Matematikundervisning med och utan regler.

Av

Gösta Setterberg.

Skall man vid matematikundervisningen redan från början härleda regler, som eleverna få tillämpa vid sina räkningar, eller skall man lära dem resonera sig fram utan regler?

Först må påpekas, att för frågans besvarande är det likgiltigt, om regeln uttryckes i en sats eller en matematisk formel. Det ena är lämpligare i ett fall, det andra i ett annat, men den saken har intet att göra med spörsmålet: bevisad regel eller ingen regel?

Vidare må framhållas, att den tredje utvägen, räkning med oförstådda regler, uteslutes såsom värdelös. Det behöver man, enligt vad jag funnit, stryka under, då man eljes riskerar, att en läsare, som ej delar ens mening, i sin iver att ge mothugg ej ger akt på ens ord utan beskyller en för att tala om oförstådda regler.

Enligt min erfarenhet är det vanskligt för en studerande av genomsnittsbegåvning att erhålla en tillräckligt säker grund, om han får börja ett nytt kapitel med att härleda och tillämpa regler. I det följande skall jag ge exempel på hur saken kan tagas utan regler, och därefter skall jag anföra de skäl, varför detta synes mig ge bättre behållning i fråga om matematisk mogenhet.

Innan dess må emellertid sägas ifrån, att kravet på reglernas uppskjutande eller slopande endast gäller ett mera elementärt stadium. Annat blir det t. ex. för differentialräknaren. Han måste ha uppnått en större förmåga att verkligen begripa abstrakta formler, eljes blir hans studium fruktlöst. Skall han t. ex. derivera ett bråk, får det ej vålla honom någon svårighet att skriva detta under formen

$$\frac{u}{v}$$

och alltjämt fasthålla, att så väl täljare som nämnare kan beteckna en funktion av x, som det bleve för långsläpigt att i räkningarna ständigt skriva ut jämte derivator. Den förkortade beteckningen innebär fastmer för honom en förenkling, i det att uttrycket blir lättare att överblicka. *På detta stadium* medför sålunda formeln en verklig lättnad. Gör den ej det, måste vi misstänka, att vederbörande för tidigt lämnat det elementära matematikstudiet.

Däremot torde regeln ej lämpa sig till utgångspunkt för den, som ej hunnit jämförelsevis långt i matematiken. Hur långt han bör ha hunnit, beror naturligtvis på individuell begåvning, men i stort sett är faran större, att vi lärare låta fresta oss att ge reglerna för tidigt än för sent.

Om vi däremot börja ett kapitel med att resonera oss fram utan regler, så finnas som sagt två möjligheter. *Antingen* formulera vi *aldrig* reglerna på det hävdvunna sättet, *eller också* göra vi det, *sedan en mängd exempel räknats utan regler*. Den förra utvägen kan vara att föredraga ibland, dels på ett mera elementärt stadium, dels när regelns natur tillåter det.

* * *

För att få ett exempel på det sagda tänka vi oss, att vi syssla med ekvationer med en obekant och hunnit så långt, att vi våga oss på ekvationer, där både bekanta och obekanta förekomma i vartdera membrum, t. ex.

$$5x - 7 = 3x + 9.$$

Då uppkasta vi frågan, vilketdera som är mer, om vi minska $5x$ med 7, eller om vi låta bli att minska med 7. Att det senare är 7 mer, det möter ingen svårighet att få eleverna att inse, även om vi i början måste jämföra med bekanta storheter, såsom 100 kr. — 7 kr.

och jämnt 100 kr. Om vi sålunda skriva om vänstra membrum utan att draga ifrån 7, måste resultatet bli 7 mer och således inte blott $3x+9$ utan $3x+16$, varför vi få

$$5x = 3x + 16.$$

Sedan komma vi genom ett liknande resonemang till, att vi kunna minska vartdera membrum med $3x$.

