



ELOF ÅHLIN

# Enhetlighet i matematik- undervisningen

## Enhetlighet nödvändig

Olika metoder och växlande terminologi i matematikundervisningen blir ofta stötestenar för de elever som flyttar från en skola till en annan, eller — vilket numera sker oftare än förr — för dem som då och då får nya lärare i sin klassavdelning. En med olika lärare växlande lärogång ställer ytterligare svårigheter i vägen.

Likartade förhållanden råder självfallet inom andra områden, inte minst inom modersmålsundervisningen. Men frågan är om vi inte just inom matematikundervisningen mera påtagligt än i undervisningen i övrigt har anledning att ta upp till behandling problemet om en viss enhetlighet.

Det är naturligt, om man vid en diskussion kring denna fråga kommer in på metodiska problem i största allmänhet. Syftet med en enhetligare undervisning måste ytterst vara att nå ett gott resultat av undervisningen. Därför är en diskussion i denna fråga fruktbringande, även om fullständig enhetlighet är omöjlig att genomföra.

En strävan till enhetlighet innebär givetvis vissa faror. Den kan klavbinda oss och verka hämmande på en fördomsfri och sund utveckling på det metodiska och pedagogiska området.

Det har faktiskt rätt enhetlighet i matematikundervisningen, och den har med all säkerhet ställt till med mycket ohägn. Inte minst har föreställningen om de fyra räknesätten låst fast undervisningen och hindrat de nya ideerna att tränga igenom.

Men ett överbetonande av riskerna kan inte vara nog starka skäl för att ingenting göra åt saken. Förutsättningarna för enhetlighet i viss utsträckning är numera större än tidigare. Vi har bl. a. ett bättre utgångsläge från rent pedagogisk synpunkt. Intresset för pedagogiska frågor och den allmänna lyhördheten för undervisningsproblemen är större nu än tidigare. Häri bör finnas en garanti för att undervisningen inte blir traditionell på samma sätt som tidigare.

De problem som närmast bör tas upp till diskussion är lärogången, terminologin, den språkliga behandlingen och vissa metodiska frågor.

## Läroböckerna

Läraren är beroende av läroboken

Eftersom det är så att läroboken vid matematikundervisningen i högre grad än i andra ämnen binder läraren, har jag ansett det vara lämpligt att som inledning till en eventuell diskussion bland lärare (och läroboksförfattare) utgå från hur problemen ter sig i våra läroböcker. I regel är det den av skoldistriktet bestämda läroboken som bestämmer metoden och utgör ett bestämt hinder för läraren, om han önskar gå andra vägar än de som läroboksförfattaren anger. Skulle en klasslärare vilja gå sin egen väg, fordras det av honom ett alldeles speciellt intresse för ämnet och mycken stor möda.

## Lärogången

I våra räkneläror bestäms lärogången i stort sett av den traditionella uppdelningen av räknesätten i addition, subtraktion, multiplikation och division. Divisionen sönderfaller mer eller mindre klart i de båda räknesätten innehållsräkning och likadelning. Ordningföljden dessa två emellan är hos flertalet författare likadelning före innehållsräkning, medan många föredrar att ta räknesätten i omvänd ordning. Även i nyutkomna läroböcker upptäcker man den förra ordningföljden.

## Två slags division

Ofta är skillnaden mellan de båda formerna av division inte alltid så markerad. Vissa författare däremot — inte minst av läroböcker för småskolan har starkt markerat skillnaden. I ett par fall frapperas man av författarens bristande distinktioner. Belysande för oklarheten på området är följande citat ur en lärobok. En författare säger ungefär följande: "Dela 150 kr i 6 delar! Ibland säger man innehålles i eller går i. Man kan således säga: '24 delat med 8 är 3' eller '8 innehålles 3 gånger i 24' eller '8 i 24 går 3 gånger' eller 'åttondelen av 24 är 3.'" I sammanfattningen kommer inte det först nämnda uttrycket med, och författaren har helt utelämnat de språkligt riktiga uttrycken: 24 delat i 8 lika stora delar är 3, resp. 24 innehåller 8 3 gånger.

