6 philologiska sem., 1 philol.-pædagogiskt, 4 historiska, 5 mathem. naturvetenskapliga seminarier, utom serskilda inrättningar för bildande af lärare i religion och fremmande språk), 2) lärarepröfning, 3) profår, 4) lärares anställning, 5) rang och titel, 6) embetspligter, 7) disciplinarrätt, 8) aflöning, 9) pensionsväsende, 10) inrättningar för aflidne lärares enkor och barn.

Bihang (599—738), handlande om underhållskostnader, skolafgifter, rättigheter som medfölja maturitetsbetyg, samling af instruktioner. — Supplementer till denna hufvudcodex komma att successivt utgifvas för 5 år i sender.

II. *Granskning af tvenne läroböcker i stereometri.*

A) *Wiemer, A.* Elementerna i Geometri.
II. Stereometri. Kalmar 1861.
III. Räknelärans tillämpning på geometrien (senare afdelningen: räknelärans tillämpning på stereometrien). Kalmar 1861.

B) *Hellström, C. G.* Läran om storheter i rummet samt stereometri. Stockholm 1865.

Utgifvandet af ifrågavarande arbeten har i betydlig mån underlättat studiet af elementar-geometrien i tre dimensioner. Vi tro oss ej säga för mycket, då vi påstå, att härigenom elementar-undervisningen i denna del af geometrien i vårt fädernesland inträdt i ett nytt skede. För att rätt uppfatta dessa arbeten, anse vi nödigt att förutskicka några ord angående *Euklides*' framställning af geometriens elementer i tre dimensioner.

Euklides, hvilken vid studiet af geometrien i två dimensioner hos oss vanligast följes, visar sig, oaktadt sin stränghet i bevisen, ej tillfredsställande af följande tre skäl.

1. Då Euklides bevisar solida kroppar vara lika stora, vet man ej, om dessa kroppar äro lika stora i den mening, att de intaga lika stor rymd, alldenstund han definierar kroppar lika stora, om blott de begränsas af lika många, likformiga och lika stora planer. Enär vi ej gerna vilja erkänna andra kroppar lika stora än dem, som äro kongruenta eller på annat sätt kunna bevisas hafva lika stora volymer, blir följaktligen denna definition ett theorem, hvars gilltighet fordrar bevis. Detta theorem är dock ej alltid sannt. För dess sanning fordras tvenne ytterligare bestämningar, nemligen:

α) att planerna följa i samma ordning och *gå i samma led* i begge figurerna.

β) att figurerna äro *konvexa*, d. v. s. att inga solida vinklar gå inåt.

Visserligen har *Cauchy* på detta theorem sålunda modifieradt lemnat ett bevis, hvilket står att läsa bland andra ställen i *Legendre's* Eléments de géométrie. Men dels torde detta vara för svårt för nybörjare, dels är det ej för våra behof tillräckligt, enär fall förekomma, der solida figurer skola bevisas vara lika stora, hvilka begränsas af lika stora, i samma ordning, men ej åt samma håll gående ytor, t. ex. i den satsen: »hvarje diagonalplan delar en parallelipiped i två lika stora (ej annat än i specialfall kongruenta) prismer.» Man kan således på elementarstudiets ståndpunkt ej annat än gilla det förfarandet att bevisa theoremets sanning för hvarje enskildt fall oberoende af kännedomen om dess allmängilltighet.

2. Nyare tider hafva förenklat bevisen för några af Euklides' satser, t. ex. om lika höga parallelipipeders eller lika höga pyramiders inbördes förhållande.

3. Vidare är Euklides' theori om klotet temligen ofullständig, i det att han icke känner satserna om klotets volym och yta. Det var Archimedes, hvilken det först blef förunnadt att finna dessa satser. Han lyckades deri genom att i geometrien införa tre s. k. principer, hvilka ej kunna bevisas, nemligen:

α) huru liten en storhet än må vara, kan man alltid finna en mångfald af denna, så att hon blir större än en annan gifven storhet af samma slag;

β) af tvenne konvexa plana linier med samma ändpunkter, är den yttre större;

γ) af tvenne konvexa bugtiga ytor, som stå på samma begränsningsplan är den yttre större.

