af Sterns arbete innehåller åtskilliga intressanta jämförelser mellan olika åldersklasser och kön. Sålunda ökas med tilltagande ålder självständigheten i förhållande till receptiviteten, hvartill svarar större motståndskraft mot suggestiva frågor. Vidare finner man, att flickorna i det hela stå efter gossarna såväl i afseende på receptivitet, förmågan att upptaga kunskapsmaterialet, som ännu mer i spontaneitet, förmågan att självständigt tillgodogöra sig detsamma, samt att de visa mindre motståndskraft mot suggestiva frågor.

Också ur andra synpunkter erbjuda Sterns experimenter många pedagogiskt betydelsefulla uppslag. Dock torde det vara önskvärdt, att forskningsmaterialet på detta område suppleras genom ytterligare iakttagelser och experimenter, innan man definitivt fastslår några bestämda resultat.

---

## Ett tillägg i den algebraiska kursen.

### Till undervisningens tjänst.

I Frankrike och England har under den senaste tiden gjort sig gällande bland lärare i matematik den åsikten att mycket tidigt vid undervisningen i algebra upptaga till behandling det epokgörande Cartesianska sättet att åskådliggöra punkters läge, de algebraiska funktionerna, ekvationsbegreppet m. m. medelst linjer och deras storlekstal. Genom åskådning af linjerna, som reprensentera funktionerna, har läraren ett ypperligt medel att klargöra för lärjungarne funktioners natur och egenskaper, lösning af ekvationer m. m.

I åttonde häftet för år 1901 af tidskriften »*Skolan*» förekommer en mycket utmärkt uppsats: »*Om matematiken i skolan*» af *Prof. Bjerknes*. De tankar, som däri finnas uttalade, äro af banbrytande natur vid ordnandet af den matematiska undervisningen i våra skolor. I denna uppsats, som borde läsas och begrundas af alla matematiklärare och författare af läroböcker i matematik, yrkar äfven förf. på koordinatsbegreppets tidiga införande vid undervisningen icke blott från pedagogisk utan äfven från praktisk synpunkt.

I Frankrike utfärdar högsta styrelsen för undervisningsväsendet ett program, som innehåller en lärogång vid undervisningen i de särskilda ämnena. Inga andra läroböcker än sådana, som äro uppställda efter detta program, få användas i Franska statens skolor. Det sista programmet utfärdades den 31 maj 1902. I detta är ofvanstående tillägg i den algebraiska kursen påbjudet.

För 20 år sedan utgaf undertecknad en »elementarbok i algebra», hvari detta tillägg finnes upptaget. Läroboken, som är uppställd på grundvalen af ett hevristiskt undervisningssätt, väckte bland lärarne i matematik ingen uppmärksamhet. Den har ej ens blifvit omnämnd i någon af de pedagogiska tidskrifterna.

Då nu denna undervisningsfråga ändtligen blifvit aktuell inom utlandets skolvärld, dristar jag ånyo väcka matematiklärarnes uppmärksamhet på den viktiga frågan. Saken har ock beaktats i realskolans kursplan.

För detta ändamål meddelas i det följande förslag till några enkla grundläggande öfningsuppgifter jämte svar samt nödiga upplysningar, som böra meddelas lärjungarne.

Hugade lärare kunna på försök genomgå dessa uppgifter med sina lärjungar, hvarigenom lärarne komma i tillfälle, att själfva bedöma verkningarna af den meddelade undervisningen.

I dessa första öfningar förekomma af pedagogiska skäl endast positiva tal, som hufvudsakligen äro hela. Först i följande afdelningar skulle äfven komma till användning negativa tal.

---

Såsom inledning till följande öfningar, böra lärjungarne bevisa nedanstående satser, som ligga till grund för lösningen af en del uppgifter.

Bevisen verkställas under förutsättning, att de storheter som jämföras med hvarandra, hafva en gemensam jämn del.

