Anmälningar och recensioner.

Tre nya läroböcker i trigonometri.

II.

C. F. Rydberg, Lärobok i plan trigonometri, Stockholm, P. A. Norstedt & Söner. 1906.

Föreliggande granskning hänför sig närmast till de speciellt nya synpunkter, som författaren vill göra gällande i detta verk. De äro i hufvudsak följande:

1) innan de egentliga trigonometriska funktionerna definieras, införes något, som författaren kallar »*trigonometriska linjer*»;

2) vid trigonometriens tillämpning på planimetriska beräkningsuppgifter utgår författaren från definitionerna och de trigonometriska satserna (sinus-, cosinus-, tangentteoremen o. s. v.) och uppställer som mål att beräkna ett triangelelement hvilket som hälst, då ett tillräckligt antal element äro gifna;

3) författaren vill tillmötesgå nyare reformkraf i matematikundervisningen så till vida, att han upptager en grafisk framställning af de trigonometriska funktionerna.

1:o. Hvad det första införandet i trigonometrien beträffar, så förefaller det, som om författaren gör saken onödigt inveckIad. Det är mycket betänkligt att börja med en del begrepp, som eleven i det följande af författarens bok endast vid ett par tillfällen påträffar, och hvilka han i andra böcker alldeles icke möter. Författaren börjar att tala om »*trigonometriska linjer för en viss båge*» i en cirkel med godtycklig radie och definierar dessa linjer såsom längder af vissa halfkordor eller sträckor afsatta utefter vissa tangenter. Efter att hafva gjort en, om man ser saken från den tredje af ofvan antydda synpunkter, ganska sökt öfverenskommelse beträffande tecknen — hvarom mera längre fram —, kommer författaren till, att exempelvis sinus för en *båge* varierar med cirkelns radie mellan $+\infty$ och $-\infty$. Därefter öfvergår författaren (sid. 4) till att införa *trigonometriska tal för en gifven vinkel. Samma nomenklatur*, sinus, cosinus, tangent, cotangent, *användes alltså i två bemärkelser*, dels för att beteckna vissa linjelängder, dels för att beteckna förhållandet mellan nyssnämnda linjelängder och radien i cirkeln. Den enda skillnaden är, att författaren ena gången talar exempelvis om sinus för en *cirkelbåge*, andra gången om sinus för en *vinkel*. Det ligger nära till hands, att man förbiser denna distinktion, och då kommer en slik framställning att med all säkerhet vålla oreda i stället för åskådlighet, såsom författaren påstår. Åskådlighet vinner man tillfyllest, om man definierar de trigonometriska funktionerna såsom *tal* och grafiskt representerar dem som linjelängder med användning af en cirkel med radien lika med *en* längdenhet. Skulle väl åskådligheten blifva större därigenom, att radien antages vara r längdenheter samt genom att två jämnlöpande serier af definitioner uppställas, af hvilka den första omedelbart lämnas?

Författaren angifver såsom första skälet till nyssnämnda förfarande *hänsyn till den historiska utvecklingsgången*. Om man läser exempelvis *Moritz Cantors*[1]) framställning af *Claudii Ptolemæi* ryktbara *Almagest*, där han i de 13 första böckerna härleder sin berömda *kordatabell*, hvilken är en förelöpare till trigonometrien, så får man den uppfattningen, att *Ptolemæus* bestämmer kordornas längder som funktioner af den periferivinkel, de upptaga, och förutsätter cirkelns radie vara lika med längdenheten. Vare härmed huru som hälst, så är det olämpligt, att lärjungen vid sin första bekantskap med trigonometrien skall få en uppfattning af de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus, o. s. v., hvilken han i nästa ögonblick — redan å sid. 4 i författarens bok — måste så godt som för alltid öfvergifva. En obetydlig detalj som denna, om den nu verkligen är historisk, men som kommer i kollision med det numera gängse uppfattningssättet, bör, om den eljest det förtjänar, meddelas i en not till läsarens nöje och uppbyggelse, men ingalunda sättas i spetsen som en grundval för hela den följande framställningen.

