# Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen.

K. P. Nordlund: Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar. Stockholm 1890.

I.

Det fanns en tid, då man i räkneböckerna fick lära en stor mängd räknesätt, såsom division i hela tal, division i bråk, division i sorter, enkel intresseräkning, sammansatt intresseräkning, kedjeräkning o. d.; man fick öfva in ett bestämdt formuleradt förfaringssätt, efter hvilket uppgifter af en noga begränsad form uträknades så korrekt och hastigt som möjligt; man fick veta *huru*, man frågade aldrig efter ett *hvarför*, och man gjorde ej anspråk på någon förmåga att reda sig i labyrinter af skiftande aritmetiska spörsmål — sådant lemnades åt klyftiga hufvuden. Hvar och en eftersträfvade säkerhet i den räkneart, som han i hvardagslag hade för händer. Men också tarfvades mekanisk färdighet då för tiden, när man ännu laborerade med de gamla mått-, mynt- och vikt-systemen. Den nuvarande generationen skall väl knappast kunna göra sig föreställning om all den svett och möda, som dessa riksdaler, skillingar och runstycken, dessa pund, marker, lod och qvintin förorsakade mannen vid pulpeten äfven vid de vanligaste beräkningar. Det var icke underligt, att dåtiden fordrade af den bildade en försvarlig räknefärdighet i de vanligaste räknesätten, liksom man af en sådan person fordrar en jämn och ledig handstil. Räkna och skrifva sattes alltid jämnsides i våra fäders dagar.

Men så kommo decimalmåttsystemen, räkningen förenklades på alla områden i det praktiska lifvet, och man begynte få tid att egna litet eftertanke åt dessa oförstådda operationer: det blef fråga om att begripa räkningen för att därigenom förstå att använda den. Man fordrade nu, att aritmetiken, såsom ett förståndsutvecklande undervisningsämne, skulle rycka in bland de viktigaste medlen för den intellektuela uppfostran. Decimaltalen började draga till sig uppmärksamheten. Man fann, att dessa decimaldelar, hvilkas beteckning hvilade på samma grund som beteckningen för de olika enheterna i det hela talet, i det att ställningen bestämde det slags enhet, som hvarje siffra betecknade, icke väsentligen förändrade heltalsräkningen; häraf och till följd af deras nu ökade betydelse lät man räkningen med decimaler föregå allmänna bråk. Så vidt jag vet, har man väl icke förnekat, att man i decimaltalen har att göra med bråk, eller hållit före, att man icke skulle behöfva utreda delbegreppet vid deras behandling; men man har, i följd af de där förekommande delarnas enkla och likformiga art i förening med det ofvannämnda beteckningssättet, ansett läran om dem så lätt, att den väl lämpade sig som en öfvergångslänk och förberedelse för behandlingen af de allmänna bråken.

Man var ej längre nöjd med att låta multiplikator och multiplikand vara namn för de båda faktorernas plats vid räkningen, man ville ej mera genom en intellektuel våldshandling, påbörjad allt ifrån multiplikationstabellen, tvinga in lärjungen i den uppfattningen, att det var alldeles samma uppgift att taga tretton 5 gånger och fem 13 gånger, och man var därmed framme vid den mycket omtvistade frågan om ett eller två slag af division. Den praktiske läraren måste inse, att, såvida det för lärjungen nu skulle gälla att först fatta uppgiften riktigt för att sedan rätt förstå metoden för dess lösning, det nödvändigt måste leda till tankeförvirring att försöka öfvertyga lärjungen, att han hade samma uppgift, när han ville dela 84 i 7 delar och när han ville veta, huru många gånger 7 ginge upp i 84. Men vore uppgifterna olikartade, så måste hvardera lösas på sitt sätt, och man hade därmed delningsdivisionen och innehållsdivisionen, hvilkas öfverensstämmelse till en början måste för lärjungen framstå som alldeles tillfällig.

