Sven Lindström

DEN GRUNDLÄGGANDE RÄKNEUNDERVISNINGEN

METODISK HANDLEDNING TILL LÄROBOKEN

RÄKNA RÄTT

STOCKHOLM
HUGO GEBERS FÖRLAG

UPPSALA 1940
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.
40589

FÖRORD.

Den framställning angående den grundläggande räkneundervisningen, som här föreligger, ansluter sig till »Räkna Rätt, lärobok i räkning enligt åskådningsmetod och med långsamt stegrad svårighetsgrad», vilken utgivits på Hugo Gebers Förlag, Stockholm. Det är emellertid min förhoppning, att de anvisningar, som lämnas, skall vara av värde för den elementära räkneundervisningen över huvud.

Som redan det ringa omfånget hos föreliggande bok ger vid handen, avser den inte att vara någon fullständig metodisk handbok. Avsikten är att ge en tämligen utförlig redogörelse för den första undervisningen och att därjämte beröra en och annan fråga angående räkneundervisningen i övrigt på folkskolestadiet. Därvid upptages i regel inte några av de räknetekniska detaljer, som brukar behandlas i samband med sifferräkningen. Huvudsyftet är att framhålla den åskådliga räkningen som grund för en kommande teknisk färdighet.

Själva läroboken borde kunna användas även utanför hjälpskolan, för vars behov den kommit till. I den egentliga folkskolan undervisas för närvarande ungefär 10 000 barn, som behövde speciell undervisning på grund av psykisk efterblivenhet. Om den organisatoriska lösningen av detta problem kommer att dröja, bör dock under alla förhållanden en lärobok, som anpassats efter dessa barns förutsättningar, vara av betydelse.

Läroboken är också speciellt avsedd för lågstadiet, där behovet av åskådlighet och långsam stegring av uppgifternas svårighetsgrad är särskilt framträdande. Häftena 1—3 innehåller den räknekurs, som föreskrives för klasserna 1—2 i skolor med fullständig lärokurs.

Till dem, som granskat manuskripten till läroboken och anvisningarna eller på annat sätt visat intresse för dessa arbetens tillkomst, framföres ett varmt tack.

Linköping i oktober 1940.

Förf.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING.

I. Inledning 5—7

II. Den första undervisningen 8—31
1. Talbegreppet 8
2. Talen två, tre, fyra, ett 10
3. Talraden 12
4. Rytmisk räkning 15
5. Ökning och minskning genom räknande framåt resp. bakåt utefter talraden 16
6. Talsystemet 18
7. Sönderdelning av talen två—tio. Ökning och minskning med talbilder 20
8. Införande av sifferbeteckning 22
9. Plustecknet 25
10. Minustecknet 27
11. Likhetstecknet 27
12. Skriftlig uppställning av räkneuppgifterna 28
13. Talområdet ett—tjugo 29
14. Siffersystemet 30

III. Allmänna metodfrågor 32—48
1. Metoden 32
2. Räknemateriell 36
3. Addition 39
4. Subtraktion 40
5. Multiplikation 41
6. Division 43
7. Sorträkning. Geometri 44
8. Bråkräkning 45
9. Problemräkning 46

I. INLEDNING.

Dessa anvisningar — och den lärobok till vilken de ansluter sig — bygger på följande principer:

1. Undervisningen bör skrida framåt i långsamt tempo.
2. Den bör gå från det (ur barnens synpunkt) lättare till det svårare.
3. Endast *en* nyhet bör införas varje gång undervisningen skrider framåt.
4. Själva saken skall först göras till föremål för en grundlig behandling, innan termer och tecken införes.

Endast i fråga om den sista av dessa satser torde några egentliga meningsskiljaktigheter råda. Men även om de övriga satsernas riktighet inte bestrides, kan deras tillämpning komma att te sig något olika på grund av skiftande uppfattningar om, vad som skall betraktas som lättare och svårare, hur långsamt undervisningen bör skrida framåt o. s. v.

När det gäller att efter svårighetsgrad bestämma ordningsföljden mellan de enskilda momenten i räkneundervisningen, bör hänsyn tagas å ena sidan till uppfattningen och framställningen av själva talen, å andra sidan till förståelsen för räkneoperationerna. Det är sålunda inte tillfredsställande att ordna undervisningen endast med hänsyn till olika talområden (*ett—tio*, *ett—tjugo* o. s. v.). Även de inom olika talområden möjliga räkneoperationerna bör vara bestämmande vid uppgörande av kursplanen. Inom ett lägre talområde, t. ex. *ett—tjugo*, är en del av de möjliga räkneuppgifterna svårare än vissa av dem, som faller inom ett högre talområde, t. ex. *tjugoett—trettio*. Sålunda är uppgiften *sju* + *sex* mera krävande än uppgiften *tjugotre* + *två*, förutsatt att i båda fallen själva talbegreppen är fullt klara. Den svårighet, som det innebär att utöka talområdet till *tjugofem*, är mindre än den, som de olika tankeprocesserna vid lösandet av uppgiften *sju* + *sex* innebär. Vid huvudräkning och innan mekanisk färdighet uppnåtts, löses uppgiften *tjugotre* + *två* genom fortsatt räknande *två* steg framåt utefter talraden, under det att uppgiften *sju* + *sex* fordrar en sönderdelning och en därpå följande hopfogning av tal. Den förstnämnda räknehändelsen går alltså i en enda riktning, den senare är flerledad.

En lärogång, där hänsyn tages till utvecklingen både av talbegrepp och operationsbegrepp, skulle i sin begynnelse i korta drag te sig sålunda. Först behandlas ett lägre talområde, t. ex. *ett—tolv*, med hänsyn till uppfattning och framställning av tal. Därpå genomgås de enkla räkneoperationer, som är möjliga inom talområdet, alltså i första hand ökning och minskning med *ett*, *två* och *tre* samt senare de uppgifter, som återstår inom talområdet *ett—tio*. Därefter utökas talområdet, t. ex. till *tjugo*, och de enkla additions- och subtraktionsfallen övas. Först sedan ett ganska stort talområde, t. ex. *ett—femtio* genomarbetats på detta sätt, upptages de svårare uppgifterna med tiotalsövergång till behandling.

Att gå långsamt framåt och att vid varje utökning av stoffet endast införa *en* nyhet i taget är givetvis av särskild vikt vid undervisning av svagt begåvade barn. Det är alltså olämpligt att från början sammanställa vissa förhållanden, i tanke att de inbördes skall stödja varandra och öka förståelsen. Visserligen är det — för att anföra ett exempel — riktigt att betrakta multiplikationen som en upprepad addition med samma tal och innehållsdivisionen som en upprepad subtraktion med samma tal, men det är ur metodisk synpunkt förfelat att välja en sådan jämförelse som utgångspunkt. Å ena sidan måste den upprepade additionen och den upprepade subtraktionen övas var för sig, å andra sidan måste den upprepade ökningen resp. minskningen grundligt behandlas, innan man övergår till de förkortade beteckningssätt som multiplikationen och innehållsdivisionen innebär. Barn med svag intellektuell utrustning förvirras endast, om de ställes inför uppgifter, som fordrar ett samtidigt fasthållande i uppmärksamheten av olika moment, innan det ena av dessa intränats. Varje form av två- eller flerledade tankeprocesser bereder stora svårigheter. Här möter alltså samma förhållande som förut berörts, då det gällde svårighetsgraden hos sådana uppgifter som t. ex. *sju* + *sex* och den riktiga inplaceringen av dessa uppgifter i lärogången.

I fråga om förhållandet mellan sak å ena sidan samt ord och tecken å den andra, alltså mellan själva den räknehändelse, som skall behandlas, och de termer och förkortade beteckningssätt, som enligt vedertaget bruk därvid användes, går åsikterna isär. Enligt en del läroboksförfattare och undervisare innebär det en fördel, om sak och term resp. sak och tecken alltifrån början sammanställes. Häremot kan emellertid flera invändningar göras. Då denna fråga om sak, ord och tecken är av avgörande betydelse för hela räkneundervisningens utformning, återkommer den i olika sammanhang i det följande. Här må endast hänvisas till, vad som ovan sagts om uppmärksamhetens delning.

Den följande redogörelsen bygger — som redan antytts — på den uppfattningen, att, när ett nytt område upptages till behandling, endast själva saken till en början skall möta barnen i varierad åskådlig och motoriskt betonad framställning.

II. DEN FÖRSTA UNDERVISNINGEN.

1. Talbegreppet.

Det kan tyckas vara ett överflödigt påpekande, om man framhåller att det är **talen**, som är räkneundervisningens föremål. Men detta grundläggande faktum beaktas inte alltid i tillbörlig grad. Av olika anledningar förekommer ofta vid räkneundervisningen en forcering, som leder till ett för tidigt införande av termer och tecken. Till och med normalt utrustade barn måste lämnas god tid, om de skall kunna utveckla verkliga begrepp om talen, om dessas inbördes förhållanden, storleksförändringar o. s. v. Svagt begåvade barn kommer naturligtvis ännu långsammare fram till de brukliga abstraktionerna. Det fordras alltså långvarig övning och ofta upprepade iakttagelser, innan de kan ersätta den påtagliga verkligheten med de bekväma förkortningar i uttryckssätt och tecken, som för den vuxne är så självklara och lättillgängliga.

En mycket viktig förutsättning för ett framgångsrikt räknearbete på det elementära stadiet ligger därför i undervisarens förmåga att **tänka om** matematiken. Först måste man sålunda skala av ämnet allt som endast är speciella uttryckssätt, vedertaget bruk och i övrigt av sekundär betydelse. Alltså faller till en början hela teckensystemet med siffror och övriga skriftliga matematiska förkortningar (+, —, = o. s. v.), likaså alla speciella språkliga förkortningar (»*två* päron och *två* päron är *fyra* päron»). Men också själva talsystemet (tiotalssystemet) får överges. Kvar står endast själva talen. Men dessa uppträder till en början — och i hjälpskolan under lång tid — endast i konkreta sammanhang.

Naturligtvis är talen i rent teoretisk bemärkelse skilda inte bara från siffrorna utan också från räkneorden, och de får väl till och med anses skilda från själva tingen. Men begreppen om talen bildas på grundval av åskådningen. Därför uppträder talen alltid förbundna med ting, bilder eller symboler. Då vidare all vår reella kunskap har sin motsvarande språkliga sida, kommer kunskapen om talen att vid undervisningen från första stund förbindas med räkneorden.

De första talbegrepp, som barnet förvärvar är de obestämda talbegreppen: många — inte många o. s. v. Därefter bildas de första bestämda talbegreppen.

Vid inträdet i skolan har barnen hunnit till olika — kanske till och med mycket olika — grad av utveckling, när det gäller talbegreppet. I hjälpskolan bör undervisaren emellertid inte förutsätta några som helst klara bestämda talbegrepp vid början av barnens skolgång. Tvärtom är det lämpligt att börja undervisningen på en punkt utanför själva taluppfattningen. Eftersom talen innebär en kvantitativ bedömning av verkligheten, är de intimt förbundna med sådana begrepp som anger allmänna storleksförhållanden och läge. Det är därför inte ur vägen att, när barnen börjar sin skolgång, undersöka — och i mån av behov utveckla — deras förtrogenhet med sådana begrepp som större — mindre, längre — kortare, bredare — smalare, tjockare — tunnare, tyngre — lättare o. s. v. ävensom med lägebegreppen framför — efter, till vänster — till höger, ovanför — nedanför o. s. v. Vid dessa undersökningar och övningar är det inte fråga om någon talbestämning utan — som sagt — endast om tingens allmänna (inte med tal preciserade) storleks- och lägeförhållanden. Undersökningarna och övningarna i fråga bör företagas såväl med ting ute i det fria som med föremål i skolrummet och med hjälp av bilder.

