räntorna. Summan af alla räntorna innehåller alltså 10 sådana summor eller är $= 10 \times (112,50 + 5,625)$ kr. $= 10 \times 118,125$ kr. $= 1\,181,25$ kr.

Märk! 3. När ett lån småningom betalas på detta sätt, blifva de årliga inbetalningarna allt mindre.

Märk! 4. **Stora** lån afbetalas på det sätt, att lika mycket årligen inbetalas, tills hela lånet blifvit betaladt.

Den årliga inbetalningen kallas **annuitet. Om** annuiteten bestämts till 15 % af lånesumman 4 500 kr. i ex. 532, och den i annuiteten ingående räntan vore beräknad efter 5 % af oguldet kapital, så amorterades lånet genom 9 inbetalningar, af hvilka den 9:e vore 202,91 kr. Detta märkes af följande s. k. amorteringsplan.

Kapital.	Ränta.	Låneafbetalning.	Annuitet.
4 500 kr. — 450	225 kr.	450 kr.	675 kr.
4 050 kr. — 472,5 »	202,5 »	472,5 »	675 »
3 577,5 kr. — 496,12 »	178,88	496,12 »	675 »
3 081,88 kr. — 520,93 »	154,07 »	520,93 »	675 »
2 560,45 kr. — 546,98 »	128,02 »	546,98	675 »
2 013,47 kr. — 574,33 »	100,67 »	574,33 »	675 »
1 439,14 kr. — 603,04 »	71,96	603,04 »	675
836,10 kr. — 633,19 »	41,81 »	633,19 »	675 »
202,91 kr.			

Ex. 533. En auktion den 16 maj 1877 uppgick till 472 kr. 95 öre. Arfvodet var 8 %, klubbföring m. m. gick till 6 kr. 50 öre. Behållningen skulle lämnas efter 1 års förlopp utan ränta. Däraf uttogos 50 kr. den 10 maj, 25 kr. d. 23 juni, 100 kr. d. 17 juli, allt år 1877. Resten skulle efter öfverenskommelse erläggas d. 1 jan. 1878. Huru mycket utgjorde denna, då räntan på de förskotterade beloppen och rabatten på återstoden skulle beräknas efter 6 % på år?

1) Omkostnaderna voro 44 kr. 34 öre. 2) Behållningen 428,61 kr. Den skulle erläggas räntefritt den 16 maj 1878. 3) Däraf uttogos 3 delar i förskott. Alltså beräknas det värde, som de hafva den 16 maj 1878, då

ränta beräknas för hvarje del från uttagningsdagen till den först öfverenskomna förfallodagen, d. 16 maj 1878. a) Värdet af 50 kr. var då 50 kr. + 3 kr. + $\frac{1}{60} \times 3$ kr. = 53,05 kr. b) Värdet af 25 kr. = 25 kr. + $\frac{323}{360} \times \frac{6}{100} \times$ 25 kr. = 26,35 kr. c) Värdet af 100 kr. = 100 + $\frac{299}{360} \times$ 6 kr. = 104,98 kr. d) Värdet af samtliga dessa delar 184,38 kr. 4) Återstoden af behållningen 428,61 kr. — 184,38 kr. = 244,23 kr. (Om en tredje decimal medtagits i de 2 första krontalen, så blefve återstoden 244,24 kr.) 5) Denna återstod skall erläggas den sedan öfverenskomna förfallodagen, den 1 jan. 1878, med det värde, den då hade. Det gäller således att beräkna den penningsumma, som växer till 244,23 kr. under tiden 1 jan. till 16 maj 1878. Det sker enligt ex. 529. 1 kr. växer därunder till 1 kr. 2,25 öre eller 1,0225 kr. Det kapital, som växer till 224,23 kr. är alltså $\frac{2[illegible]}{1,0225}$ kr. = 238,86 kr.

Eller ock, emedan det sättet är besvärligt, beräknas värdet af 224,23 kr. den 1 jan. 1878 så, att räntan för hela summan 224,23 kr. drages därifrån. Det beräknade värdet är då i det fallet något mindre än i det förra fallet = 238,74 kr.

Ex. 535. I en konkurs utgjordes tillgångarna af en fastighet, såld för 16 000 kr., och lösegendom, såld för 1 855 kr. Därifrån afgingo försäljningskostnaden och sysslomanna-arfvodet för fastigheten 1 200 kr., för lösegendomen 200 kr. I fastigheten funnos 2 inteckningar: den första (med bästa rätten) å 10 000 kr. jämte 2 år 2 mån. 10 dagars ränta; den andra å 2 500 kr. jämte 1 år 8 mån. 20 dagars ränta allt efter 6 % på år. Med förmånsrätt skulle ur lösegendomen utgå 180 kr. löner. De öfriga skulderna utgöra 2 200 kr. Huru mycket erhöll Berg, som ägde andra inteckningen och dessutom en fordran af 100 kr.?

Med behållningen af fastighetens försäljningssumma skola först de intecknade skulderna betalas. Om det sedan blir något öfverskott, skall detta användas för betalning af en del andra skulder. Det öfverskottet skall alltså läggas till behållningen af lösegendomens försäljningssumma. Sedan beräknas, huru mycket hvarje annan fordringsägare erhåller för sin fordran.

1. Af fastighetens försäljningssumma afgingo först 1 200 kr. Behållningen var 14 800 kr. Första inteckningsskulden var 10 000 kr. + räntan = 10 000 + $\frac{790 \cdot 6 \cdot 10\,000}{360 \cdot 100}$ kr. = 11 316,67 kr. Andra inteckningsskulden var 2 500 kr. + räntan = 2 500 + $\frac{620 \cdot 6 \cdot 2\,500}{360 \cdot 100}$ kr. = 2 758,33 kr.

Öfverskottet, då dessa skulder betalats, blir 725 kr.

2. Af lösegendomens försäljningssumma tagas först 200 kr. Behållningen var 1 655 kr. Därifrån tages först lönerna 180 kr., som skulle utgå med förmånsrätt. Återstoden var 1 475 kr.

3. Det, som fördelades mellan de öfriga fordringsägarna, var alltså 725 kr. + 1 475 kr. eller 2 200 kr. De öfriga skulderna voro 2 200 kr. Alltså fingo alla full betalning.

4. Berg hade 2 fordringar: fordran på grund af inteckning och 100 kr. eller 2 758,33 kr. + 100 kr. = 2 858,33 kr.

Rabatt- och växeluppgifter.

309. *Rabatt* är ett afdrag, som lämnas på en penningsumma. Det erhålles 1) vid varuköp och är då dels oberoende af dels beroende af tid, 2) vid i förtid verkställd betalning af en räntefri skuld i allmänhet.

Ex. 536. Sköld köpte varor för 370 kr. och erhöll rabatt efter 8 %. a) Huru stor var rabatten? b) Huru mycket betalade han? (= Huru stor var *nettosumman?*) c) Angif förhållandet mellan nettosumman och 370 kr. (*bruttosumman*)!

Svar: a) 0,08 × 370 kr. = 29,60 kr. b) 370 kr. — 29,60 kr. = 340,40 kr. c) 100 % — 8 % = 92

Ex. 537. Krok köpte varor för 500 kr., hvilka skulle betalas räntefritt 1 månad därefter. Om han betalade genast, skulle han få rabatt efter 6 % för år. Huru mycket skulle han då betala?

Sv.: 500 kr. — $\frac{1 \cdot 500}{2 \cdot 100}$ kr. = 497,50 kr.

I alla sådana fall är rabatten = räntan på bruttosumman. Nettosumman kallas bruttosummans *rabatterade värde*.

I andra fall, då skuldsedeln är en revers, har man förr alltid ansett, att rabatten skulle vara = räntan på den i förtid erlagda penningsumman, d. v. s. på den förskrifna skuldens rabatterade värde, emedan summan af det rabatterade värdet och dess ränta skulle vara = det förskrifna beloppet. Beräkningen utfördes då så som i ex. 529 eller enligt en förut inlärd formel.

Ex. 538. Behållningen på en auktion gick till 506 kr. 25 öre och skulle betalas af auktionsförrättaren 6 mån. efter auktionsdagen. Säljaren önskade få sin fordran 3 mån. före förfallodagen mot rabatt efter 5 % för år. Huru mycket skulle han då erhålla?

Svar: En penningsumma, som under 3 mån. med ränta efter 5 % för år växte till $506{,}75$ kr. eller 500 kr.

Uträkning 1. Se ex. 529!

Emedan den räkningen är mycket besvärlig, har det sättet allmänt öfvergifvits. För sin riktighets skull kallas det stundom *teoretisk* rabatträkning. Det bekvämare sättet kallas för sin enkelhets skull *praktisk* rabatträkning. Rabatten är då lika med räntan på hela det förskrifna beloppet och alltså större än enl. ex. 529.

Uträkning 2. Rabatten på $506{,}25$ kr. $= \frac{1 \cdot 5 \cdot 506{,}25}{4 \cdot 100}$ kr. $=$ $6{,}31$ kr. Det rabatterade värdet $= 506{,}25 - 6{,}31$ kr. $=$ $499{,}94$ kr. Alltså 6 öre $<$ enligt **1.**

---

310. *Växel är en skuldsedel*, som handlande ofta lämna vid varuköp, och som räntefritt skall betalas på bestämd dag, växelns **förfallodag. Säljaren**, som utställer (drager) växeln, kallas *utställare* (*trassent*). Köparen, som skall betala honom (på hvilken han är dragen), kallas *trassat* eller, om han godkänt växeln, *acceptant*. Växel utfärdas ej på längre tid än 6 mån. Inlöses växeln före förfallodagen, så erhålles rabatt, som är = ränta på hela växelbeloppet.

Ex. 539. En växel å 240 kr. inlöstes 1 mån. 20 dagar före förfallodagen med rabatt efter 5 % för 1 år. Med huru stort belopp inlöstes han?

Svar: 238 kr. 33 öre.

Ex. 540. En annan växel å 650 kr., förfallen den 25 nov. 1878, inlöstes med 641 kr. 22 öre. Därvid lämnades rabatt efter 6 % för 1 år. När inlöstes den? (Sv.: Den 4 sept. 1878.)

Först beräknas rabattens storlek, sedan den tid för hvilken rabatten beviljades och slutligen svar på frågan.

Vid uträkningen blir tiden noga räknadt $81\frac{3}{6}$ dag.

Trassenten säljer ofta växeln till någon bank. Därvid frändrages ränta å växelbeloppet från försäljningsdagen till växelns förfallodag. Denna växelförsäljning är egentligen ett lån, som betalas med växelbeloppet på växelns förfallodag. Räntan kallas *diskont*, och lånet kallas *diskontlån*. Att »diskontera en växel» är att »köpa» en växel mot afdrag efter en viss procent för år.

Ex. 541. Jansson sålde en 3-månaders växel å 500 kr. Huru mycket fick han för den, då årsräntan beräknades efter 5 %? (Svar: 493,73 kr.)

Ex. 542. På en växel å 1 000 kr. lånades pengar den 23 januari 1889. Dess förfallodag var den 14 juli 1889. Årsräntan beräknades efter 4 %. Huru stort lån erhölls? (Svar: 978,62 kr.)

---

311. Obligationer.

Ett annat slag af skuldsedlar kallas **obligationer.** De utgifvas af stater, kommuner eller större bolag, äro tryckta, numrerade och lyda på en viss summa, som kallas deras *nominella värde*. På detta beräknas räntan enligt en på obligationen angifven %. Då räntan beräknas efter 4 % för år, kallas obligationen 4-procents-obligation. Ett obligationslån betalas därigenom, att ett visst antal af obligationer årligen utlottas, d. v. s. inlösas, sedan numren bestämts genom lottning. Innehafvaren får då uppbära det nominella värdet och bör göra det, emedan ingen ränta erhålles efter utlottningsdagen eller den vid utlottningen angifna förfallodagen.

Vid köp (försäljning) af obligationer angifves ofta förhållandet mellan försäljningspriset (= det verkliga värdet) och det nominella värdet i procent. Det verkliga värdet kallas då *kurs*. Då det verkliga värdet är = det nominella värdet, så är kursen *parikurs*. När det verkliga värdet är < nominella värdet, erhålles s. k. *kapitalrabatt*. När det verkliga värdet är > det nominella värdet, erhålles s. k. *vinst* (*premie*). Kursen beror på dels förtroendet for utgifvaren (= låntagaren), dels räntans storlek i förhållande till den för tillfället gällande, dels den sannolika tiden för deras utlottning.

Ex. 543. Huru mycket betalas för 50 000 kr. i obligationer efter a) 90 procents kurs, b) 102 procents kurs?

Svar: a) 0,90 × 50 000 kr.; b) 1,02 × 50 000 kr.

I a) erhölls 10 procents kapitalrabatt. I b) erhölls 2 procents premie.

Ex. 544. För en 5-procents-obligation å 1000 kr. betalades 1025 kr. (utom ränta). a) Huru hög var kursen? b) Huru hög ränta fick köparen för sina utlagda pengar? Sv. a) 102,5 %; b) 4,88 %.

a) x % : 100 % = 1025 kr. : 1000 kr. x % = $\frac{1025}{1000}$ × 100 %.

b) Ränta erhålles för obligationens nominella värde. Den är 50 kr. för år. För köpesumman 1025 kr. får köparen 50 kr:s årsränta. Alltså för 1 kr. $\frac{50}{1025}$ kr. = 4,88 öre.

Ex. 545. För en $4\frac{1}{2}$-procents-obligation à 1 000 kr. betalades 840 kr., 3 månaders ränta inberäknad. Huru hög var kursen?

Först eftertänkes räntans storlek, sedan obligationens verkliga värde och slutligen besvaras frågan.

Räntan var $\frac{1}{4} \times 0{,}045 \times 1000$ kr. $= 11$ kr. 25 öre.

Obligationens verkliga värde var 840 kr. — 11,25 kr. $= 828{,}75$ kr.

Kursens procenttal kan beräknas på grund af analogi.

$$828{,}75 \text{ kr.} : 1000 \text{ kr.} = x \text{ kr.} : 100 \text{ kr.}$$

$$x = \frac{828{,}75}{1000} \times 100 = 82{,}875.$$

Svaret på frågan: 82,875 %.

Ex. 546. Huru mycket bör betalas för 4 st. 5-procents-obligationer à 500 kr. efter 96 % kurs, jämte 2 mån. ränta, som dock skall utfalla först efter 4 mån., men hvarpå beviljas rabattafdrag (= diskontafdrag) för denna tid efter 6 % för år?

Först beräknas verkliga värdet, sedan räntans storlek, så rabattafdraget på räntan, därefter räntans rabatterade värde, slutligen försäljningssumman.

Beräkningar. 1) $0{,}96 \times 4 \cdot 500$ kr. $= 1\,920$ kr. 2) $\frac{1 \cdot 5 \cdot 2000}{6 \cdot 100}$ kr. $= \frac{50}{3}$ kr. $= 16\frac{2}{3}$ kr. 3) $\frac{1}{3} \times \frac{6}{100} \times \frac{50}{3}$ kr. $= \frac{1}{3}$ kr. 4) $16\frac{2}{3}$ kr. — $\frac{1}{3}$ kr. $= 16\frac{1}{3}$ kr. $= 16$ kr. 33 öre. 5) 1 920 kr. + 16 kr. 33 öre $= 1\,936$ kr. 33 öre.

Märk! I 2) bör räntans krontal $16\frac{2}{3}$ ej utbytas mot 16,67 (än mindre mot 16,66), ty den följande räkningen är besvärligare, då närmevärden upptagas däri, och svaret blir slutligen felaktigare, än det är nödvändigt. Krontalet $\frac{50}{3}$ kan bibehållas.

I Sverige finnas 2 slag af *räntefria* obligationer, näml. s. k. järnvägsobligationer, hvilka betalas af Svenska staten, och teaterobligationer, som betalas af Stockholms stad. Inlösningssumman förfallodagen är $>$ nominella värdet. På några få, genom lottdragning bestämda, obligationer fås större eller mindre vinst. Därför kallas samtliga obligationerna *premieobligationer*.

Ex. 546*. Eriksson köpte en teaterobligation för 27 kr. den 1 juni år 1891. Den utlottades den 1 maj år 1912 och inlöstes d. 1 juni samma år med 31 kr. Huru stor var ränteförlusten med beräkning af ränta på ränta efter a) 4 % för år, b) 3,6 % för år? c) Huru stor vore vinsten, i fall köpesumman 27 kr. i annat fall icke sparats?

Svar: a) $27 \cdot 2{,}2788$ kr. — 31 kr. $= 30{,}53$ kr.; b) 25,74 kr.; c) 31 kr.

Tabell,

utvisande 1 kronas tillväxt, under en tid af 1 år till och med 40 år med beräkning af ränta på ränta efter följande årliga räntefot.

År.	3 %.	3,6 %.	4 %.	$4\frac{1}{2}$ %.	5 %.	$5\frac{1}{2}$ %.	6 %.
	kr.	kr.	kr.	kr.	kr.	kr.	kr.
1	1,03	1,036	1,04	1,045	1,05	1,055	1,06
2	1,0609	1,0733	1,0816	1,0920	1,1025	1,1130	1,1236
3	1,0927	1,1119	1,1249	1,1412	1,1576	1,1742	1,1910
4	1,1255	1,1520	1,1699	1,1925	1.2155	1,2388	1,2625
5	1,1593	1,1934	1.2167	1,2162	1,2763	1,3070	1,3382
6	1.1941	1,2364	1,2653	1,3023	1.3401	1,3788	1.4185
7	1,2299	1,2809	1,3159	1,3609	1,4071	1,4547	1,5036
8	1,2668	1,3270	1,3686	1,4221	1,4775	1,5347	1,5938
9	1,3048	1,3748	1,4233	1,4861	1,5513	1,6191	1,6895
10	1,3439	1,4243	1,4802	1,5530	1.6289	1,7081	1,7908
11	1.3842	1.4756	1,5395	1,6229	1,7103	1,8021	1.8983
12	1,4258	1,5287	1.6010	1,6959	1,7959	1,9012	2,0122
13	1,4685	1,5837	1.6651	1,7722	1,8856	2,0058	2,1329
14	1,5126	1.6407	1,7317	1,8519	1,9799	2,1161	2.2609
15	1.5580	1.6998	1,8009	1,9353	2,0789	2.2325	2,3966
16	1,6047	1,7610	1,8730	2,0224	2,1829	2,3553	2,5404
17	1,6528	1,8244	1,9479	2,1134	2,2920	2,4848	2,6928
18	1,7024	1,8901	2,0258	2,2085	2,4066	2,6215	2,8543
19	1.7535	1,9581	2,1068	2,3079	2,5270	2,7657	3,0256
20	1,8061	2.0286	2.1911	2,4117	2.6533	2,9178	3,2071
21	1,8603	2,1016	2,2788	2,5202	2,7860	3,0782	3,3996
22	1,9161	2,1773	2,3699	2,6337	2.9253	3,2475	3,6035
23	1,9736	2,2557	2,4647	2,7522	3,0715	3,4262	3,8197
24	2,0328	2,3369	2,5633	2,8760	3,2251	3,6146	4,0489
25	2,0938	2,4210	2.6658	3,0051	3,3864	3,8134	4,2919
26	2,1566	2,5082	2,7725	3,1107	3,5557	4,0231	4,5494
27	2,2213	2,5984	2,8834	3,2820	3,7335	4.2444	5,8223
28	2,2879	2,6920	2,9987	3,4297	3,9201	4,4778	5,1117
29	2,3566	2,7889	3,1187	3,5840	4,1161	4.7241	5,4184
30	2,4273	2,8893	3,2434	3,7453	4,3219	4,9840	5,7435
31	2,5001	2,9933	3,3731	3.9139	4,5380	5,2581	6,0881
32	2,5751	3,1011	3,5081	4,0900	4,7649	5,5473	6,4534
33	2.6523	3,2127	3,6484	4,2740	5,0032	5,8524	6,8406
34	2,7319	3,3284	3,7943	4,4664	5,2533	6.1742	7,2510
35	2,8139	3,4482	3.9461	4,6673	5,5160	6,5138	7,6861
36	2,8983	3,5723	4,1039	4.8774	5,7918	6,8721	8,1473
37	2,9852	3,7009	4,2681	5.0969	6,0814	7,2501	8,6361
38	3,0748	3,8342	4,4388	5,3262	6,3855	7,6488	9.1543
39	3,1670	3,9722	4,6164	5,5659	6,7048	8,0695	9,7035
40	3,2620	4,1152	4,8010	5,8164	7,0400	8,5133	10,2857

312. Delning efter visst förhållande.

Se ex. 286 å sid. 146!

Ex. 547. En mästare och 3 gesäller förtjäna 45 kr. under 1 vecka. Huru stor dagspenning har hvar och en, då mästaren skall hafva dubbelt så mycket som hvarje gesäll?

Tankegång. **1.** Dagspenningen bestämmes först för samtliga, sedan för hvar och en, hvarvid en gesällens dagspenning, som är mindre än mästarens, bestämmes först.

1. 45 kr. : 6 = 7,50 kr.

2. Mästarens dagspenning är dubbelt så stor som hvarje gesälls eller innehåller 2 sådana delar som hvarje gesälls. Gesällerna äro 3. Alltså innehåller hela förtjänsten 5 sådana delar som hvarje gesälls. Hvarje gesälls dagspenning är fördenskull 1 femdel af allt eller 7,50 kr. : 5 = 1,50 kr. Mästarens dagspenning är 2 × 1,50 kr. = 3 kr.

Pröfning. 6 × 3 kr. + 6 · 3 · 1,50 kr. = 45 kr.

