Matematikundervisningen i danska gymnasier — och i svenska.

Några reflexioner med anledning av en nyutkommen dansk lärobok i matematik. (Juul og Rønnau, Lærebog i Matematik, Band I—III. Levin och Munksgaards förlag, Köpenhamn.)

Av docent Harald Bergström.

I den utredning av matematikens ställning i de svenska läroverken, som lektor Lönnqvist företog år 1934, gjorde han även en jämförelse mellan matematikundervisningen i olika länder, bl. a. Frankrike, Tyskland och de skandinaviska länderna. Därav framgick, att Sverige var sämst lottat ifråga om det antal undervisningstimmar, som voro anslagna för matematik. Sedan dess har visserligen en specialkurs i matematik tillkommit vid det svenska gymnasiet, men det råder ej något tvivel om, att vi trots detta ej på långt när nått upp till de nämnda ländernas avancerade matematikstudier på skolstadiet. Särskilt markant blir denna vår efterblivenhet, om jämförelsen göres med Danmark, där matematiken genom betänkandet av den 9 mars 1935 fått en ännu mera framskjuten position än den hade tidigare. Hur himmelsvid skillnaden är mellan de svenska och danska gymnasiernas nuvarande lärokurser, skall jag visa genom att ge ett sammandrag av den ovannämnda läroboken, avsedd för den matematisk-naturvetenskapliga linjen. Denna bok är dessutom så förträfflig att den mer än väl förtjänar att utförligt refereras. I anslutning till referatet skall jag då också göra några reflexioner.

Del I, som läses i första gymnasieklassen, börjar med den geometriska framställningen av de rationella talen på tallinjen. De irrationella talen behandlas ej här. Blott i ett exempel (diagonalen i kvadraten på enhetssträckan) visas, att inkommensurabla sträckor kunna förekomma. Begreppet numeriskt värde införes. Därefter genomgås det cartesianska koordinatsystemet, avståndsformeln, parallellförflyttning av koordinatsystem m. m. Redan här behandlas den enklaste av alla geometriska orter — cirkeln —, vars ekvation uppställes.

I kapitel II införes funktionsbegreppet i allmänhet. Genom tabellfunktioner (tid och barometerstånd) understrykes, att funktionen betyder en tillordning av talen i en talmängd till talen i en annan talmängd. Därvid klargöres omedelbart begreppet variabel. Funktioner, framställda genom matematiska uttryck, exemplifieras.

Kapitel III behandlar den linjära funktionen. Enpunktsformen, tvåpunktsformen och avståndsformen för räta linjen framdeduceras, den sistnämnda följaktligen utan användning av trigonometrien, som ännu ej införts. (En liten kurs i trigonometri läses visserligen redan i mellanskolan.) Ytan av en godtycklig triangel, vars hörnkoordinater äro kända, beräknas, varvid determinantformen för ytan användes. Begreppet determinant införes sålunda. Slutligen behandlas linjära ekvationssystem av två ekvationer i två obekanta, varvid lösningens geometriska betydelse särskilt framhålles. I kapitel IV följer en utförlig behandling av andragradspolynomet. Genom tabellvärden konstrueras enkla kurvor. I anslutning till bestämningen av funktionens nollställen genomgås andragradsekvationen. (Denna har dock inledningsvis behandlats i mellanskolan.) Kapitel V innehåller de vanligaste lagarna för räkning med olikheter.

Kapitel VI, som utförligt behandlar talbegreppet, och visar med vilken nödvändighet detta talbegrepp undan för undan måste utvidgas (permanensprincipen), är kanske bokens mest intressanta parti. De irrationella talen införas strängt logiskt, varvid definitionen genom dubbla talföljder användes. (En definition, som går tillbaka till Weierstrass.) Det poängteras kraftigt, att endast de rationella talen kunna anses åskadligt givna. Begreppet talföljd införes först genom exempel och behandlas senare mera allmänt. Särskild vikt lägges, som sig bör, vid de monotona talföljderna. Begreppet gränsvärde definieras till en början endast för det fall att ett rationellt gränsvärde förefinnes. Två talföljder $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ och $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ kallas approximationsföljder, om de uppfylla villkoren $A_{n-1} \geqq A_n$, $a_{n-1} \leqq a_n$, $A_n \geqq a_n$ för alla n, $A_n - a_n$ mindre än varje uppgivet tal ε, om n väljes tillräckligt stort. Till varje rationellt tal kan ett sådant par av approximationsföljder angivas, nämligen följderna av de uppåt och nedåt avkortade decimalbråksutvecklingarna. Omvänt är talet då entydigt definierat genom dessa talföljder, och man kan se dessa och ej talet självt som det primärt givna. Genom exempel visas, att approximationsföljder utan gränsvärde existera. Dessa tillordnas då ett gränsvärde (en symbol), som benämnes irrationellt tal. Det visas också, hur man kan räkna med dessa gränsvärden, d. v. s. med approximationsföljderna.