En betydelsefull principiell fråga tangeras här, nämligen frågan huruvida begreppsbildningen bäst gynnas genom användningen av ett enda eller flera olika iakttagelseobjekt och åskådningsmedel. Det riktiga får anses vara, att ett begrepp blir bättre förankrat, om olika föremål och bilder kommer till användning för samma sak. Därigenom har man den säkraste garantien för, att själva begreppet skall lossna från det åskådade och att alltså en verklig abstraktion skall uppstå. Sålunda blir begreppen om storleks- och lägeförhållanden liksom talbegreppet bättre förankrade, om iakttagelser och övningar inte företages med ett enda åskådningsobjekt utan bedrives med hjälp av olika föremål och bilder.

De nämnda förberedande övningarna företages både som övning att uppfatta ett visst förhållande och att framställa ett begärt storleks- och lägeförhållande. Barnen får sålunda dels ange, vilken placering angivna föremål intar, och dels på tillsägelse placera föremål eller rita bilder med begärt storleks- eller lägeförhållande. Övningarna inskränker sig inte till syniakttagelser utan bör också utgestaltas som motoriska övningar (att gå, att lyfta o. s. v.). Även bedömning med hörseln bör övas; (en kort och en mer eller mindre utdragen ton).

Ur undervisningsteknisk synpunkt är att framhålla, att dessa förberedande övningar bäst företages i samband med den övriga undervisningen, särskilt hembygdsundervisningen och arbetsövningarna.

2. Talen två, tre, fyra, ett.

Läroboken 1: 1—4.

På flera ställen i den metodiska litteraturen framhålles, att talet *ett* inte utgör någon utgångspunkt för kunskapen om talen.[1] Orden »en» och »ett» får sin tydliga karaktär av räkneord, först sedan de första bestämda talbegreppen över *ett* förvärvats. Ofta sker det genom ett känslobetonat konstaterande av att det finns »bara en», »bara en enda kvar». Här som på andra punkter i räkneundervisningen gäller alltså, att den systematiska ordningen inte alltid är den ur pedagogisk synpunkt gynnsammaste. Undervisningen har att följa den ordning, som bestämmes av de psykologiska faktorerna.

När det gäller att genom undervisningen låta barnen förvärva de bestämda talbegreppen (*ett, två, tre, fyra* o. s. v.) har man anlitat två olika huvudvägar. I ena fallet har man använt någon typ av talbilder, t. ex.  o. s. v. I det andra fallet har man låtit barnen räkna utefter den vågräta talraden: ●●●●●●●●●● o. s. v. Ursprungligen uppfattades dessa metoder som oförenliga motsatser, och meningarna om deras värde gick starkt isär.

Som man finner litar talbildsmetoden till synsinnet, under det att talradsmetoden bygger på den (mer eller mindre medvetna) uppfattningen av en linjeutsträckning i rummet och av den alltmer växande tid som räknandet tar.

[1] Se t. ex. E. Fettweis, *Methodik für den Rechenunterricht.*

Av de argument, som anförts till fördel för den ena och andra metoden, intresserar här särskilt det uttalande, som Meumann gör i anslutning till utförda experiment. Han anför nämligen, att svagt begåvade elever har svårare att lära sig uppfatta tal, som framställes genom grupperade föremål än att komma till kunskap om talen genom räknande utefter talraden.

Senare har man på goda grunder börjat betrakta en kombination av de två metoderna som det riktigaste förfaringssättet.

Det största tal, som barn kan uppfatta genom överblick, alltså utan successivt räknande, anges vara *fyra* (möjligen *fem*). Talen *ett*, *två*, *tre*, *fyra* (*fem*) skulle sålunda kunna förvärvas med hjälp av talbilder. För att ta hänsyn till barnens olika föreställningstyp finns anledning att använda både talbilder och räknande utefter raden, när det gäller talområdet *ett—fyra* (*fem*). För tal högre än *fyra* (*fem*) har talbilderna sitt egentliga värde ur en annan synpunkt, nämligen som medel att införa barnen i tal-systemet. Men då det är ett stadium, som ligger högre än bildande av talbegrepp, uppskjutes användandet av talbilder för (*fem*), *sex*, *sju*, *åtta* etc. tills vidare.

De första räkneövningarna kan lätt komma att framstå som enformiga, dels på grund av att det endast gäller att förvärva begrepp om talen, inte att utföra några räkneoperationer, dels därför att man rör sig inom ett så begränsat talområde. Det torde därför vara mest ändamålsenligt att till en början endast anslå kortare stunder för räkneövningarna. Synnerligen lämpligt är det att också här kombinera räkneundervisningen med den övriga undervisningen, (räkna antalet läggstickor som skall användas, antalet inlärda bokstäver o. s. v.)

Övningarna inom talområdet *ett—fyra* (*fem*) är — liksom de tidigare nämnda övningarna med allmänna storleks- och lägeförhållanden — av två slag: uppfattning och framställning.

Början göres med talet *två*. Barnen räknar först angivna verkliga föremål och anger själva var *två* lika föremål uppträder. (Uppfattning av tal.) Vidare får de själva framställa talet *två* genom att rita enkla bilder och lägga upp *två* stickor, *två* räknebrickor eller dylikt som symboler för olika föremål (t. ex. flaggstänger, ballonger o. s. v.). Som högsta abstraktionsstadium hittills betraktas ritandet av streck, ringar och punkter i begärt antal och utläsandet av talet *två* i samma slags symboler, ritade på krittavlan eller på papper. Därvid bör emellertid streck, ringar och punkter betyda något mera konkret: träd, bollar, kulor o. s. v. och uppgiften formas som en kort berättelse.

På samma sätt behandlas talet *tre*.

Därefter kan talen *två* och *tre* sättas i förhållande till talet *ett*.

Man räknar också ljud: *tre* knackningar hördes, nu bara *en*. I gymnastiksalen övas *tre* steg framåt, *två* steg, *ett* steg. Vid läsövningarna uppsöker man och lägger fram *tre* bokstäver av samma slag, *två* bokstäver, »*en* ensam». Vid sångövningen hör barnen först *två* lika toner, sedan bara *en* ton. O. s. v.

När barnen själva med räknebrickor eller dylikt framställer talet *tre*, göres det i olika kombinationer: ••• ⋮ ∵.

Talet *fyra* behandlas på samma sätt som talet *tre* genom taluppfattning och talframställning med verkliga föremål, bilder, räknebrickor samt med ritade enkla figurer (streck, ringar och punkter). De barn, som inte genom överblick kan känna igen talet *tre* eller *fyra*, får naturligtvis identifiera talet genom successivt räknande.

Efter en behandling av talområdet *ett—fyra* (*fem*) efter de riktlinjer, som här uppdragits, studerar barnen sid. 1—4 i lärobokens första häfte. Naturligtvis bör dessa sidor inte bara ge anledning till beaktande av de framställda talen utan också till samtal om de avbildade tingen själva, så att bilderna får ett levande innehåll.

3. Talraden.

Läroboken 1: 5—12.

Även beträffande talet *fem* skulle man kunna försöka samma behandling som ifråga om talområdet *ett—fyra*. Man har därvid att tillgå det naturliga åskådningsmedel som handen med dess *fem* fingrar erbjuder.

När det gäller talen över *fem* bör man dock under alla förhållanden övergå till talraden och tills vidare utesluta varje annan form av gruppering än den vågräta raden. Talet *sex* blir alltså det som »kommer efter *fem*» etc.

Man lär emellertid inte bara in talraden som en ordramsa utan illustrerar den alltid med olika föremål, ordnade i rad (barn, bänkar, klädhängare o. s. v.), med olika ritade enkla bilder, med kulor, räknebrickor etc. samt med streck, ringar och punkter. Man ordnar till en början föremål och bilder i vågräta rader och räknar alltid från vänster till höger. Senare kan man införa lodräta rader (räknade nerifrån—uppåt) och även andra former av rader, t. ex. trappsteg. Räknande av ljud övas som förut (klockans slag), likaså föremål i rörelse. Man räknar steg, armsträckningar, huvudböjningar o. s. v.

Liksom förut skiljer man på taluppfattning och talframställning.

Hur långt man skall låta talraden växa vid dessa första räkneövningar kan få bli beroende av barnens förmåga. Att göra halt just vid talet *tio* och att redan nu ge detta tal en särskild karaktär, finns emellertid ingen anledning till. Det gäller nämligen inte att införa barnen i talsystemet utan endast att göra dem förtrogna med den successivt växande talraden, där talet *tio* är ett tal precis som alla övriga. Då emellertid inlärandet av nya räkneord undan för undan innebär en viss svårighet, nödgas man av denna anledning starkt begränsa talraden till en början. Skall ett verkligt begrepp om talen kunna bildas, måste dock talraden byggas ut åtminstone till *tolv*, gärna till *femton* eller *tjugo*, innan räkneoperationerna börjar övas.

Det är av vikt, att barnen inte förväxlar grundtal och ordningstal. För att det skall stå klart, att t. ex. talet *sju* betyder hela raden från och med *ett* till och med *sju*, är det lämpligt att låta barnen (då så är möjligt) göra en sammanfattande rörelse med handen, när de vid räknandet kommit till radens slut. När grundtalen behärskas, lär man in ordningstalen. Om själva orden därvidlag bereder svårigheter, kan man använda uttrycken »nummer *ett*», »nummer *två*» etc. i stället för »första», »andra» o. s. v.

Att låta barnen räkna först med verkliga föremål, därefter med bilder av verkliga föremål, med olika slag av speciella räkneföremål, som får betyda människor, djur etc., samt slutligen med streck, ringar och punkter som symboler, innebär att långsamt och metodiskt öka graden av abstraktionssvårighet. Vill man ytterligare indela övningarna efter abstraktionssvårighet, kan man följa Kuhnels[1]

[1] Värdet av att vid den elementära undervisningen i räkning framställa talen med ting eller bilder ordnade i rad framhålles av flera räknemetodiker. Johannes Kuhnels utredning om saken (i *Neubau des Rechenunterrichts*) torde vara en av de utförligaste.

anvisning och låta räknandet ske först med beröring och förflyttning av föremålen, sedan med beröring utan förflyttning, därefter utan beröring men med utpekande av varje enskilt föremål och slutligen endast med blicken (varvid barn gärna vill ackompanjera räknandet med nickningar).

Här anföres några ex. på räkneövningar av ovan antytt slag.

Ex. 1. Barnen leker buss. Resande stiger på och av. Antalet resande avräknas varje gång. (Någon övning i addition eller subtraktion avses givetvis inte med denna eller följande övningar i detta kapitel.)

Ex. 2. Bänklocket är en åker. En man går och sår. En flock sparvar slår ner på åkern. (Undervisaren lägger ut ett lika antal räknebrickor hos varje barn eller på bordet framför gruppen.) Brickorna får vara sparvarna. Räkna dem! Tag *en* i taget och flytta åt vänster! — *Tre* sparvar kommer till. Räkna nu hela raden (på samma sätt som förut)! *Fem* sparvar flyger bort. Räkna bort från slutet! Räkna dem som är kvar! (Som förut.)

Ex. 3. Det är i gåstiden. En handlande har *tolv* gäss. Lägg upp *tolv* brickor i rad! En fru som har matgäster köper *fyra* gäss. Räkna bort från slutet! Räkna dem som är kvar men utan att flytta dem! Herr Blad köper *två* gäss. O. s. v.

Ex. 4. Ni skall rita pepparkakor. Rita så många ringar ni hinner, tills jag säger stopp! Räkna hur många det blev!

Ex. 5. Hans och Greta har plockat fallfrukt. De har plockat opp *tio* äpplen. Rita *tio* ringar i rad! Mor synar äpplena. *Tre* är odugliga och kastas bort. Räkna från slutet och stryk över! Hans får *två*. Räkna från slutet och stryk över! Räkna dem som är kvar! (Från vänster.)