Tankegång. **2.** Först beräknas veckopenningen för en gesäll, sedan dagspenningen för en gesäll, slutligen dagspenningen för mästaren.

1. Redogörelse = i 1, 2. Hvarje gesälls veckopenning är 45 kr. : 5 = 9 kr.

2. 9 kr. : 6 = 1,50 kr. 2 × 1,50 kr. = 3 kr.

Ex. 548. 41 kr. 25 öre skola så delas mellan 2 personer, att den ene får 2 öre, då den andre får 3 öre. Huru mycket får hvardera?

1. Enhetsmetod. Af 5 öre är den mindre delen 2 öre. Huru stor är den mindre delen, då det hela är a) 1 öre, b) 41 kr. 25 öre?

Den mindre delen är $\frac{4\,125 \times 2}{5}$ öre.

2. Förhållande. Om den ena delen vore 2 öre och den andra delen 3 öre, så vore det hela 5 öre. Däraf vore den första delen $\frac{2}{5}$ och den andra delen $\frac{3}{5}$. Den samma är grunden vid fördelningen af 41 kr. 25 öre. Alltså är den mindre delen $\frac{2}{5}$ × 41 kr. 25 öre och den större delen $\frac{3}{5}$ × 41 kr. 25 öre.

3. Förhållandet mellan den mindre delen och 2 öre skall vara lika med förhållandet mellan 41 kr. 25 öre och 5 öre. Däraf bildas analogien: x öre : 2 öre = 41 kr. 25 öre : 5 öre. — Eller: Den mindre delen skall innehålla lika många delar med 2 öre i hvarje del, som 41 kr. 25 öre innehåller delar med 5 öre i hvarje del. Svar i båda fallen: $\frac{41 \text{ kr. } 25 \text{ öre}}{5 \text{ öre}} \times 2$ öre.

Ex. 549. 36 kr. 84 öre skola så delas mellan 3 personer, att delarna förhålla sig till hvarandra som 1 : 2 : 3. Huru stor blifver hvarje del?

Att delarna förhålla sig till hvarandra som 1 : 2 : 3, innebär, att den andra personens andel **innehåller** 2 delar, hvar och en så stor stor som den förstes andel, och att den tredjes andel **innehåller** 3 delar, hvar och en så stor som den förstes andel. Alltså innehåller det hela, 36 kr. 84 öre, 6 delar, hvar och en så stor som den förstes andel. Till följd däraf är denna 1 sexdel af 36 kr. 84 öre eller 6 kr. 14 öre.

Den andra delen är 2×6 kr. 14 öre = 12 kr. 28 öre. Den tredje delen är 3×6 kr. 14 öre = 18 kr. 42 öre.

Ex. 550. 25 kr. 20 öre delas i 2 delar så, att den ena delen = a) 1 femdel af den andra, b) $\frac{3}{5}$ af den andra. Huru stora äro delarna?

a) Emedan den mindre (första) delen = 1 femdel af den större (andra), **innehåller** den större delan 5 delar så stora som den mindre delen och det hela 6 delar så stora som den mindre. Den första delen är alltså en sexdel af det hela eller 25,20 kr. : 6 = 4,20 kr. Den andra delen = $5 \times 4{,}20$ kr. — Utan uträkning kan den större delen sägas 5 sexdelar af 25,20 kr. och betecknas $\frac{5}{6} \times 25{,}20$ kr.

b) Att den ena delen är = $\frac{3}{5}$ af den andra, innebär, att den innehåller 3 delar lika stora som hvar sin af den andras 5 lika delar. Det hela innehåller 8 sådana delar. Af dem innehåller den mindre delen 3 och den större delen 5. Alltså är den mindre delen $\frac{3}{8}$ af 25,20 kr.

Ex. 551. A., B., C. och D. bilda bolag, hvarvid A. erlägger 5 000 kr., B. 8 500 kr., C. 3 000 kr. och D. 5 500 kr. Hela vinsten utgör 2 200 kr. a) Huru mycket tillfaller hvar och en?

1. Enhetsmetod. Beräkna först vinsten för 1 kr., sedan för hvarje persons insats!

2. Förhållandet mellan hvarje persons vinst och hela vinsten är lika med förhållandet mellan hvarje persons insats och hela rörelsekapitalet. Däraf bildas följande analogi för beräkning af A:s vinst:

x kr. : 2 200 kr. = 5 000 kr. : (5 000 + 8 500 + 3 000 + 5 500 kr.).

$$x \text{ kr.} = \tfrac{5\,000}{22\,000} \times 2\,200 \text{ kr.}$$

Ex. 552. Ett bolag bestod af 3 delägare A., B. och E. Däri insatte A. 440 kr., B. 400 kr., E. 600 kr. När bolaget upplöstes, fick A. för sin del 385 kr. a) Huru stora voro bolagets slutliga tillgångar? b) Huru stor var B:s andel däraf? c) Huru stor var E:s andel?

a). Först beräknas hela begynnelsekapitalet. Sedan finnas flera sätt för besvarande af frågan.

1. Förhållandet mellan slutkapitalet och begynnelsekapitalet = förhållandet mellan A:s andel af slutkapitalet och hans insats.

x kr. : 1 440 kr. = 385 kr. : 440 kr.; x kr. = $\tfrac{385}{440} \times 1\,440$ kr.

2. Först beräknas utdelningen för 1 kronas insats, sedan svaret på frågan.

1) 385 kr. : 440 = $\tfrac{385}{440}$ kr. 2) $\frac{1\,440 \times 385}{440}$ kr. = 1 260 kr.

b). **1.** Förhållandet mellan B:s andel och hans insats = förhållandet mellan hela slutkapitalet och begynnelsekapitalet.

x kr. : 400 kr. = 1 260 kr. : 1 440 kr.; x kr. = $\frac{1\,260}{1\,440} \times 400$ kr.

2. Förhållandet mellan B:s andel och slutkapitalet = förhållandet mellan hans insats och grundkapitalet.

x kr. : 1 260 kr. = 400 kr. : 1 440 kr.; x kr. = $\frac{400}{1\,440} \times 1\,260$ kr.

3. Förhållandet mellan B:s andel och A:s andel = förhållandet mellan B:s insats och A:s insats.

x kr. : 385 kr. = 400 kr. : 440 kr.; x kr. = $\tfrac{400}{440} \times 385$ kr.

4. Förhållandet mellan B:s andel och B:s insats = förhållandet mellan A:s andel och A:s insats.

x kr. : 400 kr. = 385 kr. : 440 kr.; x kr. = $\tfrac{385}{440} \times 400$ kr.

5. Enhetsmetod.

6. Om A:s andel borttagits, så märkes, att B:s andel skall vara $\tfrac{2}{5}$ af återstoden = $\tfrac{2}{5} \times$ (1 260 — 385) kr. = 350 kr.

c). E:s andel beräknas på samma sätt som B:s andel. Dessutom märkes, att E:s insats = $\tfrac{3}{2}$ af B:s insats. Fördenskull skall E:s andel vara = $\tfrac{3}{2} \times 350$ kr.

Ex. 553. I ett aktiebolag tecknades 100 aktier à 50 kr. Vinsten uppgick till $4\frac{1}{2}$ % af aktiekapitalet. Huru stor vinst fick Per, som ägde 15 aktier?

Aktie är en af flera lika delar i en penningsumma (*aktiekapital*), hvilken sammanskjutits af flera personer för bedrifvande af någon rörelse. Föreningen af personerna kallas *aktiebolag*. Hvarje delägare ansvarar för sin uppgifna andel. Se Kungl. förordningen af d. 6 okt. 1848!

Lösningar 1. Vinsten för en aktie var $4\frac{1}{2}$ % af 50 kr.; för 15 aktier $15 \times 0{,}045 \times 50$ kr.

2. För 100 kr. var vinsten $4\frac{1}{2}$ kr., 50 kr. = $\frac{1}{2}$ af 100 kr. För 1 aktie var vinsten $\frac{4\frac{1}{2}}{2}$ kr. Vinsten för 15 aktier $= 15 \times \frac{4\frac{1}{2}}{2}$ kr.

3. Vinsten för 1 kr. = 4,5 öre. Hela Pers insats var 15×50 kr., alltså var hans vinst $15 \times 50 \times 4\frac{1}{2}$ öre.

4. Hela aktiekapitalet = $100 \cdot 50$ kr. = 5 000 kr. Däraf hade P. insatt 750 kr. Hela vinsten var $0{,}045 \times$ 2 000 kr. Pers vinst $\frac{750}{2\,000} \times 0{,}045 \times 2\,000$ kr.

5. Per hade 15 aktier af 100 aktier, alltså var hans insats = 0,15 af kapitalet. Hans vinst fördenskull 0,15 af hela vinsten.

M. m.

Ex. 554. I en handelsrörelse hade Djurberg 500 kr. insatta under 1 år, Erikson 500 kr. under 5 månader och Fredriksson 1 600 kr. under 2 månader. Årsvinsten för allt utgjorde 112 kr. 50 öre. Huru mycket tillföll a) D., b) E., c) F.?

Tankegång. Först eftertänkes storleken af den penningsumma, som hvar och en af delägarna skulle hafva haft i rörelsen under lika lång tid (här 1 mån.), för att vinsten skulle blifva lika stor som enligt ex. Sedan besvaras frågan.

För att få lika stor vinst som enligt ex. skulle D. hafva haft $12 \cdot 500$ kr. eller 6 000 kr. insatta under 1 månad, skulle E. hafva haft $5 \cdot 500$ kr. eller 2 500 kr. insatta under 1 månad och F. $2 \cdot 1\,600$ kr. eller 3 200 kr. insatta under 1 månad. Frågan besvaras sedan så som i ex. 552.

Ex. 555. 3 arbetare, Andersson, Bergström och Lund, betingade sig 310 kr. 50 öre för ett gemensamt arbete efter lika stor dagspenning. Efter 12 dagars gemensamt arbete upphörde B. Sedan A. och L. därefter arbetat gemensamt 15 dagar, upphörde L. Det öfriga utförde A. ensam på 3 dagar. Huru mycket förtjänade A.?

Tankegång 1. Först beräknas de erforderliga dagsverkenas antal, sedan antalet af A:s dagsverken och slutligen A:s förtjänst.

1) $3 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 3 = 69$. 2) $12 + 15 + 3 = 30$. 3) $\frac{30}{69} \times 310$ kr. 50 öre.

Tankegång 2. Först eftertänkes dagsverkenas antal, sedan dagspenningen och slutligen A:s förtjänst.

Medelvärden och blandningar.

313. Se ex. 287 och 288 å sid. 147!

Ex. 556. En handlande förlorade 172 kr. 50 öre det ena året, men vann 256 kr. det andra. Huru stor medelvinst?

Först bestämmes vinsten för hela tiden, 2 år, sedan medelvinsten för båda åren.

Vinsten var alltså $\frac{256 \text{ kr.} - 172 \text{ kr. } 50 \text{ öre}}{2}$.

Ex. 557. 500 kr. äro utlånade efter 6 %, 300 kr. efter 5 % och 800 kr. efter $5\frac{1}{2}$ %. Huru hög är medelräntan?

Lösningar 1. Först beräknas krontalet till räntan för alla kapitalen, sedan till räntan för 100 kr. Slutligen besvaras frågan. Räntans krontal är = procenttalet.

$$r\,(=\text{räntans krontal}) = \frac{5 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 8 \cdot 5\frac{1}{2}}{5+3+8} = \frac{30+15+44}{16} = 5\tfrac{5}{9}.$$

Svar: $5\frac{5}{9}$ %.

2. Först bestämmes öretalet till räntan för alla kapitalen, sedan till räntan för 1 kr., slutligen besvaras frågan, Räntans öretal = procenttalet.

$$r = \text{räntans öretal} = \frac{500 \cdot 6 + 300 \cdot 5 + 800 \cdot 5\frac{1}{2}}{500+300+800} = 5\tfrac{5}{9}.$$

Odugligt är däremot $\frac{500 \cdot 6\,\% + 300 \cdot 5\,\% + 800 \cdot 5\frac{1}{2}\,\%}{500 + 300 + 800}$, ty procenttalet kan i detta fall ej förklaras.

Ex. 558. Medelmarkegångspriset för 1 hl. korn under 5 år var 8 kr. 2 öre. Markegångspriset för 2 år var 7 kr. 95 öre, och för hvart och ett af 2 år 8 kr. 10 öre. Huru stort var det för det 5:e året?

»Markegångspriset för 2 år var 7 kr. 95 öre», betyder, att priset för 1 hl. korn var 7 kr. 95 öre under hvartdera af de 2 åren. Här gäller att beräkna värdet af 1 hl. korn, då 5 hl. kosta hvar sina 8 kr. 2 öre och värdet af 4 hl. är uppgifvet.

Först bestämmes alltså värdet af 5 hl. på grund af medelmarkegångspriset, sedan af 4 hl. enligt uppgiften och slutligen af den 5:e hektolitern.

Svaret är: $5 \times 8{,}02$ kr. — $2 \times 7{,}95$ kr. — $2 \times 8{,}1$ kr.

Medeltemperaturen för en dag beräknas så, att till gradtalet kl. 8 f. m. och kl. 2 e. m. lägges 5-falden af gradtalet kl. 9 e. m., hvarefter summan lika 7-delas.

Ex. 559. Om 2 gram guld blandas med 4 gram 19 karats guld, huru fin blir blandningen? Svar: $20\frac{2}{3}$ karat.

Om gulds finhet se vid ex. 592 à sid. 274!

Lösning: 2 gram innehålla 2 gr. rent guld; 4 gr. 19 karats guld innehålla $\frac{19}{24} \cdot 4$ gr. $= 3\frac{1}{6}$ gr. rent guld. Blandningen, vägande 6 gr., innehåller således 2 gr. $+ 3\frac{1}{6}$ gr. rent guld. Förhållandet mellan guldets vikt och blandningens vikt uttryckes i 24-delar.

Svar: $\frac{5\frac{1}{6}\text{ gr.}}{6\text{ gr.}} = \frac{5\frac{1}{6}}{6} = \frac{4 \cdot 5\frac{1}{6}}{4 \cdot 6} = \frac{20\frac{2}{3}}{24} = 20\frac{2}{3}$ karat.

---

314. Ex. 560. Huru många l. vatten skola tillsättas 18 l. ättiksprit à 36 öre, för att 1 l. blandning skall blifva värd 16 öre?

Först eftertänkes blandningens värde, sedan blandningens litertal och slutligen det tillsatta vattnets litertal.

Uträkning. Hela blandningens värde är lika stort som värdet af den använda ättiksyran. Ättiksyrans värde $= 18 \times 36$ öre. Hvarje l. af blandningen är värd 16 öre. Alltså är hela blandningens litertal = förhållandet mellan $18 \cdot 36$ öre och 16 öre eller $\frac{18 \cdot 36\text{ öre}}{16\text{ öre}} = 40\frac{1}{2}$. Ättikspritens litertal är 18. Alltså är det tillsatta vattnets litertal $40\frac{1}{2} - 18 = 22\frac{1}{2}$.

Bäst är att säga, att blandningens litertal är = förhållandet mellan $18 \cdot 36$ öre och 16 öre. Om ej så säges, så skall man säga: Hela blandningens litertal är så stort som delarnas antal, när $18 \cdot 36$ öre delats så, att hvarje del är 16 öre.

Ex. 561. En hl. blandning, som bestod af hafre och korn, kostade 9,5 kr. Hafredelen innehåller 20 hl. à 9 kr. Huru mycket korn finnes däri, då 1 hl. däraf kostar 12 kr.?

Lika mycket som hafredelens värde ökas på grund af medelpriset pr hl., lika mycket minskas värdet af korndelen på grund af medelpriset pr hl. Därför eftertänkes först ökningen af hafredelens värde, sedan förminskningen af värdet för 1 hl. korn och slutligen svaret på frågan.

Värdet af 1 hl. hafre ökas med $9{,}5 - 9$ kr., värdet af hela hafredelen, 20 hl., ökas med $20 \cdot (9{,}5 - 9)$ kr. Värdet af 1 hl. korn minskas med $12 - 9{,}5$ kr. Hela korndelens värde minskas med $20 \cdot (9{,}5 - 9)$ kr. Fördenskull skall korndelens hl.-tal vara så stort som delarnas antal, då $20 \cdot (9{,}5 - 9)$ kr. delats så, att hvarje del är $12 - 9{,}5$ kr. Svar alltså: $\frac{20 \cdot (9{,}5 - 9)}{12 - \text{[illegible]}}$.

Ex. 562. 570 kg. järnmalm, af hvilken 62 % var järn, blandades med 570 kg. järnmalm med en järnhalt af 70 %. Huru många % af blandningen var järnet?

Emedan de båda delarna af blandningen voro lika tunga, behöfver hänsyn ej tagas till deras vikt.

Uträkningar 1. Fördenskull kan man tänka så. I första delen voro 62 delar järn af 100 delar malm. I den senare delen voro 70 delar järn af 100 delar malm. I 200 delar af blandningen funnos alltså $62 + 70$ delar järn och i 100 delar blandning funnos 1 tvådel af $62 + 70$ delar järn eller 66 delar järn. Svaret på frågan: 66.

Järnhaltens procenttal är medeltal till 62 och 70, alltså = [illegible].

2. Blandningens järnhalt var så mycket större än 62 % som den var mindre än 70 %. Alltså ökas 62 % med 1 tvådel af skillnaden mellan 70 % och 62 % eller minskas 70 % med 1 tvådel af samma skillnad. Svar antingen: 1) $62 + \frac{70 - 62}{2}$ eller $70 - \frac{70 - 62}{2}$.

Ex. 563. Se föreg. ex.! Om den första blandningsdelen i stället vägt 400 kg., huru många procent af blandningen hade järnet då varit?

Tankegang 1. Först bestämmes vikten af järnet i den första blandningsdelen, sedan vikten af järnet i den andra delen, så vikten af allt järnet, därefter vikten af järnet i 1 kg. blandad malm och slutligen vikten af järnet i 100 kg. af blandningen.

$100 \times \frac{[illegible]}{400 + 570}$. Procenttalet är lika stort som kg.-talet.

Tankegång 2. Förhållandet mellan x delar och 100 delar = förhållandet mellan järnets vikt och blandningens vikt.

$$x : 100 = (0{,}62 \times 400 + 0{,}70 \times 570) \text{ kg.} : (400 + 570) \text{ kg.}$$

$$x = \frac{0{,}62 \times 400 + 0{,}70 \times 570}{400 + 570} \times [illegible]$$

Rörelseproblem.

315. Lösningen af sådana problem är ganska lätt, när de under lika tidsenheter tillryggalagda vägarna äro lika långa. Rörelsen säges då vara *likformig*. Den på en tidsenhet (1 timme, 1 minut eller 1 sekund) tillryggalagda vägen kallas *hastighet*. Den tillryggalagda väglängden beror alltså af tidsenheternas antal och hastigheten.

Den allmängiltiga grunden för sådana problems lösning angifves ofta genom formler. I dessa betecknas tidsenheternas antal med t, de under tidsenheten tillryggalagda längdenheternas antal med h och antalet af längdenheter i hela vägen med v. Formlerna äro:

1) $t \cdot h = v$. 2) $t = \frac{v}{h}$. 3) $h = \frac{v}{t}$. I enklare fall bildas ej formler.

Se ex. 502 å sid. 228!

Ex. 564. Afståndet mellan Axels och Karls bostäder är 1 km. 296 m. De gå samtidigt hemifrån mot hvarandra. A. går 60 m. i minuten, och K. går 48 m. i minuten. a) Efter huru många min. råkas de? b) Huru långt från Axels bostad ligger mötesplatsen?

a) *Tankegång.* Först eftertänkes, huru mycket afståndet mellan dem minskas hvarje minut, sedan besvaras frågan.

Utredning. Emedan A. går 60 m. i minuten och K. går 48 m. i minuten, minskas afståndet med 60 + 48 m.

hvarje minut. Minuternas antal är alltså = delarnas antal, när 1 km. 296 m. delats så, att hvarje del är 60 + 48 m.
$x = \frac{1 \text{ km. } 296 \text{ m.}}{60 + 48 \text{ m.}} = 12.$

b) $12 \cdot 60$ m.

Pröfning. Summan af de tillryggalagda delarna = hela vägen
$12 \cdot 60 + 12 \cdot 48$ m. $= 720 + 576$ m. $= 1\,296$ m. $= 1$ km. 296 m.

Saken kan förtydligas genom ett streck, som delas så, att delarna stå i samma förhållande till hvarandra som enligt exemplet.

Ex. 565. Se föreg. ex.! A. gick hemifrån 9 min. före K. a) Huru många min. efter K:s gång hemifrån möttes de? b) Huru långt från A:s bostad möttes de?

a). *Tankegång.* Först eftertänkes den väglängd A. gått, innan K. gick hemifrån, därefter den öfriga delens af vägen längd, slutligen svaret på frågan.

1) $9 \cdot 60$ m. = 540 m. 2) 1 296 m. — 540 m. = 756 m.
3) $\frac{756 \text{ m.}}{60 + 48 \text{ m.}} = 7.$

Om frågan lydt: Huru många min. efter A:s gång hemifrån träffades de? så hade svaret blifvit: 9 + 7.

b). A. gick under 9 + 7 min. = 16 min. Alltså svar: 16×90 m.