Sats 1. *På sidan AB i en triangel ABC är en punkt D. AD är lika stor med DB.*

*Från D är dragen parallellt med BC en linje, som träffar AC i E.*

Bevisa: *1:o) att AE är lika stor med EC.*
*2:o) att DE är lika stor med hälften af BC.*

Sats 2. *På sidan AB i en triangel ABC äro punkterna D och E tagna, så att AD, DE coh EB äro lika stora. Från D och E äro dragna med BC parallella linjer, som träffa AC i F och G.*

Bevisa: *1:o) att AF, FG och GB äro lika stora.*
*2:o) att DF är lika stor med en tredjedel af BC.*
*3:o) att EG är lika stor med 2 tredjedelar af BC.*

Sats 3. *Sidan i en triangel ABC är delad i lika stora delar. Genom delningspunkterna äro dragna med BC parallella linjer, som träffa AC.*

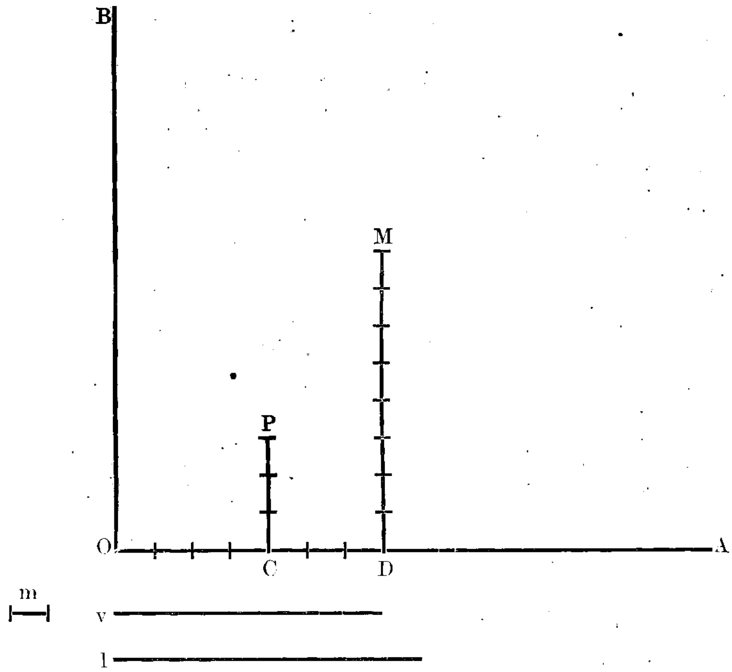
Bevisa: *1:o) att AC:s delar äro lika stora.*
*2:o) att förhållandet mellan den första parallella linjen närmast A och BC är lika stort med förhållandet mellan* en *af AB:s delar och AB.*
*3:o) att förhållandet mellan den andra parallella linjen närmast A och BC är lika stort med förhållandet mellan* två *af AB:s delar och AB* o. s. v.

Sats 4. *På sidan AB i en triangel ABC är en punkt D. Genom D är dragen en med BC parallell linje, som träffar AC i E.*

Bevisa: *1:o) att förhållandet mellan AD och DB är lika stort med förhållandet mellan AE och EC.*
*2:o) att förhållandet mellan DE och BC, förhållandet mellan AD och AB samt förhållandet mellan AE och AC äro lika stora.*

Sats 5. *I trianglarna ABC och* abc *är vinkeln A lika stor med vinkeln a, vinkeln B med vinkeln b samt vinkeln C med vinkeln c.*

Bevisa: *att förhållandet mellan AB och* ab, *förhållandet mellan AC och ac samt förhållandet mellan BC och bc äro lika stora.*




OA och OB äro två räta linjer, som med hvarandra bilda räta vinklen O.

Bestämningen af en punkt P:s läge inom vinkelöppningen tillgår på följande sätt:

Från P drages vinkelrätt mot OA en linje, som träffar OA i C.

P:s läge är bestämdt genom linjerna OC och PC.

Om läget af en punkt M skall bestämmas, hvilkens bestämningslinjer äro lika stora med *v* och *l*, af hvilka den vågräta skall vara lika stor med *v* och den lodräta med *l*, så skäres af OA från O en linje OD lika stor med *v*. Ifrån D drages en mot OA vinkelrät linje. Af denna skäres från D ett stycke, som är lika stort med *l*. Ändpunkten M af denna linje är den sökta punkten.