Det går sålunda bra att resonera sig fram *utan regeln om termernas överflyttning och teckenändring*. Men frågan är, om denna metod i längden är att föredraga framför den vanliga. Därtill återkomma vi strax.

Innan dess några ord om bortskaffande av nämnare ur ekvationer. Vi taga ett exempel med två nämnare, vilket naturligtvis inte innebär, att vi börja vår framställning i klassen med så svåra exempel. Detta måste påpekas för att förebygga, att en okritisk läsare drar en dylik slutsats.

Vi skola sålunda lösa ekvationen

$$\frac{4x-1}{15} + \frac{3x-2}{10} = 2.$$

Om vi i stället för första bråket skriva

$$4x-1,$$

ha vi fått 15 gånger så mycket. Då är det skäl att göra även det andra bråket 15 gånger så stort. Först multiplicera vi det med 5 genom division av nämnaren, därpå med 3 genom multiplikation av täljaren. Därvid få vi i vänstra membrum

$$4x - 1 + \frac{9x-6}{2}.$$

För att få likhet måste högra membrum också tagas 15 gånger. I början kan man för jämförelses skull påpeka, att om två högar med nötter äro lika och vi 15-dubbla den ena, måste vi 15-dubbla den andra för att fortfarande få dem lika. Men snart blir saken klar, även för de svagaste, utan att läraren behöver tala därom — om den inte blivit klar redan vid räkningen med ekvationer med en nämnare.

Sedan första nämnaren är bortskaffad, förfara vi på samma sätt för att få bort den andra.

När många dylika exempel genomgåtts och en viss färdighet förvärvats, ställa vi frågan, om vi inte kunna bli kvitt båda nämnarna genom en enda räkning. Hålla vi oss till nyss anförda exempel, så se vi, att den ekvation, där nämnarna äro borta, erhållits ur den första genom att först multiplicera med 15 och sedan med 2. I stället kunde vi med ens ha multiplicerat med 30. I nästa exempel försöka vi sålunda komma fram med en enda multiplikation.

Att denna metod ger ett bättre resultat än regelräknandet, torde vara svårt att bestrida. Visserligen sökte rektor K. G. JONSSON i en artikel i denna tidskrift (band V häfte 1—2) göra gällande, att regelräknandet vore ändamålsenligare. Men i ett genmäle i följande dubbelhäfte påpekade jag, att han förväxlat det tillfälliga resultatet av allt för få lektioners övning på exempel av en viss typ med den varaktiga och allsidiga matematiska mogenhet, som studiet av ämnet bör åsyfta. Och i sitt svaromål gör han intet försök att bemöta detta, utan i stället tar han upp helt andra saker, där han vid noggrannare genomläsning av mitt inlägg bort kunna finna, att jag ej motsagt honom. Därför torde vi i hans tystnad på den väsentliga punkten kunna se en bekräftelse på svårigheten att finna några sakskäl för det tidiga regellärandet.

Spörsmålet blir i stället: Är det lämpligt att ge regler, sedan åtskilliga exempel räknats därförutan? Eller är det bättre att aldrig uttrycka klassens matematiska erfarenhet i en regel?

I fråga om multiplikation av en ekvation för att skaffa bort nämnarna erbjuder det ingen större svårighet att komma fram till regeln att multiplicera med minsta gemensamma nämnaren. Vi förutsätta, att vi haft erforderlig övning i att skaffa bort en nämnare i taget, så att eleverna äro fullt hemmastadda med tankegången. Antag nu, att vi ha ett exempel med nämnarna 22 och 33, och att vi redan löst uppgiften genom att först multiplicera med 22 och sedan med 3. Då är det inte svårt att fråga ut, att vi med ens kunnat multiplicera med 66 i stället, d. v. s. med minsta gemensamma nämnaren. Och vi behöva inte räkna många exempel på båda sätten, innan alla äro på det klara med, att det är bäst att blott använda det senare. I aritmetiken ha de förut haft övning att finna minsta gemensamma dividenden, och därigenom underlättas upptäckten av regeln.