Innehållet i kapitel VI kan ju tyckas vara alltför djupliggande för lärjungarna i första gymnasieklassen, vilket också författarna medge. I företalet säga de nämligen: »Kap. VI indeholder noget Stof, der ikke er helt let. En selvstændig Gengivelse heraf vil man næppe kræve av Elever i 1. G., men vi mener, at det är muligt at fremdrage for Eleverne de Problemer, der melder sig, og forklare de Metoder, man benytter for att klare Sagen. Ved en senere Repetition, eventuelt i 3. G. vil dette Afsnit sikkert kunne læses med stort Udbytte.»

I detta vill man gärna instämma. Detta klara och korrekta innehåll är i varje fall mindre svårbegripligt än den dunkla framställning av de irrationella talen, som oftast förekommer i de svenska läroböckerna.

I kapitel VII kan nu den binomiska ekvationen $x^n = a$ lösas för *godtyckligt reellt* positivt tal a. Därmed äro n-te rötterna införda. I kapitel VIII behandlas potenser med *godtyckliga reella* exponenter, varvid potenser med irrationella exponenter erhållas genom en väl genomförd gränsövergång. Exponentialfunktionen studeras grafiskt genom tabellvärden. I kapitel IX införas logaritmer. Därefter följer i kapitel X några geometriska förberedelser till trigonometrien, som behandlas i det följande kapitlet. De trigonometriska funktionerna definieras direkt i enhetscirkeln, varvid dock endast vinklar $< 180^\circ$ betraktas. Egentligen medtages endast så mycket av trigonometrien, som behövs för solvering av trianglar. I samband härmed genomgås planimetri, där oftast trigonometriska bevis med fördel användas. I de återstående kapitlen behandlas punktsystem, kongruens, likbelägna punktsystem och figurer, geometriska orter, geometriska konstruktioner, harmoniska cirkeln och slutligen vektorräkning.

Del II, som är avsedd för andra gymnasieklassen, börjar med en repetition och utförligare behandling av talföljderna. — Lägg märke till det avseende, man fäster vid dessa —. Här införas sådana begrepp som uppåt och nedåt begränsad och hopningspunkt. Det bevisas, att en begränsad talföljd åtminstone har en hopningspunkt och att nödvändiga och tillräckliga villkoret för konvergens är, att den endast har en hopningspunkt. De vanliga lagarna för räkning med talföljder genomgås. Därefter föres man åter in på funktionsbegreppet. Gränsvärde för funktion definieras, varvid betonas, att man måste tänka sig argumentet x genomlöpa en talföljd. Definitionen lyder alltså: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, om för varje talföljd $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ med $\lim x_n = x_0$ den tillhörande talföljden $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n), \ldots$ har gränsvärdet A. I kapitel II behandlas kontinuerliga funktioner. En funktion $f(x)$ säges vara kontinuerlig i punkten x_0, om $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. De vanliga kriterierna för kontinuitet genomgås. Följande satser om kontinuerliga funktioner bevisas bl. a.: — En kontinuerlig funktion $f(x)$ i ett slutet intervall (a, b) är begränsad i (a, b); det existerar en övre och en undre gräns för $f(x)$ i (a, b); har $f(x)$ olika tecken i punkterna a och b, så försvinner den i en punkt mellan a och b; antager $f(x)$ olika värden i a och b, så antar den varje värde, som ligger mellan dessa nyssnämnda värden. — Utförligt behandlas den inversa funktionen till en ständigt växande kontinuerlig funktion i ett intervall. Det visas fullt strängt, att den motsvarande inversa funktionen också är ständigt växande och kontinuerlig i tillhörande intervall.

I kapitel III införes begreppet derivata för kontinuerlig funktion. Återigen framhålles, att man rör sig med talföljder. Man utgår från en godtycklig talföljd $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ med $\lim x_n = x_0$ ($x_n \neq x_0$ för alla n) och bildar de nya talföljderna

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$$

$$x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots x_n - x_0, \ldots$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2 - x_0}, \ldots \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}, \ldots$$

Den sistnämnda talföljden är definierad, då $x_n \neq x_0$. Om den har ett bestämt gränsvärde A, som är gemensamt för alla så bildade talföljder ($x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ godtycklig med $\lim x_n = x_0$) säges $f(x)$ ha derivatan $f'(x_0) = A$ i punkten x_0.

