Litet kåseri med anledning av ett studentproblem.

Av Emil Solander.

Andra uppgiften i senaste studentskrivningen i matematik för reallinjen lyder sålunda: »Bestäm medelpunkten i en cirkel med given radie r, då cirkeln i två punkter tangerar parabeln $y^2 = 2px$.» Av symmetriskäl måste cirkelns medelpunkt ligga på parabelns axel; antag i punkten $(a, 0)$. Elimination mellan ekvationerna $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ och $y^2 = 2px$ ger eventuella gemensamma punkter. Man får $(x-a)^2 + 2px = r^2$, eller efter hyfsning $x^2 - 2(a-p)x + a^2 - r^2 = 0$. Diskriminanten $(a-p)^2 - (a^2 - r^2)$ eller hyfsad $-2ap + p^2 + r^2$ måste försvinna, om två skärningspunkter skola sammanfalla, vilker ger $a = \frac{p}{2} + \frac{r^2}{2p}$. Härmed är uppgiften formellt löst, men det återstår att undersöka, vilka värden a och r kunna antaga. Då diskriminanten är noll, får man direkt för tangeringspunkternas koordinater $x = a - p = \frac{r^2 - p^2}{2p}$, och således $y = \pm\sqrt{r^2 - p^2}$. Härav ses, att lösningen förutsätter $r > p$, varmed följer $a > r > p$. För $r = p (= a)$ sammanfalla tangeringspunkterna i vertex, vilket naturligtvis sammanhänger med — och utgör ett bevis för — att parabelns krökningsradie i vertex har värdet p. I detta sammanhang vill jag påpeka, att allmänna uttryck för parabelns krökningscentrum och krökningsradie lätt kunna erhållas utan användning av den generella teorin. Ekvationerna för normalerna i punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) kunna sammanfattas i dubbelekvationen $py - py_1 - y_1(x - x_1) = py_2 - y_2(x - x_2)$. För skärningspunktens x-kordinat fås därför, då punkterna ligga på parabeln: $(y_2 - y_1)x = \frac{y_2^3 - y_1^3}{2p} + p(y_2 - y_1)$, och således, så länge $y_2 \neq y_1$, $x = \frac{y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2}{2p} + p$. Låter man här $y_2 \to y_1$ fås x-koord. för krökningscentrum i (x_1, y_1):

$x = \frac{[illegible]}{2p} + p = 3x_1 + p$, och genom insättning i första ekv. motsvarande $y = -\frac{[illegible]}{p}$. Krökningsradien ϱ fås därpå:

$$[illegible]$$

eller efter enkla reduktioner:

$$[illegible]$$

allt eftersom man eliminerar y_1 eller x_1.

Det vare långt ifrån mig att vilja införa detta som nytt kursmoment, så mycket mindre som på det yttersta av dessa dagar undervisningstiden i ämnet på realgymnasiet undergått en ny och betydande minskning, men som övningsräkning för matematiskt intresserade elever kan det ju försvara sin plats. Krökningsradien i vertex kan behövas i fysikundervisningen, bl. a. vid redogörelse för astronomiska reflektorn, men den kan man komma åt på synnerligen enkelt sätt. Följande resonemang torde vara tämligen bekant. Parabelns subnormal är p. Normalerna i de två punkterna (x_1, [illegible]) måste därför skära varandra på axeln på avståndet $p + x_1$ från vertex. Låter man båda punkterna med lika hastighet obegränsat närma sig vertex, måste därför gränsvärdet för de sammanfallande normalernas skärningspunkt ligga på avståndet p från vertex.

Anmälningar och recensioner.

Anvisningar och betygstabeller jämte provsats till Rostads standardprov i mekanisk räkning. Pris 60 öre.

I likhet med en del andra länder, såsom Amerika, England och Danmark, har nu även vårt land fått standardprov i mekanisk räkning. De härför nödvändiga undersökningarna ha ut-