Om rötter, potenser och logaritmer i andra realringen och tredje latinringen.

Av Henrik Oldenburg.

Enligt gymnasiets kursplan skall av läran om potenser medtagas huvudsakligen vad som är behövligt för vinnande av en säker insikt i läran om logaritmer. Alla torde vara ense därom, att det är synnerligen önskvärt att så snabbt som möjligt komma fram till läran om logaritmer för att kunna använda dessa vid numeriska räkningar. Men dessa utföras i regel med approximativa värden, och för detta ändamål behöver man därför ej den exakta logaritmfunktionen; det kan vara nog att använda en funktion, som sluter sig tillräckligt nära den exakta. Efterföljande framställning är ett försök att införa logaritmer utan att känna mera om potenser än definition och räknelagar för potenser med hela, positiva exponenter samt definition på potens med positiv, bruten exponent.

Radikaler.

För att lösa ekv.:

$$x^n = a \qquad (n \text{ helt, pos. tal})$$

konstruerar man kurvan

$$y = x^n .$$

Giv y värdet a och konstruera motsvarande värde på x; detta är den sökta roten till ekvationen.

Studiet av funktionskurvan ger följande

Teorem. *Ekvationen $x^n = a$, där a är positiv, har en och blott en positiv rot; är n jämnt, har den dessutom en negativ rot, symmetrisk med den positiva. — Är a noll, har ekvationen en och blott en rot, nämligen noll. — Är a negativ, så har ekvationen, om n är udda, ingen positiv rot samt en och blott en negativ; om n är jämnt ingen rot.*

Definition. *Varje rot till ekvationen $x^n = a$ kallas en n:terot ur a.*

Är a positiv, så finnes enligt det föregående en enda positiv n:*te* rot ur a ; denna tecknas med symbolen

$$\sqrt[n]{a} \, ,$$

och man har således

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \, .$$

Räknelagar.

I. $$\sqrt[n]{a^n} = a \quad , \qquad \text{om } a \text{ är positiv}$$

II. $$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$$

III. $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

IV. $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

V. $$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p} \, .$$

Anm. I det följande användes endast I, II och III.

Logaritmer.

Betrakta talföljden

$$1 \, , a \, , a^2 \, . \; . \; . \; . \, , a^n \, . \; . \; . \; .$$

Vill man multiplicera två av talföljdens tal, så har man blott att addera exponenterna för att erhålla produktens exponent och således produkten själv. Multiplikation av tal, skrivna i form av potenser, reducerar sig således till en addition av exponenterna. För att detta skall kunna tillämpas även på det första talet i följden, så inför jag symbolen a^0 och definierar den genom ekvationen

$$a^0 = 1 \, .$$

Betrakta talföljden

$$1\,,\sqrt[n]{a}\,,\sqrt[n]{a^2}\,,\ldots,\sqrt[n]{a^m}\,,\ldots,$$

där a är ett positivt tal större än 1.

Man ser genast, att, om man vill multiplicera två tal i följden, så kommer det an på att addera motsvarande exponenter på liknande sätt som nyss. Med anledning härav skall jag i det följande studera egenskaperna hos talföljden i fråga.

Om

$$m = nk\,,$$

där k är ett helt, positivt tal, så är

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k\,.$$

Vissa av talföljdens tal äro således lika med potenser av a. Det är bekvämt att skriva alla talen i form av potenser, och jag inför därför symbolen $a^{\frac{m}{n}}$ och definierar densamma genom ekvationen

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

Härvid är att märka, att, om $\frac{m}{n}$ är lika med ett helt tal k, så är

$$a^{\frac{m}{n}} = a^k\,,$$

ty då är

$$\sqrt[n]{a^m} = a^k\,,$$

såsom nyss är visat.

Med användande af denna beteckning kan jag skriva talföljdens tal sålunda

$$a^{\frac{0}{n}}\,,a^{\frac{1}{n}}\,,a^{\frac{2}{n}}\,,\ldots,a^{\frac{m}{n}}\,,\ldots$$

Enligt förutsättning är $a > 1$; alltså *växa talen i följden*, vilket synes, om man skriver

$$1\,,\sqrt[n]{a}\,,\left(\sqrt[n]{a}\right)^2,\ldots,\left(\sqrt[n]{a}\right)^m,\ldots$$

Jag skall nu visa, *att, om* ε *är ett positivt tal och* n *ett helt pos. tal* ≥ 2, *så är*

$$1+n\,\varepsilon<(1+\varepsilon)^n .$$

Jag förutsätter, att olikheten gäller för $n=p$, alltså, att

$$1+p\,\varepsilon<(1+\varepsilon)^p .$$

Härav följer

$$(1+p\,\varepsilon)\;(1+\varepsilon)<(1+\varepsilon)^{p+1}$$

således

$$1+(p+1)\,\varepsilon+p\,\varepsilon^2<(1+\varepsilon)^{p+1}$$

och följaktligen

$$1+(p+1)\,\varepsilon<(1+\varepsilon)^{p+1} .$$

Om olikheten gäller för $n=p$, gäller den således för $n=p+1$.