Ex. 6. Räkning av ljud. — Klockan slår. *Tre* slag: Nils slutar skolan. *Fem* slag: Pappa slutar arbetet. O. s. v.

Sedan man genom övningar av ovan angivet slag behandlat talen *sex—tolv* (ev. gått något längre utefter talraden), kan man övergå till läroboken sid. 6—12. Som man finner har varje tal, här liksom förut från och med sid. 2, fått sin egen sida. På sid. 5—9, 11—12 framställes inte bara det nya talet varje gång, utan också det eller de närmast föregående. Därmed avses inte att lämna stoff för räkneoperationer utan endast att ge en synbild av, hur talraden växer med varje nytt tal. Sidorna 10, 11 och 12 har var för sig givits ett enhetligt innehåll med bilderna samlade kring ämnena »skolan», »trädgården» och »hos snickaren».

4. Rytmisk räkning.

Läroboken 1: 13—14.

Om man vid räknande utefter talraden betonar t. ex. vartannat eller vart tredje tal och gör en paus efter varje tal, som betonas, inträder en viss rytm: *ett*, ***två***; *tre*, ***fyra***; *fem*, ***sex***; o. s. v. Eller: *ett*, *två*, ***tre***; *fyra*, *fem*, ***sex***; *sju*, *åtta*, ***nio***; o. s. v. Rytmen kan markeras genom rörelse, t. ex. marsch med märkessteg på de betonade talen, taktslagning etc.

Vid räkning med speciella räkneföremål eller enkla ritade figurer ordnas dessa utefter en vågrät linje och grupperas med mellanrum alltefter rytmen: [redacted] o. s. v. [redacted] o. s. v.

Den rytmiska räkningen är en variation av radräknandet, och barnen brukar finna den lustig som omväxling och som ett nyförvärv i räknefärdigheten. Additionen med *två* och *tre* får stöd av räkningen i *två*- och *tre*-rytm. Den gruppering av talen, som sker genom rytmisk räkning, kan betraktas som en övergångsform mellan den upprepade ökningen med *en* enhet i taget och den omedelbara ökningen med en hel talgrupp på *två* eller *tre* enheter.

Om ett allt för stort antal elever — t. ex. i hjälpklass — skulle visa sig ha svårt för den rytmiska räkningen, behöver den inte betraktas som något absolut nödvändigt led i undervisningen. Man kan i så fall spara den och endast låta den utgöra förberedelse till multiplikationsförfarandet (under tredje hjälpskoleåret).

Som förberedelse till multiplikationen varieras den rytmiska räkningen lämpligen på följande sätt:

1) Det sista räkneordet i varje period betonas. (Se ovan!)

2) De obetonade räkneorden inom perioden uttalas med viskande röst, det sista i perioden som förut med kraftig röst.

3) De obetonade räkneorden endast tänkes.

4) Den tredje formen övas, tills serien kan räknas genom att endast periodens sista tal fixeras i medvetandet: *två*, *fyra*, *sex*, *åtta* o. s. v.; *tre*, *sex*, *nio*, *tolv* o. s. v.

5. Ökning och minskning genom räknande framåt resp. bakåt utefter talraden.

Läroboken 1: 15—23.

Ordningstalen.

Om talraden lagts ut t. ex. till *sju* och ytterligare *ett* lägges ut, är det den åttonde, som kommer till. För att göra en klar skillnad mellan den (eller dem), som kommer till, och det resultat, som då uppstår, skulle det alltså vara till fördel, om barnen kände såväl ordningstal som grundtal. Om det visar sig, att inlärandet av ordningstalen bereder stora svårigheter, kan man — som förut påpekats — hjälpa sig fram genom att benämna de enskilda talen i talraden för »nummer ett», »nummer två» o. s. v. Man samtalar då först om tidningsnummer, bilnummer, telefonnummer, husnummer (som dock fordrar sin särskilda behandling på grund av uppdelningen i udda och jämna), löpares nummer (startnummer och nummer på prislistan) o. s. v. Det ligger stor vikt på, att man övar grundligt, så att skillnaden mellan t. ex. *fem* stycken och att vara »nummer fem» (den femte) klargöres. Som förut framhållits bör barnen därför, när de lagt upp en rad på t. ex. *fem*, göra en sammanfattande rörelse kring raden, men de visar fram eller pekar på »nummer fem» (den femte). En del exercis med räknemateriellen bör så småningom inskärpa skillnaden.

Ökning.

När barnen har talraden klar t. ex. till *tolv*, övar man enkla ökningsuppgifter med användande av verkliga föremål, bilder o. s. v. Har man lagt ut en talrad med t. ex. *nio* stycken, och *två* kommer till, räknar man direkt från *nio*: *tio, elva.* Att hela talraden då består av *elva* stycken är nog inte alltid omedelbart klart för barnen, men efter tålmodig upprepning ökas förståelsen. Till en början prövar man att det stämmer genom att räkna hela raden från början till slut. Övningarna börjar på enklaste sätt genom att endast *ett* kommer till varje gång. Man varierar övningarna på olika sätt. Sålunda räknas först i vågrät riktning, sedan i lodrät (klättra uppför en stege). Att börja med utföres allting med verkliga föremål. Sedan går man över till räkning med bilder, räknebrickor och ritade enkla figurer. För lösande av ökningsuppgifter i bildframställning ger läroboken en del material. Slutligen kan man våga sig på försöket att lösa uppgifterna med endast inre åskådning. »Tänk er att vi har en stege! Olle står på pinnen nummer *nio*. Nu kliver han opp *två* pinnhål. Vart kommer han då?» O. s. v. Lyckas inget av barnen att lösa uppgiften, har saken tydligen kommit för tidigt.

Man övar på angivet sätt räknande framåt utefter talraden och klättring uppför talstegen med *ett, två* och *tre* i taget.

Minskning.

Man börjar med att lära in talraden bakåt från *tolv* till *ett*. Minskning sker som räkning bakåt utefter talraden, med *ett, två* och *tre* i taget. Man räknar med verkliga föremål, bilder, räknebrickor, ritade enkla figurer och slutligen (om möjligt) i föreställningen.

Om barnen grundligt övar de uppgifter, som hittills beskrivits, bör de förvärva en mycket betydelsefull kunskap. De får uppfattning både om talen som sådana och om deras storleksförändringar. De bör få en inre bild av talen som en längre eller kortare rad och en bild av hur denna rad växer och krymper. Denna föreställning om talraden utgör grunden för räkneförmågan. Man får därför inte anse det som »bortkastad tid» att syssla med dessa övningar, även om de inte ger några påtagliga resultat i form av inlärda svar, och trots att de inte är förbundna med sifferskrivning. Även om man för de angivna övningarna skulle anslå lång tid, är denna väl använd.

Exempel på ökning.

1. Far sätter opp ett staket. Nisse bär fram spjälor. Far spikar fast dem. Nu han han spikat fast *sex* spjälor. Nisse kommer med *tre* nya spjälor.

2. När tåget kom till X station, hade det *tio* vagnar. I X satte man till *två* vagnar.

3. Lisa plockar smultron. Hon trär dem på ett strå. Hon har hittat *åtta* stycken. Nu hittar hon *tre* till.

4. Anders klättrar på stegen. Han står på pinnen nummer *sju*. Nu kliver han opp *två* pinnhål.

Slutligen (på försök och efter många uppgifter av ovanstående typ) Vi har *fem*; lägg till *två* o. s. v.

Exempel på minskning.

1. Erik slår käglor. *Åtta* käglor står i rad. I första kastet slår han ner *två* käglor. Hur många står kvar?

(Anm. Enligt vissa undersökningar skulle barnen senare komma till förståelse för subtraktionen än för additionen. De är till en början inte klart medvetna om, att resten står i förhållande till den ursprungliga mängden. Därför skulle man inte utan vidare kunna förutsätta, att de inser, vad man kan räkna ut i uppgifter som den nyss anförda och följande.)

2—4. Genom omvändning av ökningsuppgifterna 2—4 ovan erhålles minskningsuppgifter (kopplade ifrån, åt upp, klättrade ner).

Slutligen (på försök och efter många konkreta exempel): Vi har *sju*; tag bort *tre* o. s. v.

Skulle minskningsuppgifterna fortsättas, tills ingenting finns kvar av raden, uttryckes detta med »ingenting kvar». »Talet noll» är än så länge en obegriplighet.

Exempel på blandade uppgifter.

1. *Fem* flickor gick ut för att plocka blommor. Så kom Lisa, Stina och Greta och ville följa med. (Hur många var det nu?) Vera och Lisa går åt ett annat håll i hagen än de andra. (Räkna!) Rut plockar *tre* gullvivor, *två* liljekonvaljer och *två* violer. (Räkna!) O. s. v.

2. En skolpojkes dag. Han stiger opp. Klockan slår strax. Räkna slagen! Han har flera syskon, som skall i skolan. Det är Erik, Anna, Lisa och Per. Hur många pojkar? Hur många flickor? Hur många barn? O. s. v.

3. Karl har *nio* spelkulor. Han spelar och förlorar *tre*. Sedan vinner han *två*. O. s. v.

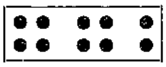
6. Talsystemet.

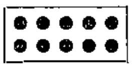
Läroboken 1: 24—25.

För införande i det vanliga **tal**-systemet (alltså med uppskjutande tills vidare av **siffer**-systemet) bör man till en början välja åskådningsmedel, som gör det möjligt att urskilja enheterna, även när de sammanförts till tiotal. Alltså lämpar sig något slag av pinnar, som buntas ihop till tiotal. Även de s. k. talbilderna bör komma till användning.

Talbilderna framställer talen med små cirkelytor (punkter) i mörk färg på ljus botten. Flera olika system finns utarbetade.

Om de enskilda punkterna i varje talbild inramas var för sig, inverkar det hindrande på uppfattningen av hela grupper och verkar tröttande i längden. Därför brukar i regel endast grupperna inramas, så att t. ex. talet *femton* framställes genom en inramad »tia» med en inramad »femma» till höger. När barnen vunnit förtrogenhet med talbilderna, torde dessa kunna användas utan ram, under förutsättning att ett tillräckligt stort avstånd markerar de olika grupperna.

Ett av de vanligare talbildssystemen är uppbyggt enligt en dubbelgruppering, dels en fyra-, dels en tiogruppering. Fyra-grupperingen avser att underlätta uppfattningen av själva talen, under det att tiogrupperingen inför i det vanliga talsystemet. Talet *tio* erhåller alltså detta utseende . Denna typ av talbilder kallas i fortsättningen typ I eller system I.

En annan vanlig form av talbilder har endast tiogrupperingen. Talet *tio* framställes följaktligen på detta sätt . Dessa talbilder betecknas i det följande som typ II eller system II.

Enligt en av Lay företagen undersökning, som omnämnes av Walsemann (i *Anschauungslehre der Rechenkunst*) skulle typ I ha företräde framför typ II. Walsemann själv har emellertid vid experiment kommit till motsatt resultat. Vid jämförelse mellan talbilden för *nio* enligt det av Lay rekommenderade system I (nio = ) och enligt system II (nio = ) fick Walsemann vid 864 bestämningar av vardera typen 84 fel för den förstnämnda och 61 för den sistnämnda.

Även vid andra av Walsemann företagna undersökningar, t. ex. uppdelning av en talbild i två grupper genom användande av olika färger, gav typ II lägre felprocent. Walsemann lämnar också förklaring till det motsatta resultatet av sina egna och Lays undersökningar. Tager man del av denna utredning, vill man tillerkänna Walsemanns undersökning den större tillförlitligheten. Sålunda har Lay bl. a. låtit försökspersonerna fixera resultatet i punkter och inte i siffror, vilket tydligen gynnat talbilderna enligt system I. Dessa har kunnat korrekt återges genom att deras olika delar reproducerats, utan att därför det hela behövt bestämmas och alltså inte heller med säkerhet varit klart uppfattat. Walsemanns protokoll över de av honom gjorda undersökningarna upptar också ett fall, då ett svagt begåvat barn ej följt instruktionen att ange talbilderna av typ I med en enda siffra utan skrivit en siffra för var och en av talbildens delgrupper och följaktligen återgivit *nio* (∷ ∷ •) som 4, 4, 1.

