Ett och annat om decimaler

af

Birger Rollin.

Ehuru den lättare läsning, som eljest representeras af läseboken, icke fått någon plats vid undervisningen i matematik, har det dock synts författaren af dessa rader, som om den icke vore utan all betydelse äfven på detta område. Särskildt i fråga om premieböcker har man behof af en lektyr, som å ena sidan ansluter sig till det genomgångna skolpensum, under det den å den andra vidgar vyerna och eggar intresset genom nya synpunkter och tillämpningar.

Förevarande lilla uppsats vill vara ett försök, om man icke med användande af den historiska synpunkten vid framställningen samt genom att hemta hjälp från det område, som plägar betecknas med namnet »matematiska tidsfördrif» skulle kunna locka till sig en och annan läsares uppmärksamhet, hvilken måhända eljest skulle skrämmas bort af ämnets abstrakta torrhet.

Decimalernas framträdande.

Man fann tidigt nog behof af att dela en enhet i lika delar och att räkna med bråk. Men den som vet, hvilket arbete redan addition i bråk innebär med den därvid behöfliga räkningen för att bringa delarna till samma slag eller göra bråken liknämniga, han förstår, att man icke i onödan ger sig i färd med hvilka delar som helst. När ett hemman delas mellan flere arfvingar, så uppkomma, allt efter dessas olika antal, olika slag af hemmansdelar, och dessa hemmanstal skola sedan ligga till grund för taxering och skattläggning. För några få år sedan var ännu lag, att vid prestval rösterna skulle räknas efter hemmanstalet. Vid rösternas summering kunde då kräfvas stort arbete, och ofta nödgades man röra sig med kolossala bråktal, af hvilka den tidens prestvalsförrättare hade en mindre angenäm erfarenhet.

På olika håll har därför visat sig en böjelse att begränsa delarnas olikhet. Så har man stundom ådagalagt förkärlek för tolftedelar och därmed sammanhängande delar; stundom har man föredragit den upprepade tudelningen.

Babylonierna, som indelat cirkelns omkrets i 6 gånger 60 grader, graderna i 60 minuter, minuterna i 60 sekunder och dessa i 60 tertier o. s. v., införde nu dessa sextiondelar i aritmetiken, och räkningen med ett dylikt bråksystem har kallats *sexagesimalräkning*. Enheterna betecknades som grader (^{0}), sextiondelar som minuter ($'$) och sextiondelarnas sextiondelar eller 3600-delar som sekunder ($''$). När man på detta sätt inskränkte sig till likartade delar, så blefvo förvandlingarna från det ena slaget till det andra tämligen enkla och beräkningarna lätta. $25^0\ 48'\ 30''$ betyder med detta beteckningssätt $25 + \frac{48}{60} + \frac{30}{3600}$, och sammanläggning tillsammans med vederbörlig reduktion utföres lätt: $25^0\ 48'\ 30'' + 70^0\ 20'\ 45'' = 95^0\ 68'\ 75'' = 96^0\ 9'\ 15''$. Vid multiplikation och division gaf man regler för räkningen med de olika talenheterna, såsom då man sade, att grader gånger minuter ger minuter, men minuter gånger minuter ger sekunder. — Denna räkning, som ännu under 1600-talet ofta intog en betydande plats i läroböckerna under namn af den astronomiska räkningen (logistica astronomica), har flera gånger sökt tränga sig fram och komma till vidsträcktare användning, alldenstund den har omedelbar tillämpning och anknytning i mätning och beräkning af vinklar och bågar, därvid ännu i dag motsvarande måttsystem äro de vedertagna.

Samma tanke, som tagit sig uttryck i sexagesimalbråken, ligger nu till grund för införandet af *decimalerna* eller användandet i räkningen af tiondelar och tiondelars tiondelar, och för dem ha utan tvifvel de förra varit förebilden, hvarför ock i gamla tider dessa båda slag af bråk behandlas vid sidan af hvarandra i räkneböckerna. Decimalräkningen kallades ock landtmätarräkning (logistica geodetica), tydligen på grund af den lätthet den medförde vid ytors beräkning. Dess slutliga seger öfver räkningen med sexagesimalbråk var emellertid gifven på grund af tiotalssystemets införande vid talbeteckningen samt i samma mån som detta beteckningssätt blef allmännare kändt och brukadt.