Författaren synes själf ej vidare hålla på de först införda begreppen, enär han i en not på sidan 1 säger: »de nu följande definitionerna äro icke afsedda att läsas utantill utan tjäna endast att förklara den geometriska bilden» etc. Likväl refererar författaren till dem vid två tillfällen nämligen dels å sidan 7, dels å sidan 71.

På förstnämnda stället vill författaren visa, att sinus och tangenten för *små vinklar* växa proportionellt med vinkeln. Mot denna

---

[1]) *Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I*, sid. 350 och följande, Leipzig, Teubner, 1880.

undersökning kan man invända, dels att den näppeligen kommit på sin rätta plats, dels att framställningen från pedagogisk synpunkt blir otroligt svårbegriplig, ty meningen är väl icke att det som här afhandlas, skall tagas dogmatiskt. AE är en båge på en cirkel med godtycklig radie och sinus AE samt tangens AE fattas såsom sträckor i öfverensstämmelse med de *första* definitionerna å sid. 2. Författaren säger utan att anföra något skäl, att sinus AE och tangens AE närma sig att bli lika stora, ju mindre bågen AE göres[1]). Enbart på åskådningen kan nämnda påstående icke grundas. Det enda man kan *se* är, att alla tre dessa storheter samtidigt gå mot noll. Hvarför icke uppskjuta denna fråga — såsom exempelvis *Phragmén* gör — tills man behandlat vinkelns mätning med tillhjälp af förhållandet mellan bågen och radien? Först då blir man i stånd att genomföra de betraktelser, som författaren å sid. 75 gör, rörande denna sak. På sistnämnde ställe visas strängt, att

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

och undersökningen å sidan 7 låter omedelbart anknyta sig härtill. Det blir då först möjligt att utröna att 1″ är en så liten vinkel, att sin 1″, tagen ur tabellen, verkligen ligger mycket nära $\frac{2\pi}{360.60.60}$ o.s.v. Samtidigt kan man då på ett naturligt och okonstladt sätt i anslutning till den grafiska framställningen gifva lärjungen en på åskådning grundad föreställning om, hur pass hastigt de olika trigonometriska funktionerna variera inom olika variationsområden för den oberoende variabeln. I sammanhang härmed kunde då också den synpunkten komma fram, som eljest i detta arbete vunnit mycket litet beaktande, nämligen hur räkningen bör anordnas för att lämna noggrant resultat. Så t. ex. ser författaren användbarheten af olika beräkningsmetoder, däri flere sådana gifvas, *uteslutande* från bekvämlighetssynpunkt (exempelvis sid. 16) och framhåller icke den synpunkten, att man stundom måste låta noggrannheten i det åsyftade resultatet bestämma metoden. Detta sistnämnda kommer egentligen endast i exempel 5 sidan 57 till beaktande. Å andra sidan ser det ut, som om författaren i vissa fall skulle lägga an på en blott

[1]) Författaren tangerar här kapitlet om »*aktuelt oändligt små storheter*», hvilka betraktelser, äfven de af historiskt intressse, absolut icke lämpa sig för nybörjaren.

och bart illusorisk noggrannhet, såsom då jordens radie i åtskilliga exempel angifves så noggrannt som på 10 meter när.

Å sidan 71 ändtligen förutsätter författaren, att lärjungen skall fullkomligt behärska definitionerna på båda de system af trigonometriska storheter, som tillförene uppställts. Det heter nämligen där: »de trigonometriska linjernas mätetal äro entydiga funktioner af däremot svarande cirkelbåges mätetal. Väljer man till längdenhet cirkelns radie, så äro de trigonometriska linjernas mätetal identiska med de trigonometriska talen för motsvarande båges medelpunktsvinkel». Hade det ej varit enklare, som ofvan är sagdt, att icke alls införa sådana definitioner, som göra trigonometriska storheter till funktioner af cirkelns radie? Saken blir af författaren onödigt tillkrånglad, då en trigonometrisk funktion för en cirkelbåge göres till funktion af *två* variabler: cirkelns radie och bågen, under det man, om den vanliga framställningen följes, slipper undan med blott den senare variabeln.

