Till frågan om gymnasiets matematikkurser.

Af Olof Josephson.

Hur lifligt erinrar jag mig icke den öfverraskning, med hvilken jag som sjundeklassist började på egen hand studera trigonometri, som den tiden ej ingick i halfrealisternas matematikkurs. Ett rikt och användbart fält öppnade sig, och matematiken, som dittills ej synnerligen lockat mig och som jag nu blott för fysikens skull ansett mig nödsakad att mera odla, drog allt mer mitt intresse till sig, och nu icke för fysikens, utan för sin egen skull. Må vara, att de täta ombyten af matematiklärare, som drabbat mig och mina klasskamrater, delvis lagt hinder i vägen för ett större intresse, och att detta hinder undanröjdes i och med det att läroboken blef min lärare. Men var det icke äfven dels bristen på enhet i lärostoffet, dels de många tillkrånglade, ur innehållssynpunkt värdelösa uppgifterna, som stötte tillbaka? Sedan kom universitetsstudierna, där en stor del af detta lärostoff lämnades å sido, ett och annat däremot visade sig vara ett led i en förut ej anad helhet. Och så bar vägen åter till skolan, där nödtvånget har medfört ett återvändande till åtskilliga af de gamla besynnerligheterna, som, det är fara värdt, kanske snart genom vanan te sig helt naturliga.

Är jag ensam om dessa erfarenheter? Rör sig icke skolmatematiken, särskildt hvad algebran vidkommer, delvis inom ofruktbara, för den allmänna likaväl som för den speciellt matematiska bildningen skäligen värdelösa områden? Och ha icke vi matematiklärare blifvit så vana att upptaga dessa partier, att vi finna dem utgöra viktiga delar af det hela och ha svårt att tänka oss dem borta?

Men åtskilliga tecken tyda på en ljusning. Man har åtminstone börjat mera öppet kritisera det, som mer än något annat bestämmer materialet för matematikundervisningen, studentproblemen, liksom ock den dåliga vanan att af enstaka sådana skapa nya områden för att där i nya former idisla det gamla innehållet. I denna tidskrift ha nyligen docenten Wahlgren och lektor Petrini gifvit kraftiga impulser till förbättring, till utgallrande af besynnerligheterna, till närmare fixerande af mål och medel. Det är ju beklagligt, att denna kritik ej föregått läroverkskommitténs kursförslag. Här gäller detsamma om matematiken som om naturvetenskaperna öfver hufvud, att man kommit något på efterkälken. Men för sent är det ej, ty kurserna äro ej fastställda, och öfverstyrelsen för de allmänna läroverken kan här åstadkomma mycket, om den stödes af lärarnes villighet till reformer.

Som ofvan är antydt, synes mig ett hufvudfel i de nuvarande matematikkurserna vara, att de innehålla en mängd saker, hvilkas inbördes samband åtminstone lärjungarna ej kunna se. I detta hänseende tror jag, att realskolans kurser äfven enligt läroverkskommittéens förslag ha ett stort företräde framför gymnasiets. Ty i realskolans kurser återfinner man en ledande synpunkt, från hvilken det hela behandlas, *det aritmetiska problemet,* och i geometrien *konstruktionsuppgiften.* Jag tror också, i motsats mot lektor Petrini, att den af kommittén förordnade anordningen med ekvationsläran såsom den väg, på hvilken lärjungarna införas i algebran, är synnerligen lycklig. Lärjungarna på ifrågavarande stadium torde till en början ej ha synnerligt intresse för räknelagarna och deras allmängiltighet (jmf. Petrini: »Matematiken i skolan», 5:e häftet af denna tidskrift, innevarande årgång, sid. 198), men så mycket mer för det hjälpmedel för problemlösning, som algebran i ekvationerna erbjuder. Och så småningom vaknar under arbetet med aritmetiska uppgifter behofvet af systematisering och därmed också intresset för algebraiska formler såsom kortfattade uttryck för allmängiltiga räknelagar.

