Om vetenskaplig lärobok i elementar-geometri.

Sedan jag i en föregående uppsats (ofvan sid. 303) sökt, så vidt i min förmåga stod, betona den vigtigaste *formela* fordran man bör ställa på en lärobok för begynnare i euklideisk geometri, nämligen att utgångspunkterna städse äro i största möjliga grad *konkreta* och *påtagliga*, fria från allt abstraherande och generaliserande, vill jag nu yttra min tanke om vissa fordringar, som en sådan lärobok ur *vetenskaplig* synpunkt bör tillfredsställa. Om det jag därvid kan hafva att säga torde synas mången vara till mesta delen föga nytt, så vill jag hysa den tro, att så länge det är sant och ej af alla kändt och genomtänkt, det ändock kan vara värdt att upprepas. Dessutom torde den tvistighet, som måhända vidlåder tillämpningen af en i det följande framställd ledande princip för författandet af ifrågavarande slags läroböcker, kunna hafva den goda följden med sig, att skickligare pennor än min komma i rörelse och taga frågan vidare om hand. Alltså till saken.

Geometrien hvilar ytterst på vissa **omedelbart insedda åskådningssanningar.** Det är den vetenskapliga lärobokens närmaste uppgift att samla dessa till ett öfversigtligt helt, och denna uppgift, som enligt min mening hittills för litet beaktats, vill jag försöksvis på följande sätt summariskt behandla.

Det fysiska rummet, betraktadt från synpunkten af *utsträckning*, kallas *geometriskt.* Vid det geometriska rumsbegreppets utredning mötes man af följande grundföreställningar. — Den mänskliga tanken uppfattar det geometriska rummet ytterst såsom *punkters lägen.* För att till ett helt samla alla de särskilda punktföreställningarna om ett visst *begränsadt rum* eller en *kropp* föreställer han sig en viss punkt af kroppen, från hvilken denne utsträcker sig i hela den otaliga mängden af *riktningar*, som af utsträcknings-begreppet betingas. Dessa riktningar göra med hvarandra vissa *vinklar*, hvilkas storlek mäta riktningarnas olikhet eller divergens. — I besittning af dessa vigtiga nybildade grundföreställningar, riktning och vinkel, finner tanken vidare utsträckningarnas särskilda storlekar i olika riktningar från den tänkta punkten, eller dennes särskilda *afstånd* till utsträckningarnas slut, bestämma *storlek* och *form* hos den ifrågavarande geometriska kroppen; men om utsträckningarna växa eller aftaga utan all gräns, stannar föreställningen i den formlösa verldsrymden och den försvinnande (storlekslösa) punkten. — Sammanfattningen af samtliga utsträckningars slutpunkter bildar en geometrisk *yta*, hvilken således utgör den omslutande gränsen för en från den oändliga rymden afskild kropp, om alla dessa utsträckningar äro begränsade; men om det geometriska rum, vi betrakta, utbreder sig utan gräns åt vissa håll, får ytan obegränsad utsträckning, i det den delar rymden i skilda områden af oändlig storlek. — En yta kan således vara begränsad i sig själf eller sluten, nämligen då hon innesluter en kropp, men för att i allmänhet erhålla en begränsning af en yta, en s. k. figur, tager man hela följden af den åstundade ytfigurens gränspunkter, hvilken utgör en geometrisk *linie*. I detta fall är denne begränsad i sig själf eller sluten, men linien kan äfven obegränsadt utsträcka sig på en obegränsad yta och delar då denna, liksom ytan rymden, i skilda områden af oändlig storlek. I allmänhet begränsar man en linie genom att bestämma dess ändpunkter.