Ex. 566. Se ex. 564! Båda gingo hemifrån kl. 6 tim. f. m. till Lars, som bor 7 km. 128 m. på andra sidan om K:s hem. a) Huru dags träffades de? b) Huru långt från Karls bostad träffades de?

a). *Tankegång.* Från början var K. så långt före A. som afståndet mellan deras bostäder. Emedan A. gick fortare än K. minskades detta afstånd oupphörligt och lika mycket hvarje minut. Fördenskull eftertänkes först, huru mycket afståndet minskades hvarje minut, sedan efter huru många min. A. upphann K., och slutligen frågans svar.

Uträkning. Emedan A. gick 60 m. i minuten och K. gick 48 m. i minuten, så minskades afståndet mellan dem 60 — 48 m. hvarje minut. Afståndet var från början 1 km. 296 m. Antalet af minuter i den tid, som A. behöfde för att hinna K., var alltså = delarnas antal, när 1 km.

296 m. delats så, att hvarje del var 60 — 48 m. eller 12 m., = 1 km. 296 m. : 12 m. = 108. Tiden var då 6 tim. + 108 min. = 7 tim. 48 min.

b). K:s tillryggalagda väg = 108 · 48 m. = 5 184 m.

Pröfning. Skillnaden mellan den af A. tillryggalagda vägsträckan och den af K. tillryggalagda vägen skall vara 1 296 m.

108 · 60 — 108 · 48 m. = 6 480 — 5 184 m. = 1 296 m.

Skatteproblem.

316. Taxering är uppskattning af hvarje fast egendoms värde och hvarje skattskyldigs årliga inkomst.

Ex. 567. **Bevillning** (= afgift, skatt till staten) för *jordbruksfastighet* utgår med 6 öre för hvarje hundrakrona af taxeringsvärdet. Huru stor blir bevillningen på jordegendom, taxerad till 5 400 kr.? Svar: $3,_{24}$ kr.

Ex. 568. Bevillning för *all annan fastighet* är 5 öre för hvarje hundrakrona af taxeringsvärdet. Huru stor blir bevillningen för a) en kvarn, taxerad till 12 600 kr., b) en stadsegendom, taxerad till 9 900 kr., c) en stadstomt, taxerad till 2 800 kr.? Svar: a) $6,_{30}$ kr., b) $4,_{95}$ kr., c) 1 kr. 40 öre.

Ex. 569. Bevillning för *inkomst af kapital och arbete* är 1 % af inkomsten. Inkomsten är dock skattefri, då den understiger 500 kr. Af en inkomst 1) från och med 500 kr. till 1 200 kr. äro 450 kr. skattefria, 2) från och med 1 200 kr. till 1 800 kr. äro 300 kr. skattefria. Huru stor bevillning för a) 475 kr.:s inkomst af arbete, b) 750 kr.:s arbetsinkomst, c) 1 500 kr.:s arbetsinkomst och 250 kr. i ränta? Svar: a) Ingen, b) 3 kr., c) 14 kr. 50 öre.

Ex. 570. Ström hade en årlig arbetsinkomst af 750 kr., ägde en hemmansdel, taxerad till 4 500 kr., hvarå beräknas en inkomst efter 6 %, samt en såg med taxeringsvärde af 20 000 kr., hvarå beräknas en inkomst efter 5 %. Huru stor var a) summan af hans inkomster, b) hans bevillning?

Svar: a) 750 kr. + $\frac{6 \cdot 4\,500}{100}$ kr. + $\frac{5 \cdot 20\,000}{100}$ kr. = 750 + 270 + 1 000 kr. = 2 020 kr. b) 20 kr. 20 öre.

Kommunalskatten grundas på bevillningen, dock på olika sätt i stad och på landet.

Ex. 571. Då skatten till en *stadskommun* är 3 (4) gånger så stor som till staten, så säges kommunalskatten vara 3 (4) kr. för hvarje »bevillningskrona». En stadsgård taxerades till 15 000 kr. a) Huru stor är bevillningen? b) Huru stor kommunalskatt därför efter 2,8 kr. pr bevillningskrona?

Svar: a) $\frac{15\,000}{100} \cdot 5$ öre = 7,50 kr. b) 7,5 × 2,8 kr.

Ex. 572. I en stad uttaxerades 3,24 kr. pr bevillningskrona. Huru stora stadsutskylder för en inkomst af 1 850 kr.?

Först eftertänkes bevillningen. Den är 18,5 kr.

Ex. 573. För bestämmande af *kommunalskatten* på *landet* påföres hvarje skattskyldig ett fyrktal. För *jordbruksfastighet påföres 1 fyrk för bevillning af hvarje femöre eller del däraf.* Huru stort är således fyrktalet för en landtgård, då dess bevillning är a) 3 kr., b) 3 kr. 21 öre?

Svar: a) 3 kr. : 5 öre = 60. b) 3 kr. : 5 öre = 64, rest 1 öre; alltså 65.

Fyrk var ursprungligen det minsta skiljemyntet.

Ex. 574. a) Huru stort fyrktal påföres ett hemman, taxeradt till 6 900 kr.? b) Huru stor är kommunalskatten därför, då 43 öre uttaxeras för hvarje fyrk?

a) Först beräknas bevillningen, sedan frågans svar.

1) 69 · 6 öre = 414 öre. 2) 414 öre : 5 öre = 82, rest 4 öre, alltså 83.

b) 83 · 43 öre.

Ex. 575. För *alla andra* beskattningsföremål påföres på landet *1 fyrk för bevillning af hvarje tioöre eller del däraf.* Huru stort är fyrktalet för en fabrik, då dess bevillning är a) 3 kr., b) 3 kr. 21 öre?

Svar: a) 3 kr. : 10 öre = 30. b) 321 öre : 10 öre = 32, rest 1 öre, alltså 33.

Ex. 576. I B. socken uttaxerades 47½ öre för hvarje fyrk. Huru stor a) bevillning, b) fyrktal, c) kommunalskatt påfördes en såg, taxerad till 19 600 kr.?

Svar: a) 9,80 kr., b) 98, c) 46,55 kr.

Ex. 577. Handlanden Lager är uppskattad för en inkomst af a) 950 kr., b) 1 900 kr. Huru stor är hans kommunalskatt, då 87½ öre erlägges för hvarje fyrk?

Svar: a) 43,75 kr., b) 166,25 kr.

Sifferekvationer med en obekant.

317. Betydelsen af ordet ekvation angifves i § **61**. Stundom är ekvationen uppgifven från början. Se ex. 54 å sid. 38, sid. 81 och sid. 130! Stundom måste den först bildas på grund af ett mer eller mindre mångordigt exempel, som innehåller en fråga, för att svaret på den frågan skall kunna beräknas. Det tal, hvars storlek efterfrågas, betecknas då från början med några af bokstäfverna x, y, z, t, u eller v. Vanligast äro x.

Beräkning af det tal, hvarmed detta bokstafstal är lika, kallas att *lösa* ekvationen.

Ekvationer kunna förekomma tidigt, utan att ordet ekvation behöfver nämnas. De enkla lösas mycket lätt, om sammanhanget mellan det hela och dess delar blifvit klart, samt betydelsen af de s. k. förbindelsetecknen inlärts. (Se § **44**!)

För besvarande af frågan i alla enkla exempel, ja i alla till blott folkskolekurs hörande exempel behöfva inga ekvationer bildas. Men för besvarande af frågan i många sammansatta uppgifter bör ekvation bildas, emedan närvaron af bokstafven x medför korta, bestämda uttryck i st. f. flerordiga, sväfvande och ganska ofta oriktiga uttryck. I synnerhet gäller detta tillämpningar af läran om förhållande. Se i slutet af sid. 198, början af sid. 199 samt ex. 468 och 469 å sid. 207 och 208!

Märk! Hvarken ett sådant exempel eller någon fråga däri kan ombildas till ekvation. Ekvationen innehåller en fullkomligt självständig mening, ett självständigt påstående.

318. Till *småskolekursen* höra sådana ekvationer som 578 och 579. I ex. 578 finnes ej något x, men tankegången är den samma, som om x vore där.

Ex. 578. a) $2 + \quad = 6$. b) $\quad + 2 = 6$. c) $6 = 3 + \quad$. d) $6 = \quad + 5$. e) $6 - \quad = 1$. f) $\quad - 2 = 4$.

Där skola barnen fylla tomrummen efter eller före förbindelsetecknen. Se § **152** b)! Pröfning beaktas.

Ex. 579. a) $2 + x = 6$. b) $x + 2 = 6$. c) $6 = 3 + x$. d) $6 = x + 5$. e) $6 - x = 1$. f) $x - 2 = 4$.

Förfaringssätt är angifvet i § **123** C mom. 3 å sid. 80 och 81. I ekvationerna får x icke utstrykas, sedan x-värdet beräknats, utan ekvationen skall vara orubbad. Pröfning verkställes nedanför ekvationen, om den behöfver skrifvas. I a) är $x = 4$. Pröfning: $2 + 4 = 6$. Emedan det vänstra talet $2 + 4$ är = det högra talet 6, så är ekvationen rätt löst.

319. Vid lösning af ekvationer i *folkskolan* böra barnen vänjas att skrifva x-värdet före uträkningen. På grund af ekv. 579 a) skrifves då 1) $x = 6 - 2$, 2) $x = 4$. Ekv. 579 f) leder till $x = 4 + 2$. Se § **175**!

Där upptagas äfven sådana ekvationer, i hvilka x är bundet vid ett tal genom mångfalds- eller likadelstecknet. Se slutet af § **187** å sid. 130! De förekomma ej förr än i likadelningsafdelningen.

Därvid fasthålles det, som förut inlärts om talens betydelse, allt eftersom de stå före eller efter dessa tecken. Det tal, som föregår mångfaldstecknet, angifver de lika delarnas antal; det, som efterföljer det tecknet, angifver hvarje sådan dels storlek. — Det tal, som föregår likadelstecknet, angifver alltid det hela. Det tal, som efterföljer det tecknet, angifver antingen de lika delarnas antal eller de lika delarnas storlek. Se öfverst å sid. 90 samt det andra stycket å sid. 130!

Ex. 580. a) $24 : x = 3$. *Lösning.* $x = 24 : 3$. $x = 8$.
b) $x : 8 = 5$. *Lösning.* $x = 5 \times 8$ eller $x = 8 \cdot 5$. $x = 40$.
c) $x \cdot 9 = 36$. *Lösning.* $x = 36 : 9$. $x = 4$.
d) $9 \cdot x = 54$. *Lösning.* $x = 54 : 9$. $x = 6$.

Ex. 581. a) $15\,365 + 8\,984 + x = 25\,018$.
b) $9\,765 - 8\,788 - x = 826$.
c) $434\,885 - x - 67\,698 = 277\,654 + 47\,765$.

I dessa exempel kan man gå till väga på 2 sätt.

I a) beräknas först $15\,365 + 8\,984$. Därefter uppstår ekvationen $24\,349 + x = 25\,018$, hvilken till sin sammansättning är lika enkel som ex. 579 a). *Eller och* skrifves genast 1) $x = 25\,018 - 15\,365 - 8\,984$ eller 2) $x = 25\,018 - (15\,365 + 8\,984)$. 1) bildas lättare, emedan barnen af ekvationen märka, att 25 018 innehåller 3 delar, hvilka stå i första leden, förbundna genom +. Om 2) skrifves, så beaktas parentesens nödvändighet. Om parentesen ej skrefves, uppstode ett fel af $2 \times 8\,984 = 17\,968$. Då blefve $x = 18\,637$.

x är i a) 669, b) 149, c) 41 768.

Märk! 1. För färdigbildade ekvationers riktiga lösning och ekvationers riktiga bildande på grund af andra exempel är det viktigt att bibringa barnen kännedom om de fall, när parenteser äro nödvändiga. Inga öfverflödiga parenteser få finnas, men inga nödvändiga parenteser uteslutas. Se §§ **65—68**!

Märk! 2. Så snart barnen fått kännedom om de mera allmängiltiga uttrycken *term*, *faktor*, *produkt* och *kvot*, hvilket bör ske i sammanhang med enkla geometriska beräkningar — Se ex. 79 å sid. 56, ex. 81 b) å sid. 61! — samt sättet att beräkna en faktor, när produkten och den andra faktorn äro gifna — Se regeln å sid. 62! — så är lämpligt att de använda dessa uttryck, emedan de sedan ofta användas.

Märk! 3. Barnen kunna först blott begripa enskilda fall och böra då använda uttryck, som afse det enskilda fallet. Så småningom kunna de frånse olikheterna mellan flera likartade fall och fästa sig vid det allmängiltiga. Till följd däraf böra vid räkneundervisningen först sådana uttryck användas, hvilka afse det förhandenvarande fallet. Sedan kunna och böra sådana uttryck användas, hvilka äro mer allmängiltiga och på grund däraf abstrakta. Dit höra uttrycken term, faktor och produkt. Se §§ **57—59**!

Ex. 582.

$x - 34\,009 - 89\,963 - 12\,057 = 70\,362 - 34\,288.$

Redogörelser. 1. Först beräknas 70 362 — 34 288. Då märkes lättast, att x innehåller de 4 följande talen och således är = summan af dem.

2. Först skall vara inlärdt, att termer med lika tecken sammanläggas. Se ex. 59 å sid. 41! Fördenskull kan först summan af talen 34 009, 89 963 och 12 057 beräknas, samt 70 362 — 34 288 sedan förenklas. Därefter erhålles ekvationen $x - 136\,029 = 36\,074$. $x = 172\,103$.

3. Emedan talen på ömse sidor om likhetstecknet äro lika stora, så är skillnaden mellan dem = 0. Däraf erhålles följande ekv. af den ursprungliga.

1) $x - 34\,009 - 89\,963 - 12\,057 - (70\,362 - 34\,288) = 0.$
2) $x - 34\,009 - 89\,963 - 12\,057 - 70\,362 + 34\,288 = 0.$

Summan af de 4 minustermerna är en minusterm, $-206\,391$. $-206\,391 + 34\,288 = -172\,103$. Däraf ekv.
3) $x - 172\,103 = 0.$

Emedan $x - 172\,103 = 0$, så är $x = 172\,103$.

Ex. 583. a) $(56 - 32)\,x = 4\,800 - 96 - 3\,840.$
b) $56\,x - 32\,x = 4\,800 - 96 - 3\,840.$

a) Först beräknas $56 - 32$, sedan $4\,800 - 96 - 3\,840$. Därigenom bildas den nya ekv. $24\,x = 864$. $x = 864 : 24 = 36$.

b) Först förenklas $56\,x - 32\,x$ till $24\,x$ eller till $(56 - 32)\,x$. Sedan förfares så som i a).

Ex. 584. a) $\frac{5 \cdot (28 - 4)}{3 \cdot 2} = \frac{450 : (39 - 9)}{x}.$

Detta förenklas till $20 = \frac{15}{x}$; $x = 15 : 20 = \frac{3}{4}$.

Ex. 585. $(512 + x) : 8 = 395.$

Uträkningar. 1. $512 + x$ står före likadelstecknet, alltså är detta tal det hela. Det innehåller 8 delar med 395 i hvarje del. Alltså är $512 + x = 8 \cdot 395$. Af det hela är 512 den första delen och x den andra delen; alltså är $x = 8 \cdot 395 - 512 = 2\,648$.

2. $512 + x$ är produkt af 8 och 395. $512 + x$ är alltså $= 8 \cdot 395$. O. s. v.

320. När ekvationer skola bildas på grund af gifna exempel, så bestämmes först, hvad det är, som skall betecknas med x. Det märkes i frågan. Sedan eftertänkes grunden till ekvationen. Den angifves på olika sätt i olika exempel; men alltid är framställningen sådan, att en likhet mellan 2 storheter (tal) kan erhållas däraf.

Märk! I ekvationer förekomma blott tal, både siffertal och bokstafstal. Däremot få inga konkreta sorter finnas. I **en** ekvation angifves blott **ett** tal med x.

Ex. 586. Summan af 2 tal är 20. Skillnaden mellan dem är 4. Huru stora äro de talen?

1. Lösning med ekvation.

a. *Inledning.* Det mindre talet är x. Emedan skillnaden mellan talen är 4, är det större talet $x + 4$. Grund till ekvationen är, att summan af dem är 20.

Ekv. $x + x + 4 = 20$. Däraf bildas ekv.

1) $2x + 4 = 20$. 2) $2x = 20 - 4$. 3) $x = \frac{20 - 4}{2}$. $x = 8$.

Det mindre talet är alltså 8. Det större är $8 + 4 = 12$. Svar: 8 och 12.

Pröfning. $8 + 12 = 20$.

b. Det större talet är x. Då är det mindre talet $x - 4$. Ekvationen blir: $x + x - 4 = 20$.

Däraf härledas 1) $2x - 4 = 20$. 2) $2x = 20 + 4$. 3) $x = \frac{20 + 4}{2} = 12$.

Det större talet är 12. Det mindre är $12 - 4 = 8$.

2. Lösning utan ekvation. Emedan skillnaden mellan talen är 4, så är det större 4 mer än det mindre. Alltså innehåller 20 4 mer än 2 sådana tal som det mindre. Fördenskull borttages först 4 från 20. Återstoden 16 är 2 ggr det mindre talet; alltså är det mindre talet $16 : 2 = 8$.

Ex. 587. 2 bord kosta tillhopa 27 kr. Det ena kostar 3 kr. 50 öre mer än det andra. Huru mycket kostar hvarje bord?

Inledning: Det billigare kostar x kr. Det dyrare $x + 3{,}5$ kr. Grund till ekvationen är, att summan af värdena är 27 kr.

Grundekvation. $x + x + 3{,}5 = 27$. Däraf härledes

2) $2x + 3{,}5 = 27$. 3) $2x = 27 - 3{,}5$. 4) $2x = 23{,}5$. 5) $x = 23{,}5 : 2 = 11{,}75$.

Det billigares pris alltså $= 11{,}75$ kr. Det dyrares pris $= 11{,}75 + 3{,}5 = 15{,}25$ kr.

Andra lösningar se ex. 586!

Ex. 588. Robert utdelade nötter åt några kamrater. För att hvarje kamrat skulle få 7 nötter, fattades 4 nötter. Om de finge hvar sina 6 nötter, så finge han 8 nötter öfver. Huru många voro a) barnen, b) nötterna?

a) *Lösning 1.* Med ekvation. Barnens antal $= x$. Grunden till ekv. är, att lika många nötter fördelades i båda fallen eller att nötternas antal kan angifvas på 2 sätt. I förra fallet var nötternas antal $x \cdot 7 - 4$, i senare fallet $x \cdot 6 + 8$.

Ekvationer. 1) $x \cdot 7 - 4 = x \cdot 6 + 8$. 2) $7x - 4 = 6x + 8$.

Emedan ordningen mellan faktorerna är likgiltig och innehållet blifver lättfattligare, om en produkt med både sifferfaktorer och bokstafsfaktorer skrifves så, att sifferfaktorerna föregå bokstafsfaktorerna, så utbytes $x \cdot 7$ mot $7x$ och $x \cdot 6$ mot $6x$. Då behöfves ej något produkttecken.

Eftersom $7x - 4$ och $6x + 8$ äro lika stora, så är skillnaden mellan dem $= 0$.

3) $7x - 4 - (6x + 8) = 0$; 4) $7x - 4 - 6x - 8 = 0$.

$6x$ från $7x$ är $1x$ eller x. 8 till 4 är 12. Däraf ekv.

5) $x - 12 = 0$; 6) $x = 12$.

Lösning 2. Med ekvation. Grund: Likheten bibehålles, när lika tal läggas till eller borttagas från båda lederna. Här tillägges 4 och borttages $6x$ från båda lederna.

2) $7x - 4 = 6x + 8$; 3) $7x - 4 + 4 = 6x + 8 + 4$;

4) $7x = 6x + 12$; 5) $7x - 6x = 12$; 6) $x = 12$.

Lösning 3. Utan ekvation. När hvarje barn fått 6 nötter, voro 8 nötter öfver. Dessa utdelades äfven, så att hvarje barn fick en nöt, så långt de räckte. Då fattades 4 nötter, för att hvarje barn skulle få en nöt till. Alltså var barnens antal $8 + 4$.

b) Nötternas antal var antingen $12 \times 7 - 4 = 80$ eller $12 \cdot 6 + 8 = 80$.

Genom att beräkna nötternas antal på båda sätten kontrolleras hela lösningens riktighet.

Ex. 589. Korpral Rask är 44 år gammal. Af hans barn är Nils 8 år. a) Efter huru lång tid blir fadern 4 ggr så gammal som Nils? b) För huru många år sedan var fadern 10 ggr så gammal som sonen?

a) Svar: x år. Då blir fadern $44 + x$ år och Nils $8 + x$ år.

Ekvation: $44 + x = 4 \cdot (8 + x)$. $x = 4$. Svar: 4 år.

Först utbytes $4 \cdot (8 + x)$ mot $4 \cdot 8 + 4x$. Emedan den andra ledens x-term är $>$ första ledens, och x lämpligast slutligen skrifves till vänster om likhetstecknet, så böra lederna byta plats.

b) Svar: x. Då var fadern $44 - x$ år, Nils $8 - x$ år.

Ekvation: $44 - x = 10 \cdot (8 - x)$. $x = 4$. Svar: 4.

Ex. 590. 560 kr. delades mellan A, B, C och D så, att summan af A:s och B:s andelar blef 180 kr., af A:s och C:s andelar blef 265 kr., af A:s och D:s andelar $=$ 285 kr. Huru mycket fick hvarje person?

Lösning 1. Med ekvation. Svar: A x kr.; B $180 - x$ kr.; C $265 - x$ kr.; D $285 - x$ kr.

Grund till ekv.: 560 kr. = summan af alla delarna.

Ekvation: $560 = x + 180 - x + 265 - x + 285 - x$.