Med regeln om teckenändring vid överflyttning av termer till andra membrum blir det däremot något helt annat. Vi komma rätt snart så långt, att vi t. ex. i den ekvation, vi anförde sid. 182, på grund av vana genast se, att om vi i vänstra membrum låta bli att draga ifrån 7, få vi 7 mera kvar, varför vi måste öka högra membrum med 7. *Att undermedvetet genomlöpa den tankegången går för den vane lika snabbt* som att säga: »7-an flyttas över, och tecknet ändras».

Den senare metoden vållar till på köpet en känsla av osäkerhet. Även om regeln *i bevisandets ögonblick* var väl förstådd, tappas tankegången lätt bort, så att det endast blir det dogmatiska försanthållandet, som står kvar vid innötandet. Dessutom sker regelräknandet under känslan: »Har jag nu kommit ihåg att lydigt iakttaga alla föreskrifter jag fått?» Den känslan suggererar försagdhetens tvivel på den egna förmågan. Man vågar icke draga en matematisk slutsats på egen hand, utan man håller sig okritiskt till bokens ord eller lärarens bifall som stöd för sitt tänkande. I värsta fall smittar denna auktoritetstro till samma osjälvständighet även i det praktiska livet. Men lyckligtvis hör dylikt till undantagen. Lättare fostrar den till osjälvständighet i tänkandet över livets frågor. Och i varje fall är det ett psykologiskt faktum, att denna känsla av osäkerhet gör, att behållningen av exempelräkningen blir mindre. *Det kräves ett vida drygare antal exempel för att uppnå samma räknefärdighet, när man skall gå efter regler, än när man får reda sig utan dylika.*

* *

Ett annat fall, då vi intet vinna med regelns uttryckande i ord, är vid subtraktion mellan två ekvationer. Vi tänka oss, att vi under räknandet kommit fram till

$$24x + 15y = 102$$
$$24x - 26y = 20$$

Tillgripa vi ej metoden att inlära teckenändring, så kunna vi i stället fråga efter skillnaden mellan $+15^\circ$ och -26°, varpå vi lätt erhålla svar. Sedan inses omedelbart, att vi i vår ekvation få skillnaden mellan y-termerna genom att addera

$$15y + 26y.$$

När ett liknande fall återkommer, gå vi ånyo till termometern. Snart behöva vi blott säga: »Tänk på termometern». Och med tiden blir även det överflödigt. Vanan gör, att det går av sig självt att inse, att vi skola addera för att få skillnaden. Och detta sker minst lika kvickt, som om vi i stället anlitat den för det matematiska tänkandet farliga utvägen med teckenändring.

Samma möjlighet att räkna fort utan regel finnes däremot ej vid multiplikation av negativa faktorer. För att inlära saken välja vi naturligtvis i början exempel med bekanta storheter. Vi antaga, att någon därvid räknat på följande sätt:

$$(5-2)(7-5) = 5(7-5) - 2(7-5) = 35 - 25 - 14 - 10 = -14,$$

vilket onekligen ligger närmast till hands för den oinvigde. Nu göres kontrollräkningen

$$(5-2)(7-5) = 3 \cdot 2 = 6,$$

vilken visar, att vi inte kommit rätt. Då kanske någon upptäcker, att det stämmer, om vi *addera* 10 i stället för att subtrahera. Men i varje fall blir vårt resonemang:

— När vi dragit ifrån $2 \cdot 7$ i stället för $2(7-5)$, ha vi då dragit ifrån för mycket eller för litet?

— För mycket.

— Få vi således för mycket eller för litet kvar?

— För litet.

På den vägen finna vi lätt, att vi fått 10 för litet och sålunda ha att *addera* 10 för att vinna rättelse.

