större än 1 eller till en imaginär tangent o. s. v. Sådana exempel äro mycket upplysande, föranleda mycken *reflexion och* äro *mycket* pikanta.

Jag slutar med att uttala den öfvertygelsen, att detta författarens arbete kommer att blifva till mycket gagn för vårt fäderneslands studerande ungdom.

F. W. Hultman.

2. Den analytiske geometries begyndelsegrunde af H. G. Zeuthen. Kjøbenhavn 1867.

Denna lärobok i elementen af den plana analytiska geometrien, ehuru närmast afpassad efter danska examensförhållanden, synes, med afseende på fullständighet och tillgodogörande af de nyaste forskningar inom geometrien (Salmon, Plücker), såsom elementarbok betraktad icke lemna någonting öfrigt att önska. Äfven i vårt land torde derföre denna bok med fördel kunna användas vid studiet af den analytiska geometriens element.

Om den aritmetiska undervisningsmetoden.

1. Diskussion om undervisningen i aritmetik. Af lektor Guldbr. Elowson.
2. Genmäle till herr lektor Hultman. Af Isidor Smedberg.
3. Svar på herr Smedbergs genmäle. Af lektor Hultman.

Såvida redaktionen af «Tidskrift för Matematik och Fysik« anser lämpligt att diskutera undervisningen i aritmetik, så tager sig undertecknad härmed friheten inleda en dylik diskussion. Närmaste anledningen dertill är en i tidskriftens 5:te häfte, sidd. 233—244, intagen «Anmälan af tio stycken räkneböcker« af F. W. Hultman. Innehållet i närvarande uppsats kommer derföre att bestämmas med hufvudsakligt afseende på innehållet i omnämnda «Anmälan«. De «stora skiljaktigheter«, som H.* funnit i de anmälda «tio stycken räkneböcker«, anser han härflyta af tvenne olika åsigter om den aritmetiska undervisningens mål. Olikheten emellan dessa båda åsigter angifves. Anhängarne af den ena åsigten vilja «lära eleven klart inse lagarne för de aritmetiska operationerna«, hvilken insigts förvärfvande antydes ske derigenom, att

* Dermed betecknа vi: F. W. Hultman.

lärjungen först inhemtar regel, derefter beviset för densamma och slutligen, sedan han fått regeln bevisad, räknar mekaniskt. Den andra åsigtens anhängare vilja «utbilda elevens förmåga af tankearbete på aritmetiska uppgifter och derigenom indirekt äfven på frågor inom öfriga delar af mensklig forskning«, hvilket antydes skola ske derigenom, att man låter lärjungen deducera reglerna för de aritmetiska operationerna ur en samling af exempel. Sedan de båda olika åsigterna sålunda blifvit karakteriserade, inrangeras jag på grund af E-L-B. * ibland den förra åsigtens anhängare, hvaremot H. «obetingadt« sluter sig «till den den åsigten, som afser tankeverksamheten för hufvudsaken«. Den diskussion, som jag härmed velat inleda, bör i ett af sina moment utgöra en undersökning af, huruvida sjelfva punctum quæstionis är af H. rigtigt angifven, alldenstund min personliga åsigt om undervisningen i aritmetik är i afseende på nödvändigheten af lärjungens sjelfverksamhet alldeles lika med, hvad H. förklarat vara sin åsigt. H. synes också vilja anse alla de anmälda räkneböckerna, följaktligen äfven E-L-B., såsom en protest emot hvarje undervisningsmetod, som möjligen kunde hafva något annat syftemål än att «begripa hvad man lär«. Om giltigheten af denna sats äro vi väl alla lifligt öfvertygade. Den närmare utvecklingen af mina åsigter angående undervisningen i aritmetik innehålles naturligtvis i E-L-B. I saknad af en dylik objektivt gifven utveckling af H:s pedagogiska åsigter i detta ämne antager jag honom hylla den hevristiska metoden, hvaraf vi hafva en representant i K. P. Nordlunds Räkneöfningsexempel, hvilket antagande jag grundar derpå, att han anser dessa räkneöfningsexempel såsom ett pedagogiskt mästerstycke. Jag kommer derföre i det följande att omnämna dessa räkneöfningsexempel och beteckna dem med R-Ö-E. **

Uti ett kort företal angifver E-L-B. såsom mål för undervisningen i aritmetik «en klar och tydlig uppfattning af lagarne för aritmetikens räkneoperationer samt säkerhet och färdighet i dessa räkneoperationers användning i enskilda fall.« Dermed angifves detta mål innefatta tre moment, nämnligen 1) en klar och tydlig, d. v. s. begreppsmässig uppfattning af lagarne för aritmetikens räkneoperationer, 2) säkerhet i räkneoperationernas användning på enskilda fall och 3) färdighet i räkneoperationernas utförande. Lärjungen bör således komma derhän, att han känner betydelsen af de särskilda räkneoperationerna, att han kan i begripliga ordalag redogöra för

---

* Dermed beteckna vi: Elementar-Lärobok i Arithmetik af Guldbrand Elowson, Upsala 1868.

**) Naturligtvis kan här icke blifva fråga om någon recension af denna bok, då jag icke känner "grunderna för dess uppställning, anvisningar och råd vid deras användande m. m."

de förfaringssätt, han använder vid operationernas utförande, och att han kan angifva skäl för dessa förfaringssätt. Om han t. ex. skall utföra en addition i hela tal, så bör han, vare sig räkningen verkställes »i hufvudet« eller på taflan, veta hvad addition är eller åtminstone hvad som dermed åsyftas; han skall kunna tala om, huru han förfar vid uträkningen, vare sig han börjar med att sammanlägga de i addenderna förekommande enheter (af 1:sta ordningen), derefter tiotal o. s. v., eller han först sammanlägger de i addenderna förekommande högsta enheter och derefter öfvergår till enheter af någon hvilken som helst lägre ordning, eller han sammanlägger addenderna i deras helhet den ena efter den andra, och för det förfaringssätt, han verkligen använder, bör han kunna anföra giltiga skäl. Skall han t. ex. taga produkten af 758 och 643, så bör han kunna redogöra för sitt förfaringssätt, vare sig han följer schemat

$$
\begin{array}{r}
758 \\
\underline{643} \\
2274 \\
3032 \\
\underline{4548} \\
487394
\end{array}
$$

eller 643 (700 + 50 + 8) eller 643 (700 + 60 — 2) eller hvilket annat schema som helst, och tillika säga, hvarföre han gör just så. Skall han multiplicera tvenne bråk, så måste han hafva en klar uppfattning af hvad denna operation betyder, ty eljest blir hans aritmetiska bildning högst bristfällig. Om det således är rigtigt, att lärjungen bör känna lagarne för de aritmetiska operationerna och det icke blott så, att han »känner med sig«, huru han skall förfara, utan på ett sådant sätt, att han kan i begripliga ordalag uttrycka förfaringssättet, så synes det vara nyttigt, att uttrycken för dessa lagar, hoc est reglerna, äro angifna i läroboken. Deraf följer dock icke, att *reglerna skola inhemtas först* och derefter räkningen vidtaga, ännu mindre, att reglerna skola läras utantill och räkningen derefter ske mekaniskt, utan reglerna d. v. s. uttrycken för de aritmetiska räknelagarne böra inläras, under det att läraren visar och undervisar lärjungarne, huru den eller den räkneoperationen skall utföras. Har t. ex. undervisningen fortskridit derhän, att en division skall på taflan utföras, så synes det mig ändamålsenligt, att läraren först sjelf uträknar ett exempel och dervid icke blott visar förfaringssättet med uppmaning till lärjungarne att se efter, huru han gör, utan äfven med tydliga ord talar om, huru han gör, och, såvidt lärjungarnes fattningsförmåga kan följa med, hvarföre han gör så eller så. Derefter bör någon af ynglingarne gå fram till taflan och räkna ett annat exempel. Han bör dervid icke allenast uppskrifva den ena siffran efter den andra, allteftersom hans räkning fortskrider, utan tilllika «räkna högt« och med ledning af läraren tala om, hvad den eller den operationen innebär, hvartill det eller det leder, hvarföre det använda förfaringssättet är berättigadt o. s. v. Uppfattningen af lagarne för de aritmetiska operationerna bör i hög grad underlättas, om lärjungen får i lärobokens regler repetera det på sådant sätt muntligt genomgångna. Vill man ur läroboken taga bort reglerna, d. v. s. ännu en gång uttrycken för de aritmetiska räknelagarne, så synes mig, att man med samma fog kunde taga bort äfven exemplen. Undervisningen i aritmetik blefve derigenom antingen helt och hållet eller åtminstone öfvervägande muntlig. Läraren finge meddela både regler och exempel.