Man har

$$1+2\,\varepsilon+\varepsilon^2=(1+\varepsilon)^2 ,$$

alltså

$$1+2\,\varepsilon<(1+\varepsilon)^2 .$$

Olikheten gäller således för $n=2$; alltså för $n=3$; o. s. v.

Låt a vara ett positivt tal, större än 1. Låt ε vara ett godtyckligt, positivt tal, hur litet som helst. Då kan man alltid bestämma ett helt pos. tal n så, att

$$a-1<n\,\varepsilon$$

och således

$$a<1+n\,\varepsilon ,$$

blott man ger n ett tillräckligt stort värde. Alltså kan man alltid välja n så, att

$$a<(1+\varepsilon)^n ,$$

ty

$$1+n\,\varepsilon<(1+\varepsilon)^n ,$$

och således så, att

$$\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon .$$

Men $a > 1$, således $\sqrt[n]{a} > 1$. Alltså kan man, hur litet ε än är, välja ett så stort värde på n, att

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon ,$$

d. v. s. *man kan genom att ge n ett tillräckligt stort värde åstadkomma, att $\sqrt[n]{a}$ skiljer sig från 1 hur litet man behagar.*

Jag återgår till den nyss betraktade talföljden. Av det sagda följer, att *densammas tal kunna fås att antaga huru stora värden som helst,* blott man ger m tillräckligt stora värden, samt *att det andra talet i ordningen kan fås att skilja sig från 1 huru litet man behagar genom att ge n ett tillräckligt stort värde.*

Jag undersöker skillnaden mellan två andra på varandra följande tal i följden. Man har

$$\sqrt[n]{a^{m+1}} - \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}\left(\sqrt[n]{a} - 1\right).$$

Då nu $\sqrt[n]{a^m}$ har ett bestämt värde, och $\sqrt[n]{a} - 1$ skiljer sig godtyckligt litet från noll, blott n har ett tillräckligt stort värde, så *skiljer sig*

$$a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}}$$

godtyckligt litet från noll, d. v. s. *talen i följden ligga huru tätt man behagar, blott n har ett tillräckligt stort värde.* Jag förutsätter i det följande, att n har ett sådant värde.

Låt x vara ett godtyckligt positivt tal, större än 1. Då kan man alltid välja ett sådant värde på m, att

$$a^{\frac{m}{n}} \leqq x < a^{\frac{m+1}{n}} .$$

Enligt det föregående är det då klart, att, om x ej tillhör talföljden, *kan x dock med tillhjälp av densammas tal bestämmas approximativt med vilken noggrannhet som helst.*

Definition I. *Om $x \geqq 1$ och*

$$a^{\frac{m}{n}} \leqq x < a^{\frac{m+1}{n}} ,$$

så kallar jag bråket $\frac{m}{n}$ för logaritmen för x i det system, vars *bas är a , eller a-logaritmen för x , och tecknar den med symbolen* $\log_a x$.

Om x_1 och x_2 äro två tal större än 1, så har man (bevis, se beviset till räknelag I första fallet)

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 \cdot x_2) ,$$

och härav erhålles för att beräkna logaritmen för ett bråk $\frac{x_1}{x_2} > 1$ (bevis, se räknelag II)

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 .$$

Är $\frac{x_1}{x_2} < 1$, så saknar vänstra ledet i denna ekvation betydelse. Man har i detta fall

$$\log_a \frac{x_2}{x_1} = \log_a x_2 - \log_a x_1 = -(\log_a x_1 - \log_a x_2) .$$

Om man vill definiera $\log_a x$, då $x < 1$, och vill, att $\log_a \frac{x_1}{x_2}$ skall beräknas på samma sätt, då $\frac{x_1}{x_2} < 1$, som, då $\frac{x_1}{x_2} > 1$, så måste således

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = -\log_a \frac{x_2}{x_1} ,$$

då $\frac{x_1}{x_2} < 1$.