Första och andra talen x öfverstrykas, ty $x - x = 0$.

$560 = 180 + 265 + 285 - 2\,x$; $560 = 730 - 2\,x$; $2\,x = 730 - 560$. $x = 85$.

Svar: A 85 kr. O. s. v.

Lösning 2. Utan ekvation. Summan af 180 kr., 265 kr. och 285 kr. eller 730 kr. innehåller 560 kr. och 2 sådana delar som A:s andel. Alltså är 2-fald af A:s andel $= 730 - 560$ kr., och A:s andel $(730 - 560 \text{ kr.}) : 2 = 85$ kr. O. s. v.

Lösning 3. Utan ekvation. Summan af A:s och B:s andelar är 180 kr. Alltså är summan af C:s och D:s andelar $= 560$ kr. $- 180$ kr. $= 380$ kr. Enligt uppgiften är summan af A:s och C:s andelar 265 kr. samt summan af A:s och D:s andelar 285 kr. Fördenskull är D:s andel 20 kr. > C:s andel. 380 kr. innehålla således 2 sådana delar som C:s och dessutom 20 kr. C:s andel följaktligen $= (380 - 20 \text{ kr.}) : 2 = 180$ kr. O. s. v.

Ex. 591. = ex. 561 å sid. 262.

Svar: x hl. Efter uträkning: 4 hl.

Grund till ekv. Blandningens värde kan bestämmas på 2 sätt: 1) på grund af blandningsdelarnas värde, 2) på grund af medelpriset.

Den första blandningsdelen $= x$ hl. à 12 kr. Dess värde $= x \cdot 12$ kr. $= 12\,x$ kr. Den andra blandningsdelens värde $= 20 \cdot 9$ kr. Hela blandningens värde alltså $12\,x + 20 \cdot 9$ kr. — Hela blandningen innehåller $x + 20$ hl. Hvarje hl:s pris $= 9{,}5$ kr. Alltså blandningens värde äfven $= (x + 20) \cdot 9{,}5$ kr.

1. Ekv. 1) $12\,x + 20 \cdot 9 = (x + 20) \cdot 9{,}5$;

2) $12\,x + 20 \cdot 9 = 9{,}5\,x + 20 \cdot 9{,}5$;

3) $12\,x + 20 \cdot 9 - 9{,}5\,x - 20 \cdot 9{,}5 = 0$;

4) $2{,}5\,x - 20 \cdot 0{,}5 = 0$; 5) $2{,}5\,x = 20 \cdot 0{,}5$;

6) $x = \frac{[illegible]}{[illegible]} = 4$.

2. 1) $12\,x + 20 \cdot 9 = (x + 20) \cdot 9{,}5$.

2) $12\,x + 20 \cdot 9 = 9{,}5\,x + 20 \cdot 9{,}5$.

Om $9{,}5\,x$ och $20 \cdot 9$ borttagas ur båda lederna, bildas

3) $12\,x - 9{,}5\,x = 20 \cdot 9{,}5 - 20 \cdot 9$; o. s. v.

3. Denna lösning afviker från de föregående sätten däri, att talen $20 \cdot 9$ och $20 \cdot 9{,}5$ ej uträknas. Därigenom bildas mindre tal.

Märk! 1. Om talen $20 \cdot 9$ och $20 \cdot 9{,}5$ ej förenklas, så märkes öfverensstämmelsen med räkningen för frågans besvarande utan ekvation. Dessutom erhållas därigenom mindre tal vid fortsatt räkning och underlättas möjligen blifvande förkortningar.

Märk! 2. Öfvergången från ekv. 5) till ekv. 6) kan tänkas så, att båda lederna delas med samma tal (2,5).

4. Lösning utan ekvation se ex. 561 å sid. 262!

Vid guldsakers förfärdigande blandas guld med koppar. Finheten af en guldblandning bestämmes af det antal 24-delar af blandningens vikt, som guldmängden däri utgör. Hvarje sådan del kallas *karat*, och hvarje karat delas i 12 *grän*. Rent gulds finhet är 24 karat, d. v. s. alla dess delar äro guld. I en blandning, som är 23 karat fin, s. k. 23-karats guld, äro 23 delar guld och 1 del koppar. Kronguldets finhet är $18\frac{1}{3}$ karat.

Ex. 592. Huru mycket guld bör tillsättas 72 gr. kronguld, för att blandningen skall blifva 23-karats guld? Svar: x gram. Efter uträkning: 336 gram.

Grund till ekvationen. Blandningens guldmängd kan uttryckas på 2 sätt: 1) på grund af guldmängden i blandningsdelarna, 2) på grund af uppgiften om blandningens guldhalt. Den är enligt 1) $x + \frac{18\frac{1}{3}}{24} \times 72$ gr., enligt 2) $\frac{23}{24} \times (x + 72)$ gr.

Den första blandningsdelen innehåller x gr. guld, den andra delen innehåller $\frac{18\frac{1}{3}}{24} \times 72$ gr. guld. — Hela blandningen väger $x + 72$ gr. Guldmängden däri är $\frac{23}{24} \times (x + 72)$ gr.

1. Ekv. 1) $x + \frac{18\frac{1}{3}}{24} \times 72 = \frac{23}{24} \times (x + 72)$;

2) $x + \frac{18\frac{1}{3}}{24} \times 72 = \frac{23}{24}\, x + \frac{23}{24} \cdot 72$;

3) $x + 18\frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{23}{24}\, x + 23 \cdot 3$;

4) $x + 18\frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{23}{24}\, x - 23 \cdot 3 = 0$;

5) $\frac{1}{24}\, x - 4\frac{2}{3} \cdot 3 = 0$; 6) $\frac{1}{24}\, x = 4\frac{2}{3} \cdot 3$;

7) $x = 24 \cdot 4\frac{2}{3} \cdot 3 = 336$.

2. Af ekv. 2) kan bildas

3) $x - \frac{23}{24}\, x = \frac{23}{24} \cdot 72 - \frac{18\frac{1}{3}}{24} \cdot 72$;

4) $\frac{1}{24}\, x = \left(\frac{23}{24} - \frac{18\frac{1}{3}}{24}\right) \cdot 72$;

5) $\frac{1}{24}\,x = \frac{4\frac{2}{3}}{24}\cdot 72$; 6) $\frac{1}{24}\,x = 4\frac{2}{3}\cdot 3$;

7) $x = 24\cdot 4\frac{2}{3}\cdot 3 = 336$.

3. Ekvationer. 1) $x + \frac{18\frac{1}{3}}{24}\cdot 72 = \frac{23}{24}\cdot(x + 72)$;

$$2)\ \frac{24\,x}{24} + \frac{18\frac{1}{3}\cdot 72}{24} = \frac{23\cdot(x+72)}{24}.$$

Ekv. 2) bildas därigenom, att alla termerna ombildas till bråk med 24 såsom nämnare. Sedan frånses nämnarna. Man säger äfven, att alla termerna 24-faldigas.

3) $24\,x + 18\frac{1}{3}\cdot 72 = 23\,(x + 72)$;

4) $24\,x + 1320 = 23\,x + 23\cdot 72$;

5) $24\,x + 1320 = 23\,x + 1656$;

6) $24\,x - 23\,x = 1656 - 1320$; 7) $x = 336$.

4. Lösning utan ekvation. 72 gr. förbättras med $\frac{4\frac{2}{3}}{24}$ af sin vikt eller med $\frac{4\frac{2}{3}}{24}\times 72$ gr. Hvarje tillsatt gr. guld försämras med $\frac{1}{24}$ gr. Bristen i 72 gr. eller $\frac{4\frac{2}{3}}{24}\times 72$ gr. skall betäckas med öfverskottet i det rena guldet. Alltså är det tillsatta guldets gramtal = delarnas antal, när $\frac{4\frac{2}{3}}{24}\times 72$ gr. delats så, att hvarje del är $\frac{1}{24}$ gr. $= \frac{4\frac{2}{3}}{24}\cdot 72$ gr. : $\frac{1}{24}$ gr. $= 336$.

Detta sätt motsvarar andra sättet med ekvation.

5. Lösning utan ekvation.

Här eftertänkes 1) skillnaden mellan den guldmängd, som skulle finnas och som finnes i a) 1 gr., b) 72 gr. kronguld, 2) vikten af det guld, som kan användas af det tillsatta för förbättring af kronguldet, 3) det tillsatta guldets gramtal.

1) $72\cdot\left(\frac{23}{24} - \frac{18\frac{1}{3}}{24}\right)$ gr. = 14 gr. 2) Af hvarje gram tillsatt guld användes 1 gr. — $\frac{23}{24}$ gr. = $\frac{1}{24}$ gr. till förbättring. 3) Det tillsatta guldets gramtal = delarnas antal, när 14 gr. delats så, att hvarje del är $\frac{1}{24}$ gr. 14 gr.: $\frac{1}{24}$ gr. $= 24\cdot 14 = 336$.

6. Lösning utan ekvation.

Först eftertänkes den vikt af guld, som fattas i hvarje gr. kronguld, sedan den vikt af guld som fås af hvarje gram tillsatt guld till kronguldets förfining, därefter huru många sådana viktsdelar af guld som behöfvas till förfining af 1 gr. kronguld och slutligen antalet af sådana viktsdelar guld som fordras till förfining af allt kronguldet.

1) $\frac{23}{24}$ gr. — $\frac{18\frac{1}{3}}{24}$ gr. = $\frac{[illegible]}{24}$ gr. = $\frac{14}{72}$ gr. 2) 1 gr. — $\frac{23}{24}$ gr. = $\frac{1}{24}$ gr. 3) $\frac{14}{72}$ gr. : $\frac{1}{24}$ gr. = $\frac{14}{2} : \frac{3}{72} = \frac{14}{3}$. 4) $72 \times \frac{14}{3} = 24 \cdot 14 = 336$. Svar: 336 gr.

Ex. 593. Se ex. 469 å sid. 208!

Ex. 594. Arvid hade 50 öre och Ludvig hade 22 öre. För ett ärende fingo de några öre till lika fördelning. Deras syster Elin räknade sedan alla deras pengar och sade, att Arvids kassa var 3 ggr så stor som Ludvigs. Huru stor var tillökningen?

Svar: x öre. Ekv. $50 + x = 3 \cdot (22 + x)$.

x befinnes vara — 8. Det svaret innebär, att efter den uppgifna tillökningen kunde Arvids kassa ej vara = 3 ggr Ludvigs. Men om 8 öre borttoges ur bådas förutvarande kassor, så skulle det inträffa, att A:s kassa vore 3 ggr L:s. Räkna efter, om det slår in!

Ex. 595. Efter huru många minuter står minutvisaren rätt öfver timvisaren, sedan klockan slagit a) 1 timslag, b) 2 timslag, c) 3 timslag, d) 8 timslag?

Ledning: Svar x. Om afståndet mellan 2 minutstreck på urtaflan vore 1 mm., så skulle minutvisarens spets hvarje minut gå 1 mm. och timvisarens spets samtidigt $\frac{1}{12}$ mm. På de x min. går alltså minutvisaren $x \cdot 1$ mm. Men han skall ock gå från 12-timstrecket till 1-timstrecket på urtaflan eller 5 mm. och dessutom så lång väg som timvisarens spets. Denna går $\frac{1}{12}$ mm. i minuten och på x min. $x \cdot \frac{1}{12}$ mm. Alltså blir $x \cdot 1 = 5 + x \cdot \frac{1}{12}$ eller $x = 5 + \frac{1}{12}\, x$.

Uträknas äfven så, att afståndet mellan 2 närliggande minutstreck är 2 mm., 3 mm., o. s. v.

Svar: a) $5\frac{5}{11}$; b) $10\frac{10}{11}$; c) $16\frac{4}{11}$; d) $43\frac{7}{11}$.

---

321. När man vill lösrycka lösningen af sifferekvationer från lösningen af andra förut behandlade s. k. sifferexempel, så tillämpas följande självklara påståenden, s. k. *axiom*.

1. Om man lägger lika mycket till lika stora tal, så blifva summorna lika stora.

2. Om man tager lika mycket från lika stora tal, så **blifva återstoderna lika stora.**

3. **Lika mångfalder af lika stora tal äro lika stora.**
4. Lika jämna delar af lika stora tal äro lika stora.

Eller genom att dela lika stora tal med lika stora tal, blifva kvoterna lika stora.

1 och 2 äro tillämpade i andra lösningssättet af ekv. till ex. 588. 3 är nämndt vid 3:e lösningssättet af ekv. till ex. 592. 4 är angifvet i *Märk* 2 vid ex. 591.

322. Enkla bokstafsekvationer kunna härledas ur ränteformeln $r =$ [illegible], af rörelseformeln $t \cdot h = v$ samt af formler rörande ytor och kroppar.

Digniteter och rötter.

A. Beräkning af 2-digniteter.

Se § **69** å sid. 44 och 45!

323. Ex. 596. Tvådigniteterna af de första 9 hela talen finnas i mångfaldstabellerna. De äro i ordning: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 och 81.

Ex. 597. a) $1^2 = 1$. b) $10^2 = 100$. c) $100^2 = 1\,00\,00$. d) $1000^2 = 1\,00\,00\,00$.

Märk! 2-dignitet af ett a) ensiffrigt tal är högst 2-siffrig, b) 2-siffrigt tal är högst 4-siffrig, c) 3-siffrigt tal är högst 6-siffrig.

Ex. 598.

a) $0{,}1^2 = 0{,}01$; b) $0{,}01^2 = 0{,}00\,01$; c) $0{,}001^2 = 0{,}00\,00\,01$.

Märk! Alltid har 2-dignitet af ett a) endecimaligt tal 2 decimaler, b) 2-decimaligt tal 4 decimaler, c) 3-decimaligt tal 6 decimaler.

Ex. 599. a) $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$ [illegible] $= \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$.

b) $(\frac{2}{5})^2 = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$. c) $(3\frac{3}{4})^2 = \frac{[illegible] \cdot 15}{4 \cdot 4} = \frac{15^2}{4^2} = 14\frac{1}{16}$.

Märk! 1. Parenteserna äro nödvändiga, när bråkstreck användes, emedan dignitetstecknet annars skulle hänföras blott till täljaren. I c) är den mindre nödvändig. Dess skrifvande medför dock större tydlighet.

Märk! 2. Dignitetens täljare är 2-dignitet af rotens täljare. Dignitetens nämnare är 2-dignitet af rotens nämnare.

Märk! 3. 2-digniteten af 1) ett helt tal alltid är helt tal och $>$ roten, 2) ett bråk, som är < 1, är ett bråk, som är $<$ roten, 3) ett blandadt tal eller bråk, som är > 1, är ett blandadt tal och roten, 4) oförkortningsbart bråk ej kan förkortas.

324. Ex. 600. 12^2 innehåller de 4 delarna 10×10, 10×2, 2×10 och 2×2.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

De 4 delarna framträda äfven vid vanlig skriftlig räkning, 4, 2 tio, 2 tio och 1 hundra. De 2 mellersta delarna äro lika stora. De sammanfattas sedan till en del. Till följd däraf märkas blott 3 delar i det uträknade talet ett hundra, fyra tio och fyra. Emedan delarna innehålla siffertal, sammandrages det till hundrafyrtifyra.

Ex. 601. $99^2 = 99 \cdot 99 = 98\,01$.

Hundratalet i den beräknade 2-digniteten af ett 2-siffrigt uppgår alltså ej till hundra.

Ex. 602. $3\frac{3}{4} \times 3\frac{3}{4}$ innehåller äfven 4 delar: $3 \cdot 3$, $3 \cdot \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} \cdot 3$ och [illegible]

325. Den motsvarighet, som finnes mellan delarna af en 2-dignitet och delarna af dess rot, märkes bäst, om bokstafstal användas. I följ. ex. motsvarar a talet 10 och b talet 2 i ex. 600.

Ex. 603. $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times\, a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2\,ab+b^2 \end{array}$$

Detta utläses: 2-digniteten af $(a+b)$ är a två + två ab + b två. — betyder långt, ⏑ kort ord.

Uträkning. $a \times a$ är a^2; $a \times b$ är ab; $b \times a$ är ba eller ab, emedan faktorernas ordning är likgiltig och man brukar skrifva de i en produkt befintliga bokstäfverna i alfabetisk ordning. $b \times b$ är b^2.

2-digniteten af $a+b$ innehåller de 4 delarna a^2, ab, ab och b^2. Summan af de 2 delarna ab skrifves enligt det kortaste sättet att beteckna ett tal med 2 lika delar: $2 \times ab$, hvilket sammandrages till $2\,ab$.

Märk! $a^2 = a \times a$. $2\,a = a + a$. Jfr med § **54** å sid. 32.

Regel. Tvådigniteten af ett tal, som består af 2 delar, innehåller 3 delar, nämligen första rotdelens 2-dignitet, dubbla produkten af båda rotdelarna och den andra rotdelens 2-dignitet.

Regeln är af vikt för beräkning 2-roten ur ett efter positionsgrundsatsen (Se § **37**, **39**!) betecknadt tal.

B. Beräkning af 2-rötter (= Utdragning af 2-rötter).

326. Beräkning af 2-rot ur tal, betecknade enligt positionsgrundsatsen.

Ex. 604. På grund af ex. 597 är a) $\sqrt{1} = 1$, b) $\sqrt{100} = 10$, c) $\sqrt{10\,000} = 100$, d) $\sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$.

Märk! 2-roten ur det minsta a) 3-siffriga talet är det minsta 2-siffriga talet, b) 5-siffriga talet är det minsta 3-

siffriga talet, c) 7-siffriga talet är det minsta 4-siffriga talet, o. s. v.

Följder. 1) 2-roten ur ett en- eller 2-siffrigt tal är 1-siffrig.
» » » 3- eller 4-siffrigt tal är 2-siffrig.
» » » 5- eller 6-siffrigt tal är 3-siffrig.
» » » 7- eller 8-siffrigt tal är 4-siffrig.
O. s. v.

2) Ett flersiffrigt tal, hvars 2-rot skall uträknas, uppdelas i 2-siffriga delar från höger. Den längst till vänster stående delen blir antingen en- eller 2-siffrig.

3) Den första delen från höger innehåller ental, den andra innehåller hundratal, den 3:e tiotusental, den 4:e milliontal.

4) Tvåroten ur hundratal är tiotal, ur tiotusental är hundratal, o. s. v.

Ex. 605. Beräkna 2-roten ur 1 369!

Före uträkningen uppskrifves, åtminstone i början, formeln $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$. Af den märkas de 3 delar, af hvilka digniteten består, och som skola borttagas från det gifna talet, samt de 2 delar, af hvilka roten består. Sedan betecknas 2-roten ur det gifna talet. Därefter uppdelas det i 2-siffriga delar från höger.

1.
$\sqrt{13|69}=30+7$
$-9\,00\,| \;=37$
$60|\;469$
-420
49
-49
0

Uträkningar. **1.** Först beräknas det tal, som motsvarar a. Det är 2-roten ur den första delen 13 hundra. Emedan 13 är > 9, men < 16, är $\sqrt{13} > 3$, men < 4. $\sqrt{13}$ hundra är alltså något mer än 3 tio. 30 uppskrifves efter $=$. $30\times 30=900$. 900 från 1369 återstår 469. 900 motsvarar a^2; alltså är den första och största delen borttagen. Här gäller nu att borttaga den andra delen. Den motsvarar $2ab$ och finnes i återstoden 469. — Den andra delen är obekant och skall först beräknas. Den består af faktorerna 2, a och b. 2 är 2; a är 30; $2a$ således $=60$. Den tredje faktorn b beräknas genom att dela $2ab$ med $2a$, alltså skall 469 delas med 60. 60 uppskrifves fördenskull till vänster om 469. 60 i 469 går 7 ggr, således är $b=7$. Den delen tillägges den förut beräknade delen 30. Sedan beräknas det mot $2ab$ svarande talet. $7\cdot 60=420$. Det borttages. Återstod 49. Det motsvarar b^2. $b=7$. $b^2=7\cdot 7=49$. 49 borttages. Alltså är $\sqrt{1\,369}=37$.

2.
$\sqrt{13|69}=30+7$
$-900\;\; | =37$
$67|\;469$
-469
0

2. $2ab=b\cdot 2a$; $b^2=b\cdot b$; alltså är $2ab+b^2=b\cdot 2a+b\cdot b=b\cdot(2a+b)$. Således är $a^2+2ab+b^2=a^2+b\cdot(2a+b)$. I detta fall innehåller digniteten blott 2 hufvuddelar, som skola borttagas under räkningen. Tillämpning.

$\sqrt{1300}=30$. $30\times 30=900$. Rotens andra del är 7. $2a+b=2\cdot 30+7=67$. Detta tal uppskrifves till vänster om 469. Sedan pröfvas, om rotdelen 7 är riktig. $7\times 67=469$.

$\sqrt{13|69} = 37$
-9
$67 \mid \quad 9$

3. Räkningen sammandrages mera. $\sqrt{13}$ är 3; $3 \times 3 = 9$; 9 från 13 återstår 4. Den andra delen 69 nedflyttas. Rotdelen 3 tvåfaldigas. $2 \times 3 = 6$. 6 uppskrifves till vänster om 469, dock så långt därifrån, att en siffra kan skrifvas efter 6. 6 i 46 går 7 ggr. En sjua skrifves efter trean och efter sexan. $7 \times 67 = 469$. 469 fråndrages.

Ex. 606. Beräkna 2-roten ur 408 321!

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{40|83|21} = 639 \\
 & -36 \\
123 & \quad 483 \\
 & -369 \\
1\,269 & \quad 11421 \\
 & -11421
\end{array}
$$

Här fäster man sig i början ej vid den 3:e delen 21, utan räknar så, som om talet vore 4 083.

