Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen.

Svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891: 10.

I oktoberhäftet af Pedagogisk Tidskrift år 1891 förekom en recension af min vid samma års början utgifna »Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar». Jag kan då till en början förklara, att jag är hr Rollin mycket tacksam för hans artikel, *dels* emedan jag lika litet, som hr R. önskar reformer i räkneundervisningen utan grundlig pröfning, *dels* emedan artikeln gifvit mig anledning att för ytterligare klargörande taga till orda i denna sak, hvars stora betydelse för skolan man på många håll har en viss benägenhet att underskatta. Och då hr R. i flere viktiga punkter riktat anmärkningar mot mitt arbete, må det tillåtas mig, att, så fullständigt tidskriftens utrymme det medger, söka bemöta hans inkast. Jag vill då till en början upptaga hr R:s sista i bild framställda, så att säga »summariska» anmärkning i slutet af uppsatsen öfver min s. k. metod öfverhufvud.

Man har ofta stor benägenhet att misstyda den gamla satsen »non scholæ, sed vitæ discimus». Ofta får man höra, att skolan är till *hufvudsakligen* för att bibringa lärjungen ett visst mått af kunskaper, som sedan i lifvet kunna komma honom till direkt nytta. Detta är delvis felaktigt. Skolan har främst en *uppfostrande* betydelse. Det gäller framför allt att »lära den unga örnen flyga», att lära lärjungen, att själf använda och vidare utveckla de gåfvor han fått; det gäller att göra ynglingen till en fri och sjelfständigt tänkande menniska, ej till en död maskin, som mekaniskt kan fullgöra ett visst mått af arbete. Jag tillåter mig hänvisa till skollagens mycket viktiga 116:de paragraf: »Vid ledningen af lärjungens arbete vare lärarens förnämsta syfte att utveckla hans anlag och förmögenheter», och längre ned, »att öfva honom till sjelfverksamhet samt sålunda gifva hans insigter klarhet, säkerhet och mognad». Främst må han då lära sig att — tänka. Jag tror, att hr R. och jag godt kunna komma öfverens om, att matematiken måhända är det läroämne, som rätt meddeladt, bäst lämpar sig för att lära ynglingen att tänka på egen hand. Och härvidlag behöfver visst ej matematikens rent praktiska syfte förbises. Tvärtom. När »skogen är väl undersökt», då är det lätt att »gå upp några stora vägar»; än mer, man kan, utan fara att komma vilse från de »stora vägarne» när som helst göra utflykter. Däremot visar erfarenheten, att den, som först och främst fått vandra fram och tillbaka på matematikens »stora vägar» känner sig ej ega förmåga att när som helst utan möda företa de där utflykterna. — En sanning, som icke nog kan framhållas är den: först när man en gång *grundligt* begripit en sak, först då kan man sedan efter behag använda den saken för olika syften; först när man riktigt begripit en matematisk sanning, kan den utan möda användas på olikartade uppgifter. Den lärjunge, som själf fått leta sig fram till en matematisk sanning, har mångfaldig och större *praktisk* nytta af den, än den som mottagit den som en minneslexa.

Den första anmärkningen gäller mitt yrkande, att läran om de allmänna bråken bör föregå läran om decimalbråken. Sedan hr R. anfört de af mig i »lärogången» anförda skälen, säger han, att *några* bland dem förefalla oväntade. Då hr R. ej uppgifvit, hvilka dessa äro, så behöfver jag ej nu vidröra dessa mina skäl, utan nämner blott, att jag står fast vid dem, till dess de blifvit vederlagda.

Såsom bekant är, har ordningsföljden mellan dessa delar af aritmetiken länge utgjort ett tvisteämne mellan lärarne i matematik. Vid icke mindre än tre läraremöten, nämligen i Upsala, Gefle och Stockholm, har frågan diskuterats i den matematiska sektionen. Vid mötet i Upsala, vid hvilket jag ej var närvarande, lärer blott en lärare yrkat, att läran om de allmänna bråken borde komma först. Vid mötet i Gefle, der ingen omröstning verkställdes, uppträdde lika många för de olika åsigterna. Vid mötet i Stockholm däremot skedde omröstning efter en liflig diskussion, och en ganska betydande pluralitet röstade för att läran om de allmänna bråken skulle föregå läran om decimalbråken. När man, utan att genom meddelande af undervisning hafva förvärfvat sig erfarenhet i saken, tager frågan i öfvervägande, så tyckes läran om decimalbråken vara en helt naturlig fortsättning af läran om de hela talen. Då jag år 1853 började min lärareverksamhet, var jag fullt och fast öfvertygad om riktigheten af denna ordningsföljd, hvarför jag omedelbart efter läran om de hela talen öfvergick till decimalbråken, oaktadt det var mig väl bekant, att stor okunnighet i denna del af aritmetiken rådde äfven bland studenterna. Min tro var nämligen, att felet berodde på en förvänd undervisning. Försöket aflopp högst olyckligt. Så länge lärjungarne fingo syssla med samma slag af uppgifter, gick det bra. Ifrån mekanismen i det första exemplet, som vanligen måste meddelas dem, ledde de sig till mekanismen i de följande — tack vare vårt ypperliga talbeteckningssystem — men något verkligt begripande var ej möjligt att meddela dem, särdeles då det blef fråga om lösning af s. k. multiplikations- och divisionsuppgifter. Detta framstod ännu klarare, då lärjungarne skulle tillämpa det inlärda på praktiska uppgifters lösning. En sak lärde de sig däremot grundligt och det var — ovanan att gissa. Att lärare, som undervisa på skolans öfre stadier och ej sysslat med undervisning af 10- och 11-åringar hysa den åsigten, att läran om decimalbråken bör omedelbart följa efter läran om de hela talen, förvånar mig således ej, däremot förvånar det mig så mycket mer, att lärare, som hafva handlagt undervisningen med lärjungar af ofvannämnda ålder, kunna förorda denna ordningsföljd.