Användandet af decimaler plägar tillskrifvas araberna, hvilka ju för oss voro förmedlare vid förvärfvandet af hinduernas talsystem. Den som emellertid i Europa har infört decimalerna i den praktiska räkningen är holländaren Simon Stevin i en lärobok af år 1585, hvarjämte tysken Johann Hartmann Beyer omnämnes med en uppsats i ämnet år 1603 och en lärobok af år 1619.

Georg Stiernhielm och decimalerna i Sverige.

Det var naturligt, att införandet af decimalerna skulle gå hand i hand med förslagen till förbättrade mått- och målsystem, grundade på tiotalsprincipen; ty först i och med ett sådant system får räkningen med decimaler sin stora praktiska betydelse. Det var den på reformidéer rika tiden närmast före och efter Gustaf II Adolfs död, som bragte dessa frågor till lif, och Nordens intima beröring med Holland och Tyskland, kärnan i den tidens protestantiska Europa, förde äfven decimalräkningen till vårt land. Mot midten af 1600-talet märker man således, att decimalerna bli uppmärksammade vid våra universitet i Upsala och Åbo, men en jordmån, där dessa tankefrön särskildt synas hafva tagit rot, är vårt af Johannes Rudbeckius nyss upprättade första gymnasium i Vesterås.

1625 utnämndes till lektor därstädes förre lärjungen vid läroverket den lärde bergsmanssonen från Dalarne *Göran Lilje*, som på omfattande resor i Europa vunnit en rik bildning. Visserligen verkade han icke länge där, ty han kallades snart därefter af Gustaf Adolf till läsmästare vid det i Stockholm inrättade Collegium illustre, ett gymnasium för adlig ungdom; men det finnes anledning att antaga, att hans inflytande i Vesterås icke begränsades af den korta tjenstgöringstiden. I efterlemnade manuskript af hans hand finnas utförliga behandlingar af räkning med decimaler, och detta får så mycket större betydelse, då man vet, att det är samme man som under det adliga, i vår litteraturs häfder så välbekanta namnet *Georg Stiernhielm* fick Kongl. Maj:ts uppdrag att närmare bestämma rikets mått, mål och vigt samt framlade ett berömvärdt förslag till tiotalssystemets tillämpande på detta område, ett förslag som ock vann vederbörlig kunglig stadfästelse. Redan dessförinnan hade han af Gustaf Adolf blifvit adlad, samt erhållit i förläning ett par gods i Liffland, och senare bekläddes han med höga ämbeten i detta oroliga gränsland. Af förläningen hade han dock ingen långvarig glädje, i det godsen härjades af ryssarna och han själf utfattig jagades öfver Östersjön.

Stiernhielms intresse för naturvetenskapen och hans stora matematiska lärdom voro för den tiden ovanliga. Han säges hafva i Sverige infört solglaset och mikroskopet. När han med ett solglas tände på en liffländsk bondes skägg och i mikroskopet förevisade bekanta smådjur i häpnadsväckande förstoring, råkade han illa ut för presterskapet i Liffland, som exkommunicerade honom för hexeri och ateism. Han måste, för att bli befriad från bannet, i en oration vid Dorpats universitet redogöra för sin tro på Gud och hans under i naturen. »Stiernhielm var», säger Hultman*), »lång och reslig, brukade eget hår (i allongeperukens tidehvarf), kort pipskägg och bekymrade sig ej mycket, huru han gick klädd, hade alltid ett gladt sinne, försatte hellre sina angelägnaste sysslor, än han försummade ett roligt sällskap; var arbetsam och hade ganska mycket för sig, hvilket merendels stannade i blotta förslag.» Det var icke blott i religiösa saker som hans frispråkighet bragte honom motigheter; vid hofvet föll han i onåd och förvisades därifrån af drottning Kristina. Han dog såsom riksantikvarie år 1672, sedan han under senare delen af sin lefnad egnat sig åt språkforskning och ett vittert författarskap, som blef epokgörande för Sveriges litteratur.

