Om det oändligt stora och det oändligt lilla.

Anledningen till denna uppsats har varit den, att författaren ofta af en mängd personer blifvit anmodad att förklara och utlägga åtskilliga af de begrepp, som däri förekomma. Dessa frågor hafva t. ex. varit sådana som: om det var möjligt, att vid ordet "oändlighet" fästa något verkligt begrepp; om alla oändligt stora qvantiteter äro lika; om en oändligt liten qvantitet ej är detsamma som 0; hvari skilnaden ligger mellan högre och lägre kalkyl o. s. v.

Jag har därför trott, att det ej skulle vara alldeles utan nytta att i en liten skrift sammanföra svaren på dessa och några därmed sammanhängande frågor, och har jag därvid äfven sökt att belysa det framstälda med exempel, som såvidt möjligt äro hämtade från aritmetikens elementäraste delar, för att visa, att dessa frågor ej ens för den äro likgiltiga, och i synnerhet för att rätta de fel, som så ofta af elementarskolelärare inplantas hos skolungdomen.

Därför har jag trott, att denna lilla afhandling, utom för hvarje allmänt bildad person, som vill taga reda på dessa begrepp, skulle vara af ett särskildt intresse för de lärare i matematik, som ej varit i tillfälle att på annat sätt inhämta de nya metoderna för dessa definitioner, med den stora precision, som därigenom åstadkommits.

Författaren vet allt för väl, att många brister vidlåda hans arbete, och beder därföre den sakkunnige läsaren om hans benägna öfverseende, och att han måtte betänka de svårigheter, som uppställa sig därigenom, att det är ett förstlingsarbete på ett nästan fullständigt oarbetadt fält: den populariserade matematikens.

Om arbetet kunde bidraga att hos en eller annan yngling upplifva hågen för matematikens ädla studium, så hade det uppfylt sitt ändamål!

Angående betydelsen af ordet oändlighet råda bland icke-matematici ofta de mest förvirrade föreställningar. Man anser, att detta ord nödvändigt måste innebära något för vårt förstånd ofattligt. Så torde äfven vara förhållandet, om man nämligen fäster sig vid allt hvad filosoferna med detta ord benämna, men *ett* oändlighetsbegrepp är dock åtminstone fullt klart och utredt; det är det matematiska oändlighetsbegreppet, och det är därför äfven detta, som vi i följande blad skola söka att för våra läsare utveckla.

Dessförinnan är dock nödvändigt, att vi förklara trenne andra begrepp, af hvilka det förra är på det närmaste beroende: det är begreppen *variabel*, *funktion* och *limes eller gränsvärde.*

Man säger, att våra vanliga tal äro mycket abstrakta storheter, och så är väl äfven förhållandet, ty vi hafva ur tingen nödgats abstrahera bort nästan allt konkret innehåll för att komma till dem. Icke desto mindre hafva de dock åtminstone tre egenskaper, som ännu kunna abstraheras bort, och som äfven, den ena efter den andra, borttagas, när man från aritmetiken höjer sig upp till högre kalkyler. De äro nämligen 1) *bekanta*, 2) *bestämda* och slutligen 3) *fixa eller konstanta.* Om icke dessa begrepps mening synas nog tydligt af ordens egen betydelse, så skola vi närmare förstå dem, sedan vi lärt känna deras motsatser.

Sådana rent aritmetiska tal voro otvifvelaktigt de första, som man för räkning använde, men en hvar som läst regula-de-tri eller någon del af eqvationsläran vet, att de icke äro de enda. I dessa räknesätt har man nämligen, med bibehållande af de öfriga egenskaperna, från somliga af de ingående talen borttagit den första och räknar därför nu ”med en eller flera *obekanta*”. Dessa obekanta tal kunna vi då naturligen ej häller benämna med de aritmetiska talen (siffrorna), utan har man i stället i eqvationsläran valt att beteckna dem med de sista bokstäfverna i det latinska alfabetet x, y, z . . . o. s. v. I regula-de-tri betecknas vanligen den enda obekanta med x eller (?).

Här är nu att märka, att dessa tecken representera vissa bestämda och fixa tal och inga andra. Skilnaden är blott den, att jag ej vet hvilka de äro. Problemet går alltid ut på att söka detta. — Om man t. ex. sätter:

$$2 + x = 3,$$

så är x lika med 1 och intet annat, jag har där blott satt x i stället för 1 därför att jag ej på förhand visste dess värde, utan detta skulle blifva räkningens resultat. *)

*) Att stundom två eller flera skilda värden kunna gifvas åt x borttager naturligen ej bestämdheten i den mening denna här tages.