Till dessa anmärkningar mot Euklides skulle man kanske kunna lägga den, att hans definition på hvad det vill säga, att ett plan är vinkelrätt mot ett annat, ej är den naturliga. Enklare torde vara att definiera såsom hos nyare: »tvenne planer äro vinkelräta mot hvarandra, då lutningsvinkeln mellan planerna är rät». Vidare äro Euklides' satser om cylindrar och koner ej så generella, som de kunde vara, i det de äro bevisade endast för det fall, då dessa kroppar äro räta, ehuru de äfven gälla, då de äro sneda.

Sannolikt är det på grund af likartade anmärkningar, som till och med i England — hvilket jemte Sverige är det enda land, hvarest Euklides' elementer begagnas såsom lärobok — man ej använder Euklides' elfte och tolfte böcker, utan större eller mindre bearbetningar af dem.

Efter detta vilja vi öfvergå till granskningen af *Wiemers* och *Hellströms* läroböcker. Vi börja med

A) *Wiemers stereometri jemte tillämpning af räkneläran på stereometrien.*

Genom denna lärobok är en stor lucka i de svenska läroböckerna i stereometrien fylld, i det att här finnes ett strängt på exhaustionsmethoden grundadt och genom sin enkelhet serdeles elegant geometriskt bevis för den satsen, *att klotet är två tredjedelar af den omskrifna cylindern.* Beviset påminner om Columbi ägg, det slår an genom sin enkelhet och är, så vidt vår kunskap sträcker sig, ett af de vackraste som på senaste tider inom de geometriska elementernas område blifvit gjorda. Vi stå derföre i en synnerlig förbindelse till Wiemer. Visserligen hade man förut Archimedes' bevis; men för att komma fram till detta, måste man genomgå en lång theori angående rotationskroppar, om- och inskrifna i klotet. Afskräckta genom utförligheten hos denna theori eller kanske obekanta med densamma hafva derföre våra utgifvare af elementargeometrien i tre dimensioner (Kjellin, Alreik, m. fl.) i stället för det archimediska beviset upptagit ett genom sin enkelhet oöfverträffligt försök till bevis, men som i afseende på mathematisk skärpa tillfredsställer ej ens de allra billigaste anspråk. Deraf nemligen, att hvarje plans genomskärningar af klotet och konen (tänkt upp- och nedvänd) äro tillsammantagna lika med cylinderns genomskärning, slutar det till, att halfklotet tillsammans med den deri inskrifna konen är lika med den kring halfklotet omskrifna cylindern, liksom en kropp vore summan af en mängd plana ytor.

Då Wiemer med sådan framgång begagnat exhaustionsmethoden i fråga om klotets volym, väcker det förvåning, att han i sin Räkneläras tillämpning på stereometrien ej begagnat samma method för att finna värdet af ett klotbältes yta och, hvilket står i sammanhang dermed, af en klotsektors volym, utan hållit sig till det gamla förhatliga approximationssystemet. Detta är i dubbelt hänseende menligt för eleven, enär derigenom denne dels ej blir fullt säker på resultatet, dels mister förtroendet för den vetenskap, som han förut ansett omutlig, men nu finner vacklande och nöjd med ungefärliga bevis. Vi äro visst ej okunniga om svårigheterna af stränghet härutinnan. Men, om W. ej vill begagna Archimedes' möjligen alltför utförliga rent geometriska method, hvarföre ej göra sig till godo engelsmännens (t. ex. Lardner's), fransmännens (t. ex. Legendre's) eller tyskarnes (t. ex. Jacobi's öfversättning af Swinden) på exhaustionsmethoden och Archimedes' tre ofvannämnda principer grundade stränga analytiskt-geometriska method?

Beviset för satsen att finna kubikinnehållet och ytan af en ring, hvars tvärgenomskärning är en cirkel eller en cirkelrund ring, som utgöres af en hopböjd cylinder anse vi likaledes såsom ett ungefärligt bevis. Satsen, ehuru sann och enkel, bör utgå ur elementerna, om han ej på elementar väg kan strängt bevisas.

