Satserna 31—35 sid. 22 och följ. likasom sats 19 å sid. 57 äro af den art, att de skola inhämtas af alla, och de böra således vara tryckta med grof stil.

§ 3. *Om öfningsboken för gymnasiet.* I de flesta fall äro *anvisningarna* till exemplen fullkomligt öfverflödiga. Oftast innehålla de en fullständig lösning af uppgiften. Jag har det allmänna intrycket, att uppgifterna i gymnasiets öfningsbok äro vida lättare än uppgifterna i realskolans.

Iakttages vissa förändringar särskildt beträffande den ordning, i hvilken en del satser läsas, anser jag dessa böcker ägna sig för gymnasiet. Måhända är kursen något dryg under närvarande förhållanden. En för gymnasiet särskild afpassad framställning af stereometrien är nog nödvändig. Den, som finnes i hr *Laurins* lärobok för realskolan, lämpar sig, så som jag förut betonat icke alls för realskolan, och ej heller synnerligen väl för gymnasiet.

E. Gn.

Genmäle.

Genmäle till lekt. E. Göransson.

Med anledning af den recension af *C. F. Rydbergs Lärobok i plan trigonometri*, som stått att läsa i januarihäftet af *Pedagogisk Tidskrift* för innevarande år, var det först författarens afsikt att inskränka sig till att i korthet påpeka, att vissa af granskarens omdömen hvilade på en oriktig uppfattning af författarens uttalanden i förordet. Men då å andra sidan i en mycket väsentlig punkt, nämligen i fråga om den ordning, i hvilken kartesianska koordinater böra komma till användning i trigonometrien, recensenten och författaren ha alldeles motsatt grunduppfattning och då denna fråga är af allmännare intresse och väl förtjänar att bli föremål för en grundligare pröfning, har författaren trott det kunna vara gagneligt att ingå i ett utförligare bemötande af denna och äfven vissa andra delar af recensionen.

Att med insändandet af detta genmäle så länge fått anstå har berott på att författarens tid under den gångna vårterminen hårdt tagits i anspråk af andra brådskande göromål. Då emellertid recensenten så nyligen som i slutet af maj på annat ställe[1]) genom upprepandet af sagda recensions anmärkningar gifvit ämnet förnyad aktualitet, torde det fortfarande kunna påräkna intresse.

Recensentens granskning sönderfaller i tre moment.

I mom. 1:o vänder sig granskaren mot de inledande definitionerna. Författaren har såsom skäl för det valda framställningssättet åberopat[2]) dels hänsynen till den historiska utvecklingsgången, dels åskådligheten, dels slutligen flerårig praktisk erfarenhet.

Hvad det första skälet angår, har recensenten alls icke förstått hvartåt det syftar. Han tror[3]), att författaren velat utgå från definitioner i *Ptolemæi* Almagest; om dessas rätta tolkning känner sig recensenten osäker, men anser i hvarje fall, att saken rör sig endast om en obetydlig historisk detalj.

Detta hvilar nu från början till slut på en missuppfattning. Författaren har i fråga om de inledande definitionerna icke ägnat någon tanke åt *Almagest*. Hvarifrån recensenten fått denna uppfattning är oförståeligt. Författaren har velat göra den grundläggande framställningen historisk, ledd af den grundsatsen, att när nya matematiska begrepp skola bibringas lärjungarna, det framställningssätt, som utgår från den gestaltning sagda begrepp fått vid sin uppkomst, är det naturligaste och därför också det lättfattligaste. De skäl, som tala för riktigheten af denna åsikt, äro på ett så öfvertygande sätt framställda af *Poul la Cour* i förorden till hans kända arbeten »Historisk Matematik» och »Historisk Fysik» att det torde vara tillräckligt att hänvisa till dem.

Tillämpadt på trigonometrien synes det historiska framställningssättet fordra, att definitionerna af de cirkulära funktionerna

---

[1]) Se »Nyare riktlinjer för matematikundervisningen» af Edv. Göransson i Högre realläroverkets på Norrmalm program för läsåret 1906—07.