Det enklaste slaget af geometriska storheter är således *linien*, i själfva värket utmärkt därigenom att den i hvarje punkt har utsträckning blott i *en enda* riktning. Den *räta* linien har i alla punkter sin utsträckning i samma riktning; hos den *brutna* linien förändras utsträckningens riktning då och då plötsligt i vissa punkter; hos den *krokiga* linien förändras den oafbrutet med oändligt små steg i de successiva punkterna. — En rät linie i rymden är fullkomligt bestämd af tvänne punkter, genom hvilka hon uppgifves gå, alldenstund liniens riktning och läge därigenom blifva bestämda. Tvänne räta linier, som skära hvarandra, kunna därför ej skära hvarandra i mer än 1 punkt. De bestämma då till dess läge ett *plan*, den enklaste af alla ytor samt kännetecknad däraf att hvarje rät linie, som sammanbinder två af dess punkter, faller hel och hållen däri. — Då tvänne räta linier ej kunna skära hvarandra i mer än 1 punkt, fordras för att vinna en begränsning af ett plan medels räta linier minst 3 sådana *(triangel)*. Hvarje af räta linier begränsad figur i ett plan kan af trianglar sammansättas, näml. så, att den utgör antingen en summa af trianglar eller en skilnad mellan summor af sådana, om räta linier dragas från en punkt inom figuren till den sammas vinkelspetsar. Dessa trianglar aftaga till storlek, men växa till antal, bägge delarne obegränsadt, då den begränsande brutna linien genom ideligt ökande af brytningsvinklarnes antal öfvergår till en krokig. Häraf inses, att en af en krokig linie begränsad plan figur kan anses sammansatt af ett oändligt antal oändligt små plana trianglar. — Ytor af brutna plan bilda öfvergången till den *bugtiga ytan*, utmärkt liksom de förra genom att i hvarje punkt hafva utsträckning blott i ett plans alla riktningar, men olika dem däruti, att dessa utsträckningsplan med oändligt små steg förändra läge från punkt till annan i ytan. — Medan af ett plan en rätlinig begränsning kan vinnas redan genom 3 räta linier, så fordras för rummets begränsning genom plan minst 4 sådana. (2 kunna bilda en plan- eller kil-vinkel, 3 ett hörn, men först 4 innesluta en kropp.) Den inneslutna kroppen kallas då *triangulär pyramid.* Hvarje af plana ytor begränsad kropp kan sammansättas af triangulära pyramider, nämligen så att den utgör antingen en summa eller en skilnad mellan summor af sådane, om de begränsande plana ytorna fördelas i trianglar och plan läggas från en punkt inom kroppen genom trianglarnes sidor. Dessa triangulära pyramider komma att obegränsadt till storlek aftaga, men till antal växa, då den begränsande brutna ytan genom ideligt ökade brytningar öfvergår till en bugtig; hvaraf inses, att en af bugtiga ytor omsluten kropp kan anses sammansatt af ett oändligt antal oändligt små triangulära pyramider.

Med denna öfversigt hafva vi äfven funnit området och uppgiften för den s. k. *elementar-geometrien.* Sedan det nämligen nu i korthet antydts, huru man genom begreppet riktningsförändring eller vinkel såsom formbildande element kan ur de enklaste formerna af linie, yta, kropp (den räta linien; planet och dess enklaste rätliniga begränsning, triangeln; rummets enklaste plan-sidiga begränsning, den triangulära pyramiden) härleda öfriga mer eller mindre invecklade former, så är det just i elementar-geometrien vi hafva *att göra dessa de nämde enklaste formerna af linie, yta och kropp till föremål för våra undersökningar.* Då vidare linier, vinklar, ytor ej längre betraktas ensamma, hvardera slaget för sig, utan förenade med hvarandra i en gemensam figur eller kropp, så blifva de ej längre af sins emellan oberoende storlek, utan bestämma hvarandra ömsesidigt till en viss grad. Det är nu **elementar-geometriens uppgift** att, då *vinklar, räta linier och plana ytfigurer förbindas med hvarandra till trianglar och triangulära pyramider eller vissa andra dem nära stående rätliniga figurer och plansidiga kroppar, undersöka de relationer, som uppstå mellan de ingående vinklarnes och räta liniernas storlekar samt de uppkommande figurernas och kropparnes yt- och rymdinnehåll, och därigenom äfven härleda de generela vilkoren för nämda figurers och kroppars likhet och olikhet.*