I stället för att bestämma en punkts läge genom tvenne uppritade linjer har man funnit det vara ändamålsenligare och enklare att utbyta linjerna mot deras storlekstal.

Man bestämmer en linje *m*, hvilken användes som mått i linjernas storleksbestämningar.

För bestämningen af P:s läge indelas OC och CP i delar, som äro lika stora med det valda måttet *m*.

Delarnes antal i OC är 4 och i CP 3.

P:s läge är då bestämdt genom talen 4 och 3.

Talet 4 benämnes *abscissa* och talet 3 *ordinata*.

Den räta vinkelns spets O kallas *origo*.

OA och OB kallas *koordinat-axlar*.

OA kallas $x$-axel eller *absciss-axel*.

OB kallas *funktions-axel* eller *ordinat-axel*.

P:s läge angifves på följande sätt:

P:s *abscissa* är 4 och *ordinata* är 3, hvilket vanligen förkortas till:

P är belägen i punkten (4, 3), af hvilka det första talet inom parentesen är *abscissa* och det andra *ordinata*.

I likhet härmed säges M vara belägen i punkten (7,8).

Lärjungarne böra för de följande öfningsuppgifterna anskaffa pappersark, som äro noggrant indelade i lika stora kvadrater. Såsom synnerligen lämpliga äro hamppappersark, som äro indelade i kvadratcentimeter. Dylika ark äro äfven särdeles billiga. Såsom mått *m* väljes en af sidorna i kvadraterna. Dess' .om böra lärjungarne vara försedda med linjal, passare och gummi. För att minska åtgången af rutpapper utplånas med gummit de vid lösningen af uppgifter använda blyerzlinjerna, hvarefter det kan användas vid lösningar af nya uppgifter. För att hastigt finna läget af punkter på rutpapperet utmärkes hvar 5:te punkt på axlarne från origo med siffrorna 5, 10, 15, 20, 25 o. s. v. Vid dessa öfningar böra användas blyerzpennor med fina spetsar, så att linjerna kunna uppdragas medelst linjal med stor noggrannhet. För att med lätthet kunna utplåna uppdragna linjer böra s. k. lösa blyerzpennor användas.

Läraren använder i st. f. den vanliga svarta taflan en med punkter försedd tafla, som användes vid lektionerna i teckning.

Uppdrag med bläck på det indelade pappersarket axlarna OA och OB! OA på den nedersta linjen och OB på den första lodräta linjen.

Läraren utmärker punkter på den stora taflan med t. ex. bokstäfverna a, b, c, d.... och öfvar lärjungarne att bestämma lägena af a, b, c, d....

*1)* *Bestäm läget af punkterna* (7, 6), (5, 1), (7, 0) (0, 7) och (0,0).

*2)* *Hvilket är storlekstalet till afståndet mellan punkterna* ***a***) (0,0) och (4,3) ***b***) (0, 0) och (12,16)?

*Anm.* Lärjungarne böra först bestämma storlekstalet med användning af passaren sedan medelst räkning.

*3)* *Hvilket är storlekstalet till afståndet mellan punkterna* ***a***) (2,3) och (7, 15) ***b***) (2, 1) och (9,25) ***c***) (3,19) och (11,4)?

*Ledning:* Fäll ifrån den första punkten en vinkelrät linje mot den andra punktens ordinatlinje eller dess förlängning.

*4)* *P och M äro belägna i punkterna* ***a***) (0, 0) och (6, 8) ***b***) (3, 4) och (7, 10) ***c***) (5, 6) och (17, 20).
*Hvilket är läget till PM:s midtpunkt?*

*5)* *P och M äro belägna i punkterna* (2, 2) och (8, 11).
*Linjen PM är i C och D delad i 3 lika stora delar.*
*Hvilka äro lägena för C och D?*

*6)* *P och M äro belägna i punkterna* ***a***) (1, 4) och (8, 18) ***b***) (3, 8) och (9, 11).
*Linjen PM är delad i tvenne delar* PC och CM *hvilkas förhållande är* $\frac{3}{4}$.
*Hvilket är C:s läge?*

Värdena å funktionen 2x för x-värdena 0, 1, 2, 3, 4.. äro 0, 2, 4, 6, 8.. Om ett x-värde betraktas som *abscissa* och motsvarande funktionsvärde som *ordinata*, så erhålles för hvarje x-värde en punkt.

