Bidrag till proportionslärans metodik.

Af Birger Bellin.

Man har haft olika meningar i den frågan, huruvida det skall anses nödigt att i proportionsläran bevisa räknelagarna, då ju dessa äro ett lån ur aritmetiken. Men aritmetiken, såsom den börjas i skolans första klass, för att icke säga i småskolan, och fortgår till läroverkets högsta stadier, kan icke allt igenom hafva formen af en teori med allmängiltiga bevis och oföränderliga definitioner. Tydligen förhåller det sig så, att bevisen ske medelst typiska exempel och genom induktion. På skolans första stadier torde väl sällan lagen, att multiplikator och multiplikand i en produkt kunna byta plats, bevisas på annan väg än erfarenhetens, i det man genom räkning öfvertygar sig, att t. ex. $25 \times 13 = 13 \times 25$. När man så fortskrider till nya arter af tal, får nog ofta en regel, som befunnits vara riktig på det föregående området, *per analogiam* gälla äfven på det nya.. Icke torde väl de lärare vara många, som anse det förenligt med undervisningens och lärjungarnes intresse att upptaga tiden med abstrakta bevis för de förut bekanta räknelagarnes giltighet äfven beträffande de irrationela talen, när dessa inträda i undervisningen. Med ett ord: aritmetiken måste till följd af sin plats vid undervisningen behandlas ur en i hufvudsak så pedagogisk synpunkt, att dess egenskap af systematisk utveckling måste stå tillbaka. Det vetenskapliga ligger i lärostoffets gruppering, i den följd, i hvilken de särskilda afdelningarna komma, ehuru lärjungarne under själfva undervisningens gång icke kunna fatta fulla betydelsen af sammanhanget inom ämnet.

Helt annorlunda förhåller det sig med elementargeometrien. Af ålder har man inom denna sökt att från fixerade definitioner gå framåt under form af distinkt formulerade satser, som stödjas på hvarandra medelst klara och fullständiga bevis. Att man därför icke behöft eller kunnat förbise det pedagogiska krafvet, är tydligt. Det har åtminstone från vissa håll påpekats, att Euklides är i eminent grad pedagogisk, och genom den under sista halfseklet använda åskådningsläran har man sökt lägga en erfarenhetsgrund för geometriundervisningen. Men den tendens, som stundom framträdt, att lossa på de formela banden vid denna undervisning, tyckes icke tilltala det svenska lynnet.

Denna olikhet i metoden mellan de båda elementära matematiska lärogrenarna har tydligen varit skälet till att man, då geometrien behöfver stödja sig på talläran, tvekat att omedelbart ur aritmetiken låna de begrepp och satser, som man behöfver. Det är nog under inverkan af dessa omständigheter, som *proportionsläran* vuxit fram. Ämnet, som här föreligger till behandling, är först att framhäfva betydelsen af talens användning inom geometrien eller i allmänhet vid behandlingen af konkreta storheter, hvilket bör kunna ske genom en skematisk framställning af mätningen; vidare en strängare utveckling af de aritmetiska lagar, som här behöfva användas, samt slutligen framställningen af några ur det föregående härledda satser rörande storheters förhållanden, hufvudsakligen de euklideiska satserna i femte boken.

Man har också trott sig kunna införa en sådan lärogren som proportionsläran i nu berörda omfattning, därför att vid den tid, då man inom geometrien bör öfvergå till storheters förhållanden, lärjungen kan anses hafva nått den mognad, att en abstrakt bevisföring är möjlig att använda. Åtminstone torde det icke vara lärobokens uppgift att föreskrifva en begränsning, som tillfälliga omständigheter i vissa fall kunna föranleda.