För att lösa denna uppgift, har elementar-geometrien att grunda sig ej blott på storheters i allmänhet egenskaper, utan ock på det som är säreget för de geometriska. Geometrien konstituerar sålunda åt sig en ur dess eget väsen med nödvändighet gifven särskild metod och en för den allena gällande princip för likhet och olikhet. Denna senare är *kongruensprincipen*, enligt hvilken de geometriska storheter äro lika stora, som kunna till alla delar jämt inpassas i samma rum. Härvid är att märka, att emedan en begränsad linie, figur eller kropp kan genom delars afskiljande och förflyttning erhålla mångfaldigt olika former, utan att dess storlek förändras (ty det hela är lika med alla sina delar tillhopa, i hvilken ordning de än tagas), så kunna linier, ytor och kroppar i allmänhet (icke vinklar) vara lika stora, utan att vara kongruenta, ehuru de alltid måste kunna i tanken göras kongruenta genom formförändring. Däremot äro tvänne geometriska storheter olika stora, om en del af den ena kan göras kongruent med den andra. — Den geometriska metoden är *åskådningens* metod, nämligen åskådning, ej af ofullkomliga ritningar eller modeller, hvarmed man blott har till syfte att lätta den geometriska uppfattningen, utan åskådning af storheternas konstruktion i rumsbegreppet. Ur ofvan anförda sammanfattning af omedelbart till full påtaglighet insedda grundåskådningar, hvilka jämte den allmänna storhetsläran utgöra geometriens premisser, söker man med stöd af sagde kongruensprincip och en fortgående oomtvistlig åskådning, steg för steg logiskt härleda andra geometriska sanningar, hvilka icke, såsom de förra, kunna omedelbart inses.

Jag vill nu vända mig särskildt till den elementära **plana** geometrien. Af det som nyss nämts om elementar-geometriens uppgift följer, att den elementära plana geometrien har att sysselsätta sig med *den räta linien*, *vissa enkla system af räta linier i samma plan, vinklarne dessa bilda med hvarandra och ytorna som de innesluta.* Det följer äfven, att man förberedelsevis bör ur ofvan gifna allmänna sammanfattning af **geometriska grundåskådningar** utveckla innehållet, för så vidt det gäller dessa här ifrågavarande system af räta linier i samma plan.

Betraktom då en rät linie OA (fig. behagade läsaren själf upprita eller tänka sig), som har sin ändpunkt O på en annan rät linie BC. Den bildar å ömse sidor om sig tvänne vinklar, som mäta olikheten mellan riktningarna OA och OB samt OA och OC. Dessa vinklar, i allmänhet olika, blifva för ett visst enda läge hos OA lika stora och benämnas *räta* (R). 2 R blir därför måttet på olikheten mellan riktningarna OB och OC eller den vinkel dessa riktningar göra med hvarandra. Däraf följer lätt, att vinklarne AOB och AOC tillhopa alltid äro = 2 R, samt att, om AO utdrages åt O, de motstående vertikalvinklarne blifva lika stora. — Vid AO's och BC's skärning är att märka följande vigtiga gränsläge: om nämligen punkten A hålles fast, och skärningspunkten O flyttas allt längre och längre bort utefter BC, så faller för hvarje, äfven den minsta, förflyttning af O skärningslinien AO's nya läge helt och hållet utanför det gamla, och linien genom A närmar sig, delen AO från den ena sidan och den åt A till utdragne delen af linien från den andra sidan, obegränsadt (huru nära som hälst) intill ett läge, då linien AO ej längre råkar linien BC, utan säges gå genom A *parallelt eller jämlöpande* med denne. Och omvändt: om en rät linie OAO' går genom en punkt A parallelt med en annan rät linie BC (d. v. s. ligger i samma plan med BC utan att råka), så måste man erkänna såsom en påtaglig åskådningssanning, att om OAO' med huru liten vinkel som hälst afviker ur det med BC parallela läget och med sin ena del AO närmar sig det håll, hvaråt BC befinner sig, med den andra delen AO' aflägsnar sig därifrån, kommer OAO' att åt det håll, dit närmandet skett, åt O till, skära BC.

Efter utredandet af dessa för den plana geometrien grundläggande åskådningssanningar följer det af ämnets vidare utveckling, att man öfvergår till *triangel*-läran, och som af det nu sagda inses, att systemet: *2 parallela linier, som skäras af en 3:dje,* utgör gränsläget för de trianglar, som bildas genom den ena parallela liniens afvikande åt ena eller andra sidan, så vill jag behandla detta fall i samband med läran om trianglar och börjar, för öfversigts skull, med att uppställa följande hufvudrubrik.