Många gånger har jag bedt dylika lärare att gifva mig anvisning på en enda bland deras lärjungar, som saknande insigter i de allmänna bråken befinnes ega verkliga kunskaper i läran om decimalbråken, men min bön har ej blifvit hörsammad.

Men hvad är då orsaken till att denna undervisning är så svår att bibringa barn? Jo! det att de ej kunna fatta begreppen en tiondedel, en hundradedel, en tusendedel o. s. v. Om någon skulle uppträda med yrkandet, att man vid inlärandet af de hela talen skulle börja med att först göra barnen förtrogna med decimalsystemets grundenheter ett, tio, hundra, tusen o. s. v. och därefter öfvergå till talen två, tre, fyra o. s. v., så skulle man le åt ett sådant förslag, — men man ler ej, utan tvärtom yrkar, att kunskap om bråken en tiondel, en hundradel, en tusendel o. s. v. skall meddelas före de lättfattliga bråken en half, en tredjedel, en fjärdedel o. s. v., och likväl äro de båda yrkandena lika stridande mot en af pedagogikens grundlagar, som bjuder, att man skall börja med det enkla och lättfattliga samt sedan öfvergå till det mer invecklade och svårfattliga. — Man tänker ej på barnen, som helt och hållet sakna de förutsättningar, som äro nödvändiga för att tillgodogöra sig en dylik abnorm undervisning. Ty huru kan man rimligtvis begära af barn, som äro okunniga om de enklaste bråken, att de skola begripa, t. ex. att produkten af 8 hundraden och 2 tusendelar är 16 tiondelar, att förhållandet mellan eller kvoten af 8 tiondelar och 2 tusendelar är 4 hundraden o. s. v. Redan bestämmandet af dylika enkla tals summor och skillnader möter stora svårigheter. Vid besök i skolor finner man, att vid division i decimalbråk barnen blifvit inlärda, att först förse dividend och divisor med lika många decimaler till höger om decimaltecknet och sedan utstryka decimaltecknet och dividera de då uppkommande hela talen. När t. ex. talet 2863 tusendelar skall delas i 7 lika delar, så dela de i stället det hela talet 2863 med 7000. Detta ytterst opraktiska sätt har läraren tydligen nödgats tillgripa för att af barnen kunna erhålla ett rätt siffersvar. Hade läraren funnit, att barnen verkligen förmått uppfatta decimalbråken, så hade han omöjligen tillgripit ett dylikt afvigvändt förfaringssätt, som barnen sedan envist följa äfven sedan de kunna fatta decimalbråken. Det kostar sedan mycket arbete att afvänja lärjungarne därifrån. Flere tecken tyda på, att lärarne allt mer och mer börjat inse fåfängligheten af sina sträfvanden med inlärandet af decimalbråken omedelbart efter de hela talen. Sålunda öfverlåter det sista skollagsförslaget åt läraren själf att bestämma ordningsföljden. Vidare hafva ledamöterna i sista lärobokskommittén yrkat, att en inledningskurs i läran om de allmänna bråken bör föregå läran om decimalbråken. Min åsikt är, att en dylik kurs är alltför otillräcklig. Erfarenheten har tydligt gifvit vid handen, att säkra kunskaper i decimalbråk endast kunna förvärfvas af dem, som förut ega grundliga insigter i de allmänna bråken. Det händer ofta, att kursen i den allmänna bråkläran genomgås mycket snabbt och lättvindigt, i det att lärjungens räknearbete inskränkes till ett mekaniskt sysslande med siffror. Att en dylik lek med siffror är alltför otillräcklig att tjena som grundval för läran om decimalbråken är klart och tydligt.

Läsaren må nu hafva hvilka åsigter som helst i denna sak, dock tror jag, att alla skola hålla med mig däruti, att det skall vara betydligt lättare att meddela en säker kunskap i decimalbråk åt de lärjungar, som ega kunskap i de allmänna bråken, än åt dem, som sakna en dylik kunskap. Mången torde invända, att en lärjunge, som först sysslat med decimalbråk, bör sedan lättare fatta de allmänna bråken, än en annan lärjunge, som ej befattat sig med decimalbråk. Erfarenheten — den pålitligaste läromästaren — säger, att förhållandet är det motsatta. De, som saknat kunskap i decimalbråk, hafva i läran om de allmänna bråken gjort hastigare och säkrare framsteg än de, som förut sysslat med decimalbråk. Alla, som jag undervisat, och deras antal uppgår till flere hundraden, hafva utan undantag från det fruktlösa sysslandet med decimalbråken medfört ovanan att gissa, hvilket kostat mycket arbete att sedan utrota. I många fall har det ej lyckats. Af dessa skäl anser jag det vara ett *stort pedagogiskt missgrepp* att vid undervisningen låta läran om decimalbråken följa omedelbart efter läran om de hela talen.