(Forts.)

Satser,

gifna i skriftliga mogenhetsexamen h. t. 1868.

För latinlinien.

(2 st. på 4 tim.)

1. *Trenne segmenters bågar äro lika stora äfvensom deras höjder; att bevisa deras kongruens.*

2. *Att i en gifven qvadrat inskrifva en annan, hvilkens diameter har en gifven längd.*

3. *Att uppr ita en triangel, som är likformig med en gifven triangel och har en gifven linie till höjd.*

4. *I en gifven cirkel är en korda apterad och på denna korda en viss punkt tagen. Att upprita en cirkel, som tangerar den gifna cirkeln i kordans ena ändpunkt och går genom den tagna punkten.*

5. *Fyra räta linier äro gifna. Att bestämma två parallelogrammer, som hafva till hvarandra ett förhållande, som är komponeradt af liniernas förhållanden.*

6. *Att upprita en cirkel, då man känner två af dess kordor samt afståndet dem emellan.*

7. *Bevisa, att diametern till den i en rätvinklig triangel inskrifna cirkeln är lika med öfverskottet, hvarmed summan af de båda kateterna öfverskjuter hypotenusan.*

8. *Upprita en cirkel, hvars periferi är lika med summan af två gifna cirklars periferier.*

Om den aritmetiska undervisningsmetoden.

1. Diskussion om undervisningen i aritmetik.

Af lektor GULLBR. ELOWSON.

(Forts. fr. sid. 297 förra årgången.)

Om läraren noga fasthåller 1:sta momentet i det ofvan antydda målet för den aritmetiska undervisningen, så synes mig lärjungen kunna säkrast och lättast förvärfva sig den förmåga, som sätter honom i stånd att uppfylla det angifna 2:dra momentet i detta mål. Ty om lärjungen känner betydelsen af de särskilda räkneoperationerna eller åtminstone syftet med hvar och en af dem och de hufvudsakliga fall, i hvilka de användas, så synes det naturligt, att han med ledning af denna kunskap säkrast förvärfvar sig förmåga att bedöma, hvilken räkneoperation bör användas i hvarje särskildt fall af de i lifvet förekommande räknefrågor. Såsom en möjlig och äfven enligt min erfarenhet icke sällan förekommande följd af mekanisk räkning efter på förhand inlärda regler uppgifver H. den omständigheten, att en yngling med långt drifven räknefärdighet det oaktadt kan »fastna» vid lösningen af den enkla frågan, hvad $\frac{3}{4}$ af 12 Rdr är, emedan han af »instinkten» förledes till origtig användning af en känd räkneoperation. Denne gosse felar först och främst derutinnan, att han vid lösningen af det framställda problemet låter sig ledas af instinkten och icke af förståndet. Den undervisningsmetod, som med afsigt att uppfostra i intellektuelt hänseende tager instinkten till hjelp, är eo ipso förkastlig. Möjligen är det matematiska snillet beslägtadt med någon divinatorisk instinkt (sit venia verbo), men snillet bör man sannerligen låta bli att fästa afseende vid, då fråga är om undervisning i våra skolor för den stora mängden af medelmåttiga förmågor. Vidare visar denne samme gosse på det tydligaste, att han icke känner betydelsen af multiplikation. Ty om han vet, att produkten af $\frac{3}{4}$ och 12 är per ipsam definitionem multiplicationis just $\frac{3}{4}$-delar af 12, så lär han icke gerna kunna undgå att inse, det $\frac{3}{4}$-delar af 12 är just produkten af $\frac{3}{4}$ och 12. Den såsom exempel framstälde ynglingen gifver bevis om ofullständig aritmetisk bildning derigenom att han icke känner, i hvilka fall multiplikation bör användas, ännu mindre hvad multiplikation betyder, och derigenom att han icke kan genast uppgifva resultatet af den ifrågavarande enkla räkningen. En annan följd af mindre god undervisning i aritmetik visar sig ofta deruti, att fullväxta personer, som länge och mycket sysselsatt sig med de i lifvet förekommande räknefrågor och hvilka utan att vilja anses för aritmetici dock skulle betrakta såsom en förnärmelse, om man satte i fråga, huruvida de kände betydelsen af multiplikation, genast och såsom någonting sjelfklart uppgifva svaret på frågan, hvad $\frac{3}{4}$-delar af 12 Rdr är, men dock kunna «fastna«, om man frågar dem, hvilket räknesätt de för frågans besvarande använde. Det kan inträffa och har ofta inträffat, att en gosse kan uppgifva, hvad $\frac{3}{4}$-delar af 12 Rdr är, utan att veta, hvilket räknesätt han för resultatets finnande skall använda, och att en annan vet, huru han skall gå tillväga, för att finna hvad $\frac{3}{4}$-delar af 12 Rdr är, utan att genast hafva resultatet «i hufvudet«. Hos båda är kunskapen i aritmetik mindre nöjaktig; men jag sätter dock den senares kunskap betydligt högre än den förres. Den senare kan nämnligen besvara alla likartade frågor t. ex. hvad [illegible]-delar af 0,00643 är, hvilken fråga den förre omöjligen kan besvara, såvida icke den bristande kunskapen i det första fallet var en följd af tillfällig tanklöshet eller han är något slags aritmetiskt underbarn, som kan «i hufvudet« finna, huru mycket $\frac{3}{581}$-delar af 0,00643 utgör och dock icke på samma gång vet, att det för honom bekanta resultatet är produkten af de båda gifna talen. Då en gosse vet, att [illegible]-delar af 0,00643 erhålles genom multiplikation, så kan han ock, när han kommer till algebran, utan svårighet finna, hvad [illegible]-delar af a är, hvilket är obegripligt för den, som icke känner betydelsen af multiplikation. Svaret på den i alla applikationer af aritmetiken vigtiga frågan: «hvilket räknesätt skall jag här använda« synes mig följaktligen böra säkrast finnas, om man känner betydelsen af de särskilda räknesätten eller atminstone de hufvudsakliga fall, i hvilka de användas.