[2]) Se förordet till läroboken, 2:a stycket.

[3]) Se recensionen sida 34.

formuleras i anslutning till den geometriska bild, som gifvit upphof till den alltjämt bestående nomenklaturen, tangent, sekant o. s. v.; däremot ingalunda, att man går tillbaka till *Ptolemæi* definitioner, mot hvilka svara en annan geometrisk bild. Häraf följer då, att det ur historisk synpunkt är förkastligt att, såsom ofta brukas, definiera de cirkulära funktionerna i anslutning till en rätvinklig triangel, hvilka förtjänster man än ur metodisk synpunkt kan vilja tillerkänna sagda framställningssätt.

Det finnes emellertid ett andra skäl att hänföra definitionerna till en cirkel i stället för till en rätvinklig triangel, ett skäl, som särskildt påverkat författaren till den recenserade läroboken. I förra fallet blir det nämligen möjligt att definiera de cirkulära funktionerna såsom *linjer*, under det att de i senare fallet måste definieras såsom *förhållanden mellan linjer*, och författaren föreställer sig, att det icke kan råda mer än en mening därom, att det är *åskådligare* att i en geometrisk bild följa variationerna af linjer än af förhållanden mellan linjer.

Nu visa också de trigonometriska tabeller, som utarbetades vid den tidpunkt, då den moderna nomenklaturen inom trigonometrien uppkom, att på denna tid de cirkulära funktionerna uppfattades såsom *linjer i en cirkel med godtyckligt vald radie*, hvilken uppfattning sedermera icke blifvit allmänt öfverdrifven förr än långt fram på 1800-talet. Så t. ex. är i de af *Rhäticus* i hans verk[1]) *Canon doctrinæ triangulorum* (1551) beräknade tabellerna radien $= 10^7$. Den åtskillnad mellan trigonometriska linjer och tal, som är genomförd i läroboken, är sålunda icke något påhitt af författaren, hvilket recensenten synes mena, då han yttrar:[2]) »Innan de egentliga trigonometriska funktionerna definieras, införes något, som författaren kallar *trigonometriska linjer*.»

Däremot har författaren i redans intresse tillåtit sig att här göra en distinktion, för hvilken han icke kan åberopa historisk häfd, i det att han för konsekvensens skull uppfattar bågen såsom *våglängd*, då det gäller de *trigonometriska linjerna*, men såsom *gradtal*, då det gäller de *trigonometriska talen*. Författaren stärktes i sin mening om behofvet af att göra en sådan distinktion, då han i det i lärobokens förord åberopade franska arbetet[3]) möt-

[1]) Se *Zeuthen*, Forelæsninger over Mathematikens Historie, Del II, sid. 158, Kjöbenhavn 1903.
[2]) Se recensionen sida 33.
[3]) *J. Pichot, Eléments de trigonométrie rectiligne*, Paris 1898.

tes af sådana uttryck som i § 11: »Les fonctions circulaires — — ont reçu le nom de *lignes trigonométriques*. Ce sont des *nombres abstraits*, car etc.» samt i § 12 därsammastädes: »Par extension d'idée on appelle lignes trigonométriques d'un *angle* les lignes trigonométriques de l'arc qui a la même mesure que l'angle. Dans la suite nous emploierons indifféremment le mot *arc* ou le mot *angle*.» På liknande sätt uttrycker sig *Borel* i § 8, sida 11 i sin lärobok i trigonometri.[1]) För den, som har någon erfarenhet om huru lätt lärjungar ha att begå misstag angående storheters *dimensioner*, står det nog klart, att man måste vakta sig för sådana uttryck, som de ofvan anförda, och i stället kraftigt betona, att *linjer icke äro tal.*

Af det ofvan sagda torde tillfyllest framgå hvad som varit författarens tankegång vid införandet af de grundläggande begreppen: Man börjar med att, i öfverensstämmelse med den historiska utvecklingen, framhålla, att mot hvarje cirkelbåge svara entydigt bestämda trigonometriska linjer samt huru dessa i *en och samma* cirkel ändra sig med bågen. Sedan visar man, att, när det gäller att använda dessa linjer såsom mått på vinkeln, det är nödvändigt att taga hänsyn till radiens storlek, då så väl bågen som de trigonometriska linjerna äro proportionella mot denna, hvarigenom lärjungen på ett *naturligt* sätt får besked om, hvarför det är lämpligt att såsom vinkelmått använda förhållandet mellan bågen och radien äfvensom hvarför vinkelmåttet måste vara ett abstrakt tal.

