omsorgsfullt studeras med de under liggande grunderna, utgöra med få luckor en väl afpassad kurs i matematikens och fysikens *elementer*. Vi hafva väl ännu icke någonting jemnförligt med de engelska «examens-papperen» med sina höga anor, hvarifrån Todhunter skördat sina förträffliga exempelsamlingar; säkerligen skall dock — vi hoppas det — inom en måhända icke alltför aflägsen framtid en litteratur af pröfningssatser hos oss uppstå, hvilken t. o. m. för utländingen skall vittna om det matematiska elementarstudiets vackra ståndpunkt i Sverige. Tiskriften skall med synnerlig uppmärksamhet följa dessa satser; och, då hon icke saknar utsigt, att tillfälle dertill beredes henne, skall hon intaga de bästa för *mogenhetsexamen utförda skrifningarna*, hvilka kunna tjena som prof på de mera försigkomna examinandernas ståndpunkt och såsom efterföljansvärda mönster för kommande examinandi.

D.

Anmälan af Weströms och Lindmans läroböcker i geometri.

Af F. W. Hultman.

1. **Lärobok i geometri, omfattande de sex första böckerna af Euclides**, af C. A. Weström, Ph. Mag., adj. vid högre elementarläroverket i Wisby. Stockholm 1867. Pris: 75 öre.

Förf. har indelat sin lärobok i fem böcker. Den första handlar om räta linier och trianglar (motsvarande ungefär Eukl. I: 1—I: 32), den andra om parallelogrammer (Eukl. I: 34—II: 14), den tredje om cirkeln och reguliera månghörningar (Eukl. III, IV). Den fjerde boken (Eukl. V) är proportionslära, och den femte visar proportionslärans tillämpning på ytor och plana figurer (Eukl. VI).

Detta arbete har liksom Bråkenhjelms upplaga af Euklides den förtjensten att begagna korta beteckningssätt, såsom $+$, $—$, $\wedge$, $\|$, $\sim$ m. m. Bevisen blifva derigenom lättare att genomläsa, äfvensom bokens volym betydligt förminskad. Genom att här och der förändra de euklideiska definitionerna, omkasta satsernas ordningsföljd har förf. sökt förenkla bevisen för flere satser. Af sålunda förenklade satser nämna vi följande:

1. Vinklarne vid basen i en likbent triangel äro lika stora. Beviset sker genom att dela vinkeln vid spetsen midt i tu.

2. Om i en triangel vinklarne vid basen äro lika stora, så är triangeln likbent. För bevisets skull drager man från spetsen en mot basen vinkelrät linie.

3. Att förvandla en gifven rätlinig figur till en triangel. Konstruktionen är den vanliga att skaffa bort det ena hörnet efter det andra.

4. Att rita en triangel sådan, att hvar vinkel vid basen är dubbelt så stor som vinkeln vid spetsen. Den eleganta upplösningen, som ej förutsätter någon kännedom af Euklides' tredje bok, sker på följande sätt. Man delar en rät linie AB så, att $AB \cdot BC = \overline{AC}^2$, uppritar på BC såsom bas en likbent triangel BCD, der $BD = CD = AC$. Triangeln ABD är den begärda.

5. Om tvenne cirklar tangera hvarandra, så ligga medelpunkterna och tangeringspunkten i samma räta linie.

Efter att hafva anfört arbetets förtjenster, vilja vi påpeka några punkter, i hvilka vi ej kunna instämma med förf. De förnämsta äro följande:

1. Förf:s bevis för den satsen, «två trianglar äro kongruenta, om de tre sidorna i den ena triangeln äro lika stora med hvar sin af de tre sidorna i den andra«, är ofullständigt, enär förf. ej bevisat den satsen, att tvenne cirklar ej kunna skära hvarandra mer än i två punkter, en på hvardera sidan om linien, som förenar cirklarnes medelpunkter.

2. I sitt bevis för satsen «om två räta linier äro parallela och en tredje linie skär dem, så är hvarje yttre vinkel lika med motsvarande inre« gör förf. en cirkelgång. Förf. låter nämligen den ena af de parallela linierna flytta sig, alltjemt bibehållande sin egenskap att vara parallel, tills den inträffar på den andra linien, och då måste — så sluter förf. — utanvinkeln och innanvinkeln sammanfalla. Kan det ej hända, att under denna flyttning utanvinkeln ändrar storlek? Beviset för att denna vinkel ej ändrar storlek är detsamma som att bevisa sjelfva satsen.

