sänkande i de förras verk, så borde med densamma ända från början förenas en sträfvan att förstå de senare. En samling reproduktioner af hvad ett land frambragt af hög, bildande konst och ett antal sådana verk, som kunna förbereda deras förståelse, t. ex. konstnärliga bilderböcker, höra till hvarje god samling af dess literära alster.

Vid anläggandet af en samling konstreproduktioner torde framför allt utvecklings- och jämförelsemomenten böra beaktas. Man tänker sig icke in i ett konstverk, man försänker sig i det. En sådan försänkning förmedlas ej genom ord utan genom åskådning. Taga vi t. ex. en man som Alfred Rethel. Höjdpunkten betecknas af hans verk: »Der Tod als Freund», »Der Tod als Würger» och »Der Todtentanz». De karakteriseras af den fulländade harmonien mellan germansk innerlighet och italiensk linieskönhet. Blicken för denna syntes, af så utomordentlig vikt i uppfattningen af den tyska andan, vinnes bäst genom att betrakta konstnärens sträfvan mot densamma i dess olika faser, representerade genom bilderna: »Daniel in der Löwengrube», »Auffindung der Leiche Gustav Adolphs» och »Die Justitia über dem Mörder herschwebend». Vidare genom samme konstnärs jämförelse med Dürer och Bonelius, hos hvilka den hårda linien ännu sitter i handen, och en sammanställning af alla tre med italienska renaissancemålare. Utvecklingen hos Rembrandt är också synnerligen karakteristisk och ger en ny sida af den germanska egenarten.

Nästa gång skall jag utbreda själfva materialet till påseende, därvid likväl inskränkande mig till det tyska språkområdet.

Om rötter, potenser och logaritmer.

Af Edvard Göransson.

En matematiker, hvars omdöme jag skattar högt, yttrade till mig i slutet af 1880-talet, då han själf nyss genomgått sitt profår: »I hela skolmatematiken är det intet kapitel, där bristerna i framställningen från vetenskaplig synpunkt så tydligt framträda som i det, som handlar om rötter och potenser samt den därpå grundade framställningen om logaritmer». Måhända innebär detta yttrande åtskillig öfverdrift, men framställningen af ifrågavarande kapitel blir lätt sådan, att den från högre synpunkt betraktad ter sig underhaltig. Om man också medgifver, att i dessa stycken verkligen *kan* undervisas så, att äfven högt ställda kraf blifva formellt uppfyllda, lära sig lärjungarna näppeligen till fullo inse de vanskligheter, som kunna möta dem på det nya området.

Det är först och främst funktionernas mångtydighet, som vållar svårigheter. En något så när tillfredsställande behandling af den frågan förutsätter ett närmare studium af imaginära tal, än hvad som tillhör skolkursen. Utvecklingen i senare tid föranleder icke ett djupare inträngande på detta område, än hvad nu är fallet. Önskemålen gå afgjordt i en annan riktning,[1]) ehuruväl en och annan sträfvan förefinnes att generellt behandla begreppet *potens med positiv bas och reell exponent.*[2]) Hittills har man nöjt sig med att skarpt betona, att de satser om rötter, potenser o. s. v., som inskärpas, endast gälla *reella, positiva värdet* på en potens med *positiv bas och reell exponent*, och att det använda betraktelsesättet vid satsernas bevis förutsätter, att man rör sig med en *entydigt definierad* gren af funktionerna. Med exempel har man antydt, hvilka vådor man utsättes för, om man utan vidare vill öfverflytta dessa satser till tal hvilka som hälst, t. ex. om man tanklöst sätter

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Rötter och potenser spela för öfrigt med rätta i skolkursen en underordnad roll. Man behöfver dock någon kännedom om funktionen a^x, innan man går öfver till dess inversa funktion, logaritmefunktionen, hvilken senare är den på detta stadium väsentliga.

Den väg, hvarpå man definierar funktionen a^x, ger sig omedelbart. Man utgår från rötter och motiverar be-

---

[1]) Jfr *Wahlgren*, Om kurserna i matematik på latingymnasiet, Pedagogisk Tidskrift 1905, sid. 71 och följ.

