Räknekonstens utvecklingslagar.

Av A. Edv. Franzén.

Andra lagen.

1. I det föregående (Första lagen, Ped. tidskr. 1907, sid. 78) definierades produkten av a och b såsom summan av a addender, alla lika med b, eller summan av b addender, alla lika med a. I anslutning härtill definieras produkten av ett helt tal a och ett tal b, som icke är helt, såsom summan av a addender, alla lika med b. Denna senare definition måste tillgripas även i det fall, att b betyder noll:

$$a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0 + 0 + 0 + \ldots (\text{a st.}) = 0.$$

I detta fall är således produktens värde oberoende av värdet på a. I anslutning därtill låter man även produkten av b och 0 ha samma värde, således

$$b \,.\, 0 = 0 \,.\, b = 0.$$

Härav följer med avseende på storleken av produkten ab, att

$$\begin{aligned} ab &> b\,, \text{ om } a = 2, 3, 4, \ldots \\ ab &= b\,, \text{ om } a = 1\,, \\ ab &< b\,, \text{ om } a = 0\,. \end{aligned}$$

Detta gäller för alla positiva tal b, vare sig hela eller icke.

2. Sedan man sålunda funnit, att

$$a \,.\, \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots (\text{a st.}) = a : n\,,$$

där a och n beteckna hela tal, definierar man

$$b \,.\, \frac{1}{n} = b : n\,.$$

där n betecknar ett helt tal, men b ett tal, som icke är helt. Det kan förefalla motbjudande att definiera en multiplikation genom en division[1]). Emellertid får man ej förbise den väsentliga olikheten mellan beståndsdelarnas beskaffenhet i de båda räknesätten: i multiplikationen är ingendera beståndsdelen helt tal men i divisionen är den ena beståndsdelen (divisorn) helt tal. Därför är kvoten $b:n$ ett enklare begrepp än produkten $b \cdot \frac{1}{n}$, och således ligger det i själva verket intet orimligt i definitionen:

produkten av två bråk = en kvot, där divisorn är ett helt tal.

3. Det må vara nog med dessa antydningar om multiplikationens utveckling ur den enkla sammanläggningen av a addender, alla lika med b. Denna utveckling har passerat två kritiska punkter:

1) en extrapolation från de naturliga talen till talet noll, således från

$$b \cdot 3 = b + b + b \ , \ b \cdot 2 = b + b \ , \ b \cdot 1 = b$$

till

$$b \cdot 0 = 0 \ , \ \text{t. ex. } 0 \cdot 0 = 0 \ , \ \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \ ,$$

2) en interpolation mellan 0 och 1 enligt formeln

$$b \cdot \frac{1}{n} = b : n \ ,$$

$$\text{t. ex. } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6} .$$

4. Emedan potensering i sin begynnelse är en upprepad multiplikation med lika faktorer, har man formeln

$$(1) \quad a^{n+1} = a \cdot a^{n},$$

som gäller för alla hela positiva tal n. Man kan fråga, vad det blir av denna formel för $n = 0$ (den vanliga extrapolationen). Man finner $a^{0} = 1$ och låter detta vara definitionen på a^{0}.

---

[1]) Jfr K. P. Nordlund, Om undervisning i räkning, Ped. tidskr. 1906, sid. 191, och G. Hellsten, Ett bidrag till metodiken för räkneundervisningen i folkskolan, Manhem 1906, sid. 84 f.

5. Sedan vill man definiera a^x för sådana tal x, som äro belägna mellan två hela tal n och $n + 1$. För detta ändamål låter man till en början formeln (1) gälla även för dessa mellanliggande tal (interpolation), således

$$(2) \quad a^{x+1} = a \cdot a^x.$$

Antag nu för ett ögonblick, att vi redan ha definierat potensen a^x för $0 < x < 1$. Enligt (2) är då a^{x+1} definierad för $0 < x < 1$, således för $1 < x + 1 < 2$. Skriv nu x för $(x + 1)$, så är a^x definierad för $1 < x < 2$. Sedan fås på samma sätt successivt definitionen på a^x för mellanrummen

$$2 < x < 3\,,\; 3 < x < 4\,,\; \ldots.$$

Alltså: sedan vi fastslagit formeln (2), är det tillräckligt för definitionen av a^x att definiera denna funktion i mellanrummet $0 < x < 1$.