En författare uttrycker sin motivering för att han inte gått in på en åtskillnad mellan de båda formerna för division med

att framhålla att "de två räknesätten psykologiskt sett bygger på samma process". En annan författare talar visserligen om likadelning men låter exempel för innehållsräkning belysa räknesättet.

I allmänhet använder man inte skilda tecken för innehållsräkning och likadelning. I några av våra nya läroböcker har man till en början två olika tecken, men längre fram i kursen frångår man detta förfaringssätt. Det förra räknesättet betecknas med det vedertagna tecknet för division, nämligen : och senare med "bråkstreck". I en lärobok har författaren redan för omkring 30 år sedan genomfört en konsekvent skillnad i detta hänseende. Hälften av tjugo tecknas  $\frac{1}{2} \cdot 20$  eller  $\frac{1}{2} \cdot 20$ , och 25 öre innehåller 5 öre tecknas 25 öre : 5 öre.

De vanligaste sätten för uppställning av en division för uträkning är denna:

$$\begin{array}{r|l} 24815 & 35 \\ 245 & 709 \\ \hline 315 & \\ 315 & \end{array}$$

En annan form för uppställningen är  $24815 : 35 = 709$

$$\begin{array}{r} 245 \\ -315 \\ 315 \end{array}$$

Ytterligare har på sistone vissa förespråkare bland läroboksförfattare för en tredje form anmält sig, nämligen den s. k.

$$\begin{array}{r} 00709 \\ \text{amerikanska uppställningen: } 35 \overline{) 24815} \\ \underline{245} \\ 315 \\ \underline{315} \end{array}$$

I ett fall har denna form fått en variant på så sätt att prepositionen "i" inskjutits mellan divisorn och dividenden. Slutligen har vi den från 20-talet kända "Falumetoden"  $\frac{1}{35} \cdot 24815 = 709$  vilken inte sy-

$$\begin{array}{r} 1 \\ 35 \cdot 245 \\ \hline 315 \\ 315 \end{array}$$

nes ha fått någon efterföljare bland senare läroboksförfattare.

Då vi endast har ordet division att hålla oss till, är det naturligtvis inte så lätt att av detta få svenska uttryck, som täcker två former av division. I de olika läroböckerna finner man uttrycken innehållsräkning eller också innehållsberäkning, innehållsdivision eller innehållsundersökning. Många författare föredrar

uttrycket innehållsberäkning. De övriga beteckningarna förekommer var för sig ungefär hälften så många gånger.

När det gäller den andra divisionsformen, finner man uttrycket likadelning dubbelt så många gånger som delningsdivision. Men även delberäkning och delning förekommer i ett par fall.

Det överväldigande flertalet författare vidhåller det invanda sättet att läsa uppgiften baklänges, dvs. från höger till vänster. Man säger inte "25 öre innehåller 5 öre 5 gånger utan" 5 öre innehåller i 25 öre 5 gånger". I den mån man i småskolan resonerar "innehållsmässigt", tycks man gå in för att läsa uppgiften från vänster till höger.

#### De övriga räknesätten

I multiplikation har författarna genomgående, så när som i ett par undantagsfall, påvisat sambandet mellan upprepad addition och multiplikation. Där emot är det inte lika vanligt att anknyta innehållsräkningen till den upprepade subtraktionen. Knappast hälften av läroboksförfattarna har för folkskolans del klargjort sambandet. Däremot synes flertalet av författare av läroböcker för småskolan ha gjort detta. Men i regel används sambandet mellan multiplikation och addition liksom mellan innehållsräkning och subtraktion endast för att bevisa riktigheten av det nya räknesätt som barnen ska övergå till, multiplikation resp. innehållsräkning.

Beträffande de övriga räknesätten finns inte så många vägar att välja på, och därför ger författarna i stort sett samma uttryck för tankegångar och förfaringsätt.

Multiplikation, som för folkskolans del i allmänhet betecknas med detta ord, har fått olika svenska motsvarigheter, vilka används självständigt eller i regel som förklaring till ordet multiplikation. Gångertagning, mångdubbling, mångfaldigande mångfaldsräkning och gånger är de ord som används. Man tar ett tal gånger ett annat, man multiplicerar det senare med det förra, och enligt någon författare "gångrar" man.