Men hvar ha vi i gymnasiets nuvarande, af läroverkskommittén i hufvudsak bibehållna matematikkurser, speciellt de algebraiska, någon motsvarande enhetlig synpunkt? Det aritmetiska problemet duger ej längre. *Faktiskt* har det algebraiska innehållet i gymnasialkurserna grupperat sig kring dessa två centra: *andragradsekvationer* och *logaritmer.* Således kring två *hjälpmedel* för den matematiska analysen! Hur har man icke vändt och vridit på dessa hjälpmedel för att få dem inpräglade på alla möjliga och omöjliga sätt! Andragradsproblem, bland hvilka det öfvervägande flertalet till sitt innehåll äro löjliga och intresselösa, ekvationer af högre grad och ekvationssystem, som endast på grund af speciella värden på koefficienterna eller genom särskilda knep kunna lösas medelst andragradsekvationer, maximi- och minimi-uppgifter, behandlade efter en i och för sig lärorik, men af den utbildade matematikern aldrig använd metod, abstrakta uppgifter angående rötters och koefficienters inbördes samband. Å andra sidan en mängd tråkiga och tillkrånglade exempel angående rötter och potenser, genom tillfälligheter lösbara exponentialekvationer, för att icke tala om uppgifterna rörande logaritmer i olika system, där redan formuleringen gör lärjungarna yra i hufvudet. Slutligen repetitioner af de båda grupperna i en mängd konstlade uppgifter, där ingående storheter bilda någon slags »progression». Endast i förbigående stannar man för den ojämförligt viktiga frågan om de oändliga seriernas konvergens eller divergens. Naturligtvis förekomma äfven nyttiga saker, t. ex. frågor rörande sammansatt ränta, men också dessa ofta onödigt tillkrånglade antingen i formuleringen eller till innehållet.

Skulle man vilja i hufvudsak bibehålla de nuvarande kurserna, så finns nog där ett område, som har tillräckligt värde för att lämpligen kunna intaga en central ställning, och där de ofvannämnda hjälpmedlen, andragradsekvationerna och logaritmerna, få den rikaste användning. Jag menar *planimetrien*, inklusive trigonometrien, till hvilken, hittills tyvärr blott på reallinien, *stereometrien* ansluter sig. Genom sin mer konkreta natur är detta område särskildt lämpadt att väcka och underhålla lärjungarnas intresse och är fritt från den »skolmatematikens» prägel, som kommer matematikern af facket att bortkasta det såsom värdelöst kram. Kring detta område kunde därför matematikstoffet på gymnasiet mycket väl grupperas. Och här finnas så många tillfällen att tillämpa teorien på praktiska, speciellt mekaniska och andra fysikaliska problem, att man visst ej behöfde tillgripa matematiska »besynnerligheter» utan värde för att utfylla tiden. För fysiken kunde det ej vara annat än till fördel, om undervisningen blefve mindre tyngd af problemlösningens barlast.

Men det är ej tillräckligt att ha vunnit en enhetlig synpunkt för stoffets gruppering, om också detta skulle i hög grad befordra både intresset och resultatet af undervisningen. Det gäller att ställa kurserna i närmaste samband med gymnasiets allmänna uppgift att förbereda till vidare studier på olika områden. Jag tänker härvid mindre på dem, som komma att egna sig åt matematiska eller tekniska vetenskaper, de komma nog att själfva utfylla de brister, som vidlåda skolundervisningen. Men de andra, som på olika områden komma att behöfva matematiken som hjälpvetenskap, de kunna ha rätt att fordra, att skolan så vidt möjligt ger dem den erforderliga matematiska apparaten, och att skolkurserna ej hålla sig inom helt andra områden än dem, i hvilka de sedan måste känna sig något så när hemmastadda. Detta synes man alltmer börja beakta på andra håll, i det man redan infört eller förordar införande i skolkursen af en *elementär funktionslära*, grundad på och ständigt belyst af *geometrisk representation* af ifrågakommande funktioner, och där hvarken begreppen derivata och integral eller symbolerna $\frac{dy}{dx}$ och $\int y dx$ äro bannlysta. Att målsmännen för denna strömning visst ej ämna »draga universitetet ned i skolan» eller uppställa orimliga kraf, framgår med all önskvärd tydlighet af följande yttrande af Felix Klein [1]: »Ich bin tief durchdrungen von der Aufgabe der Schule, eine grosse Zahl nicht sonderlich begabter und dabei dem mathematischen Denken zunächst abgeneigter Schüler zu einem bestimmten Niveau wissenschaftlichen Verständnisses hinaufzuführen. Nichts liegt mir ferner, als diesses Niveau unvernünftig zu erhöhen; es handelt sich vielmehr um eine Verschiebung des Zielpunktes und der zu ihm führenden Wege im horizontalen Sinne». Med afseende på själfva grundtankarna behöfver jag ej vara mångordig. De äro klart angifna i T. Bonnesens uppsats: »Matematikken i Gymnasiet», i 1:a häftet, innevarande årgång af Nyt Tidsskrift for Matematik. Meningen är ej att införa funktionsläran såsom ett nytt område till alla de andra i gymnasiets matematikkurs. Funktionsbegreppet