$a = 6$. Emedan resten jämte den andra delen af talet är 483 och dess innehåll motsvarar $b \cdot (2a + b)$, så är $b = 3$ (nära 4). Således är $\sqrt{4\,083} = 63$ med ett öfverskott af 114. Delen 21 nedflyttas. Eftersom 4 083 är hundratal, så är 63 tiotal, eller är den nu beräknade rotdelen 630. Den motsvarar a. Förut är 2-digniteten af det talet borttagen, alltså återstår att borttaga den andra hufvuddelen, som motsvarar $b \cdot (2a + b)$. Fördenskull beräknas den mot b svarande rotdelen. Det sker på samma sätt som förut. Alltså är $\sqrt{408\,321} = 639$.

Märk! 1. Att 2-digniteten af 630 är borttagen, när resten 114 (11 400) uppstått, märkes äfven genom pröfning, d. v. s. beräkning af 630^2. $630^2 = 396\,900$. Då det talet borttagits från 408 321, återstår 11 421.

Märk! 2. Genom att skrifva 3 under 123 och sammanlägga de talen, fås summan 126, som är $= 2 \cdot 63$.

Märk! 3. Liksom 123 motsvarar $2a + b$, så motsvarar 1 269 äfven $2a + b$.

Märk! 4. Om resten blir $>$ 2-fald af den beräknade roten, så är roten för liten.

Märk! 5. Pröfning verkställes så, att 2-dignitet af den uträknade roten beräknas. Om rest finnes, så tillägges den. Summan bör blifva = det ursprungliga talet.

Ex. 607. a) $\sqrt{4083{,}21} = 63{,}9$. b) $\sqrt{40{,}8321} = 6{,}39$. c) $\sqrt{0{,}408321} = 0{,}639$.

Uträkningen lika som i ex. 606. Härvid beaktas, att decimalkommat bildar utgångspunkt för bråkets afdelande i 2-siffriga delar.

Ex. 608. $\sqrt{2} = 1{,}41421 \ldots$

Det tal, som är mångfald af talet 1 eller mångfald af en jämn del af talet 1, kallas *rationellt* tal, emedan förhållandet mellan det talet och talet 1 kan bestämdt angifvas. $\sqrt{2}$ är blott ett närmevärde.

Talet $1{,}41421$ skiljer sig från det riktiga talet med mindre än 1 hundratusendel. Förhållandet mellan $\sqrt{2}$ och 1 kan således ej bestämdt angifvas. Fördenskull kallas $\sqrt{2}$ ett *irrationellt* tal. Endast 31 tal af talen inom området 1—1 000 äro så beskaffade, att tvåroten ur något af dem står i bestämdt förhållande till talet 1. Tvåroten ur alla de öfriga 969 talen äro irrationella tal. Genom att beräkna 2-digniteten af talen 1—31 märker man, hvilka tal inom det området äro så beskaffade, att 2-roten ur dem är rationellt tal.

Ex. 609. a) $\sqrt{3{,}95} = 1{,}98746\ldots$ b) $\sqrt{3{,}9595\ldots} = 1{,}98989\ldots$

I b) beräknas 2-roten ur ett blandadt tal med periodiskt decimalbråk, hvari perioden är 95. Om detta tal uppstått genom föregående räkning och man märkte, att perioden vore 95, då blott de 2 första delarna af bråket beräknats, samt fördenskull ej fortsatte räkningen utan stannade vid det i a) uppgifna talet 3,95, och 2-roten därur sedan skulle beräknas, så bör man vid 2-rotsutdragningen taga hänsyn till de följande perioderna, om man vill angifva det rättaste värdet af 2-roten. Af a) och b) märkes felets storlek, i fall detta uraktlåtes. För praktiska behof har felet i allmänhet ingen betydelse, men besväret blir ej mindre genom att utesluta de följande perioderna, och till följd däraf bör helst det riktigaste talet beräknas.

---

327. Beräkning af 2-rot ur allmänna bråk.

På grund af ex. 599 förstås 1), att 2-rot ur ett allmänt bråk kan lätt beräknas och att den är ett rationellt tal, när bråkets både täljare och nämnare äro 2-digniteter, 2) att 2-rot ur ett blandadt tal äfven kan lätt beräknas och är ett rationellt tal, när det kan utbytas mot ett sådant bråk, och 3) att 2-rot ur hvarje annat bråk och blandadt tal är ett irrationellt tal (— närmevärde).

Ex. 610. a) $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{5}{7}$.

b) $\sqrt{\frac{[illegible]}{16}} = \sqrt{\frac{[illegible]}{16}} = \frac{\sqrt{[illegible]}}{\sqrt{16}} = \frac{[illegible]}{4} = \frac{[illegible]}{4}$.

Stor vikt ligger därpå, att rotmärket neddrages tillräckligt långt, så att det ej skrifves blott framför täljaren.

Ex. 611. $\sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \frac{2,[illegible]}{[illegible]} = 0{,}881917$.

Ex. 612. a) $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{[illegible]}{2{,}645751\ldots} = 0{,}84515\ldots$

b) $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2{,}236}{2{,}646} = 0{,}84505\ldots$

Märk olikheten mellan a) och b)!

c) Emedan $\sqrt{5}$ och $\sqrt{7}$ äro irrationella tal, så uträknas $\sqrt{\frac{5}{7}}$ fortast därigenom, att bråket $\frac{5}{7}$ förlänges så, att det nya bråkets nämnare blir 2-dignitet af ett helt tal.

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{7\cdot5}{7\cdot7}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7\cdot7}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \frac{5{,}91608}{7} = 0{,}84515\ldots$$

Stundom erhålles därigenom ett riktigare närmevärde. Enligt d) är uträkningen äfven enkel.

d) $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{0{,}714286} = 0{,}84515\ldots$

C. Tredigniteter.

328. Ex. 613. Tredigniteterna af de första 9 hela talen äro: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 och 729.

Ex. 614.

a) $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$. b) $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$. c) $100^3 = 1\,000\,000$. d) $1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$.

Märk! 1. 3-digniteten af a) det minsta tiotalet är det minsta tusentalet, b) det minsta hundratalet är det minsta milliontalet, c) det minsta tusentalet är det minsta tusenmilliontalet.

Märk! 2. 3-digniteten af ett a) ensiffrigt tal uppgår icke till tusen, b) 2-siffrigt tal uppgår icke till million, c) 3-siffrigt tal uppgår ej till tusen millioner.

Man kan äfven säga, att 3-digniteten af a) ett ensiffrigt tal är högst 3-siffrig, b) ett 2-siffrigt tal är högst 6-siffrig, c) af ett 3-siffrigt tal är högst 9-siffrig.

Ex. 615. a) $0{,}1^3 = 0{,}001$; b) $0{,}01^3 = 0{,}000\,001$; c) $0{,}001^3 = 0{,}000\,000\,001$.

Märk! 1. **Alltid** är 3-digniteten af a) ett tiodelstal ett tusendelstal, b) ett hundradelstal ett milliondelstal, c) ett tusendelstal ett tusenmilliondelstal.

Märk! 2. **Alltid** betecknas 3-digniteten af a) ett endecimaligt tal med 3 decimaler, b) ett 2-decimaligt tal med 6 decimaler, c) ett 3-decimaligt tal med 9 decimaler.

Ex. 616. $\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{7^3}{8^3} = \frac{343}{512}$.

Märk! Tredignitetens täljare är 3-dignitet af rotens täljare, och 3-dignitetens nämnare är 3-dignitet af rotens nämnare. **Märk** 1 och 3 vid ex. 599 gälla äfven här.

329. Den motsvarighet, som finnes mellan delarna af en 3-dignitet **och delarna af dess rot, märkes äfven här bäst genom att använda** bokstafstal.

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Ex. 617. $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + b^2$

Regel. 3-digniteten af ett tal, som består af 2 delar, innehåller 1:a delens 3-dignitet, 3 gånger produkten af första delens 2-dignitet och den andra delen, 3 gånger produkten af den första delen och den andra delens 2-dignitet samt den andra delens 3-dignitet.

Märk! 1. Den innehåller alltså 4 delar.

2. Vid utsägande af delen $3ab^2$ säges så, att tvåan **märkes tillhöra blott** b. Kort uppehåll göres efter $3a$.

D. Beräkning af 3-rötter.

330. Beräkning af 3-rot ur tal, betecknade enligt positionsgrundsatsen.

Ex. 618. På grund af ex. 613 är a) $\sqrt[3]{1} = 1$, b) $\sqrt[3]{1\,000} = 10$, c) $\sqrt[3]{1\,000\,000} = 100$.

Märk! 3-rot ur det minsta a) 4-siffriga talet är det minsta 2-siffriga talet, b) 7-siffriga talet är det minsta 3-siffriga talet.

Följder. 1) 3-rot ur ett en-, 2- eller 3-siffrigt tal är ensiffrig.
» » » 4-, 5- eller 6-siffrigt tal är 2-siffrig.
» » » 7-, 8- eller 9-siffrigt tal är 3-siffrig.
O. s. v.

2) Ett mångsiffrigt tal, hvars 3-rot skall uträknas, uppdelas i 3-siffriga delar från höger. Delen längst till vänster blir 1-, 2- eller 3-siffrig.

3) Den första delen från höger innehåller ental, den 2:a innehåller tusental och den 3:e milliontal.

4) 3-rot ur tusental är tiotal, ur milliontal är hundratal, ur tusenmilliontal är tusental.

Ex. 619. Uträkna 3-roten ur 146 363 183!

Före uträkningen uppskrifves formeln $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^3+b^3} = a+b$. **Märk rotmärkets utdragande öfver alla 4 delarna! Af formeln märkas** de 4 delar, af hvilka digniteten består, och som skola borttagas från det gifna talet, samt de 2 delar, af hvilka roten består. Sedan betecknas 3-roten ur det gifna talet. Därefter uppdelas det i 3-siffriga delar från höger. Slutligen verkställes uträkningen. **I början fäster man** sig ej vid den 3:e delen 183.

	$\sqrt[3]{146\,363\,183} = 523.$
	-125
7 500	21 363
	$-15\,000$
	6 363
	-600
	5 763
	-8
811 200	5 755 183
	$-5\,678\,400$
	76 783
	$-76\,440$
	343
	-343
	0

Emedan $5^3 = 125$ och $6^3 = 216$, så är $\sqrt[3]{146} > 5$, men < 6. Sedan 3-digniteten af 5 borttagits, återstår 21 af den första delen. Den andra delen tillägges (nedflyttas). Därigenom uppstår talet 21 363. Det innehåller 3 delar, hvilka motsvara $3a^2b$, $3ab^2$ och b^3. I förhållande till den följande delen af roten, är 5 tiotal. a motsvaras alltså af 50, a^2 af $50^2 = 2\,500$, och $3a^2$ af $3 \cdot 2\,500 = 7\,500$. Den andra rotdelen beräknas genom att dela 21 363 med 7 500. 7 500 i 21 363 går 2 ggr. Alltså motsvaras rotdelen b af 2. $3a^2b$ motsvaras af $2 \cdot 7\,500 = 15\,000$, som borttages. $3ab^2$ motsvaras af $3 \cdot 50 \cdot 2^2 = 600$. Efter dess borttagande återstår 5 763, som innehåller den mot b^3 svarande delen $2^3 = 8$. När de 4 delarna borttagits, har 3-digniteten af det tal, som innehåller rotens 2 första delar borttagits. Sedan upptages dignitetens 3:e del. Återstoden af det ursprungliga talet är alltså 5 755 183.

Emedan 146 363 är tusental, är den beräknade rotdelens tiotal = 52 eller är den första rotdelen = 520. Eftersom 3-digniteten af 520 redan är borttagen, så återstår att borttaga de mot $3a^2b$, $3ab^2$ och b^3 motsvarande talen från resten 5 755 183. $a = 520$; $a^2 = 520^2 = 270\,400$; $3a^2 = 3 \cdot 270\,400 = 811\,200$. Den sista rotdelen beräknas genom att dela 5 755 183 med 811 200. Den är 7. $3a^2b = 7 \cdot 811\,200 = 5\,678\,400$. $3ab^2 = 3 \cdot 520 \cdot 7^2 = 76\,440$. $b^3 = 7^3 = 343$. Då dessa delar borttagits, återstår 0. Alltså är $\sqrt[3]{146\,363\,183} = 523$.

Enklare sätt.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{146\,363\,183} = 523 \\
 & -\,125 \\
7\,500 & \quad 21\,363 \\
 & -\,15\,608 \\
811\,200 & \quad 5\,755\,183 \\
 & -\,5\,755\,183 \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$

Sedan 3-digniteten af den första rotdelen borttagits, frångrages oupphörligt summan af de mot $3a^2b$, $3ab^2$ och b^3 svarande talen. Således frångrages först summan 15 000, 600 och 8 eller 15 608, och sedan summan af 5 678 400, 76 440 och 343.

Nollorna i 7 500 och 811,200 kunna uteslutas, men därigenom blir saksammanhanget otydligare.

Pröfning. Om den efter 3-rotens utdragande ur en del af talet uppkommande resten är > summan af 3 ggr 2-digniteten af den funna rotdelen och 3 gånger samma rot, så är den beräknade roten för liten.

Ex. 620. a) $\sqrt{146\,363{,}183} = 52{,}3$. b) $\sqrt[3]{146{,}363\,183} = 5{,}23$.

c) $\sqrt{0{,}146\,363\,183} = 0{,}523$. d) $\sqrt{5} = 1{,}709\,976 = 1{,}71$.

Uträkning så som ex. 619.

Märk! 1. Vid decimalbråkets fördelning i 3-siffriga delar är decimalkommat utgångspunkten. Om den sista delen därvid ej skulle blifva 3-siffrig, så tillsättas nollor.

Märk! 2. Framställningen vid ex. 608 och 609 har sin motsvarighet rörande beräkning af 3-rötter. Ännu mindre är antalet af 3-rötter, hvilka äro rationella tal.

Vid uträkning af d) blir första återstoden 4. Motsvarande tusendelstal är 4 000. $3a^2$ motsvaras af 300. 300 i 4 000 går 13 ggr. Men följ. rotdel kan ej vara > 0,9, och tiodelstalet kan ej öfverstiga 9. Emedan $\sqrt[3]{8}$ är 2, och 5 är mycket < 8, så kan $\sqrt[3]{5}$ ej vara 1,9.

331. Beräkning af 3-rot ur allmänna bråk. Förfaringssättet motsvarar förfaringssättet vid beräkning af 2-rot ur allmänna bråk.

Ex. 621. a) $\sqrt{\frac{125}{512}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{512}} = \frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{8^3}} = \frac{5}{8}$.

b) $\sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 9}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2{,}758\,924\ldots}{3} = 0{,}919\,641$.

Geometriska räkneuppgifter.

Inledning.

332. Redan från början af räkneundervisningen kunna begreppen rät linje, krokig linje, rät vinkel, kvadrat, rektangel, cirkelyta, kub (tärning) och klot (kula) klargöras genom ren åskådning utan definition, i det att barnen hafva rutade taflor eller ritböcker, få se talbilder med kvadrater, rektanglar eller cirklar och handskas med kuber och kulor.

Tidigt kunna barnen lära sig att beräkna a) längden af kvadraters och rektanglars omkrets, b) ytan af kvadrater och rektanglar samt c) rymden af räta parallellepipeder (pelare) och kuber, d) längd och bredd af rektanglar, e) höjd, bredd och längd af sådana kroppar. För b) och d) beaktas redogörelserna vid ex. 80 och 82 å sid. 61 och 62; för c) och e) lämnas redogörelse vid ex. 79 å sid. 56. Därvid inskärpes, att 1) längd, bredd och höjd innehålla delar med samma längdmått i hvarje del, 2) ytan innehåller delar med motsvarande ytmått i hvarje del, 3) rymden innehåller delar med motsvarande rymdmått i hvarje del.

Antalet af delarna i längd, bredd och höjd är alltså lika med antalet af en sorts längdmått (längdenheter), antalet af delarna i ytan = antalet af motsvarande ytmått och antalet af delarna i rymden = antalet af motsvarande rymdmått. Till en början använder man de tänkta måttens namn. Mot hvarandra svara då 1) cm., kvcm. och kbcm., 2) dm., kvdm. och kbdm., o. s. v. Motsvarigheten inskärpes. De förekommande talen få namn efter måttens namn: 1) cm.-tal, kvcm.-tal och kbcm.-tal, 2) dm.-tal, kvdm.-tal och kbdm.-tal, o. s. v. När barnens tankeförmåga utvecklats mer, kan man meddela dem allmängiltiga uttryck, hvilka innefatta alla enskilda, likartade fall. Redig tankegång befordras genom att fortfarande använda orden *längdmått*, *ytmått* och *rymdmått*. De allmängiltiga namnen på förekommande tal blifva då: *längdmåttstal*, *ytmåttstal* och *rymdmåttstal*. Med längdmåttstal menas alltså de lika längdenheternas antal, med ytmåttstal de lika ytenheternas antal och med rymdmåttstal de lika rymdenheternas antal. De orden äro visserligen något tunga att uttala, men stå i omedelbart sammanhang med föregående, på åskådning grundade uppfattning, ty genom de orden föras barnens tankar på ett enda, efter exemplets art lämpadt längdmått, ytmått eller rymdmått af alla de i sorttabellerna nämnda längdmåtten, ytmåtten och rymdmåtten. I enskilda fall skola naturligtvis de för hvarje enskildt fall lämpade orden användas.

Andra ord användas äfven såsom allmänna namn på talen, nämligen 1) mätetal och 2) de sammanhörande längdtal, yttal och rymdtal. Ehuru de äro enklare, leda de på grund af sin sammansättning ej till lika tydlig uppfattning af innebörden som de, hvilka föreslagits å föregående sida. Ordet mätetal är otydligt för sin nära likhet med ordet metertal. I synnerhet försvåras saken, när t. ex. ytans storlek är uttryckt i hektar (ar), rymden i hl. o. s. v. eller utsträckningarnas, ytans och rymdens storlek är uttryckt i flera sorter.

333. I det dagliga lifvet kallas en kvadrats, rektangels (ex. golfs, tygytas) utsträckningar *längd* och *bredd* samt en kropps (ex. rums, torns) 3:e utsträckning *höjd*. Då är begreppens begränsning god. — Undantag finnes blott i fråga om ett rums väggytor, hvilkas ena utsträckning kallas längd och andra utsträckning kallas höjd, emedan den senare har samma riktning som kroppens (murens) höjd. — Vid geometriska bevis och beräkningar har ordet längd utbytts mot bas och bredd utbytts mot höjd, när det är fråga om **parallellogrammer** och **trianglar,** hvilka senares storlek står i bestämdt förhållande till vissa parallellogrammer, och hvilkas utsträckningar fördenskull fått namn efter parallellogrammernas. Den grundsatsen bör fasthållas, att riktiga uttryck, som barnen få höra och lära sig utom skolan, skola bibehållas. Således **höra de nämnda ytornas utsträckningar kallas längd** och **bredd.** Ett skäl till finnes. **Den yta,** på hvilken en kropp tankes hvila, kallas **basyta,** hvilket ord ofta förkortas till **bas.** Detta är ett nytt uttryck, som bör inläras i skolan.

Om begreppens betydelse ej angifves med dessa ord, så måste ordet längd utbytas mot ordet **baslinje.**

Betydelsen af ordet sida är äfven sväfvande. Än gäller det en kropps sidoyta, än en ytas gränslinje. I fråga om en kropps sidoyta bör det aldrig användas,

emedan innebörden bättre framträder genom ordet sidoyta. Däremot må ordet sida användas såsom namn på en ytas gränslinje.

En parallellograms och en triangels **längd** är alltid **en gränslinje,** alltså alltid **en sida. Bredden är en rät linje, som drages från en vinkelspets vinkelrätt mot längden.**

En parallellepipeds längd är en af basytans gränslinjer. Basytans gränslinjer äro några af kroppens kanter, men icke några af kroppens sidor. Man bör därför ej säga: »Huru stor är en kub med 3 dm.:s sida?» I stället bör sägas: »Huru stor är en kub med 3 dm.:s kant?»

En yta har inga hörn. **Oriktiga** äro fördenskull namnen *femhörning*, *sexhörning*, ... *månghörning*. De ytor, som begränsas af räta linjer, s. k. rätliniga ytor, skola benämnas efter gränslinjernas (= sidornas) antal. **Riktiga** äro således namnen **tresiding, fyrsiding, femsiding,** ... **mångsiding.**

Ett hörn hos en kropp motsvaras af en vinkelspets hos en yta. Vinklarnas antal och beskaffenhet ligger till grund för namnen **triangel** och **rektangel.** Triangel är en yta, som har 3 rätliniga **vinklar.** Rektangel är en parallellogram (fyrsiding) med blott **räta vinklar.**

Storleken af de kantvinklar, som bildas af basytan och sidoytorna hos en pelare och en pyramid, ligger till grund för namnen **rät pelare (rät pyramid)** och **sned pelare (sned pyramid).** I förra fallet äro de kantvinklarna räta (lika stora), i senare fallet icke räta (olika stora). Hos en rät pelare befinna sig basytornas medelpunkter rätt öfver hvarandra. Hos en rät pyramid befinner spetsen sig rätt öfver basytans medelpunkt.