Talbildssystemet II är för övrigt att föredra redan av den anledningen, att det framställer tiotalen odelade. Talbildernas främsta uppgift är just att införa i tiotalssystemet och åskådliggöra räkneoperationer med stöd av detta system.

Som inledning till behandlingen av tiotalssystemet kan man räkna upp tio enheter i två-rytm. Barnen lägger föremål eller räknebrickor i två-gruppering utefter en rad: ●● ●● ●● ●● ●●. Man påvisar sedan att det finns en annan möjlighet: ∶ ∶ ∶ ∶ ∶. Allt ifrån början vänjes barnen att läsa ut en sådan rad i följande ordning:

ett tre fem sju nio
två fyra sex åtta tio

Själva uppställningen i par känner barnen antagligen redan till. En del övningar inskärper denna form för ordnande av enheterna i ett tal: uppställning på två led, sista paret ut, teckning av trädrader, fönster o. s. v. Övningarna företages som förut med verkliga föremål, bilder, speciell räknemateriell och ritade enkla figurer.

7. Sönderdelning av talen två—tio. Ökning och minskning med talbilder.

Läroboken 1: 26—33.

Förut har ökning och minskning med *ett*, *två* och *tre* övats genom räknande framåt resp. bakåt utefter talraden. En del av eleverna kommer måhända att under en längre tid utföra dessa uppgifter genom tillfogande resp. borttagande av *en* enhet i taget. Denna form för ökning och minskning måste också vara utgångspunkten, för den händelse man överhuvud taget avser att bibringa räkneförmåga och inte endast mekaniskt inlärande av färdiga svar. Så småningom kommer åtminstone en del av eleverna genom radräknandet över till mekanisk färdighet i ökning och minskning med *två* och *tre* i taget. Förr eller senare måste man emellertid öva ökning och minskning med hela talgrupper. En god förberedelse härtill utgör sönderdelningen av talen *två—tio* i två (lika eller olika stora) delar. Denna sönderdelning av talen inom det första tiotalet utgör också en förberedelse för lösningen av sådana uppgifter, vid vilka man kompletterar (vid addition) resp. går ner till (vid subtraktion) närmaste hela tiotal. Sådana uppgifter med markerad tiotals-övergång övas emellertid först betydligt senare.

Som utgångspunkt för övningarna att dela sönder tal kan man t. ex. ge uppgiften att gissa fördelningen av pojkar och flickor i en familj, som har *tre* barn. Det förutsättes att både pojkar och flickor finns, ty uppdelningen *tre* och *noll* saknar betydelse i det här sammanhanget. Förhållandet demonstreras med *tre* elever. Nya uppgifter ställes sedan, där det gäller *två* barn, *fyra* barn o. s. v.

Liknande uppgifter är det lätt att komponera. Här ytterligare några ex.

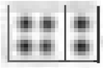
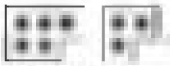
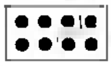
Rita *sju* ringar! Det är *sju* ballonger, som ballongmannen har kvar. En del ballonger är röda, en del är blå. Färga som ni tror, att det är!

I ett hus finns *sex* fönster åt gatan. En kväll lyste det i en del fönster, i en del var det mörkt. (Ritas eller lägges med räknelappar.)

Hemma hos Valter finns det i tamburen *tio* krokar att hänga ytterkläder på. På några hängde det kläder, men de andra var tomma.

En variation av dessa övningar utgör den bekanta leken, då något av barnen gömmer ett antal föremål i högra och vänstra handen, och de övriga får gissa hur det angivna antalet fördelats. Uppgiften blir tydligen enklast, om det bara gäller att avgöra, hur många som finns i »ena» och »andra» handen, under det att flera möjligheter uppstår, om man skall gissa, hur många som finns i »högra» och »vänstra» handen.

Efter en rad av sådana övningar går man över till räkning med talbilder. Först göres barnen förtrogna med själva talbilderna (1: 24—25), varefter sönderdelning av tal övas, genom att lösa talbilder klippes sönder på olika sätt. Sedan kan barnen försöka att lösa samma uppgifter genom att endast föreställa sig sönderdelningen (1: 26).

Det bör genom dessa övningar bli klart, att talbilderna också kan sättas ihop, så att nya, större tal erhålles. Lägges talbilden för *två* intill talbilden för *fyra*, erhålles talbilden för *sex*:  Den sammanfogade talbilden utbytes mot en hel »sexa». På samma sätt övas sammanläggning av *åtta* och *två*, *sex* och *två*, *två* och *två*; *sex* och *tre*, *fyra* och *tre* o. s. v.; *sex* och *fyra* etc. — Om talbilderna för *fem* och *tre* lägges intill varandra, erhålles ingen ny talbild:  Har det inte redan blivit klart för barnen, får man alltså påpeka, att »trean» kan vändas, så att den passar in i »femman»:  Den hopfogade »åttan» utbytes mot en hel »åtta». På samma sätt övas *sju* och *tre* o. s. v.

Ökning och minskning med *ett*, *två* och *tre* med hjälp av talbilder innebär tydligen inte någon större nyhet, eftersom dessa uppgifter förut övats genom räknande framåt resp. bakåt utefter talraden. Med talbilderna åskådliggöres nu, att sådana uppgifter som t. ex. *två* och *fyra* kan lösas genom omflyttning av talen, så att man får den redan kända uppgiften *fyra* och *två*.

Således övas med talbilder följande ökningsuppgifter: 1) ökning med *ett*, *två* och *tre* (förut övade genom räkning framåt utefter raden), 2) omvändning av sådana uppgifter som *ett* och *åtta*, *två* och *fem* etc., 3) uppgifterna *fyra* och *fyra*, *fem* och *fyra*, *sex* och *fyra* samt *fem* och *fem*.

Sedan dessa ökningsuppgifter lagts med lösa talbilder, behandlas lärobokens uppgifter (1: 27—30). Det gäller därvid för barnen att föreställa sig resultatet av de med bilder tecknade uppgifterna.

På liknande sätt behandlas minskningsuppgifterna inom talområdet, dels minskning med *ett*, *två* och *tre* (som redan övats genom räknande bakåt utefter talraden), dels minskning med större tal än *tre*. Efter räkning med lösa talbilder löses lärobokens med bilder tecknade minskningsuppgifter. (1: 31—33.)

8. Införande av sifferbeteckning.

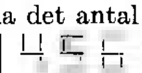
Läroboken 1: 34—35.

Om en sammanfattning av det hittills genomgångna göres, så skulle barnen nu vara förtrogna med

1) själva talen från och med *ett* till och med *tolv* (ev. något längre);
2) ökning med *ett*, *två* och *tre* inom talområdet *ett—tolv* (eller längre);
3) minskning med *ett*, *två* och *tre* inom samma talområde;
4) det första tiotalet i talbilder;
5) sammanläggning inom talområdet *ett—tio* (alla möjligheter);
6) minskning inom talområdet *ett—tio* (alla möjligheter).

Vid arbetet med dessa uppgifter har använts verkliga föremål, bilder av verkliga föremål, speciella räkneföremål och enkla ritade figurer (ringar, streck och punkter). När det är psykologiskt motiverat att införa siffrorna som talens tecken, kan svårligen med bestämdhet fastställas i en kursplan. Meningarna i denna fråga är för övrigt delade. Å ena sidan finns det undervisare, som inför siffrorna så gott som omedelbart, men å andra sidan möter man ofta rådet att uppskjuta användandet av sifferskriften för lång tid — ibland föreslås till slutet av andra skolåret. Om man som riktiga betraktar principerna att gå från det konkreta till det abstrakta och att inte införa mer än *ett* nytt moment för varje gång undervisningen skrider framåt, så måste därav följa, att man inte lär in siffrorna allt ifrån början parallellt med de olika talen. Först när barnen riktigt kan ange åskådligt framställda tal åtminstone inom talområdet *ett—tolv* (gärna något längre) och omvänt kan riktigt framställa dessa tal, när de anges med räkneord, finns anledning att överväga bruket av siffror som talens symboler. Det kan nämligen inte vara riktigt att ersätta saken eller en åskådlig symbol (talbilden) med en mera abstrakt (siffrorna), innan förtrogenhet vunnits med saken och den åskådliga symbolen. Tidigare än vid den punkt, som undervisningen hunnit till enligt ovanstående översikt, bör siffrorna i varje fall inte komma.

I en del framställningar angående den första räkneundervisningen lämnas anvisningar om, hur siffrorna skall kunna presenteras i så intressant form som möjligt. Siffrorna får därför gestalt av olika varelser eller föremål. Själva siffran tryckes med kraftiga linjer och kompletteras med tunnare eller punkterade linjer, så att 1 blir en piska, 2 göres till en pappersdrake, 3 är en sittande katt o. s. v. Framställningen torde roa barnen och har således ett visst värde.

Ett annat sätt är att först lägga siffrorna med stickor och därvid använda det antal stickor för varje siffra, som siffran själv representerar: |  ×. Tydligen kan inte alla siffror naturligt framställas på det sättet.

Ibland ger man siffrorna extra namn, som skall antyda deras utseende: 1 = piska, 2 = svan, 3 = halv kringla, 4 = upp- och nedvänd stol o. s. v.

Vilket sätt man än väljer för att introducera siffrorna, måste naturligtvis deras betydelse ordentligt läras in. Barnen övas alltså att med siffror beteckna konkret framställda tal (till en början fr. o. m. 1 t. o. m. 9), som alltså framställts med verkliga föremål, bilder, räknelappar, stickor, streck, punkter o. s. v. Men övningarna får också omvänt innebära framställning av tal, som betecknats med siffror (t. ex. på krittavlan), genom att barnen lägger fram föremål eller ritar bilder, streck, ringar o. s. v. i det antal, som motsvarar de uppskrivna siffrorna. För de förstnämnda övningarna lämnar läroboken många uppgifter. Man kan nämligen nu gå tillbaka till de sidor i läroboken, som behandlats, innan siffrorna införts, men nu låta övningen gälla att beteckna de åskådligt framställda talen (1—9) med siffror.

Det råder alltså en avgörande skillnad mellan den lärogång, vid vilken siffrorna införes undan för undan på samma gång som varje enskilt tal behandlas, och den här rekommenderade att först behandla en rad av tal (förslagsvis *ett—tolv*), innan någon som helst sifferskrivning börjar. Ibland brukar som försvar för den tidigt började sifferskrivningen anföras, att barnen behöver siffrorna »som stöd för minnet». Men det enda som barnen att börja med skall hålla i minnet är **talen.** Stödet för taluppfattningen skall naturligtvis erhållas genom de verkliga föremål, de bilder, den åskådningsmateriell samt de ritade streck, ringar o. s. v., som verkligen framställer de givna talen.

Innan barnen fått erfarenhet av åtminstone de *tolv* eller *femton* första talen i talraden, kan ett säkert talbegrepp inte komma till stånd. Därför att ett enda eller ett par tal (t. ex. de tre första) blivit behandlade, har inte något talbegrepp utvecklats. Det är alltså inte välbetänkt att alltifrån början sammanställa tal och motsvarande siffra.

I samband med frågan om tal och siffror må det vara tillåtet att påpeka en detalj angående terminologien. När räkneuppgifter, tecknade med siffror, börjar förekomma i läroboken, och man alltså skall förklara för barnen, att en del siffror anger uppgifternas nummer, bör man inte kalla räkneuppgifterna för »tal». Det är bättre att reservera ordet »tal» för dess egentliga betydelse i räkneundervisningen och konsekvent kalla förekommande uppgifter för räkneuppgifter, hemuppgifter o. s. v.