Talens andra egenskap, som skulle abstraheras bort, var deras bestämdhet, d. v. s. jag inför ett tecken, som väl betyder ett konstant af talen, men vid olika tillfällen hvilket som hälst af dessa. Om jag t. ex. vill uttrycka den enkla, allmänna regeln, att, om jag till ett tal hvilket som hälst lägger ett tal hvilket som hälst och sedan borttager detsamma, så erhålles det första tillbaka, så är denna sats icke uttryckt därmed, att jag t. ex. skrifver

$$9 + 3 - 3 = 9,$$

alldenstund detta uttrycker satsen blott för det fall, att det förra talet är 9 och det senare 3, och blir därför ett exempel i stället för regel; regeln däremot kan jag teckna sålunda:

$$a + b - b = a,$$

om jag blott fasthåller, att a och b äro tal *hvilka som hälst*, d. v. s. *icke bestämda*, men dock *konstanta*, ty de förändras icke under sjelfva operationen. Att äfven dessa obestämda tal sedermera kunna anses bekanta eller obekanta, torde vara nästan öfverflödigt att nämna. De förra betecknas med bokstäfver från alfabetets början, de senare med sådana från dess slut. I eqvationen:

$$a + x = b$$

hafva vi exempel på bådadera.

Genom att sålunda borttaga de tvänne egenskaperna hos talen att vara bekanta och bestämda hafva vi nu höjt oss till algebrans ståndpunkt, hvilken är den elementära analysens högsta, då man med elementär analys vanligen menar den, som blott räknar med konstanta storheter.

I och med detsamma vi nu gå att lämna bakom oss äfven denna tredje egenskap hos talen, så gå vi in på den så kallade högre kalkylens område, hvars första uppgift därför blir att klargöra skilnaden mellan en *obestämd konstant* och en *variabel* (icke-konstant), d. v. s. just det första af de tre begrepp, som vi i början sade oss vilja definiera.

Skilnaden är den, att under det den obestämda konstanten blott representerar *ett* tal, ehuru hvilket som hälst, så ligger det däremot just i variabelns natur att genomlöpa hela talsystemet eller en viss del däraf.

Några exempel skola ytterligare klargöra detta:

Om en punkt löper fram efter en (rät eller krokig) linie, så är dess afstånd från en gifven fix punkt en variabel, det förändras ideligen, och, när jag just betraktar det från denna synpunkt, så kallar jag det variabelt. En annan variabel i detta exempel är tiden, som förflutit, sedan kroppen befann sig på ett visst ställe eller ägde en viss hastighet, en annan variabel är hastigheten o. s. v.

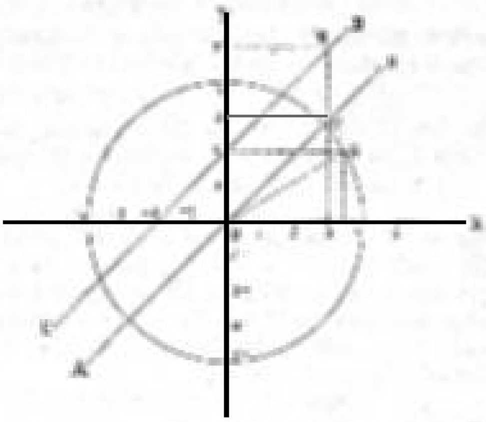
Om nu, såsom nästan alltid vid en variation är fallet, två eller flere tal samtidigt variera, så kan jag vanligen betrakta en eller flera af variablerna såsom fritt varierande, och de öfrigas variation såsom af den (eller dem) beroende, emedan vanligen någon motsvarighet mellan deras värden finnes. Om jag t. ex. i det förra exemplet anser tiden såsom varierande oberoende, så kan jag, om jag känner liniens form och hastigheten, däraf bestämma en annan variabel: afståndet från den gifna punkten. Den ena variabeln kallas då *"oberoende variabel"*, den andra *"beroende variabel"* eller *"funktion"* af den förra. Om därtill mot hvarje bestämdt värde på den oberoende variabeln svarar *ett enda, fullt bestämdt* värde på den andra, så kallas funktionen "analytisk". Äfven variabla storheter beteckna vi med de sista bokstäfverna i det latinska alfabetet, och när det endast är fråga om tvänne variabler, en oberoende och en beroende, så betecknas vanligen den förra med x, den senare med y.