Subtraktion översätts på allmänt vedertaget sätt med fråndragning och addition med sammanläggning eller i ett fall med hopläggning. Vid addition förekommer "plus" och "ger" i en och annan småskola. Man lägger samman, man lägger ihop, man adderar, man ökar osv. Man läser "plus" och man läser "och". I subtraktion används uttrycken "minus" och "ta bort", man tar 5 från 10, man minskar med, man läser "minus", och man subtraherar med. Man lånar och växlar, man tar och växlar eller "växlar ut", och ibland varken tar eller lånar man utan bara växlar. Förvandlar gör man tydligen numera aldrig.

#### Bråkräkning

Ett avsnitt inom den elementära matematikundervisningen, som ställer oss inför många svårigheter, är räkning med

bråktalet. Dessa svårigheter avspeglas inte minst i våra läroböcker, där metoderna kan växla avsevärt. Detta område fordrar en särskild behandling och kan inte här tas upp så ingående som önskvärt vore, varför jag nöjer mej med följande exempel, vilka antyder de metoder beträffande "division" som kan återfinnas i våra läroböcker.

Vi utgår från följande problem:  $\frac{3}{5}$  av ett band kostar 12 öre. Hur mycket kostar hela bandet? Vanligaste sättet att lösa uppgiften är denna:  $12 \text{ öre} : \frac{3}{5} = 5 \times 12 \text{ öre} : 3 = 60 \text{ öre} : 3 = 20 \text{ öre}$ . Regeln blir då den att man "vänder upp och ned" på  $\frac{3}{5}$  och får  $\frac{5}{3}$ , eller med andra ord, man inverterar. Samma metod används utan åtskillnad mellan likadelning och innehållsräkning och utan att ifrågasätta om det verkligen är division vi räknar.

I stället för att med denna förlängningsmetod bevisa en regel söker andra författare utgå från det förhållandet att det här inte gäller enbart division utan både division och multiplikation. Man tecknar talet så här:  $12 \text{ öre} : \frac{3}{5} = x$  men fortsätter på följande sätt:  $\frac{1}{5}$  kostar 12 öre. Då måste  $\frac{5}{5}$  kosta  $\frac{5 \cdot 12 \text{ öre}}{3} = 20 \text{ öre}$ . Man kan också i anslutning till

ovan nämnda divisionsmetod i likhet med en läroboksförfattare säga:  $\frac{1}{5}$  kostar  $\frac{1}{3}$  av 12 öre =  $\frac{1}{3} \cdot 12 \text{ öre}$ . Det hela kostar då  $5 \times \frac{1}{3} \cdot 12 \text{ öre} = \frac{5}{3} \cdot 12 \text{ öre}$ .

Andra författare utgår från innehållsräkning. 6 liter mjölk hälls i flaskor, som rymmer  $\frac{2}{3}$  liter. Hur många flaskor behövs? Antingen blir resonemanget följande: 1) 6 innehåller 1 = 6 gånger, 2) 6 innehåller  $\frac{1}{3}$  = 3 gånger så många som i 1), 3) 6 innehåller  $\frac{2}{3}$  = hälften så många gånger som i 2), dvs.  $\frac{3 \times 6}{2} = 9$  gånger, eller 1 innehåller  $\frac{1}{3}$  3 gånger, 6 innehåller  $\frac{1}{3}$  6 gånger mer och 6 innehåller  $\frac{2}{3}$  2 gånger mindre, dvs.  $\frac{6 \times 3}{2} = 9$  gånger. Den enklaste metoden ser ut så här: 6 liter :  $\frac{2}{3}$  liter =  $\frac{18}{3}$  liter :  $\frac{2}{3} \cdot 1 = 18$  (tredjedelsliter) : 2 (tredjedelsliter) = 9 gånger.

#### Fem olika räknesätt

Till denna kortfattade redogörelse för hur läroboksförfattarna ser på sådana frågor som bör tas upp i en diskussion om enhetlighet i matematikundervisningen ska här endast knytas några personliga reflektioner.

Det vore intressant att ta upp till diskussion, huruvida inte den traditionella



"Författaren behövs varken presenteras eller rekommenderas.  
Han är berättaren framför andra ..."

