Ränte- och amorteringsproblem.

Uti denna tidskrifts 2:dra, 3:dje, 4:de och 5:te häften* innevarande år förekomma diskussioner öfver ett så kalladt amorteringsproblem, gifvet i studentskrifningen förliden hösttermin.

Att döma af de båda sist insända uppsatserna äfvensom af de läroböcker, som vid våra lärovärk begagnas, synes den åsikten vara tämligen allmän, att formlerna vid sammansatt ränteberäkning, då tiden ej är helt antal år, hvarken äro användbara, ej häller värda att blifva föremål för någon diskussion. Äfven om man måste medgifva, att de genom nämda formler erhållna värdena kunna vara främmande för något ifrågavarande problem, lämna de likväl tolkningar till andra med problemet så nära besläktade frågor, att på detta område, om någonsin, diskussionen af de främmande värdena ej bör lämnas ur sikte.

Med angifvandet af årliga räntefoten synes mig ej något annat böra afses, än bestämmandet af kapitalets så att säga dyrhet, åtminstone bör detta vara ett af ändamålen, som därmed afses. Att denna dyrhet ej blir konstant, därest räntorna antagas proportionela mot tiderna, ligger i öppen dag, men som de härigenom erhållna felen, då tiderna äro mindre än ett år, i allmänhet äro obetydliga, är af praktiska skäl nämda antagande ofta fullt berättigadt, isynnerhet som felen, därest de skulle blifva betydliga, genom ändring af räntefoten lätt kunna bortskaffas.

Då emellertid för hvilka som hälst tider uttrycket $(1 + \frac{p}{100})^t$ ger det enda riktiga värdet på slutsummans förhållande till begynnelsekapitalet, är det nästan oförklarligt, att nämda värde helt och hållet kan negligeras för brutna värden på t, i synnerhet då man besinnar, att det ovilkorligen måste användas i likartade problem, som behandla t. ex. folkökningen efter en uppgifven procent. Här kan ej på grund af någon öfverenskommelse ökningarna sättas proportionela mot tiderna, hvilket också är allt för orimligt, för att af någon på allvar kunna ifrågasättas.

Är uppgiften åter att beräkna, huru länge en bestämd årlig inbetalning skall göras för att erhålla ett annat bestämdt kapital, då räntefoten är gifven, inses lätt, att uppgiften kan vara orimlig, därest betalningsterminerna äro bestämda, såsom t. ex. vid premieinbetalningen vid lifförsäkringar. Annat blir förhållandet, om jag med en årlig betalning af k kronor endast afser de under

---

* Artikeln var insänd till redaktionen före 6:te häftets utgifvande, men förf. har icke ansett de i nämda häfte förekommande uppsatserna i ämnet gifva anledning till ändring i det insända manuskriptet.
Red.

året gjorda inbetalningarnas värde vid årets slut, så att betalningar må erläggas efter hvilka tidsintervaller som hälst, blott deras värde vid en viss tid är lika med värdet vid samma tid på de vid slutet af hvarje år gjorda betalningarna. Problemet blir ej längre orimligt, och det ur den kända serieformeln erhållna värdet på tiden är det fullkomligt riktiga, under antagandet naturligtvis, att årliga räntefoten anger den bestämda, oföränderliga dyrheten på kapitalet under hela tiden.

Det värde k^I, som, erlagdt efter förloppet af hvarje $^1|_n$ år, motsvarar en årlig betalning af k, erhålles naturligtvis ur ekv.:

$$k^I\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{\frac{n-1}{n}} + k^I\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + k^I = k$$

eller

$$k^I = \frac{k\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{1|_n} - 1\right]}{\frac{p}{100}}$$

och det värde k^{II}, som, erlagdt efter förloppet af hvarje $\frac{m}{n}$ år (m och n hela tal), motsvarar betalningen k^I, erhålles ur ekv.:

$$k^I\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{\frac{m-1}{n}} + k^I\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{\frac{m-2}{n}} + \ldots + k^I = k^{II}$$

eller

$$k^{II} = \frac{k^I\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{m}{n}} - 1\right]}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

eller

$$k^{II} = \frac{k\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{m}{n}} - 1\right]}{\frac{p}{100}}$$

Således samma formel, som bestämmer värdet efter t hela års förlopp på en årlig betalning af k kronor, bestämmer äfven det kapital, som, erlagdt efter hvilka tidsintervaller som hälst, motsvara årliga betalningar af k kronor.

Skulle således den vanliga ränteformeln ge mig värdet $t + \frac{m}{n}$ (t, m och n hela tal) på den behöfliga tiden, för att en årlig betalning af k kronor skall växa till K kronor, så bör detta tolkas så, att vid den tiden är betalningarnas värde K kronor, när hälst betalningar göras, blott de, på sätt ofvan visadt är, motsvara årliga betalningar af k kronor. Önskar jag att k kronor, så länge ske kan, betalas vid slutet af hvarje år, och sedan resten på en gång, som naturligtvis måste ske $\frac{m}{n}$ år efter den sista helårsbetalningen, blir denna rest, som ofvan visadt är:

$$\frac{k\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{m}{n}}-1\right]}{\frac{p}{100}}$$

Värdet efter $(t+\frac{m}{n})$ år på helårsbetalningarna är:

$$\frac{k\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t}-1\right]\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{m}{n}}}{\frac{p}{100}}$$

Följaktligen är vid denna tid summan af dessa betalningar och nämde restbetalning:

$$\frac{k\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t+\frac{m}{n}}-1\right]}{\frac{p}{100}}$$

det vill säga det bestämda slutvärdet K.

Hvad nu beträffar detta särskilda problem, om hvars tolkning så många olika meningar tyckas råda, och hvars ordalydelse är: "En person har till ett företag lånat 15,000 kr. mot 5 procents löpande-årlig ränta. Han betalar vid hvarje halfårs slut 450 kr. När är skulden amorterad?" så synes mig vara mest naturligt antaga, att problemet är fullkomligt bestämdt och möjligt att lösa med tillhjälp af allmängiltiga matematiska satser, oberoende af godtyckliga förutsättningar och särskilda länders lagar och författningar. Detta gifvet, kan den sökta tiden ej erhållas ur någon annan formel än följande:

$$15{,}000.\ 1{,}05^{t}=\frac{450\,(1{,}05^{t}-1)}{1{,}05^{1/2}-1}$$

hvarur erhålles $t = 35{,}506$.

Således är lånet i det närmaste inbetaldt efter 71 halfårsinbetalningar. Vill man fästa sig vid de två sista decimalerna, så skulle efter ytterligare något mer än två dagar betalas ungefär 5 kr. 33 öre, som erhålles ur formeln:

$$450.\ \frac{1{,}05^{0{,}006}-1}{1{,}05^{1/2}-1}$$

Är det däremot meningen att ifrågavarande problem skall på annat sätt lösas, måste man med Solander instämma däri, att nödvändiga förutsättningar för problemets behandling saknas.

J. M. Krok.