3. Förf. anför på flere ställen bokstäfver, hvilkas betydelse ej är fullt tydlig. Så t. ex. i satsen «att från en punkt A utom en linie BC draga en mot densamma vinkelrät linie« säger förf.: «tag A till medelpunkt och rita en cirkel med en radie sådan, att cirkeln skär BC i D och E, skär DE midt i tu och drag AD, AF och AE.« Här synes det nästan som om D och E vore ett par på förhand erhållna punkter, genom hvilka man skall lägga en cirkelperiferi. Vidare är det alldeles icke klart, att AF skall vara den linie, som skär vinkeln midt i tu.

4. Definitionen «i rätvinkliga parallelogrammer äro alla vinklarne räta« bör heta: sådane pgrmr, i hvilka alla vinklarne äro räta, kallas rätvinklige.

5. På storleken af delen AH af en linie AB, som är delad så, att $\overline{AH}^2 = AB \cdot BH$ har förf. funnit tvenne uttryck utan att förkasta eller visa betydelsen af det ena af dessa.

6. I beviset för satsen, att medelpunktsvinkeln ACB är dubbelt så stor som periferivinkeln ADB stöder förf. den sanningen, att $2 . \wedge CDA + 2 . \wedge CDB = 2(\wedge CDA + \wedge CDB)$ på den satsen, att om man lägger lika till lika, så blifva de hela lika, i stället för att denna sanning endast är en tillämpning af satsen $m(A + B) = mA + mB$, eller, hvilket är detsamma, af den sanningen, att ordningen af termerna i en summa är likgiltig.

7. I satsen «om en cirkelbåge ADB är gifven, att finna medelpunkten till cirkeln«, felas bevis för, att man erhåller samma medelpunkt hvilken punkt på bågen AB man än må välja.

8. Förf:s sätt att från en punkt på periferien draga en tangent till cirkeln visar ej, att det är omöjligt att genom denna punkt lägga mer än en tangent.

9. I öfverensstämmelse med förf:s plan att lemna enkla bevis hade konstruktionerna för uppgifterna «att från en gifven punkt utom en cirkel draga en tangent till densamme« och att på en gifven rät linie upprita ett segment, som i sig innehåller en gifven vinkel« bort utbytas mot vida enklare.

10. Då förf. skall bevisa, att två lika stora qvantiteter A och B hafva samma förhållande till en och samma C, så säger förf.: emedan $A = B$, så är $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$. Detta sitt påstående stöder förf. på ax. 4, hvilket låter: om två qvantiteter äro lika stora och man tager hvardera lika många gånger eller delar dem i lika många lika stora delar, så äro mångfalderna eller delarne lika stora. Tillämpningen af detta axiom förutsätter att C är ett helt eller på sin höjd ett brutet tal. Beviset duger således ej då C är en storhet hvilken som helst (en kropp, en vinkel o. s. v.), utan blott för det fall, att C är ett tal helt eller brutet och således på grund af defin. 4, då också A och B äro tal.

11. Satsen $A : B = mA : mB$ bevisar förf. på följande sätt: $A : B = \frac{A}{B} = \frac{mA}{mB} = mA : mB$ Rigtigheten af påståendet $\frac{A}{B} = \frac{mA}{mB}$ visar förf. ej, anser således detta kändt ur aritmetiken. De vanliga läroböckerna visa dock denna sats endast för det fall, att m är helt eller brutet tal, men ej för m lika med ett irrationellt tal. Författarens bevis är således ej tillräckligt allmänt. Denna och föregående punkt kunde möjligen antyda, att förf:ns proportionslära afser endast hela och brutna tal. Men då förf. har en sats så lydande: «om $A : B = C : D$, så är $\sqrt{A} : \sqrt{B} = \sqrt{C} : \sqrt{D}$", finner man, att han vill, att den skall gälla äfven för irrationella tal.

12. Vid satsen «uti hvarje analogi är produkten af de yttersta lika stor med produkten af de medlersta« hade förf. bort tillägga, att åtmin-

stone tvenne af storheterna skola vara tal, alldenstund man ej kan tala om en produkt af tvenne storheter, så framt ej den ena af dessa är ett tal. Att förf:ns proportionslära ej ensamt afser tal, synes deraf, att förf. ej tillåter termernas omvexling i en analogi, så framt man ej är förvissad om, att alla fyra äro af samma slag.