A. Om trianglars kongruens. Om likhet och olikhet hos vinklar och sidor, som ingå i en triangel eller i ett system af 2 parallela linier, skurna af en 3:dje. (Om parallelogrammer).

Innan jag fortsätter och utvecklar innehållet af detta, vill jag först uppställa en princip, som, så vidt jag vet, icke förut tillämpats i någon lärobok i elementar-geometri och som lyder: *man bör på genaste vetenskapliga väg söka nå elementargeometriens mål.* Jag har ofvan angifvit, hvilket detta mål är enligt min uppfattning. Min uppgift skall nu blifva att söka utstaka raka vägen dit, utan att göra någon sidoafvikning. Detta vill jag göra därför att jag anser onödiga omvägar förkastliga och den utvecklingsgång, som från principerna drager raka hufvudvägen fram till målet, vara i vetenskapligt hänseende den riktigaste. Ingalunda förbiser jag den praktiska nödvändigheten af att lärjungarne ändock då och då stanna och uppehålla sig vid sidan af denna väg, för att sysselsätta sig med nyttiga tillämpningar eller skärpa sin geometriska blick med lämpliga öfningssatser, men äfven betraktar jag det såsom en hufvudsak, att särskildt fästa lärjungarnes uppmärksamhet på det väsentliga, på sakens egentliga kärna, så att de oaktadt nödvändiga afvikningar och tillagda detaljer behålla i sigte utvecklingens ledtråd.

I min framställning behöfver jag blott antydningsvis * utföra bevisningsgången, emedan jag kommer att röra mig på ett af alla väl kändt område. Med öfningssatsers och applikationers upptagande och gruppering vid sidan af ämnets utveckling kommer jag vid detta tillfälle icke att sysselsätta mig.

Till utgångspunkt väljer jag den euklideiska satsen I,4 om *tvänne trianglars kongruens.* (Direkt och symmetrisk kongruens). Beträffande *vinklarnes relativa storlekar* i en triangel eller ett system af 2 parallela linier, skurna af en 3:dje, följer då genast

1:o) Eukl. I,16.

Följdsats I,17. — Trianglars indelning med afseende på vinklarnes beskaffenhet.

2:o) Eukl. I,29. Bevisas med lätthet ur den ofvan framstälda grundåskådningen om parallela linier.

Omedelbart följa nu omvändningarna till 1:o och 2:o, d. ä. det euklideiska 12:te axiomet och Eukl. I,27, 28.

Följdsats af detta system af 4 sammanhörande satser blir nu Eukl. I,32 med korollarier.

Beträffande den frågan, huru *sidor och vinklar i en triangel ömsesidigt bestämma hvarandra till likhet och olikhet,* erhåller man med lätthet ett nytt system af 4 sammanhörande satser, nämligen:

1:o) Eukl. I,5. Bevisas t. ex. genom tänkt midtitudelning af toppvinkeln.

2:o) Eukl. I,18.

Häraf omedelbart omvändningarna, Eukl. I,6 och I,19.

Såsom följdsats fås (utom den i och för sig nästan axiomatiska I,20) följande: af de räta linier, som dragas från en punkt till en rät linie, är den minst som drages vinkelrätt; af de öfriga etc. etc.

Afdelningen bör sedan afslutas med en fullständig analys af *vilkoren för trianglars kongruens.*

Anm. Ett nästan nödvändigt hithörande tillägg utgöres af defin:en på parallelogram samt Eukl. I,34. — Olika slag af parallelogrammer.

Jag öfvergår nu till den plana elementar-geometriens 2:dra hufvudafdelning, där min framställning måste blifva något utförligare.

B. Om förhållandet mellan trianglars (parallelogrammers) ytinnehåll. Om trianglars likformighet. Om den allmänna relationen mellan en triangels sidor och vinklar.

Inledning. Definition på *höjder* i en triangel (parallelogram). — Af trianglar (parallelogrammer) med samma bas äro

* För ytterligare korthets skull använder jag hänvisningar till euklideiska satser, Strömers upplaga.

de lika stora som ha samma höjd, men triangeln (|| grammen) med den större höjden är > den med den mindre. Af trianglar (|| grammer) med samma höjd äro de lika stora, som ha samma bas, men triangeln (|| grammen) med den större basen är > den med den mindre. Omvändningar.