Ännu en invändning, som man ofta får höra, bör bemötas. Man får höra följande: Emedan enheterna för mynt, mått, mål och vikt blifvit ordnade efter decimalsystemet, så är kunskap i decimalbråk nödvändig för lösningen af de räknefrågor, som förekomma i det dagliga affärslifvet. I mitt arbete har jag visat, att detta ej är förhållandet, ty dylika frågor, som kunna uträknas med decimalbråk, kunna på ett mycket lättfattligare och bekvämare sätt lösas med de hela talen. Det torde vara få räknare, som använda decimalbråk, då hela tal med större fördel kunna användas. Skola t. ex. summor af och skillnader mellan längder bestämmas, så är det lättare att räkna med deras millimetertal än med deras metertal. Skall storleken af en rektangel, hvars bas är t. ex. 7 m. 3 dm. och höjd är 6 m. 4 dm. 7 cm., bestämmas med enheterna kvm., kvdm. och kvcm., så är det tydligare och i följd deraf fördelaktigare att beräkna hans kvcmtal än att beräkna hans kvmtal. Räkningen i det förra fallet är klar och tydlig, hvilket ej är fallet med den senare. Till och med vetenskapsmannen använder hela tal, då han kunde använda decimalbråk; sålunda användes alltid 753 mm. och ej 0,753 m. vid barometerhöjdens angifvande.

Att jag så omständligt berört detta ämne, beror derpå, att frågan har en så stor betydelse vid ordnandet af den matematiska undervisningen.

Hr R. har vidare anmärkt, att en klass af räkneuppgifter, som egentligen hör till bråkläran, finnes upptagen i läran om de hela talen. Såsom upplysande exempel har hr R. valt följande: 27 ark papper kosta 24 öre; hvad kosta 36 ark? Förmodligen har hr R. tänkt sig exemplet uträknadt på följande sätt: 1 ark kostar 27-delen af 24 öre, som är $^{8}/_{9}$ öre, och således kosta 36 ark 36-falden af $^{8}/_{9}$ öre, som är 32 öre. Behandladt på detta sätt hörer det naturligtvis till bråkläran. I stället för att först beräkna priset på 1 ark, beräknar man priset på 9 ark. Med ledning af mångfaldstabellen veta barnen, att 27 och 36, som bägge förekomma på 9-tabellen, äro mångfalder af 9. Beräkningen sker på följande sätt: 9 ark, som är 3-delen af 27 ark, kosta 3-delen af 24 öre, som är 8 öre, och således kosta 36 ark, som är 4-falden af 9 ark, 4-falden af 8 öre, som är 32 öre. Hade hr R. noggrannare genomläst arbetet, så hade han funnit dylika frågor vara fullständigt förberedda genom tvenne slag af uppgifter, som förmedla öfvergången till den klass, hvartill denna hör. Utrymmet medgifver ej att vidare orda i denna sak. Den läsare, som är intresserad i saken, kan genom mitt arbete öfvertyga sig, att jag ej gjort mig skyldig till ett så groft pedagogiskt fel. Genom andras och egen mångårig erfarenhet kan intygas, att dylika uppgifter ej möta några synnerliga svårigheter för barnen, och att de äro särdeles nyttiga för mångfaldstabellens inlärande och användande. Dylika uppgifter äro äfven synnerligen lämpliga såsom förberedelse till bråkbegreppets inlärande samt underlätta betydligt läran om bråks förenkling (förkortning). Af dessa skäl tror jag, att hr R. och öfrige lärare kunna »våga försöket» att använda dylika uppgifter vid sin undervisning, och det skall snart visa sig, att deras lärjungar däraf skola hafva verkligt gagn.

I det dagliga affärslifvet, i salubodar, på torgen, i hemmen o. s. v. förekommer en mängd räkneuppgifter, sådana som: 1 tjog ägg kostar 1 kr. 25 öre. Hvad kostar 17 st. ägg? — Ofta får man höra klagomål från föräldrar och målsmän, att barnen ej kunna lösa enkla räknefrågor, som förekomma dagligen i hemmen. Merendels äro de frågor, som föreläggas barnen af samma art som ofvanstående.

Man kan påstå, att bland 1000 räkneuppgifter, som förekomma i affärslifvet, höra 999 stycken till samma art som ofvanstående. Det är därför af synnerlig stor vikt, att lärjungarne snart blifva förtrogna med lösningen af dylika, som utom deras praktiska nytta göra lärjungarne förtrogna med enheterna för mynt, mått, mål och vikt och deras inbördes förhållande, på samma gång lärjungarne erhålla en välbehöflig öfning i mekanisk räkning. Dessa exempel för inöfvande af mekanisk räknefärdighet hafva många företräden framför de uppgifter, som finnas upptagna i exempelsamlingarna för nämnda ändamål. Likartade uppgifter med ofvanstående pläga upptagas såsom tillämpningar till bråkläran. För att kunna beräkna dylika uppgifter endast med kunskap i läran om de hela talen (de flesta barn i folkskolan medhinna ej mer än de hela talen) har jag föreslagit följande behandlingssätt af ofvanstående och likartade: När 1 tjog kostar 125 öre, så kosta 17 tjog 17-falden af 125 öre, som är 2125 öre, och således kosta 17 stycken 20-delen af 2125 öre, som är 106 öre. Vid dylika delningar tillsägas lärjungarne, att öka det erhållna öretalet med 1, när öfverskottet blir lika med eller större än halfva delningstalet. Innan dylika uppgifter föreläggas barnen, böra de genom förberedande åskådningsöfningar vara fullt förtrogna med att 17 stycken är 20-delen af 17 tjog, att 7 stycken är 12-delen af 7 dussin, att 763 meter är 100-falden af 763 cm. o. s. v. Därigenom att räkningen ordnas så, att delningen kommer efter mångfaldigandet, så kunna dylika viktiga räkneuppgifter öfverflyttas från läran om bråk till läran om de hela talen. Genom ett dylikt tillvägagående har jag äfven i mitt arbete visat, huru ganska invecklade ränteberäkningsuppgifter äfven kunna förläggas till läran om de hela talen.