Häraf är tydligt, att hvarje eqvation (det vill här säga hvarje algebraiskt uttryck innehållande ett likhetstecken), som innehåller två variabla qvantiteter x och y och icke flere, måste göra den ena af dem till en funktion af den andra; d. v. s. att, om vi antaga, att den ena varierar oberoende, så blir, om eqvationen ständigt skall vara riktig, den andras variation bunden, "beroende" af dennas. Låt t. ex. eqvationen vara:

$$y = x + 2,$$

så uttrycker den, att hur än x varierar, så måste alltid y variera så, att den är jämt två enheter större. Om vi därför t. ex. tänkte oss x:s variation åskådliggjord genom afståndet från en gifven punkt hos en kula, som enligt hvilken lag som hälst rörde sig på en rät linie, så skulle y:s variation åskådliggöras genom en annan kula, som följde den förra i spåren, alltid på precis två längdenheters större afstånd från den fasta punkten. Vi kunde i detta fall tänka oss dem såsom rent af förbundna genom en stång af två längdenheter. Denna stång vore då just representationen för den gifna eqvationen, ty det är den, som tvingar den ena att följa den andras rörelser på ett visst sätt. De flesta andra eqvationer skulle naturligen fordra mycket krångligare föreningsband.

Ett annat sätt, det inom matematiken mest brukliga, att åskådliggöra detta är att tänka sig en kurva (d. v. s. kroklinie, men den räta linien inbegripes äfven däri) så beskaffad, att i hvarje punkt på densamma den oberoende variabeln x representeras af dess vinkelräta afstånd från linien OY och den beroende, y, af dess afstånd från den mot OY vinkelräta linien OX. Kurvans punkters olika afstånd från endera linien representera då hvar sin af de variabla qvantiteterna, hvarigenom dessas skilnad från obestämda konstanter tydligt framgår.



Om vi t. ex. i detta system ville representera funktionen

$$y = x,$$

så skulle det tydligen ske genom den räta linien AB, som delar vinkeln XOY midt itu, ty det är ej svårt att bevisa, att *i hvarje punkt* på denna linie afståndet från OX är lika stort som afståndet från OY, det vill just säga att linien representerar eqvationen $y = x$. Den förr nämda eqvationen

$$y = x + 2$$

däremot skulle representeras af den med AB parallela linien CD, som går genom punkten 2 på OY, ty, såsom vi lätt se, svarar på denna linie mot ett lika stort x alltid ett y, som är två längdenheter större än på den förra, ty stycket EF är alltid lika med stycket från 0 till 2, hvar på linien E än tages. Tager man däremot en punkt på den i figuren uppritade cirkeln, så inses af den, som känner den bekanta satsen om qvadraten på hypotenusan i en rätvinklig triangel, att summan af qvadraterna på punktens afstånd från OY och OX alltid måste vara lika med qvadraten på cirkelns radie, som är 4, hvarför denna cirkelperiferi kan anses representera eqvationen:

$$x^2 + y^2 = 4^2 = 16.$$

På detta sätt kunna vi således med en kurva representera hvarje eqvation innehållande blott x och y, d. v. s. hvarje relation mellan en oberoende och en beroende variabel, hvilka begrepp vi därföre nu tro stå tämligen klara för läsaren.

Om man blott vill angifva, att y är någon slags funktion af x, utan att vidare angifva, huru den eqvation ser ut, som gör den till en sådan, eller (som är detsamma) huru den kurva ser ut, som representerar detta samband, så skrifver man blott:

$$y = f(x),$$

hvilket utläses "y är lika med en funktion af x". Olika slags funktioner utmärkas med f från olika alfabet och stilar t. ex.

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x) \text{ o. s. v.},$$

der f:en således äro tecken för obestämda, men i hvarje fall konstanta funktionsformer eller eqvationer (kurvor). —

Låtom oss nu betrakta eqvationen:

$$y = x + 2.$$

Där se vi då, att om x går t. ex. allt närmare till värdet 1, så går y allt närmare mot 3, och jag kan få y att skilja sig från 3 med mindre än hvilken uppgifven qvantitet som hälst, om jag blott tar x nog nära intill 1. När så är förhållandet, så kallas 3 för funktionens gränsvärde för $x = 1$, och vi uppställa i analogi härmed följande definition:

Om därigenom att en variabel x föres allt närmare till ett visst värde a, en funktion däraf kommer allt närmare ett visst värde b, och detta obegränsadt, så att den kan fås att skilja sig från b med mindre än hvilken förut uppgifven qvantitet som hälst, om man blott tar x tillräckligt nära a, så kallas b för funktionens **limes eller gränsvärde** *för $x = a$,* hvilket tecknas sålunda:

$$\lim_{x = a} f(x) = b.$$

Då skulle man kunna anmärka, att gränsvärdet ej vore annat än funktionens eget värde, då man för x insätter a, hvilket brukar tecknas:

$$f(a),$$

och så är äfven fallet i ofvanstående exempel och många andra, och när så är, d. v. s. när

$$\lim_{x = a} f(x) = f(a),$$

så kallas funktionen *kontinuerlig* för $x = a$, men det är att väl märka, att detta icke alltid är fallet, och då det just är dessa undantagsfall, som för vårt nuvarande ändamål äro af det största intresset, så vilja vi egna dem en något närmare undersökning.

Om vi t. ex. hafva en funktion

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2},$$

så är det ej svårt att se, att denna i allmänhet är densamma som den förut omtalade funktionen

$$y = x + 2,$$

ty den öfvergår därtill genom bråkets förkortning med $x - 2$, men i ett enda fall är detta icke händelsen, det är nämligen när x är lika med 2, ett värde, som det ju kan antaga, enär dess variation är oinskränkt. Vårt y skulle i detta fall antaga utseendet $\frac{0}{0}$, hvilket vi ju veta ej är något verkligt tal, emedan vi ej kunna dividera med 0 utan att ständigt stöta på motsägelser. Vi måste då säga, att vårt y icke har något verkligt värde för $x = 2$, eller att, om funktionen betecknas med $f(x)$, så har $f(2)$ *intet värde*, men icke desto mindre har $\lim\limits_{x=2} f(x)$ ett fullt bestämdt värde, ty om x blott skiljer sig aldrig så litet från 2, så kan man alltid förkorta med $x - 2$ och därför få

$$y = x + 2,$$

men däraf följer äfven, att y kan fås hur nära som hälst till 4, om man blott för x tillräckligt nära 2, hvarför enligt definitionen på limes

$$\lim_{x=2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Här hafva vi alltså ett godt exempel på att $\lim\limits_{x=a} f(x)$ kan hafva ett fullt bestämdt värde, ehuru $f(a)$ ej har något sådant. Andra exempel skulle kunna gifvas, der $f(a)$ och $\lim\limits_{x=a} f(x)$ hafva hvardera bestämdt, men helt olika värden. Som dessa exempel dock fordra kännedom om mindre elementära funktionsformer, så kan något sådant här ej anföras.

Ett annat exempel på gränsvärde, som för oss något närmare vår egentliga uppgift, är t. ex. följande:

$$y = a + \frac{1}{x}.$$

Om vi i denna funktion låta x växa allt mer och mer, så minskas $\frac{1}{x}$ obegränsadt, och y närmar sig därför allt mer och mer det fullt bestämda värdet a, och detta närmande sker fullkomligt obegränsadt. Om vi därför uppgifva en liten fix qvantitet, m, hur liten som hälst, så kan alltid y fås att skilja sig från a med mindre än m, om man blott tar x tillräckligt stor. Detta *och endast detta* förstår man med uttrycket:

$$\lim_{x=\infty} \left(a + \frac{1}{x}\right) = a.$$

Detta uttryck får därför naturligen ej fattas så, att ∞ ("oändligheten") skulle vara *ett tal,* till hvilket x skulle närma sig, utan det betyder blott, att om x växer, så närmar sig y så till värdet a, att det kan fås att därifrån skilja sig hur litet som hälst, om jag blott tar x tillräckligt stort. Här kunna vi således tala om ett *gränsvärde,* där ett verkligt *värde* icke allenast icke finnes, utan ej ens kan sättas i fråga.

Sedan vi nu redogjort för begreppet af ett gränsvärde, så blir det ej häller någon svårighet att fatta de i sjelfva verket ytterst enkla definitionerna på de tvänne begrepp, som vi satt såsom titel öfver denna uppsats:

En oändligt liten qvantitet är en v a r i a b e l, *hvars gränsvärde är 0, d. v. s. den som kan variera hur nära till 0 som hälst* och

En oändligt stor qvantitet är en sådan v a r i a b e l, *som icke har någon öfre gräns, utan kan gå hur högt upp som hälst i talsystemet.*

Om vi nu blott riktigt väl fasthålla dessa båda enkla definitioner, så kunna vi ur dem draga en mängd ytterst vigtiga slutsatser.