De 4 enkla räknesätten börja numera uppfattas, icke som ett minimiomfång för räknefärdigheten, utan såsom i sig innefattande hela den elementära aritmetiken, så att de öfriga afdelningarna i räkneläran blott vore att fatta som tillämpningar af dem. »Den vanliga uppställningen», yttrar den 1869 tillsatta s k lärobokskommissionen, »af en mängd afdelningar för olika slag af räkneuppgifter (såsom reguladetri, intresse-, bolags-, kedjeräkning o. s. v.) med därtill hörande regler medför enligt kommissiones tanke mer skada än gagn, emedan en lärjunge därigenom lätt förledes att eftersöka, till hvilket af dessa förmenta räknesätt en fråga hörer, i stället för att eftersinna, genom hvilka kombinationer af de 4 räknesätten lösningen erhålles».[1])

I sammanhang därmed har man mera reflekterat på den traditionela skatt, som ligger i de gamla quatuor species, betraktade som schemata för hela den elementära aritmetiken. Men för att man skulle kunna tillgodogöra sig denna fördel, var det nödvändigt att bringa enhet i uppfattningen af de motsvarande räknesättens betydelse på de skilda områdena eller framhålla hvarje räknesätt, vare sig det gälde hela tal eller bråk, såsom en metod till lösning af likartade uppgifter. Att ingenting var vunnet med den räknefärdighet vid multiplikation och division i bråk, som generation efter generation af skolgossar presterat, framhöll t. ex. Hultman (i mat. tidskr. 1868, sid. 234). Ofvannämnda kommission, som väl kan anses som en sakkunnig tolk för de tendenser, som gjort sig gällande under ifrågavarande skede, vill, att vid multiplikationsbegreppets fastställande det må framhållas, »att produkten i alla dessa fall [för hela tal, decimaltal och bråk] bildas af multiplikanden på samma sätt, som multiplikatorn bildas af enheten, hvarvid hänvisas till hvad förut blifvit lärdt om talens bildning.»[2]) På sådant sätt blir det lätt att framhålla öf-

1) Underdånigt betänkande af den i nåder tillsatta kommissionen för undervisningen i matematik och naturvetenskap. Sthlm 1872, sid. 14.

2) Anf. st. sid. 13

verensstämmelsen däri, att priset på 4 m. efter 3 kr. uttryckes med 4 × 3 kr. och priset på $^4/_5$ m. med $^4/_5$ × 3 kr.

Öfverensstämmande härmed bör man väl då vid frågor, som på de hela talens område lösas med delningsdivision, framhålla, att det sökta talet skall vara så beskaffadt, att det, satt såsom en dylik enhet till divisorn, frambringar dividenden, eller m. a. o, att man där söker en multiplikand till divisorn. Det bör då icke vara någon svårighet att fatta, t. ex. att man finner hastigheten i minuten, när ett bantåg går 900 m. på 1 $^7/_8$ min., såsom resultatet af en division likasåväl, som då 1 $^7/_8$ ersättes med något helt tal. Likaså måste vid innehållsdivisionen angifvas, att det sökta talet skall uttrycka, huru många gånger eller till hvilken del divisorn går upp i dividenden, och om man så vill, kan man gifva denna qvot namnet förhållande mellan dividend och divisor. Att nu här, liksom från heltalsdivisionen är lärjungen väl bekant, produkten af qvot och divisor återgifva dividenden och slutligen att divisionen äfven här kan så omvändas, att qvoten och divisorn byta plats, är något som bör inskärpas och ytterligare framhäfver enheten af hela räknesättet på de olika områdena i den mening, att det utgör formen för lösning af likartade uppgifter.

Det synes vara till en sådan grundläggning för lösningen af de uppgifter, som kunna föreläggas på skolans lägre stadium, som den moderna rörelsen på skolaritmetikens område syftat. Om föregående tiders lärjungar, oaktadt bristerna i framställningen af bråkläran, dock här och där lyckats skaffa sig en riktig uppfattning af bråkräkningen, så lär det väl bero på den enhet, som faktiskt förefinnes mellan de mera invecklade förhållandena vid bråkräkning och de lättfattligare vid de likbenämnda räknesätten i hela tal. Men äfven om en i nämnda afseende fullständigare framställning af bråkläran har gjort sig gällande, lära väl alltid finnas trögare lärjungar, hos hvilka luckor i uppfattningen lägga hinder i vägen för att säkert bedöma den räkning, som vid en viss uppgift bör förekomma. För sådana skall då den framhållna analogien med räkningen i motsvarande exempel af enklare slag blifva ett godt stöd. Sålunda skall, menar jag, quatuor species såsom genomgående synpunkt för elementararitmetikens behandling visa sig som en pedagogiskt fruktbärande princip.