Angående dessa båda approximativa bevis kan man emellertid måhända säga, att det är bättre att få dessa satser bevisade på detta sätt än att ej få *någon* kunskap om dem (Euklides har dem icke), i synnerhet som Wiemers bevis gifva en ganska hög grad af sannolikhet åt det som påstås i satserna.

Wiemers bevis för satserna om parallelipipeder, pyramider och cylindrar äro vida enklare än de, som Euklides har.

Deremot har Wiemer ej fört läran om solida kroppars lika storhet framåt, utan snarare ett stycke bakåt. Wiemer har nemligen i Euklides' definition om lika stora solida kroppar utbytt ordet *lika stora* emot ordet *kongruenta* (ehuru ordet »lika stora» är det rätta ordet och »kongruenta» ett origtigt uttryck). Vidare har Wiemer på följande sätt definierat solida vinklars kongruens: »två solida vinklar äro kongruenta, då de omslutas af lika många plana vinklar, af hvilka hvar och en i den ena är lika med sin motsvarande vinkel i den andra, och de plana vinklarne följa i samma ordning och likbelägna vinkelplaner hafva lika lutningsvinklar, så att den ena solida vinkeln kan fullkomligt passas in i den andra.» Mot denna definition kan man göra minst tvenne befogade anmärkningar. För det första är den ej en definition, utan ett theorem eller åtminstone ett axiom. För det andra är definitionen betraktad såsom theorem ej alltid sann. Om man t. ex. i en trekantig solid vinkel drager ut de tre kantlinierna, uppkommer en vertikal trekantig solid vinkel. Dessa begge solida vinklar uppfylla alla de i W:s definition uppställda fordringarne på kongruens, men äro det oaktadt ej kongruenta. Man skall förgäfves försöka att få dem att passa in i hvarandra utom i specialfall. Wiemer borde nemligen i sin definition eller sats efter orden »i samma ordning» tillagt: »ordningen i båda gående åt samma led», sedan likväl betydelsen af dessa ord förut blifvit definierad.

En följd af dessa båda s. k. definitioners origtighet är att bevisen för de satser, som grunda sig på dem, böra undergå en revision. Serskildt vilja vi framhålla Wiemers sats 28 så lydande: »om en parallelipiped skäres af ett diagonalplan, så blir parallelipipeden delad i två sinsemellan *kongruenta* trekantiga prismer.» Här bör ordet *kongruenta* utbytas mot det af Euklides begagnade ordet *lika stora*, enär man aldrig lyckas att passa det ena prismat i det andra, vare sig att man ställer det rätt eller upp och ned.

Till Wiemers ursäkt kan anföras den gamla sentensen: »interdum dormitat bonus Homerus.» Det bristfälliga i Euklides' definition har förut undgått uppmärksamheten af många hans kommentatorer, bland hvilka vi serskildt vilja framhålla den berömde Clavius på 1600-talet och holländaren van Swinden (1816). Det är så mycket besynnerligare att den sistnämnde ej gifvit akt derpå, som redan förut Robert Simson och Legendre påpekat att definitionen är ett theorem, som ej alltid är sannt, och Cauchy lemnat bevis för satsen, då den är sann. Ingen, ehuru genialisk han för öfrigt må vara, kan med egna hjelpmedel ersätta det arf af kultur, som förfädren lemnat honom.

Emellertid berättigar Wiemers sats om klotet honom till ett framstående rum bland svenska läroboksförfattare. Hvad de nyss omnämnda ofullständigheterna i hans arbete beträffar, har han sannolikt redan både märkt och rättat dem, hvarom en blifvande ny upplaga torde komma att vittna.

B) *Hellström, Läran om storheter i rummet samt stereometri.* Stockholm 1865.