I detta fall erhållas punkterna (0, 0) (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)....

Alla dessa punkter ligga på samma räta linje.

Förfar man på samma sätt med hvarje hel funktion af x af första graden, så komma de erhållna punkterna äfven att ligga på samma räta linje. Denna linje, som motsvarar första-gradsfunktionen, är en åskådlig bild af funktionen och dess växlingar med x-värdena.

Den uppritade linjen kan sedan användas för bestämning af

1:a) *funktionens värde för ett gifvet värde å x,*

2:a) *värdet af x för ett gifvet värde på funktionen.*

**7)** *Drag en rät linje L, som går genom punkterna* (0, 21) och (4, 9)!
*Hvilket är värdet å motsvarande funktion, då värdet å x är* ***a***) 2, ***b***) 5, ***c***) 7?

**8)** *Hvilket är värdet å x, då värdet å samma funktion är* ***a***) 3, ***b***) 12, ***c***) 18?

**9)** *Funktionen, som motsvarar* L är (21—3x).
*Sök medelst räkning svaren å frågorna i 7 och 8!*

**10)** *Upprita en rät linje N, som går genom punkterna* (0, 3) och (3, 12) *med samma koordinataxlar som* L!
*I hvilken punkt skära N och L hvarandra?*

**11)** *Funktionen, som motsvarar N är* ( 3x + 3).
*Sök medelst räkning svaret på frågan i 10!*

*Upplysning:* Till grund för denna räkning lägges följande sats:

*x-värdet, för hvilket skillnaden mellan tvenne funktioner är 0, är det värde å* x, *för hvilket funktionerna blifva lika stora.*

**12)** *L går genom* ***a***) (0, 3) och (3,24) ***b***) (0, 7) och (3, 4) ***c***) (1, 11) och (2, 14).
*N går genom* a) (0, 13) och (3, 19) b) (12, 0) och (3, 6) och (3, 14) och (6, 14).
*I hvilken punkt skära L och N hvarandra?*

**13)** *Funktionerna, som motsvara L och N, äro* ***a***) (7x + 3) och (2x + 13) ***b***) (7—x) och (12—2x) ***c***) (3x + 8) och (0x + 14).
*Sök medelst räkning svaren å frågorna i 12!*

När tvenne funktioners värden för *samma* x-värde jämföras med hvarandra, kunna i allmänhet följande tre fal inträffa:

1:0) *Den förstas värde är lika stort med den andras värde.*

2:0) » » » » *större än* » » »

3:0) » » » » *mindre än* » » »

Sålunda blifva de bägge funktionernas (3x + 4) och (24—2x) värden lika stora med 16, då x-värdet är 4.

För x-värdet 7 är värdet å den första 25, som är större än värdet å den andra, som är 10.

För x-värdet 3 är värdet å den första 13, som är mindre än värdet å den andra, som är 18.

**14)** *Upprita en linje L, som går genom punkterna* (0, 1) och (2, 11)!

*Upprita en linje N, som går genom punkterna* (0, 28) och (4, 12).

**a**) *För hvilket x-värde blifva funktionerna, som motsvara* L och N, *lika stora?*

*För hvilka x-värden* blifva:

**b**) *den första funktionens värden större än den andras?*

**c**) » » » » *mindre än* » » ?

**15)** *Funktionerna, som motsvara* L och N *äro* (5x + 1) *och* (28—4x).

*Sök medelst räkning svaren på frågorna* i 14!

*Upplysning:* Till grund för denna räkning lägges följande sats:

*x-värdena, för hvilka skillnaden mellan tvenne funktioner är större än 0, äro samma värden å* x, *för hvilka den första funktionen i skillnaden är större än den senare.*

Anställ samma undersökning med linjerna och funktionerna, som förekomma i uppgifterna 12 och 13!

**16)** *Linjen, som motsvarar funktionen* **a**) (12—3x) **b**) (4—$\frac{1}{2}$x.) **c**) 15—$\frac{3}{4}$.x träffar *koordinataxlarna* i D och E.

