Om formen för uppställning av en logaritmisk räkning.[1]

Av **Adolf Meyer.**

Om någon skulle föreslå, att ur våra räkningar utesluta tecknet $\sqrt{\ }$, så att man t. ex. skulle skriva lösningen av andragradsekvationen $x^2 + ax + b = 0$ sålunda: $x = -\frac{a}{2} + y$, där $y^2 = \frac{a^2}{4} - b$, eller i st. f. $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ skriva: $x = y + z$, där $y^2 = 5$ och $z^2 = 7$ e. d., så skulle säkert en var förklara, att detta vore något över alla gränser opraktiskt, som aldrig borde komma i fråga; och tydligen skulle det ställa sig ännu värre, om man ville göra tvärtom: utesluta tecknet för kvadrering och sålunda i st. f. t. ex. $x = a^2 + b^2$ skriva: $x = y + z$, där $\sqrt{y} = a$ och $\sqrt{z} = b$, ty då vore det just tecknet för den direkta operationen som uteslötes med bibehållandet av tecknet för den inversa.

Och likväl är det något därmed fullkomligt jämförligt, som i alla tider begagnats av flertalet av våra lärare, när det gäller logaritmiska räkningar.

[1] Denna uppsats utgör i huvudsak innehållet av ett av undertecknad inför Matematisk-Fysiska sektionen vid lärarmötet i Jönköping hållet föredrag. Från flera håll uppmanad att giva det större offentlighet, har jag velat införa det i denna tidskrift. Själv har jag praktiserat den angivna metoden i ung. 20 år, och många av mina kamrater hava även upptagit densamma med större eller mindre modifikationer.

Antag t. ex., att en räkning givit till resultat

$$x = 0{,}05864 \cdot 3{,}946 + \sqrt[3]{4{,}28} \cdot 0{,}962.$$

Då skrives i allmänhet detta sålunda:

$$x = y + z, \text{ varest}$$

$$\log y = \log 0{,}05864 + \log 3{,}496$$

$$\log 0{,}05864 = 0{,}7682 - 2$$

$$\log 3{,}496 = 0{,}5962$$

således $\log y \quad = 1{,}3644 - 2 = 0{,}3644 - 1$

$$y = 0{,}2314$$

och $\log z = \frac{1}{3} \log 4{,}28 + \log 0{,}962$

$$\frac{1}{3} \log 4{,}28 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}6314 = 0{,}2105$$

$$\log 0{,}962 = 0{,}9832 - 1$$

således $\log z \quad = 1{,}1937 - 1 = 0{,}1937$

och $\quad z = 1{,}562$

således $\quad x = 1{,}793.$

Hela detta krångel med sönderplockande av räkningarna — en sak som annars varje lärare redan från första klassen söker förmå lärjungarna att undvika — har endast sin grund i en besynnerlig motvilja för att införa ett tecken för orden »motsvarande tal till» eller »10 upphöjt till». Och dock är det att märka, att just denna räkneoperation, dignitetsupphöjning, är den direkta operationen, under det att logaritmicering måste fattas som den inversa.

Nu är det visserligen sant, att den vanliga beteckningen för dignitetsupphöjning, 10^a, i detta fall skulle göra saken föga bättre. Det nämnda exemplet skulle då ställa sig sålunda:

$$x = 10^{\log 0{,}05864 + \log 3{,}946} + 10^{\frac{1}{3}\log 4{,}28 + \log 0{,}962} = 10^{0{,}7682 - 2 + 0{,}5962} +$$

$$+ 10^{\frac{1}{3}0{,}6314 + 0{,}9832 - 1} = 10^{0{,}3644 - 1} + 10^{0{,}1937} = 0{,}2314 + 1{,}562 = 1{,}793;$$

vilket dels typografiskt sett kan bliva synnerligen fult, dels även torde behöva särskilda biräkningar, emedan addenderna stå bredvid i st. f. under varandra; men detta är uppenbarligen intet skäl för att alldeles utesluta beteckning för dignitetsupphöjning, utan endast för att skaffa sig en bekvämare och för ändamålet mer praktisk dylik.