Denna tankegång blir dock i längden för tidsödande att upprepa, varje gång vi skola multiplicera ihop två negativa tal. När vi förklarat saken genom erforderligt antal exempel, fastslå vi i stället, att »minus gånger minus ger plus», eller hur vi nu vilja formulera vårt rön. Här kommer oss väl till pass vanan att undvara regler i de fall, där det går för sig utan olägenhet. Denna vana gör, att den matematiska tankeförmågan uppövats, så att faran blir minimal, att regellärandet på denna och ett fåtal andra punkter skall fostra till tanklöshet. F. ö. få vi vara beredda att även i fortsättningen repetera tankegången vid ett och annat tillfälle, då vi behöva produkten av två negativa tal. Men för det mesta gå vi utan vidare ut från teckenregeln som given.

På i huvudsak samma grunder finna vi, att vid *bråks förlängning och förkortning* regeln behöver formuleras, sedan vi i tillräckligt många exempel nött in principen genom att lotsa oss fram utan regel och blott tänka på delarnas sönderdelning i mindre delar. Att börja med sker detta naturligtvis genom verklig sönderdelning, t. ex. av äpplen, sedan genom uppritning på tavlan och till sist, när barnen bli mogna härför, i huvudet.

* * *

Vi skola nu gå till ett kapitel, där regler likaså krävas, men där faran är stor att förytliga uppfattningen genom att ge formlerna för tidigt. Detta kapitel är *trigonometrin*. Vi tänka oss, att vi i en triangel känna en sida och två vinklar, låt oss säga

$$b = 5{,}38 \text{ m.}$$
$$A = 56^\circ\ 45'$$
$$B = 42^\circ\ 50'.$$

För att beräkna a låta vi en lärjunge rita upp triangeln, draga höjden från C och skriva upp de uttryck på sin A och sin B, som erhållas ur deltrianglarna, d. v. s.

$$\sin A = \frac{h}{b},$$

$$\sin B = \frac{h}{a}.$$

Vi tillhålla honom sålunda att *skriva ut även de bekanta storheterna i bokstäver och ej i siffror.* Och vi motivera det med att påpeka, att b är bekvämare att skriva än 5,38. Men samtidigt med denna omtanke om bekvämligheten vinna vi, vad som är vida mer värt, ehuru värdet är fördolt för lärjungarna, nämligen att vi vid divisionen direkt få sinusteoremets formel

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

i stället för en ekvation, som innehåller de givna sifferuttrycken, och vars symmetriska karaktär inte är lika påtaglig. Men å andra sidan påpeka vi inte genast, att det som allmän regel gäller, att sinus för en vinkel är proportionell mot motstående sida. Gjorde vi det, skulle formeln för eleverna få en mera abstrakt karaktär. De skulle — även om några repetitioner av härledningen förekomme — snart tappa bort den tankegång, som ligger bakom formeln. Det som stannade kvar i deras hjärnor vore medvetandet: Nu räkna vi efter denna formel, ty det ha vi fått lära oss; men varför vi göra det, veta vi inte. Att de i bevisandets ögonblick vetat det, tro de knappast själva.

För att undvika denna mekanisering låta vi dem, när sidan c skall beräknas, rita upp en ny höjd och uppställa motsvarande ekvationer samt ur dessa ekvationer och ej genom analogislut från nyssnämnda formel komma till

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}.$$

Sedan taga vi nya exempel och genomgå för varje gång formelns härledning, innan vi tillämpa den. Därmed växer formeln in i elevernas medvetande på ett sätt, som ger en vida solidare grund än den gamla metoden med härledningen för sig och tillämpningen för sig. Det är ett *lagom stort* steg på abstraktionens bana, då de få använda bokstaven ej som beteckning på en storhet i allmänhet, utan på en storhet, vars speciella värde vi ha uppskrivet på tavlan, resp. strax skola räkna ut.