6. Härvid kan man gå till väga på olika sätt. Först vill jag erinra om det sätt, som allmänt användes vid den elementära undervisningen. Man kan härleda ur (1) eller också mera omedelbart inse (enligt definition på a^n), att

$$a^m \cdot a^n \ldots a^r = a^{m+n+\ldots+r}.$$

Låt nu alla exponenterna vara lika stora, så fås

$$a^m \cdot a^m \ldots a^m = a^{m+m+\ldots+m}.$$

Om nu exponenternas antal är n, så fås

$$(3) \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

således en ny formel, som också gäller för potensen a^n lika väl som (1) och i själva verket kan härledas ur (1). Vid framställandet av formeln (3) har jag använt den tankegång, som är skildrad i föregående avdelning (Första lagen, § 14, sid. 86).

7. Sedan man bevisat formeln (3), definierar man a^x för $0 < x < 1$ på det sätt, att man till en början sätter $x = \frac{1}{n}$ och låter (3) gälla även för dessa värden på x, så att

$$(a^x)^n = a^{nx} = a.$$

Därmed vinner man, att det sökta talet a^x blir en lösning (en rot) till ekvationen

$$(4) \quad y^n = a.$$

Om denna ekvation (4) bevisar man[1]) sedan följande sats: Då n är ett naturligt tal och a ett positivt tal, så finnes det ett och endast ett positivt tal y, som satisfierar ekvationen (4). Man beräknar detta tal y (i allmänhet endast approximativt) och har då

$$a^x = y, \text{ där } x = \frac{1}{n}.$$

Slutligen följer härav genom en ny tillämpning av (3)

$$y^m = (a^x)^m = a^{mx}.$$

Låt nu $m < n$ och skrif x för mx, så fås

$$a^x = y^m, \text{ där } x = \frac{m}{n}.$$

Därmed är då äntligen potensen a^x definierad för alla rationella tal x mellan 0 och 1.

8. Denna metod har förtjänsten att undvika oändliga serier, men i stället inför den en oändlig mängd ekvationer (4), som kräva olika lösningsmetoder för olika värden på n. Definitionen är alltför formell och resulterar icke i någon allmän metod att beräkna a^x för ett x (eller n) vilket som hälst. Man vinner ingen fullständig öfverblick över variationen av a^x med x, förrän man kommer till utvecklingen i en oändlig serie. Då finner man, att a^x kan representeras genom en potensserie av formen

$$(5) \quad a^x = 1 + cx + \frac{c^2 x^2}{2!} + \frac{c^3 x^3}{3!} + \dots.$$

För $x = 1$ fås härav

$$(6) \quad a = 1 + c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \dots$$

---

[1]) Weber, Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis, s. 98. Leipzig 1903.

Denna enda ekvation (6) träder nu i stället för de oändligt många ekvationerna (4). För $0 < a \leqq 2$ har ekvationen (6) denna lösning

$$(7) \quad c = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots.$$

Därmed är då a^x angiven såsom explicit funktion både av a och x. Låt t. ex. $a = 2$, $x = \frac{1}{n}$, så fås

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \frac{c}{n} + \frac{c^2}{2!\,n^2} + \frac{c^3}{3!\,n^3} + \ldots.$$

där
$$c = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

således approximativt

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \frac{0{,}693147}{n} + \frac{0{,}240125}{n^2} + \frac{0{,}055469}{n^3} + \ldots.$$

speciellt $\sqrt{2} = 1{,}41421$ $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992$

$\sqrt[10]{2} = 1{,}07177$ $\sqrt[100]{2} = 1{,}00696$ o. s. v.