Man kunde vara frestad att taga det som ett skämt, då recensenten å sida 34 yttrar: Författaren synes själf ej vidare hålla på de först införda begreppen, enär han i en not på sida 1 säger: »de nu följande definitionerna äro ej afsedda att läsas utantill, utan tjäna endast att förklara den geometriska bilden» etc. Eller har recensenten verkligen icke förstått, att det var definitionens *verba formalia*, som icke behöfde läras utantill? Fortsättningen till det af recensenten afbrutna citatet lyder dock: »som bör fast inpräglas i minnet.» Behållningen af dessa definitioner skall således enligt författarens plan utgöras af dessa fast inpräglade minnesbilder, däri inbegripet insikten om deras variationer till storlek och tecken periferien rundt, hvilket skall utgöra den fasta grundvalen för allt det följande.

---

[1]) *E. Borel,* Trigonométrie, 2:e cycle. Paris 1904.

Den omständigheten, att samtliga de trigonometriska linjerna, såsom proportionella mot referenscirkelns radie, växa öfver all gräns med denna, tyckes särskildt stöta recensenten[1]) Emellertid tager sig recensentens missnöje härvidlag ett vilseledande uttryck, då han yttrar — »kommer författaren till, att exempelvis sinus för en båge varierar med cirkelns radie mellan $+\infty$ och $-\infty$.» I själfva verket varierar författaren endast *bågen* under det att *radien* behandlas såsom *en godtycklig konstant.* Att hålla bågens gradtal konstant och *variera radien* leder ju endast till trivialiteter. Emellertid är det så långt ifrån, att författaren för sin del tager någon anstöt af en sådan likhet som t. ex. $\sin 90^0 = 10{,}000{,}000$, där man i likhet med *Rhäticus* användt tabularradien 10^7, att han tvärtom häri ser en lämplig anknytningspunkt för att förklara anordningen med karaktäristikan i de moderna logaritmisk-trigonometriska tabellerna, där man ju har $\log \sin 90^0 = 10$, hvilket motsvarar en tabularradie $= 10^{10}$.

Författarens tredje skäl, gynnsamt resultat vid flerårig praktisk pröfning af det i läroboken använda framställningssättet, förbigår recensenten i sin anmälan med tystnad. Däremot heter det i *Nyare riktlinjer för matematikundervisningen*: »Jag föreställer mig, att detta, trots det att författaren åberopar sig på sin fleråriga erfarenhet, icke kan vara ett godt uppslag — — —»[2]). Författaren hade i sitt förord kunnat tillägga, att han icke står ensam om denna sin erfarenhet, utan att en medlärare, känd och och erkänd som framstående pedagog, i sin undervisning under flera år följt sagda lärogång och känt sig tillfredsställd med densamma. Under sådana förhållanden torde det icke förtänkas författaren, om han fortfarande vågar hysa den förhoppningen, att andra matematiklärares erfarenhet kommer att utfalla lika gynnsamt.

Recensenten vänder sig därnäst mot den i läroboken å sida 7 förekommande behandlingen af de trigonometriska talen för *små vinklar*, hvilken undersökning han anser ej ha kommit på sin rätta plats samt vara ur pedagogisk synpunkt svårbegriplig[3]). Författaren vill då först villigt medgifva, att den ifrågavarande

---

1) Se recensionen sida 33.

2) Se läroverksprogrammet för Realläroverket på Norrmalm läsåret 1906—07, sida 83.