[2]) Jfr *Collin*, Plan trigonometri, Andra upplagan, Stockholm Carlson 1905, där *Moivres* teorem behandlas.

teckningssättet med bruten exponent från de lagar, som gälla för rötterna. Exempelvis motiveras beteckningen $a^{\frac{m}{n}}$ af den omständigheten, att man just får ett värde på $\sqrt[n]{a^m}$ genom det förfaringssätt, som ofvanstående beteckning anger, då m är jämnt delbart med n. Analogt förfar man vid införandet af potenser med negativ exponent, hvilkas definition framgår af en utsträckning af divisionsförfarandet vid två digniteter med samma bas.

Jag har velat fästa uppmärksamhet på, att detta naturliga förfaringssätt, som hittills väl alltid praktiserats och äfven följes af läroböckerna, måtte fortfarande komma till sin rätt. I sin bearbetning och samarbetning af *Haglunds* lärobok och exempelsamling[1]) har nämligen lektor *Collin* frångått detta lättfattliga tillvägagångssätt och lämnat en synnerligen abstrakt framställning. Utan någon som hälst motivering inför han erforderliga *definitioner*. Redan de Collinska distinktionerna, formaldefinition och realdefinition verka afskräckande. Motiveringen till definitionerna lämnas *efteråt* i en anmärkning. Den bör naturligtvis gå först.

Sedan a^x sålunda definierats för *rationella* värden på x, erbjuder en *grafisk framställning* ett ypperligt medel att motivera, hur funktionen blir definierad för irrationella värden på argumentet. Den saken erbjuder intet nytt, den går igen från det geometriska studiet af andra funktioner af enklare art: $y = 3x$, $y^2 = x$ o. s. v., hvilka också i första hand definierats för rationella värden på x. Undersökningen af funktionen a^x bör således i och för sig gifva en god behållning, men man bör dock, som förut är sagdt, lägga hufvudintresset vid den inversa funktionen på grund af dennas praktiska betydelse.

De, som bestämma uppgifterna för den skriftliga studentexamen, iakttaga icke nödig försiktighet vid affattning af desamma, då de beröra här afhandlade område. De besinna ej, att vid framställningen af dessa delar af

[1]) *Collin,* **Algebra jämte exempelsamling, senare delen, Stockholm, Carlson 1906.**

elementarmatematiken nyss antydda synpunkter göra sig gällande, nämligen dels att i skolan flertydigheten hos funktionen a^x mycket lätt vidröres, dels att skolans hufvudintresse härvidlag är logaritmernas praktiska användning. Det sagda må belysas med ett exempel af färskt datum.[1])

I skriftliga uppgifterna för mogenhetsexamen i algebra vårterminen 1907 för reallinjen förekom: »Visa, att ekvationen

$$x^3 + 3\,bx = 2\,a$$

satisfieras af

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 + b^3}}.\text{»}$$

Detta exempel är placeradt som n:o 2, förmodligen därför att vederbörande ansett uppgiften vara synnerligen lätt, och att således alla examinandi genast skulle kunna lösa densamma. Och dock böra de, om de *verkligen kunna något af läran om rötter*, betänka sig flera gånger, innan de gripa sig an med uppgiften. De böra veta, att det gifna värdet på x innesluter 9 möjligheter, under det att tredjegradsekvationen blott har 3 rötter och att således endast 3 af de 9 möjligheterna kunna användas, hvadan följaktligen, om påståendet i satsen öfverhufvud är sannt, det endast gäller, ifall radikalerna uppfylla något eller några villkor, hvilka det förmodligen var problemförfattarens mening att lärjungarna skulle närmare utreda, efter som de ej äro angifna i tesen. Bland dem, som behandlat denna uppgift, är det väl knappast någon enda, som kunnat komplettera den förelagda uppgiften med det villkor, som däri fattas, nämligen att anförda uttryck på x är en rot till ekvationen då och endast då, när produkten af de ingående kubikrötterna är —b, samt att detta innefattar blott 3 möjligheter.