13. I beviset för satsen «trianglar som hafva samma höjd förhålla *sig till hvarandra som sina baser*« delar förf. upp den ena triangelns bas i oändligt många sinsemellan lika stora delar och säger sedan: emedan hvarje del är oändligt liten, måste han innehållas ett helt antal gånger i den andra triangelns bas. Detta påstående, som möjligen af den i ämnets svårigheter fullt invigde kan försvaras, är dock för nybörjaren obegripligt. Bättre är att undvika allt tal om oändligt små och först bevisa satsen för det fall, att baserna hafva ett ändligt gemensamt mått och sedan för det, då de icke hafva ett ändligt gemensamt mätt, hvilket senare bevis ej möter några svårigheter, om det hålles indirekt.

Samma anmärkning gäller förf:ns bevis af satsen: «uti lika stora cirklar förhålla sig bågarne till hvarandra som deras motsvarande medelpunktsvinklar«.

Af det föregående visar det sig, att proportionsläran och läran om parallela linier äro de svaga punkterna i förf:ns lärobok. Dessa äro ock utan tvifvel de svåraste kapitlen inom elementarmatematiken — de Pater-Noster-skär, på hvilka många författare af matematiska läroböcker förut strandat. Emellertid kunna vi ej underlåta att erkänna, det förf. bemödat sig att i en lättläst och kort bok meddela de vigtigaste satserna inom elementarmatematiken. (Forts.)

Böcker, utgifna 1867—1868.

Aritmetik och Algebra.

α) I Sverige.

Sievers, P. F. Första öfningsboken i räkning, med synnerligt afseende på en naturlig sammanbindning af muntlig och skriftlig räkning utarbetad. 12:o 138 s. Sthm Seligmann. Inb. 0,85.

Landgren, C. J. Hufvudräkningskurs för Folkskolelärare-seminarier, folk- och småskolor. Sthm. Hjerta. 2:a uppl. 12:o. 0,75.

Åberg, Lärobok i räknekonsten. För folkskolor och nybörjare. 8:de uppl. 12:o. 56 s. och 4 s. facittabeller. 0,25. (40,000 ex. hafva utgått på några år)

Kindvall, C. A. Räknelära för folkskolor och begynnare. Warberg. Inb. 0,40.

var han åren 1821—34 under namn af Lord *Oxmantown* parlamentsledamot för Kings County, hvarest Parsonstown är beläget. Till ledamot af Royal Society nämndes han 1831, och till dess president 1849; han var dessutom kansler för universitetet i Dublin.

Född 1800 dog han den 31 Oktober 1867.

ROB. THALÉN.

AFDELNING IV.

Anmälda skrifter.

2. **Euklides' fyra första böcker, med smärre förändringar och tillägg.** Af C. F. LINDMAN, lektor vid Strengnäs högre elementarläroverk Stockholm 1867. Pris 1,50.

(Forts. fr. sid. 99).

Det är oss ett kärt nöje att för vännerna af det matematiska studiet få presentera vår gamle bepröfvade Euklides i den drägt, hvari förf. af ofvanstående arbete klädt honom. Förf. har följt Euklides sats för sats. De förändringar i bevis och stil, som förf. gjort, hafva sin grund förnämligast i pedagogiska skäl: korthet, redighet, metodik, enkelhet, antydningar om sättet att tänka för att finna de konstruktioner, hvilka äro behöfliga för en uppgifts lösande o. s. v.

Genom att begagna teckenspråket (+ , —, > , ∧ o. s. v.) har förf. fått sina bevis korta och lätta att öfverse. Framställningen är synnerligen redig och metodisk. Sålunda förekomma under hvarje teorem, sedan satsen blifvit uttryckt, rubrikerna: hypotes och tes, och under en mängd af problemen rubrikerna: gifvet, sökt, upplösning och bevis. På flere ställen har förf. vid problemens upplösning på ett särdeles pedagogiskt sätt gifvit läsaren en ledtråd, enligt hvilken han sjelf kan finna lösningen. Som exempel på förf:ns pedagogiska metod välja vi den för oss alla välbekanta satsen:

»Att på en till längd och läge gifven rät linea *AB* upprita en liksidig triangel.

Gifven: räta linien AB.

Sökt: en punkt, hvars afstånd från A och B är $= AB$.

Upplösning: Alla punkter, hvilkas afstånd från A är $= AB$, ligga på en cirkelperiferi, som går genom B och har A till medelpunkt. Alla punkter, hvilkas afstånd från B är $= BA$, ligga på en cirkelperiferi, som går genom A och har B till medelpunkt. Den sökta punkten skall uppfylla begge dessa vilkor; således ligga på båda de nämnda periferierna, d. v. s. i den eller de punkter, der de träffas. Tag derföre o. s. v.