9. Plustecknet.

Läroboken 1: 36—37.

Införande av plustecknet för addition bör utgöra en särskild undervisningsenhet med särskild övningsperiod, införande av minustecknet för subtraktion en annan och införande av likhetstecknet en tredje. Förståelse för dessa tecken förutsätter en hög grad av abstraktionsförmåga. Särskilt gäller detta likhetstecknet, som därför sparas till sist.

Att börja med betyder + alltid något konkret, t. ex. fick, hittade, plockade upp, steg in (bland de andra) etc. Man utgår alltså från någon »räknehistoria», som får »spelas» av barnen. En bänkrad föreställer en buss. Det sitter 6 personer i bussen. Vid nästa hållplats stiger 3 nya in. — De uppträdande talen kan barnen redan representera med siffror. Problemet blir alltså, hur man skall visa att talen 6 och 3 skall föras tillsamman eller sättas ihop. Jämförelse kan göras med hur man binder ihop saker, limmar ihop dem, spikar ihop dem o. s. v. Man konstaterar sedan, att när man sätter ihop tal, visar man det med tecknet +. Flera »historier» behandlas grundligt på samma sätt. Uppgifter i stil med dem på sidan 36—37 i lärobokens första häfte skrives sedan en i taget på krittavlan. Man går först igenom samtliga uppgifter eller en del av dem och låter därvid hela tiden tecknet + betyda »fick». Först ger undervisaren ett antal konkreta uppgifter till sifferuppgifterna: Lisa hade 2 sagoböcker. På sin födelsedag fick hon en ny o. s. v.

Efter att ett antal sådana uppgifter genomgåtts, får barnen försöka att själva hitta på »räknehistorier» med »fick» till sifferuppgifter, som skrivits upp på krittavlan.

Därefter genomgås samma uppgifter varvid man låter + betyda »hittade». Först berättar undervisaren »räknehistorier» sedan barnen.

På samma sätt behandlar man ett flertal räknehistorier i följd för var och en av typerna »plockade» (fallfrukt, blommor), »resande stiger in i bussen» etc.

Först efter en ingående behandling på angivet sätt med konkreta (i mån av behov »dramatiskt» utförda) uppgifter kan man övergå till det abstrakta uttryckssättet med »och». Det är av utomordentlig betydelse, att dessa uppgifter behandlas grundligt, åskådligt och gärna »dramatiskt». Den uppfattning av inlärningsförloppet, som kommit till uttryck bland annat i vissa anvisningar för individuellt arbete i räkning, nämligen att barnen först lär in det mekaniska förfaringssättet vid lösandet av rena sifferuppgifter och sedan »tillämpar» denna kunskap på praktiska uppgifter, är felaktig. Kunskapen uppstår inte — allra minst hos svagt begåvade barn — genom en så ensidigt intellektuell akt. Sedan talbegreppet blivit klart, skall barnen tvärtom räkna allehanda verkliga uppgifter, så att de på olika sätt (även motoriskt) upplever vad som tilldrar sig i verkligheten. De skall alltså med syn, hörsel, känsel och rörelsesinne förnimma t. ex. en öknings- eller minskningsprocess. Den enklaste symbolen för dessa tvenne processer är talraden, som växer respektive krymper. Ur denna upplevelse (som ingalunda är enbart intellektuell i inskränkt bemärkelse) uppstår så småningom den rent mekaniska färdigheten. När det sedan gäller att lösa additions- eller subtraktionsuppgifter, som förut inte direkt övats, sker detta inte därigenom att den förvärvade mekaniska färdigheten genom en logisk akt överföres till det aktuella fallet utan på grundvalen av alla de konkreta fall, där någon »fick», »hittade» etc.

Det primära är alltså själva »räkneupplevelsen», inte den mekaniska färdigheten. Anknytes inte begreppen ökning, minskning, delning o. s. v. till en rikedom av öknings-, minsknings-, delnings- och andra räkne-»upplevelser», så uppstår den av alla undervisare konstaterade klyftan mellan barnens mekaniska räknefärdighet och förmåga att lösa s. k. problem eller praktiska uppgifter.

Lärobokens uppgifter (1: 36—37) studeras nu gemensamt. Därefter kan barnen få lösa dessa uppgifter individuellt. De antecknar svaren (ej själva uppgifterna) i lodräta rader i sina räknehäften.

Uppgifterna i läroboken är av enklaste slag, då de måste hållas inom ett område, där summan inte överstiger 9, och det främst gäller att öva tolkning av tecknen.

10. Minustecknet.

Läroboken 1: 38—39.

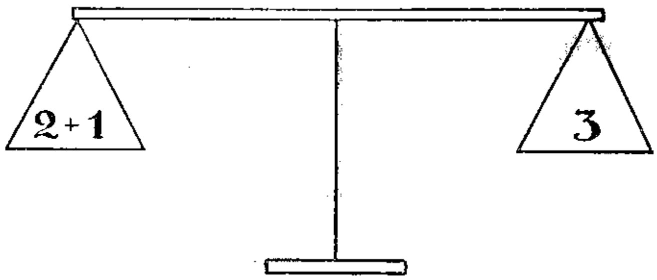
På motsvarande sätt som plustecknet inläres minustecknet. Jämförelse kan göras med hur man klipper bort, sågar av, hugger bort etc. I följd behandlas ett antal uppgifter, som alla är av typen »gav bort». Därefter följer ett antal uppgifter, där man »säljer». Sedan kommer uppgifter med »tappar», »äter upp», »resande stiger av» etc. Barnen får också försöka att själva hitta på »räknehistorier».

Efter gemensam genomgång av uppgifterna i läroboken (häft. I sid. 38—39) övas individuellt med samma uppgifter. Barnen antecknar svaren (ej själva uppgifterna). Subtraktionsuppgifterna är av enklaste slag och av motsvarande typ som de närmast föregående additionsuppgifterna.

11. Likhetstecknet.

Läroboken 1: 42—46.

När likhetstecknet införes, får det först formen av en våg, vars vågarm ritas med dubbla streck.



Ett flertal uppgifter behandlas på detta sätt med en fullt utritad våg.

Efter någon tid förenklar man vågen och låter den bestå endast av vågarmen:

$$3 + 2 \;=\!=\!=\!=\; 5$$

Sedan ett antal sådana uppgifter behandlats, kan uppgifterna i läroboken ges till individuellt arbete. I motsats till vad som tidigare varit fallet skriver nu barnen först av uppgiften efter läroboken och sätter sedan ut svaret efter »vågarmen».

Sedan dessa övningar avslutats, kommer man överens om, att det är bekvämare att skriva en kortare vågarm, och man är alltså framme vid likhetstecknet.

12. Skriftlig uppställning av räkneuppgifterna.

Läroboken 1: 47.

När man lärt in siffrorna, plustecknet, minustecknet och likhetstecknet, övas den ena av de två vanliga formerna för skriftlig uppställning av räkneuppgifterna, nämligen med siffror och operationstecken i vågräta rader. Uppställningen med talen under varandra för uträkning enligt den speciella formen för skriftlig räkning med större tal tillämpas först längre fram.

Läroböckernas uppgifter för skriftlig räkning är i allmänhet dels uppgifter med text och siffror, dels uppgifter med endast siffror. I första häftet av läroboken *Räkna Rätt* förekommer räkneuppgifter med text endast på sid. 50, som behandlar veckans dagar. De avser emellertid mindre att vara räkneuppgifter än att ge innehåll åt behandlingen av dagarna. Uppgifterna löses genom huvudräkning, och svaren kan erhållas genom att dagarna räknas en och en på det schema, som finns i läroboken.

I övrigt innehåller första häftet endast sifferuppgifter för den skriftliga räkningen — med undantag för ett par sidor med mynt, centimeter och bilder till »räknehistorier». Det innebär inte, att barnen huvudsakligen skall övas i mekanisk räkning, sedan siffrorna inlärts. De skall tvärtom vänjas att föreställa sig verkliga föremål och händelser i samband med sifferuppgifterna. Varje sida med sifferuppgifter behandlas alltså först muntligt. Barnen får berätta »räknehistorier» till sifferuppgifterna och tolka plustecknet som »fick», »hittade», »vann» etc. samt minustecknet som »gav bort», »tappade», »förlorade» etc. Efter en sådan muntlig behandling räknas sifferuppgifterna individuellt.

Övningarna att använda de speciella räknetecknen företages också i omvänd riktning. Barnen får alltså överföra olika enkla situationer till det kortfattade skrivsättet med siffror, +, — och =. För sådan behandling lämpar sig emellertid än så länge inte de vanliga textuppgifterna. I stället användes bilder med lätt tolkade räknehändelser.

Man kan nu gå tillbaka till sid. 15—23 och behandla de uppgifter, som förut övats utan siffror och operationstecken. Sid. 51 har också »räknehistorier», framställda i bilder. Först berättar barnen muntligt, vad bilderna framställer, och får sedan översätta dem med de speciella räknetecknen. Nya sådana uppgifter torde utan större svårighet kunna framställas på krittavlan t. ex. genom att lärobokens motiv användes men med andra talförhållanden.

13. Talområdet ett—tjugo.

Läroboken 2: 1—14.

Talraden.

Om de vanliga orden för ordningstalen inte inlärts tidigare, kan man nu lämpligen öva ordningstalen för 1—12. Därvid kan måhända verserna på sid. 1—2 i lärobokens andra häfte komma till användning. När talraden i fortsättningen utsträckes, inläres också motsvarande ordningstal.

Har det inte skett redan förut, så utökas talraden nu till och med 20. Man går tillväga på liknande sätt, som då talraden behandlades till och med 12. Således räknar man med verkliga föremål, bilder, den speciella räknemateriellen och ritade enkla figurer. Föremål, bilder, räknemateriell och ritade figurer ordnas i vågräta och lodräta rader. Man räknar också ljud, föremål i rörelse, steg o. s. v.

Talsystemet.

Sedan talen till och med 20 inlärts genom räknande utefter talraden, behandlas tiotalssystemet. Som inledning kan det vara lämpligt att öva räkning i två-rytm. För ögat markeras rytmen med räknemateriell och ritade ringar. Först ordnas räknebrickor och ritas figurer i en enkel rad: oo oo oo oo oo oo o. s. v. till och med 20. Sedan erinrar man om den andra möjligheten: ●●●●●● / oooooo o. s. v. Uträknandet av sådana rader övas i följande ordning:

1 3 5 7 9 11
2 4 6 8 10 12 o. s. v.

Nästa steg blir att markera tiotalet. T. ex. sålunda:

I en skolklass fanns det 20 barn, 10 flickor och 10 pojkar. — Lägg opp 10 räknebrickor! Det är de 10 flickorna. Sedan kommer pojkarna. För att det tydligt skall synas var pojkarna börjar, lämnar vi tomt ett stycke. Låt sedan pojkarna ställa opp! ●●●○● ○○○○○ / ○○○○○ ○○○○○. Räkna efter att det stämmer: Flickorna! Pojkarna! Alla! — På samma sätt övas 10 + 9, 10 + 8, 10 + 7 o. s. v.

För att tiotalet skall ingå i medvetandet som en helhet, bestående av 10 enheter, företages en rad av övningar med olika slags materiell, t. ex. stickor och tryckta talbilder. Det är lämpligt att i det här sammanhanget behandla decimeter och centimeter samt tioöringar och ettöringar.

14. Siffersystemet.

Läroboken 2: 11—14.

Att med siffror beteckna tal högre än 9 innebär extra svårigheter. Tiotalet skall uppfattas som en enhet av högre grad. Eftersom tiotalen betecknas med samma siffror, som barnen lärt sig använda för entalen, måste det bli klart, att tiotalssiffran får sitt värde genom placeringen till vänster om entalssiffran. När ensamma tiotal betecknas, skall tiotalssiffran efterföljas av en siffra för något som inte finns. Detta innebär en nyhet för barnen, då de förut inlärda siffrorna alltid betytt något som verkligen existerar.