Det är en känd sak, att »de skriftliga studentproblemen bestämma, hur pass omfattande studiet af hvarje kapitel skall blifva och hvilka detaljer, som skola med-

[1]) Denna uppsats författades förra hösten.

tagas,»[1]) och det har gått så långt, att en del lärare söka räkna ut, hvilken ny detalj nästa omgång studentproblem skall upptaga. Måtte nu icke det ofvan anförda exemplet, framkalladt måhända af tendenserna i ofvan anförda arbete i trigonometri att i skolkursen införa det imaginära fullständigare än förut, leda till bortslösande af en dyrbar tid på en mera ingående behandling af rötter och potenser samt hvad därmed synes oåtskiljaktligen förenadt: exponential- och logaritmeekvationer!

Såsom lektor *Wahlgren* i ofvan anförda uppsats omtalar, är det i franska kursplanen af 1902[2]) förbjudet att upptaga imaginära tal t. o. m. för Classe de Mathématique. Här må tilläggas att i nämnda undervisningsplan intet nämnes om rötter och potenser, utan det angifves, att logaritmerna må införas på det sätt, att de reella talen betraktas som termer i en geometrisk serie, hvars kvot ligger nära 1. »Man antage utan bevis tillvaron af ett logaritmesystem, i hvilket logaritmen för 10 är lika med 1.» Det är tydligt, att man genom nämnda föreskrift vill komma från de vanskligheter, hvilka, såsom jag ofvan antydt, vidlåda det hos oss och i Tyskland gängse framställningssättet. I Frankrike väljer man således ett förfarande, som har *historisk häfd*, och som därför bör äfven hos oss väcka genklang hos dem, hvilka hylla den grundsatsen, »att det framställningssätt, som utgår från den gestaltning de matematiska begreppen fått vid sin uppkomst, är det naturligaste, och därför det lättfattligaste»,[3]) en sats, mot hvilken dock i vissa fall befogade invändningar kunna göras.[4]) Hvilken ståndpunkt man än intager i denna fråga, bör i alla händelser den lärare, som det önskar, få full frihet att införa lärjungarna i logaritmerna på ofvan antydda »historiska» sätt. Studentuppgifterna borde med hänsyn till rötter, potenser och logaritmer affattas så, att de ej tvingade någon att gå i de gamla hjulspåren. Först om uttrycklig tillåtelse erhålles att följa nedan närmare angifna lärogång, kunna vi vänta oss att icke behöfva för-

[1]) *Wahlgren*, l. c. sid. 65.

[2]) *Plan d'études et programmes d'enseignement* &c, Paris, Delalain frères 1902.

[3]) *Rydberg* i Pedagogisk Tidskrift 1907 sid. 368.

[4]) Jfr beträffande det här föreliggande fallet *Güntheas*, Geschichte der Matematik, Leipzig, Göschen 1908, sid. 362.

spilla tiden med inöfvande af en massa logaritme- och exponentialuppgifter.

Antydningsvis meddelas här, hur franska undervisningsplanens betraktelsesätt åskådligt kan genomföras. Jag refererar icke direkt den förträffliga lärogång, som finnes i *Borels* böcker, då en del personer finner den vara för abstrakt.[1])

Den *geometriska serien*

$$1 \quad x, \; x^2, \; x^3, \; . \; . \; .$$

har den märkliga egenskapen, att *produkten af två termer hvilka som hälst själf tillhör serien.* Exponenterna för x

$$0, \; 1, \; 2, \; 3, \; . \; . \; .$$

bilda en *aritmetisk serie* med egenskapen, att *summan af två termer hvilka som hälst tillhör serien.*

Jag betraktar kurvorna

$$\left.\begin{array}{l} y = x^0 \\ y = x \\ y = x^2 \\ . \; . \; . \; . \\ y = x^{10} \\ y = x^{11} \\ . \; . \; . \; . \end{array}\right| \quad (A)$$

och undersöker ordinatorna för deras skärning med räta linjen

$$x = \sqrt[10]{10} = 1{,}26 \; . \; . \; . = s \; (B).$$

Man får då de värden, som återfinnas i vidstående tabell:

1) *Borel,* Algèbre 1er cycle, 2dra uppl., Paris, Colin 1905, och *Borel,* Algèbre 2e cycle, 2dra uppl., Paris, Colin, 1904.