[1]) Über eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. (Leipzig 1904.)

skall från början genomtränga det hela, koordinatsystemet vara det ständigt till hands liggande hjälpmedlet. Kan man draga i tvifvel, att detta skulle förläna matematikstudierna ett större intresse än hittills och ställa resultaten i klarare belysning? Fråga är väl, om icke en sådan metod har den vikt, att den icke ens för de från realskolan utgående lärjungarna borde vara främmande. Att någon särskild svårighet härvidlag skulle förefinnas, är ej gärna möjligt. Undertecknad har ständigt användt en dylik metod för åskådliggörande af logaritmfunktionens variation och interpolationens berättigande vid användande af logaritmtabeller. Har detta utan svårighet kunnat ske i öfre sjätte klassen, så torde det icke bli nämnvärdt svårare att göra liknande användningar af den grafiska framställningen i sjätte realskoleklassen.

Hur skulle nu ett sådant användande af funktionsbegreppet och af differential- och integralkalkylens mest elementära partier kunna genomföras i våra gymnasier? Det går nog ej utan vidare att med lektor Petrini säga: hvad som är möjligt på andra håll, kan ske äfven hos oss; det går ej att med ett slag vända upp och ned på allt, som den nuvarande läraregenerationen vant sig vid. Man skulle då stöta på en snart sagdt oöfvervinnelig *vis inertiæ*. Därför tror jag ock, att man får nöja sig med mindre, än hvad Bonnesen i sin ofvan citerade uppsats föreslår för det danska gymnasiets matematisk-naturvetenskapliga linje. Jag tänker mig, att saken kunde ordnas på ungefär följande sätt, hvarvid dock till en början *den största möjliga frihet borde lämnas lärarne.*

Sedan man börjat algebraundervisningen på gymnasiet med en sammanfattande repetition af de vanliga algebraiska reduktionerna, hvarvid särskild vikt lägges vid multiplikationslagarna — i likhet med docenten Wahlgren anser jag, att man gjort alltför mycket väsen af polynoms division, ett kapitel, som lärjungarna sedermera ha ytterligt liten användning af —, införas begreppen konstant och variabel, och några enkla funktioner representeras geometriskt med hjälp af rätvinkliga koordinater, hvarvid man till en början naturligtvis får nöja sig med att bestämma enstaka punkter på linjerna. Dock bör man ej dröja med att låta lärjungarna bli förtrogna med kontinuitetsbegreppet. Då man samtidigt torde ha påbörjat likformighetsläran i geometrien — en särskild »proportionslära» må vi väl i all rimlighets namn bli förskonade från! — kan man snart närmare studera lineära funktioner med gifna sifferkoefficienter och konstruera räta linjer med gifna ekvationer. Härtill anknyter sig behandlingen af ekvationssystem af första graden. Efter dessa komma kvadratrötter, hvilkas approximativa bestämning kan ske genom geometrisk konstruktion på millimeterpapper, sedan man i geometrien genomgått medelproportionalsatserna eller Pytagoreiska satsen. Den aritmetiska beräkningsmetoden är temligen öfverflödig, då den i hvarje fall snart uttränges af kvadrat- och kvadratrottabeller. Dessa kunna då lika gärna från början användas vid räkning med kvadratrötter. Funktionsbegreppet har samtidigt fördjupats genom konstruktion af kurvorna $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, hvilkas inbördes samband kan tagas till utgångspunkt för klargörande af begreppet inversa funktioner, hvilket är godt att ha, då man kommer till logaritmkurvan. Nu kommer turen till andragradsekvationerna, hvilka behandlas i anslutning till konstruktion af parablerna $y = ax^2 + bx + c$. Huruvida de imaginära talen upptagas eller ej, är skäligen likgiltigt, så länge man ej har att göra med ekvationer af högre grad än den andra och således har mindre behof af satsen om rötternas antal. Problemmaterialet tages framför allt från planimetrien, hvars grundläggande satser nu torde ha behandlats i geometrien. Att för öfrigt här fördjupa sig i studiet af ekvationssystem af andra graden torde ej vara att tillråda, då dels den geometriska representationen på detta stadium blir svår, dels det är af vikt att snart komma till logaritmläran. Möjligen kan man dock med hänsyn till enkla ekvationstyper något uppehålla sig vid den geometriska betydelsen af ekvationerna $x^2 + y^2 =$ konstant, $xy =$ konstant, den senare särskildt sammanställd med ekvationen $x + y =$ konstant.