STEN BERGMAN

**Från fjärran länder** — en älskfull och entusiastisk  
"personlighetsstudie, som också ger nyttig läsning". (M.T.)

Del I kostar inb. kr 5:20, del II kr 6:50

Enheten kommer också att hållas sammankommande i en volym och exemplar av denna utgåva kommer att förläggas under värdigt löp.

**SVENSKA BOKFÖRLAGET**

**SKOLBOKCENTRALEN**

David Dagrens väg 29 · Stockholm  
Tel. 23 49 80 - Fax 080 351 00

Utställning även Parkgatan 25, Göteborg  
Hanningsman 4, Malmö

Utställning  
Läraresexemplar  
Relevitioner



# I korthet

lärogång som följer med den vedertagna uppdelningen i de fyra räknesätten bör brytas. Är det helt uteslutet att tänka sej följande disposition: Addition, multiplikation, subtraktion, innehållsräkning och likadelning? Givetvis förutsätter jag att man på småskolstadiet till en början låter addition och subtraktion följa på varandra av det enkla skälet att multiplikation och innehållsräkning senare tas upp i avslutning till en utvidgning av dessa räknesätt. Likadelning byggs lika naturligt som hittills på multiplikation på begynnelsestadiet.

Addition och subtraktion borde inte enbart utgöra grunden för bevisning av förfarandet vid multiplikation respektive innehållsräkning utan fastare förankras vid de senare räknesätten. I den allra elementäraste undervisningen behöver man överhuvud inte tala så mycket om vad räknesätten heter.

Eftersom likadelning och innehållsräkning vilar på olika resonemang, bör det nog finnas en bestämd distinktion dem emellan. Vissa av våra nyare läroboksförfattare anger också en sådan. Men då bör också olika tecken för de båda räknesätten användas.

Beträffande de svenska uttrycken för de båda divisionsformerna förefaller det mej olämpligt med tautologin delningsdivision, och då man inom matematiken bör ha exakta begrepp, borde uttrycken delningsberäkning och innehållsberäkning kunna utmönstras. Om man beräknar något, avser man att få ett mera approximativt resultat.

Värdefullt vore om man kunde åstadkomma en ordentlig undersökning av de olika divisionsuppställningarna för att få utränt, huruvida någon av dessa från metodisk synpunkt är att föredra framför de övriga.

Slutligen har vi problemet beträffande bråkläran. Vi minns från vår egen skolgång att vi lärde oss räkna allmänt bråk på ett mycket mekaniskt sätt. Detta skedde i stort sett i analogi med räkning med hela tal. Men erfarenheten har lärt oss att den som haft endast folkskola som bakgrund inte långt efter slutad skolgång glömt det mesta. Det var så mycket hokus-pokus med allmänt bråk. Man multiplicerade, när man dividerade, man vände upp och ned på någonting och multiplicerade ovanför bråkstrecket och under bråkstrecket, dividerade det som var ovanför med det som fanns nedanför och kallade proceduren division.

Den vedertagna uppdelningen i de fyra räknesätten har onekligen kommit att utgöra ett hinder också i den elementära undervisningen i bråklära. Man har inte riktigt lyckats med att ge barnen klara begrepp. Under fem år har de fått lära sej att när man multiplicerar, blir produkten större, och när man dividerar, blir den mindre. Vid multiplikation med ett bråk, vars värde understiger 1, blir det tvärtom, vilket barnen har svårt att fatta.

Är det så att räkning med allmänna bråk delvis ligger över barnens nivå, så att man därför måste nöja sej att slå in

## Försök med skolraster av olika längd

Vid Blackebergs läroverk i Stockholm har under hösten försök gjorts med en ny indelning av skolarbetsdagen. Skillnaden består i att man har lagt in två 20-minutersraster och kortat de övriga till 5 minuter. En rapport om experimentet har nu inlämnats till skolöverstyrelsen. Av redogörelsen framgår att alla de tre berörda kategorierna — lärarna, eleverna och målsmännen — är nästan hundra procentigt eniga om att det nya systemet har betydande fördelar framför det gamla.