Först se vi då, att en oändligt stor eller liten qvantitet är en variabel. Det karaktäristiska för en oändligt stor qvantitet är därför ej, att den i hvarje punkt är mycket stor, utan blott att den äger förmåga att växa öfver hvarje uppgifvet tal. Om vi sålunda finna, att en qvantitet saknar denna egenskap, så kunna vi på förhand säga, att den ej är oändlig.

Om man t. ex. skulle säga oss, att dropparne i hafvet vore oändligt många, så kan detta endast vara riktigt, för så vidt man med en droppe icke menar en konstant qvantitet, utan den kan blifva hur liten som hälst. Menar man åter med en droppe en viss vattenqvantitet, likgiltigt om 1 milligram eller $\frac{1}{1000000}$ milligram, så är det i sig sjelf omöjligt att dropparne i hafvet kunna stiga öfver alla gränser, vi veta till och med att om man sätter några millioner nollor efter en etta, så har man ett tal, som betydligt öfverstiger dropparnes antal i hafvet, ty så många droppars vigt öfverstege betydligt jordklotets, om t. ex. hvarje droppe vägde $\frac{1}{1000000}$ milligram *); och om ett tal, som aldrig kan komma öfver det nyss bildade, kan man, matematiskt taladt, ej använda ordet oändligt med mera skäl än om hvarje annat, än aldrig så litet tal, ty det förra kan lika litet som det senare växa *öfver alla gränser;* en helt annan sak är det att det för våra sinnen kan te sig såsom "omätligt".

Däremot kan man säga, att mellan talen 0 och 1 ligga oändligt många bråk, ty bråken ligga där ej en gång för alla färdiga, utan jag insticker dem allteftersom jag uppdelar intervallet i allt mindre och mindre delar, och denna delning kan jag uppenbarligen drifva öfver alla gränser, ty hur långt jag än kommer, så kan dock delningen i hvarje punkt tänkas fortsatt.

---

*) I sjelfva verket fordras härtill blott 37 nollor.

Vi vilja nu undersöka, om det är rätt eller ej att använda det ofta begagnade uttrycket, att en linie består af oändligt många punkter, eller, som är detsamma, att ett oändligt antal gånger 0 ej skulle göra 0, utan en ändlig qvantitet.

Vi veta, att 0 multipliceradt med ett tal, hur högt det än må vara, ständigt är 0, men det vill ju just ej säga annat, än att 0 multipliceradt med en variabel, hur högt den än må stiga, ständigt förblir 0. Men en variabel, som får stiga hur högt som hälst är ju just oändligt stor, och vi se således, att den så ofta använda satsen är fullkomligt falsk och beror på en olycklig förblandning af 0 med en oändligt liten qvantitet, ty hur stor produkten af en sådan och en oändligt stor qvantitet blir, beror på efter hvilken lag dessa båda variabler förändras i förhållande till hvarandra, såsom af det följande skall framgå. Skulle man då fråga: Hvad är då skillnaden emellan 0 och en oändligt liten qvantitet, så är svaret helt enkelt: De äro så olika som möjligt, ty det ena är en *konstant*, som har värdet 0, det andra är en *variabel*, som ej ens behöfver kunna antaga värdet 0, blott komma hur nära som hälst därtill.

Vi välja nu ett annnat exempel: Är det sant, att decimalbråket 0,33333 —— "i oändlighet fortsatt" verkligen kan vara lika med det fullt bestämda värdet $^1/_3$?