Det finnes flere skäl som göra det antagligt, att det var denne mångsidigt lärde och idérike mans väckande inverkan, som hade gjort sig gällande, när år 1643 i Vesterås af trycket utgafs den första svenska lärobok, i hvilken decimalräkningen är behandlad, en behandling som på det närmaste ansluter sig till Stiernhielms. Författare till det förtjenstfulla arbetet var läraren i Vesterås, kapellanen vid domkyrkan därstädes, Mattias Biörk, och boken är tillegnad biskopen, kyrkoherden, läsmästaren, borgmästaren, befallningsmännen, rådmännen, köpmännen, handelsmännen och borgerskapet i Vesterås. — »Somliga hafva», säger förf., »delt sin mätestång uti alnar, skor, grader o. s. v. En part hafva sönderdelt hvar sin aln eller annat grundmått i 60 delar liksom uti logistica sexagenaria. Dermed hafva de kommit både uti ledsam räkning, såsom ock stor villfarelse i sin räkning. Detta hafva några behjertade mathematici låtit gå sig till sinnes och uppsökt beqvämliga medel detta besväret till att lindra. Uti hvilken kamp Johann Hartman Beyer hafver sig manligen bevisat med sin logistica decimali. Medlet till att lindra med hafver han tagit ett beqvämligt och högt öfver andra privilegieradt tal, nämligen 10.»

Stiernhielm och Biörk beteckna decimalerna något annorlunda, än hvad numera är brukligt. I anslutning till beteckningen vid sexagesimalräkningen anges de hela med

*) [illegible]

⁰ (graden) inom en liten cirkel, och på liknande sätt anges genom ett *tecken* den sista siffrans betydelse i andra fall. Sålunda äro att märka följande sätt att skrifva, hvilkas betydelse vi angifva med nuvarande decimalbeteckning:

$$523\textcircled{0} = 523$$
$$57034\textcircled{4} = 5{,}7034$$
$$56\textcircled{2} = 0{,}56$$
$$345\textcircled{4} = 0{,}0345.$$

Decimalkommat hade nämligen då ännu ej kommit till användning. Additionen går så till, att siffror, som skulle hafva samma tecken, sättas under hvarandra. Vid subtraktionen förvandlas talen till samma tecken, därigenom att man tillsätter nollor och ökar tecknet med lika många enheter. Vid multiplikationen får man den regeln, att man skall addera faktorernas tecken. När division skall ske, böra tecknen subtraheras, men därvid har man att se till, att dividendens tecken icke är mindre än divisorns, i hvilket fall man måste öka tecknet liksom vid subtraktion.

På samma sätt som Stiernhielms uppslag till nya mått föll i glömska och vanhäfd*), så försvann ock decimalräkningen ur de vida obetydligare läroböcker, som under de följande tiderna blefvo de herskande vid skolorna, och man kan säga, att räkningen med decimaler varit vid skolundervisningen bortglömd, ända tills den under 1800-talet åter bragtes å bane genom den då å nyo uppdykande frågan om måttsystemets reformering.

Räkning med decimaler.

Låter man det s. k. decimalkommat i ett tal bestämma de enheter, som de särskilda siffrorna beteckna, så att siffran till venster om kommat anger grundenheten samt siffrorna till höger tiondelar, hundradelar, tusendelar o. s. v. i ordning, så har man det decimala eller dekadiska talbeteckningssystemet utvidgadt och fullständigadt, och därvid betecknar hvarje siffra en enhet, som är tio gånger så stor som den följande siffrans och tiondelen af den föregående siffrans enhet.

Att nu addition och subtraktion försiggå på samma sätt som vid räkning med hela tal, faller af sig sjelft, blott att man låter motsvarande enheter stå öfver hvarandra, d.

*) Se uppsatsen »Om metersystemet och mätning» i förf:s lilla bok: *Populär matematik*. Stockholm 1898.

v. s. låter decimalkommata stå öfver hvarandra. Af det förut sagda framgår ock, att man i resultatet förvandlar en sorts enheter till närmast högre sorts genom öfverförande af minnet från en kolumn till den närmaste till venster, och att man likaledes vid fråndragning kan låna en enhet från föregående siffra, hvilken enhet då kommer att gälla för tio enheter i det närmast följande rummet.