Barnen äro mycket intresserade af dylika uppgifter och förstå mycket lätt beräkningssättet.

Rr R. tycker ej om beräkningssättet, utan säger, att jag kringgår saken genom en »artificiel» metod. Hvad hr R. här menar med ordet »artificiel» har jag ej kunnat fatta·

Om jag hade gifvit lärjungarne föreskrifter för ett förfarande, som de ej begripit, hvilket qvatuorspeciesläraren så ofta tvingas i sin nöd att tillgripa, då hade metoden med skäl kunnat kallas »artificiel».

Det är hr R. bekant, att, när man vill leda sig från priset på en storhet a till priset på en annan storhet b af samma slag, har man två utvägar: 1:o) att först beräkna priset på en jämn del af a och b (helst den största) och därefter beräkna priset på b. Detta sätt användes i ofvannämnda fall, då man af priset på 27 ark skulle beräkna priset på 36 ark. Största jämna delen till 27 ark och 36 ark är 9 ark. 2:o) Att först beräkna priset på en mångfald af a och b (helst den minsta) och därefter priset på b. Det är just detta sätt, som med stor fördel användes i förevarande fall. Minsta mångfalden till 1 tjog och 17 stycken är 17 tjog. Till ingen af dessa »metoder» kan med skäl fogas epitetet »artificiel».

(Forts. i nästa häfte.)

K. P. Nordlund.

Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen.

Svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891: 10.

(Forts. fr. första häftet.)

Jag öfvergår nu till att svara på de invändningar mot mitt arbete, som blifvit gjorda på sid. 409 och 410. Uppriktigt erkännes, att jag ej fullt förmått fatta andemeningen i hr R:s anförande. Så mycket framgår dock däraf, att mitt förslag till räkneundervisningens ordnande skulle lida af motsägelser och inkonseqvenser, då ordnandet af räkningen efter »den traditionella skatten» skulle i vetenskapligt och pedagogiskt hänseende vara mönstergilt. Vi skola nu undersöka, huru det förhåller sig med denna sak. Då saken är utomordentligt viktig, tvingas jag att äfven nu vara mångordig.

Då det möjligen kan vara af ett visst intresse för läsaren att få veta, huru jag blef »irrlärig», så meddelas här några fakta från min lärareverksamhet.