Så genomlöpes samma tankegång ideligen, låt vara under omväxling mellan exempel, som än svara mot tredje kongruensfallet, än mot det fjärde. Man kunde tycka, att eleverna själva borde upptäcka, att vi alltid få samma formel, varför den ständiga härledningen borde vara överflödig. Men faktiskt reflektera de ej däröver, utan det står för dem som helt naturligt, att vi varje gång skola börja med att ställa upp ekvationerna i trigonometrin liksom t. ex. vid ett rörelseproblem.

För att utröna elevernas uppfattning härvidlag frågade jag en gång i seminariets tredje klass, om de kunde hitta på något bekvämare sätt att beräkna triangeln. Vi hade då härlett sinusteoremet för 16 trianglar. I 13 av dessa exempel hade vi, av orsak som nyss nämndes, kommit med dubbla härledningar, och endast i de tre återstående fallen nöjt oss med att fråga efter en enda av de obekanta. Således hade under lektionerna[1] sinusteoremet erhållits 29 gånger, utan att vi talt om, att det vore en allmän formel. Vid min fråga efter något bekvämare sätt befanns det, att av klassens 25 elever hade blott 4 kommit att tänka på, att det vore överflödigt att varje gång räkna oss till formeln. Två av dem hade kort förut resonerat med varandra om sin upptäckt, berättade de.

För kontrollens skull frågade jag, sedan formelns allmängiltighet påvisats, om någon av de 21 möjligen listat ut saken men ej förstått min fråga och därför tegat. Men ingen hade gjort det. Och naturligtvis kunde man lita på deras uppriktighet. Deras tystnad hade i annat fall varit ett bedrägeri i syfte att ställa sig i oförtjänt dålig dager. Och den sortens bedrägerier behöva vi ej befara.

I ifrågavarande klass fanns det likväl åtskilliga duktiga och begåvade ynglingar även bland de 21. Detta visar, att t. o. m. vakna elever sällan ha sin iakttagelseförmåga inriktad på någon teoretisk abstraktion. Därför ha vi ej rätt att göra våld på deras natur och i förtid driva dem in på formlernas abstrakta område. För att få en solid grund för sitt matematiska tänkande behöva de länge dröja vid de åskådliga metoderna, vilka för dem ej te sig opraktiska, även om de äro det för den vane räknaren.

[1] På grund av den dryga arbetsbördan i seminariets övriga ämnen hade ingen exempelräkning i hemmet medhunnits.

Emellertid kommer som sagt det ögonblick, då det är lämpligt att påpeka, att vi alltid få samma formel, från vilken vi vid fortsatt övning kunna utgå som klassens samfällda erfarenhet. Men varje erfarenhet kräver, att vi ej allt för kort tid syssla med saken. Detta är lika naturligt beträffande matematiken, som att hantverkaren måste utöva sitt yrke en längre tid, innan han förvärvar den praktiska erfarenhet, vilken sätter honom i stånd att bedöma värdet av förbättrade arbetsmetoder. När läraren anser, att klassens räknefärdighet vittnar om motsvarande praktiska erfarenheter på trigonometrins område, söker han väcka tanken på fördelen av att helt enkelt utgå från den formel, man förut gång på gång härlett.

* * *

Mot regelns uppskjutande göres emellertid stundom den invändningen, att den ökade grundligheten i den matematiska tankeförmågan köpes för dyrt på grund av den tidsutdräkt, formelns försakande vållar. För min del anser jag, att priset inte vore för högt, även om vi genom grundligheten skulle förlora tid och sålunda få avstå från allt för dryga kurser. Bättre, att våra elever gå ut med ett mindre kunskapsmått, om de i stället smält det grundligare.

Men bortsett härifrån kunna vi ha skäl att undersöka, om min metod verkligen i längden medför tidsspillan. Låt oss för den skull väga vinst och förlust mot varandra.