Med anledning härav uppställer jag följande

Definition II. *Om x är ett positivt tal mindre än 1, så definierar jag detsammas a-logaritm genom ekvationen*

$$\log_a x = -\log_a \frac{1}{x} .$$

Jag fäster uppmärksamheten på *att härigenom är* $\log_a x$ *definierad endast för positiva värden på x.*

Av definitionerna följer, att

$$\log_a x > 0 \text{ , om } x > 1 \text{ ;}$$

$$\log_a x = 0 \text{ , om } x = 1 \text{ ;}$$

$$\log_a x < 0 \text{ , om } x < 1 \text{ .}$$

Är $x > 1$, så är det klart, *att* $log_a x$ *växer, då* x *växer; detta äger även rum för* $x < 1$, ty då är

$$log_a x = -log_a \frac{1}{x},$$

och då x växer, så avtager $\frac{1}{x}$, alltså också $log_a \frac{1}{x}$, och således växer $-log_a \frac{1}{x}$.

Sätt

$$y = log_a x.$$

Mot varje positivt värde på x svarar ett enda bestämt värde på y; *y är således en funktion av x, om* $x > 0$. Som nyss är visat, *växer y, då x växer.* Om

$x = 1$, är $y = 0$

$x = a$, är $y = 1$

$x = a^2$, är $y = 2$

. . . .

$x = a^r$, är $y = r$ (r helt, pos. tal)

. . . .

Om

$x = \frac{1}{a}$, är $y = -log_a a = -1$

$x = \frac{1}{a^2}$, är $y = -log_a a_2 = -2$

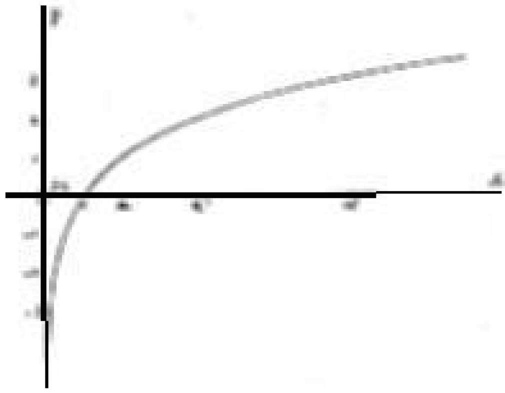
. . . .

$x = \frac{1}{a^r}$, är $y = -log_a a^r = -r$ (r helt, pos.)

. . . .

Följande figur visar utseendet av funktionskurvan. *Anm.* Egentligen utgöres kurvan av en följd av mycket korta, med x-axelns parallella sträckor.

Av figuren synes, att, om



$$1 < x < a \quad , \text{ så är } 0 < y < 1 \; ;$$
$$a < x < a^2 \quad , \text{ så är } 1 < y < 2 \; ;$$

$$a^k < x < a^{k+1} , \text{ så är } k < y < k+1 \; ; \; (k \text{ helt pos.})$$

---

och om

$$\frac{1}{a} < x < 1 \quad , \text{ så är } -1 < y < 0 \; ;$$
$$\frac{1}{a^2} < x < \frac{1}{a} \quad , \text{ så är } -2 < y < -1 \; ;$$

$$\frac{1}{a^k} < x < \frac{1}{a^{k-1}} , \text{ så är } -k < y < -k+1 \; , \; (k \text{ h. p.})$$

Om

$$log_a \, x = +k + \mu \; ,$$

där k är ett helt, positivt tal eller noll och

$$0 < \mu < 1 \; ,$$

så kallas $+k$ logaritmens *karakteristika*, μ dess *mantissa*.

Det är då klart av det föregående, att, om

$1 \leq x < a$, så är karakteristikan $= 0$;

$a \leq x < a^2$, så är karakteristikan $= 1$;

. . . .

$a^k \leq x < a^{k+1}$, så är karakteristikan $= k$;

. . . .

och om

$\frac{1}{a} \leq x < 1$, så är karakteristikan $= -1$;

$\frac{1}{a^2} \leq x < \frac{1}{a}$, så är karakteristikan $= -2$;

. . . .

$\frac{1}{a^k} \leq y < \frac{1}{a^{k-1}}$, så är karakteristikan $= -k$;

. . . .

Räknelagar.

I. $log_a (x_1 \,.\, x_2) = log_a x_1 + log_a x_2$.

Tre fall äro att betrakta.