2:o. För att närmare precisera, hvari författarens framställning af trigonometriens tillämpningar på trianglars solvering skiljer sig från andras, kan det vara skäl att erinra sig den gängse tankegången. Man uppställer den frågan: hvad behöfver man i allmänhet känna om en triangel, för att han skall vara fullt bestämd? Svaret härpå lämnar i de enklaste fallen de af lärjungen från hans geometristudium bekanta euklideiska kongruensfallen Därpå formuleras motsvarande beräkningsuppgifter, hvarvid man för tillämpningar i andra fall får på köpet en del satser: sinusteoremet, cosinusteoremet o. s. v. — Hr Rydberg följer en något afvikande tankegång. Han bevisar de sistnämnda teoremen först. Efter hvart och ett lämnas en redogörelse för dettas användbarhet vid trianglars solvering. Det torde vara en smaksak, hvilkendera riktningen man vill följa. Det förefaller, som om den äldre uppfattningen ledde till en mera *metodisk* undervisning, — för att använda gängse pedagogiska distinktioner — den senare till en mera *systematisk*. Men äfven om man behandlar saken på det sätt, som hr Rydberg gör, så är det nog nödvändigt att äfven låta den andra synpunkten göra sig gällande, åtminstone så tillvida att lärjungen inser fullkomligt det intima sambandet mellan hvad han i den plana geometrien tidigare inhämtat om trianglar, och de beräkningsuppgifter, som här genomgås. Författaren undviker sorgfälligt t.o. m. hvarje hänvisning till kongruensfallen, hvilken väl i alla händelser vid en riktigt bedrifven undervisning måste göras. Därför behöfver man ingalunda riskera att, såsom i förordet yttras, med den gängse undervisningsmetoden de ofvannämnda satserna, sinusteoremet o. s. v., »likasom trängas åt sidan». De kunna nog i alla fall komma till sin rätt och utgöra i själfva verket, såsom författaren betonar, »den viktigaste behållningen af detta kapitel».

Sedan i kapitlet 2 trigonometriens användning vid trianglars beräkning behandlats,lämnar författaren i det följande kapitlet ytterligare tillämpningar äfven på stereometriska uppgifter. Här lämnas en i alla detaljer utförd lösning af 20 *allmänna* uppgifter och till hvar och en af dessa ansluter sig sedan i exempelsamlingen i ordning ett af de 20 första exemplen, där det således endast gäller att insätta speciella värden på bokstäfverna i tidigare härledda formler. Vid de allmänna uppgifterna hade det varit tillfyllest, att endast svaren anförts och härledningen lämnats åt lärjungen, undantagsvis i några enstaka fall med en obetydlig anvisning. De följande exemplen 21—48 äro förträffligt valda och ansluta sig nära till det föregående. Några af dessa kunna också med fördel lämnas som tillämpningsuppgifte på kapitel 4. Måhända är det nyttigare att uppskjuta *svårare* exempel, tills lärjungen någorlunda behärskar ämnet, så att han kan komma till målet på olika vägar. Har han blott *en* utväg till sitt förfogande, kan det stundom bero på en slump mera än på skicklighet, om han kommer in i den riktiga tankekretsen.

Framställningen i kapitlen 4—7, som afhandla generella definitioner, formler, trigonometriska ekvationer, förtjänar likaväl som i kapitlen 2 och 3 att betecknas som mönstergill. Hvad som kan vara att anmärka är ofta beroende på olika tycke och smak — i alla händelser endast *obetydligheter*. Några sådana må exempelvis anföras. Man kan fråga, hvarför författaren ej medtager upprepade rötter mera än *en* gång vid trigonometriska ekvationer, då dylika vid något tillfälle uppträda. (Exempelvis i det uträknade exemplet 8 sid. 62 och 63 samt i svaren till exemplen 5 och 17 efter kapitlet 7). I algebran har lärjungen vant sig att räkna en dylik rot så många gånger som multiplicitetsgraden angifver, och detta *icke endast af det formella skälet*, att ekvationen då får lika många rötter, som gradtalet anger. Den grafiska framställningen lär honom också, att en djupare grund härtill förefinnes, enär därigenom klart ådagalägges att i en dylik punkt har x-axeln en mer eller mindre intim kontakt med kurvan. Men detta senare gäller naturligtvis likaväl, när han har att göra med transcendenta som algebraiska ekvationer. Om man således vid en algebraisk ekvation talar om en dubbelrot, 3-faldig rot o. s. v.

så förefinnes intet skäl att frångå den principen vid transcendenta ekvationer.