Emellertid är det väl ingen gren af skolmatematiken, som gjort lärare och lärjungar så många bekymmer som proportionsläran, och där läroboksförsöken framträdt i sådan talrikhet. Då Euklides' definition på proportionela storheter uppenbarligen var alltför artificiel och svårfattlig, hvarför man tidigt nog måste afstå från stödet af hans auktoritet, har det ena förslaget aflöst det andra. Här gör man nu den iakttagelsen, att hos en del läroboksförfattare röjt sig en tvekan att identifiera begreppet *förhållande* med det tal, efter hvilket man bedömer förhållandets storlek. Anledningen är antagligen den, att »förhållande» enligt språkbruket är någonting obestämdt, som kan närmare bestämmas på många sätt: förhållandet mellan 15 och 12 är t. ex., att talen äro olika, att 15 > 12, att 15 är $^5/_4$ af 12, att 12 är $^4/_5$ af 15 o. s. v. Men nu är det icke någonting ovanligt, att ett dylikt obestämdt uttryck i vetenskapen får en begränsad och fixerad betydelse. Så är äfven fallet med uttrycket *skillnad*. Skillnaden mellan 15 och 10 är, att 15 är större och 10 mindre, eller att 10 går upp i 15, men ej tvärtom, att 15 är ett udda, 10 ett jämnt tal, 15 har faktorn 3, men 10 icke o. s. v. Detta mångskiftande innehåll, som det dagliga talet kan lägga i uttrycket, har ej hindrat, att man i matematiken med skillnaden mellan 15 och 10 menar det tal, som återstår, då det senare drages från det förra, eller som, lagdt till det senare, ger det förra. Då lär det ej heller vara oriktigt eller obehöfligt att i matematiken fixera »förhållandet mellan två storheter» till att betyda det tal, som anger, huru stor den förra af dem är, då den mätes med den senare. Därigenom bli sådana benämningar som mätetal, rationstal eller rationsexponent öfverflödiga, och man undviker en omväg för tanken.

* * *

Bland de många läroboksförslagen på proportionslärans område har största tillslutning vunnits af Hultmans proportionslära, först offentliggjord i Stockholms Gymnasii program för 1871. A. E. Hellgren utgaf sedan i nära anslutning till denna proportionslära en bearbetning af Euklides' sjette bok, som snart kom till stor användning, så att den läsåret 1889—90 var antagen vid 19 högre allmänna läroverk och sedermera antagligen fått ännu större spridning. När nu denne författare äfven utgifvit en proportionslära*), är ju utsikt för handen, att den skall komma till allmännare användning. Det är därför af vikt att noga pröfva, huruvida den i sitt nuvarande framträdande

*) »Proportionslära af A. E. Hellgren» (förordet dateradt mars 1900). Stockholm. Fr. Skoglunds förlag.

förtjänar den väntade framgången. Några anmärkningar må anses som ett bidrag i den riktningen.

En liten invändning till att börja med mot att förf. definierar uttrycket *mått till en storhet* såsom en storhet, som går upp i den förra ett helt antal gånger eller m. a. o. som alikvot part. Anledningen till denna definition är naturligtvis, att man vill gifva en påtaglig mening åt bestämningen »kommensurabel». Men uttrycket »mått» har en vidsträcktare betydelse vid mätning, och det torde icke vara lämpligt att i proportionsläran införa denna inskränkning i dess betydelse. Om man mätt upp ett stycke, som befunnits vara 7,3 m., så tvekar man icke att säga, att man användt metern som mått.

Under rubriken *förberedande satser* anföras några såsom självklara angifna satser, förnämligast rörande produkter af ett tal och en storhet, äfvensom ur algebran lånade räknelagar för sådana. Att dessa senare satser upptagas utan bevis, strider mot min i det föregående utvecklade uppfattning; och betänkligt synes mig i alla händelser, att begreppet »produkt af ett tal och en storhet» införes utan all definition och utredning, särskildt som i den därpå följande hufvudafdelningen, *proportionslära*, den meddelade definitionen på »mätetal» och »förhållande» stöder sig på detta ej definierade begrepp.

»Mätetalet mellan 2 storheter af samma slag», säger förf., »är det tal, hvarmed den andra storheten i ordningen skall multipliceras för att blifva lika med den första». Här må i förbigående en anmärkning göras i språkligt afseende mot uttrycket »mätetalet mellan», bildadt i analogi med *förhållandet mellan*. Men så är enligt min mening, såsom förut blifvit utveckladt, hela benämningen *mätetal* obehöflig, i all synnerhet då man såsom förf. låter en ny definition följa af denna lydelse: »förhållandet mellan 2 gifna storheter af samma slag är alltså just mätetalet mellan dem».

När jag till sist öfvergår till förf:s definition på *omvänd proportionalitet*, så vill jag för tydlighets vinnande förutskicka några erinringar.