Det 3:dje momentet i det mål, hvartill den aritmetiska undervisningen bör sträfva, nämnligen färdighet i räkneoperationernas utförande, vinnes genom flitig öfningsräkning såväl «i hufvudet« som på tafla. Hufvudräkningen bör förekomma på alla stadier men likväl aldrig med relativt stora tal. Utveckling af någon slags räknevirtuositet bör icke ingå i skolans mål. Undervisningen i aritmetik har så länge bedrifvits med nästan uteslutande afseende på den praktiska nyttan, att det nu kan vara på tiden att fästa hufvudsaklig vigt vid det förståndsodlande element, som aritmetiken i så hög grad eger. Isynnerhet gäller detta inom elementarskolan och ännu mera inom folkskolan. I skolor, der undervisningen är afsedd för vissa speciela yrken, kan man tillåta sig att utan afseende på tankeförmågans utveckling inlära aritmetiska manipulationer. I sådana fall betraktar man naturligtvis yrkesskickligheten såsom vigtigare än den aritmetiska bildningen. Hufvudräkningen är väl mera än någon annan undervisning beroende af lärarens individualitet och i följd deraf torde man utan skada för lärjungarne kunna inskränka antalet af hufvudräkningsexemplen i läroböckerna, sedan nämnligen lärarne blifvit öfvertygade om hufvudräkningens stora vigt och betydelse för den aritmetiska bildningen. Om detta icke ännu inträffat, så bör deras uppmärksamhet vändas åt det hållet. Räknefärdighet bör förvärfvas icke allenast genom hufvudräkning utan äfven genom öfningar med griffel och tafla. För dessa senare öfningar böra företrädesvis stora tal användas, dels emedan lärjungen derigenom bättre inser afsigten och ändamålet med dylika öfningar, dels emedan det fordras en större säkerhet och färdighet att räkna med stora tal än med små. Det torde nämnligen vara otvifvelaktigt, att lärjungens arbetslust slappas, om man förelägger honom till uträkning det ena exemplet efter det andra, och han för sin del icke klart inser, hvartill all denna räkning tjenar, då han ju vet med sig, att han kan räkna hvart och ett af dessa exempel. Men om han af sjelfva exemplens beskaffenhet kan inse, det afsigten är att uppöfva hans förmåga att räkna fort och tillika säkert, så har han dertill en sporre för sin flit. Sannolikheten af räknefel är större i fråga om uträkning af stora än af små tal. Om man t. ex. af 4000 siffror bildar tvenne grupper additionsexempel, den ena gruppen bestående af 20 exempel med 200 siffror, betecknande från och med enheter till och med billiontal, i hvarje exempel, och den andra gruppen, bestående af 100 exempel med 40 siffror, betecknande från och med enheter till och med hundratal, i hvarje exempel, och läter tvenne möjligast jemngoda gossar uträkna hvardera gruppen, så skall det ofelbart visa sig, att den som räknar med de större talen har flera räknefel än den andre, såvida nämnligen några räknefel kunna komma i fråga. De större talen synas följaktligen vara företrädesvis egnade till uppöfning af räknefärdigheten.

Sedan jag sålunda angifvit den uppfattning af frågan om den aritmetiska undervisningens mål, hvilken uppfattning jag anser vara objektivt uttryckt i E-L-B., öfvergår jag till undersökning af några mera speciela frågor, hvartill H:s anmälan ger anledning. Sålunda heter det »Såsom vi nyss antydt, anse vi denna bok« (E-L-B.), »tagen i sin helhet, vara skrifven för ynglingar på ett högre stadium, alldenstund alla räknelagar framställas i vidlyftiga regler, hvilka sedan strängt bevisas på grund af föregående definitioner, och emedan tillika förf. ofta rör sig med vidlyftiga tal, hvilket allt förutsätter en mognare ålder.« Vid bestämningen af det ändamål, för hvilket en bok må anses vara skrifven, bör man naturligtvis låta sig ledas af bokens objektivt gifna innehåll. Äfven om författaren sjelf uppgifvit ändamålet med boken, bör en dylik bestämning vinnas genom undersökning af, huruvida innehållet verkligen öfverensstämmer med det uppgifna ändamålet eller ej. Till den åsigten, att E-L-B. kan anses vara skrifven för ynglingar på ett högre stadium, synes ock H. hafva kommit genom en dylik undersökning af innehållet. Han anför nämnligen såsom skäl derför, att alla räknelagar äro framstälda i vidlyftiga regler, att dessa senare äro strängt bevisade och att ofta vidlyftiga tal förekomma. Bokens innehåll synes dock gifva vid handen, att den är skrifven icke allenast för de högre stadierna utan äfven ock tillika för de lägre. Den egentliga undervisningen i aritmetik torde väl få anses böra taga sin början vid additionstabellen. Nu upp-tager E-L-B. en additionstabell sid. 8 med tillhörande not. 1): «För inöfningen af additionstabellen bör man låta barnet sammanräkna åskådliga föremål, såsom myntstycken, kulor, knappar, äpplen o. d.« På sid. 26 upptages ock en multiplikationstabell tillika med en not angående underlättandet af dess inlärande. Af anm. sid. 8 synes vidare, att lärjungen bör utom omfånget af additionstabellen muntligen öfvas med sammanläggning af mindre tal, innan han börjar med de i boken upptagna exemplen. Beträffande reglernas vidlyftighet kunna vi t. ex. företaga till granskning de skenbart vidlyftiga «Regler för addition« sidd. 8—9. Låta vi nämnligen en gosse taga summan af flera addender enligt den metod, hvarigenom man först sammanlägger enheter, derefter tiotal, o. s. v., och sedan låta honom redogöra för det af honom använda förfaringssättet, så synes det som hans redogörelse, såvida den nämnligen skall vara fullständig och icke innehålla några hiatus, näppeligen kan innehålla något mindre än ifrågavarande regler. Dessa regler följer således hvar och en som utför en addition enligt den supponerade metoden. Derföre synes det icke vara onyttigt, att gossen kan i läroboken repetera det förfaringssätt, som läraren förut muntligen meddelat honom; ty att låta lärjungen först utantill inlära reglerna och derefter öfvergå till sjelfva räkningens utförande kan väl numera icke gerna falla någon in. Bevisen för räkneoperationerna böra icke vara helt och hållet uteslutna från undervisningen på de lägre stadierna, såvida man nämnligen vill äfven der fasthålla den grundsats, att gossen bör, så långt hans förstånd medgifver, begripa hvad han lär. Redan vid början af addition torde det icke vara olämpligt att fästa lärjungens uppmärksamhet på, hvarföre enheter icke få omedelbart adderas till tiotal eller hundratal o. s. v. Likaledes kan vid öfriga räkneoperationer läraren föranledas af de i boken förekommande bevisen att fästa lärjungarnes uppmärksamhet på, hvarföre något är så eller så. Dessa lärarens antydningar kan lärjungen lättare erinra sig, då han vid en framdeles skeende repetition sjelf läser bevisen. Att han vid början af undervisningen i aritmetik icke bör sjelf lösa de i E-L-B. förekommande bevisen, torde vara tillräckligt antydt genom deras fina stil. Qvantitetsbegreppen äro enligt psykologisk erfarenhet de första begrepp, som utvecklas i barnets förstånd, och derföre ligger det vigt uppå, att det blir reda i uppfattningen af dessa begrepp redan ifrån första början. Isynnerhet gäller detta om folkskolan, der aritmetiken är det ämne, som bäst lämpar sig såsom medel för den intellektuela utvecklingen i egentlig bemärkelse. Religionsundervisningen, som är folkskolans hufvudämne äfven i afseende på timantalet, afser barnets utveckling in toto i religiöst och sedligt hänseende. De öfriga undervisningsämnena såsom historia och geografi äro icke lämpliga undervisningsmaterial för något tankeutvecklande «hvarföre«. Men aritmetiken är inom folkskolan just ett lämpligt material för tankeverksamhet. Det är för folkets barn långt vigtigare, att undervisningen i aritmetik bedrifves på ett sätt, som afser förståndets utveckling, än att de «räkna igenom hela räkneboken«. Låt barnet i folkskolan vänja sig vid tankeverksamhet i afseende på de aritmetiska begreppen, låt det vänja sig att i afseende på dessa begrepp besvara upprepade «hvarföre«, och det skall sedermera i sin medborgerliga och ekonomiska verksamhet låta sig ledas af förståndet i st. f. gamla fördomar och traditioner. Hvad som här blifvit sagdt om aritmetikens betydelse för utvecklingen af förståndet hos folkskolans alumner gäller i samma afseende för flickskolor såväl lägre som högre. Skulle undervisningen i de klassiska språken inskränkas eller förminskas i elementarskolan, så vore det hos aritmetiken, isynnerhet på skolans lägre stadier, som man kunde lämpligast finna en ersättning, åtminstone till en del, för det förståndsodlande element, som dessa språk i så hög grad ega. I sammanhang härmed vill jag till undersökning upptaga en af H. uti hans anmälan framställd sats i anledning af R-Ö-E., helst jag dermed hoppas kunna bättre tydliggöra min uppfattning af ifrågavarande punkt. Han talar nämnligen sid. 242 om en «noga specificerad aritmetisk undervisningsmateriel, bestående af kulor, stickor, vigter, fotmått, slantar, sedlar föreställande penningar m. m., allt för att eleven skall ha för sig s a k e n hvarmed han räknar, i stället för att han annars ofta räknar med t e c k n e n, siffrorna, bokstäfverna.« Detta synes mig vara en mindre riktig uppfattning af åskådningsmaterielens betydelse för den aritmetiska undervisningen. Innehållet i aritmetiken är likasom i hvarje vetenskap begrepp. Uppfattningen af detta innehåll skall följaktligen ske genom tankeförmågan eller förståndet. För det outvecklade barnet underlättas denna uppfattning genom åskådningen. Åskådningen utgör den ἐπίβασις, hvarpå barnet kommer till begreppens verld. Detta är betydelsen af åskådningen såväl på aritmetikens lägsta stadier som öfverallt inom matematiken. Man räknar aldrig med s a k e n, då man räknar med kulor, stickor o. d. eller «på fingrarne«, utan endast såvida man räknar med begrepp d. v. s. här tal. Icke lär väl den lilla gossen, som blott med tillhjelp af åskådningen finner, att t. ex. 3 gånger 4 kulor är lika med 12 kulor, hålla sig mera till s a k e n i aritmetiken än den utvecklade aritmetikern, för hvilkens förstånd 3 gånger 4 är lika med 12. Apodikticiteten af denna sats finnes endast i och genom förståndet. Med siffror räknar man icke heller, då ju siffrorna äro endast yttre och *sinnliga tecken för talen.* *Likväl bör gossens uppmärksamhet* riktas på skilnaden emellan tal och siffror, ty dem kan han möjligen sammanblanda. Men icke är det synnerligen svårt att meddela honom insigt derom, att han i aritmetiken icke sysselsätter sig med saker eller konkreta ting. Är det riktigt, att aritmetikens innehåll är begrepp och att begreppen kunna såsom sådana fattas endast med förståndet, så synes det följaktligen vara i sin ordning, att undervisningen i aritmetik redan på de lägre stadierna afser barnets förståndsverksamhet.