334. Emedan det, som är uppgifvet i en geometrisk räkneuppgift, gäller längden, bredden, höjden, en yta eller en kropp, hafva oriktiga allmängiltiga uttryck vunnit häfd, så att man säger: »ytan är lika med längden gånger bredden», »längden är lika med ytan genom bredden», »man skall multiplicera längden med bredden», »man skall multiplicera det tal, som angifver längden, med det tal, som angifver bredden», »man skall multiplicera sidan med sig själf», m. m. Dylika uttryck åstadkomma en betänklig begreppsförvirring och måste utrotas.

Dylika oriktiga uttryck undvikas säkrast genom s. k. formler, om de utsägas så, som de skrifvas, d. v. s. så, att blott det säges, som skrifves. Och detta utsägesätt är ju det enklaste. I formlerna skola de bokstäfver användas, som lätt leda tanken på de geometriska storheter, hvilka förekomma i det föreliggande exemplet. Bokstäfverna böra fördenskull vara begynnelsebokstäfverna i orden längd, bredd, höjd, yta, kropp, basyta, radie, diameter, periferi (omkrets).

Se **Märk** nederst å sid. 56 och å sid. 214!

Formler.

335. Inga formler behöfvas för att beräkna 1) längden af rätliniga figurers omkrets, när längden af hvarje sida är uppgifven eller 2) en sidas längd, när omkretsens längd och de öfriga sidornas längd (eller förhållandet mellan sidornas längder) äro uppgifna.

Uppgifter, som innehålla skalor, böra gifvas. **Skala** är en måttstock, som ligger till grund för kartors uppritande. »Skalan är 1 : 1 000 000» betyder, att förhållandet mellan en längd på kartan och motsvarande längd i verkligheten är 1 milliondel.

Ex. 622. a) Huru stor längd på kartan motsvarar en km. i verkligheten enligt uppgifven skala 1 : 1 000 000? b) Huru stor längd i verkligheten motsvarar 6 mm. på kartan enligt samma skala?

Svar: a) 0,000 001 × 1 km. = 1 mm.
b) 1 000 000 × 6 mm. = 6 km.

336. Formlerna grundas på åskådning. Svaren på frågorna i de exempel, som lösas genom åskådning, sägas och betecknas äfven utan uträkning, så att sammanhanget mellan de gifna talen och det beräknade talet märkes. Sammanhanget säges och inskärpes, och slutligen bildas den allmängiltiga formeln.

Märk! Före formlers bildande bör innebörden af orden **faktor** och **produkt** inskärpas genom några sifferexempel.

337. Ex. 623. Se den hundradelade kvdm.:n å talbildsplansch 3!

Huru lång är den kvadraten? Sv.: 10 cm. Skrif att längden är 10 cm.! Då skrifves antingen: »längden = 10 cm.», eller l. = 10 cm. Huru bred är han? Sv.: 10 cm. Skrif att bredden är 10 cm.! Huru stor är hvarje del af ytan? Sv.: 1 kvcm. Huru många kvcm. finnas i den raden? (Lär. visar på den nedersta raden.) Sv.: 10. Huru **stort** är radernas antal? Sv.: 10. Huru många kvcm. innehåller hela den ytan? Sv.: 10 ggr 10, eller, uträknadt, 100. Säg ytans storlek utan uträkning! Sv.: 10 ggr 10 kvcm.! Skrif, att ytan är 10 ggr 10 kvcm.! Det skrifves.

På taflan står då: längden = 10 cm. bredden = 10 cm.

ytan = 10 × 10 kvcm.

eller l. = 10 cm. b. = 10 cm. y. = 10 × 10 kvcm.

Huru stort är längdens cm.-tal? Sv.: 10. Breddens cm.-tal? Sv.: 10. Ytans kvcm.-tal? Sv.: 10 × 10. När vi fästa oss vid beteckningen, kallas talet 10 × 10 **produkt.** Talen 10 kallas **faktorer.** Detta inskärpes. I sen således, att ytans kvcm.-tal är produkt af längdens och breddens cm.-tal eller produkt af breddens och längdens cm.-tal. Sammanhanget inskärpes genom frågan: »Huru stort är ytans kvcm.-tal?» [*Huru skolen I således göra*, när en kvadrats längd och bredd äro uppmätta, för att få reda på ytans storlek? Sv.: *Beräkna produkten af längdens och breddens cm.-tal.*]

Ex. 624. En kvadrats längd är 4 dm. och bredd lika stor. Huru stor är ytan?

Lär. skrifver: l. = 4 dm. b. = 4 dm. y. = *x* kvdm.

Barnen svara utan uträkning: 4 ggr 4 kvdm. och sedan efter uträkning: 16 kvdm. Svaren skrifvas efter *x* kvdm. *Huru gjorde du?* Sv.: *Beräknade produkten af längdens och breddens dm.-tal.*

Ett par exempel till gifvas, hvarvid längdens och breddens storlek uttryckes i samma sort, men i annan sort än i de förra exemplen. Sedan bildas

formeln 1): $y = b \times l$ eller $y = l \times b$.

Märk! 1. Då barnen fått lära sig, att 1 kvdm. = 100 kvcm., skola de draga den slutsatsen, att 1 kvcm. = 0,01 kvdm. Denna slutsats lägges till grund för formelns riktighet, när bråk förekomma. Uträkningen förutsätter, att de kunna beräkna produkten af 2 bråk. Se redogörelsen vid ex. 81 å sid. 61!

Märk! 2. Kvadrater uppritas, barnen mäta längd och bredd och beräkna sedan kvadraternas storlek.

Märk! 3. Uppmärksamheten fästes sedan därpå, att blott en sida behöfver mätas. Dessutom kan beaktas, att ytmåttstalet är 2-dignitet af sidans längdmåttstal.

Formel **2**): $y = s^2$. Detta bör dock ej ske förr, än barnen behandlat afdelningen om parallellogramer och trianglar.

Sidans storlek beräknas enligt formel **3**): $s = \sqrt{y}$.

338. Beräkning af **kubers** storlek och yta.

a. Anvisningen vid ex. 79 å sid. 56 följes. Här inskärpes, att basytans ytmåttstal = första hvarfvets rymdmåttstal. Formel **4**): $K = l^3$.

Kantens längd beräknas enligt formeln **5**): $l = \sqrt[3]{K}$.

b. En kubs yta innehåller 6 sådana kvadrater som basytan (eller en sidoyta). Formel **6**): $Y = 6s^2$.

339. Beräkning af **rektanglars** storlek sker så som i § **337**. Talbildsplansch 4 bildar utgångspunkt. Om annan rektangel uppritas på taflan, skall den uppdelas före lektionens början. Det samma gäller naturligtvis, om breddens eller längdens storlek skall beräknas. Under lektionen skrifves på taflan

y. = 10 kvdm. l. = 5 dm. b. = x dm. och
y. = 10 kvdm. b. = 2 dm. l. = x dm.

Ingen fråga får lyda så: Huru många kvdm. kan jag lägga utefter längden? Där frågas så: Huru många kvdm. innehåller hela ytan? Eller: Huru stort är ytans kvdm.-tal? Sv.: 10. Huru många dm. innehåller längden? Eller: Huru stort är längdens dm.-tal? Sv.: 5. Breddens dm.-tal? Sv.: 2. Det talet kunna vi äfven beräkna genom **att dela 10 med** 5 eller **genom att dela ytans kvdm.-tal** med längdens dm.-tal. *Huru stort är breddens dm.-tal?* Sv.: *Ytans kvdm.-tal deladt med längdens dm.-tal.*

Formler **7**): $b = y : l$. **8**): $l = y : b$.

Märk! Genom att utbyta 10 kvdm. mot 0,1 kvm., 5 dm. mot 0,5 m. och 2 dm. mot 0,2 m. samt sedan räkna enligt dessa formler märkes deras giltighet äfven då, **när talen** äro bråk.

340. En rät **parallellepipeds** rymd och yta.

a. Anvisning som i § **338 a.** Olikheten består blott däri, att utsträckningarna kunna (böra) vara olika stora.

Formler: **9**) $K = h \cdot b \cdot l$. **10**) $K = h \cdot B$. **11**) $h = \ldots$

12) $h = \frac{K}{B}$. **13**) $B = \frac{K}{h}$. **14**) $b = \frac{K}{h \cdot l}$. **15**) $l = \frac{K}{h \cdot b}$.

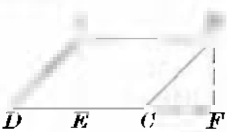
b. Ytan innehåller 6 ytor, af hvilka de 2 motstående äro lika stora. En basytas $y = b \cdot l$. En sidoytas $y = h \cdot l$.

Den bredvidliggande sidoytans $y = h \cdot b$. Alltså formel: **16)** $\boldsymbol{Y = 2(b \cdot l + h \cdot l + h \cdot b)}$.

Eller ock sammanfattas sidoytorna i en rektangel, hvars längd = basytans omkrets, och hvars höjd = kroppens höjd. Basytans omkrets är p längdenheter. De 4 sidoytornas $y = h \cdot basytans\ p$. Basytans $y = B$. Alltså formel: **17)** $\boldsymbol{Y = 2B + h \cdot basytans\ p}$. Emedan p äfven gäller kroppens omkrets, **kan formeln förenklas till 18)** $\boldsymbol{Y = 2B + h \cdot p}$.

341. Formler rörande **parallellogramer.**

Före lektionen göres en rätvinklig papperstriangel $AEDA$ och uppritas en snedvinklig parallellogram med så stor bredd som AE. Under lektionen drages genom punkter tvärs öfver parallellogramen linjen AE, hvilken angifver storleken af ytans bredd. Därigenom blir $ABCDA$ uppdelad i en fyrsiding och en △, som har lika stor yta som den gjorda pappers-△. Sedan lägges pappers-△ vid $ABCDA$ till höger om den. BF och CF dragas blott förmedelst punkter, så att barnen lätt urskilja den gifna ▱ från den sedan uppkomna ▭. Barnen förstå då, att ▱ = ▭. Därefter **inskärpes, att en sida,** längden, och den från vinkelspetsen dragna tvärlinjen, bredden, skola mätas, hvarefter räknas så som i fråga om rektanglar.



Formler: **19)** = **1**; **20)** = **7**; **21)** = **8**.

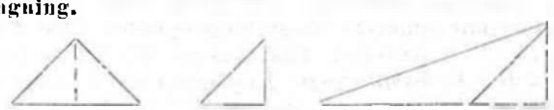
Slutsats: Parallellogramer äro lika stora, då a) längderna äro lika stora och bredderna äro lika stora, b) förhållandet mellan **längderna är omvändt mot förhållandet** mellan bredderna.

Ex. Om en parallellograms längd är 8 dm. och bredd är 6 dm., samt en annans längd är ($\frac{5}{4}$ af 8 cm. =) 10 cm. och bredd är ($\frac{4}{5}$ af 6 dm. =) 4,8 dm., så äro de lika stora.

342. En **sned parallellepiped**, hvilkens utsträckningar = **en rät** parallellepipeds, väger lika mycket som den räta parallellepipeden, om de äro gjorda af likadant trä eller likadan metall. Alltså äro de lika stora.

Formler = formlerna **9)—16)**.

343. En **triangels** längd är en af dess sidor. Dess **bredd = den räta linje, som är dragen från motstående vinkelspets vinkelrätt ($\perp$) mot längdsidan eller mot dess förlängning.**



En pappersparallellogram göres så stor som den snedvinkliga (eller rätvinkliga) parallellogram, hvilken skall uppritas. Den senare uppritas och delas genom att draga en rät linje mellan 2 motstående vinkelspetsar. Linjen kallas *diagonal*. Sedan vikes och delas papperslappen, hvarefter visas, att dess delar äro lika stora. Sedan visas, att en del däraf täcker hvilkendera delen af den uppritade ▱ som helst.

Slutsats: En △ = ½ af en ▱, när längderna äro lika och bredderna äro lika.

Formler: **22)** $y_{\triangle} = \frac{b \cdot l}{2}$. **23)** $b = 2y : l$. **24)** $l = 2y : b$.

Vid härledning af formlerna **23** och **24** kan man blott räkna så: $y = \frac{1}{2}$ af $b \times l$. Alltså är $b \times l = 2y$, och $b = 2y : l$ samt $l = 2y : b$.

Slutsats: 2 △△ äro lika stora, när a) längderna äro lika stora, och bredderna äro lika stora, b) förhållandet mellan längderna är omvändt mot förhållandet mellan bredderna.

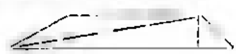
344. För **tresidiga pelare** gälla formlerna **25)** = formel **10**. **26)** = formel **18**.

345. a) **Fyrsidingar utan parallella sidor (trapezier)** och b) **fyrsidingar med 2 parallella sidor (parallelltrapezier).**

Alla uppdelas i 2 △△. 3 linjer skola mätas.

a. Trianglarnas längd är den gemensamma sidan.

b. Bredden är gemensam. De parallella sidorna äro längder i hvar sin △. Om den ena af dem är a längdenheter och den andra är c längdenheter, så är den ena △:s $y = \frac{b \cdot a}{2}$, och den andras $y = \frac{b \cdot c}{2}$ samt ⏢:s $y = \frac{b \cdot a}{2} + \frac{b \cdot c}{2}$ eller $y = b \cdot \frac{a + c}{2}$ (Formel **27.**)



Märk! 1. ⁄ ＼ kan utbytas mot en △ med lika bredd och en längd, som är = summan af de parallella sidorna, eller mot en parallellogram med lika bredd som parallelltrapeziets och en längd, som är medellängd till de 2 parallella sidorna.

Märk! 2. Alla dikesmynningar äro parallelltrapezier. Ett dike är en liggande pelare, hvars höjd är dikets längd, och hvars basyta är ett parallelltrapezium.

346. Mångsidingar, a) oregelbundna, b) regelbundna.

a. Oregelbundna mångsidingar uppdelas i △△ genom att förbinda en vinkelspets med de öfriga därmed icke sammanbundna vinkelspetsarna genom räta linjer. Trianglarnas antal är 2 mindre än mångsidingens sidotal.

b. Regelbunden är den mångsiding, som har lika stora sidor och lika stora vinklar.

Den uppdelas genom vinklarnas midtitudelning i likbenta, sammanfallande △△, hvilkas antal är = mångsidingens sidotal. Delningslinjerna träffa hvarandra i mångsidingens medelpunkt och äro lika stora. De från medelpunkten mot sidorna dragna vinkelräta linjerna träffa sidornas medelpunkt och kallas **sidostrålar (apotem)**. De angifva äfven hvarje △:s bredd.

Märk! 1. **Sammanfallande** äro de ytor, som alldeles täcka hvarandra, när den ena lägges på den andra så, att 2 sidor sammanfalla. De äro alltså lika stora. — Ytor kunna vara lika stora utan att helt täcka hvarandra. Se ⁄ ⁄ och │ i § **341!**

Märk! 2. Sidostrålen är i en regelbunden a) 5-siding 0,687 af sidan, b) 6-siding 0,866 af sidan och c) 8-siding $\frac{1\,206}{1\,000}$ af sidan.

Märk! 3. △△ i en regelbunden 6-siding äro liksidiga.

I en regelbunden 5-siding är sidan *s* mm. lång, apotemet *a* mm. långt. Fördenskull blir 5-sidingens $y = 5 \times \frac{a \cdot s}{2}$, eller $y = 5s \cdot \frac{a}{2}$. Men $5s = p$. Alltså formel 28) $Y = p \cdot \frac{a}{2}$.

347. Mångsidiga pelare med regelbundna basytor. Formler = formlerna **10**, **12** och **13**.

---

348. Cirklar, a) radie, diameter, periferi, b) yta.

a. Diametern är 2 ggr radien. Periferien är $\frac{31416}{10000}$ af diametern. Talet $\frac{31416}{10000}$ utbytes ofta mot $3\frac{1}{7}$ eller $\frac{22}{7}$ eller 3,14. Förhållandetalet betecknas kortast med π, så att man säger: Periferien är π gånger diametern.

I följ. formler är radiens längdmåttstal r, diameterns d och periferiens p.

Formler: 29) $d = 2r$. 30) $r = \frac{d}{2}$. 31) $p = \pi \cdot d$. 32) $d = \frac{p}{[illegible]}$. 33) $p = \pi \cdot 2r = 2\pi \cdot r$. 34) $r = \frac{p}{2\pi}$.

b. Emedan en cirkel kan tänkas vara en regelbunden mångsiding med många sidor, så beräknas dess yta enligt formeln 28). a i den formeln är cirkelns r. Således är 35) $y_\bigcirc = \frac{p \cdot [illegible]}{2}$. Enligt **34** kan r utbytas mot $\frac{p}{2[illegible]}$. Alltså är $y = \frac{p \cdot p}{[illegible]}$ (Formel **36**) eller $y = \frac{[illegible]}{[illegible]}$

Af formlerna **35** och **33** härledes äfven annan formel. $y = p \cdot \frac{r}{2} = 2\pi r \cdot \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$. Alltså **37)** $y = \pi \cdot r^2$.

Af **37** och **30** härledes **38)** $y = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2}$ eller $y = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$.

Märk! När cirklar äro gränsytor, är bäst att mäta omkretsen och sedan tillämpa formeln **36**.

349. Cylindrar. Formler = **10**, **12**, **13** och **18**.

---

350. Pyramider och koner.

Genom att väga en pyramid och en pelare med lika stora basytor och lika stora höjder märkes, att pyramidens rymd är $\frac{1}{3}$ af parallellepipedens, då de äro gjorda af likadant trä eller metall. Det samma gäller om förhållandet mellan en kon och en cylinder.

Formler: **39)** $K = [illegible]$. **40)** $h = [illegible]$. **41)** $B = [illegible]$

När det blir fråga om dessa kroppars ytor, beaktas olikheten mellan sidoytans höjd och kroppens höjd. Höjden af en pyramids sidoyta = hennes bredd. Höjden af en kons sidoyta är alltså = radien i den cirkel, af hvilken basytans omkrets är en del. En kons sidoyta är nämligen en sådan del af en cirkelyta, som kallas *cirkelsektor*. Den papperslapp, som sammanfaller med konens sidoyta *begränsas* nämligen *af 2 radier och en cirkelbåge.*

Summan af en pyramids sidoytor beräknas enligt formeln $y = \frac{\text{sidoytans } h \times \text{basytans } p}{2}$ (Formel **42**).

351. Klotet.

Genom att afskära 1 eller 2 ej för hårda lerklot med en knif visas, att de delar, som uppstå vid hvarje afskärning begränsas af en plan yta, en cirkelyta, och en del af klotytan. Cirkelytan blir störst, när klotet delats midt i tu. Denna största cirkelyta kallas *storcirkel.* Likaså visas genom att sticka en ståltråd genom halfklotet, att klotytan öfverallt är lika långt från cirkelytans medelpunkt, hvilken således också är klotets medelpunkt. Dessutom visas äfven genom att draga en ståltråd midt genom ett helt klot, att alla dess tvärlinjer äro lika stora som cirkelytans diameter. Denna linje kallas klotets *axel* eller höjd.

Detsamma kan äfven klargöras genom att vrida en halfcirkelformig papperslapp kring diametern. Båglinjen kommer då att röra sig utefter en klotyta.

Genom att väga ett klot och en cylinder, hvilka hafva lika stor omkrets, märkes, att klotets rymd är $= \frac{2}{3}$ af cylinderns.

En sats bleckkärl, som består af en cylinder, en kon och ett klot, och med hvilka förhållandet mellan deras rymder kan åskådliggöras, finnes hos Svanström & C:o i Stockholm till pris af 2,50 kr.

Vid beräkning af ett klots rymd mätes först omkretsen, eftertänkes sedan rymden af en cylinder, hvars höjd = klotets diameter, och hvars omkrets = klotets omkrets, och bestämmes slutligen klotets rymd. Omkretsens längdmåttstal är p, höjdens är d, basytans ytmåttstal $\frac{p^2}{4\pi}$. $K_{\text{cyl.}} = \frac{d \cdot p^2}{4\pi} = \frac{p}{\pi} \times \frac{p^2}{4\pi} = \frac{p^3}{4\pi^2}$. $K_{\text{klot}} = \frac{2}{3} \times \frac{p^3}{4\pi^2} = \frac{p^3}{6\pi^2}$.

Formel: **43)** $K = \frac{p^3}{6\pi^2}$.

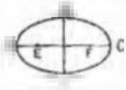
Genom att lägga ett i ena ändan vaxadt snöre i spiral kring medelpunkten af ett halfklots plana yta och axelns ändpunkt på det samma, så att båda ytorna täckas af snörena, märkes, att den buktiga ytan är 2 ggr den plana ytan, och hela klotets yta 4 ggr den plana ytan.

För beräkning af klotets yta mätes först omkretsen, eftertänkes sedan storcirkelns y och slutligen klotets y.

Omkretsens längdmåttstal $= p$. Storcirkelns $y = \frac{p^2}{4\pi}$.

Klotets $y = \frac{4p^2}{4\pi}$. Formel: **44)** $y = \frac{p^2}{\pi}$.

352. Kroklinjen $ABCDA$ är en **ellips.** AC kallas dess stora *axel.* BD kallas dess lilla axel. För dess uppritande fordras 2 fasta punkter, *brännpunkter*, E och F. $AE = FC$.



De 2 räta linjer, som dragas från hvilken punkt som helst på omkretsen till E och F, äro tillhopa $= AC$. Detta märkes, om ändarna af ett snöre (en tråd) fästas vid hvar sitt stift, som fästas i svarta taflan, och man sedan med en kritbit spänner snöret samt uppritar ellipsens omkrets.

Ytan, som omslutes, kallas ock ellips. Den större axeln är ellipsens längd, den mindre är hans bredd.