I *allmänhet* menar författaren med $\sqrt{a}$ i öfverensstämmelse med i våra skolböcker gängse bruk en positiv storhet, så i exemplet 10 sid. 64, som är fullständigt uträknadt. I exemplet 9 sid. 63, som också är fullständigt solveradt, förutsätter författaren utan undersökning, då han utbyter *cos x* mot ett rotuttryck, att *cos x* är positiv, såvida icke författaren här tänker sig rotuttrycket *definieradt* på ett allmännare sätt än annorstädes.

I detta sammanhang må också framdragas ex. 22 kap. 7.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x \,.\, \cos y = b \end{cases}$$

I det hithörande svaret å sid. 85 angifver författaren värdena på $\sin x$ och $\sin y$ samt får två värdesystem på dessa storheter. Det i en lärobok meddelade svaret bör, då ej särskilda skäl till undantag förefinnas, vara lika fullständigt som det man kräfver af lärjungarne. Om det är författarens mening att å sid. 85 i detta fall blott antydningsvis angifva svaret, så behöfves det en upplysning, att det ej i den gifna formen kan anses fullständigt utfördt utan kräfver diskussion. Och denna är så pass svår, att den tarfvar en ytterligare vägledning än den, som kan anses ligga i det för ändamå et väl valda numeriska exemplet, där a och b erhållit sådana värden, att uttrycket under rotmärket försvinner, så att *sin x* och *sin y* få samma värden, och b är valdt negativt. Säkerligen behöfves här en till eftertanke ledande fråga. Man har all anledning att befara, att eleven eljest går saken tanklöst förbi, om han ej får uppmärksamheten på lämpligt sätt riktad på att b i svaret endast ingår i kvadrat, men i den ursprungliga ekvationen till första dignitet. — Det torde för öfrigt vara obehöfligt påpeka, att det omordade svaret till detta i och för sig *svåra* exempel kan skrifvas under en annan form, som för diskussion är mera ändamålsenlig.

Recensenten tycker, att äfven i de *16 exempel*, som finnas *utförda* i kapitlet 7 på trigonometriska ekvationer, författaren gått väl långt in på enskildheter. Man löper härvid fara, att eleverna få hos sig innött en stereotyp tankegång och att behållningen blir väsentligt reducerad, därigenom att deras självverksamhet icke tillbörligen tages i anspråk. Få de en viss tankegång till skänks, så kan man vara öfvertygad om, att de icke göra sig besvär med att se saken från någon annan självständig synpunkt. Att det ges andra fullt ut så goda betraktelsesätt, som dem läroboken innehåller, kan icke förnekas. Till bestyrkande af detta påstående må följande två exempel anföras.

Å sid. 60 har författaren som uppgift n:o 5 att lösa ekvationen

$$a \sin x + b \cos x = c$$

som bland annat äfven löses på det sätt, att sin x och cos x uttryckas i tang $\frac{x}{2}$. Längre fram sid. 66 finnes en annan uppgift n:o 11

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d,$$

och författaren antyder, att man äfven här kan uttrycka sin x och cos x i tang $\frac{x}{2}$. Man kan hemställa, huruvida det icke är lämpligare att tvärtom i det förra exemplet uttrycka sin x och cos x i sinus och cosinus för $\frac{x}{2}$ och sedan behandla denna uppgift så, som författaren förfar vid det sist anförda exemplet. Införas nämligen i det senare exemplet sin x och cos x uttryckta i tang $\frac{x}{2}$, får man ju en fullständig ekvation af 4:de graden i afseende på tang $\frac{x}{2}$.