Denna lärobok, ehuru i originalitet underlägsen Wiemers arbete, har derutinnan ett företräde framför Wiemers, att den nästan öfverallt gjort sig till godo andras upptäckter inom det område, den behandlar. Så har den upptagit *Wiemers* vackra bevis om klotets volym, *Archimedes'* sats om den i ett klot eller klotsegment inskrifna bugtiga yta, som uppkommer genom en i en cirkel eller ett cirkelsegment inskrifven månghörnings rotering omkring en diameter, *Clavii* generalisering af Euklides' theori angående räta koner och cylindrar, hvarigenom samma satser, som för räta koner och cylindrar, bevisas vara gällande om sneda koner och cylindrar, *Legendre's* förenklade theori om pyramider. Vidare framställer den de euklideiska satserna att i ett klot inskrifva de *fem reguliera kropparne,* hvarigenom såväl uppfattningen som beräkningen af dessa kroppar blifva i hög grad underlättade. Slutligen har den *förvisat* de numera allmänt förkastade Euklides' 9:de och 10:de definitioner i elfte boken om solida kroppars lika storlek samt i stället infört motsvarande satser om solida vinklar samt med anledning deraf gjort rättelser och tillägg i de euklideiska satserna om parallelipipeder, prismer, pyramider, oktaëdrar och ikosaëdrar, der det befunnits vara nödigt.

Mot Hellströms bok kunna dock göras följande anmärkningar. 1) Hvarföre har ej Hellström tagit steget fullt ut och äfven framhållit Archimedes' sats om den bugtiga ytan af den kring ett klot eller klotsegment *omskrifna* solida figuren, uppkommen genom rotering af en i en cirkel eller i ett cirkelsegment inskrifven månghörning? Genom införandet af Archimedes' ofvan anförda tre principer skulle då Hellström utan svårighet liksom Legendre kunnat begagna exhaustionsmethoden och så erhållit ett strängt geometriskt bevis för finnandet af ett klotsegments yta, i stället för att det nuvarande beviset åtminstone på elementarstudiets ståndpunkt blir otillfredsställande.

2) I satsen 12 af första boken säger Hellström: »Emedan linien BE antages parallel med linien CD, så är hon ock parallel med planet PCDQ». Huru denna slutledning kan göras utan en

serskild konstruktion, åtminstone med författarens definition på parallelism, förstå vi icke. Visserligen är det ej svårt att utföra denna konstruktion; men då samma konstruktion är fullt tillräcklig för att direkt bevisa hela satsen, är det besynnerligt att H. väljer ett indirekt bevis och i detta förutsätter att lärjungen på egen hand kan utföra ett bevis, som ensamt är tillräckligt att bevisa hela satsen på direkt väg.

3) I exhaustionssatserna, t. ex. i satsen att cirklar förhålla sig till hvarandra som qvadraterna på deras diametrar, visar förf. ej möjligheten att i en cirkel, som är större än en gifven plan figur, inskrifva en regulier månghörning större än denna plana figur. Märk: ingen tviflar på att det är möjligt att af en större figur afskära ett stycke lika stort med eller större än en gifven mindre figur. Men skall det afskurna stycket ha en bestämd form, då kan man ifrågasätta dess möjlighet. Euklides upptog derföre sitt bekanta lemma ur 10:de boken: »man kan genom upprepad midtitudelning af en större storhet slutligen komma till en del, som blir mindre än en gifven mindre storhet», och bevisade detsamma stödjande sig på en sats, som han ansåg axiomatisk, nemligen: »huru liten en storhet än må vara, kan man alltid finna en mångfald af denna, som är större än en gifven större storhet.» Archimedes åter ansåg ej ens denna axiomatisk, utan uppställde den såsom en princip omöjlig att bevisa. Huru som helst, den mathematiska ärligheten fordrar, att bevisen framställas så, att man ej tror sig kunna bevisa mer än man i sjelfva verket kan.

Vi skulle önska, att förf. i en blifvande upplaga i sina exhaustionssatser begagnade ej allenast, liksom Euklides, inskrifningar, utan äfven omskrifningar. Bevisen skulle derigenom blifva mera lättfattliga.

4) Hellströms definition på ett tangerande plan till ett klot är icke den naturliga. Förf. säger nemligen: »En sfer säges *tangeras* af ett plan, om den radie, som drages till tangeringspunkten, är vinkelrät mot planet. Planet kallas tangentialplan.

Anm. Enär den vinkelräta linien är den minsta af alla räta linier, som kunna dragas från en punkt till ett plan, så måste planet ligga helt och hållet utom sferen.»