Vid den vanliga metoden genomgås formeln åtskilliga gånger, först vid preparationen, så vid läxläsningen i hemmet, så vid förhöret, så vid läxläsning och förhör vid den hävdvunna repetitionen. Och vid vartdera tillfället kan det betraktas som normalt, att saken tages om åtminstone två gånger, kanske mera. Dock måste medgivas, att antalet genomgångar blir väsentligt mycket mindre än enligt min metod. Men det uppväges till stor del därav, att varje deduktion enligt min metod mera får aktuellt intresse på den grund, att det gäller ett speciellt exempel och inte en för skolynglingar föga lockande allmän formel. Detta intresse gör, att övningsvärdet för varje gång blir större, vilket snart visar sig i ökad färdighet att på kort tid få fram formeln. *Tidsförlusten, som skulle medfölja deduktionernas ökade* *antal, motväges sålunda av den minskade tidsförbrukning var och en av dem i genomsnitt kräver.*

Riktigheten härav finner en vaken lärare lätt bekräftelse på vid sin undervisning, om hans uppmärksamhet en gång riktats åt det hållet. Saken blir f. ö. helt naturlig, om vi betänka, att våra ungdomar nu en gång äro så skapta, att de mest intressera sig för och bäst uppfatta det konkreta. Skola de inlära beviset för en allmän formel, sker det allt för ofta under en känsla av att det gäller något konstigt, något svårfattligt. Och *denna känsla vållar en osäkerhet, vilken gör, att tankegången mindre lätt fastnar i minnet.* Detta är ett obestridligt faktum, känt av en var som närmare studerat minnets psykologi.

Men här hör jag en invändning. Exempelräkningen får icke bli för stereotyp, utan de givna exemplen måste ha en mer omväxlande karaktär, så att det ena bjuder på en svårighet, det andra på en annan. Eljes få lärjungarna ingen övning i att tänka själva.

Alldeles sant. Men man måste krypa, innan man kan gå. De problem, som för varje gång bjuda på oväntade svårigheter, få inte försummas, men de få inte heller komma för tidigt. Innan dess måste vi öva oss med de enkla och ensartade uppgifterna, tills vi ordentligt komma in i den trigonometriska tankegången. Och därvid vinna vi, som ovan framhållits, mest med att för varje gång härleda formeln.

Men en ny invändning. På det sättet blir det jämförelsevis för mycket övning på formlernas uppställande och för litet på den aritmetiska räknefärdigheten.

Nej, det är misstag. Väl är det sant, att vi visst inte få underskatta den mekaniska räknefärdigheten. Men när våra elever hunnit så långt som till trigonometrin, ha de i alla fall bra mycket större vana att räkna mekaniskt än att tänka sig in i en formel. Därför blir det en förflyttning av övningens tyngdpunkt i rätt riktning, om vi följa den metod, jag här förordat.

Detta bekräftas också av elevernas egen erfarenhet. Före en provräkning, då deras intresse att komma in i saken är störst, då vilja de helst använda hela lektionerna på att ställa upp lösningen till så många problem som möjligt. De finna det onödigt att sätta bort någon tid på det mekaniska utförandet, där de känna på sig, att det fattas mindre i deras färdighet. Detta gäller f. ö. ej blott trigonometrin, utan även i andra fall veta de med sig, att de före en provräkning ha största nyttan av att få sätta upp ekvationer till problemen och låta uträknandet vara.

* * *

Vi övergå nu till ett annat område, där erfarenheten även ger gynnsamt resultat angående fördelen av att uppskjuta formelns användning. Jag menar *serier*. I seminariets kurs förekomma ej serier i och för sig, utan endast i fråga om sammansatt ränta har man anledning att syssla därmed. Vi hade i fjärde klass genomgått amorteringsexempel och summerat amorteringarna enligt den metod, som användes för formelns härledning. Således, om ett amorteringsbelopp på 100 kr. erlägges vid slutet av vart och ett av de 10 närmaste åren, och om räntan beräknas efter 5 %, få vi lätt

$$s = 100 \,.\, 1{,}05^9 + 100 \,.\, 1{,}05^8 + \cdots + 100 \,.\, 1{,}05 + 100$$