Detta utför jag genom att förklara för lärjungarna, att »motsvarande tal för a» eller »10^a» även kan skrivas $[a]$, eller, om basen behöver utsättas, $[a]_{10}$. På detta sätt vinner jag även, att lärjungarna aldrig misstaga sig på att med »motsvarande tal till» även menas »basen upphöjd till», vilket som bekant annars ej alltid är fallet. Ovanstående exempel får då således formen:

$$x = 0{,}05864 \cdot 3{,}946 + \sqrt[3]{4{,}28 \cdot 0{,}962} = \begin{bmatrix} 0{,}7682 - 2 \\ + 0{,}5962 \\ \hline 1{,}3644 - 2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0{,}2105 \\ + 0{,}9832 - 1 \\ \hline 1{,}1937 - 1 \end{bmatrix} = 0{,}2314 + 1{,}562 = 1{,}793,$$

vilket ej fordrar någon annan biräkning än division av 0,6314 med 3, vilket lätt kan utföras i huvudet, då man har talet 0,6314 tryckt i tabellen.

Det nu sagda förslår således för ovanstående exempel och många andra, varibland åtskilliga av stor praktisk betydelse. Antag t. ex., att det gäller beräkning av en triangel ur de tre sidorna. Man får då t. ex. följande uppställning:

$$
\begin{aligned}
a &= 1{,}376\\
b &= 0{,}914\\
c &= 0{,}712\\
\hline
2\,p &= 3{,}002\\
p &= 1{,}501 = [0{,}1764]\\
p - a &= 0{,}125 = [0{,}0969 - 1\\
p - b &= 0{,}587 = [0{,}7686 - 1\\
p - c &= 0{,}789 = [0{,}8971 - 1\\
\hline
T^2 &= [0{,}9390 - 2\\
T &= [0{,}4695 - 1 = 0{,}2948\\
\hline
r = \frac{T}{p} &= [0{,}2931 - 1]\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} &= [0{,}1962]; \quad \frac{\alpha}{2} = 57^\circ{,}524\\
\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b} &= [0{,}5245 - 1]; \quad \frac{\beta}{2} = 18^\circ{,}500\\
\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c} &= [0{,}3960 - 1]; \quad \frac{\gamma}{2} = 13^\circ{,}976\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 90^\circ{,}000
\end{aligned}
$$

Ett bekant fysiskt experiment, sökande av brytningsexponenten för en planparallell skiva av tjockleken k, ger formelsystemet:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{h}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{h} - \frac{d}{k}; \quad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

där b och d äro vissa avlästa delstreck och h ögats höjd över skivans nedre yta, α och β infalls- och brytningsvinklarna. Antag att man avläst: $h = 8{,}45$ cm, $b = 3{,}13$ cm, $k = 5{,}12$ cm, $d = 0{,}68$ cm. Man får då:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3{,}13}{8{,}45} = \left[\begin{array}{l} 0{,}4955 \\ -\,0{,}9269 \\ \hline 0{,}5686 - 1 \end{array}\right]; \quad \alpha = 20^{\circ}{,}32$$

$$\operatorname{tg} \beta = [0{,}5686 - 1] - \left[\begin{array}{l} 0{,}8325 - 1 \\ -\,0{,}7093 \\ \hline 0{,}1232 - 1 \end{array}\right] = 0{,}370 - 0{,}133 =$$

$$= 0{,}237 = [0{,}3747 - 1]; \quad \beta = 13^{\circ}{,}33$$

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \left[\begin{array}{l} 0{,}5406 - 1 \\ -\,0{,}3628 + 1 \\ \hline 0{,}1778 \end{array}\right] = 1{,}507.$$

Man jämföre detta med den vanliga metoden, så skall man snart finna, hur mycket bekvämare denna uppställning är. Emellertid blir även detta sista exempel ännu bättre genom användning av de följande anmärkningarna, vilka i än högre grad. behövas, då det uttryck som skall uträknas har en täljare eller nämnare bestående av flera faktorer. I så fall skulle ju inom klammern komma att stå både positiva och negativa mantissor, vilka skola adderas, vilket medför betydliga svårigheter. Metoden måste därför kompletteras.

Först och främst begagnar jag då aldrig andra negativa karakteristikor än -10, skriver således ej $0{,}9832 - 1$, utan $9{,}9832 - 10$, ej $0{,}9893 - 3$, utan $7{,}9893 - 10$ o. s. v.; och, sedan två eller tre lektioner äro gångna, utesluter jag dessa — 10-or, i det att jag framhåller för lärjungarna, att jag har så stort förtroende till deras förstånd, att jag ej fruktar, att de skola förväxla ett tal med dess 10,000,000,000-fald. De enda fall, då något sådant skulle kunna förekomma, är i fråga om astronomiska storheter eller molekularstorlekar och antal, och då skriver man ju numera alltid ett måttligt tal $\times 10$, ävensom då det förekommer dragandet av en rot med hög index (5 eller mera), vilket så gott som aldrig förekommer i praktiken. Skulle någon enstaka gång ett fel härvid förekomma, så är detta blott ett välkommet tillfälle att varna mot att räkna tanklöst.