1° $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$. Då kan man alltid bestämma två hela positiva tal m_1 och m_2 sådana, att man med vilken noggrannhet som helst kan sätta

$$x_1 = a^{\frac{m_1}{n}} \,,\; x_2 = a^{\frac{m_2}{n}} \,.$$

Alltså är

$$x_1 \,.\, x_2 = a^{\frac{m_1}{n}} \,.\, a^{\frac{m_2}{n}} \,.$$

Men

$$a^{\frac{m_1}{n}} \,.\, a^{\frac{m_2}{n}} = \sqrt[n]{a^{m_1}} \,.\, \sqrt[n]{a^{m_2}} = \sqrt[n]{a^{m_1+m_2}} = a^{\frac{m_1+m_2}{n}} \,.$$

Man har således

$$log_a x_1 = \frac{m_1}{n} \,,\; log_a x_2 = \frac{m_2}{n}$$

och

$$\log_a (x_1\, x_2) = \frac{m_1 + m_2}{n}\,.$$

2° $x_1 \geq 1$, $x_2 < 1$. Sätt

$$x_1 = a^{\frac{m_1}{n}}\,.$$

$x_2 < 1$, alltså är $\frac{1}{x_2} > 1$; man kan alltså sätta

$$\frac{1}{x_2} = a^{\frac{m_2}{n}}$$

och således

$$x_2 = \frac{1}{a^{\frac{m_2}{n}}}\,.$$

Härav

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{a^{\frac{m_1}{n}}}{a^{\frac{m_2}{n}}}$$

Om

$$\frac{m_1}{n} \geq \frac{m_2}{n}\,,$$

så är

$$x_1\, x_2 = \frac{a^{\frac{m_1}{n}}}{a^{\frac{m_2}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{m_1}}}{\sqrt[n]{a^{m_2}}} = \sqrt[n]{\frac{a^{m_1}}{a^{m_2}}} = \sqrt[n]{a^{m_1 - m_2}} = a^{\frac{m_1 - m_2}{n}}\,.$$

Om

$$\frac{m_1}{n} < \frac{m_2}{n}\,,$$

så är

$$\frac{1}{x_1\, x_2} = \frac{a^{\frac{m_2}{n}}}{a^{\frac{m_1}{n}}} = a^{\frac{m_2 - m_1}{n}}\,.$$

Man har alltså

$$log_a\, x_1 = \frac{m_1}{n}$$

och

$$log_a\, x_2 = -log_a \frac{1}{x_2} = -\frac{m_2}{n}\,.$$

Vidare, om

$$\frac{m_1}{n} \geq \frac{m_2}{n}\,,$$

så är

$$log_a\,(x_1\, x_2) = \frac{m_1 - m_2}{n}\,;$$

och om

$$\frac{m_1}{n} < \frac{m_2}{n}\,,$$

så är

$$log_a\,(x_1\, x_2) = -log_a \frac{1}{x_1\, x_2} = -\frac{m_2 - m_1}{n} = \frac{m_1 - m_2}{n}\,.$$

3° $x_1 < 1$, $x_2 < 1$. Alltså är $\frac{1}{x_1} > 1$ och $\frac{1}{x_2} > 1$.

Sätt

$$\frac{1}{x_1} = a^{\frac{m_1}{n}} \text{ och } \frac{1}{x_2} = a^{\frac{m_2}{n}}\,.$$

Härav

$$\frac{1}{x_1\, x_2} = a^{\frac{m_1}{n}} \,.\, a^{\frac{m_2}{n}} = a^{\frac{m_1 + m_2}{n}}\,.$$