Beträffande det 3:dje momentet i H:s bevisning, nämnligen de ofta förekommande vidlyftiga talen, så innehåller E-L-B. sid. 12 not.[2]) en antydan derom, att dessa tal äro ämnade för uppöfningen af räknefärdigheten och att de icke böra föreläggas lärjungen vid den allraförsta undervisningen, naturligtvis derföre att räknefärdigheten icke är det första, hvarpå undervisningen i aritmetik bör fästa afseende. Huruvida lärjungen har en klar uppfattning af dylika tals betydelse kan för räknefärdighetens förvärfvande vara temmeligen likgiltigt. Fråga kan vara, om han någonsin, äfven på det högsta stadium af aritmetisk bildning får en klar uppfattning af hvad t. ex. en billion betyder. Han bör dock kunna sin aritmetik på ett sådant sätt, att han förstår att räkna med billioner lika korrekt som med hundratal.

Ett bevis för det antagande, att E-L-B. kan anses «vara skrifven för ynglingar på ett högre stadium«, torde H. möjligen anse ligga uti den inskjutna mellansatsen: «tagen i sin helhet«. Men på denna mellansats kan man väl med fullt skäl tillämpa det bekanta: «kolonner, hvad gören I här!« Uti en fullständig lärobok måste väl en del vara afsedd för det lägsta stadium, en annan del för mellanstadierna o. s. v. Först då, när lärjungen hunnit att genomgå hela det pensum, som boken omfattar, kan han uppfatta henne i dess helhet.

I sin anmälan förordar H. vigten af att noga iakttaga skilnaden emellan hvad han kallar «Delnings division« och «Innehålles-division«. Han accentuerar denna skilnad så skarpt, att man kunde vara frestad till det antagandet, att han i st. f. de gamla «quatuor species« vill hafva «quinque species«. I enlighet härmed gillar han icke den i E-L-B. förekommande «definition« på division och icke heller att division kan betraktas såsom en upprepad subtraktion. Låtom oss nu till undersökning upptaga, hvad H. i anledning häraf säger i den 1:sta af de punkter, hvari han ej gillar förf:ns af E-L-B. åsigter. H. uppgifver såsom «definition« på division ur E-L-B.: «division är det räknesätt, som användes, då man vill dela ett gifvet tal uti ett uppgifvet antal lika delar; eller division är det räknesätt, som användes för att finna, huru många gånger ett tal är större än ett annat; eller slutligen division är det räknesätt, som användes för att finna, huru många gånger ett tal innehålles i ett annat. Denna uppfattning af definitionen på division synes dock icke af framställningen i E-L-B. fullt berättigad. Uti E-L-B. förekomma i läran om hela tal verbaldefinitioner, nämnligen «Addition (sammanläggning)« sid. 7, «Subtraktion (frandragning)« sid. 16, «Multiplikation (mångfaldigande)« sid. 25 «Division (delning)« sid. 38 och under dessa rubriker redogörelse för ett fall, hvari addition användes, tre fall, hvari subtraktion, tre fall, hvari multiplikation och tre fall, hvari division användes, samt i läran om bråk sidd. 91, 94, 96, 99—100 bestämningar af hvad det betyder att addera, subtrahera, multiplicera och dividera. Deraf synes kunna framgå, att de på sidd. 91, 94, 96, 99—100 framställda satserna innehålla den egentliga definitionen på hvart och ett af de fyra räknesätten och att satserna på sidd. 7, 16, 25, 38 icke vilja göra anspråk på att få anses såsom definitioner. Ifrån detta anspråk borde de ock kunna anses befriade dels deraf, att de fall, i hvilka divisionen säges hafva sin användning, strax derpå uppgifvas kunna behandlas på ett annat sätt, nämnligen genom subtraktion, dels deraf, att beviset för division sid. 45 börjar med att (på grund af den fina stilen) förutsätta den definition på division, som är framstäld sidd. 99—100, dels deraf, att denna uppfattning af divisionen ger anledning till omnämnande af ett 4:de fall för dess användning sid. 39, dels slutligen af de ifrågavarande satsernas form. Man definierar icke gerna en sak genom att tala om, hvartill den användes. Detta hindrar likväl icke, att kännedomen deraf kan i vissa fall vara lika vigtig om icke vigtigare än kännedomen af hvad saken egentligen är. För den praktiserande läkaren t. ex. torde väl kunskapen derom, att china är ett medikament, som användes emot frossa, vara fullt ut lika vigtig som kunskapen om hvad china är. För den med aritmetiska problemers lösning sysselsatte lärjungen är det, såsom förut anmärkts, af stor vigt att vid förefallande behof kunna besvara frågan: hvilket räknesätt skall här användas? Insigten om vigten och betydelsen af denna fråga har föranledt förf. af E-L-B. att i läran om hela tal nöja sig med verbaldefinitioner på de fyra räknesätten och att i st. f. egentliga definitioner redogöra för de hufvudsakliga fall, i hvilka de särskilda räknesätten användas. Måhända är denna afvikelse från den strängt genetiska framställningen icke af det antydda pedagogiska skälet fullt berättigad. Måhända hade det varit rättare att definiera räknesätten med afseende på hela tal, för att sedermera i läran om bråk utvidga eller förändra definitionerna, der sakens natur så fordrat. Naturligtvis hade man kunnat genast definiera de fyra räkneoperationerna på ett sådant sätt, att definitionerna passat in på både hela och brutna tal. Den exakta definitionen på multiplikation är dock synnerligen svårfattlig för den nybörjare, som icke hunnit öfver de hela talen, oafsedt den omständigheten, att uppfattningen af strängt logiska definitioner i allmänhet är för nybörjaren förenad med stora svårigheter. Den kunskap, han derigenom inhemtar, blir för honom icke rätt lefvande. Äfven om det kan anses för riktigt att vid början af undervisningen i aritmetik befria lärjungen ifrån fullt adæquata definitioner på de fyra räknesätten, hvilka definitioner han möjligen icke riktigt senterar, och i stället meddela honom kunskap om de fyra räknesättens användningar, så har det emellertid visat sig, att framställningen i E-L-B. blifvit missförstådd. Förf. skall derföre låta sig angeläget vara att, om E-L-B. lyckas förvärfva sig den aritmetiska publikens bevågenhet, söka förebygga möjligheten af ett dylikt missförstånd.