Med hjälp af de föregående definitionerna skall ej häller denna fråga vara svår att besvara: Storleken af bråket 0,3333 är otvifvelaktigt en funktion af decimalernas antal, betraktadt såsom en variabel qvantitet. Med att bråket fortsattes "i oändlighet" menas då naturligen på grund af det föregående intet annat, än att denna variabel växer öfver alla gränser. När jag då talar om funktionens värde för variabelvärdet oändligheten, så kan jag således därmed omöjligt mena något annat än dess limes för en öfver alla gränser växande variabel; och det äger nog sin riktighet, att detta *gränsvärde* kan vara ett fullt bestämdt tal och just är lika med $^1/_3$! Vi se således, att satsen nog är sann och riktig, om den blott rätt förstås, så att man ej får tänka sig t. ex. att högst upp i talserien ligger ett egendomligt, gåtlikt tal kalladt "oändligheten", och så många treor bör jag taga med för att af decimalbråket göra $^1/_3$; utan man måste, när man uttalar satsen, förstå, att därmed menas intet annat än den enkla sanning, att ju flera treor jag tar med, desto närmare kommer decimalbråket till $^1/_3$, och detta närmande sker obegränsadt, så att jag alltid kan få decimalbråket att skilja sig från $^1/_3$ med mindre än hvilken konstant qvantitet som hälst, om jag blott för hvarje gång tar ett tillräckligt antal treor. Häraf ser man således, att satsen, rätt fattad, är möjlig. Att den äfven är sann inses lätt genom följande resonnement:

Emedan

$$0{,}3 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{30}$$
$$0{,}33 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{300}$$
$$0{,}333 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3000}$$
$$0{,}3333 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{30000}$$

o. s. v.,

så synes, att om jag blott tager variabeln (antalet treor) tillräckligt stor, så kan jag få decimalbråket att skilja sig från $^1/_3$ med mindre än en förut uppgifven qvantitet, hur liten den än må vara, hvarför $^1/_3$ är dess limes enligt detta ords definition.

Sedan vi nu sökt klargöra meningen med en oändlig qvantitet i och för sig, så vilja vi nu öfvergå till att till storleken jämföra sådana sins emellan, och skola vi därför nu först söka visa möjligheten däraf:

Om limes (för x=a) för f (x) vore A och för φ (x) vore B, så är tydligen (om vi med δ och ε mena vissa variabla qvantiteter, som blifva oändligt små när x går mot a)

$$f(x) = A + \delta \text{ och } \varphi(x) = B + \varepsilon.$$

Men då är äfven

$$f(x) + \varphi(x) = A + B + (\delta + \varepsilon),$$

men $(\delta + \varepsilon)$ är naturligen en oändligt liten qvantitet, när x går mot a, hvaraf följer

$$1)\quad \lim_{x=a} \Big(f(x) + \varphi(x)\Big) = A + B$$

På alldeles liknande sätt bevisas äfven de motsvarande satserna:

$$2)\quad \lim_{x=a} \Big(f(x) - \varphi(x)\Big) = A - B$$

$$3)\quad \lim_{x=a} \Big(f(x) \,.\, \varphi(x)\Big) = A \,.\, B$$

$$4)\quad \lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}$$

allt naturligen under förutsättning att A och B äro verkliga bestämda tal, och att resultatet ej antager sådana former, som äro oss fullkomligt obekanta: $\frac{A}{0}$ eller $\frac{0}{0}$, ty vi kunna, såsom bekant ej dividera med 0. Emellertid är det ej svårt att se, att om f (x) har det bestämda gränsvärdet A och φ (x) går mot 0, så måste $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ växa öfver alla gränser, ty dess nämnare men icke dess täljare blir oändligt liten. Likaså se vi, att om B ej är bestämd, utan $\varphi(x)$ växer öfver alla gränser, men däremot ej $f(x)$, så är $\lim. \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, och på sådant sätt kunna vi alltid resonnera för att i dylika fall finna gränsvärdet, utom i det fall, att ofvanskrifna tal skulle antaga de s. k. obestämda formerna

$$\frac{\delta}{\varepsilon},\ \frac{\omega}{\omega},\ \omega - \omega_{,} \text{ eller } \delta \,.\, \omega$$

där δ och ε äro variabler, som gå mot 0, ω och $\omega_{,}$ sådana som växa öfver alla gränser, då x går mot a. *

Men just när de leda till dessa och i synnerhet de två första, hafva de för oss ett särskildt intresse. Vi se, att de då just utmärka qvoter mellan oändligt små och mellan oändligt stora qvantiteter, och gifva oss sålunda tillfälle att jämföra sådana qvantiteter genom att undersöka storleken af deras qvot, liksom vi veta, att vi, för att finna förhållandet mellan tvänne ändliga qvantiteter, undersöka deras qvot.

Nu är klart, att om de oändligt små eller stora qvantiteterna varierade fullt oberoende af hvarandra, så kunde vi intet bestämma om deras qvoter, men om de äro gifna funktioner af samma variabel, så är deras qvot äfven en funktion af denna, och denna funktion måste i allmänhet hafva ett gränsvärde. Ett exempel härpå hafva vi redan sett i funktionen $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Denna består ju, när x närmar sig till 2, af en qvot mellan tvänne oändligt små qvantiteter, men har icke desto mindre ett fullt bestämdt gränsvärde $= 4$.