Om a är den större axelns och c den mindre axelns längdmåttstal, så bestämmes ellipsens storlek enligt formeln: $Y = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2}$ eller $y = \frac{[illegible]}{[illegible]}$ (**45**).

Märk likheten med formeln **38!**

Ex 625. En stekgryta har elliptisk basyta. Basytans axlar äro 40 cm. och 3 dm. Grytans djup är 15 cm. Huru många l. vatten rymmer hon? $\pi = 3{,}14$. Sv.: 14,13.

353. Parallellt stympade pyramider och koner.

Då sådana kroppars rymd skall bestämmas, så bestämmes först medellängden till de båda ändytornas sidor (längder och bredder eller diametrar), sedan storleken af en genomskärningsyta med så stora utsträckningar (den tänkes belägen midt emellan båda ändarna) och slutligen storleken af en pelare med den medelbasen och den gifna kroppens höjd. Därigenom fås rätt svar blott då, när skillnaden mellan ändytorna är liten.

Formel: **46)** $K = h \cdot \frac{[illegible] + B_1}{2}$.

Ex. 626. En bjälke är 1 m. lång. Storändan är 3 dm. och lilländan ar 25 cm. i fyrkant. Huru stor är han? Sv.: 75,625 kbdm. Sv. enl. formel **47)**: 75,833 kbdm.

Medelgenomskärningsytans sida är medellängd till ändytornas sidor eller $\frac{[illegible]}{2}$ dm.

Formel för noggrannare beräkning:

$$47)\ K = \frac{h}{3} \cdot (B + B_1 + \sqrt{BB_1}).$$

Vid uträkningar beaktas då Märk 2 i Rättelser och tillägg.

Tredje afdelningen.

Om gemensam räkning under lärarens ledning, barnens tysta, självständigare räkning, granskning af deras arbete samt minneslista för läraren.

A. Gemensam hög hufvudräkning.

Ren hufvudräkning med tanke på talens innebörd och sammanhanget mellan uppgifna konkreta storheter.

Se §§ **102—110**.

354. I flerklassig folkskola är ofta lämpligt att dela barnen i grupper, oberoende af klassindelningen. Huru viktigt det än är, att barnen genomgå klassens kurs före flyttning till högre klass, så får ett barn med trögare tankeförmaga ej för blott otillräcklig kunskap i räkning ovillkorligt kvarhållas i den lägre klassen längre än ett år. Om lär. använder ett likartadt förfaringssätt med alla klasserna, så kan ett sådant barn under sin skoltid inhämta den nödtorftiga förmågan att räkna i hufvudet inom lämpligt så väl heltals- som bråkområde. Se §§ **148, 150** c), **157. 201, 207, 208, 235, 258, 285—287, 293—295** och **307**!

Den likartade metoden grundas på läran om det hela och dess delar. Se §§ **48, 49, 51** moment 1 och 2, **135, 148, 150** c), **201, 207, 208, 235, 248, 254, 285—287**!

355. En hufvuduppgift är att gno in 1) mångfalds- och likadelningstabellerna, 2) metersystemet, 3) de olika tidsenheternas inbördes storlek och 4) stycketalen. Vid inlärande och inskärpande af 2)—4) angifves a) förhållandet mellan större och mindre enheter samt b) det omvända förhållandet mellan mindre och större enheter.

I allmänhet jämföres en större meterenhet blott med den närmast mindre och en mindre blott med den närmast större. Undantag göres för längdenheterna m., dm., cm. och mm.

Vid denna jämförelse får lär. ej stanna vid frågor, som inledas med orden »huru många» eller »huru stor del af», hvilka leda till blott tal i svaret, utan han bör hafva till syfte, att barnen skola säga en sådan storhet, som förekommer i tabellerna. Fördenskull erinras genom frågor oupphörligt om ordalydelsen enligt tabellerna, i hvilka hvarje rad bildar en mening.

Ex. 627. a) 1 m. = 10 dm. b) 10 dm. = 1 m. c) 1 dm. = 0,1 m. d) 0,1 m. = 1 dm.

a)—d) bilda utgångspunkter för olika fall vid förvandling från en sort till en annan. Då fordras i de första ex. uppdelning af det gifna i lika delar och i andra ex. uppdelning först i olika delar och sedan i lika delar samt slutligen sammanfattning.

Ex. 628. Uttryck a) 7 m. i dm., b) 50 dm. i m., c) 4 dm. i m., d) 0,6 m. i dm.!

Se ex. 180 och 181 å sid. 112 och 113 samt ex. 313 och 314 å sid. 156!

Ex. 629. Hvad kunna vi säga i st. f. 1 m.? Hvaremot kan 1 m. utbytas? Svaret kan vara: 10 dm., 100 cm., 1 000 mm. eller 1 tusendels km.

Ex. 630. a) Hvad är lika med 1 ar? b) Hvaremot kan 1 h.-dels ar utbytas? Svar: a) 100 kvm. eller 1 h.-dels hektar, b) 1 kvm.

Månadernas namn och olika längd beaktas.

356. I hufvudräkningsuppgifter förekomma ibland blott tal, ibland konkreta storheter. Ibland äro de förra, ibland de senare enklare. Alla sådana konkreta fall, som grunda sig på åskådning, äro lätta; men alla andra konkreta fall äro svårare och fordra större tankeansträngning, än om blott tal sägas och tänkas. Det beror därpå, att barnen blott använda talen under uträkningen och sedan skola eftertänka, om svaret på den gifna frågan skall innehålla blott tal eller äfven en konkret sort. Enklast äro sådana sakuppgifter som ex. 631. Därnäst följa i ordning de, i hvilka blott ett tal efterfrågas, såsom ex. 184, 185 å sid. 114 och 115, ex. 192, 193 å sid. 116, 212—215 å sid. 122 och 123, ex. 233 och 234 å sid. 129. De ex., i hvilka 2 konkreta sorter förekomma, äro ofta enkla, ja stundom så enkla, att de kunna ställas i omedelbart sammanhang med åskådning, när man vill inlära sättet att lösa uppgifter med blott 2-siffriga tal. Se ex. 103 och 104 å sid. 71!

Ex. 631. a) Hvad är 3 öre mer än 5 öre? b) Huru mycket är 8 öre mer än 5 öre? c) Huru mycket är 5 ggr 9 kr.? d) Huru mycket är 1 fyradel af 36 kr.?

357. Därpå, att barnen under uträkningen blott tänka på tal, beror, att de helst svara med blott tal. Det är riktigt, när frågan inledts med orden »huru många», »huru stor del af» och »angif förhållandet mellan». Fördenskull gör lär. mycket orätt, när han på frågor, inledda med dessa ord, söker framtvinga en sort genom att fråga: Hvad för något? Hvad för slag? eller dylika. Se § 122! Om lär. vill hafva visshet, att barnen fullt förstå sammanhanget, så må han ändra exemplets fråga och omsäga hela exemplet efter den ändringen, eller också må han begära, att barnen säga svaret i full sats. Sådana utsagor i full sats böra i synnerhet förekomma vid förenämnda tabellers inlärande och inskärpande.

Sammanhanget inskärpes i småskolan oftast genom fullständiga satser. Men där måste barnen äfven vänja sig att angifva svaret på kortaste sätt och då naturligtvis utan de oriktiga tilläggen af sort, när svaret skall innehålla blott tal.

358. Före uträkningen böra svar på frågor i enkla praktiska uppgifter ofta angifvas. Det svaret kräfver en tanke mera, än svaret på frågan: »Huru skall du göra?» Därigenom angifves själfva målet, ej blott sättet att nå målet. Då fattas blott uträkningen, efter hvilken svaret kan uttryckas på enklaste sätt. Denna uträkning kan sedan öfverlåtas åt barnen under deras tysta räkning, om svaret betecknats på taflan, i fall exemplet icke tages ur barnens räknebok. Fördelarna af svarets utsägande före uträkningen äro: 1) Visshet för lär., att barnen kunna svara på sådana frågor, om också icke på enklaste sätt. 2) Svar på *många* praktiska uppgifter kunna gifvas under ganska kort tid. 3) Barnen reda sig bättre vid lösning af sammansatta uppgifter. I dessa måste nämligen den ena frågan efter den andra besvaras, innan svaret på uppgiftens fråga kan sägas eller skrifvas. I somliga fall uträknas svaren på dessa föregående frågor, i andra fall (när bråkläran tillämpas) betecknas de blott, emedan förenklingar ofta kunna göras genom förkortningar. Se ex. 38 å sid. 26, ex. 487, 495 m. fl.! Se **Märk** 2 å sid. 161, tankegångarna vid ex. 355—358, 424, 427

m. fl. samt tankegångar och utredningar från och med § 294!

359. Särskildt beaktas fall, när räkningen möjliggöres utan öfvergång till enheten. Till dem höra ex. 113 å sid. 78, ex. i slutet af § **129**, ex. 261—264 å sid. 140, ex. 275 å sid. 144, ex. 479 å sid. 212. Dit höra ex., i hvilka förhållandet angifves mellan a) 1 kr. (m., hl, ar, hektar) och 10 öre (cm., l., kvm. och ar), b) 1 kr. (m., hl., ar, hektar) och 25 öre (cm., l., kvm. och ar) m. m. samt omvända förhållanden mot dessa. Dylika ex. med större tal kunna ej förekomma förr, än sådana uträknats skriftligt, hvarvid de lika delarnas antal beräknats. De äro dock synnerligen viktiga både för sin praktiska betydelses skull och för inskärpande af metersystemet. Se D-räknebokens folkskolekurs sid. 34, 46—48, 83, 84 och 131, samt fortsättningskursen sid. 8 och 9!

360. Ofta kunna **flera klasser hafva samtidig hufvudräkning.** Emedan somliga barn lösa en uppgift fortare än de öfriga, kunna de få skrifva svaret på den gifna uppgiftens fråga på sina taflor och sedan lösa en annan likartad eller svårare s. k. fyllnadsuppgift. Denna senare uppgifts innehåll kan då ofta korteligen angifvas på taflan, så att lär. ej behöfver störa de räknandes tankar genom att utsäga den. Se uppställningen vid ex. 261 å sid. 140! De konkreta storheterna kunna då stå i det förhållande till hvarandra, att lösningen kan utföras antingen enligt den s. k. enhetsmetoden eller enligt ex. 261 och följ. När barnen hinna med det, böra båda sätten användas. Svaret enligt det första sättet uppskrifva barnen på sina taflor och jämföra sedan svaret enligt andra sättet därmed för att kontrollera räkningens riktighet. De flesta uträknade uppgifterna uträknas sedan högt, än af dem, som räknat rätt, än af dem, som räknat orätt. Fyllnadsuppgifterna kunna vara dels repetitionsexempel, dels lämpade efter det område, inom hvilket barnen för tillfället äro sysselsatta under sin tysta, skriftliga räkning.

Ex. 632. a) Huru mycket är 1 m. mer än 73 cm.? b) Fyllnadsuppgift: Huru mycket är 5 m. (5 m. 15 cm.) mer än 2 m. 73 cm.?

Ex. 633. a) Huru mycket är summan af 45 och 39? b) Fyllnadsuppgift: Hvad kosta 5 ägg, när 1 tjog ägg kostar 1 kr. 15 öre?

Märk! I b) är svaret ett närmevärde, som i heltalsläran grundas på att 15 är närmare 16 än 12. Svaret på b-frågan är outräknadt 1 fyradel af 1 kr. 15 öre. Uträkning: 1 fyradel af 1 kr. är 25 öre. 1 fyradel af 12 öre = 3 öre; 1 fyradel af 16 öre = 4 öre. Alltså är 1 fyradel af 15 öre närmare 4 öre. Hela svaret 25 + 4 öre eller 29 öre.

Om b-frågan lydt: Huru mycket kostar 6 ägg?, så skulle barnen beräkna först värdet af 4 ägg, sedan af 2 ägg, slutligen af 6 ägg. Värdet af 4 ägg är 1 femdel af 1 kr. 15 öre eller 23 öre, och af 2 ägg 1 tvådel af 23 öre eller 12 öre; alltså värdet af 6 ägg = 23 + 12 öre = 35 öre.

Samtidiga hufvudräkningsöfningar med alla klasserna böra förekomma, 1) när lär. vill eller behöfver ägna den för tyst skriftlig räkning anslagna tiden åt närmare granskning af de olika barnens förmåga att reda sig själfva, hvarvid han bör gå omkring i rummet för att gifva en och annan ledning eller påpeka ett och annat fel, som han märker vid en sådan granskning, 2) när han sedan behöfver använda den öfriga delen af räknelektionen ostörd åt någon klass eller några enskilda barn, som af en eller annan anledning blifvit efter klasskamraterna, för att inlära något nytt eller säkert inskärpa något, som alla i den klassen måste kunna.

Villkoret, för att dessa samtidiga hufvudräkningsöfningar skola försiggå utan onödig tidspillan, är, att lär. på förhand ej blott uppgjort planen för dem, utan ock uppskrifvit uppgifterna i en bok, och däri under lektionen eller efter dess slut för de följande lektionernas skull *kort* antecknar, om något af de gifna ex. eller annat liknande behöfver genomgås nästa gång.

B. Gemensam hög skriftlig räkning.

361. Barnen i blott en klass eller flera klasser deltaga samtidigt, beroende på beskaffenheten af det, som behandlas.

362. Mesta tiden fordrar i allmänhet första folkskoleklassen, när småskolan och folkskolan undervisas af olika lärare. Ju mindre barnen kunna vid inträdet i folkskolan, desto mer omedelbar undervisning kräfva de. Ju mer tid lär. använder till omedelbar undervisning af 1:a klassen, desto bättre reda de sig själfva sedan. Fullständigare ledning behöfva de sedan blott vid hela tals delning med 2-mångsiffriga tal, sammansatta decimalbråksuppgifter, uppgifter med allmänna bråk och sammansatta praktiska uppgifters lösning. Ju säkrare de blifvit att angifva hvarje dels storlek före likadelningens utförande såsom *en* del af det hela, desto mindre omedelbar undervisning kräfves vid beräkning af en storhet, som är lika med några delar af en efterföljande storhet (s. k. multiplikation med bråk) — Se ex. 32 å sid. 24, ex. 45 å sid. 33 och **249—250!** — desto säkrare reda de sig vid lösning af många s. k. regula-de-tri-uppgifter (äfven ränteuppgifter och uppgifter rörande delning efter visst förhållande).

Ex. 634. Priset för 350 gr. socker efter 70 öre pr kg.? Sv.: $0{,}350 \times 70$ öre.

Ex. 635. Huru stor ränta erhålles för 50 kr. under 45 dagar efter 5 % för år? Svar: $\frac{45}{360} \times 50 \times 5$ öre eller $\frac{45}{360} \times \frac{5}{100} \times 50$ kr.

Fordringarna på afgångsklassens kunskaper få ej ställas för högt, när en enda lär. undervisar alla folkskolans klasser. Blott den fordran bör så väl lärare som andra hafva på afgångsklassen, att de kommit till insikt om tankegången vid enkla praktiska uppgifters lösning och att de nått den s. k. räknefärdighet, som kunnat vinnas genom deras eget arbete. Och deras kunskaper i detta ämne beror i så hög grad på utvecklingen af deras tankeförmåga, att stundom en hel klass är svag, fastän lär. användt så mycket arbete på det rätta sättet, som varit honom möjligt.

Om den i § 83 föreslagna kursfördelningen följes, kunna klasserna 1 och 2 ibland gemensamt deltaga vid hög enkel skriftlig räkning med decimalbråk i alla räknesätten. Se ex. 72 a)—d), 327 a)—g) och 329! Klasserna 1—4 kunna gemensamt deltaga i öfningar, då 2 eller flera metriska sorter förekomma i uppgifterna — Se ex. 107 c) och d), 108, 109 a), 239 b) och 247! — samt tidsuppgifter af lämplig beskaffenhet, såsom ex. 139—149, 200, 201—203, 205, 207 och 208. Klasserna 2—4 kunna gemensamt utföra mångfaldigande och delning med 2-flersiffriga tal, såsom 109 c), d), 110, 230 c), d), 232, 259, 272, 328—330 och 340. Beräkning af förhallande mellan hvilka tal som helst och därmed sammanhängande lösning af praktiska uppgifter äro lämpliga gemensamma öfningar för 3:e och 4:e klasserna.

363. Vid hög skriftlig räkning beaktas följande.

1. Läraren bör helst skrifva det, som skall skrifvas. på det att siffrorna skola blifva tillräckligt tydliga för samtliga barnen. Det vid taflan högt räknande barnet skymmer ofta bort en del af det skrifna för somliga barn. Fördenskull kan uträkningen utföras af barnen på deras plats. Då angifva barnen, hvarest den ena efter den andra af det nya talets siffror skall skrifvas, hvarefter lär. skrifver den på rätt plats. Den tid, som åtgår för skrifvandet, är så ringa, att ordningen i rummet kan öfvervakas. At de barn, som kunna skrifva tydligt, bör skrifning på svarta taflan ibland öfverlåtas. Emellertid vinnes tid, om lär. skrifver det, som behöfver skrifvas. När något inlärts, men behöfver inöfvas gemensamt, kan räkningen stundom utföras högt af ett barn vid svarta taflan och af de öfriga samtidigt på egna taflor. Då har lär. någon tid att ägna åt de tyst räknande.

2. När ett barn skall skrifva något på taflan, framkallas det först, och säges uppgiften sedan. I annat fall händer ofta, att uppgiften måste omsägas, emedan barnet glömt det sagda under vägen till taflan. Och om de på sina platser sittande barnen genom ifrig handuppräckning (oftast armsträckning med mer eller mindre oroliga hand- och fingerrörelser) då tillkännagifva sin önskan att få omtala, hvad det första glömt, så skadar det bestämdt. Många af dem, som då uppräcka händerna, råka ut för samma missöde en annan gång. Ibland händer, att äfven ett handuppräckande sittande barn svarar orätt, och då måste antingen ett annat tillfrågas eller lär. själf omsäga det. I alla fall förspilles tid. Alla barnen följa säkert med, om de sittande emellanåt få säga, i fall det skrifvande skrifvit rätt.

3. Blott så mycket säges på en gång, som det skrifvande barnet lätt ihågkommer. Om summan af några tal skall beräknas, så säges: Beräkna summan af talen 5 469, 3 675 och 8 102! Ett uppehåll göres efter hvarje tals sägande, så att barnet hinner skrifva det sagda talet.

4. När talen (storheterna) skrifvas under hvarandra, skrifves icke summatecken före något tal, men skrifvas skillnadstecken och mångfaldstecken före det undre talet. Barnen böra vänja sig, att endast tecknet + kan tänkas framför ett tal, framför hvilket intet tecken skrifvits.

5. Vid uträkningen uppdelas enligt beteckningen. Jämför § **112** med § **102**! Se §§ **107, 113, 114, 186, 188—190, 199, 200,** ex. 72 å sid. 46, §§ **239—241**! I allmänna bråk beaktas täljare och nämnare hvar för sig. Se §§ **70, 115, 260, 264—278**!

På grund af åskådning och talens utsägande uppdelas talen ofta vid ren hufvudräkning annorlunda än vid skriftlig räkning. Detta gäller i heltalsläran, när barnen nått en viss öfning att i hufvudet beräkna en jämn del af ett tal, och i decimalbråksläran nästan alltid.

Ex. 636. Huru stor är hvarje del, när fyrtitvå lika 3-delats?

Hufvudräkning: I början uppdelas 42 i de 3 delarna 3 tio, tio och två, sedan i de 2 delarna tretti och tolf. När barnen kunna uppdela talet på det senare sättet, så vilja de omedelbart uppdela det på samma sätt äfven vid skriftlig räkning. Det får ej ske, emedan **den skriftliga räkningen i enklare fall skall vara grundläggande för den skriftliga räkningen i svårare fall.** Barnens tankar måste således föras tillbaka till den första uppdelningen vid hufvudräkningen. Det sker, när de räkna så: »1 tredel af 4 tio är 1 tio, ty 3 ggr 1 tio = 3 tio. 3 tio från 4 tio återstår 1 tio. 2 tillägges.» Vid s. k. mekanisk räkning säges ju: »3 i 4 går 1 gång; 1 × 3 är 3; 3 från 4 återstår 1; 2 nedflyttas.»

Ex. 637. Hvad är summan af 27 h.-dlr och 39 h.-dlr?

Vid hufvudräkning sammanläggas h.-delstalen 27 och 39. Men vid den skriftliga räkningen synas både tiodels- och h.-delsrummen fyllda. Fördenskull sammanläggas 2 h.-delstal och 2 tiodelstal. Därpå beror, att de decimalbråk, som sammanläggas, ej behöfva ändras genom tillsättande af nollor, om det ena (några) har färre decimaler än det (de) andra. Samma ojämnhet förekommer då och bibehålles åt höger, som ofta förekommer åt vänster, när hela tal sammanläggas. — Se äfven ex. 72 b) och c) å sid. 46! Det be-

83,4
7,6
426 273

räknade talets decimaler böra genast skrifvas < heltalssiffrorna. Se äfven § **240!**

6. Säkerhet vid tyst räkning vinnes endast därigenom, att barnen högt i ett sammanhang säga allt, som de skola tänka vid tysta, liknande uträkningar. Ju svårare räkningen är, ju flera delar den innehåller, desto större vikt ligger på denna sammanhängande höga räkning. Se ex. 238 e) i §§ **188** och **189!** Bäst är, att samma tal uträknas 3 gånger, 1) i det att många, enskildheter rörande, frågor gifvas, 2) i det att mer omfattande frågor göras, 3) utan några inskjutna frågor.

Blott mer begåfvade och ordentliga barn verkställa sammanhängande uträkning af de första talen i en afdelning, så att de andra få höra ett riktigt sammanhang.