Efter genomgången av de vanliga deriveringsreglerna, följa allmänna satser om deriverbara funktioner. Sambandet mellan derivatans tecken och funktionens tillväxtförhållande klarlägges, Rolles sats och Lagranges medelvärdessats bevisas. Funktionens extremvärden behandlas utförligt. Även differentialbegreppet införes. Ett specialfall av L'Hospitals andra regel behandlas och regeln användes för att beräkna gränsvärdet för enkla obestämda uttryck. Ett utförligt kapitel ägnas åt kurvkonstruktion. Därefter följer i kapitel V en fullständig behandling av de trigonometriska funktionerna, varvid radianmått införes. Därvid förutsättes naturligtvis, att cirkelbågens längd är en definierad storhet, men författarna ha redan tidigare antytt, att cirkeln betraktas som gränsfall för en månghörning, och att längre fram (i samband med integralkalkylen) cirkelns omkrets kommer att definieras som ett bestämt gränsvärde. Här bevisas nu additionsformlerna för de trigonometriska funktionerna, och detta sker med hjälp av projektionssatsen, som först genomgås. Funktionernas derivator bestämmas genom en noggrann överläggning. Derivatan i origo, $\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x}$ erhålles genom jämförelse av cirkelsektorns yta med två lämpligt valda triangelytor.

I kapitel V är man redan framme vid integralbegreppet. Först behandlas den obestämda integralen $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$. Den bestämda integralen $\int_a^x f(x)\,dx$ införes som den entydigt bestämda funktion $F(x)$ i funktionsmängden $\varphi(x) + C$, som uppfyller villkoret $F(a) = 0$. Därefter visas emellertid, att den bestämda integralen av en kontinuerlig funktion kan uppfattas som det gemensamma gränsvärdet för en översumma och en undersumma. Det bevisas, att detta gränsvärde är en kontinuerlig funktion av den övre gränsen i integrationsintervallet, och att denna funktion har integranden till derivata. Därmed förbindas alltså de bada definitionerna. Med användning av integralkalkyl beräknas ytor, kurvbågars längd och volymer. En särskild paragraf ägnas åt cirkeln, där de tidigare använda formlerna för cirkelns yta och omkrets förklaras och bevisas. Därmed äro dessa tidigare luckor i framställningen utfyllda.

I kapitel VII behandlas logaritmfunktionen. Här användes den trevliga definitionen av den naturliga logaritmen som bestämda integralen $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Därav följer ju då omedelbart på grund av den bestämda integralens egenskaper, att $\log x$ är kontinuerlig och har en bestämd derivata för $x > 0$. Utan svårighet bevisas de vanliga räknelagarna för logaritmen. Genom denna definition understrykes också, att en funktion är lika väldefinierad genom en bestämd integral som genom tidigare använda enkla räkneoperationer. Exponentialfunktionen erhålles nu omedelbart som den inversa funktionen till logaritmfunktionen.

Kapitel VIII är en tillämpning av derivatan och vektorräkningen på rörelseläran. Sista delen av boken är ägnad åt analytisk geometri. Cirkeln behandlas utförligare och de övriga andragradskurvorna ellipsen, hyperbeln och parabeln studeras ingående.

Del III är avsedd för tredje gymnasieklassen. Innehållet i denna del kan jag referera mera summariskt. Den börjar med ett fristående kapitel om polära koordinater. Därefter behandlas en del frågor inom talteorien, såsom delbarhet, frågan om primtalens antal (att antalet är oändligt bevisas) m. m. Följande kapitel upptar permutationer, kombinationer och binomialteoremet. Induktionsbeviset exemplifieras vid summation av heltalskvadrater. Ändliga och oändliga serier, såväl aritmetiska, geometriska som allmänna, studeras, varvid konvergensundersökningar spela stor roll. I samband härmed behandlas sammansatt ränta. I kapitel VII definieras de komplexa talen, och räknelagarna för dessa bevisas. Särskild vikt lägges vid talens geometriska betydelse, och även vektorframställningen införes. Moivres formel härledes och användes för att lösa den binomiska ekvationen. Andragradsekvationen behandlas särskilt.

Kapitel VIII ägnas åt allmänna polynom och algebraiska ekvationer. Det sista kapitlet (70 sidor) behandlar stereometrien synnerligen utförligt, vilket är möjligt med de hjälpmedel, som nu stå till buds. Särskilt angelägna äro författarna om, att elevernas åskådliga tänkande uppövas. Över 150 tydliga figurer äro till stor hjälp för förståelsen av satserna. Här behandlas även grunderna av den sfariska geometrien och sfäriska trigonometrien samt kägelsnitten.