Siffran 0.

För att sammanbinda begreppet »ingenting» med siffran noll, går man igenom en del förhållanden, som barnen känner till, och där begreppet ifråga kan uppträda. Sålunda kan man anteckna barnens namn på krittavlan och med siffror ange antalet frånvarodagar för var och en. (Under förutsättning att nollan kommer till användning. Skulle tal över 9 förekomma, får man använda talbilder eller något för tillfället konstruerat tecken för »många».)

Vidare kan man anteckna antalet biobesök (ungefärligt) sedan skolan började (under förhoppning att »ingen gång» skall uppträda), gånger per dag som var och en dricker kaffe o. s. v.

En liten räknelek är också på sin plats. Den kan varieras på många sätt. En av de enklaste är kanske följande.

Man förfärdigar en speciell tärning med två blanka sidor, två sidor med en punkt och två sidor med två punkter. Barnen kastar i tur och ordning och resultatet skrives för varje gång upp på krittavlan med siffror; blankt = 0.

Man slår t. ex. fem gånger var, och slutresultatet uträknas. Sannolikheten för att någon skall slå »tvåor» varje gång, och att man alltså skall överskrida 9, är ju inte stor. Skulle det inträffa, får vederbörande i sin slutkolumn en stjärna eller något annat tecken, som får ange högsta möjliga poäng.

Tiotalssiffrans platsvärde.

När det gäller att bibringa förståelse för siffersystemet, måste man använda något ord, som anger betydelsen av siffrornas placering. Man har då svårt att komma ifrån ordet »värde». En för barnen avpassad utredning av detta ords innebörd bör alltså göras. (Ordet »plats» förekommer väl så ofta i skolan, att det torde förstås utan särskild behandling. Likaså ordet »rum», som också brukar användas i detta sammanhang.)

Vid förklaring av ordet »värde» får man vädja till barnens erfarenhet på de punkter, där sådan kan vara för handen. Kanske känner de till, att fallfrukt inte är så mycket »värd» som plockad, att den felfria frukten betalas bättre, att den är mera »värd» än den stötta eller på annat sätt skadade. De vet kanske också, att guld är dyrbarare än silver o. s. v.

Den mest direkta jämförelsen ger kanske mynten. Man lägger upp t. ex. 9 ettöringar och till vänster om dem 1 tioöring. Den enda tioöringen är mer »värd» än alla ettöringarna (man får mer för den). Så är det också, när man skriver siffror. Vill man med siffror tala om, att man har 9 ettöringar och 1 tioöring, så skriver man en nia och till vänster om den en etta. Då är ettan »värd» mer än nian, ty ettan betyder en tioöring.

Sedan man på samma sätt bildat talen 18, 17 o. s. v. till och med 11, kommer en uppgift, där man ingen ettöring har. Därefter ställes problemet hur det går, om man skulle ha 1 tioöring och 10 ettöringar. Då vore ettöringarna lika mycket värda som en tioöring. Man får alltså konstatera, att ettöringarna i så fall bytes ut mot 1 tioöring, att den får samma förnäma plats som den första tioöringen, och att det på vanligt sätt markeras, att inga ettöringar finns.

III. ALLMÄNNA METODFRÅGOR.

1. Metoden.

I viss mening kan det vara riktigt, att en undervisare lyckas bäst, om han tillämpar en metod, som »passar» honom. Men det är riktigt endast på så sätt, att det inverkar menligt på undervisningsresultatet, när en metod anammas endast på grund av föreskrift, eller om undervisaren av annan anledning inte själv är fullt förtrogen med eller positivt inställd till metoden. Likaså kan metoden vara av underordnad betydelse så tillvida, att särskilt begåvade elever blir förtrogna med ämnet, även om det sätt, på vilket de införes i detsamma, inte skulle vara det ur psykologisk synpunkt gynnsammaste. Däremot är det obestridligt, att det finns välgrundade och mindre välgrundade eller rent av opsykologiska metoder, samt att resultatet blir det bästa, när en psykologiskt riktig metod tillämpas av en lärare, som är fullt förtrogen med dess omsättning i praktiskt undervisningsarbete. Ju svagare elevernas intellektuella förutsättningar är, desto större betydelse får valet av metod.

*

När en räkneuppgift bereder eleven så stora svårigheter, att han inte ensam kan komma till rätta med den, har undervisaren att vädja antingen till ett abstrakt logiskt resonemang, till föreställningsförmågan eller till åskådningen av den påtagliga verkligheten.

Den grundläggande undervisningen har inte sällan blivit starkt lidande därigenom, att den omständligare och ur anordningarnas synpunkt besvärligare åskådningsmetoden fått vika för en vädjan till föreställningsförmågan eller i värsta fall till ett logiskt resonemang.

Om åskådningsmetoden skall föra till målet, måste den emellertid tillämpas konsekvent. Den kan inte slå väl ut, om den endast kommer till heders under en kortare tid för att sedan ersättas av en vädjan till föreställningsförmågan, innan den grund finns, som en sådan vädjan förutsätter. Den kan inte heller lyckas, om den tillämpas under längre tid, men därvid endast till hälften, så att den å ena sidan innebär en riktigt fattad övning av sinnena men å andra sidan är förbunden med en språklig drill med stereotypa uttryckssätt, som endast kan passa för ett högre åldersstadium.

För att närmare belysa denna fråga må det vara tillåtet att något granska den i många stycken utmärkta redogörelse, som K. P. Nordlund lämnar i *Vägledning vid den första undervisningen i räkning.* (Kursiveringarna i citaten är hela tiden av Nordlund.)

Klart och kortfattat framhåller Nordlund med följande ord en viktig sida av den grundläggande räkneundervisningen:

> När barnens *iakttagelseförmåga* inom ett visst område övats, övergår läraren till övningar, som taga i anspråk deras *föreställningsförmåga.* De uppgifter, som för detta ändamål användas, böra noga avpassas i överensstämmelse med påtaglighetsövningarna och böra innehålla namn å sådana föremål, med vilka barnen äro fullt förtrogna. Läraren uppmanar barnen att föreställa sig de föremål, som finnas angivna i uppgifterna. (A. a. sid. 12.)

Beaktansvärd är också följande anvisning av Nordlund:

> Barnen övas att återgiva: 1:o) fullständig skrift i kortskrift; 2:o) kortskrift i fullständig skrift. (A. a. sid. 15. — »Kortskrift» är Nordlunds term för det vanliga matematiska beteckningssättet med siffror, +, —, = o. s. v.)

Ytterligare kan ur Nordlunds framställning följande citeras:

> Undervisningen om kortskriften börjar i allmänhet alltför tidigt. Barnen sakna de nödiga kunskaperna för dess begripande. (A. a. sid. 23.)

Vid sidan av de nu citerade uttalandena finner man emellertid i den anförda framställningen andra påståenden, som måste betecknas som en avvikelse från en fullt konsekvent åskådlig räkneundervisning. För att dessa avvikelser skall klart framstå, kan det vara lämpligt med en smula systematisering. Man kan sålunda indela de svårigheter, som eleven har att övervinna vid räkneundervisningen, i tre grupper: de som hänför sig till uppfattningen av själva sakförhållandet, till de språkliga uttrycken och till den speciella matematiska tekniken och teckenskriften.

Vad som tycks ha hindrat Nordlund från en fullt konsekvent tilllämpning av åskådningsmetoden, är dels hans alltför strängt teoretiska inställning till förhållande-begreppet, dels undervisningens språkliga sida.

Nordlund beaktade den tvåfaldiga karaktär, som de vanliga talen äger, i det att de i vissa fall anger en kvantitet eller ett mått (5 äpplen, 5 m), i andra fall vad Nordlund kallade ett »förhållande», (i uttrycket 2×5 m $= 10$ m anger 2:an »förhållandet» mellan 5 m och 10 m). Det är naturligtvis riktigt, att denna omständighet får betydelse för undervisningens utformning, men vilken den metodiska konsekvensen blir, är en annan fråga. Det förefaller, som om Nordlund beträffande förhållandebegreppet, liksom i övrigt, velat binda undervisningen vid vissa speciella uttryckssätt, och att hans metod trots vädjan till åskådningen haft en alltför abstrakt resonerande karaktär.

Som prov må följande citat göras ur det förut anförda arbetet.

> Betydelsen t. ex. av det mycket omtvistade ordet *förhållande*, som är namnet på matematikens viktigaste begrepp — — — klargöres till en början genom följande upplysning: *när det hela är delat i lika stora delar, så säges delarnas antal vara förhållandet mellan det hela och en av de lika stora delarna.* (A. a. sid. 3.)

> Läraren lägger fram på katedern t. ex. *fyra* skrivböcker och meddelar barnen, att priset å var och en av dem är 6 öre, varefter barnen uppmanas att tänka ut, huru de böra gå till väga med penningarna (som förvaras i en låda, ställd på katedern) för att erhålla priset på de fyra skrivböckerna.
>
> Barnet, som funnit tillvägagångssättet, kallas fram till katedern. B. lägger 6 öre på varje skrivbok och säger: »de utlagda penningarna utgöra priset å skrivböckerna».
>
> L. *Vilket är priset?*
>
> B., som inhämtat den behövliga delen av mångfaldstabellen, svarar: när *delarnas antal* är *fyra* och *varje del* är 6 öre, så är *det hela* 24 öre eller *fyra*-falden av 6 öre, som är 24 öre. (A. a. sid. 9.)

Då Nordlunds framställning både positivt och negativt ger en värdefull belysning åt frågan om den grundläggande räkneundervisningen, har denna redogörelse för hans metod ansetts motiverad. Det bör beaktas, att de antydda metodiska synpunkterna utformades för mer än tre decennier sedan.

Den nutida räknemetodiken torde i sin praktiska utformning i rätt stor omfattning vara av den art, att den lämpligen bör karakteriseras som en demonstrationsmetod. Det som vid ett givet tillfälle skall behandlas, t. ex. talet *tre*, göres först till föremål för en åskådlig framställning, men redan samma lektion införes siffran 3 och övas de räkneoperationer, som är möjliga inom talområdet 1—3. Därefter behandlas tal efter tal på enahanda sätt.

Mot detta tillvägagångssätt måste man invända, att den avgörande svårigheten för barnen inte ligger i övergången från talet *tre* till talet *fyra* och från talet *fyra* till talet *fem* etc. Den väsentliga svårigheten ligger i att taga steget från ett påtagligt åskådligt uppfattningssätt till inre föreställning och från ett konkret beteckningssätt (med bilder o. s. v.) till de abstrakta tecknen. Det innebär också något avgörande nytt att gå över från talbegrepp till begrepp om räkneoperationerna. Därför skall dessa svårigheter inte blandas samman, utan barnen måste för varje gång lämnas god tid, så att de dels får ett klart talbegrepp, innan räkneoperationerna övas, dels en klar uppfattning av talen och räkneoperationerna, innan de abstrakta tecknen införes.

Demonstrationsmetoden leder till, att det för många barn uppstår en klyfta mellan det konkreta och det mera abstrakta i undervisningen, och den åskådliga demonstrationen saknar i sådant fall egentlig betydelse. Det barnen då tillägnar sig blir endast förmågan att mera mekaniskt tillämpa ett genom ihärdig nötning inlärt tekniskt förfaringssätt. Konkretion och abstraktion bör i stället vara ändpunkter på en så långt som möjligt sammanhängande linje. Avståndet mellan ändpunkterna kan vara stort men skillnaden mellan två närliggande punkter omärklig.