Vi vilja äfven i korthet anföra några andra exempel:

$\frac{x^2}{x}$ är ju alltid lika med x, såsnart x ej är precis $= 0$, hur nära det än går därtill. Dess gränsvärde för $x = 0$ är således 0. Likaså inses att det växer öfver alla gränser, när x gör så.

$\frac{x+1}{x}$ är ju alltid $= \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, då x ej är $= 0$. Det närmar sig därför till 1, när x växer öfver alla gränser, och blir oändligt, när x går mot 0 o. s. v.

Om man har en funktion af x, låt vara

$$y = f(x)$$

och x deri får ett litet tillskott, hvilket vi vilja benämna Δx (läs Delta-x, hvilket måste betraktas som ett enda tecken), så får i

* Härtill kunna läggas de mindre elementära: δ^{ε}, ω^{δ}, $(1 \pm \delta)^{\omega}$.

allmänhet äfven y ett tillskott (positivt eller negativt), $\varDelta y$, som går mot 0, när $\varDelta x$ gör det. Om t. ex. funktionen vore

$$y = x^2$$

och x får tillskottet $\varDelta x$, så blir tydligen

$$y + \varDelta y = (x + \varDelta x)^2 = x^2 + 2\,x\,(\varDelta x) + (\varDelta x)^2,$$

men detta uttrycks limes (för $\varDelta x = 0$) är tydligen x^2 eller y hvaraf synes att $\lim\limits_{\varDelta x = 0} \varDelta y = 0.$

Limes för förhållandet mellan dessa båda oändligt små tillskott när $\varDelta x$ går mot 0, d. v. s. $\lim\limits_{\varDelta x = 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ plägar kallas funktionens ***derivata*** eller ***differentialkoefficient*** och är just det begrepp, hvarpå hela differentialkalkylen eller infinitesimalräkningen är bygd. Denna derivata, som således uttryckes med

$$\lim_{\varDelta x = 0} \frac{\varDelta y}{\varDelta x} \text{ eller } \lim_{\varDelta x = 0} \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x},$$

kan i allmänhet bildas genom metoder analoga med dem, genom hvilka vi förut sökt gränsvärden. Vi inlåta oss ej på dessa deduktioner, blott en enda enkel sats vilja vi anföra:

Om funktionen vore en konstant och således i figuren sid. 361 representerades af en med OX parallel rät linie, så vore ju

$$f(x + \varDelta x) = f(x)$$

och således $\frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$ alltid $= 0$, vare sig $\varDelta x$ är oändligt liten eller ej; derivatan af en konstant är därföre ständigt $= 0$.

Vi vilja nu af derivatans eget uttryck draga några slutsatser angående dess användning och betydelse inom matematiken.

Om vi antaga, att det tillskott vi gifvit x (d. v. s. $\varDelta x$) vore positivt, d. v. s. ett verkligt tillskott, så är det tydligt, att derivatans tecken beror på tecknet hos $\varDelta y$, så att den är positiv om $\varDelta y$ är så och tvärtom. Men häraf följer, att så länge derivatan är positiv, så växer funktionen när x växer och aftager när x aftager; en sådan funktion är t. ex. 2 x, hvars derivata är konstant $= 2$; men om derivatan är negativ, så är $\varDelta y$ negativ, d. v. s. i detta fall aftager funktionen, när x växer och tvärtom. En sådan funktion är t. ex. $\frac{1}{x}$, hvars derivata är $-\frac{1}{x^2}$, hvilken ju alltid är negativ.

Äfven häraf är det tydligt, att den funktion, hvars derivata ständigt är 0, hvarken till- eller aftager, utan måste vara en konstant.