Om förhållandet mellan tvänne trianglars (|| grammers) ytinnehåll. Då storheter ej äro lika stora, nöjer man sig ej med att hafva bevisat den ena vara större, utan man begär att finna deras förhållande, såsom bestämdt af förhållandena mellan andra storheter, som för de förra äro bestämmande. Förhållandet mellan 2 hvilka som hälst trianglars (|| grammers) ytinnehåll härledes med stöd af nyss angifna speciela vilkor för deras likhet och olikhet och bestämmes af deras basers och motsvarande höjders proportioner på följande sätt:

Först visar man, att *trianglar (|| grammer) A, B, som hafva samma höjd, förhålla sig såsom sina baser a, b,* samt att *trianglar (|| grammer), som ha samma bas, förhålla sig såsom sina höjder.* Beviset för dessa satser i deras generela form (inkommensurabla baser eller höjder) är beroende af valet af definition på lika proportion. Användes den theorellska (A. G. Theorell, Proportionslära, Sthm 1870), som jag för min del anser lämpligast, så skulle det här gälla att bevisa, att om jag tager samma parter hv. s. h. af B och b (hvilket sker genom att dela basen b i det antal delar, som är i fråga, samt sammanbinda delningspunkterna med triangeln B's spets), så skola de, om de innehållas, städse innehållas lika många gånger i hvar sin af A och a; — ett bevis som är alltför lätt för att här behöfva utföras. *

Nästa steg, som nu kan omedelbart tagas, blir att visa, att *tvänne trianglar (|| grammer) hvilka som hälst hafva till hvar-*

* Beträffande proportionsläran eller den hällre s. k. allmänna storhetsläran har jag på annat ställe (Studier i den allm. storhetsläran och talteorien, Gradualdisp., Sthm 1871) sökt visa, att dess för talteoriens grundläggning och tillämpning på ett visst gifvet storhetsslag behöfliga innehåll inskränker sig till dels de satser, som omedelbart följa af eller stå i närmaste sammanhang med definitionerna, dels följande 3 grundteorem:

1. Om det helas alla delar hafva samma proportion till hvar sin storhet, så skall det hela hafva denna samma proportion till dessa storheters summa.

2. Om det hela och en dess del hafva samma proportion till hvar sin storhet, så skall den återstående delen af det hela hafva denna samma proportion till dessa storheters skilnad.

3. Om en storhet a har en proportion hvilken som hälst till en annan storhet b, så skola de storheter. A och B, som till hvar sin af a och b hafva samma proportion, sins emellan förhålla sig såsom desse. Och om A och B hafva olika proportion till hvar sin af a och b, så att A:a är > B:b, så skall A's proportion till B vara större än a's proportion till b.

andra en proportion, sammansatt af deras basers och motsvarande höjders proportioner till hvarandra; — hvaraf fås såsom korollarium det generela vilkoret för 2 trianglars (|| grammers) likhet, nämligen att *den enes bas och höjd äro proportionela inverse mot den andres bas och höjd.*

Nyssnämda sats utgör — på sätt som dock icke här behöfver närmare utredas — *planimetriens* grundval. Genom den erhålla vi de planimetriska uttrycken ab, ab/2 på respektive ytinnehållen af den || gram och den triangel, hvars bas är a och höjd b längd-enheter.