När det gäller att använda det speciella matematiska beteckningssättet med siffror, +, — o. s. v. bör eleverna få klart för sig, att det endast är fråga om ett förkortat och därför mera bekvämt skrivsätt för olika förhållanden och händelser i verkligheten. Inte sällan har barnen den föreställningen, att det matematiska teckenspråket är en huvudsak, och att det inte är tillåtet att skriva ner sin tankegång på annat sätt. De bör därför upplysas om räknetecknens natur. Om de i något speciellt fall inte kan skriva ner sin lösning i matematiska tecken, bör de tillåtas att använda enkla teckningar eller en utförlig redogörelse i ord. Man bör för övrigt följa Nordlunds anvisning och företaga direkta övningar i översättning av den matematiska teckenskriften. Sådana översättningar bör göras både muntligt och skriftligt.

2. Räknemateriell.

Vid behandlingen av de olika företeelser, som faller inom räkneundervisningens område, bör man så långt möjligt utgå från verkligheten. Den speciella räknemateriellen kan inte ersätta verkliga föremål, lika litet som tänkta räknesituationer (t. ex. tänkta inköp) har samma karaktär som verkliga. Men använd på rätt plats har räknemateriellen sin betydelse.

Demonstrationsmateriellen är avsedd att brukas av läraren eller en ensam elev men kan i regel inte utnyttjas av ett större antal elever samtidigt. Det förefaller som om demonstrationsmateriellen med tiden trängts undan av sådan materiell, som kan sättas i elevernas händer för samtidigt bruk.

Den allra första arbetsmateriellen kan eleverna själva anskaffa, ty härtill lämpar sig varjehanda enkla föremål, såsom knappar, pinnar, små stenar o. s. v. De i handeln förekommande runda räknebrickorna, som har de två sidorna i olika färger, kan med fördel användas för olika slag av talgrupperingar.

All sådan materiell, som består av lösa enheter, är särskilt användbar, när det gäller talområdet 1—20. Ju mera talområdet sedan utvidgas, desto omständligare blir det att använda enstaka föremål, och behovet av gruppering efter något lämpligt system framträder. Det får emellertid inte hindra, att man då och då räknar enstaka föremål eller ritade figurer utefter talraden även långt över 20 och efter det att tiotalssystemet införts i undervisningen.

För införande i tiotalssystemet och för räkning med stöd av detta system är talbilder i form av skivor eller blad med punkter bekväma att taga till. I kap. om talsystemet (sid. 18) har redogörelse lämnats för två olika talbildssystem.

För utförande av räkneoperationer är talbilderna mest lämpliga inom talområdet 1—100. När detta talområde behärskas, torde för övrigt behovet av räkneoperationernas åskådliggörande vara väsentligt mindre än tidigare. Även när det gäller större tal än 100, kan emellertid talbilderna ha sitt värde som medel att åskådliggöra själva talen samt att framhäva den goda överblick och stora förenkling som tiotalssystemet medför.

Det talbildssystem, som i redogörelsen å sid. 19 betecknats som typ II, har upptagits av Kühnel — enligt dennes egen uppgift efter Born. Kühnel torde ha utformat systemet ytterligare och låter det komma till användning för framställning även av mycket stora tal.

En rent subjektiv bedömning ger intrycket, att punkterna i Kühnels talbilder utsatts för tätt. Ett avstånd, som är ungefär lika stort som punkternas diameter, förefaller att vara lämpligare.

Born-Kühnels talbildssystem åskådliggör talen på det sätt, som framgår av följande redogörelse.

Entalen ordnas — som förut visats i *fem* lodräta rader med *två* tal i varje rad:

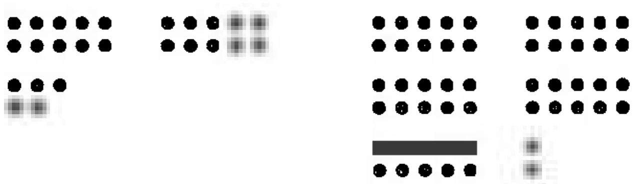
 utläses

1	3	5	7	9
2	4	6	8	10

Tiotalen placeras i *fem* vågräta rader med *två* tiotal i varje rad:

10	20
30	40
50	60
70	80
90	100

Ex.



Sedan upprepas dessa grupperingar alternerande, så att hundratalen ordnas på samma sätt som entalen och tusentalen i överensstämmelse med tiotalen; alltså på följande sätt:

100	300	500	700	900	1000	2000
200	400	600	800	1000	3000	4000
					5000	6000
					7000	8000
					9000	10000

Genom användning av tillräckligt små punkter kan talet 10000 åskådliggöras på en yta, som är mindre än 12 cm × 14 cm. (En del av den materiell, som Kühnel utarbetat på grundvalen av det ovan nämnda talbildssystemet, kan erhållas i Sverige.)

När bråktalen åskådliggöres med geometriska figurer, brukar man dela in en rät linje, en cirkelyta eller en rektangel i önskat antal delar. Walsemann redogör i *Anschauungslehre der Rechenkunst* för två experiment, som av honom utförts i syfte att utröna, vilket av de tre nämnda sätten att åskådligt framställa bråktal, som vore att föredraga. I första undersökningen gällde det att uppfatta 1/5, 1/6, 1/8, 1/9, 1/12, 1/15 och i den andra 3/5, 5/6, 6/8, 5/9, 8/12, 10/15. De figurer, som användes, utgjordes av en vågrät linje, 48 cm lång, en cirkelyta, vars diameter var 18 cm, samt en kvadrat med sidan 18 cm. Linjen indelades med korta lodräta streck, cirkelytan med radier och kvadraten med lodräta och vågräta linjer (utom beträffande femtedelarna, som tydligen framställdes genom kvadratens delning i endast en riktning). De olika bråkdelarna utmärktes genom klammer över linjen och genom streckning på ytorna. Försökspersonerna voro dels kvinnliga seminarieelever, dels skolbarn. Resultatet av undersökningarna framgår av nedanstående tabeller. Det anges genom antalet felbestämningar i procent av hela antalet bestämningar i de tre olika fallen: bråktalen framställda genom delning av a) en vågrät linje, b) en cirkelyta, c) en kvadrat.

Undersökning 1.

Försökspersoner	Felbestämningar i %		
	Linje	Cirkel	Kvadrat
Seminarieelever	42,9	30,9	9
Skolbarn	58,3	34,5	14,3
[illegible]	**49**	**33,7**	**11,4**

Undersökning 2.

Försökspersoner	Felbestämningar i %		
	Linje	Cirkel	Kvadrat
Seminarieclever	62	45	9
Skolbarn	72	56,6	16,7
Samtliga	66,3	50	12,3

Walsemanns undersökning avsåg tydligen förmågan att uppfatta bråktal, när det gällde personer, som redan förvärvat ett klart bråkbegrepp. Resultatet utesluter alltså inte den möjligheten, att t. ex. cirkelytan lämpar sig bäst för att åskådliggöra begreppet delar i motsats till hela.

Vid undervisningen om de olika slagen av mått (längdmått, vikter etc.) har man möjlighet att i stor utsträckning använda de verkliga måtten. En kort redogörelse för denna sak återfinnes i kap. om sorträkning (sid. 44).

Ibland varnas för att under allt för lång tid hålla fast vid åskådningsmedlen i räkneundervisningen. Man fruktar, att barnen därigenom skall hindras att komma fram till mekanisk färdighet. Även om en sådan risk finns, behöver den sannolikt inte betecknas som alltför stor. Som allmän regel torde gälla, att den yttre åskådningen släppes, när den inte längre är nödvändig. Har man grundad anledning förmoda, att bekvämlighet eller bristande självtillit orsakar onödigt fasthållande vid någon form av yttre åskådning, bör eleven tillhållas eller uppmuntras att försöka arbeta utan åskådningsmedel. Risken av för mycken åskådlighet måste under alla förhållanden betraktas som mindre än risken av för tidig mekanisering.

3. Addition.

Att tolka additionshändelser som ökning eller sammanläggning och att ange dem med tecknet + hör till de mindre svårigheter, som eleverna har att övervinna vid räkneundervisningen.

Vid räkning med föremål kan den rörelse, som additionen ofta innebär, lätt åskådliggöras, antingen genom att ett antal föremål läggcs till vid radens slut, eller genom att två eller flera mindre talgrupper sammanföres till en enda grupp. Det är lämpligt att man både i dessa fall och för övrigt vid åskådligt utförande av räkneoperationer särskilt betonar dels det som ursprungligen finns och dels det som uppstår såsom resultat av räkneoperationerna. Därigenom förberedes de mera abstrakta uppgifter, där talen endast framlägges i en text, och det alltså gäller för eleven att föreställa sig situationen. Det visar sig nämligen, att det bereder många barn svårigheter att vid sådana uppgifter klart uppfatta, vad som är givet i situationen och vad som sökes.

Också när additionsuppgifter framställes i bild, är det lätt att åskådliggöra rörelsen i räkneoperationen genom val av lämpliga figurer t. ex. gående och springande personer, flygande fåglar o. s. v. Vid räkning utefter talraden tecknas de figurer, som kommer till, i slutet av raden. I andra fall — t. ex. vid användning av s. k. talbilder — kan det bli nödvändigt att genom en extra figur markera rörelsen.

En speciell form av additionsuppgifter i bild uppstår, om man har en talrad av viss längd (t. ex. t. o. m. 12), och en figur tänkes röra sig framåt utefter talraden. Det blir då något svårare att i medvetandet fixera just de tal, som det för tillfället gäller. Senare kan det vara tillräckligt åskådligt, om rörelsen markeras med en pil.

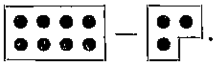
Man bör som en speciell form av additionsuppgifter i bildframställning också behandla sådana, där inget rörelsemoment ingår, t. ex. 5 flickor och 3 pojkar blir tillsamman 8 barn. Sådana »stillastående» räknesituationer innebär också de i läroboken förekommande uppgifterna med vita och svarta cirkelytor.

4. Subtraktion.

De typiska subtraktionsfallen, som innebär en på olika sätt markerad rörelse bakåt utefter talraden, utföres med föremål eller framställes i bild på liknande sätt som motsvarande additionsuppgifter.

Betydligt mera abstrakt är den form av subtraktion, som egentligen innebär jämförelse mellan olika längder, tyngder o. s. v. Ex.: Karl är 138 cm lång. Hans syster Lisa är 152 cm lång. Hur mycket längre är Lisa än Karl? Vid behandlingen av sådana uppgifter har man tydligen inte något verkligt minskningsförfarande att hänvisa till.

Även om man inte vill gå så långt, att man betecknar jämförelserna som ett särskilt räknesätt — vilket ibland föreslås — så är det nödvändigt, att de vid lämplig tidpunkt särskilt uppmärksammas och göres till föremål för speciell träning. På lågstadiet bör man hålla sig till de typiska minskningsfallen.

Vid bildframställning av subtraktionsuppgifter förekommer det ibland att uppgifterna tecknas i analogi med sifferuppställningen. Ex.: . En sådan framställning är inte att rekommendera. I verkligheten är endast det största talet ursprungligen givet i en typisk minskningsuppgift. Det mindre talet ligger från början inneslutet i det större. Att då avbilda båda dessa tal kan inte innebära något åskådliggörande av själva subtraktionshändelsen. Snarare verkar det förvillande på uppfattningen av subtraktionens karaktär. När uppgifterna framställes med talbilder och minustecken på ovan angivet sätt, är det endast den matematiska kortskriften, som går igen.

Angående behandling av uppgifter, tecknade med siffror, må endast det förslaget göras, att man i stället för den oegentliga termen »låna» använder ordet »växla». Frågan om värdet av denna »växlings»-metod i jämförelse med andra tekniska förfaringssätt skall här inte närmare diskuteras. »Växlingen» måste anses som den mera konkreta metoden och är därför att föredra på lågstadiet. Längre fram kan man ju sedan öva någon annan teknik, som möjligen har fördelen att göra utförandet snabbare.