När jag år 1853 började min lärarebana, var jag fullkomligt »renlärig». Jag följde troget »systemet» med alla dess olika räknesätt och latinska termer. Ganska snart fann jag i likhet med lärobokskommissionen af år 1869, »att den vanliga uppställningen af en mängd afdelningar för olika slag af räkneuppgifter med därtill hörande regler medför mer skada än gagn, emedan en lärjunge därigenom lätt förledes att eftersöka, till hvilket af dessa förmenta räknesätt en fråga hörer, i stället för att eftersinna genom hvilka kombinationer af de fyra räknesätten lösningen erhålles». Inom kort fann jag äfven, att samma anmärkning, som gällde de extra räknesätten äfven gällde de ordinarie qvatuor species. Den artificiella indelningen i räknesätt med åtföljande föreskrifter om uppställningar gör nämligen, att aldrig barnen få riktigt syn på ett problems verkliga innebörd. När en uppgift kräfde en liten eftertanke, så kommo barnen fram och beklagade sig, att de ej visste, hvilket räknesätt skulle användas, eller vanligare antogo deras bekymmer följande form: »jag vet ej, huru jag skall ställa upp». När jag sedan hörde efter, hade de under sitt jäktande efter räknesättet ej gifvit sig ro med att begrunda uppgiftens innehåll. Därtill kom lärjungarnes oförmåga att begripa och rätt använda alla de från latinet hemtade uttrycken. När jag blef anställd som lärare här i Gefle, fick jag i uppdrag att äfven bestrida undervisningen i räkning vid stadens afton- och söndagsskola. Undervisningstiden var 7 timmar hvarje vecka. Undervisningen skötte jag under 23 år, som voro de lärorikaste af min lärareverksamhet. Lärjungarna voro till största delen arbetare, af hvilka ganska många aldrig förr sysslat med räkning. Under denna tid tvangs jag af omständigheternas makt att helt och hållet bryta med det gamla systemet. Den uppgift, som jag ställde upp för mig att lösa, var att göra räkningen så enkel och lättfattlig som möjligt, samt att tala ett språk, som lärjungarne kunde förstå. Jag har aldrig kunnat finna mig i att blott och bart gifva föreskrifter och artificiella regler om uppställning och uträkning utan några förklaringar. Detta slentrianmessiga sätt att sköta räkneundervisningen är särdeles bekvämt och vigt för läraren på samma gång som det är själsmördande, men lemnar ingen eller högst obetydlig behållning för lärjungarne. Det första arbete, som en lärare i räkning har sig ålagdt, är att göra lärjungarne förtrogna med talen och deras egenskaper. Efter ganska mycket sökande fann jag, att principen om *det hela*, *delarna* och *deras antal* var för detta ändamål synnerligen lämplig. För att tydliggöra dessa begrepp betjänar jag mig naturligtvis af konkreta föremål. Utgående från denna princip kunde jag på ett enkelt och naturligt sätt lösa de vanligaste af de i det praktiska lifvet förekommande räkneuppgifterna. Den matematiska skriften kunde äfven lätt tydas och hvad som i synnerhet bidrog till undervisningens förenkling var, att de flesta bland de latinska räknetermerna kunde kastas öfver bord I mitt arbete har jag särskildt framhållit *dels* behofvet af att vid undervisningen tala till lärjungarne ett språk, som de begripa, *dels* uppgifvit en mängd vid undervisningen i räkning öfverflödiga och oriktiga uttryckssätt, som under tidernas lopp insmugit sig och hvilka alstrat falska begrepp hos lärjungarne. Hr R. borde i sin artikel hafva berört detta viktiga moment i undervisningen. Hade hr R. företagit sig detta, så hade han träffat »pudelns kärna» i den strid, som pågår. Af hr R:s artikel framgår nämligen, att han strängt håller på den lärda latinska apparaten. Det hade varit ett lämpligt tillfälle för hr R., att i sin artikel framlägga de vetenskapliga och pedagogiska skäl, som tala för behofvet af dessa termer. Det, som jag benämner *det hela*, erhåller i räkneböckerna benämningarna: *summa*, *minuend*, *produkt* och *dividend*. *Delarna* benämnas: *addender*, *summander*, *termer*, *subtrahend*, *rest*, *multiplikand*, *faktor*, *divisor* och *kvot*. *Delarnas antal* benämnas: *multiplikator*, *faktor*, *divisor* och *kvot*. Hvarje lärare i räkning har sig väl bekant, huru omöjligt det är för lärjungarne att reda sig i denna labyrint af namn. (Anmärkningsvärdt i vetenskapligt hänseende är, att *delarna* och *delarnas antal* delvis hafva samma namn).

Möjligen invänder hr R., att hvarje räknesätt bör hafva sina benämningar, men detta håller ej heller streck. En räkneuppgift kan hafva följande lydelse: »Produkten är 2491 och multiplikatorn är 47. Hvilken är multiplikanden»?

I uppgiften förekomma multiplikationstermer, men den hörer till räknesättet *division*. (Rösten är Jakobs, men händerna Esaus).

Vid grundläggningen af bråkläran kan äfven samma princip med fördel användas, hvilket jag visat i »lärogången».

Vid tydandet af produkter och förhållanden (kvoter) kan den däremot ej alltid användas.

Satsen 48 kr. : 12 kr. = 4 kan tydas sålunda: »När det hela är 48 kr. och hvarje del är 12 kr., så är delarnas antal 4». Ett analogt sätt att tyda satsen:

9 kr. : 12 kr. = $\frac{3}{4}$ är ej möjligt.

Däremot kunna bägge satserna återgifvas på följande likartade sätt:

Förhållandet mellan 48 kr. och 12 kr. är 4 och förhållandet mellan 9 kr. och 12 kr. är $\frac{3}{4}$.

I läran om de hela talen hade jag kunnat upptaga begreppet *förhållande*, hvarigenom full öfverensstämmelse vunnits, men det var pedagogiska skäl, som höllo mig tillbaka, ty *delarnas antal* var för barnen mycket lättfattligare än *förhållande*. I bråkläran påvisas för lärjungarna denna öfverensstämmelse. Namnen *föregående* och *efterföljande*, som utbytts mot *det hela* och *hvarje del* äro hemtade från proportionsläran. Hr R. torde således finna, att ej någon motsägelse utan fullkomlig öfverensstämmelse eger rum. Vi skola nu se till, huru det förhåller sig med den »traditionella skatten» i detta hänseende.

Jag utgår från följande enkla sats, hvarur man kan bilda tvenne uppgifter: en multiplikations-, en delningsdivisions- och en innehållsdivisions-uppgift.

9 kr. är $\frac{3}{4}$ af 12 kr.

1) 9 kr. sökas.

När denna enkla uppgift skall lösas enligt »systemet», får lärjungen af läraren följande upplysningar:

1) att räknesättet heter multiplikation; 2) om uppställningen; 3) att 12 kr. benämnes multiplikand, $\frac{3}{4}$ multiplikator och den sökta penningsumman produkt; 4) att 12 skall förvandlas till *en*-delar; 5) att förkortning skall ske »korsvis»; 6) att täljarens qvarvarande faktorer skola multipliceras med hvarandra och det erhållna talet skall tagas till täljare etc.

Ändtligen får lärjungen svaret 9 kr. färdigt.

2) 12 kr. sökes.