De båda slagen af division, »delningsdivision» och »innehållesdivision» kunna enligt H. aldrig sammanblandas. Låtom oss till undersökning häraf taga ur R-Ö-E. häftet I sid. 42 exemplet 19: «Huru bred är en gata, hvars yta är 64 qv. st. 17 qv. fot och längd 27 st. 9 fot?« Här har lärjungen icke någon regel att rätta sig efter utan måste den hevristiska metoden likmätigt finna lösningen genom en analys af problemet. Icke lär väl ynglingen vid första försöket tänka på någon «innehålles-division«, ty icke kan han fråga, huru många gånger är en yta större än en längd. Lika litet framkallar problemet tanken på någon «delningsdivision«, alldenstund båda de gifna talen äro konkreta och tillika uttryckta i olika sorter. Nåväl, hvad vill det då säga, att gatans yta är 64 qv. st. 17 qv. fot? Jo, att gatans yta kan täckas af 6417 qvadratiska rutor af en qv.-fots area. Gatans längd är 279 fot. Derföre kan man föreställa sig 279 qvadratiska rutor af en qv.-fots area laggda bredvid hvarandra *utefter gatans ena kant*. Om man derefter frågar, huru många gånger flera qvadratiska rutor rymmas på *hela gatan* än utefter kanten, eller huru många gånger innehålles de utefter kanten af gatan liggande rutornas antal i alla de på hela ytan af gatan liggande rutornas antal, så måste svaret angifva, huru många qvadratiska rutor med en fots kant kunna läggas bredvid hvarandra utefter en tvärlinie af gatan. Gatans bredd finnes på detta sätt genom en «innehålles-division«. Man kan ock resonnera på följande sätt. Gatans hela yta täckes af 6417 qvadratiska rutor med en fots sida, och gatans ena kant är 279 fot. Om derföre de 6417 rutorna ordnas i 279 lika grupper, så måste rutorna i hvar och en af dessa grupper kunna föreställas laggda bredvid hvarandra utefter en gatans tvärlinie. Antalet rutor med en fots sida, hvilka kunna läggas bredvid hvarandra utefter en gatans tvärlinie d. v. s. gatans bredd finnes således genom att dela de 6417 rutorna i 279 lika stora delar. Det begärda svaret erhålles nu genom en «delningsdivision«. De båda slagen af division k u n n a således sammanblandas. Vänder jag mig till en aritmetiker med frågan, om 12 Rdr delas i 3 lika delar, huru stor blir hvarje del, så svaras: 4 Rdr. Hvarföre? Jo, 3 gånger 4 är 12. Om jag frågar aritmetikern, huru många gånger är 12 Rdr mera än 3 Rdr, så blir svaret: 4. Hvarföre? Jo, 3 gånger 4 är 12. Detta visar, att betydelsen af division blifver på ett uttömmande sätt förklarad, då man bestämmer densamma såsom en *omvändning af multiplikation*. Låtom oss nu ställa samma fråga till en gosse, som icke känner multiplikationstabellen och särskildt icke vet, att 3 gånger 4 är 12. Jag frågar honom således: Om 12 äpplen skola delas emellan 3 gossar, så att de få hvardera lika många, huru många äpplen erhåller hvar och en? Svar: 4 äpplen. Hvarföre? Jo, jag ger ett äpple i sender åt hvardera gossen, till dess att alla äpplena blifva utdelade, och detta inträffar efter 4 på hvarandra följande utdelningar. Således en itererad subtraktion. Om jag frågar, huru många gånger är 12 äpplen mera än 3 äpplen, så blir svaret 4. En oomtvistad itererad subtraktion. En division kan följaktligen i sin primitiva betydelse utföras genom en upprepad subtraktion, äfven då fråga är om s. k. « delningsdivision «. Detta finner man ock vara framställdt i E-L-B., om man läser sid. 39 t. o. m. 13:de raden. Då man, för att taga H:s exempel, vill dela 12 Rdr i 4 lika delar, så är väl det naturliga och ursprungliga förfaringssättet, att till hvar och en af de 4 lotterna lägga en Rdr i sender och upprepa detta så många gånger, till dess att hela summan blir utdelad Deraf ock uttryckssättet: « dela mark om mark «. Häraf framgår, det jag icke finner skäl att betrakta division annorlunda än såsom e n räkneoperation, nämnligen såsom uppsökandet af ett så beskaffadt tal, att produkten af detsamma och ett gifvet tal är lika med ett annat gifvet tal, ehuru denna räkneoperation kan, likasom andra, på flera olika sätt användas; vidare att division i hela tal är en itererad subtraktion likaväl som multiplikation i hela tal en itererad addition. Benämningen « delningsdivision « och « innehålles-division « anser jag dessutom ifrån språklig synpunkt olämpliga. Per analogiam borde man kunna tala om t. ex. förminskmngs-subtraktion och skilnads-subtraktion.

Anledning till uttalande af ett *klander emot* E-L-B. finner ock H. derutinnan, att E-L-B. ingenstädes innehåller b e v i s för qvadrat- och kubikmåttens indelningar och för beräkningen af en rektangels yta samt att denna senare planimetriska sats jemnte flera andra « omnämnes « först mot slutet af boken likväl utan bevis. Huru ytmåttet af en rektangel såväl som kubikmåttet af en parallelipiped kan finnas, är uti E-L-B. omnämndt i 2:ne noter sidd. 157 och 158 i läran om sorter. Några planimetriska sorter äro icke bevisade, emedan de äro l å n e s a t s e r ur geometrien. Beviset för dessa satser tillhör således icke aritmetiken. Afsigten och ändamålet med deras upptagande torde vara uppenbar af deras praktiska vigt: nämnligen till tjenst för dem, som icke komma så långt i geometrien att de kunna fatta de egentliga bevisen för dessa satser. De satser, hvilka hafva afseende på qvadrat- och kubikmåttens indelningar, äro korollarier af redogörelsen för dessa måtts betydelse. Just derföre äro de icke bevisade. Det är nämnligen vanligt att i l ä r o b ö c k e r n a icke bevisa korollarier, men dock vanligt att vid den m u n t l i g a undervisningen fordra sådana bevis. Bevisen för dessa korollarier äro af 2:ne andra speciela skäl utelemnade, af hvilka det ena kan anses uppenbart af sjelfva framställningen i E-L-B. och det andra är af öfvervägande pedagogisk natur. Kapitlet III uti E-L-B., der ifrågavarande satser förekomma, innehåller intet enda bevis, emedan detta kapitel är en applikation af det föregående. Det andra, pedagogiska, skälet kan uttryckas sålunda. De vanligast förekommande sorternas indelning är ämnad till utanläsning. Derföre är det å ena sidan nyttigt, att lärjungen under detta utanläsningsarbete af sig sjelf utfinner sambandet emellan längdmåttens samt qvadrat- och kubikmåttens indelningar, och å andra sidan lärarens pligt att leda gossen till insigt om detta samband just i följd af den allmänna pligt, som tillkommer honom att se till, det lärjungen begriper hvad han läser. Den gosse, som icke kan redogöra för detta samband, visar eo ipso att han icke begriper hvad t. ex. 1 qvadratfot och 1 qvadrattum är. Under sådana förhållanden synes det vara lämpligare, det läraren visar, att 1 qvadratfot är = 100 qvadrattum, än att han bevisar, hvarföre så är.