Men om derivatan (som ju i allmänhet sjelf är en funktion af x) för ett visst x-värde från positiv skulle öfvergå till negativ, så vore detta ett säkert tecken på att funktionen sjelf i denna punkt från att växa med x börjar att aftaga, när x växer ytterligare, d. v. s. den är i denna punkt större än för både större och mindre närliggande x-värden, eller hvad man kallar: den har ett maximivärde i denna punkt. Omvändt har den naturligen ett minimivärde, om derivatan från negativ öfvergår till positiv. Ett exempel härpå ger oss funktionen x^2, hvars derivata är $2x$. Den har ju, såsom vi veta, sitt minsta möjliga värde för $x = 0$, ty den kan aldrig blifva negativ. Men om derivatan, såsom vid våra vanliga funktioner är fallet, äfven sjelf är en kontinuerlig funktion, så kan den ej öfvergå från positiv till negativ utan att passera 0. Vi finna således, att våra vanliga funktioner icke kunna hafva några maximi- eller minimipunkter utan att derivatan för dessa x-värden blir 0, och då derivatans bildande sker efter några få, enkla regler, så inses att detta är ett utmärkt medel för upptäckandet af sådana punkter. Det bör emellertid anmärkas, att af beviset ej följer, att en sådan punkt alltid finnes där derivatan är 0, ty denna behöfver ej alltid växla tecken då den blir 0. Den kan ju nämligen sjelf där hafva en maximi- eller minimipunkt, hvilket naturligen kan kontrolleras genom bildande af dess egen derivata, sedermera dennas o. s. v.

En annan tillämpning, som i viss mån är typisk för alla sådana kunna vi äfven sluta till af derivatans uttryck.

Det är tydligt, att bråket $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ är desto större, ju hastigare y tilltager med x på sträckan Δx, och därför kan användas såsom mått på denna hastighet. Men om nu, såsom i allmänhet är fallet, denna hastighet under sträckan skulle växla, så får jag genom bråket $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ blott reda på medelvärdet därför, så att det t. ex. ger mig 0, om funktionen först mycket tillväxt och sedan lika mycket aftagit. Vi se därför, att i ju mindre stycken Δx vi sönderdela det intervall, hvarinom vi vilja undersöka funktionens växlingar, desto noggrannare uttryck få vi för dessa. Men så länge Δx och därför äfven Δy äro ändliga, så äro vi aldrig säkra på att icke tillväxtens hastighet inom detta lilla intervall i betydlig grad förändrats. Det enda medlet för att få en verkligt trogen bild af funktionens växlingar på hvarje, än aldrig så liten, sträcka äro därför att låta qvantiteterna Δx och Δy blifva oändligt små, det vill just säga att bilda

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

det vill just säga funktionens derivata.

Vi hafva nu bland den stora mängden angifvit ett par exempel på af hvilken vigt derivatan är vid undersökningen af funktioners och dermed äfven af de af dem representerade kurvornas egenskaper, en nytta inom matematiken, som väl skulle kunna jemföras med de finare delningsapparaternas eller mikroskopens gang inom fysiken, ty under det att man före infinitesimalkalkylens upptäck blott kunde sträcka sina undersökningar till relativt större delar af kurvan, så har man deri funnit ett medel att undersöka äfven oändligt små delar af densamma. Men liksom det i fysiken ofta händer, att man måste medelst ett annat mikroskop törstora den bild som gifvits af det första, så händer det äfven inom matematiken, att man åter måste taga derivatan af denna första derivata för att undersöka dennas egna variationer o. s. v. och först i den mon jag undersöker allt fler och fler på detta sätt bildade derivator, kan jag säga mig fullständigt känna den ursprungliga funktionen.

Ad. Meyer.

Några ord om Hjalmar Ling och den svenska gymnastiken.

Efter en nära fyratioårig lärareverksamhet har professor Hjalmar Ling begärt och erhållit afsked från sin befattning såsom öfverlärare i pedagogisk gymnastik vid Kongl. Gymnastiska Centralinstutet. Anledningen är ålder och sjuklighet: skäl, som svårligen kunna underkännas. Det var dock med vemodiga känslor, som vännerna till en sund gymnastik mottogo underrättelsen härom, och ingen må undra på, att man vid detta tillfälle vill söka sammanfatta bilden af en så lång och betydelsefull arbetsdag.

Utan fråga en af de bästa representanterna för den svenska gymnastiken och tillika en bland dem, som blifvit trogna systemet i dess ursprungliga och rena form, har Hjalmar Ling ytterligare utvecklat och bekantgjort detsamma. De större konturerna uppdrogos visserligen af mästaren och uppfinnaren, Pehr Henrik Ling, men fastän man ej kan frånsäga honom ett betydelsefullt detaljarbete, måste man dock vidgå, att sonen omhändertagit detta senare, synnerligen hvad friskgymnastiken beträffar, på ett sätt, fullt värdigt den snillrika skapelsens upphofsman. Säkert är, att utan Hjalmar Lings om sundt omdöme, grundliga kunskaper och