$$1{,}05\, s = 100 \,.\, 1{,}05^{10} + 100 \,.\, 1{,}05^9 + \cdots + 100 \,.\, 1{,}05^2 + 100 \,.\, 1{,}05$$

och genom subtraktion

$$0{,}05\, s = 100 \,.\, 1{,}05^{10} - 100.$$

Sedan åtskilliga exempel räknats på detta sätt, härledde vi formeln och tillämpade den på några nya exempel. Därpå frågade jag, vilket eleverna föredrogo, att räkna med eller utan formel. Av de 19 närvarande ansågo 17, att de hade större behållning och fattade saken bättre, om de sluppo något så abstrakt som formeln. De två återstående, vilka hörde till de bästa i klassen, funno det lika praktiskt och lika lätt att räkna på vartdera sättet. Och det finnes ingen anledning att misstänka, att de 17 av inställsamhet svarade något annat än de tänkte. Om de haft ett dylikt syfte, hade de fastmer passat på tillfället att deklarera sin matematiska bildning genom att ge sig ut för att lätt kunna använda en abstrakt matematisk formel.

Med detta vill jag inte förneka, att man, *om tiden tillåter*, även bör inöva formelns användning. Vid läroverken, särskilt på reallinjen, kan den saken ledigt medhinnas. Där få lärjungarna god övning på geometriska serier, innan de komma in på amorteringar. Därför kan meningen med formeln vara förstådd, redan när det första amorteringsproblemet räknas. Men annorlunda är det ställt vid seminarierna. Även om vi begagna oss av vår lagliga rätt till jämkning på kurserna och slopa t. ex. ekvationer av andra graden — även då blir tiden knapp. Det kan därför bli nödvändigt att ej spänna bågen för högt, utan stanna vid inlärandet av amorteringsräkning utan formel.

* *

Av det föregående torde framgå, vilket gagn vi kunna ha av att taga notis om våra lärjungars uppfattning om undervisningen. Även om vi måste anse vårt omdöme mognare än deras, så känna de bättre var skon klämmer. Det är därför i sin ordning, att vi söka lära oss konsten att, utan att vi förlora ledningen av lektionen, då och då ägna någon stund åt samtal med dem om hithörande spörsmål. Detta skall ytterligare lära oss inse, vad även själva undervisningen kan ge vid handen, nämligen att våra elever bäst komma in i en matematisk tankegång och få den gedignaste bildningen, om fastslåendet av reglerna uppskjutes åtskilligt längre, än nu är brukligt.

Att länge syssla med speciella exempel utan abstrakta regler är f. ö. något som står i full överensstämmelse med den pedagogiska erfarenhet, vilken under de sista århundradena hållit på att arbeta sig fram. COMENIUS fordrade, att kunskapen skall vinnas genom åskådning, och att tillräckligt fasta idéassociationer måste knytas redan på åskådningens stadium. Han såg, vad hans samtid ej upptäckte, nämligen att vad vi äldre redan lärt oss, få vi inte tro att det skall flyga på barnen genom några abstrakta utredningar. I samma riktning gick ROUSSEAU, när han krävde självverksamhet vid tänkandet, en självverksamhet som nödvändigt förutsätter, att den unge länge dröjer vid det konkreta. Och främst ha vi PESTALOZZI, som inte nog starkt kunde fördöma den tomma ordkunskapen, utan som i stället hävdade åskådningen som den första bildningens nödvändiga grundval. Dessa store barnakännare ha härmed tvungit den tänkande att gå in på riktigheten av sina principer. Och det är blott ett steg längre i samma riktning, då vi yrka på att dessa principer skola tillämpas, även när vi undervisa de elever, som ej mer äro barn. Ty i det avseendet äro de — liksom i viss mån vi själva — lika barnen, att de behöva syssla länge med de speciella fallen, innan de bli mogna för någon formulering av en allmän regel, om de ens någonsin bli det.