s^n	n	log s^n
1,00	0	0,0
1,26	1	0,1
1,59	2	0,2
2,00	3	0,3
2,51	4	0,4
3,16	5	0,5
3,98	6	0,6
5,06	7	0,7
6,31	8	0,8
7,94	9	0,9
10,00	10	1,0
12,6	11	1,1
15,9	12	1,2

Man bemärker genast, att eftersom

$$s^{11} = s^{10}.\ s = 10 . s$$
$$s^{12} = s^{10}.\ s^2 = 10 . s^2$$

o. s. v.

blifva ordinatorna för skärningen mellan räta linjen (B) och parablerna

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{11} \\ y = x^{12} \\ \ldots . \\ y = x^{20} \end{array}\right\} \text{(C)}$$

10 gånger större än motsvarande ordinator för skärningen mellan samma linje och parablerna

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = x^{2} \\ \ldots . \\ y = x^{10} \end{array}\right\} \text{(D)}$$

samt att ordinatorna för skärningen mellan samma linje och parablerna

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{21} \\ y = x^{22} \\ \ldots . \\ y = x^{30} \end{array}\right\} \text{(E)}$$

blifva 100 gånger större än motsvarande ordinator för skärningen med kurvorna (D). Man brukar kalla 0,1 af talen i kolumnen n för logaritmerna för talen i kolumnen s^n. Således är

log 2,51 = 0,4; log 25,1 = 1,4; log 251 = 2,4 o. s. v.

Logaritmerna för de tal i kolumnen s^n, som ligga mellan 1 och 10, befinna sig mellan 0 och 1, och logaritmerna för tal, som ligga mellan 10 och 100, ligga mellan 1 och 2. Slutligen inses, att logaritmerna för två tal, af hvilka det ena är 10 gånger större än det andra, differera på 1, o. s. v.

Vill man multiplicera två tal i kolumnen s^n, t. ex. 1,59 och 5,06, så erhåller man genast deras produkt, om man iakttager, att det förra är lika med s^2, det senare s^7. Produkten blir s^9, som befinnes lika med 7,94.

Tänker man sig nu, att man skär kurvorna (A) med en rät linje parallell med y-axeln, som faller ännu närmare räta linjen $x = 1$ än hvad $x = \sqrt[10]{10}$ gör, så komma skärningspunkterna att ligga ännu närmare hvarandra och om motsvarande tabell upprättas, så ökas användbarheten af den samma för att underlätta två tals multiplikation. Söker man ordinatorna för skärningen mellan kurvorna (A) och räta linjen

$$x = \sqrt[10000]{10} = 1{,}0002303115\ldots = s, \qquad \text{(F)}$$

så erhåller man en s. k. 4-ställig logaritmetabell. Af denna tabell framgår, att om man t. ex. vill skaffa sig produkten af 1,485 och 5,493, så representeras dessa tal af ordinatorna för skärningen mellan räta linjen (F) och parablarna

$$y = x^{1717}$$
$$y = x^{7398}$$

respektive, hvadan produkten anges af motsvarande ordinata på parabeln

$$y = x^{9115},$$

hvilken ordinata ur tabellen befinnes vara 8,308. Analogt med i föregående fall sätter man

$$\log 1{,}485 = 0{,}1717$$
$$\log 5{,}493 = 0{,}7398$$
$$\log 8{,}308 = 0{,}9115,$$

hvadan

$$\log 8{,}308 = \log 1{,}485 + \log 5{,}493,$$

då

$$8{,}308 = 1{,}485 \cdot 5{,}493.$$

Man kan således alltid taga s så nära 1, att *hvilket tal som hälst som är större än 1 approximativt tillhör serien*

$$1,\ s,\ s^2,\ s^3,\ \ldots$$

En för många ändamål tillräcklig noggrannhet vinner man genom att sätta den 10001:sta termen i denna serie lika med 10. Som motsvarande aritmetiska serie väljer man den, hvars termer äro en tiotusendel af exponenterna i den förra, d. v. s.

$$0,\ 0{,}0001,\ 0{,}0002,\ 0{,}0003,\ \ldots$$

där den 10001:sta termen således är 1, och en term i den senare serien kallas logaritmen till motsvarande tal i den förra.