3) Se recensionen, sida 35.

undersökningen är något knapphändig, men han har tänkt sig, att läraren skulle anknyta framställningen till den åskådning, som tagits i anspråk, då det gällt cirkellinjens rektifikation, som väl måste tänkas genomgången, innan lärjungarna börja studiet af trigonometrien. Har nu detta gjorts dogmatiskt, så skulle man ju nödfallsvis här kunna, under hänvisning till den stränga härledningen å sid. 75, inskränka sig till att rätt och slätt stödja sig på de trigonometriska tabellerna. Återstår att förklara hvarför behandlingen af *små vinklar* kommit på denna plats. Detta har uteslutande skett, för att lärjungarna, när de lärt känna de cirkulära funktionerna, genast må kunna använda dem för att lösa sådana uppgifter af astronomiskt innehåll som exemplen 3 och 4 till kap. 1 samt exemplen 13—15 till kap. 2. Dylika exempel äro på detta stadium, enligt författarens mening, särdeles lärorika och ägnade att väcka lärjungarnes intresse, på samma gång de på det mest påfallande sätt visa, huru trigonometrien sätter oss i stånd att mäta det otillgängliga. För dem, som icke dela författarens åsikt om värdet af sådana tillämpningsuppgifter på detta stadium, finnes natusligtvis ingen anledning att så tidigt behandla frågan om *små vinklar*.

I mom. 2:o af recensionen ingår recensenten i granskningen af vissa enskildheter af kap. 2— kap. 7 af läroboken. Då rec. betecknar framställningen i dessa kapitel såsom mönstergill[1]) och tillägger: »Hvad som kan vara att anmärka är ofta beroende på olika tycke och smak — i alla händelser endast *obetydligheter*», är det klart, att från författarens sida här icke finnes mycken anledning att taga till ordet, annat än för att uttala sin tacksamhet för det vackra erkännande, som här kommit hans bemödande till del, särskildt då detta erkännande är fotadt på en så ingående granskning af enskildheterna.

Upplysningsvis bör dock kanske ett par saker sägas. Först må rättelse af ett par tryckfel meddelas. Sida 35, rad 2 uppifrån *står* C A B, *läs* A C B; sida 87, tabell 5^0—10^0, rad 3 nedifrån, *står* 0,174, *läs* 0,171. Härtill må läggas, att sinusoiderna å sida 73 beklagligtvis äro otillfredsställande i af recensenten anmärkta afseende.

Beträffande de 20 uppgifter af allmänt innehåll, som behand-

[1]) Se recensionen sida 37.

las i lärobokens kap. 3, har deras lösning så fullständigt genomförts, på det att dessa uppgifter må, jämte tillhörande numeriska exempel, utan preparation kunna lämnas lärjungarna till arbete på egen hand. Författaren har tänkt sig, att, om lärjungarna först gått igenom hemma och sedan i skolan återgifvit ett tillräckligt antal dylika *allmänna* uppgifter, de skulle förvärfva färdighet och vana att, äfven då det föreläggas dem en *numerisk* uppgift, i regeln *först* behandla den *allmänt,* något hvartill de flesta lärjungar ju icke äro benägna.

Hvad angår behandlingen af trigonometriska ekvationer, så är ju antalet belysande exempel rätt stort[1], men måste väl så bli, om icke lärjungarna, när de sakna lärarens anvisningar, skola bli hänvisade till gissning eller enskild handledning. Åtskilliga af exemplen äro typiska; exemplen 9 och 10 tjäna, den ena i ett enklare fall, den andra i ett svårare till ledning för den diskussion, som antydningsvis såsom erforderlig omnämnes i läroboken nederst på sida 45. Att öfverlämna uppgifter af denna art helt och hållet åt lärjungarnas egen uppfinningsförmåga torde näppeligen slå väl ut. Anmärkas bör också, att just de båda uppgifter, som recensenten håller före, att såväl den ena som den andra bör lämnas till lärjungarnas eget arbete[2], finnas med stor utförlighet behandlade hos *Borel*[3]).