Man har alltså

$$log_a\, x_1 = -log_a \frac{1}{x_1} = -\frac{m_1}{n}$$

och

$$log_a\, x_2 = -log_a \frac{1}{x_2} = -\frac{m_2}{n}\,,$$

samt

$$log_a (x_1 x_2) = -log_a \frac{1}{x_1 x_2} = -\frac{m_1 + m_2}{a} .$$

Man kan nu lätt övertyga sig om att *räknelagen gäller för flere faktorer.*

II. $log_a \frac{x_1}{x_2} = log_a x_1 - log_a x_2 .$

Sätt

$$\frac{x_1}{x_2} = q .$$

Då är

$$x_1 = q \cdot x_2 .$$

Alltså

$$log_a x_1 = log_a q + log_a x_2 ,$$

varav

$$log_a q = log_a x_1 - log_a x_2 .$$

III. $log_a x^p = p \cdot log_a x$ (p ett helt, pos. tal).

Ty

$$x^p = x \cdot x \ldots x \text{ (p st. faktorer).}$$

Således

$$log_a x^p = log_a x + log_a x + \ldots + log_a x = p \cdot log_a x .$$

IV. $log \sqrt[r]{x} = \frac{1}{r} log\, x .$

Ty sätt

$$\sqrt[r]{x} = t \quad \therefore \quad x = t^r .$$

Då är

$$log_a x = r\, log_a t ,$$

alltså

$$log_a t = \frac{1}{r} log_a x .$$

Av det föregående framgår, att det är bekvämt att använda logaritmer vid numeriska räkningar. Därvid användes uteslutande det system, *vars bas är 10*. Detta kallas det *vanliga* eller *briggska* och $\log_{10} x$ tecknas kortare $\log x$.

Enligt det föregående är då, om

$$1 \leq x < 10 \quad , \text{ karakteristikan} = 0 \; ;$$
$$10 \leq x < 10^2 \quad , \text{ karakteristikan} = 1 \; ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$10^k \leq x < 10^{k+1} , \text{ karakteristikan} = k \; ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

och om

$$\frac{1}{10} \leq x < 1 \quad , \text{ karakteristikan} = -1 \; ;$$
$$\frac{1}{10^2} \leq x < \frac{1}{10} \quad , \text{ karakteristikan} = -2 \; ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{10^k} \leq x < \frac{1}{10^{k-1}} , \text{ karakteristikan} = -k \; ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Om x är ett decimaltal, framgår härav följande *regler för att bestämma karakteristikan:*

I. *Om talet har p st. heltalssiffror, så är karakteristikan* $= p-1$.

II. *Om p st. nollor, heltalsnollan inräknad, föregår de gällande siffrorna, så är karakteristikan* $= -p$.

Om man flyttar kommat i ett decimaltal p steg åt höger eller vänster, så multipliceras eller divideras talet med 10^p. *Detta inverkar ej på logaritmens mantissa*, ty

$$\log (x \,.\, 10^p) = \log x + \log 10^p = \log x + p = \pm k + \mu + p$$

och

$$\log \frac{x}{10^p} = \log x - \log 10^p = \log x - p = \pm k + \mu - p \,.$$

Om man nu har en tabell, som upptager *mantissorna* till de *vanliga* logaritmerna för alla t. ex. 3-siffriga hela tal, så inses av det sagda, att *man kan beräkna de vanliga logaritmerna för så väl dessa tal som även för alla tal, som erhållas genom att flytta decimalkommat i det tresiffriga talet åt höger eller vänster ett godtyckligt antal steg.*

Ett bidrag till metodiken för översättningen från främmande språk.

Av **Hilmer Gillqvist.**

Att få in mer textläsning i skolorna är en livsfråga för språkundervisningen. Ett av de viktigaste medlen för att möjliggöra en mer omfångsrik textläsning är fantasiens uppöfvande. Jag har otaliga gånger gjort den erfarenheten, att pojkar i femman, sexan och på gymnasiet ha mycket svårt att ur sammanhanget, ur situationen ana ett obekant ords betydelse samt i och med det sammanhanget. Jag håller mig till tyskan. Vi läste om en pojke, som gick på Bagdads gator, vilkas skönhet försatte honom i hänförelse. Plötsligen samla sig människor omkring honom, det blir en folksamling, som skrattar åt honom, och han tänker, att han kanske fått halm i håret. Då säger han till sig själv: »Auf! Säubre dich!» Den, som översatte, visste ej, vad »säubre» betyder. Jag frågar honom, vad han själv skulle göra i en sådan belägenhet; jag sporde, vilken rörelse han ovillkorligen skulle utföra. »Jag skulle klia mig i huvudet», blev svaret. Detta är betecknande. Jag hade lett pojkens fantasi, men, ovan att röra sig, griper den efter något obestämt, och det var omöjligt för pojken att tränga fram till den exakta, klara föreställning, det här gällde. Som motstycke ett annat exempel. Det var fråga om att en familjeförsörjare dött. De efterlevande hotades av fattigdom, och husgerådet måste säljas. Nu förekom ordet »Versteigerung». Eleven sade utan tillsägelse ordet »steigern» för sig själv, översatte det med »stegra» och gav nästa ögonblick glosan »auktion». Dessa båda exempel visa en dålig och en god fantasi. Den sist