Nu upplyses lärjungen, att räknesättet heter delningsdivision, att $\frac{3}{4}$, som nyss kallades multiplikator, nu heter divisor, att 9 kr. som nyss kallades produkt, nu heter dividend, att 12 kr., som nyss kallades multiplikand, nu heter kvot. Därefter komma föreskrifter om uppställning, förvandling till endelar, upp- och nedvändning och teckenombyte, korsvisförkortning o. s. v.

3) $\frac{3}{4}$ sökes.

Nu upplyses lärjungen, att räknesättet heter innehållsdivision, att 9 kr. äfven nu kallas dividend, men att 12 kr. åter ombyter namn och nu heter kvot, därefter följa föreskrifter likartade med de föregående i 2).

I läran om de hela talen hafva lärjungarne fått lära sig, att *multiplicera* betyder *mångfaldiga* och *dividera* betyder *dela*. Nu finna de däremot, att multiplicera stundom betyder mångfaldiga, stundom dela och stundom bäggedera i förening.

Att *dividera* betyder stundom dela, stundom mångfaldiga, stundom bäggedera i förening samt stundom något annat, för hvilket de ej känna något namn.

Detta påminner om den gamla leken: »När jag säger håll! så skall du släppa, och när jag säger släpp! så skall du hålla». Af dessa bägge lekar är afgjordt räkneleken den svåraste.

För att rädda systemet har man gjort många ansträngningar för att hitta på en definition, som för lärjungarna skulle klargöra de skiftande och hvarandra motsägande betydelserna af orden multiplicera och dividera. Ansträngningarna hafva ej kunnat krönas med framgång, ty uppgiften är orimlig. Emellertid anser jag mig skyldig att här meddela frukterna af de sista ansträngningarna, som för ändamålet blifvit gjorda.

Att multiplicera är att söka antalet för multiplikatorn, när antalet för ett helt är kändt.

Att dividera är 1) *att söka antalet för ett helt, när antalet för divisorn är kändt;* 2) *att undersöka huru många gånger ett tal innehålles i ett annat.*

Författaren af dessa definitioner har i sin bok försäkrat, att dessa definitioner äro enkla och lättfattliga. Hvad säger läsaren?

Såsom bekant är, hafva flere före mig påpekat qvatuorspecieslärans otillräcklighet att vetenskapligt förklara multiplikation och division i bråk såsom skilda räknesätt. Verkliga förhållandet är att de gå öfver i hvarandra. Se här tvenne exempel:

1) En rät linie $2\frac{2}{3}$ meter lång är delad i 5 lika delar. Hvilket är metertalet till hvarje del? Svar 1) $\frac{1}{5} . 2\frac{2}{3}$; 2) $2\frac{2}{3} : 5$.

Uppgiften är således på samma gång en multiplikations- och en divisionsuppgift.

2) En cirkels omkrets är 88 dm. Hvilket är dmtalet till diametern? Uppgifver man förhållandet mellan omkretsen och diametern vara $\frac{22}{7}$, så anses den vara en divisionsuppgift; uppgifves åter förhållandet mellan diametern och omkretsen vara $\frac{7}{22}$, så anses den vara en multiplikationsuppgift, ehuru räkningen i bäggedera fallen verkställes på samma sätt.

Hvarför har man ej här tagit sin tillflykt till en af matematikens hörnstenar, nämligen begreppet *förhållande*, som förekommer snart sagdt vid hvarje steg man tager inom matematiken och dess tillämpningar. Upptager man här detta begrepp, så försvinna alla svårigheter och en mängd uppgifter, som för en quatuorspeciesräknare äro synnerligen svåra att lösa, blifva då lätta. Hur enkel blir ej saken, då man ej talar om något räknesätt, utan säger, att $^3/_4 . 12$ kr. betecknar en penningsumma, som är 3 fjärdedelar af 12 kr., att 9 kr. : $^3/_4$ betecknar en penningesumma hvaraf 9 kr. är 3 fjärdedelar samt att 9 kr. : 12 kr. betecknar ett tal, som anger förhållandet mellan 9 kr. och 12 kr.

Efter dessa upplysningar från lärarens sida kunna lärjungarne lätt reda sig själfva. Men det enkla och naturliga skall göras svårt och obegripligt, ty i annat fall anses det ej vara lärdt. En bekant berättade en gång, att han åhört en examen i räkning, och att han funnit lärjungarne hafva varit utmärkt skickliga. Då jag bad honom omtala något från examen, förklarade han, att han ej begrep ett grand af deras räkning, och detta var för *honom* ett tydligt kännetecken, att lärjungarne voro utmärkt skickliga. —

I afseende på namngifvandet af räknesätt har man ej varit konsekvent. Sålunda finnas ej några namn för sättet att finna en vinkels sinus, cosinus, tangent, ett tals logaritm, motsvarande talet till en logaritm. Skälet därtill är lätt funnet; matematikern har ej behof af dylika namn. Kan man således godt reda sig utan namn i några fall, så måtte man väl kunna undvara dem i förevarande. Hvad särskildt angår benämningarna delningsdivision och innehållsdivision, så är det ofattligt, huru de kunnat få en så stor spridning. Delningsdivision (= delningsdelning) är den påtagligaste pleonasm. — När en storhet skall delas, så är det ju storhetens innehåll, som skall delas. Tillsatsen »innehålls» framför division är således meningslös. Kan man ej åstadkomma bättre namn än dessa, så är det bäst att kasta bort dem, ty de göra mera skada än gagn.