I mom. 3:o af recensionen är det såsom målsman för de moderna sträfvandena i syfte att reformera matematikundervisningens innehåll, som recensenten upptar till granskning författarens sätt att i bokens afslutningskapitel behandla de trigonometriska funktionerna med användning af kartesianska koordinater.

Härvid gör sig emellertid recensenten skyldig till ett svårt misstag rörande författarens syfte. Med stöd af det ställe i förordet, där författaren vidrör nyssnämnda reformsträfvanden, och väl också på grund af tidpunkten för bokens framträdande synes recensenten ha tagit för gifvet, att författaren, sedan han lärt känna programmet för dessa sträfvanden, sådant det kommit till utförande vid franska och försöksvis vid en del tyska läroverk, g i-

[1]) Jämför recensionen, sida 38.

[2]) Se recensionen nederst på sida 39.

[3]) *Borel, Trigonométrie* 2:e cycle, sida 136 och ff., Paris 1904.

pit sig an med författandet af en svensk lärobok i trigonometri, där samma grundåskådning skulle göra sig gällande. Detta förklarar då också, att recensenten anser sig böra förebrå författaren, att denne icke tagit vederbörlig hänsyn till litteraturen i ämnet[1]).

Sanna förhållandet är, att läroboken tillkommit, innan ifråvarande program kommit på dagordningen. Den har utarbetats af författaren under sommarferier från och med år 1900 och förelåg färdig i manuskript, så när som på öfningsexemplen, redan sommaren 1904. Först på våren 1905 lärde författaren känna de ofvan nämnda reformsträfvandena. Lärobokens sista kapitel har således *icke* tillkommit under inverkan af sagda rörelse, utan författaren hade länge känt det som en brist, att hithörande lärorika funktionskurvor saknats så väl i den numera allmännast använda läroboken i analytisk geometri som i läroböckerna i trigonometri. Författaren mindes, med hvilket intresse han själf studerade i *Lindelöf*, Analytisk geometri, kap. X, *Om några linjer af högre ordning*, och sammanskref nu kap. 8 i sin lärobok så, att det skulle kunna läsas såsom *afslutning* till så väl kursen i analytisk geometri som till kursen i trigonometri, bildande en öfvergång till högre delar af matematiken.

Emellertid hade författaren, redan när bokens första kapitel skrefs, haft anledning att taga i sorgfälligt öfvervägande, huru det skulle taga sig ut att redan från början grunda framställningen på den analytiska geometriens betraktelsesätt. Ty i det franska arbete i trigonometri, som af författaren åberopas i förordet[2]), är en sådan plan genomförd. Hade recensenten tagit kännedom om det tidigare franska undervisningsprogrammet, skulle han ha funnit, att programmet af år 1902 hvad trigonometrien angår *sakligt* ingalunda bjuder på någon betydande omhvälfning, såsom fallet är i fråga om algebran. Och då recensenten utbrister: »Redan i första kapitlet kommer *Borel* fram till en grafisk framställning af kurvan y = sin x, men så har han också att stödja sig på sina läroböcker i algebra —», så kan det vara nyttigt att erfara, att *Borel* i sitt ofvan anförda arbete når fram till sinus-kurvan först på sidan 41, under det att i *Pichot's* lärobok sinuskurvan framställes redan på sida 9 och tangentkurvan, som alldeles saknas hos *Borel*, på sida 12, utan att därvid finnes någon reformerad algebra att

[1]) Se recensionen sida 40.

[2]) *J. Pichot, Eléments de trigonométrie rectiligne,* Paris 1898.

bygga på. I själfva verket består den franska reformen på detta område nästan endast i utmönstrandet af en del onödigt material, i ett förenkladt, mera bredt och elementärt framställningssätt samt i behandlandet af de enklaste tillämpningarna på triangelläran före de allmänna teorierna, hvilken sistnämnda reform i vårt land finnes i ännu större utsträckning genomförd redan i *Phragméns* lärobok. Härtill kommer såsom nytt moment endast härledningen af funktionernas derivator.