*Hvilket är storlekstalet till triangeln ODE, då måttet är kvadraten på m?*

**17)** *Punkterna P, M och R:s lägen* äro **a**) (0,0), (6, 3) och (6, 7) **b**) (7, 4), (9, 6) och (9, 12) **c**) (5, 6), (7, 10) och (9, 8) **d**) (8, 6), (10, 2) och (13, 14).

*Hvilket är storlekstalet till trianglen* PMR, *då måttet är kvadraten på m?*

Linjer, som motsvara andra funktioner än af första graden, äro alla krokiga. Utsätt punkterna, som motsvara x-värdena 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 och 8 i andragradsfunktionen ($8x—x^2$)!

Dessa punkter ligga på en kroklinje, som kallas *parabel.* Sammanbindas de närmast liggande punkterna medelst räta linjer, så blifva dessa kordor i parabeln.

Parabelbågarna ligga litet till vänster om kordorna på parabelns vänstra del och till höger om kordorna på parabelns högra del.

Punkten (4,16), som är parabelns *högsta* punkt, kallas *maximipunkt.* Talet 16, som är det största värde funktionen $(8x-x^2)$ kan erhålla för något x-värde, säges vara funktionens *maximum.* Motsvarande x-värde är 4. De mellanliggande parabelbågarna böra närmevis uppdragas på teckningen.

Utsätt punkterna, som motsvara x-värdena 0, 1, 2, 3, 4, 5 och 6 i andra-gradsfunktionen $(x^2-6x+16)$!

Dessa ligga på en kroklinje, som äfven kallas *parabel.*

Om läget af parabelbågarne (som böra närmevis uppritas) i afseende på kordorna gäller detsamma, som blifvit anfördt i det föregående.

Punkten (3, 7), som är parabelns *nedersta* punkt kallas *minimipunkt.*

Talet 7, som är det *minsta* värde funktionen $(x^2-6x+16)$ kan erhålla för något x-värde, säges vara funktionens *minimum.* Motsvarande x-värde är 3.

**18)** *Upprita en rät linje, som motsvarar* $(x+10)$, *med samma koordinataxlar som parabeln, som motsvarar* $(8x-x^2)$.!

*Sök med ledning af linjerna de x-värden, för hvilka*

**a**) $(x+10)$ och $(8x-x^2)$ *antaga samma värden!*

**b**) $(x+10)$ *antager större värden än* $(8x-x^2)$!

**c**) $(x+10)$ *antager mindre värden än* $(8x-x^2)$!

**19)** *Upprita en rät linje, som motsvarar* $(2x+9)$, *med samma koordinataxlar som parabeln, som motsvarar* $(8x-x^2)$!

*Sök med ledning af linjerna de x-värden, för hvilka*

**a**) $(2x+9)$ och $(8x-x^2)$ *antaga samma värden!*

**b**) $(2x+9)$ *antager större värden än* $(8x-x^2)$!

**c**) $(2x+9)$ *antager mindre värden än* $(8x-x^2)$!

**20)** *Upprita en rät linje, som motsvarar* $(4x+6)$ *med samma koordinataxlar som parabeln, som motsvarar* $(8x-x^2)$!

*Sök med ledning af linjerna de x-värden, för hvilka*

**a**) $(4x+6)$ och $(8x-x^2)$ *antaga samma värden!*

**b**) $(4x+6)$ *antager större värden än* $(8x-x^2)$!

**c**) $(4x+6)$ *antager mindre värden* än $(8x-x^2)$!

**21)** *Upprita en rät linje, som motsvarar* (12—x), *med samma koordinataxlar som parabeln, som motsvarar* $x^2$—6x+16!

*Sök med ledning af linjerna de x-värden, för hvilka*

*a*) (12—x) och ($x^2$—6x+16) *antaga samma värden!*

*b*) (12—x) *antager större värden* än ($x^2$—6x+16)!

*c*) (12—x) *antager mindre värden* än ($x^2$—6x+16)!

**22)** *Upprita en rät linje, som motsvarar* (12—2x), *med samma koordinataxlar som parabeln. som motsvarar* ($x^2$—6x+16)!