9. För att fortare komma fram till den viktiga formeln (5) kan man gå till väga på följande sätt.[1]) Det visade sig (§ 5) vara tillräckligt att definiera a^x för intervallet $0 < x < 1$. Om man nu förutsätter någon kännedom om potensserier, bör det icke överraska, att man väljer en (ändlig eller oändlig) potensserie till att representera a^x åtminstone i det nämnda intervallet. Man sätter således på försök

$$(8) \quad a^x = 1 + cx + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots.$$

och bestämmer koefficienterna t. ex. på följande sätt. Låt x och y vara två tal, som äro tillräckligt små, i

[1]) Jfr Ohm, Versuch eines Systemes der Math. 1821. II, p. 302. Stolz, Allgemeine Arithmetik 1885. I, p. 303.

varje fall så små, att $x + y < 1$. Enligt antagandet (8) är då

$$a^y = 1 + cy + c_2\ y^2 + c_3\ y^3 + c_4\ y^4 + \ldots .$$

$$a^{x+y} = 1 + c\,(x+y) + c_2\,(x+y)^2 + c_3\,(x+y)^3 + c_4\,(x+y)^4 + \ldots .$$

därför

$$a^x \,.\, a^y = 1 + c\,(x + y) + c_2\,(x^2 + y^2) + c^2\,xy + c_3(\,x^3 + y^3) +$$
$$+ cc_2\,(x^2y + xy^2) + c_4\,(x^4 + y^4) + cc_3\,(x^3y + xy^3) + c_2^2\,x^2y^2 + \ldots .$$

$$a^{x+y} = 1 + c\,(x + y) + {}_2\,(x^2 + y^2) + 2\,c_2\,xy + c_3\,(x^3 + v^3) +$$
$$+ 3\,c_3\,(x^2y + xy^2) + c_4\,(x^4 + y^4) + 4\,c_4\,(x^3y + xy^3) +$$
$$+ 6\,c_4\,x^2\,y^2 + \ldots .$$

Dessa båda serier äro nästan lika, och de bli fullständigt lika, om man väljer

$$2\ c_2 = c^2\,, \quad 3\ c_3 = cc_2\,, \quad 4\ c_4 = cc_3\,, \ldots .$$

således

$$c_2 = \frac{c^2}{2}\,, \quad c_3 = \frac{c^3}{2\,.\,3}\,, \quad c_4 = \frac{c^4}{2\,.\,3\,.\,4}\,, \ldots .$$

Därmed övergår (8) till (5), en oändlig, men alltid konvergent potensserie. Vårt försök (8) visar sig lämpligt, och koefficienterna kunna bestämmas med tillhjälp av ekvationen

$$a^{x+y} = a^x\,.\,a^y.$$

Denna ekvation är allmännare än (2) och står i samma förhållande till heltalsformeln

$$a^{n+m} = a^n\,.\,a^m$$

som (2) till (1).

10. Emedan superpotensering i sin enklaste form är en upprepad potensering med lika beståndsdelar, har man formeln (I, § 12, sid. 85)

$$\text{(I)} \quad (a\,;\,n + 1) = a^{(a\,;\,n)}$$

som gäller för alla hela positiva tal n. Speciellt för $n = 1$ har man i överensstämmelse med denna formel

$$a^{(a\,;\,1)} = (a\,;\,2) = a^a\,, \quad (a\,;\,1) = a.$$

Jag extrapolerar nu i formeln (I) för $n = 0$ (jfr § 3 och § 4) och får sålunda

$$a^{(a\,;\,0)} = (a\,;\,1) = a.$$

Definitionen på $(a\,;0)$ blir därför (liksom på a^0)

$$(a\,;\,0) = 1.$$

11. För att sedan definiera $(a\,;x)$ för sådana tal x, som äro belägna mellan två hela tal n och $n + 1$ (för att interpolera, jfr § 3 och § 5) generaliserar jag formeln (I) till att gälla även för dessa mellanliggande tal, således