Om trianglars likformighet. Sedan vi nu fullständigt behandlat frågan om trianglars relativa storlek samt fastställt vilkoret för likhet i detta afseende, så följer det att framställa betydelsen af och vilkoret för tvänne trianglars likhet äfven med hänseende till *formen* eller deras likformighet. Det allmänna föreställningssättet om geometriska storheters likformighet kan lätt anknytas till den i det föregående framstälda uppfattning af en geometrisk kropp, enligt hvilken man först fäster sin tanke vid en viss punkt af kroppen och sedan låter den följa kroppens utsträckning utefter hela samlingen af de riktningar, som kunna tänkas utgå från denna punkt, ända till dess den når utsträckningarnas slut eller kroppens yta. Framställer man på sådant sätt för sin tanke ett kroppsligt föremål, t. ex. en parallelipiped, en kon o. s. v., samt sedan låter *alla* de nämda utsträckningarna antingen växa eller aftaga *i samma proportion,* så uppkommer en ny parallelipiped, kon etc., hvars utsträckningar, från den tagna utgångspunkten räknadt, alla hafva samma proportion till hvar sin motsvarande i den förra parallelipipeden, konen etc., och där äfven andra afstånd, nämligen de som tagas mellan motsvarande utsträckningars ändpunkter eller öfriga motsvariga punkter, af den allmänna geometriska instinkten tilldömas denna samma proportion. Sådana geometriska storheter, som motsvara tankens förstnämda föreställning, kallar man *likformiga,* och de instinktmässigt tillagda egenskaperna hos likformiga storheter bringar man genom geometrisk bevisföring till full medvetenhet.

I öfverensstämmelse med detta betraktelsesätt kallar jag *2 trianglar likformiga, om de hafva hvar sin lika stor vinkel samt de kringliggande sidorna i den ena triangeln äro proportionela med hvar sin af de kringliggande sidorna i den andra.* Efter en fullständig analys af vilkoren för trianglars likformighet är man sedan i stånd att visa, att i likformiga trianglar ej blott afstånden mellan den ena triangelns vinkelspetsar ha samma proportion till de resp. afstånden mellan den andras (den *lineära skalan* mellan den förra och den senare triangeln), utan äfven att afstånden mellan punkter hvilka som hälst å den ena triangelns sidor hafva denna samma proportion till afstånden mellan de motsvariga punkterna å den andra triangelns sidor, och afstånden mellan punkter, som i den ena triangeln tagas å dessa nya afstånd eller å dem och triangelsidorna, likaledes samma nämda proportion till afstånden mellan dem som på motsvarigt sätt tagas i den andra triangeln. Ja, dessa linier, som sålunda dragas, skära äfven hvarandra inom eller utom trianglarne, så att de afskurna segmenten i den ena triangeln ha samma proportion till hvar sitt motsvarande segment i den andra triangeln, nämligen alltjämt den *lineära skalans* proportion. Och då äfven trianglarnes motsvarande höjder ha den lineära skalans proportion, så blir förhållandet mellan trianglarnes ytinnehåll eller den s. k. *ytskalan duplicerad af den lineära.*

Likasom man ur likformighetens speciela fall, kongruensen, härleder relationen af likhet och olikhet mellan sidor och vinklar i en triangel, så har man att stöda sig på det generela likformighetsbegreppet, när man vill söka framställa **de allmänna relationerna mellan sidorna och vinklarne i en triangel.** — Det visar sig vid en förberedande undersökning af denna sak, att en vinkel, hvars ben äro bestämda till sin längd, växer med den motstående sidan, men ingalunda proportionelt med henne, samt att en vinkel är bestämd, då jämte den motstående sidan äfven de kringliggande sidorna äro bestämda, eller då åtminstone den motstående sidans förhållanden till hvar sin af de andra äro bestämda. Låter man, då vinkeln, som skall bestämmas, är $<$ en rät, den motstående sidan såsom katet bilda med vinkelns kringliggande ben en rätvinklig triangel, så blir vinkeln bestämd redan af den motstående sidans förhållande till blott endera vinkelbenet. Förhållandet till det vinkelben, som är hypotenusa, kallas vinkelns *sinus*. Om vinkeln, som skall bestämmas, är $>$ en rät, så faller perpendikeln från det ena benet mot det andra på det senares förlängning, men hans förhållande till det förra kallas ändock (den trubbiga) vinkelns sinus; hvaraf följer, att 2 vinklar, som tillhopa utgöra 2 räta, hafva lika stora sinus. Sinus för 0° är 0, sinus för 90° är 1.

Med användande af sinusbegreppet uttryckes nu sambandet mellan sidor och vinklar i en triangel på följande sätt:

Sidorna a, b, c i en triangel, hvilken som hälst, äro proportionela med sinus för de motstående vinklarne A, B, C.