H. har uttalat ett ogillande omdöme deröfver, att i E-L-B. icke äro upptagna «ens sådana problem, som vanligen förekomma i våra algebraiska läroböcker såsom exempel på första gradens eqvationer eller på aritmetiska serier, ehuru en mängd af dessa exempel äro vida lättare att uträkna än en mängd af dem förf. upptagit.« Omedelbart derefter heter det: «Hvarföre skall aritmetiken nödvändigt vara inskränkt till endast sådana exempel, som Zweibergks räknebok har?« Såsom sammanhängande härmed anser jag det på följande sida förekommande yttrandet: «I sjelfva verket är det denna metod« (de aritmetiska uppgifternas behandling enligt eqvationsläran), «som från förstörelse räddat oss, som lärt att räkna efter den gamla förvända metoden.« Det första af dessa yttranden måste antagas hafva tillkommit af förbiseende. Om lektor E. G. Björlings arbeten i algebra få antagas innehålla de problemer, som «vanligen« förekomma i våra algebraiska läroböcker, så är det tillräckligt att hänvisa till sidd. 264—271 i E-L-B. Härmed kan man dessutom jemföra de under rubriken XXIV i R-Ö-E. häftet II förekommande problemer. En aritmetisk serie förekommer redan på sid. 61 ex. 46; vidare sidd. 258—259 ex. 21—25. Till och med en geometrisk serie, om man så vill, finnes redan på sid. 124 ex. 41. Hvad de andra af de anförda yttrandena beträffar, så torde detta något patetiska utrop icke vara motiveradt af en jemnförelse emellan Zweibergks lärobok i Räknekonsten och E-L-B. Dessutom, hvilka anmärkningar man än må vara befogad att göra emot Zweibergks «Räknekonst«, icke lära de med skäl kunna göras emot hans exempel, som i allmänhet äro goda. Sannolikt är det exemplen, denna bok har att tacka för sin stora framgång. Hvad H. säger om de aritmetiska serierna och eqvationsläran, föranleder oss till följande. Huruvida aritmetiska serier afhandlas eller icke uti en elementarlärobok i aritmetiken, kan vara temmeligen likgiltigt. De lärjungar, som fortsätta sina matematiska studier, få nog i sinom tid göra bekantskap med desamma. För de andra äro de icke af någon synnerlig vigt. Ty icke finnes det något egendomligt förståndsbildande element uti dessa serier, och icke lär någon, som har hjelplig kunskap i aritmetiken, «fastna« på några till rena aritmetiska serier hörande frågor, som händelsevis kunna möta honom i lifvet, förutsatt nämnligen, att dessa frågor icke äro algebraiska. Visserligen är talsystemet en i hög grad intressant aritmetisk serie, men uppfattningen af talsystemet såsom aritmetisk serie leder lätt till spekulationer, som ligga utom skolaritmetikens område. Eqvationslärans användning för aritmetiska problemers lösning anser jag vara af vigt. Derföre äro ock de till regula de tri hörande uppgifter enligt regel i E-L-B. behandlade i öfverensstämmelse med eqvationsläran; se t. ex. sidd. 176—178, reglerna sid. 182 och sidd. 195—197. Äfven i det fall, att dessa frågor behandlas utan uppställning i analogi, användas i E-L-B. eqvationer för deras lösning; se t. ex. sid. 202. Detsamma gäller då ock om de till intresseräkning, bolagsräkning o. s. v. hörande frågor. De aritmetiska uppgifternas behandling enligt eqvationsläran är dock icke något ofelbart medel till räddning «från förstörelse«. Det finnes exempel på ynglingar, som med stor färdighet lösa algebraiska eqvationer af 1:sta graden utan att hafva någon aning om, hvilken räkneoperation de företaga vid en terms öfverflyttning ifrån det ena membrum till det andra med ty åtföljande teckenförändring, eller hvarföre de äro berättigade till en sådan manipulation. Likartade orsaker frambringa likartade verkningar. Om lärjungen icke får lära sig att förstå, hvad han läser och räknar, så kan han på sin höjd förvärfva sig en mer eller mindre utbildad räknekonst, men icke någon begreppsmässig uppfattning af aritmetiken, vare sig han tillämpar eqvationsläran eller icke. Den gamla metodens förvändhet bestod icke deruti, att man underlät eqvationslärans tillämpning, utan deruti, att lärjungen icke fick lära sig att begripa, hvad han räknade. Metoden bestod ofta deri, att lärjungen räknade på sin griffeltafla och efter vunnet resultat gick fram till läraren att «säga opp« talet. Han läste således upp det erhållna facit för läraren. Svaret blef: ja, det är rätt, räkna följande exempel, eller det är orätt, räkna om det. Om i förra fallet det uträknade exemplet var det sista under den för handen varande rubriken, så kunde det hända, att lärjungen helt enkelt fick anvisning att läsa «följande regel« och derefter räkna dithörande exempel. Om i senare fallet lärjungen kom tillbaka med samma exempel ännu en gång oriktigt räknadt, så måste läraren naturligtvis antaga, att gossen icke kände de manipulationer, som borde föra honom till ett riktigt resultat, hvarföre han visade, huru han (gossen) skulle «göra«. Lärjungen, som icke begrep det minsta af hela saken, fann dessa manipulationer mäkta konstiga, men gjorde naturligtvis efter, hvad läraren visat honom. Dock, det är sannt, ett annat antagande kunde läraren göra, nämnligen att gossen slarfvade, hvilket icke sällan rättades med stryk. På ungefär sådant sätt bedrefs undervisningen i ett läroämne, som dock bör hufvudsakligast med förståndet uppfattas. Ja, jag vågar icke påstå, att undervisningen i aritmetik ännu icke bedrifves på samma sätt, med undantag dock af den gamla korrektionen emot slarf. Jag har nyligen sett en uppgift ifrån en af våra större städer, som icke är egnad att förneka tillvaron af en sådan undervisningsmetod. Jag antager dock, att en dylik undervisningsmetod, om den verkligen finnes, är undantag, icke regel. Såsom bevis derför att «räknekonsten» fordom bestod hufvudsakligast i en mängd mer eller mindre konstiga manipulationer, kan anföras: «Arithmetica Tironica eller Kort och Grundlig anvisning att Practice lära all nödvändig Hus- och Handels-Räkning; efter den nu för- tiden mäst brukliga och fördelaktigaste Läro-Methode, till Allmänhetens och i synnerhet Scholornes tjenst och nytta, efter senaste Kongl. Maj:ts Mynt-Ordning samlad af Roloff Andersson. Örebro 1830« *, hvilken bok angifver för regula de tri i bråk icke mindre än aderton (18) «förändringar«, beroende af huruvida något rum i analogien innehåller talet ett (1) eller icke och af det olika sätt, hvarpå bråk kunna ingå i analogien. Ett ytterligare bevis för allmänhetens uppfattning af aritmetiken såsom en blott «räknekonst« är det ofta förekommande koordinationsförhållandet emellan denna «konst« och skrifkonsten. Att vi, som räknat «efter den gamla förvända metoden«, blifvit bättre aritmetici, sedan vi i algebran lärt oss räkna med eqvationer, är helt naturligt. Deraf följer dock icke, att eqvationsläran i sin helhet skall flyttas in i aritmetiken. Det synes mig ändamålsenligt att qvarhålla den skilnad emellan aritmetik och algebra, att man i aritmetiken räknar med individuela sifferbetecknade tal och i algebran med generela bokstafsbetecknade qvantiteter. Inom skolor, der både aritmetik och algebra läses, bör dock sjelfva undervisningen i de båda ämnena, såvidt innehållet medgifver, vara likformig. Man bör i följd deraf icke i aritmetiken upptaga sådana uppgifter, för hvilkas lösning man enligt vanligt förfaringssätt behöfver räkna med x såsom med hvarje annat tal. För detta fordras nämnligen en större abstraktionsförmåga, än man kan räkna på hos de lärjungar, som skola allmännast undervisas i aritmetik. För folkskolans lärjungar synes det icke vara erforderligt att genomgå en fullständig kurs i läran om 1:sta grads eqvationer och för elementarskolans lärjungar synes det vara mindre nödigt att i aritmetiken meddela en sådan kurs. De förra få en för deras ställning i lifvet tillräcklig insigt i aritmetik, om de fa **väl** inhemta läran om hela och brutna tal samt läran om sorter jemnte det allmännaste af regula de tri och intresseräkning isynnerhet betydelsen af begreppet procent. Folkskolan måste dock mycket höjas, innan man kan fordra **så stort pensum** af dess alumner. Elementarskolans lärjungar borde enligt mitt förmenande icke läsa någon regula de tri, förrän de hunnit till och med eqvationer af 1:sta graden i algebra. Läran om hela tal och bråk samt läran om sorter borde således vara pensum för de nuvarande 4 första klasserna på humanistiska linien och för de 3 första på reallinien; men detta pensum skulle inhemtas på ett sådant sätt, att lärjungarne kunde icke blott med färdighet