Av det ovanstående sammandraget, som jag stundom gjort detaljerat för att visa, hur strängt undersökningarna äro genomförda, men som ingalunda gör arbetet full rättvisa, torde dock framgå, att boken måste hänföra varje matematiker. Jag anser mig icke kompetent att bedöma detta verks pedagogiska förtjänster och fel, men om en kristallklar framställning räknas som god pedagogik, fyller den mycket höga anspråk även i detta avseende. Författarna ha givetvis haft förebilder. Mycket av stoffet torde vara direkt hämtat ur Bohr og Mollerup, Matematisk Analyse (hektograferad upplaga). Kanske även de la Vallée Poussin ibland fått stå mönster. Med så höga förebilder måste ju något förstklassigt åstadkommas.

Det bör betonas, att boken är *en lärobok* och *en lärobok i matematik*. För att exemplifiera satserna förekomma exempel mycket rikligt, dock i regel försedda med lösningar. I de svenska skolorna finnes ingen som helst motsvarighet till detta verk. Vi ha läroböcker i många grenar av matematiken — algebra, funktionsteori, trigonometri och vad de nu allt heta —. Men det finnes ingen lärobok, som sammanför alla dessa områden, vilket dock åtminstone på lägstadiet vore önskvärt, så som de algebraiska, funktionsteoretiska och geometriska metoderna gripa in i varandra. En annan sak är, att våra skolböcker tendera att bli rena exempelsamlingar, vilket sammanhänger med den princip, enligt vilken matematikundervisningen bedrives i våra skolor. Till detta återkommer jag senare.

Att jag rekommenderar boken för självstudier, behöver jag väl ej särskilt framhålla. Den bör bli en värdefull tillgång för det självständiga arbetet i matematik. En del smärre fel och oformligheter förekomma, vilka dock lätt observeras. Det danska språket bör ej bereda någon svårighet. Endast i sällsynta fall skiljer sig den danska terminologien från den svenska.

Man kan fråga sig: Hur är det möjligt, att man i det treåriga danska gymnasiet kan medhinna en sådan jättekurs? Tyvärr är jag ej så insatt i de danska skolförhållandena att jag kan ge ett uttömmande svar på den frågan.[1] Jag vill bara peka på ett par förhållanden, som säkerligen bidraga till det avancerade matematikstudiet i vårt södra grannland. För det första ha eleverna redan från mellanskolan en mycket god grund att bygga på. För det andra ägnar man i gymnasiet mindre tid åt problemlösning och mera tid åt rena matematiska studier. Man kan fråga sig, om inte den långt drivna problemlösningen i våra gymnasier under ledning av skickliga pedagoger med väl systematiserade metoder mera utbildar en räkneteknik än befordrar det matematiska tänkandet. En sådan räkneteknik är naturligtvis av stor betydelse, men den kan lätt överskattas. Detta räknande skapar kanske också den vanliga föreställningen bland folk, som lämnat skolan och sedan ej sysslat med matematik, att denna huvudsakligen består i ett hokuspokustrollande med formler. Jag ifrågasätter alltså, om ej ett djupare inträngande i matematiken även i det svenska gymnasiet skulle vara möjlig, om mindre tid ägnades åt problemlösningen. I gengäld skulle

[1] Antalet veckotimmar i matematik äro resp. 4, 5, 6 och 6 i mellanskolans fyra klasser och 6 i varje klass å den matematisk-naturvetenskapliga linjen.

mera tid kunna ägnas åt avancerad problemlösning vid universitet och högskolor, då större möjlighet till variation förefunnes.

Hur värdefullt skulle det icke vara, att viktiga grundbegrepp inom analysen, förbereddes och inövades i skolan, där läraren har tillfälle att vägleda på ett helt annat sätt än vid universitetet. Därigenom skulle skolan bidraga till att överbygga den klyfta, som alltid skilt universitetsstudier och skolstudier åt, och som betydligt vidgades genom den sista skolreformen. I Danmark är man tydligen inne på en sådan väg. Det kan vara skäl att erinra om detta, då man i Sverige även från lärarhåll begär, att universitetsstudierna skola anpassas efter skolans nuvarande behov och mera syssla med elementarmatematik. Ett motsatt krav, att skolan anpassar sig efter universitetens och högskolornas behov, kan väl ej anses ohemult. Ett annat önskemål, som också framföres från lärarhåll, att kurser i projektiv geometri skulle ingå i fil. kand.- och fil. ämbetsexamen, måste ju anses mycket berättigat och skulle kanske kunna tillgodoses, om studenten inom elementärare områden hade större förkunskaper att bygga på, då han börjar sina högre matematikstudier.

Vad stava vi i allmänhet fel på?

Ett försök till frekvensundersökning.

Av Sten Lagerström.

Rättskrivningens problem äro alltid aktuella och brännande i folkskolan. Vår ortografi erbjuder så stora svårigheter, att vi i skolan tvingas sysselsätta oss till den grad med denna sida av modersmålsundervisningen, att övriga grenar, som också höra