Å sidan 58 påpekar författaren, att det är nyttigt att undvika införandet af »rotmärken», ett uttryck, som bättre kunde ersättas med, att man af vissa anförda skäl bör söka ställa så till, att man ej behöfver kvadrera. Då författaren behandlar exemplet 9 sid. 63

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

på två sätt, där anförda råd *icke* beaktas, så hade lämpligen ett tredje sätt med vänstra ledets uppdelning i faktorer bort anföras. Som sagdt är, håller recensenten före, att såväl den ena som den andra af nämnda uppgifter bör lämnas till lärjungarnas eget arbete, då nog alla tänkbara lösningar självmant komma före till diskussion vid lexförhöret.

3:o. Hr *Rydberg* har slutligen enligt egen utsago velat taga hänsyn till »med växande styrka höjda röster, som yrka på ett omläggande af matematikens studium på gymnasialstadiet i syfte att göra lärjungarna förtrogna med *funktionsbegreppet* och i synnerhet med *grafisk framställning* af funktioner».[1] Vid genomförandet af denna föresats har författaren slagit in på en väg, som i Sverige och äfven anhorstädes visserligen kan berömma sig af historisk häfd, men som i högsta grad verkat hämmande på utvecklingen, nämligen det förfaringssättet, att man fogar en del nya synpunkter såsom ett löst påhäng på den öfriga framställningen. Man erinre sig, hur det gick till, då matematikkurserna i början och midten af 1800-talet utvidgades, hur planimetrien i stället för att inarbetas i den öfriga geometri — och algebrakursen blef ett särskildt *fristående* moment; hur analytiska geometrien blef tillagd såsom ett *nytt ämne i högsta klassen på reallinjen* o. s. v. Det ser ut, som om hr *Rydberg* endast läst *första* afhandlingen i *Neue Beiträge,*[2] hvarför han också enbart citerar denna. Hade han läst jämväl d:r *Göttings* uppsats i samma band *Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten,* hade han funnit, att denna modärna sträfvan går utpå att bringa funktionsbegreppet *så småningom* till klarhet genom att omgestalta det sätt, hvarpå matematiken och fysiken hittills föredragits i skolan.

Hur nära till hand ligger det icke att vid införandet af de generella trigonometriska funktionerna motivera deras tecken med att helt enkelt hänvisa till, huru en punkts läge i planet representeras af koordinaterna x och y med föreskrifna positiva eller negativa tecken allt efter punktens läge i olika axelvinklar. Författaren förutsätter i alla händelser å sidan 73, att lärjungarna äro förtrogna med koordinatbegreppet, men å sidan 2, där tecknen för de »trigonometriska linjerna» bestämmas, refereras ej därtill. Man jämföre härmed *Borels*[3] arbete, hvari genast nämnda saker komma till sin fulla rätt. Redan i första kapitlet kommer *Borel* fram till en grafisk framställning af kurvan

---

[1] Grafisk framställning skall vara det *medel,* hvarigenom den nämnda förtrogenheten med funktionsbegreppet vinnes. Man vill bibringa *funktionsbegreppet i geometrisk* form, således *åskådligt.*

[2] *Klein und Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts* etc., Teil I, Leipzig und Berlin, Teubner, 1904.

[3] *Émile Borel, Trigonométrie,* Second cycle, Paris, Colin, 1904.

$$y = \sin x,$$

men så har han också att stödja sig på sina läroböcker i algebra,[1] tack vare hvilka *funktionsbegreppet i sin geometriska form* allt ifrån den klass, som svarar mot vår femte så småningom bringats till klarhet.