---

* Således för blott 38 år sedan.

lösa alla hithörande uppgifter, utan tillika angifva skäl och grunder för de aritmetiska förfaringssätten. Att färdighet i hufvudräkning inom derför lämpligt omfång af talserien borde höra till qvaliteterna af detta pensum är naturligt. Sedan läran om eqvationer af 1:sta graden blifvit i algebran inhemtad, skulle följa såsom applikation deraf: regula de tri, intresse-, rabatt- och diskonträkning, betalningsterminers reduktion samt bolags-, alligations- och kedjeräkning likväl utan onödig vidlyftighet. Derefter borde före början af läran om qvadratrötter följa en kort repetition af det i aritmetiken och algebran genomgångna. Läran om qvadratrötter skulle kunna börja på humanistiska linien i öfre 6:te och på reallinien i öfre 5:te klassen.

Enligt den « gamla förvända metoden « för undervisningen i aritmetik har på senaste tiden en skarp reaktion inträdt. Beskaffenheten af denna reaktion har här såsom alltid betingats utaf den reagerandes uppfattning af sjelfva den förvändhet, emot hvilken han reagerar. Man hade funnit, att lärjunge, som mottagit undervisning i aritmetik och det tillika så, att han efter den begagnade undervisningens fordran kunde sin aritmetik, likväl «fastnade« på det ena exemplet efter det andra, när de framkommo för honom utan bestämd anslutning till någon känd regel. Man hade faktum gifvet: lärjungens oförmåga att lösa de aritmetiska uppgifterna, när de rycktes ur sitt i läroboken gifna sammanhang med regeln. Detta faktum skulle förklaras och afhjelpas. Man hade vidare funnit, att reglerna voro för lärjungen en tom formalism, hvaraf han icke hade någon nytta eller ledning för lösningen af de aritmetiska uppgifter, som mötte honom i lifvet, att denna formalism eller rättare mekanism icke hade något innehåll i egentlig mening, med hvars tillhjelp han kunde analysera enskilda uppgifter. Derföre bort med denna mekanism och dess regler; låt lärjungen genom sjelfverksamhet och analys af enskilda uppgifter uppöfva sin förmåga i detta hänseende, låt honom via inductionis sjelf deducera förfaringssättet för uppgifternas lösning. Man kom således till aritmetikens behandling enligt den hevristiska metodens principer. Felet var: lärjungens oförmåga att i enlighet med de af honom kända reglerna solvera aritmetiska uppgifter. Detta afhjelpes genom uppgifternas lösning utan regler. Såsom extra vinst af detta förfaringssätt borde följa utbildning af « elevens förmåga af tankearbete . . . på frågor inom öfriga delar af mensklig forskning«. A andra sidan reflekterade man öfver det besynnerliga deruti, att, ehuru lärjungen tycktes känna lagarne för de aritmetiska operationerna, han dock icke kunde applicera dessa lagar. Ifrån denna reflexion leddes man snart till den iakttagelsen, att reglerna för de aritmetiska operationerna voro i lärjungens mun blott toma ord och icke uttryck för begreppsmässig uppfattning af räknelagarne. Man kom således till insigt om, att lärjungen visserligen kände vissa aritmetiska manipulationer, men dock icke hade något begrepp om, hvarföre just dessa manipulationer skulle användas och hvarföre de voro berättigade, d. v. s. han hade icke något vetande in arithmeticis, kände platt ingenting till aritmetiken såsom vetenskaplig disciplin. Denna diagnos af det faktiskt oriktiga ledde helt naturligt derhän, att man borde afhjelpa den funna oriktigheten genom att *framställa aritmetiken såsom en demonstrabel disciplin och således* göra densamma till föremål för uppfattning af förståndet. Deraf en genetisk framställning af aritmetiken. Dessa ord: den genetiska och hevristiska metoden anser jag tydligare beteckna den faktiskt gifna olikheten i åsigter än den indelning, hvars membra divisionis blifva öfvervägande receptivitet och öfvervägande produktivitet. Denna senare indelning är dock af H. uttryckligen angifven och torde anses vara karakteriserad af följande yttrande sid. 241 af H:s anmälan. »Man kan undervisa så, att man ordentligt och fullständigt ger besked i allt, hvad till ämnet hörer, så att lärjungen ej har annat att göra än förhålla sig passiv, då han utan sin förskyllan får i sig en hel hop vetande, om han blott icke rent af undviker att höra hvad läraren yttrar.« »Men man kan äfven undervisa på ett annat sätt: man kan lemna alla direkta förklaringar åsido, och i stället genom antydningar och frågor förmå lärjungen att sjelf uttänka dem; han blir då ej längre en passiv mottagare af lärarens tankar och idéer, utan han får vara menniska, får vara produktiv. Endast på detta sätt blir hans vetande hans eget, emedan det är hans eget verk, om också tillkommet under en annans ledning.« Denna karakteristik af tvenne olika undervisningsmetoder synes vara en följd af den föreställningen, att man verkligen skulle kunna meddela en menniska vetande utan någon sjelfverksamhet å hennes sida. Utan att ingå i några vidlyftiga undersökningar, torde det vara tillräckligt att erinra derom, att vetandet ifrån en synpunkt är just den vetande sjelf i ett visst hänseende. Vetande är således icke någonting, som kan utstråla ifrån den ene och blott recipieras af en annan. Ifrån en annan synpunkt betraktadt är vetandet ett system af begrepp, d. v. s. klara och tydliga förnimmelser, hvilka just derföre att de äro förnimmelser förutsätta ett förnimmande subjekt. De kunna följaktligen icke finnas annorlunda än såsom bestämningar hos en personlighet och äro derigenom ock alltid denna personlighets egen tillhörighet. Klarheten och tydligheten i förnimmelserna *kan icke förvärfvas annorlunda* än genom menniskoandens egen sjelfverksamhet. En omedelbar följd af klarheten och tydligheten i förnimmelserna är den karakter af oföränderlighet och apodikticitet, som tillkommer begreppen. Den apodikticitet i uppfattningen, hvarigenom man inser, att och hvarföre en sak är så och icke annorlunda, kan följaktligen icke vinnas på annat sätt än genom utveckling af det egna medvetandets innehåll. Denna utveckling kan naturligtvis icke meddelas åt någon af en annan, men väl underlättas. Detta senare är ock uppgiften för all intellektuel undervisning. Receptiviteten såsom en blott passiv emottagning är i afseende på vetandet en kontradiktion. Man kan icke utan sjelfverksamhet och tankearbete inhemta ett bevis, vare sig inom aritmetiken, geometrien eller någon annan vetenskap, huru fullständigt än detta bevis skriftligt eller muntligt må vara framstäldt, såvida det skall inhemtas på ett sådant sätt, att dess särskilda momenter