$$\text{(II)} \quad (a\,;\,x + 1) = a^{(a\,;\,x)}.$$

Såsom förut vid potensen (§ 5) inses nu, att vi endast behöva definiera $(a\,;\,x)$ för ett intervall af längden ett. För övrigt kan man gå till väga på olika sätt. Jag skall här inskränka mig till ett exempel, d. v. s. välja ett speciellt värde på a. Liksom vi förut (§ 8) specialiserade exponentialfunktionen (la fonction exponentielle) a^x till 2^x, så skola vi nu specialisera den superexponentiella funktionen (la fonction surexponentielle) $(a\,;\,x)$ till $(\sqrt{2}\,;\,x)$. Denna bestämda analytiska funktion $(\sqrt{2}\,;\,x)$ skola vi studera för positiva, negativa och komplexa värden på x och därvid alltid tillämpa formeln (II) för $a = \sqrt{2}$.

12. Det följer genast av (II), att funktionen $(\sqrt{2}\,;\,x)$ växer med x för positiva värden på x. Låt då x växa mot $+\infty$, så måste $(\sqrt{2}\,;\,x)$ växa antingen mot $+\infty$ eller mot ett visst positivt tal $(\sqrt{2}\,;\,+\infty)$. Men nu är

$$(\sqrt{2}\,;\,1) = \sqrt{2} < 2.$$

Därför enligt (II)

$$(\sqrt{2}\,;\,2) < (\sqrt{2})^2 = 2$$

och således successivt enligt (II)

$$(\sqrt{2}\,,\,2) < 2\,,\ (\sqrt{2}\,;\,3) < 2\,,\ \ldots.\ (\sqrt{2}\,;\,n) < 2.$$

Alltså kan icke $(\sqrt{2}\,;\,x)$ växa med x mot $+\infty$, utan man måste ha

$$(\sqrt{2} + \infty) \leqq 2.$$

I själva verket är likhetstecknet det rätta. Detta följer av likheten (identiten)

$$2 = (\sqrt{2})^2,$$

som är ett specialfall av (II) för $a = \sqrt{2}$. Därmed är då bevisat, att kurvan

$$\text{(III)} \quad y = (\sqrt{2}\,;\, x)$$

har en rätlinig asymptot, nämligen $y = 2$.

13. Jag skall nu definiera $(\sqrt{2}\,;\, x)$ för $x = -1$ o h $x = -2$. Enligt (II) är

$$a^{(a\,;\,-1)} = (a\,;\,0) = 1.$$

Därav definitionen $(\sqrt{2}\,;\,-1) = 0$. Sedan följer av (II), att

$$(\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\,;\,-2)} - (\sqrt{2}\,;\,-1) = 0.$$

Därav följer, att kurvan (III) har ännu en rätlinig asymptot, nämligen $x = -2$. Kurvans båda asymptoter äro vinkelräta mot varandra. Det ligger då nära till hands att jämföra en gren av kurvan (III) med en gren af den liksidiga hyperbeln

$$\text{(IV)} \quad y = 2 - \frac{2}{x + 2}.$$

Kurvorna (III) och (IV) ha två gemensamma asymptoter, nämligen de båda räta linjerna

$$y = 2 \qquad \text{och} \qquad x = -2,$$

samt två gemensamma punkter, nämligen

$$x = 0,\ y = 1 \qquad \text{och} \qquad x = -1,\ y = 0.$$

De båda grenar, som motsvara $x > -2$, äro approximativt lika. Därför väljer jag såsom första approximation

$$\text{(V)} \quad (\sqrt{2}\,;\, x) = 2 - \frac{2}{2 + x},$$

där den reella delen av x är större än -2. Punkten

$x = -2$ är singulär för den analytiska funktionen $(\sqrt{2}\,;\,x)$, såsom vi nyss funnit. Genom upprepad användning av formeln (II) finner man successivt, att även punkterna