*Sök med ledning af linjerna de x-värden, för hvilka*

*a*) (12—2x) och ($x^2$—6x+16) *antaga samma värden!*

*b*) (12—2x) *antager större värden* än ($x^2$—6x+16)!

*c*) (12—2x) *antager mindre värden* än ($x^2$—6x+16)!

**23)** *Upprita en rät linje, som motsvarar* (6—x), *med samma koordinataxlar som parabeln, som motsvarar* ($x^2$—6x+16)!

*Sök med ledning af linjerna de x- värden, för hvilka*

*a*) (6—x) och ($x^2$—6x+16) *antaga samma värden*

*b*) (6—x) *antager större värden* än ($x^2$—6x+16)!

*c*) (6—x) *antager mindre värden* än ($x^2$—6x+16)!

För att medelst räkning bestämma *maxima* eller *minima* till funktioner af andra graden fordras af lärjungarna kunskap om sättet att utbyta former till funktioner af andra graden, hvari x förekommer på *ett* ställe.

Sedan läran om summor, skillnader, produkter och förhållanden mellan negativa tal blifvit genomgången, kunna lärjungarne med tillhjälp af kvadrater, indelade på ett ändamålsenligt sätt, lätt meddelas kunskap om ofvannämnda utbyte af former.

Sålunda är formen ($8x-x^2$) likbetydande med

$$-(x^2-8x) = -(x^2-8x+16-16) = 16-(x-4)^2$$

Af denna sista form finner man funktionens *maximum* vara 16 och motsvarande x-värde 4.

Formen ($x^2-6x+16$) är likbetydande med

$$x^2-6x+9-9+16=(x-3)^2+7.$$

Af denna sista form finner man funktionens *minimum* vara 7 och motsvarande x-värde 3.

Till svaren å de tre frågorna i t. ex. uppgiften 18 leder man sig medelst räkning på följande sätt:

Formen för skillnaden mellan funktionerna $(x+10)$ och $(8x-x^2)$ är

$$(x+10)-(8x-x^2)=x^2-7x+10=x^2-7x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+10=$$

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)=(x-2).(x-5).$$

Funktionen $(x-2)$ $(x-5)$, som är skillnad mellan funktionerna $(x+10)$ och $(8x-x^2)$, blir 0 för x-värdena 2 och 5. Enligt en i det föregående anförd sats antaga de bägge funktionerna *samma* värden äfven för x-värdena 2 och 5.

Genom 2 och 5 blir talserien delad i tre grupper:

1:sta gruppen består af tal, som äro *mindre* än 2.

2:dra gruppen består af tal, som äro *medelvärden* mellan 2 och 5.

3:dje gruppen består af tal, som äro *större* än 5.

För hvarje x-värde ur den 1:sta gruppen blifva både $(x-2)$ och $(x-5)$ mindre än 0.

För dylika x-värden blir $(x-2)$ . $(x-5)$ större än 0, och i följd häraf $(x+10)$ större än $(8x-x^2)$.

För hvarje x-värde ur den 2:dra gruppen blir $(x-2)$ större än 0 och $(x-5)$ mindre än 0.

För dylika x-värden blir $(x-2).(x-5)$ mindre än 0 och i följd häraf $(x+10)$ mindre än $(8x-x^2)$.

För hvarje x-värde ur den 3:dje gruppen blifva både $(x-2)$ och $(x-5)$ större än 0.

För dylika x-värden blir $(x-2).(x-5)$ större än 0 och i följd häraf $(x+10)$ större än $(8x-x^2)$.

*Svaren* angifna med kortskrift på de tre frågorna i uppgiften 18 blifva således:

a) $(x+10) = (8x-x^2)$, då 1:0 $x=2$. 2:0. $x=5$.

b) $(x+10)>(8x-x^2)$, då 1:0) $x<2$. 2:0) $x>5$.

c) $(x+10)<(8x-x^2)$, då $2<x<5$.