verkligen skola vara närvarande för förståndet och icke blott såsom en utanlexa för minnet. Fattar man åter receptiviteten såsom en utvidgning af kunskapsförrådet i allmänhet och särskildt inom de demonstrabla disciplinerna såsom en utveckling af ett nytt moment, som förut icke varit aktualiseradt, så är naturligtvis all undervisning, som afser intellektuel uppfostran, å lärjungens sida öfvervägande receptiv. Då man fordrar en öfvervägande produktivitet af lärjungen, synes man utgå från den föreställningen, att produktivitet vore liktydigt med tankearbete och receptivitet en emottagning utan något slags tankeverksamhet. Detta senare är i afseende på vetandets utveckling visadt vara *orimligt*. *Att produktivitet icke är detsamma som tankearbete*, torde få anses öfverflödigt att bevisa. Den literära produktionen afgifver nog vittnesbörd derom. Produktiviteten inom skolorna kan väl anses hafva sin betydelse såsom en användning af det recepierade. Hvartill tjena väl krior och temata, om icke såsom en användning af de särskilda språkens lagar! Samma betydelse hafva ock problemerna i aritmetiken. Vid deras lösning är lärjungen ock företrädesvis produktiv. Just derföre synes det icke ändamålsenligt att göra repetition af öfningsexemplen till regel, såsom H. förordar i sammanhang med ett ogillande af exemplens talrikhet i E-L-B. Om något skall väcka lärjungens leda och döda hans verksamhetslust, så är det väl att låta honom ånyo producera, hvad han en gång förut producerat. Icke lär det väl inom språkundervisningen vara lämpligt att låta lärjungen skrifva om de krior och temata, som han en gång förut skrifvit. Hvarföre? Jo, derföre att han vid detta arbete är produktiv. Föremålet för applikationen och produktionen bör alltjemt vexla. Undantag derifrån bör ega rum endast då, när uppmärksamheten skall riktas på någon ny synpunkt, som förut icke blifvit eller möjligen icke kunnat blifva uppmärksammad. Till stöd för sin förkastelsedom öfver öfningsexemplens talrikhet åberopar H. ett yttrande af lektor Bergius i Pedagogisk Tidskrift. Jag vet icke, om jag kan smickra mig med det antagande, att min åsigt i denna punkt är öfverensstämmande med lektor Bergii. Jag har uppfattat lektor Bergii yttrande närmast såsom en protest emot lärjungens ideliga räknande för sig sjelf. I denna protest instämmer jag obetingadt. Sker dertill detta räknande på grund af en förut inlärd minnesregel, hvars innehåll icke är uppfattadt af lärjungens förstånd, så kan man nästan säga, att hvarje öfningsexempel är ett exempel för mycket. En rik exempelsamling är dock alltid att föredraga framför en inskränkt. Deraf följer dock icke, att lärjungen nödvändigt skall räkna alla exemplen. Långt derifrån. I sjelfva betydelsen af en exempelsamling ligger väl, att den icke skall genomgås ifrån «perm till perm». Man bör icke låta lärjungen räkna flera exempel än som äro behöfliga för ändamålet: säkerhet och färdighet i uppgifternas lösning. Hufvudsaken är, att han begriper hvad han gör. Af stor vigt är ock, att han genom besparing i tid må hinna så långt som möjligt. En ibland följderna af den gamla metodens förvändhet var ock, att lärjungen vid problemlösningen antecknade problemets uppställning, för att hafva till hands vid en blifvande repetition. Detta var ock för honom väl behöfligt; ty i de flesta fall hade han efter afslutningen af exemplen under en viss rubrik lika litet begrepp om det, hvarom exemplen handlade, som förut. En i pedagogiskt hänseende riktig och för tids vinnande ändamålsenlig metod för problemlösning såväl inom aritmetiken som algebran synes mig vara att låta lärjungarne en i sender vid «svarta taflan» under lärarens ledning analysera uppgifterna, under det att de andra höra på. Sjelfva uträkningen kan efter omständigheterna utföras eller förbigås. Vid denna analys måste läraren «lemna alla direkta förklaringar åsido, och i stället genom antydningar och frågor förmå l ä r j u n g a r n e (icke blott den vid «svarta taflan» stående, utan ock de öfriga) att sjelfva analysera problemerna. Den metod, som härvid användes, skulle jag vilja kalla en Sokratisk eller, om man så vill, en i Sokratisk mening majevtisk metod. Den majevtik, hvarigenom Sokrates sökte att framdraga begreppet hos sina åhörare, är särdeles lämplig vid undervisningen i elementarmatematiken. Den är dock icke oförenlig med en genetisk framställning af sjelfva ämnet. Den är lika användbar inom geometrien som inom aritmetiken och algebran, den är äfven förenlig med den fordran, som vill åt aritmetiken och algebran vindicera samma rättighet, som geometrien i långliga tider egt, nämnligen att uppfattas och behandlas såsom demonstrabla discipliner.

Vid undersökningen af den hevristiska metodens lämplighet inom matematiken är det särskildt af nöden att utreda, hvad man dermed menar. Ordet εὑρίσκω betyder ju: f i n n a, t i l l f ä l l i g t v i s p å t r ä f f a, u p p t ä c k a, i följd hvaraf εὕρεσις och andra deraf härledda benämningar såsom termini technici vanligast anses beteckna uppsökandet eller finnandet af den obekanta grunden till en gifven företeelse eller följd. En hevristisk metod är således icke detsamma som uppsökandet af något obekant i allmänhet, utan uppsökandet af en obekant g r u n d till en g i f v e n f ö r e t e e l s e. Men i det aritmetiska likaväl som i de geometriska uppgifterna är det icke någon *företeelse eller följd*, hvartill en grund skall uppsökas. Tvärtom är i allmänhet grunden bekant i och genom de relationer, som ega rum emellan de kända storheterna, och genom en analys af hvad dessa relationer innebära deduceras ur dem den obekanta såsom följd. Man söker icke sjelfva grunden eller hypotesen såsom obekant, icke ens i det fall, att «man antager problemet solveradt«, utan hvad som egentligen är obekant framgår genom konseqvensens makt såsom följd ur hypotesen. Fattar man åter den hevristiska metoden såsom liktydig med det förfaringssätt, enligt hvilket man går «från enklare till« mera komplicerade «exempel, tills man finner regeln«, hvarigenom det verkligen blir en uppfinningsmetod, en regression ifrån följden till grunden, så synes densamma i sin konseqvens vara ohållbar. Man skulle nämnligen derigenom komma till den fordran, att disciplarne borde genom sitt tankearbete deducera de regler hoc est den teori, som är — ett seklernas verk. Tacksamma för hvad vi emottagit från förgångna tider böra vi för vår undervisningsmetod uppställa såsom regel: att göra läroämnet begripligt.