Om tyst liknande uträkning skall omedelbart följa, så bör en uträkning stå kvar på taflan till ledning, i fall ingen sådan skulle finnas i barnens räkneböcker.

7. Pröfning af svarens riktighet påvisas dels genom omräkning något annorlunda, dels på helt annat sätt.

8. Se uträkning af ex. 130 å sid. 89! »Minnessiffror», som i början skrifvas så nära som möjligt de gifna, betecknade talens siffror, måste försvinna, allt eftersom barnens tankeförmåga tilltager.

9. De enskilda fall, som äro uppskrifna på svarta taflan såsom grund för något sedan framställdt allmängiltigt påstående, måste kvarstå, tills den allmängiltiga slutsatsen dragits.

10. Det, som skrifves, bör skrifvas så högt upp på taflan och så långt till vänster som möjligt samt någorlunda radrätt, på det att framställningen må blifva redig, och plats finnas för det, som behöfver kvarstå under en afdelnings tysta räkning, medan en annan del af taflan användes för hög skriftlig räkning med en annan afdelning.

11. Likhetstecknet måste skrifvas midtför ett likadelsstreck eller bråkstreck.

12. Punkt såsom produkttecken skall skrifvas midt för siffrorna, ej vid nedre ändan af dem, för att ej förväxlas med skiljetecknet punkt.

13. När flera självständiga tal eller likheter skrifvas efter hvarandra i en rad, böra de skiljas från hvarandra genom semikolon (;) hellre än med punkt för att hindra förväxling med produkttecknet. Se ex. 590 å sid. 273!

14. Tydliga siffror skola skrifvas. Sjuorna likna än ettorna, än fyrorna. Det förra inträffar, när ettans uppstreck bildar för stor vinkel med nedstrecket; det senare, när sjuans bågstreck böjes för djupt. Bäst är att skrifva båda delarna af sjuan med raka streck. En trea får ej skrifvas så, att den lätt kan ändras till en åtta.

15. Barnen hafva 2 händer. De må fördenskull ej lägga från sig kritan för att taga tafveltorkaren med högra handen, när något oriktigt skall utstrykas. Vid rättelser utstrykes blott det orätt skrifna.

Barnens tysta, självständiga räkning.

364. Det, som ordentligt förberedts, må föreläggas alla barnen till tyst räkning. Därigenom öfvas deras förmåga att arbeta självständigt.

Lättast äro uppgifter med blott tal och förbindelsetecken. Då gäller det blott att förenkla det gifna. Svårigheten ökas, när en eller flera s. k. sorter (konkreta sorter) äro fogade till talen. Om sammanhanget mellan de uppgifna storheterna angifves genom ord, kan svårigheten vara betydlig. Blott de enklaste praktiska uppgifterna måste lösas af alla barn. De böra hafva rätt att förbigå de svårare, om svårigheternas lösning öfverstiger deras krafter, men skola sätta ett märke vid dessa och sedan meddela lär. sin oförmåga, på det att han må bestämma, om och när de skola lösas. Barnen böra vänja sig att ej begära hjälp vid första svårighet och hafva rätt att utom lektionen begära hjälp af andra. Det område, som de genomgått, skola de kunna, hvarom icke, böra de omräkna åtminstone en del däraf. Denna omräkning är ej behaglig, men ej heller så tråkig, som några lär. anse. Lär. bör vara angelägen att låta barnen genom frågor få erfara, att kännedom om det föregående är nödvändig för det följande, samt gifva erkännande åt de framsteg, som gjorts vid omräkningen. Då skall begär efter säkerhets vinnande uppstå.

365. Olika svårigheter framträda för olika barn. För lär. gäller fördenskull att söka så mycket som möjligt lära känna dessa svårigheter och afhjälpa dem. Blott då, när svårigheterna äro gemensamma för många eller de flesta af barnen, bör sättet för deras öfvervinnande behandlas samtidigt, högt med alla barnen i en eller flera klasser. I annat fall nås målet säkrast genom att gå omkring till barnen, ögna på deras räkningar samt skärpa blicken för felen, så att de lätt iakttagas. Ju mer arbete den oerfarne eller för räkning mindre begåfvade lär. nedlägger på granskning af barnens med siffror mer eller mindre fullskrifna taflor, desto mer skärpes iakttagelseförmågan, och desto fortare och säkrare iakttagas felen vid en hastigare granskning. Arbetet är tröttande, men utan det vinnes ej målet: någorlunda säkerhet hos alla.

366. Från början tillhållas barnen att skrifva redigt på sina taflor, att tydligt utmärka exemplens ordningsföljd genom att understryka eller sätta en ring eller fyrsiding eller halfparentes kring exemplets ordningsnummer, att skrifva tydliga siffror rätt under hvarandra, att genom streck afskilja de till olika exempel hörande uträkningarna från hvarandra, så att både de och lär. lätt kunna se det, som hör tillsammans, samt att pröfva räkningens riktighet.

367. Vikt lägges på likhetstecknets riktiga användande. Liksom barnen skola vänjas att säga sina tankar på riktigt sätt, så skola de äfven vänjas att skrifva sina tankar på riktigt sätt äfven då, när det sker med användande af matematiska tecken, förmedelst hvilka tankarna nedskrifvas kortare än annars. De hafva ej brådare, än att de hinna göra det på det rätta sättet. Se §§ **62**, **63** och **123** C moment 3 å sid. 80 och 81! Om svaret på en praktisk uppgifts fråga skall innehålla konkret sort, men någon sådan ej uppskrifves vid uträkningen, så bör svaret skrifvas särskildt och understrykas. Se ex. 277 å sidan 145!

368. Om de beräknade konkreta enheternas antal i ett svar är så stort, att förvandling till större sort ifrågakommer, så bör svaret först angifvas i den mindre sorten och sedan efter förvandling. I förra fallet märkas de (det) beräknade talen (talet). Se §§ **113** och **114**! Blott därigenom inskärpes, att det hela är af samma sort som delarna. På lär. beror, om barnen skola säga svaret på båda sätten. Därigenom möjliggöres äfven ofta det snabbaste rättandet af ett felaktigt svar. Det händer näml.

ofta, att felet ligger i själfva förvandlingen. Det felet märker lär. ganska lätt, om han ser svaret skrifvet på båda sätten. Barnet slipper då åter utföra den oftast mycket besvärligare uträkningen.

368. Ju flera praktiska uppgifters frågor besvarats under de gemensamma hufvudräkningsöfningarna, äfven om det skett med blott outräknade svar, desto bättre reda sig barnen med enkla praktiska uppgifters lösning, desto mer kunna de få använda den till tyst räkning lämnade tiden för att vinna ej blott säkerhet, utan äfven snabbhet i räkningens utförande. Och denna är synnerligen viktig. Mycket sammansatta uppgifter äro ej vanliga i det dagliga lifvet, men »långa additionstal» äro så mycket vanligare. Det må beaktas! Ingen räknebok innehåller tillräckligt många sådana. Lär. måste uppfinna flera och det på kortaste tid samt bilda dem på enklaste sätt. Sådana enkla, raskt bildade uppgifter äro s. k. **serieuppgifter,** bland dem mångfaldstabellerna. De uppskrifvas på svarta taflan i så sammandragen form som möjligt. Barnen förstå snart den sammandragna framställningen.

Ex. 638. Sammanlägg a) alla udda tal från och med 19 t. o. m. 45, b) alla udda tal från och med 24 t. o. m. 47, c) hvart 3:e tal från och med 30 t. o. m. 99.

På svarta taflan skrifves följande:

a) $19 + 21 + 23 + \_\_\_\_ + 45$. Eller: Udda talen: 19, 21 ...... 45.

Summan innehåller 14 tal, som bilda en serie. Den kan utbytas mot ett tal, som innehåller 7 delar med $19 + 45$ i hvarje del. Den är alltså $= 7 \cdot (19 + 45) = 448$.

b) Udda tal: 24 ____ 47.

Summan innehåller 12 serietal och är $= 6 \cdot (25 + 47)$.

c) Hvart 3:e tal: 30, 33 ____ 99.

Innan barnen uträkna summan, redogöres för de 2 hufvuddelarna af tankegången. 1) Eftertänkas alla tal, som skola sammanläggas. 2) Uträknas summan.

Ex. 639. Motsvarande frändragningsöfningar. a) Tag 28 från 280 och sedan från återstoden så länge som möjligt! b) Räkna efter, huru många tal (delar) 28 talet 280 innehåller! b-frågan kan lyda: Räkna efter, huru många gånger 28 kan tagas från 280!

På taflan skrifves: a) $280 - 28 - 28 - \_\_\_\_$ b) kan blott sägas eller skrifvas fullständigt.

b-frågan utgör en inledning till likadelning, då delarnas antal beräknas.

Ex. 640. a) 12 kr. — 75 öre — 75 öre — ____ b) 4 kr. 32 öre — 48 öre — 48 öre — ____

Af ex. 640 och dylika lära barnen sig genom *litet* besvär å lärarens sida, att det hela, som delas, måste vid likadelning uttryckas i samma sort som den uppgifna delen, då delarnas antal beräknas.

Sådana exempel gifvas äfven, att en mindre del än de uppgifna återstår: Ex. 7 kr. — 75 öre — 75 öre — ____

Pröfning förekommer då 1) efter hvarje fråndragning, 2) efter räkningens afslutande på det sätt, att alla delarna sammanläggas.

Ex. 641. Hvilket tal innehåller a) 6 tal 56, b) 8 tal 56, c) 14 tal 56?

Beräkning utföres för öfnings skull på 2 sätt: 1) genom sammanläggning, 2) genom mångfaldigande.

Ex. 642. Om 27 tagits från 540 och sedan oupphörligt från återstoderna, samt lär. uppskrifvit återstoderna, så bildas därur 34 likadelningsexempel med 2-siffriga, lätt granskade svar, i det att den ena resten efter den andra lika 3- eller 9-delas. Lär. skrifver då på taflan: Dela 513, 486, 459, 432, 405 1) med 3, 2) med 9! Eller blott:
513 : 3; 486 : 3. 459, 432, 405.
513 : 9; 486 : 9. » » »

Ex. 643. Af ex. a) 16 — 2. b) 19 — 2. c) 31 — 2. d) 17 — 3. e) 35 — 3 o. s. v. bildas lätt följande: a) (16 + 2) — 2. b) (19 + 2) — 2. c) (31 + 2) — 2. d) (17 + 2) — 3. e) (35 + 2) — 3 o. s. v. Därvid säges, att de nya talen bildas genom att lägga 2 till det hela och sedan borttaga lika stor del som förut.

Ex. 644. d) Dela 720 med 9! Minska 720 med 36 och dela återstoden med 8! O. s. v. På taflan skrifves a) 720 : 9. b) (720 — 36) : 9 = 684 : 9. c) (684 — 36) : 9. Bildandet af de öfriga talen förstå barnen.

Bildandet af sådana ex. bör först ske gemensamt, sedan kunna sådana tillfälligt skrifvas åt somliga såsom fyllnadsuppgifter. Se D-räknebokens folkskolekurs ex. 151 å sid. 18 och ex. 255 å sid. 75!

Granskning af barnens tysta räkning.

369. All tyst räkning granskas ordentligt. Befintliga fel angifvas så, att barnen ej behöfva nedlägga onödigt arbete vid felets rättande. Omräkning fordras utom ibland, när tilläggsuppgifter gifvits.

Granskningen sker dels utan, dels med biträde af barnen.

1. Läraren granskar dels under lektionen, när han går omkring till de tyst räknande barnen, dels fullständigare mot lektionens slut, då svaren jämföras med s. k. facit. I senare fallet börjar alla svarens granskning samtidigt. Alla barnen följa med på sina taflor, under det att det ena efter det andra uppsäger ett eller flera svar. Barnen böra då ej resa sig upp för undvikande af tidspillan. Med griffeln göra barnen ett felmärke öfver de oriktiga svaren. Hvarje barn antecknar efter granskningen af dess svar numren på de ex., hvartill det fått oriktiga svar; och sedan rengöres taflan, om det medhinnes före lektionens slut. — I en flerklassig skola borttages emellertid för mycket af den korta undervisningstiden för granskning på detta senare sätt.

2. Äldre, skickliga barn upphöra de andras svar. Då får det på taflorna skrifna ej utstrykas, emedan lär. bör efter skolarbetets slut granska åtminstone en och annan tafla, i synnerhet deras, som äro slarfviga, för att få kännedom om barnens ståndpunkt.

3. Barnen granska själfva sina svar. Om det räknade ej utstrykes, och lär. verkställer eftergranskning såsom i 2 samt därvid ibland granskar alla taflor och håller efter dem, som hafva lust till bedrägeri, så kan bedrägeri hindras.

Märk! Numren på exempel med felaktiga svar uppskrifva barnen i en af ett ark gjord bok. Om blott en del af ett felaktigt svar är oriktig, så sättes felmärket öfver den delen, när lär. själf granskar. Om konkret sort fattas, sättes felmärket efter det beräknade talet.

Minneslista för läraren.

Se § 2!

370. 1. Allra först iordninggöres till skriftlig räkning, i det att samtliga barnen framtaga tafla, griffel och räknebok. Taflorna böra vara rengjorda före lektionen.

Olämpligt är, att blott de vid lektionens början tyst räknande barnen framtaga dessa saker, emedan störande buller bör undvikas under lektionen. Dessutom händer, att den andra afdelningen behöfver göra någon anteckning under den gemensamma höga räkningen, äfven om ren hufvudräkning förehafves. Se de s. k. tilläggsuppgifterna i § **360**!

2. Uppgift gifves åt de tyst räknande. Om någon kort anvisning behöfver gifvas på grund af räkningens beskaffenhet under föregående lektion, så kan det ske antingen före eller efter böckernas uppslående. Sysselsättning därunder hafva de andra med en åt dem gifven fåordig hufvudräkningsuppgift.

3. Vid hög räkning skall undervisningen vara s. k. klassundervisning d. v. s. alla klassens (afdelningens) barn skola känna, att uppgiftens lösning gäller dem alla. Vid **hufvudräkning** gifves fördenskull frågan först, och säges ett barns namn sedan, men ej omedelbart efter frågan. Barnen böra nämligen hafva någon tid till eftertanke utom i de fall, att lär. har rätt att fordra ögonblickligt svar. Ögonblickliga svar fordras allt efter genomgången kurs på frågor, som gälla alla tabeller, och i fall ett begärdt svar utan uträkning lätt kan gifvas.

Hinderlig för lugn eftertanke och samtliga lärjungars säkra framsteg är handuppräckningen. Ofta upp- och framsträckes ej blott somliga barns högra arm utan hela (halfva) kropp snedt åt höger i sammanhang med viftning af fingrarna ej blott omedelbart efter lärarens fråga, utan t. o. m. så snart han börjat en fråga, innan barnen således veta, hvad frågan skall gälla. — I skolor med dålig ordning förekommer äfven knäppning med fingrarne. — De försagda eller mindre begåfvade barnen förvirras, när de se den samling af oroliga kamrater, som äflas att först få svara. Lärarens omdöme blir ofta skeft, ty de försagda och de mindre begåfvade barnen få färre frågor, och de senares framsteg går saktare, än som kunde ske. Ofta är handuppräckningen ej vägledande, i det handuppräckande barn ej gifva sig tid att eftertänka det rätta svaret. Det senare bör bestraffas därmed, att sådana barn ej få frågor till följd af handuppräckning, förr än de lärt sig tänka först och tala sedan.

En stel hållning med korslagda armar öfver bröstet är förkastlig. Ett otidigt handuppräckande är ej mindre förkastligt. Båda äro dessutom till men för kroppsligt välbefinnande.

4. Individuell undervisning får ej förbises vid den gemensamma undervisningen. Den förbises lättast, när lär. utan vidare öfvergår till ny uppgift efter erhållet riktigt svar af handuppräckande barn.

5. Frågorna fördelas så jämnt som möjligt. Dock ligger ej vikt på, att alla tillfrågas under samma lektion. Sträfvandet därefter leder ofta till dåligt resultat vid sammanhängande räkning.

6. Barnens själfverksamhet skall tagas i anspråk först vid användningen af åskådningsmateriel, i det att de få handtera sådan, sedan genom lär:s frågor.

7. Lär. må ej blott fråga utan äfven undervisa, på det att barnen skola få höra korta, bestämda uttryck, lämpade efter förhandenvarande fall, samt ibland själf räkna högt, på det att barnen skola få riktigt sammanhang mellan de olika delarna af räkningen. Därigenom motarbetas icke barnens själfverksamhet. Därigenom vinnes fasthet, och föras de mindre begåfvade säkert framåt. — Ej må det efterfrågas, hvarom barnen sakna kunskap.

8. Frågorna skola vara bestämda och hafva riktig form. De få ej vara en oklar sammansättning af en del af ett påstående och en del af en fråga. **Odugliga äro:** »7 och 8 är huru mycket?» »En kr. är huru många öre?» m. m..

9. Oriktiga, betydelselösa uttryck böra ej användas. Dit höra »gånger mer» och »gånger mindre». Se § 48! »Gånger mindre» får ej utbytas mot »gånger så litet». Sådana äro »gå på», »gå till», »låna». Ex. »1 000 kbcm. gå på 1 kbdm.» bör ändras till: 1 000 kbcm. innehållas i 1 kbdm. — »100 öre gå på 1 kr.» ändras till: 100 öre innehållas i 1 kr. — »Gå till femman och låna» saknar verklighet. Något lån behöfves ej, ty en större enhet tages och (växlas) förvandlas till (utbytes mot) mindre enheter.

10. Ett passande ledningsexempel är ofta bättre än långa redogörelser och många frågor.

11. När innebörden af ett ord angifves, en s. k. *definition* skall sägas, så skola barnen höra den åtminstone ett par gånger, innan de skola säga den. Ex. Innebörden af ordet parallellogram skall inläras. Då säger lär.: En fyrsiding, hvars motstående sidor äro parallella, kallas parallellogram. Därefter frågas: 1) Hvad kallas den fyrsiding, hvars motstående sidor äro parallella? (Sv. Parallellogram.) 2) Hvad menas med en parallellogram?

12. God betoning fordras ofta. Därigenom rätta barnen ofta själfva ett oriktigt svar.

13. Förklaringarna skola vara korta.

14. Det abstrakta och det konkreta få icke förblandas.

15. Barnen skola göras uppmärksamma på 1) det som är gifvet, och 2) frågan i ett exempel. De hafva stor benägenhet att förblanda hela exemplet med frågan.

16. Inskärpande består ej alltid i blott omsägande. Stundom ingår däri angifvande af en orsak till en följd. Beteckningen inskärpes därigenom, att barnen utsäga, hvad lär. skrifvit, och att han skrifver enligt barnens föresägande. I senare fallet skola barnen angifva förbindelsetecknens utseende såsom rakt kors, ett streck efter talet ..., en punkt (lutande kors), 2 punkter öfver hvarandra, likadelsstreck och bråkstreck.

17. Det subjektiva i uttrycken bör utbytas mot det objektiva, som lämpas efter omständigheterna. Ex. Efter frågan: »Huru många kulor tog jag (du, han) bort?» bör frågas: »Huru många kulor innehåller den (den första, andra) delen?» »Jag (du) får 5 öre i ränta» utbytes mot »räntan är 5 öre». Märk frågorna: »Huru många kanter har jag (du)?» och »Huru många hörn hafva vi?»

18. Obestämda, oriktiga svar må ej tagas till godo. Ett formelt oriktigt, men till innehållet riktigt svar får ej förkastas, men bör genast ändras af lär. själf och sedan omsägas riktigt af ett eller flera barn.

19. Körsvar äro lämpliga, när något skall noga inskärpas.

20. Svar i fullständig sats är ofta behöfligt vid tillämpning af tabeller.

21. Riktiga svar ändras blott då, när nya uttryck skola meddelas. Det gifna svarets riktighet från den ena

eller andra synpunkten erkännes. I uttrycket 4 × 3 kvm. har talet 4 × 3 olika namn, allt eftersom man fäster sig vid tecknet mellan fyran och trean eller vid det efterföljande sortnamnet. I förra fallet kallas det *produkt*, i senare fallet *kvm.-tal*. På beskaffenheten af lärarens fråga beror, hvilketdera namnet är riktigt. Ett icke önskadt svar, beror ofta på en oriktig fråga.

22. Vid lösning af enkla uppgifter behöfver räknesättets namn aldrig nämnas. Vid lösning af sammansatta uppgifter uppdelas de i flera enkla uppgifter såsom synes af de s. k. tankegångarna i §§ **299** och följ.

23. Förkortning i bråk motsvarar likadelning af båda de vid hela tals likadelning gifna talen.

24. Förkortning af ett bråk med flera faktorer i täljare eller nämnare eller båda verkställes förståndigt. Ibland händer annars, att den sedan kommande räkningen blir svårare, än den behöft blifva.

Ex. $\frac{18\cdot18\cdot100}{4\cdot58}$ ändras till $\frac{9\cdot9\cdot100}{58} = \frac{8100}{58}$. Delning med 58 är lika lätt som delning med det efter ytterligare förkortning uppkomna talet 29. Dessutom beaktas här bibehållandet af den först gifna faktorn 100.

25. Märk olikheten mellan frågorna: *Huru stor del af* 16 är 8? *Huru stor är* 1 *åttdel af* 16? Huru stor är den åttonde delen af 16?

26. Omedelbart efter orden del och mångfald skall alltid följa ordet af.

27. Decimalbråk och allmänt bråk sammanföras ej på följande sätt: 0,13 $\frac{13}{25}$.