Sedan man därefter visat, hur en 4-ställig tabell är anordnad och hur man med dess tillhjälp får logaritmerna för tal belägna mellan 1 och 10, härledas med lätthet *logaritmelagarna*. De två talen s^m och s^n ha till logaritmer 0,0001 m och 0,0001 n respektive. Talens produkt är s^{m+n}, och logaritmen för sistnämnda tal 0,0001 (m + n) eller med andra ord

$$\log ab = \log a + \log b. \quad (I)$$

Om a = bc, blir således log a = log b + log c, hvaraf fås

$$om\ b = \frac{a}{c},\ \text{blir}\ \log b = \log a - \log c. \quad (II).$$

Antages vidare $a = b^4$, d. v. s. a = b . b . b . b, fås enligt (I)

$$\log a = \log b + \log b + \log b + \log b.$$

Häraf fås då de två satserna:

$$om\ a = b^4,\ \text{är}\ \log a = 4 \log b \quad (III),\ \text{och}$$

$$om\ b = \sqrt[4]{a},\ \text{är}\ \log b = \tfrac{1}{4} \log a \quad (IV).$$

Hur man sedan medelst satserna (I) och (II) utsträcker framställningen till positiva tal, som icke ligga mellan 1 och 10, inses omedelbart. Här visar sig nu fördelen af de *vanliga logaritmerna* framför andra möjliga logaritmesystem, erhållna genom att skära kurvorna (A) med en annan med y-axeln parallell linje, d. v. s. med andra ord sådana system, som icke förutsätta, att log 10 = 1.

Logaritmernas värde ligger i deras användning på praktiska beräkningsuppgifter. Med tillfredsställelse skall den dag hälsas, då mer eller mindre invecklade exponential- och logaritmeekvationer uteslutas från studentproblemen och därmed från skolorna, uppgifter, hvilkas inhämtande under generationer upptagit en dyrbar tid vid våra läroanstalter, och hvilkas förekomst på undervisningsprogrammet icke betingas af något praktiskt behof.[1])

[1]) *Wahlgren*, l. c. sid. 68. Jfr också *Petrini*, Matematiken i skolan, Pedagogisk Tidskrift 1905 sid. 207 och följ. samt *Josephson*, Till frågan om gymnasiets matematikkurser, Pedagogisk Tidskrift 1905, sid. 303.

Hvad som föranledt dylika uppgifters förekomst i studentexamen och därmed deras behandling i skolan, är tvifvelsutan den väg, hvilken man hittills alltid gått vid lärjungarnas undervisning i logaritmerna. Man har gjort en onödigt stor affär af en detalj, som endast har formellt bildningsvärde. I och med det att ofvan skisserade sätt förklaras vara tillåtet — jag vill därmed icke ha sagt, att det är att föredraga framför det gamla — omöjliggöres en med förkärlek drifven klass af studentproblem.

Genmäle.

I ett par föregående häften af Pedagogisk Tidskrift har signaturen Aug. J—n ägnat några ord åt ett par från Göteborgs högre samskola utgifna skrifter, »Berättelser ur evangelierna», »Bibliska berättelser och sägner för barn» samt »Israels historia för skolan», utgifna af Sven Lönborg och Märta Ambrosius.

Rec. yttrar här bl. a. (angående Israels historia) att »det tjänar rakt ingenting till att inlåta sig på någon detaljgranskning». Han vill blott framdraga ett par »exempel på författarnes logik».

Det ena af dessa exempel på bristande logik är att vi i ett kapitel, som bl. a. berättar om Israels framgångar mot Damaskus, vunna genom Assyriens hjälp, medtagit några illustrationer, som visa, huru Israels konung Jehu frambär tribut till sin mäktige bundsförvandt Assyriens konung.

Det andra exemplet lyder: »Sista kapitlet heter Jerusalems förstöring och innehåller bl. a. $3^1/_2$ sidor om Dekalogen, lag och lagstudier i öfrigt samt partibildningen från och med Mackabeertiden.»

Liksom i det första exemplet har jag verkligen också här något svårt att förstå recensentens tankegång. I ett kapitel om Jerusalems förstöring kräfves själfklart en redogörelse för de förhållanden, som föranledde denna katastrof, och härtill hör med nödvändighet »*partibildningen*», hvilken allra bäst kan åskådliggöras genom att visa partiernas ställ-