Om jag lyckats riktigt uppfatta och gifva uttryck åt de sträfvanden, som under den senare tiden gjort sig gällande på aritmetikens områden inom skolan, och om öfverhufvud dessa sträfvanden äro berättigade — därom må den sakkunnige läsaren fälla sitt omdöme —, då synes mig den gjorda framställningen kunna utgöra en proba på värdet af framkomna förslag till ämnets metodiska behandling.

## II.

K. P. Nordlunds *Räkneöfningsexempel för skolor* hafva utgjort ett viktigt bidrag till den nyare utvecklingen af räkneundervisningen och hafva vunnit det amplaste erkännande och vidsträckt spridning. Redan för tjugu år sedan efterfrågades några af förf. utlofvade anvisningar och råd, hvilka skulle meddela hufvuddragen af hans metod. Då nu en sådan metodisk handledning i slutet af det förra året utkommit under titel: *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar*, så är det klart, att detta arbete skall tilldraga sig en mer än vanlig uppmärksamhet. Det har icke varit afsikten och ej häller behöfligt, att här framhålla detta arbetes förtjänster. Det är ju denne förf., som i all synnerhet verkat för att räkneundervisningen skulle ordnas så, att den blefve fruktbringande för förståndsodlingen, att lärjungarne skulle vänjas att vara »själfverksamma», i det öfningarna uppställdes i sådan följd, att lärjungarne själfva derur liksom framhemtade regeln; det är han, som framför andra kämpar för riktighet och konsekvens i termer och beteckningar; det är han, som infört en materiel, som för det förberedande stadiet bör vara synnerligen värdefull. Min afsigt är här hufvudsakligen att med anknytning till de ofvan gjorda betraktelserna fästa uppmärksamheten på vissa enskildheter i metoden, särskildt från undervisningen på den egentliga skolans område, hvilkas värde därmed skulle hänskjutas till läsarens bedömande.

Redan i inledningen yrkar förf. bestämdt på att läran om de allmänna bråken skall föregå decimalbråken på följande grunder: att grundlig insikt i den förra vore nödvändig för att förstå de senare, att alla uppgifter med decimaler, som rimligen kunna föreläggas, kunna lösas med hela tal, att i dagliga lifvet ett vida större antal uppgifter förekomma, som kräfva kunskap om allmänna bråk, än sådana som lösas med decimalbråk, att de senare mycket lätt inhemtas, när man har säker kunskap om de förra, att sysslandet med decimalbråken vållar oreda och vana vid gissning, och att ingen, som saknat kunskap i de allmänna bråken, befunnits kunna räkna med decimaler. Åtskilliga af dessa skäl förefalla oväntade, och när man senare ser den grundlighet, med hvilken förf. först med tillhjälp af den s. k. decimaltaflan och därefter vid räkning med siffror inskärper de olika enheternas betydelse i talsystemet, så frågar man sig ovilkorligen, hvarför icke äfven decimalerna kunde hafva fått komma med. Det är ingalunda fruktan att för tidigt införa delbegreppet, som afhåller honom. Såsom ett bevis på huru djärft förf. i det afseendet går till väga må anföras, att innan lärjungen ännu känner talen längre än till 100, han genom kännedomen om mångfalder och jämna delar på visst sätt införes på bråkräkningens svårare områden, såsom följande exempel visar: 27 ark papper kosta 24 öre; hvad kosta 36 ark? (Sid. 44) — ett försök, som jag tror få lärare skola våga göra efter. Men det är farhågan att vidröra multiplikation och division med decimaltal, som håller honom tillbaka, och han föredrager att räkna med tal med flere sorter, och där det ej låter sig göra — i multiplikator och divisor —, kringgår han saken med följande artificiela metod. Hvad kosta 7 kg. 8 hg. socker, när 1 kg. kostar 85 öre? — Öretalet till priset å 78 *kg*. är 78.85 öre = 6630 öre. Öretalet till priset å 78 *hg*. är 6630: 10 = 663. Detta måste då föregås af en utredning af att priset å 78 kg. är 10-falden af priset å 78 hg. (Se sid. 56!) — En sådan ställning intar förf. beträffande decimalbråken. Huru förhåller sig nu hans metod till frågan om de likbenämnda räknesättens enhet?