## Lekmannaråd för försöksverksamheten

Skolöverstyrelsen har föreslagit att en särskild rådgivande nämnd ska från 1 juli inrättas inom dess försöksavdelning för att biträda vid planeringsarbetet inom den nya skolan.

Nämnden kommer enligt förslaget att få karaktär av en lekmanrepresentation. Den ska bestå, utom av avdelnings-

vissa regler och "trollformler", bör man överväga en beskärning av den egentliga folkskolans kurs.

Under alla förhållanden vore det värdefullt, om frågan om de metodiska problemen togs upp till allvarig diskussion. Inte minst får man glömma att det inte är tillfyllest att bevisa en regel. Då riskerar man att barnen lever i den vanföreställningen att den ena eller den andra räkneoperationen alltid är samma sak, bara därför att det ser ut att vara det. Jag hänvisar till exemplen på division här ovan. Eller varför inte dessa enkla exempel:  $25 \times \frac{2}{5} = 10$  och  $\frac{3}{5} \cdot 25 = 15$ , där det förre är multiplikation och det senare både en division och en multiplikation.

Sammanfattningsvis må framhållas att det inte bara är lärogången, uppställningen av talen och användandet av enhetliga tecken som är betydelsefulla. Av mycket stor vikt är den *språkliga behandlingen*. Klara och otvetydiga uttryck, som barnen kan tillägna sej, är nödvändiga. Den gamla "matematiksvenskan" börjar alltmer utträngas ur läroböckerna och ersätts av ett enklare och mera lättfattligt språk. Detta är enbart glädjande, och man får hoppas att såväl läroboksförfattarna som lärarna i fortsättningen kommer att mer konsekvent genomföra och samordna den språkliga behandlingen, så att större enhetlighet kommer att råda även i detta avseende beträffande matematikundervisningen.

chefen på försöksavdelningen, som tillika blir ordförande, av tre representanter för föräldrarna, två för näringslivet och två för allmänna intressen. Samtliga ledamöter utom ordföranden utses av regeringen. Till föräldrarepresentanter, som bör företräda samtliga stadier av enhetsskolan, ska förslag avges av Målsmännens riksförbund, medan representanterna för näringslivet syns böra föreslås av resp. LO och Arbetsgivarföreningen.

## Nordisk skolsamverkan

De nordiska ecklesiastikministrarna håller den 8—10 februari en överläggning i Köpenhamn för att bl. a. dryfta frågan om nordiskt samarbete på den pedagogiska forskningens och försöksverksamhetens område. I Danmark har man nyligen i folketinget lagt fram förslag om ett pedagogiskt forskningsinstitut. Även teatersamarbetet i Norden ska dryftas. Nordiska rådets presidium ska delta i förhandlingarna under en dag.

## Studiecirklar i uppfostringsfrågor

Fredrika-Bremer-Förbundets stockholmskrets och Ericastiftelsen anordnar tillsammans studiecirklar i uppfostringsfrågor. Cirkelarna behandlar "Psykologiska synpunkter på barnets utveckling och uppfostran" och är avsedda för föräldrar och lärare, barn- och sjuksköterskor och syftar till att bibringa deltagarna en djupare förståelse för och kunskap om uppfostrans svåra konst. Barnets utveckling från spädbarnsåldern t. o. m. puberteten kommer att utförligt behandlas. Förhållandet till hemmet och skolan, barnets lek, frågor, vanor och ovanor, den sexuella upplysningen och den egna självhygienens betydelse för uppfostraren är några av de ämnen som står på programmet. En kurs börjar de sista dagarna i januari. Föredragshållare blir rektor Hanna Bratt och rektorn vid Ericastiftelsens seminarium, docent Jan Gästrin.

## Arbetsgivarföreningen tillstyrker sänkt värnpliktsålder

Arbetsgivarföreningen ansluter sej i ett remissyttrande till försvarsdepartementets förslag om en sådan ändring av värnpliktslagen att värnpliktiga blir skyldiga till inskrivning redan vid 18 års ålder. Föreningen förutsätter emellertid att värnpliktiga, som undergår utbildning och som genom värnpliktstjänstgöringen skulle få svårigheter att fullgöra utbildningen på ändamålsenligt sätt, får uppskov med inryckning till den första tjänstgöringen.