Detta skrivsätt har betydliga fördelar, såsom strax skall visas, och begagnas ju, såsom bekant, alltid vid trigonometriska beräkningar, och behöver då ej särskilt omtalas, om lärjungarna redan förut blivit vana därvid. På detta sätt få de i resultaten aldrig andra karakteristikor än ett ensiffrigt tal eller ett ensiffrigt tal $- 10$, och böra genast utan vidare se vilketdera det är fråga om.

Vid rotutdragning ur bråk, såsom t. ex. $\sqrt[3]{0,058}$ förfares sålunda: log 0,058 fås genast ur tabellen $= 8,7634$. Man dividerar då med 3 talet 28,7634, som ger 9,5878, vilken logaritm omedelbart godtages. Likaledes vid t. ex. $\sqrt[5]{0,48}$ divideras talet 49,6812 med 5, vilket ger 9,9362.

Vidare måste man taga co-logaritmer. Så t. ex. om i nämnaren står talet 3,914, så skrives ej inom klammern $- 0,5926$, utan $+ 9,4074$, och om därstädes står 0,06728, så skrives ej $- 8,8279 + 10$, utan $+ 1,1721$. Detta, att direkt ur tabellen uttaga co-logaritmen för ett tal, lära sig lärjungarna utomordentligt lätt: redan under första lektionen går detta ganska bra, då jag låter dem *läsa* den ur tabellen tagna logaritmen, men *skriva* dess komplement. Så t. ex. om i en nämnare står 14,79, så *läsa* de 1,1682, men *skriva* 8,8318; om det står 0,00191, så *läsa* de 7,2810, men *skriva* 2,7190 o. s. v. De äro för övrigt ganska roade därav. Naturligtvis förekommer i det följande ett och annat räknefel på detta, liksom på alla andra räkningar, men detta är blott sällsynta undantag, åtminstone hos dem som från början lärt sig använda metoden.

Slutligen kan nämnas, att $+$-tecknen framför de olika logaritmerna inom klammern lämpligen uteslutas, då intet annat tecken där kan förekomma, samt att det är bekvämt att, då en kvadrat förekommer, skriva samma logaritm två gånger efter varandra, då en högre dignitet, t. ex. den 4:de, förekommer, först skriva talets logaritm och sedan densamma multiplicerad med 3, och några dylika konstgrepp för att undvika biräkningar. Det enda fall, då biräkningar måste förekomma, är då en rot förekommer i en nämnare, ty då kan saken svårligen utföras i huvudet, utan måste ske på ett särskilt papper.

För att slutligen sammanfatta allt detta vill jag här utföra tvänne något svårare räkningar av olika slag på det sätt, som mina elever lära sig att utföra desamma:

$$\text{ex. 1)}\quad x = \frac{\sqrt{0{,}4552} - \sqrt[5]{1{,}29}}{5{,}32\cdot 0{,}384 - \sqrt{0{,}074}} = \frac{\left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}\cdot 9{,}6585 \\ \hline 9{,}8862 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{l} \frac{1}{5}\cdot 0{,}1106 \\ \hline 0{,}0221 \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l} 0{,}7259 \\ 9{,}5843 \\ \hline 0{,}3102 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\cdot 8{,}8692 \\ \hline 9{,}4346 \end{array}\right]} =$$

$$= \frac{0{,}7694 - 1{,}0522}{2{,}0427 - 0{,}2720} = -\frac{0{,}2828}{1{,}7707} = -\left[\begin{array}{l} 9{,}4515 \\ 9{,}7518 \\ \hline 9{,}2033 \end{array}\right] = -0{,}1597.$$

$$\text{ex. 2)}\quad x = \sqrt[3]{\frac{6{,}25^2\cdot 0{,}05462}{0{,}0078^3\cdot 302{,}4^2}} + \frac{\sqrt[4]{32{,}4}}{0{,}04\cdot\sqrt{367}} = \left[\begin{array}{ll} & \left\{\begin{array}{l} 0{,}7959 \\ 0{,}7959 \\ 8{,}7374 \\ 2{,}1079 \\ 4{,}2158 \\ 7{,}5194 \\ 7{,}5194 \\ \hline 1{,}6917 \end{array}\right\} \\ \frac{1}{3} & \\ \hline & 0{,}5639 \end{array}\right] +$$

[illegible]

Detta synes mig i alla avseenden vara överskådligare och bättre än den vanliga metoden.

Än en gång genus i tyskan.

Av Artur Korlén.

[illegible]