Bevis. Emedan A är medelpunkt till cirkeln BCD, så är o. s. v.«

För åtskilliga satser har förf. lemnat enklare bevis. Så t. ex. bevisar han den satsen, att vinklarne B och C vid basen BC i en likbent triangel ABC äro lika stora derigenom, att han tänker sig den likbenta triangeln ABC flyttad så, att han får läget $A'B'C'$. Af kongruensen hos trianglarne ABC och $A'C'B'$ erhåller han $\wedge B = \wedge C' = \wedge C$ *.

Satsen »att upprita en triangel, der hvardera af vinklarne vid basen är dubbelt så stor som vinkeln vid spetsen har förf. i likhet med Weström ** löst utan att förutsätta kännedom om Euklides' tredje bok.

Satserna om cirklars tangering äro förenklade. Andra bokens satser äro behandlade dels med, dels utan konstruktion äfvensom algebraiskt. Flere satser äro tillagda dock utan att rubba nummerföljden. Bland sådana nämna vi endast det fjerde fallet för trianglars kongruens (2 sidor och motstående vinkel), och en rät linies delning i huru många lika stora delar som helst.

I slutet af sitt arbete har förf. ett tillägg, der han visar, huru man vid lösningen af ett uppgifvet problem kan förfara än syntetiskt och än analytiskt. Sjelf gör han tillämpning deraf på flere vackra satser.

Tryck, papper och figurer äro ypperliga.

Vi öfvergå till betraktande af några punkter, i hvilka vi äro af en något skiljaktig mening med förf. Följande äro de vigtigaste.

1. Först vända vi oss emot definitionen på en linie, såsom en längd utan bredd. Man kan fråga: finnes det någon längd, som har bredd? En likartad anmärkning gäller definitionen på yta.

2. Definitionerna på trubbvinkliga, rätvinkliga och spetsvinkliga trianglar böra flyttas fram näst efter den satsen, att i hvarje triangel är summan af två vinklar mindre än två räta. Först då blifva de fullt klara. En sådan framställning strider ej emot förf:ns åsigter för öfrigt.

3. Definitionen på en qvadrat innehåller för många bestämningar, alldenstund några följa af de öfriga. Den kan lyda: den fyrsidiga figur,

* Anmärkningsvärdt är att detta bevis samtidigt offentliggjordes i Pædagogisk tidskrift af Aulin. Decemberhäftet.

** Äfven i afseende på detta bevis inträffar det nästan samtidiga offentliggörandet i tvenne arbeten, efter hvad vi nu sett.

som har alla vinklarna lika stora, och uti hvilken tillika någon vinkel är rät, kallas en qvadrat.

4. Vid det tredje postulatet «att taga hvad punkt som helst till medelpunkt och rita en cirkel, hvars periferi går genom hvad punkt som helst« har förf. gjort det tillägget: «detta är, annorlunda uttryckt*, att med godtycklig medelpunkt och radie rita en cirkel«. Här tro vi, att förf. missförstått Euklides. Så väl de euklideiska ordalagen, som tillvaron af satserna 2 och 3: «att från en gifven punkt draga en rät linie lika stor med en gifven rät linie«, och «att, då två olika stora räta linier äro gifna, afskära af den större ett stycke lika stort med den mindre«, visa tydligt att Euklides förutsätter väl, att man på fri hand kan genom en gifven punkt upprita en periferi kring en gifven medelpunkt, men ej att man kan med godtycklig radie och medelpunkt upprita en cirkel. Detta är vida svårare och förutsätter att man genom minnet eller åskådningen skulle vara i stånd att upprita cirkeln, blott jag kommer ihåg eller ser radiens storlek. Vi hålla ej på Euklides' tredje postulat, vi blott bestrida förf:ns påstående, att detta postulat och förf:ns uttryck på det äro samma sak. På grund häraf erkänna vi ej, att de af förf. tillagda lösningarna af satserna 2 och 3 äro rigtiga, så framt man ej får utbyta Euklides' tredje postulat emot förf:ns uttryck. I detta fall åter anse vi, att de Euklideiska lösningarna äro både öfverflödiga och oklara, alldenstund de göra en enkel sak invecklad.

5. I satsen (I. 22): «att upprita en triangel af tre gifna räta linier«, har förf. uraktlåtit att lemna bevis för, att cirklarne skära hvarandra.

6. I satsen (I. 24): «om två sidor AB, AC i en $\triangle ABC$ äro lika stora med hvar sin af två sidor DE och DF i $\triangle DEF$, men mellanliggande vinkeln A i den förra är större än mellanliggande vinkeln EDF i den senare, så är basen BC i den förre $>$ basen EF i den senare«, har förf. lemnat ett bevis, som gäller för alla händelser. För fullständighetens skull hade dock bort visas, att den der förekommande linien EG verkligen alltid skär linien DF.