Vid jämförelsen mellan tvenne funktioners värden för *samma* x-värden inträffar det äfven, att de *alltid* blifva lika stora. Detta är t. ex. händelsen med funktionerna $(x-1).(x-4)$ och $(x^2-5x+4)$. De motsvarande parablerna äro *kongruenta*: Funktionen $(x-1)$ . $(x-4)$ är nämligen densamma som funktionen $(x^2-5x+4)$. Det är endast deras *former*, som äro olika. För en och samma funktion kunna formerna skifta på oändligt många sätt. Vid algebraisk räkning kunna tvenne former, som beteckna samma funktion, utbytas mot hvarandra. I läran om de bestämda talen inträffar samma förhållande. Sålunda beteckna formerna: $\left(\frac{3}{7}.56\right)$ och $\left(20:\frac{4}{5} - 1\right)$ samma tal, nämligen *tjugufyra*. De tvenne formerna kunna äfven utbytas mot hvarandra.

Sätten att bestämma en förstagradsfunktion, då tvenne punkter på linjen, som motsvarar funktionen äro gifna, äro följande:

*A) En af punkterna är origo.*

Detta fall kräfver ingen förberedelse.

**24)** *Räta linjen, som motsvarar en funktion, går genom punkterna*

***a***) (0,0) och (6,12). ***b***) (0,0) och (2,10) ***c***) (0,0) och (10,5) ***d***) (0,0) och (12,9).

*Hvilken är funktionen?*

B) *En af punkterna ligger på funktionsaxeln.*

*Exempel* 1. *Punkterna äro* P (0,5) och M (4,17).

*Hvilken är funktionen?*

*Lösning.*

Ifrån P drages en linje parallell med OA.
Den träffar M:s ordinatlinje MC i D.
MC är summa af CD och DM.
Storlekstalet till DC, som är lika stor med PO är, 5.
Storlekstalet till MD är (17—5) eller 12.
Förhållandet mellan MD och PD, som är lika stor med OC, är 3.
Ordinatan till M är $5+3.4$.
Funktionen är $5+3.x$.

*Exempel* 2. *Punkterna äro* P (0,21) och M (2,11).

*Hvilken är funktionen?*

*Lösning.*

Ifrån P drages en linje parallell med OA.
Denna träffar M:s ordinatlinje MC förlängd i D.
MC är skillnad mellan CD och MD.
Storlekstalet till CD, som är lika stor med PO, är 21.
Storlekstalet till MD är (21-11) eller 10.

Förhållandet mellan MD och PD, som är lika stor med OC, är 5.
Storlekstalet till MC är $(21—5.2)$.
Funktionen är $(21—5.x)$.

*C) Punkterna ligga utanför funktionsaxeln.*

I detta fall drages en rät linje genom punkterna.
Läget af punkten P, där linjen träffar funktionsaxeln, bestämmes.
Äro de bägge punkterna $(2,9)$ och $(4,3)$, så träffar ofvannämnda linje funktionsaxeln i punkten $(0,15)$.
I enlighet med lösningen i exemplet 2 är funktionen

$$15—3.x.$$

**25)** *Räta linjen, som motsvarar en funktion, går genom punkterna*
***a***) $(0,1)$ och $(3,19)$ ***b***) $(0,20)$ och $(3,14)$ ***c***) $(0,24)$ och $(3,9)$ ***d***) $(2,11)$ och $(3,15)$ ***e***) $(3,8)$ och $(4,3)$ ***f***) $(6,4)$ och $(8,4)$

*Hvilken är funktionen?*

Sättet att medelst räkning bestämma en andragradsfunktion, då tre punkter å den motsvarande parabeln äro uppgifna, kan ej inläras, förrän läran om ekvationer med flera obekanta är genomgången.

Svaren å uppgifterna (26—29) erhållas genom teckning af linjerna, som motsvara funktionerna.