Nu är att märka, att ett decimaltal multipliceras med 10, blott man flyttar decimalkommat ett steg till höger, emedan då enheten för hvarje siffra i talet blir 10 gånger så stor som förut. Af samma grund är klart, att man erhåller tiondelen, hundradelen eller tusendelen af ett tal genom att flytta kommat ett, två eller tre steg till venster.

I fråga om multiplikation är saken här lika enkel som vid räkning med hela tal, såvida multiplikatorn är ett helt tal; man har blott att iakttaga, att sista siffran i produkten skall ange samma slags enhet som sista siffran i multiplikanden, d. ä. att decimalkommat skall behålla sin plats. Men om äfven multiplikatorn innehåller decimaler, så måste man först göra sig ett begrepp om att multiplicera med tiondelar, hundradelar o. s. v. Det bör då vara tydligt, att liksom det att taga något 300 gånger kan sägas vara detsamma som att af den saken eller af det talet taga 3 hundratal, likaså måste det att multiplicera ett tal med 3 hundradelar vara att taga 3 hundradelar af det talet. Priset på 5 m. efter 2 kr. pr m. är 5 × 2 kr., och priset på 0,5 m. eller 0,5 × 2 kr. är 5 tiondelar af 2 kr. Fasthåller man detta samt erinrar sig, att $\frac{1}{10}$ af multiplikanden erhålles genom att flytta dess komma ett steg till venster o. s. v., så är det först och främst klart, att man här liksom vid hela tal erhåller en delprodukt för hvarje siffra i multiplikatorn och att hvar efter annan af dessa delprodukter måste placeras ett steg längre och längre till venster för att decimalkommata skola komma under hvarandra vid additionen. Likaså inses, att antalet decimaler i slutprodukten måste bli lika stort som i den första delprodukten, ty ingen följande delprodukt har så många decimaler. Följande exempel förtydligar detta:

$$\begin{array}{r} 438{,}67 \\ 2{,}694 \\ \hline 1{,}75468 \\ 39{,}4803 \\ 263{,}202 \\ 877{,}34 \\ \hline 1181{,}77698 \end{array}$$

Nu har första delprodukten så många decimaler mer än multiplikanden, som det finns decimaler i multiplikatorn; då nämligen multiplikatorns sista siffra är 4 tusendelar, så måste man taga 4 gånger tusendelen af multiplikanden eller 4 gånger ett tal, som har 3 decimaler mer än multiplikanden. Antalet decimaler i första delprodukten, och således äfven i slutprodukten, kommer följaktligen att vara så stort som antalet i multiplikanden ökadt med antalet decimaler i multiplikatorn.

Divisionen låter sig ock återföra till reglerna för division i hela tal. Är för det första divisorn ett helt tal, så finnes intet som skiljer divisionen med decimaler från heltalsdivision, blott att man iakttager att, när räkningen fortskridit till decimalkommat i dividenden, man har fått kvotens hela del; resten måste därpå förvandlas till tiondelar, hvarefter kvotsiffran, som erhålles, anger tiondelar o. s. v. Vore för det andra äfven divisorn ett decimaltal, så är det enklaste betraktelsesättet att byta om grundenheter, så att enheterna för sista siffran i divisorn betraktas som grundenheter, hvarigenom divisorn blir ett helt tal och kommat i dividenden rycker fram till höger lika många steg, som det förut fanns decimaler i divisorn. Resultatet af divisionen kan nämligen icke undergå någon förändring därigenom, att dividend och divisor läsas i andra grundenheter. När divisionen afser att bestämma, huru många gånger ett tal innehålles i ett annat, är lätt att inse, att denna förändring är tillåtlig: om man bestämmer, huru många gånger 2,35 m. innehålles i 12,925 m. eller huru många gånger 235 cm. innehålles i 1292,5 cm., kommer ju på ett ut. Men äfven då divisionen afser att åstadkomma någon slags delning, kan man lätt förstå, att ofvannämnda förändring får ske. Låt frågan t. ex. vara följande: Om 2,45 hl. väger 236,915 kg., hvad är vigten af 1 hl.? Ifall man då i stället för divisionen 236,915:2,45 dividerar 23691,5 med 245, så får man ju vigten af 1 l. uttryckt i hundradelar af kg., men tydligen är ju det samma tal som säger vigten af 1 hl. i kg.

Ett märkvärdigt tal.