$$x = -3\,,\ -4\,,\ -5\,,\ \ldots\ldots$$

äro singulära. Men några andra singulariteter än dessa punkter har funktionen tydligen icke. Den representeras approximativt (mer eller mindre väl) av uttrycket (V) i hela x-planet med undantag av reella x mindre än -2. För dessa undantagna x-värden är funktionen tydligen obestämd (dubbeltydig) och imaginär, under det att uttrycket (V) är bestämt och reelt. Låt t. ex. $x = -\frac{5}{2}$, så fås av (II) och (V) approximativt

$$(\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\,;\,-\frac{5}{2})} = (\sqrt{2}\,;\,-\tfrac{3}{2}) = -2\,,$$

därför

$$(\sqrt{2}\,;\,-\tfrac{5}{2}) = 2 \pm \frac{2\pi i}{\log 2}.$$

under det att (V) skulle omedelbart ge värdet 6. Härav inses, att funktionen $(\sqrt{2}\,;\,x)$ antar reella värden endast för reella x-värden, som äro större än -2.

14. Det återstår i fråga om funktionen $(\sqrt{2}\,;\,x)$ att visa, huru man ur en approximativ bestämning sådan som (V) kan härleda en annan, som är bättre. Jag skall åskådliggöra detta genom ett exempel. Jag väljer $x = \frac{3}{2}$ (jfr § 8, där man för $x = \frac{3}{2}$ fick ett närmevärde på $\sqrt{2}$). Den första approximationen är enligt (V)

$$(\sqrt{2}\,;\,\tfrac{3}{2}) = \tfrac{6}{5} = 1{,}2.$$

Jag skall nu samtidigt beräkna $(\sqrt{2}\,;\,x)$ för $x = \frac{1}{2} + 1$ eller $x = \frac{1}{2} - 1$. Jag väljer det senare, således $x = -\frac{1}{2}$. Enligt (V) är i första approximationen

$$(\sqrt{2}\,;\,-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3}.$$

Därför enligt (II)

$$(\sqrt{2}\,;\,\tfrac{1}{2}) = (\sqrt{2})^{2/3} = \sqrt[3]{2} = 1{,}26.$$

Det aritmetiska mediet mellan detta närmevärde och det första är

$$(\sqrt{2}\,;\tfrac{1}{2}) = 1{,}23.$$

Men enligt (II) är också

$$(\sqrt{2}\,;-\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{\log 2}\log(\sqrt{2}\,;\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{\log 2}\log\tfrac{6}{5} = 0{,}53.$$

Det aritmetiska mediet mellan detta närmevärde och det förra är

$$(\sqrt{2}\,;-\tfrac{1}{2}) = 0{,}60.$$

De sålunda framställda aritmetiska medierna äro bättre approximationer än de ursprungliga. Därmed är en metod angiven att samtidigt beräkna $(\sqrt{2}\,;\tfrac{1}{2})$ och $(\sqrt{2}\,;-\tfrac{1}{2})$ eller i allmänhet $(\sqrt{2}\,;x)$ och $(\sqrt{2}\,;x\pm 1)$ huru noggrant som hälst.

Anmälningar och recensioner.

Bergstrand, A. G:n, Grunddragen af den kristna tros- och sedeläran för de allmänna läroverkens mellanklasser framställda. Lund, C. W. K. Gleerup, 1909. 92 sidor. Pris bunden 1 kr. 60 öre.

Förordet till denna bok väcker glada förväntningar. Ingen bundenhet av Lilla katekesen men ständig hänsyn till den, det hela lagt på empirisk-psykologisk grundval, tillgodoseende av sedeläran, undvikande av stereotyp uppställning — allt detta är ju förträffliga grundsatser.

Och när man går från förordet till framställningen själv, finner man, att förf. gjort allvar av dessa grundsatser. Särskilt i fråga om den viktigaste av dem, byggandet på empirisk-psykologisk grundval, har boken många goda grepp. Dit räknar jag t. ex. att förf. vid framställningen av synden utgår från vår egen erfarenhet av synd inom och omkring oss och därifrån letar sig tillbaka till dess grund, syndafallet (sid. 17—19).