Då de grunder, som vid skrifvandet af läroboken kommit författaren att förhålla sig afvisande gent emot uppställningen i de franska läroböckerna, för honom fortfarande behållit sin giltighet, äfven sedan han lärt känna ofvan berörda reformsträfvanden, kunde han icke besluta sig för att till förmån för dessa yrkanden företaga en omarbetning af läroboken, som i hans tanke skulle blifva en försämring af densamma. Man tyckes nämligen i sin önskan att fortast möjligt nå fram till grafisk framställning i kartesianska koordinater alldeles förbise de olägenheter i metodiskt och systematiskt hänseende, som en sådan gruppering af ämnet medför. Eller kan det, vare sig ur metodisk eller systematisk synpunkt, anses tillfredsställande, att, sedan man definierat de goniometriska funktionerna *grafiskt* i ett system, som i åskådlighet icke lämnar något öfrigt att önska och där man med lätthet kan använda det i alla praktiska tillämpningar brukliga vinkelmåttet, fortast möjligt öfvergifva denna grafiska framställning för att ersätta den med en annan, som med nödvändighet fordrar ett helt annat vinkelmått, hvaraf eljest icke göres behof? Och till hvad gagn hopblanda de båda systemen af grafisk framställning, då funktionernas alla viktigaste egenskaper, teckenväxlingar, nollställen, oändlighetsställen, maxima och minima samt periodicitet lika klart framstå i det ena som i det andra systemet? Det är först vid uppgifter angående funktionernas derivator och dylikt, som kartesianska koordinater bli oumbärliga; men sådana uppgifter kunna väl dock icke tänkas ifrågakomma annat än i gymnasiets högsta klass?

Månne icke just mot det af recensenten förordade framställningssättet med skäl kan anmärkas, att det fogar nya synpunkter såsom ett löst påhäng till den öfriga framställningen?» [2])

Då recensenten frågar:[1]) »Skall väl då denna tankegång,

---

[1]) Se recensionen, sida 41.

[2]) Jämför recensionen, sida 40.

hvartill grunden blifvit lagd redan i *femte klassen*, förkväfvas för den gosse, som fortsätter på gymnasiet? Skall den först i gymnasiets fjärde ring återupptagas?», så må det tillåtas författaren att svara med ett par andra frågor. Erbjuda sig icke inom de öfriga delarna af matematikkursen och fysikkursen till öfverflöd funktioner lämpliga att framställas grafiskt i kartesianska koordinater? Bör det icke vara gagneligt för lärjungarna att ordentligt sätta sig in äfven i något annat system af grafisk framställning?

Den af författaren föreslagna lärogången erbjuder den fördelen, att den är enhetligt byggd på den grafiska framställning, som användts för att definiera de goniometriska funktionerna, samt att teorien och tillämpningsuppgifterna äro genomförda med användande af ett och samma vinkelmått, och när sedan de kartesianska koordinaterna införas och med dem det vetenskapliga vinkelmåttet, så göres också den framställningen enhetlig.

Det vore önskvärdt, om, innan kursplanerna i matematik på det nya gymnasiet fastställas, försök efter ett väl genomtänkt system finge utföras vid ett eller ännu hellre flera af våra läroverk för att utröna i hvilken utsträckning de nya idéerna angående matematikundervisningens innehåll och mål böra vinna tillämpning i vårt land. Ty förvisso duger det icke här att utan vidare åberopa sig på utlandets erfarenhet, där förhållandena i så många afseenden äro olika mot hos oss. För sin del är författaren af dessa rader lifligt öfvertygad om det berättigade i dessa sträfvanden och en varm vän af den ifrågasatta reformen. Men framför allt måste man sörja för, att det nya icke må förtjäna samma vitsord som det bestående, det att vara ett *lappverk* i stället för ett *organiskt helt*.

C. F. Rydberg.

Kungligt Cirkulär.

Med anledning af Eder i underdånig skrifvelse den 8 augusti 1907 gjorda hemställan hafva Vi funnit godt föreskrifva, att med afseende på undervisningen i musik samt