Det finnes en liten aritmetisk gåta af följande lydelse. Tag det sexsiffriga talet 142857 och multiplicera med talen intill 6, så erhåller man:

1 gg. 142857 = 142857.
2 ggr 142857 = 285714.

3 ggr 142857 = 428571.
4 ggr 142857 = 571428.
5 ggr 142857 = 714285.
6 ggr 142857 = 857142.

De nya talen innehålla samma siffror i samma följd: det är som om första och sista siffran i talet toge hvarann i hand och siffrorna bildade en ring, hvarpå man börjar hvar som helst och, alltjämt gående i samma led, räknar fram ett sexsiffrigt tal. Därvid får man då ofvanstående 6 tal. Det är tydligt, att regeln icke kan räcka längre än till multiplikationen med 6, ty man har nu fått fram alla möjliga tal af detta slag, och dessa kunna ju icke komma tillbaka, då produkterna med högre tal måste bli större. Men vid nästa steg möter en ny egendomlighet, man får nu nior öfverallt.

7 ggr 142857 = 999999.

Går man vidare, så erhålles

8 ggr 142857 = 1142856,

som är ett sjusiffrigt tal; men om man afskiljer första siffran till venster och adderar till det återstående talet, så erhålles åter ett af de bekanta talen:

142856 + 1 = 142857.

Detsamma inträffar med alla följande multiplikatorer: Om man i produkten från höger räknadt afskiljer ett sexsiffrigt tal och därtill lägger det, som då blir öfver, så får man alltid tillbaka ett af de 7 talen.

64 ggr 142857 = 9142848
men 142848 + 9 = 142857
186 ggr 142857 = 26571402
men 571402 + 26 = 571428.

För hvar gång som man använder en multiplikator, som är en multipel af 7, så erhåller man genom nyssbeskrifna förfarande samma resultat som erhölls vid multiplikation med 7.

84 ggr 142857 = 11999988
men 999988 + 11 = 999999.

Vi skola finna förklaringsgrunden till dessa gåtfulla förhållanden, när vi gjort en utredning af ett och annat, som står i förbindelse med decimalbråken.

Ett bråks förvandling till decimalbråk.

Man skulle undgå de besvärliga bråkräkningarna, om man kunde förvandla hvarje förekommande bråk till decimalbråk. Men nu är det uppenbart, att detta i allmänhet icke låter sig göra, så vida man afser absolut likhet. Om man nämligen förutsätter, hvilket ju är tillåtet, att man blott har att göra med oförkortliga eller fullständigt förkortade bråk, så är förlängning den enda räkning, hvarigenom en dylik förvandling skulle kunna ske. Ty om man medger, att bråk få förkortas och förlängas, d. ä. att bråket icke till sitt värde undergår någon förändring, när täljare och nämnare samtidigt divideras eller samtidigt multipliceras med samma tal, så innebär ju detta äfven att hvarje annan räkning, hvarigenom i täljare och nämnare faktorer skulle införas eller borttagas, hvilka icke vore lika, måste medföra en förändring af bråkets värde. — Nu är ett decimalbråk ingenting annat än ett bråk, hvars nämnare är 10, 10 ggr 10 = 10^2, 10 ggr 10 ggr 10 = 10^3 o. s. v., eller med andra ord ett bråk, hvars nämnare innehåller såsom faktorer lika många *tvåor* och *femmor*. Däraf framgår, att intet bråk, hvars nämnare innehåller någon annan faktor än 2 eller 5, kan förvandlas till ett decimalbråk, och likaså inser man, huru förvandlingen skall ske, när den är möjlig, i det man inför de felande tvåorna eller femmorna såsom faktorer genom förlängning.

$$\text{Ex.: } \frac{21}{40} = \frac{21}{2.2.2.5} = \frac{21.5^2}{2^3.5^3} = \frac{525}{1000} = 0{,}525.$$