Ty fäll perpendiklar från sidornas midtpunkter och sammanbind deras gemensamma skärningspunkt med vinkelspetsarne. De lika stora sammanbindningslinierna (triangelns s. k. större radier) bilda då med perpendiklarne och triangelsidornas hälfter hvar sin rätvinkliga triangel, i hvilka trianglar de vinklar, som stå emot de halfva triangelsidorna, alla 3 äro resp. = triangelns egna vinklar eller, i fall af trubbvinklighet hos den gifna triangeln, en af dem lika med supplementvinkeln. Häraf följer omedelbart, att a/sin A = b/sin B = c/sin C.

Man kan lätt visa, att sidor och vinklar, som uppfylla både detta vilkor och det förut framstälda om en vinkelsumma lika med 2 räta, verkligen kunna vid sammanställning bilda en triangel. *Det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att en grupp af 3 sidor och 3 vinklar skola vid sammanställning på visst sätt bilda en triangel är således, att vinklarnes summa utgör 2 räta samt att sidorna förhålla sig såsom de motstående vinklarnes sinus.*

C. Goniometrisk räkning.

För att kunna använda sinusteoremet till kalkyl af obekanta sidor och vinklar i en bestämd triangel, måste vi närmare lära känna arten af de talstorheter, som vi benämt sinus, så att vi kunna *räkna med dem.*

För detta ändamål är det behöfligt att utvidga vår föreställning om *vinkel.* Antagom fördenskull en vinkels ena ben fast, det andra rörligt kring vinkelns spets samt låt det rörliga först sammanfalla med det fasta, men sedan vrida sig i, till en början, alltjämt samma led. Vridningens storlek blir då proportionel med vinkeln, som det rörliga benet gör med det fasta — ända tills vinkeln uppnått en storlek af 2 räta eller 180°, den största vinkel vi hittills lärt känna. Men om man nu fortsätter vridningen och utsträcker betydelsen af vinkel därhän, att *det rörliga benets vinkel med det fasta anses fortfarande vara proportionel med vridningen,* så bringa vi det rörliga benet att göra vinklar med det fasta, som uppgå till 3, 4 ja t. o. m. 5, 6, 7 etc. räta eller hv. s. h. antal grader. — Verkställer man vridningen i motsatt led mot den, som nu antagits gifva *positiva* vinklar, erhåller man *negativa* sådana. Och liksom vinklar kunna anses beskrifna i den ena eller andra leden, så kan äfven hvarje rät linie anses hafva 2 motsatta riktningar, den ena positiv, den andra negativ. Den kallas då *axel.*

Med stöd af dessa utvidgade begrepp och det som här förut förekommit är man nu i stånd att utan vidare förutsättningar (om cirkeln behöfver man känna blott dess och dess tangents definition) framställa, *icke blott* huru sinus bestämmes geometriskt för vinklar i nämda utvidgade bemärkelse och huru de öfriga s. k. trigonometriska talen, *cosinus, tangent, cotangent* o. s. v., definieras och, liksom sinus, representeras genom positiva och negativa linier, *utan äfven*, huru man härleder de för läran om de trigonometriska talen grundläggande formlerna

$$\cos (a + b) = \cos a . \cos b \mp \sin a . \sin b$$
$$\sin (a + b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b,$$

hvilka båda gifva, bland annat, för passande värden på a och b den vigtiga relationen $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Det är just dessa och andra ur dem härledda trigonometriska formler, som innehålla de särskilda *räknelagar*, hvilka, utom de vanliga aritmetiska, gälla för de trigonometriska talen och utan hvilkas kännedom det icke vore möjligt, vare sig att uträkna de särskilda trigonometriska liniernas talvärden till praktiskt bruk, eller använda sinusteoremet till trianglars solution i de fall, då aritmetiska operationer ej äro tillräckliga att gifva de obekanta. I de kända s. k. 1:sta och 2:dra händelserna äro sinusteoremets formler i deras ursprungliga skick dugliga att, jämte formeln för vinklarnes summa och ytformeln, användas till beräkning af de obekanta elementen i en triangel. I den 3:dje händelsen behöfvas några ur de trigonometriska liniernas definitioner omedelbart följande transformationer. Men i den 4:de händelsen, *då de 3 sidorna äro gifna*, är det icke nog med aritmetisk kalkyl för att åtkomma de obekanta vinklarne och ytan, det behöfves äfven *goniometrisk*. Denna utföres nu, med hjälp af nyss angifna formel för sinus för 2 vinklars summa, sålunda.