Nu öfverlåter jag åt hr R. och läsaren att afgöra, i hvilken af de bägge metoderna finnas motsägelser och inkonsekvenser,

---

I slutet af sid. 410 har hr R. oriktigt anfört mitt yttrande; det står nämligen, att af likheten

$$3 \text{ kilogram} = 7 \text{ skålpund}$$

framgår, att en tyngds kilogramtal är 3 sjundedelar af samma tyngds skålpundstal (3 är ju 3 sjundedelar af 7). En annan slutsats är äfven dragen ur samma likhet, nämligen att

$$1 \text{ kilogram} = {}^{7}/_{3} \text{ skålpund.}$$

Nu påstår hr R., att jag härledt den förra ur den senare, hvilket jag ej gjort. Satsen framgår äfven ur denna, dock ej så klart. Hvad förstår hr R. med det »häfdvunna reduktionstalet mellan de ofvannämnda vikterna»? Är det $^3/_7$ eller $^7/_3$? Verkliga förhållandet är, att reduktionstalet är $^3/_7$, när skålpundstal skola utbytas mot kilogramtal, och $^7/_3$, när kilogramtal skola utbytas mot skålpundstal. Upplysningsvis får jag nämna, att man kan vända upp och ner på en siffra eller ett sifferuttryck men aldrig på ett *tal*. Omvändes siffran 6, så erhålles siffran 9 o. s. v.

Med min tydning af de s. k. operationstecknens betydelse är ej hr R. belåten. Emedan hr R. uteslutit den del af mitt anförande, som kraftigast talar mot hr R:s uppfattning, så nödgas jag fullständigt anföra stycket, hvari saken omnämnes. »Den vanliga definitionen på de s. k. operationstecknen är, att de utmärka, att en viss räkning med talen, som de förena, skall verkställas, håller ej streck, hvarken i läran om de bestämda talen eller i läran om de obestämda t. ex. 3: 7, a + 7 o. s. v. Man har försökt komma ifrån motsägelsen genom den intetsägande förklaringen, att 3 : 7 är en tecknad division. Om 3 : 7 kan man antingen säga, att det betecknar ett tal, hvaraf 3 är 7-falden, eller att det betecknar ett tal, som angifver förhållandet mellan talen 3 och 7. De s. k. operationstecknen äro tecken, som jämte siffror och bokstäfver användas, *dels* för att beteckna tal och verkliga storheter, *dels* för att uti satser i förening med likhetstecknet uttrycka det samband, som äger rum mellan tal eller mellan verkliga storheter».

Egendomligt nog har hr R. ej omnämnt den sista delen af detta stycke, hvaraf ännu tydligare framgår, att operationstecknen ej utmärka, att en viss räkning med talen, som de förena, skall verkställas. När man vill i matematisk skrift angifva t. ex. att 12 är 5 mer (plus) än 7, och att 12 är 5 mindre (minus) än 17, så sker det på följande sätt:

$$12 = 7 + 5 \text{ och } 12 = 17 - 5.$$

Skulle nu tecknen + och − utmärka, att en räkning *skall* ske, så kommer man till den intetsägande satsen, att

$$12 = 12.$$

Som bekant är, kan hvarje tal betecknas på oändligt många sätt, sålunda kunna som tecken för talet *tolf* användas: 12, 8 + 4, 14 − 2, 3.4, 6 : $^1/_2$, $\sqrt{144}$ o. s. v. i oändlighet. De hela talen kunna betecknas endast med siffror. För de öfriga talens betecknande däremot behöfvas dessutom operationstecknen t. ex. 3 : 7, $^3/_7$, log 17, sin 2, $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ o. s v.

Ofta händer det vid räkning, att verkställandet af den »operation», som genom tecknet påyrkas, skulle vara ytterst ofördelaktig och tidsödande, t. ex. om frågan gäller att bestämma sjuttondelen af 17.597. Här skulle det vara mycket oklokt att först taga 17-falden af 597, som genom tecknet påbjudes och sedan dela produkten i 17 lika delar.

Att tyda operationstecknen på det sedvanliga sättet har betydligt försvårat matematikens studium. Denna oriktiga tydning står i omedelbart sammanhang med dyrkan af quatuor species med deras latinska tillbehör. Lärjungarna hafva, i stället för att noga begrunda den matematiska skriftens inre mening och därigenom leda sig fram, sökt genom artificiella knep och gissning i förening lösa frågan. Genom det envisa fasthållandet af quatuorspecies-principen har äfven algebran fått en högst opedagogisk uppställning. Först skall naturligtvis quatuor species i hela tal och bråk genomtuggas på ett för de flesta lärjungar obegripligt sätt. Efter 1 $^1/_2$ à 2 års fruktlösa ansträngningar komma de fram till ekvationsläran, då det börjar ljusna något. De lärjungar och dessa är många, som nödgas sluta skolan, när de två åren gått till ända, hafva ej haft någon nytta af den meddelade undervisningen. I stället kan algebran anordnas efter naturliga grunder, då ekvationsläran tidigt inträder och lärjungarna kunna ifrån första början fullt tillegna sig undervisningen.

Sedan man tillskapat den ena svårigheten efter den andra, har man fått matematiken, som är den klaraste bland sina vetenskapliga syskon, till ett »mysterium» och pinoredskap för en stor mängd lärjungar, som ej lyckas komma öfver de uppstaplade hindren.