Erfarenheten ger oss talrika exempel på grupper af mot hvarandra svarande storheter, där 2 godtyckliga storheter i den ena gruppen hafva samma förhållande som de motsvarande storheterna i den andra, t. ex. mängderna och priserna af samma vara. Likaså träffa vi äfven på storhetsgrupper, som hafva det samband med hvarandra, att 2 godtyckliga storheter i den ena gruppen hafva samma förhållande som de motsvarande storheterna i den andra gruppen, när dessa tagas i omvänd ordning. Om man t. ex. har en mängd kroppar af samma absoluta vikt, så utgöra deras volymer och specifika vikter sådana grupper, så att volymen hos A förhåller sig till volymen hos B som B:s specifika vikt förhåller sig till A:s specifika vikt. Likaså äro i en triangel höjderna och motsvarande baser dylika storhetsgrupper. Man kan nu kalla storheterna i 2 grupper omvändt proportionela mot hvarandra, om de äro så förbundna, att den första förhåller sig till den andra i första gruppen som den andra till den första i andra gruppen, och den andra till den tredje i första gruppen som den tredje till den andra i andra gruppen o. s. v. Det är denna proportionalitet, som afses i Eukl. V, def. 20 samt prop. 21 och 23, och som hos Mårten Strömer fått den underliga benämningen »proportion utan ordning». Där beskrifves denna proportionalitet på följande sätt: om grupperna

$$a, b, c, d \text{ och } \alpha, \beta, \gamma, \delta$$

gäller att

$$a : b = \gamma : \delta, \quad b : c = \beta : \gamma, \quad c : d = \alpha : \beta.$$

När vi blott ordna om den senare gruppen, så att grupperna blifva

$$a, b, c, d \text{ och } \delta, \gamma, \beta, \alpha,$$

så synes omedelbart, att ofvan uppställda villkor just stämma öfverens med den nyss gifna definitionen på omvändt proportionela storheter. Af Eukl. V, prop. 23 framgår vidare, att det om de i definitionen nämnda storhetsgrupperna gäller, att hvilka storheter som helst i den ena måste hafva till hvarandra samma förhållande som de motsvarande i den andra gruppen, tagna i omvänd ordning.

Med anledning af Euklides' definition på reciproka figurer är hos Strömer upptagen en definition, som säger, att sidor i ett par figurer äro proportionela tvärt emot hvarandra, om de yttersta i analogien äro i den ena figuren och de mellersta i den andra. För att inse, att denna förbindelse mellan sidorna stämmer med den här gifna definitionen på omvändt proportionela storheter, måste man låta en sida i hvardera figuren höra till första gruppen och de båda återstående i samma ordning till den andra, vare sig man vill utmärka sidorna i ena gruppen såsom baser eller på annat sätt beteckna deras samhörighet.

Denna Strömers definition på linier, som äro proportionela tvärt emot hvarandra, hvilken väl lämpar sig för den inskränkta användning af omvänd proportionalitet, som förekommer i sjette boken, har nu förledt vår förf. att uppställa följande allmänna definition, som icke blott är bristfällig till sin form, utan helt och hållet oriktig till sitt innehåll: »Två storheter A och B sägas vara omvändt (inverse) proportionela med två andra storheter C och D, om $A : C = D : B$, d. v. s. om de båda första storheterna utgöra de yttersta och de båda andra storheterna de mellersta termerna i analogien».

Förf. lär väl icke kunna neka, att, enligt det först anförda exemplet, hos kroppar A och B af lika absolut vikt volymerna V_A och V_B äro omvändt prop. mot specifika vikterna S_A och S_B, hvilket enligt förf.s definition skulle innebära att $V_A : S_A = S_B : V_B$. Detta åter droge ju med sig den orimliga följden, att produkten af de 2 tal, som angifva 2 lika tunga kroppars volymer, skulle vara oföränderlig och lika med produkten af kropparnas spec. vikter, hvilken absolut vikt kropparna än hade.

Mina anmärkningar hafva, såsom synes, uteslutande riktats mot den grundläggande delen af förf:s proportionslära, och tydligen är det också vid behandlingen af denna del af ämnet, som hufvudsvårigheterna äro att finna.