Eftersom man har $a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C$ och $A + B + C = 180^0$, så blifva $a = b \sin A / \sin B$; $b = c \sin B / \sin C$; $\sin A$ eller $\sin (B + C) = \sin B \cos C + \cos B . \sin C$, hvaraf åter följer, genom insättning i den första af värdet på $\sin A$ samt lämplig substitution med hjälp af den andra, $a = b \cos C + c \cos B$. På analogt sätt $b = c \cos A + a \cos C$ och $c = a \cos B + b \cos A$.

Ur dessa formler åter erhållas, genom multiplikatiou af den 1:sta med a, den 2:dra med b, den 3:dje med c, teckenförändring i en och addering,

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc . \cos A, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\, ac . \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab . \cos C, \end{array}\right.$$

hvilka formler gifva de obekanta vinklarne A, B, C.

Såsom specialfall, för $A = 90^0$, erhålles $a^2 = b^2 + c^2$, hvilken sistnämde vigtiga sats emellertid här lättast fås omedelbart ur sinusteoremet genom användning af formeln $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$. Med tillhjälp af formeln $a^2 = b^2 + c^2$ kan man åter, såsom bekant, på rent planimetrisk väg erhålla följande uttryck på en triangels area ($\triangle$), hvari endast de tre sidornas längder ingå

$$\triangle = \sqrt{p\, (p - a)\, (p - b)\, (p - c)}, \text{ där } p = \tfrac{1}{2} (a + b + c)$$

Finner man ofvanstående utveckling af den plana elementar-geometriens (inclusive "trigonometrien") hufvudinnehåll ur dess yttersta principer riktig och den möjligt kortaste, så kan det sedan ifrågasättas, om den är användbar som grundlag till lärobok samt om den låter förena sig med den konkreta behandling af ämnet, som är behöflig för nybegynnare. Om någon drager det förra i tvifvelsmål, så vill jag å min sida häfda den sanning, att människan på alla områden måste till slut foga sig efter det principielt riktiga — en egenskap, som väl bör tilldömas min grundtanke att söka målet på genaste väg — och att svårigheterna vid tillämpningen af en ny, men riktig grundsats alltid äro endast öfvergående. Huru åter min läroboksplan skulle låta sig förena med ett omsorgsfullt val af konkreta utgångspunkter samt lämpliga och tillfyllesgörande praktiska tillämpningar, särskildt beträffande den s. k. geometriska teckningen, skall det återstå för mig att framdeles visa.

Och hvad vore vinsten? Jo, enligt min mening, en för lärjungarne välbehöflig öfverblick öfver det väsentliga af elementar-geometriens bevisföring, som tillika finge på ett naturligt systematiskt sätt utveckla sig ur sina yttersta principer, vidare en stark reduktion af det nu för tiden kanske allt för mycket på bredden gående studiet af elementar-geometrien och därmed en tidsvinst, som kunde användas på ett mera extensivt studium af matematiken, än som för närvarande medhinnes eller är föreskrifvet. 1886 aug. 7.

K. H. Sohlberg.

Professor E. Tegnér mot Rättstafnings-sällskapet.

"Det är med rättstavningsfrågan som med väderleksfrågan: den har praktiskt intresse för enhvar af oss, och enhvar af oss vill ega — jag tillägger: har någon rätt att ega — sin lilla mening därom."
E. Tegnér.

Det var naturligt, att det nya rättstafningssällskapet med sin djärfva framtidsortografi skulle väcka oro i lägret bland vännerna till vårt gamla hederliga skrifbruk. Så har det varit i alla tider, då ortografiska nyheter bragts på tal, och så kommer det väl alltid att förblifva. Motståndet synes äfven arta sig att bli lika energiskt som under det Hazelius-Rydqvistska fälttåget. En följd af detta är emellertid, att de sista dagarnes nystafvare innehafva en vida fördelaktigare position än 1869 års män.

Två afdelningar af deras motståndare kunna anses slagna; de reaktionäre, som af etymologiskt intresse vilja reformera staf-