I slutet af det stycke, som handlar om operationtecknen förekomma följande tre satser, som jag nu vill granska.

1) »Likaså fattar han (lärjungen) lätt, att 3 : 7 betyder, att 3 skall delas i 7 lika delar o. s. v. När behofvet däraf gjort sig gällande, d. ä. då man börjar med algebran, möter ingen svårighet att modifiera och precisera beteckningarnas betydelse».

Behofvet att dela 3 i 7 lika delar gör sig naturligtvis gällande genast, då 3 : 7 presenteras för lärjungen och bör ej uppskjutas till algebran, hvarmed de flesta ej få göra bekantskap. Hr R., som kan algebra, borde hafva visat, hur »operationen» tillgår, ty därom lefver jag och många med mig i fullkomlig okunnighet. I det sammanhang orden »modifiera och precisera» här förekomma, kunna de lämpligast återgifvas med »tala sanning».

2) »Ett uttryck som följande $^3/_4$ m. : $^9/_{10}$ (som utmärker en längd, hvaraf $^3/_4$ m. utgör 9 tiondelar) kan utbytas mot det enklare tecknet $^5/_6$ m. — innebär ett språk, som icke synes afpassadt för den ifrågavarande ståndpunkten».

Denna tydning medför inga svårigheter för lärjungarne. Man uppritar på svarta taflan en linie, som är $^3/_4$ m. och tillsäger lärjungen att upprita en linie, hvaraf den uppritade linien är 9 tiondelar, och detta möter inga stora svårigheter. Skulle han göra delningen på ett oriktigt sätt, hvilket händer, så kan han själf se, att linien ej är den rätta. På samma gång finner han äfven, huru han skall erhålla den rätta. Sedan han fått linien uppritad, är beräkningen af metertalet sedan lätt, ty inledningsöfningarna därtill förekomma i början af bråkläran. Hr R. kan ej neka till, att »$^3/_4$ m. : $^9/_{10}$» har den ofvan angifna betydelsen. Nu vill hr R., att det dessutom skall beteckna en räkneoperation, som skall företagas med längden $^3/_4$ m. och talet $^9/_{10}$. Att i ett uttryck inlägga två så olika betydelser är en påtaglig orimlighet. Nu vill hr R., att man först för lärjungen skall nämna, hvad det icke betyder för att sedan längre fram få tillfälle att »modifiera» och precisera d. ä. omtala, hvad det verkligen betyder.

3) När för öfrigt författaren vill, att 15 böcker : 3 [1]) skall betyda delarnes storlek och 15 böcker : 5 böcker delarnas antal, så synes han råka ut för just den oegentlighet, att *ett och samma* betecknar olika saker etc.

Kan det verkligen vara hr R:s fulla allvar, att dessa uttryck betyda det samma. Har hr R. ej märkt, att det förra är delningsdivision och det andra innehållsdivision? (jag talar nu ett språk, som hr R. tycker om).

Kanhända att hr R. äfven anser uttrycken

12 meter : 4 och 12 meter : 4 decimeter

också betyda detsamma, oaktadt det förra betecknar längden 3 meter och det andra talet 30.

På sista sidan 412 förekommer följande sats: »I alla händelser förutsätter metoden en ovanlig lärareskicklighet och måhända äfven mera begåfvade lärjungar».

Mitt arbete har varit mycket välvilligt anmäldt i »Nyt tidskrift for Mathematik», som utgifves i Köpenhamn. Såsom motstycke till ofvanstående sats, vill jag meddela ett kort utdrag ur den långa anmälan.

»Jeg betvivler ikke, att de fleste, naar de have gennemset Bogen, ville sige: »Aa, er det ikke andet, det kunde vi virkelig sige oss selv» men det er net op et Fortrin ved Bogen; det viser, at den er naturlig og ligefrem og ikke indeholder noget kunstigt og oppstyltet. Og Bemerkningen »det kunde vi sige oss selv» är ju ikke ganske det

1) Bör enl. det följande vara 5.

samme som »det sige vi oss selv» eller »have vi sagt oss selv»; nej, det er net op det, att man bliver gjort oppmærksom derpaa, der tilltrænges». Så olika kunna omdömena om samma arbete utfalla.

Jag är rädd, att under hr R:s åsigt om min metod såsom kräfvande större lärareskicklighet ligger ett tyst — måhända omedvetet — erkännande af, att talläran, behandlad med den gamla metoden, måste bli mer eller mindre obegriplig för lärjungarne, och att derför räkneundervisningens ändamål måste bli att blott bibringa en nödtorftig *mekanisk* färdighet för hvilkens meddelande — det erkänner jag gerna — ej kräfves någon »ovanlig» lärareskicklighet, ty mekanisk färdighet kan hvar och en, som sjelf känner mekanismen, bibringa andra. Men för så vidt hr R. erkänner, att det vore godt och önskvärdt, att tallärans »mysterier» också blefve förståndskunskap och för så vidt hr R. öfverhufvud tillmäter vår lärarekår förmåga att lära barnen något tänkande — och det vore sorgligt, om en dylik förmåga ej funnes — så lär väl hr R. också få »modifiera» sin märkliga åsigt, att talläran, behandlad på ett inveckladt sätt, skulle kräfva mindre lärareskicklighet för att få verkligt begripande till stånd, än samma lära, behandlad på ett enklare och naturligare sätt.

K. P. Nordlund.