5. Multiplikation.

När multiplikationen skall börja övas, måste det observeras, att man därvid inte bara har att göra med ett nytt tecken (×) och en ny teknik, utan att själva talbegreppet nu erhåller en betydelsefull komplettering.

Denna omständighet har redan berörts (sid. 34), samtidigt som det framhållits, att saken beaktades av K. P. Nordlund och spelade en stor roll i dennes metodik.

Om man jämför uppgifterna »3 päron + 5 päron» och »3 × 5 päron», finner man att additionsuppgiften har två »storleksbestämningar»

7. Sorträkning. Geometri.

Avbildningar av mynt, längdmått, vikter etc. samt räkneuppgifter med tänkta mätningar och vägningar kan naturligtvis aldrig ersätta det direkta användandet av mynt, mått och vikter. En uppsättning av verkliga mått och vikter, måste alltså finnas i skolan och flitigt användas.

Vid demonstration av två eller flera sorter inom samma grupp placeras måtten i storleksordning. Detta bör ske också i fråga om längdmåtten. Man använder därför dels en odelad meterribba, dels tre andra ribbor, varav en är indelad i dm, en i cm och en i mm. Ribborna placeras vågrätt och i den ordning sorterna kommer i måttsystemet, så att dm-ribban med t. ex. 2 dm markerade ligger bakom meterribban, cm-ribban med t. ex. 7 cm markerade bakom dm-ribban o. s. v.

De stora längd- och ytmåtten åskådliggöres genom uppmätning på skolgården och i dess närhet. Som stöd för minnet kan man i skolrummet hänga upp en avbildning av ytmåtten och därvid återge sorter under ar i naturlig storlek samt ar och högre, utritade på en plankarta över skoltomten och hembygden.

De s. k. sortförvandlingarna brukar betraktas som ett besvärligt kapitel. Alldeles oövervinneliga torde dock inte svårigheterna vara. Om man under de första skolåren lagt en god grund genom att göra barnen förtrogna med de mest brukade måtten, kan så småningom förvandling från en sort till en annan inom samma måttgrupp börja. Man gör då klokt i att till en början inskränka sig till förvandlingar i *en* riktning och att i regel endast gå från en större sort till den närmast mindre.

Geometrikursen ligger så naturligt till för åskådlig och manuellt betonad undervisning, att inte många ord behöver sägas om den saken. Innan man börjar med ytberäkningar, övar man verkliga ytmätningar. Det skadar inte att börja med det något besvärliga men lättfattliga sättet att lägga ut en i papper eller papp utklippt cm^2 resp. dm^2 så många gånger det går på lämpligt valda rektanglar. Sedan kan rektanglar med sidornas längder i hela cm och hela dm rutas in i resp. cm^2 och dm^2. Nästa steg kan lämpligen bli att mäta ytor med en remsa, 1 cm bred och indelad i cm^2. På motsvarande sätt utföres verkliga rymdmätningar, innan man övar rymdberäkningar.

8. Bråkräkning.

Användningen av siffrorna för angivande av olika bråkdelar kan krångla till talbegreppet, om inte saken framställes tillräckligt klart och åskådligt. Ännu mer gäller det, om man för tidigt börjar utföra räkneoperationer med bråk, som betecknats med siffror. I en sådan uppgift som t. ex. $2/3 \times 4/5$ är det endast »fyran» som anger ett storlekstal, alltså ett tal med den konkreta betydelse, som barnen lätt kan uppfatta. Det förhåller sig emellertid med bråkläran som med flera andra delar av räknekursen, att själva saken är mindre krånglig än uttrycks- och skrivsätten.

Vid den åskådliga bråkräkningen ger man bråkdelarna karaktär av speciella sorter. Delas *en* meter i två delar, får man halvmeter. På samma sätt visar man uppkomsten av halvkilo och halvliter. Vid prissättning av vissa varor brukar man räkna med fjärdedels-(kvarts-) kilo, varför detta alltså kan tagas med som en praktisk realitet.

Halvmetern går lättast att uppfatta, ty den kan som mätinstrument erhållas genom en verklig tudelning av ett en-metermått. Då saken ställer sig annorlunda beträffande kilovikten och litermåttet kan man först antyda för barnen, hur halvkilo och halvliter skulle se ut, om man utförde en verklig tudelning av en en-kilovikt resp. ett en-litermått. Vid undervisning av normalt eller särskilt begåvade barn är en sådan detalj onödig. Hos dem kan man i ett dylikt fall förutsätta den psykiska mekanism, som fordras, för att ett klart framlagt sakförhållande skall uppfattas begreppsmässigt. När det gäller de psykiskt efterblivna barnen, får läraren ofta hjälpa till att bilda själva de banor, utefter vilka kunskapen skall ledas in i medvetandet. I det föreliggande exemplet med halvkilo kan man till och med behöva gå så långt, att man låter barnen göra en lervikt med en-kiloviktens form och storlek, klyva den i två kongruenta delar samt forma om de två delarna, så att de får vikternas vanliga form. Den enda bristen i tillvägagångssättet ligger däri, att vikterna inte får den rätta tyngden. I övrigt är exemplet belysande. Att en sak kommer till inför barnens ögon och i deras egna händer, är ofta det enda säkra sätt, på vilket de psykiskt efterblivna kan förvärva kunskap.

I samband med de allmänna bråken övar man också tiondelarna: tiondelsmeter, tiondelsliter, tiondelskilo.

Till en början skriver man ut hela sortbeteckningen med bokstäver: 2 m = 4 halvmeter etc. Sedan kommer nämnaren som ett kortare sätt att skriva sorten. 3/4 kg utläses alltså: 3 fjärdedelskilo.

Att åskådligt utföra räkneoperationer med allmänna bråk fördjupar bråkbegreppet och har ur den synpunkten sin betydelse. Som åskådningsmedel kan kvadraten, metermåttet och mynten användas. Vad man får genom att ta hälften av 1/2, tredjedelen av 1/4 o. s. v. är inte alltför svårt att utröna. Från dessa fall kan man komma över till uppgifter som 2/3 av 1/4, 2/3 av 3/4 o. s. v. Beräkning av ett visst antal bråkdelar av ett helt tal (t. ex. 3/4 av 12 liter) utföres genom två räkneoperationer (delning och multiplikation).

Innehållsdivision med bråktal kan räknas genom att talen göres liknämniga. Ex.: $\frac{4}{5} : \frac{2}{15} = \frac{12}{15} : \frac{2}{15} = 12 : 2 = 6$ ggr.

Förvandling från allmänna bråk till decimalbråk kan åskådliggöras på olika sätt; t. ex. 3/4 kr. = 3 tjugofemöringar = 75 öre = 0,75 kr. Multiplikation med två decimalbråk åskådliggöres med hjälp av metermåttet: tiondelar av tiondelar blir hundradelar o. s. v.

Innehållsräkningen kan man också komma tillrätta med på åskådlig väg. Går det att ösa 3 gånger med ett kärl ur ett annat, så går det fortfarande 3 gånger, om båda kärlen göres 2 gånger så stora — — — 10 gånger så stora etc.

Delningsräkning med bråktal i divisorn kan ersättas med två räkneoperationer. I stället för att räkna med 2,5 kg räknar man med 25 hg, och kan sedan från priset på 1 hg komma fram till priset på 1 kg.

9. Problemräkning.

Under de första skolåren (särskilt i hjälpskolan) domineras »problemräkningen» av den åskådliga räkningen med ting eller avbildade ting. Även senare, när nya »räknesätt» inläres, göres början med åskådlig räkning. De tal, som förekommer, representeras alltså först av enstaka föremål. Räkneoperationerna uppfattas direkt med synen och utföres i regel samtidigt genom verkliga förflyttningar.

I anslutning till åskådlig räkning övas sedan barnens föreställningsförmåga. De får således försöka att med endast inre åskådning behandla sådana räknesituationer, som förut blivit påtagligt utförda.

Vid denna konkreta räkning införes steg för steg de matematiska tecknen, först +, — och =, senare ×, : och ——.

När man går över till att använda tecknen som förkortningar för olika räknesituationer, som framlägges i en text, bör denna övergång särskilt övas. Man kan då lämpligen sammanställa de fyra olika former, i vilka samma räknesituation kan uppträda: verkligheten, bilden, ordbeskrivningen och de speciella matematiska förkortningarna. I stället för verkliga situationer får man dock i allmänhet nöja sig med sådana, som barnen »dramatiskt» framställer i skolan.

Barnen utför t. ex. en enkel scen, i vilken det visas, hur 6 barn kommit in på skolgården, och hur sedan 3 andra kommer till. Samma situation visas därpå i bild. Under bilden antecknas en kort berättelse om situationen, och under denna text skrives samma sak med matematisk kortskrift: 6 barn + 3 barn = 9 barn. (Se läroboken häft. 4, sid. 14—17.)

När denna form av problemräkning börjar, är valet av uppgifter betydelsefullt. De ofta förekommande prisberäkningarna lämpar sig inte som inledning. En granskning av en sådan uppgift belyser frågan. Ex.: Hur mycket kostar 3 kg kaffe, om varje kg kostar 4 kr.

Först lägger man här märke till, att de verkliga händelser, som ligger bakom räkneuppgiften, innebär *två* olika förlopp: uppvägningen av varan och erläggande av betalningen. I inget av dessa två förlopp framträder med full tydlighet multiplikationsförfarandet. Om uppvägningen av varan sker i *en* påse och på modern affärsvåg, har man endast visarens förflyttning från 0 till 3 att hänvisa till. Sker uppvägningen i 1-kg-påsar, blir saken mera åskådlig. Betalningen av varan motsvarar på intet sätt det verkliga multiplikationsförfarandet; varken talet 4 eller den upprepade additionen föreligger i åskådlig form i verkligheten.

Som inledning till behandlingen av multiplikationsuppgifter om tänkta förhållanden väljes i stället sådana uppgifter, där det föreliggande talet framträder genom ett antal urskiljbara enheter, och där ett multiplikationsförfarande kan påvisas i verkligheten. Ex.: Lill-Nisse bär in ved i tvättstugan. Han kan ta 4 stora vedträn i taget. Han går 3 gånger.

Därefter väljer man uppgifter, där multiplikanden är t. ex. en 5-öring men multiplikationsförfarandet tydligt framgår: Rut köper frimärken i en automat. Hon lägger ner 3 femöringar.

Sedan kan man välja uppgifter om köp av sådana varor, som förekommer i 1-kg- eller 1-hg-förpackningar eller mätes upp med 1-litermått etc. Barnen får då till en början tänka sig, att den jämna betalningen lägges upp för varje paket o. s. v.

Till sist kommer uppgifterna av den typ, i vilken mer än *en* måttsenhet sammanförts i varje förpackning etc., alltså *en* påse med 3 kg, en 5-litersflaska o. s. v.

När man börjar lösa räkneproblem, som framlägges i en text, måste man ofta påpeka för barnen, att en sådan uppgift i allmänhet består av två delar: 1) »vad man får veta», 2) »vad det frågas efter».

Någon gång göres invändningar mot en räkneundervisning, som bygger på, att det som framlägges i undervisningen skall begripas. Man deklarerar då den uppfattningen, att det som är räkneundervisningens föremål egentligen inte kan förstås av barnen. Sannolikt använder man då ordet »förstå» i en alltför begränsat intellektuell betydelse, närmast liktydigt med att utföra en logisk slutledning. Översätter man uttrycket »förstå» som förmågan att få en riktig inre föreställning om det som tilldrar sig i den yttre verkligheten, ter sig förhållandet något annorlunda. Medlet för uppkomsten av en sådan förmåga är självfallet arbete med ting, som kan bilda material för riktiga föreställningar om kvantiteter, och utförande av rörelser, som innebär ökning, minskning, delning och över huvud taget de förflyttningar och grupperingar, som ligger till grund för begreppen om räkneoperationerna.