7. Tillägget vid det fjerde kongruensfallet (I. 26 A) bör heta (såsom Todhunter har det): «likväl med det förbehåll, att de öfriga vinklarne C och F äro antingen båda spetsiga eller båda trubbiga eller en af dem rät. Satsen blir derigenom något allmännare än förf. har den.

8. I beviset för det s. k. 12 axiomet hade förf. bort först bevisa, att den yttre $\wedge\ KAD >$ den motsvarande inre $\wedge\ ABF$ på samma sida, innan förf. i punkten A vid KA satte en $\wedge = \wedge\ ABF$.

9. För satsen (III. 13) «en cirkel kan ej tangera en annan i flere än en punkt« har förf. ett mycket bra bevis i föregående sats 10. Men förf:ns tillägg: «hvartill kommer, att, om de kunde tangera hvarandra

* Kursiveringen är gjord af granskaren.

i två punkter, så skulle linien, som sammanbinder medelpunkterna, gå genom båda, hvilket är omöjligt«, bevisar ingenting. Om nämnl. man ej får förutsätta satsen 10, så bör tesen i sats 11 förändras till följande: om två cirklar tangera hvarandra innantill, så ligga medelpunkterna i samma räta linie med någon af de möjliga tangeringspunkterna.

10. I satsen IV. 2: »att i en gifven cirkel ABC inskrifva en $\triangle$, som är likvinklig med en gifven $\triangle DEF$ har förf. utom den Euklideiska lemnat en annan upplösning. Denna andra upplösning, ehuru rigtig, är svårfattlig derföre, att förf. ej lemnat bevis för att verkligen linien BA skär cirkeln.

11. På några ställen t. ex. vid I. 25, I. 26 A) hade de indirekta bevisen med fördel kunnat utbytas mot direkta. Detta är dock en smaksak.

12. Upplösningen af satsen »att från en gifven punkt A utom en gifven cirkel draga en linie så, att det stycket af denna, som blir korda i cirkeln, erhåller en gifven längd BC. är mer invecklad, än den behöfver vara. Enklare är väl att i den gifna cirkeln inpassa en korda lika med den gifna linien BC. att rita en med den förra koncentrisk cirkel, som tangerar denna kordan och att från den gifna punkten till den sist erhållna cirkeln draga en tangent.

Orsaken till att förf. ej vidtagit de förändringar, vi i föreg. punkten antydt, torde till en del bero af förf:ns pietet för Euklides. Vi sluta denna anmälan med att tacka förf. derför, att han i detta arbete meddelat oss frukterna af en under många år förvärfvad lärareerfarenhet, förvissade om, att detta hans goda arbete länge skall gagna vårt fosterlands ungdom.

F. W. Hultman.

Tidsskrift for Mathematik. Udgifvet af Camillo Tychsen. Kjøbenhavn, Otto Schwartz forlag.

Denna tidskrift, som i år kommer att fira sin tionde födelsedag, borde vara allmänt känd och spridd bland oss svenskar. Redan den omständigheten, att tidskriften har en förläggare, som fortfar i denna sin egenskap, vittnar att tidskriften fullgör sin bestämmelse att främja det matematiska och fysiska studiet. Ännu mera finner man detta, då man i densamma får läsa utmärkta afhandlingar af Danmarks ypperste matematiker och fysiker, de berömde professorerna Ramus, Jürgensen, Oppermann, Steen, d'Arrest, Schjellerup, docenterna Lorenz, Thiele m. fl. för att ej tala om redaktören d:r Tychsen sjelf, hvilkens afhandlingar i differentialeqvationers integrering väckt den lärda verldens uppmärksamhet. Man får i denna tidskrift läsa gedigna uppsatser inom den gamla och nyare geometrien, inom de första elementen af algebran ända till den hittills hos oss ännu jemnförelsevis litet kända lösningen af femte gradens eqvationer; man får der göra bekantskap med de mest delikata undersökningar inom sannolikhetskalkylen eller talteorien. De senare årgångarne innehålla en hel följd af elementära uppsatser, benämnda matematiska lekar, för hvilka lemnas en matematisk teori. Dessa lekar bestå förnämligast i räknegåtor, kortkonster m. m. Som exempel framställa vi följande tvenne allmänt kända: huru skall man flytta hästen på ett schackbräde, för att den skall passera alla rutor utan att komma två gånger på någon? huru skall man med ett tre-kannekärl och ett fem-kannekärl mäta upp fyra kannor ur ett fullt åtta-kannekärl?