Om ett bråk ej hör till det slag, som kan förvandlas till ett decimalbråk af alldeles lika storlek, så kan man dock angifva, huru många hela, tiondelar, hundradelar o. s. v. bråket innehåller, så att det, som lemnas å sido, är mindre än en enhet af sista sorten, eller m. a. o. man kan tillnärmelsevis uttrycka bråkets värde i decimalbråk och det huru nära man någonsin vill. Om man på detta sätt vill uttrycka $\frac{13}{7}$ med decimaler, så behöfver man blott se till, huru många gånger och till huru många tiondelar, hundradelar o. s. v. enheten eller $\frac{7}{7}$ innehålles i $\frac{13}{7}$, det vill säga: man skall utföra divisionen 13 : 7; ty att talens enheter äro sjundedelar inverkar ej det ringaste på divisionen. Därvid erhåller man:

$$\begin{array}{r|l}
13 & 7 \\
\underline{7} & 1{,}857142\ldots\ldots \\
60 & \\
\underline{56} & \\
40 & \\
\underline{35} & \\
50 & \\
\underline{49} & \\
10 & \\
\underline{7} & \\
30 & \\
\underline{28} & \\
20 & \\
\underline{14} & \\
6 &
\end{array}$$

Nu är vid denna räkning att märka, att, så snart kvotens heltalsdel är bestämd, de rester som uppkomma vid sökandet af decimalerna äro inskränkta till de hela tal, som äro mindre än divisiorn, här 6, 5, 4, 3, 2 och 1. 0 kan icke förekomma, då ju divisionen ej kan gå jämnt upp. Man måste följaktligen återkomma till samma rest, hvilket i förevarande exempel, där divisorn är 7, allra sist måste inträffa i sjunde resten, och därefter framträda precis samma siffror i kvoten på nytt, på grund af att resterna upprepa sig i samma ordning, i hvilken de förut framträdt. Resultatet blir då hvad man kallar ett periodiskt decimalbråk. På det sättet finner man $\frac{13}{7} = 1{,}857142857142\ldots\ldots$, ett periodiskt decimalbråk, i hvilket perioden är 857142. Det kan emellertid hända, att den första resten återkommer tidigare, och då blir perioden mindre, än hvad man kunde antaga på grund af nämnarens storlek. Så är $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots\ldots$, där perioden 27 är tvåsiffrig, ehuru nämnaren är 11. Äfven ensiffrig kan perioden vara, t. ex. $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots\ldots$

Det är tydligt, att nu beskrifna räkning kan användas, äfven då man vill till decimalbråk förvandla ett sådant bråk, som noggrannt kan uttryckas med decimaler, blott att man då kommer till en rest 0 och räkningen afslutas.

Ett periodiskt decimalbråks förvandling till allmänt bråk.

Periodiska decimalbråk, sådana de nu blifvit beskrifna, kunna vara dels *rena*, hvilka blott bestå af den upprepade perioden, t. ex. 0,272727....., dels *blandade*, i hvilka periodens framträdande föregås af några icke periodiska siffror, t. ex. 0,2151515..... och 1,857142857142..... Man plägar för korthetens skull utskrifva perioden blott en gång men ange dess egenskap af period genom ett streck öfver densamma. Sålunda skrifver man: $0,\overline{27}$; $0,\overline{6}$; $0,2\overline{15}$; $1,\overline{857142}$.

Beträffande de rena periodiska decimalbråken är det tydligt, att hvarje sådant kan uppdelas i faktorer, af hvilka den ena är perioden sjelf. $0,\overline{27} = 0,272727... = 27.0,010101... = 27.0,\overline{01}$. Den andra faktorn är ett enklare periodiskt decimalbråk, i hvilket perioden utgöres af en etta med eller utan föregående nollor. Nu är det emellertid lätt att taga reda på, hvad dylika periodiska decimalbråk motsvara, ty $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$; $\frac{1}{99} = 0,\overline{01}$; $\frac{1}{999} = 0,\overline{001}$ o. s. v. Vid sådana bråks förvandling till decimalbråk blir nämligen resten alltid en etta, och när den blifvit försedd med vederbörliga antalet nollor, går divisorn alltid upp däri 1 gång. Däraf följer nu att $0,\overline{27} = 27.0,\overline{01} = 27.\frac{1}{99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$. Likaså är $0,\overline{351} = 351.0,\overline{001} = 351.\frac{1}{999} = \frac{351}{999} = \frac{13}{37}$. Detta gifver en enkel regel för att finna, hvilket bråk som motsvarar ett uppgifvet rent periodiskt decimalbråk.