**26)** Hvilket är *maximum* och motsvarande x-värde i funktionerna ***a***) $(6x—x^2+1)$ ***b***) $(4x—x^2+2)$?

**27)** Hvilket är *minimum* och motsvarande x-värde i funktionerna ***a***) $(x^2—8x+17)$ ***b***) $(x^2—2x+5)$?

**28)** För hvilka x-värden är $(6x—x^2+1)$ ***a***) lika med ***b***) större än ***c***) mindre än 6?

**29)** För hvilka x-värden är $(x^2—8x+17)$ ***a***) lika med ***b***) större än ***c***) mindre än $(9—2x)$?

Som läsaren finner, har jag i ofvanstående framställning ej användt bokstafven $y$ såsom tecken för funktioner. Att samtidigt använda tvenne tecken för *samma* begrepp, nämligen ett öfverenskommet kortskriftstecken $y$ och ett fullständigt utskrifvet t. ex. $(5x+1)$ är mycket villsamt för lärjungarne. När läraren använder för *samma* begrepp tvenne olika former, hvaraf den ena ej kan härledas ur den andra, så anse lärjungarne de bägge olika formerna representera olika begrepp.

Uttrycket: »funktionen $(5x+1)$ representerar en rä linje» är för lärjungarne mycket tydligare och begripligare än uttrycket: »ekvationen $(y=5x+1)$ representerar en rät linje». Väljer man det förra uttrycket, så kan man mycket tidigare börja denna nyttiga undervisning, än om man väljer det senare, hvars begripande förutsätter förtrogenhet med läran om ekvationer med två obekanta.

S v a r :

***2 a***) 5, ***b***) 20 — ***3 a***) 13. ***b***) 25. ***c***) 17 — ***4 a***) (3, 4) ***b***) (5, 7) ***c***) (11, 13) — ***5 a***) (4, 5) ***b***) (6, 8) — ***6 a***) (4, 10) ***b***) $(5\frac{4}{7}, 9\frac{2}{7})$ — ***7 a***) 15 ***b***) 6 ***c***) 0 — ***8*** a) 6 ***b***) 3 ***c***) 1 — ***10***) (3, 12) — ***12 a***)(2, 17) ***b***) (5, 2) ***c***) (2, 14) — ***13*** a) (2, 17) ***b***) (5, 2) ***c***)(2, 14) — ***14 a***) 3 ***b***) större än 3 ***c***) mindre än 3 — ***16 a***) 24 ***b***) 16 ***c***) 150 — ***17 a***) 12 ***b***) 6 ***c***) 6 ***d***) 18. — ***18 a***) 2 och 5. ***b***) 1:o) värden, som äro mindre än 2. 2:o) värden, som äro större än 5 ***c***) medelvärden mellan 2 och 5 — ***19 a***) endast 3 ***b***) alla värden utom 3 ***c***) något värde finnes ej. *Anm.* Räta linjen tangerar parabeln i punkten (3, 15). — ***20 a***) något värde finnes ej. ***b***) alla värden ***c***) något värde finnes ej. — ***21 a***) 1 och 4. ***b***) medelvärden mellan 1 och 4. ***c***) 1:o) värden, som äro mindre än 1—2:o) värden, som äro större än 4 — ***22 a***) endast 2. ***b***) något värde finnes ej. ***c***) alla värden utom 2 — *Anm.* Räta lijnen tangerar parabeln i punkten (2, 8). — ***23 a***) Något värde finnes ej. ***b***) Något värde finnes ej. c) alla värden. — ***24 a***) 2x. ***b***) 5x. ***c***) $\frac{1}{2}$. x. ***d***) $\frac{3}{4}$. x — ***25 a***) $6x+1$. ***b***) $20-2x$. ***c***) $24-5x$. ***d***) $4x+3$. ***e***) $23-5x$. ***f***) $0x+4$ eller 4. — ***26***. *Maximum* är ***a***) 10. ***b***) 6. Motsvarandex-värde är ***a***) 3. ***b***) 2. ***27***. *Minimum* är ***a***) 1. ***b***) 4. Motsvarande x-värde är ***a***) 4. ***b***) 1. — ***28***. ***a***) 1 och 5. ***b***) medelvärden mellan 1 och 5. ***c***) 1:o) mindre än 1. 2:o) större än 5. — ***29 a***) 2 och 4. ***b***) 1:o) Mindre än 1. 2:o) större än 4. ***c***) Medelvärden mellan 2 och 4.

*Rekvisitioner å särtryck af ofvanstående uppsats kunna ske genom brefkort till undertecknad under adress* **Almunge.**

*Priset å hvarje exemplar jämte postarvode blir 20 öre. Betalning sker medelst efterkraf.*

K. P. Nordlund.