I ofvannämnda inledning betonar förf., hurusom undervisningen bör göras så klar och lättfattlig, att barnen med eget förstånd må kunna begripa det framställda. »Härvid», fortsätter han, »har jag måst uppsöka en enklare och säkrare grundval att bygga räkningen på än de s. k. fyra enkla räknesätten med de många latinska termerna, hvilkas verkliga mening barnen ej kunna fatta, och denna enklare grund har jag funnit i begreppet om det hela, delarna och delarnas antal.» Förf:s mening med dessa ord förefaller ej rätt klar. De fyra räknesätten kunna väl icke utgöra den grund, hvarpå räkningen bygges; denna grund måste väl vara en analys af de uppgifter, som med räkningen skola lösas, och därvid påträffar man helt visst kategorierna det hela, delarnas storlek och delarnas antal, så snart man nämligen inskränker sig till de hela talens område; men då ordna sig ock uppgifterna naturligt under de grupper, som angifvas af de 4 räknesätten. Nu söker förf. fasthålla detta betraktelsesätt äfven på bråklärans område; så har ett kapitel, som innehåller förberedande öfningar för multiplikation, till öfverskrift: »hvarje del sökes, då delarnas antal ej är en jämn del af arkdelarnas (här = bråkdelarnas) antal» o. s. v. Men, som naturligt är, vid den genomförda framställningen af multiplikation och division, hvilka namn icke i texten och således ej häller i undervisningen få förekomma, måste detta betraktelsesätt öfvergifvas, och termerna den föregående, den efterföljande och förhållandet få träda i stället för de ofvan angifna. Huruvida det förra kan anses vara en lämplig förberedelse och öfvergång till det senare, är väl tvifvelaktigt. Genom att vidare förf. gör förhållandet till det egentliga föremålet för studiet, kommer det åskådningssätt, som ligger till grund för innehållsdivisionen att träda fram i första rummet, och det som gör sig gällande i delningsdivisionen endast medelbart att tagas i betraktande.

Beträffande nu själfva denna lära om förhållanden, grundad på uppsökandet af den största jämna delen till de båda jämförda storheterna, torde det väl kunna sättas i fråga, huruvida sammanhanget mellan de 3 angifna arterna af förhållande [1) ett helt tal, 2) ett stambråk, 3) ett annat bråk, egentligt eller ogentligt] blir tydligt för lärjungen, då han icke i det föregående vant sig att betrakta t. ex. $^1/_4$ af 12 m. och $^3/_4$ af 12 m, såsom något analogt till 4 × 12 m.; det är först efter denna läras inhemtande, som han får vänja sig att teckna $^9/_{10}$ . $^5/_6$ m. i likhet med en multiplikation — namnet får som sagdt ej förekomma. Detta sammanhang ter sig deremot omedelbart, om förhållandena uppfattas som kvoter, hvilkas storlek växla, under det dividend och divisor förändra storlek i jämförelse med hvarandra; ja än mer, öfvergången framträder otvunget, när man vid heltalsdivision får en rest, som man söker uppskatta i divisorn såsom enhet. Till slut förklarar förf. i en anmärkning, sedan han där från sin synpunkt definierat multiplikation och division, »att benämningarna på dessa »räknesätt» äro oegentliga och vilseledande» (sid. 96). Härmed har alltså förf. kommit till ett resultat alldeles motsatt den uppfattning, hvilken jag i föregående afdelning trott mig kunna angifva såsom den, hvartill den samtida rörelsen tenderar.