Om också ämnets behandling icke under i Sverige rådande förhållanden kan blifva lika glatt som hos *Borel*, så måste man dock besinna, att den *grafiska framställningen* på grund af sin rent *praktiska* betydelse äfven hos oss ansetts förtjäna en plats redan i realskolan. De skäl, som därvid kommit till sin rätt, äro många gånger omtalade, men må här ännu en gång antydas. En framställning på grafisk väg, hur en storhet beror af en annan, möter lärjungen under snart sagdt alla lifvets förhållanden. Det är den typiska form, hvarunder den matematiska tankegången på ett åskådligt sätt gör sig gällande, och det är ej blott i den exakta vetenskapen man påträffar i *xy*-systemet uppdragna kurvor. De återfinnas i populära framställningar öfver allting, som kan underkastas beräkningar, äfven i våra vanliga tidningar.

Skall väl då denna tankegång, hvartill grunden blifvit lagd redan i *femte klassen*, förkväfvas för den gosse som fortsätter på gymnasium? Skall den först i gymnasiets fjärde ring återupptagas? Man måste anse att författaren gått till väga med en rent af ängslig försiktighet, då han »för att i denna fråga ej gå utvecklingen i förväg»[2] låtit sig ledas af den gamla principen att foga de af tidsandan framtvingade nya momenten i matematikundervisningen såsom ett supplement till det föregående och fristående från detta. Författaren har måhända befarat, att ett radikalt försök att utgifva en bok i trigonometri efter exempelvis *Borels* mönster skulle finna lika liten genklang som *K. P. Nordlunds*[3] försök för snart 20 år sedan att införa grafisk framställning i nederskolan. Men saken gestaltar sig helt annorlunda nu än då. När lektor *Nordlund* utgaf sin bok, hade ingen människa tänkt sig, att det skulle vara möjligt att införa smågossar i dylika saker, hvilka ansågos först i 7:2 och af somliga lärare knappast där kunna med framgång bibringas. Nu återigen är denna reform med godt resultat genomförd i *Frankrike* genom skol-

[1] *Émile Borel, Algèbre premier cycle*, 2 éd., Paris, Colin, 1905, och *Algèbre 2:e cycle*, 2 éd., Paris Colin, 1905.
[2] Jämför förordet!
[3] *Elementarbok i algebra*, Upsala, Schultz, 1887.

ordningen af 1902 och på försök i en hel del af *Preussens* skolor, för att ej tala om det ofantliga inflytande som *perry-rörelsen* i *England* utöfvat på den matematiska undervisningen i detta land[3]) Goda skäl finnas således för att anse författarens försiktighet härvidlag vara icke så litet öfverdrifven. —

Ända till bokens sista kapitel (sidan 71) uppskjutes införandet af *namnet* funktion, hvarefter i samband med införandet af nämnda begrepp kurvorna för de enkla trigonometriska funktionerna meddelas. (Därvid må i förbigående anföras, att de meddelade sinusoiderna äro misslyckade. Författaren bevisar själf, att nämnda kurvor skola skära x-axeln under 45 graders vinkel, ett villkor, som icke uppfylles af kurvorna i fig. 24 sid 73). Boken afslutas med att härleda *derivatorna* för *sin x* och *tang x* (dock utan att införa *namnet* derivata) samt med att lämna några antydningar om de inversa funktionernas mångtydighet.

Om således detta arbete icke kan anses i någon nämnvärd mån tillmötesgå tidens reformkraf på matematikundervisningen, så intager det dock ett framstående rum bland de böcker af konventionell art, som finnas i vår literatur. Förbigås det, som gäller »trigonometriska linjer», d. v. s. om man börjar med sid 4 samt bibringar sista delen af första kapitlet i anslutning till framställningen å sidan 75, så erhåller man en god lärobok, klar, redig och exakt samt försedd med utmärkta exempel. Särskildt torde den inledning, som erhålles, om saken anordnas på ofvan antydt sätt, tilltala alla de lärare, som först önska sig de trigonometriska funktionerna definierade för vinklar från och med 0° till och med 360° och därefter omedelbart tillämpade på trianglar.

III.

P. G. Laurin, Lärobok i geometri för gymnasiet, [illegible]

Följer i synnerhet den förstnämnda boken af *Mellberg* en modärnare omklädnad af den väg, som *Ptolemæus* i sin *Almagest* inslagit

---

[3]) [illegible]