Vid de blandade periodiska decimalbråken kan man finna det motsvarande bråket medels följande förfaringssätt.

$$0,2\overline{15} = \frac{2,\overline{15}}{10} = \frac{2}{10} + \frac{0,\overline{15}}{10} = \frac{2}{10} + \frac{15.0,\overline{01}}{10} = \frac{2}{10} + \frac{15}{990} = \frac{198 + 15}{990} = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}.$$

Förklaring af det gåtfulla talets egenskaper.

Nu äro vi rustade till att utreda grunden till de egendomliga förhållanden, som visade sig vid talet 142857. Om detta nämligen fattas som perioden i ett decimalbråk utan ända, så finner man:

$$0,\overline{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{15873}{111111} = \frac{5291}{37037} = \frac{143}{1001} = \frac{1}{7}.$$

Eftersom perioden innehåller 6 siffror och bråkets nämnare är 7, så hafva således alla de 6 möjliga resterna förekommit. Men då är det tydligt, att samma rester måste förekomma och i samma ordning, om man förvandlar ett annat bråk med samma nämnare till periodiskt decimalbråk, t. ex. $\frac{5}{7}$, naturligtvis dock med undantag för dem, hvilkas täljare är 7 eller en multipel af 7. Divisorn vid räkningen är ju nämligen alltid densamma, men begynnelseresten, från hvilken decimalernas bestämmande utgår, kan vara en annan, och således äfven första siffran i perioden, men från de framkomna lika resterna fortgår räkningen i de olika fallen absolut lika. $\frac{5}{7}$ måste således, förvandladt till decimalbråk, förete en period af samma siffror i samma följd som $\frac{1}{7}$, blott att början sker med skilda siffror. — Men nu bör man få $\frac{5}{7}$ äfven genom multiplikationen $5 . \frac{1}{7} = 5 . 0,\overline{142857}$. Följaktligen bör 5.142857 gifva till produkt ett tal med samma siffror i samma följd, ehuru med olika begynnelsesiffra — eller just det förhållande, som vi förut funnit ega rum och nu skulle förklara.

Skulle emellertid den använda multiplikatorn n vara så stor, att produkten blir mer än sexsiffrig, hvilket inträffar när n är större än 7, så kommer vid multiplikationen $n \times 0,\overline{142857}$ hvarje period att inverka på den föregående genom ett minne, som till sin storlek angifves af de siffror, hvarmed produkten $n \times 142857$ öfverstiger ett sexsiffrigt tal. Den nya perioden bör således erhålles genom att afskilja dessa öfverskjutande siffror till venster och addera det af dem bildade talet till det så återstående sexsiffriga. Men denna nya period i det decimaltal, som motsvarar bråket $\frac{n}{7}$, skulle just, enligt hvad ofvan är visadt, vara ett tal af ofvannämnda slag, bestående af samma siffror i samma följd.

Beträffande det fall att multiplikatorn är 7 eller en multipel af 7, så är först att märka, att $7 . 0,\overline{142857} = 7 . \frac{1}{7} = 1$. Men om man sätter $\frac{1}{7} = 0,142857$ utan upprepning af perioden, så begår man ett fel, ty den sista resten vid divisionen, som är $= 1$, har man kastat bort. Vill man således stanna vid dessa decimaler, så skulle man egentligen hafva tillagt en korrektion så stor som $\frac{1}{7}$ af den vid divisionen resterande milliondelen. Om man då multiplicerar 0,142857 med 7, så bör man på en milliondel när få $7 \frac{1}{7} = 1$ eller 0,999999. Det är således klart, att man vid multiplikationen af 142857 med 7 bör få ett tal af idel nior.

Är åter multiplikatorn m . 7 och man i stället för $m \cdot 7 \cdot \frac{1}{7}$ sätter produkten $m \cdot 7 \times 0{,}142857$, så blir resultatet $\frac{m}{1000000}$ mindre än hela talet m eller ett decimaltal, hvars heltalsdel är m—1 och decimaldel $0{,}999999 \frac{m-1}{1000000}$.

Afskiljes således heltalsdelen m—1 och adderas såsom milliondelar, så måste alltid resultatet bli ett tal af 6 nior, hvilket visar att den uppgifna regeln äfven i detta fall måste vara sann.