Förf. älskar icke formela räknesätt och regler, och i all synnerhet är regeln om att vända upp och ned på divisorn honom förhatlig. När dock det blir fråga om utbyte af enheter (sid. 78), så inöfvar han t. ex. följande betraktelsesätt. Ett kg. är 7 tredjedelar af ett skålp., en tyngds kg.-tal är 3 sjundedelar af samma tyngds skålp.-tal, hvilket då ger det häfdvunna reduktionstalet. Månne icke den efterföljande satsen i praktiken just blir ett sådant inlärdt upp- och nedvändande, då deremot en dylik uppgift lätteligen begripes på följande sätt. 1 kg. = $^7/_3$ skålp. ∴ 1 skålp. = $^3/_7$ kg., 5 $^1/_2$ skålp. = 5 $^1/_2$ × $^3/_7$ kg., emedan man här naturligen måste förfara med $^3/_7$ kg. på samma sätt, som man i 5 $^1/_2$ skålp. förfarit med den lika stora enheten skålp. Och lika lätt inses uppgiftens lösning medelst innehållsdivision.

De s. k. operationstecknens betydelse vill förf. hafva ändrad därhän, att de, i öfverensstämmelse med deras användning i algebran, skulle tillsammans med siffrorna beteckna tal, det vill då säga det tal, som anger resultatet af den räkning, på hvilken de hafva afseende. Hvarför det skulle innebära en motsägelse att låta tecknen angifva en räkning, som skall utföras, är icke lätt att förstå. Allt tal om bokstafsuttryck kan på detta stadium uteslutas, och det är för nybörjaren det naturliga, att i $5 + 7$ fästa uppmärksamheten på de båda talen och hvad med dem skall göras, hvarvid han då frågar sig, hvad det kan bli för resultat däraf; men vida aflägsnare är för honom att tänka sig $5 + 7$ betecknande detta resultat. Likaså fattar han lätt, att $3 : 7$ betyder, att 3 skall delas i 7 lika delar o. s. v. När behofvet däraf har gjort sig gällande, d. ä. då man börjar med algebran, möter ingen svårighet att modifiera och precisera beteckningarnas betydelse. Ett uttryckssätt som följande (sid. 92) — $^3/_4$ m.: $^9/_{10}$ (som utmärker en längd, hvaraf $^3/_4$ m. utgör 9 tiondelar) kan utbytas mot det enklare tecknet $^5/_6$ m. — innebär ett språk, som icke synes afpassadt för den ifrågavarande ståndpunkten. När för öfrigt förf. vill, att 15 böcker: 3 skall betyda delarnas storlek och 15 böcker : 5 böcker delarnas antal (sid. 29 o. 30), så synes han råka ut för just den oegentlighet, att ett och samma betecknar olika saker, hvaremot han så ifrigt kämpar, när det är fråga om den gamla terminologin vid multiplikation och division.

Förf:s metod röjer i det hela tendensen att göra lärjungens aritmetiska föreställningsvärld så redig och kristallklar, att schemata och regler bli öfverflödiga; allt skall i det enskilda fallet vara begripet och genomskådadt, så att hvarje steg i beräkningen omedelbart framgår ur den klart uppfattade uppgiften. Jag fruktar dock, att man därvid stöter emot den begränsning, som ligger i människans abstrakta tänkande: man löper fara att drunkna i detaljer och förlorar öfverskådligheten. I alla händelser förutsätter metoden en ovanlig lärareskicklighet och måhända äfven mera begåfvade lärjungar. Det är en bild, som ofta trängt sig på mig, då jag sysslat med förevarande arbete. En person vill grundligt undersöka en skog och ger sig af på vandring både hit och dit, noga fasthållande, hvad han har bakom sig och hvad som följer efter. Håller han på länge sålunda, så kan det väl hända, att han sätter sin fot på hvarje ställe i skogen, men jag tviflar, att han skall bättre reda sig i skogen än den, som gått upp några stora vägar i bestämda riktningar, hvilka han tagit noga kännedom om, och sedan från dem kan, när så behöfves, företaga utflykter åt sidorna.

Har jag med dessa rader lyckats rikta uppmärksamheten på vissa viktiga drag i den Nordlundska metoden, så är mitt mål vunnet, ty detta har varit att förekomma, att den stora auktoriteten hos dess upphofsman — lärare i hundratal, särskildt från våra folkskolor, lyssna uppmärksamt till hans metodiska kurser — skall vålla, att systemet utan betänkande och grundligt öfvervägande antages och gör sig gällande.

*Birger Rollin.*