Enklare och naturligare vore utan tvifvel att säga: »Ett klot säges tangeras af ett plan i en viss punkt, om planet berör klotet utan att skära detsamma.

Anm. Ett sådant plan erhålles tydligen genom att draga i tangeringspunkten tvenne mot klotets radie i denna punkt vinkelräta linier. Det af dessa båda linier bildade planet är det sökta tangerande planet.»

5) Satserna om dodekaëdern och ikosaëdern, ehuru i sig sjelfva visst ej svåra, kosta dock elever mycket arbete att genomläsa till följd af den massa bokstäfver och linier, på hvilka de skola hålla

reda. Vi skulle derföre önska att förf. uppoffrade något af fullständigheten och figurernas elegans, och i stället, liksom andra författare, lemnade en ledning att förfärdiga dessa figurer genom näts uppritande. Sålunda är det vid dodekaëderns konstruktion fullt tillräckligt att rita upp blott tre angränsande femhörningar. Om ikosaëdern uppritades liksom en trumma med en pyramid på hvardera bottnen, skulle uppfattningen af densamma betydligt underlättas.

6.) Äfven H. har utan bevis anfört satsen om beräkningen af en cylindrisk ring.

Sist må vi tillägga några ord om förf. öfningsexempel. Dessa synas temligen väl valda. Man får här lära sig att beräkna kubikinnehållet och kantvinklar m. m. hos hos en mängd kristaller, såsom af agat, platina, svafvelsalter, flusspath, granat, alun, magnetisk jernmalm, diamant, koboltglans, topas, rubin, bergkristall, zirkon, smaragd. Vi lyckönska Hellström till hans arbete och äro förvissade att det ej dröjer länge, innan en stor del af Sveriges mathematiskt bildade ungdom har tillegnat sig detsamma.

F. W. Hultman.

III. *Ännu några ord om Satsläran.*)*

Herr lektor Bjursten har i denna tidskrift låtit införa ett genmäle på min granskning af hans lärobok i satsläran. Han har deri underlåtit att fästa sig vid de svaga punkterna i min artikel, hvari funnos åtskilliga oegentliga uttryck som, i förening med uteglömmandet på något ställe af en hel mening, gjorde bevisningen af åtminstone ett par påståenden temligen dunkel. Jag tackar honom för detta öfverseende, men ännu mera för hans lifliga önskan att fortsätta denna diskussion, som han anser röra ett för undervisningen vigtigt ämne.

Herr B. låter mig säga: »på uppmaning af *flera* lärare«. Citatet är origtigt, ty utom det att jag icke satt något attribut vid ordet »lärare«, skrifver jag *flere,* icke *flera*, ehuru någon boktryckare möjligen kan föredraga det sednare skrifsättet, likasom han ock kan förvandla *adverb* till *adverbia.***)

Utan tvekan medgifves, att äfven min lärobok i satsläran är behäftad med åtskilliga fel och således i detta afseende kan utgöra föremål för klander. Men innehåller hon åtminstone några goda och nyttiga upplysningar, så torde hon icke förtjena det hårda omdöme, som jag tagit mig friheten att fälla om herr B:s bok. Detta omdöme måste dock modifieras, om man ställer sig på deras

---

*) Då Ins. önskat att med några ord fredligt afsluta polemiken mot det ifrågavarande arbetets förf., har red. icke velat vägra plats för denna artikel, ehuruväl det som af begge parterna redan blifvit andraget kunde anses tillräckligt. Red. har derföre äfven lemnat Herr Lektor Bjursten öppet att med ytterligare några anmärkningar från sin sida beledsaga ins:s förklaring; men Herr B. har bedt oss blott anmärka, det han, sedan en af Regeringen utsedd opartisk auktoritet numera pröfvat samtliga språkliga läroböcker, föredrager att invänta det omdöme, som i *denna* auktoritets berättelse kommer att fällas äfven om hans arbete, och de svar som der tvifvelsutan erhållas på åtskilliga hit hörande frågor. (A.)

**) För denna formförändring såväl som för den längre ned klandrade pluralen »adverbi*aler*« torde skulden uteslutande böra tillskrifvas red:s gammalmodiga smak. (A.)