Frågan om rötter af högre ordning bör så tidigt som möjligt sammanföras med införandet af bråkexponenter, och dithörande exempel framför allt åsyfta ett befästande af potensläran. Till denna anknyter man den geometriska representationen af funktioner, sådana som

$$x^2,\ x^3,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},$$

jämförda med hvarandra och med x, vidare

$$\frac{1}{x},\ 2^x,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ 10^x,$$

hvilket ger en naturlig öfvergång till logaritmerna. I fråga om dessa torde man till en början med mycket lätt hand kunna beröra andra system än det Briggska — för konstruktion af logaritmkurvor lämpar sig dock 2-logaritmerna bäst —, då öfvergången till andra system går af sig själf på ett mer framskridet stadium, liksom det ock först senare har någon betydelse. Tillämpningsöfningar erbjuder äfven här planimetrien i rikt mått; såsom ytterligare tillämpningar väljas uppgifter rörande sammansatt ränta, utan att man offrar allt för mycken tid på förberedande öfningar beträffande serier. Likaså lämnas exponentialekvationerna i öfrigt åt sitt värde. Snarast möjligt utvidgas i stället planimetrien med trigonometri. Denna behöfver naturligtvis för latinarna ej på långt när tagas så fylligt som för realisterna. Däremot bör man på båda linjerna återupptaga frågan om räta linjen i analytiska geometrien, nu särskildt med hänsyn till frågor rörande riktningen. Vidare synes det mig, som borde begreppet polarkoordinater införas samtidigt med de trigonometriska funktionerna, då likheterna

$$\cos v = \frac{x}{r},\ \sin v = \frac{y}{r},\ \operatorname{tg} v = \frac{y}{x}$$

ställa frågan om funktionernas tecken i den bästa belysning. Som afslutning af trigonometrien och ytterligare belysning af den geometriska representationen kommer konstruktion af kurvorna $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, hvarvid också frågan om de inversa funktionernas mångtydighet kan beröras.

Lärjungarna torde nu vara tillräckligt förberedda att kunna med behållning ta itu med frågor rörande kurvors riktning i olika punkter, deras maximi- och minimipunkter, deras inflexionspunkter och krökningsförhållanden i öfrigt. Här kommer då begreppet *derivata* in på det naturligaste sätt. Till en början begränsar man sig till de nyssnämnda trigonometriska funktionerna och *hela rationella funktioner*, hvartill anknytes ett närmare studium af *parabeln*,

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

Den allmänna typen $y = ax^2 + bx + c$ återupptages med de nya hjälpmedlen, hvarefter en eller annan parabel af 3:e graden kan studeras, och några enkla maximi- och minimiuppgifter behandlas med användande af 1:a och 2:a derivatan. För ytberäkning införes *integralbegreppet*, hvarefter integration af hela rationella funktioner också kan användas för härledning af vanliga stereometriska formler. Ytterligare kan de nya metodernas användbarhet klargöras genom införande af begreppen hastighet och acceleration, tillämpade särskildt på kastade kroppars rörelse.

Härmed synes mig en viss afslutning vara vunnen, och det torde ej vara af nöden att ytterligare utvidga latingymnasiets kurs. Med hänsyn till de reduktioner af nuvarande kurser, som ofvan antydts, torde tiden fullt räcka för meddelande af detta kunskapsmått. För realisterna tillkommer derivation af algebraiska funktioner med tillämpning på andragradskurvor, speciellt studium af ellipsen och hyperbeln, rymdgeometri. Kunde man hinna med något om funktioners utveckling i potensserie och i samband därmed de naturliga logaritmerna, vore mycket vunnet, men det är ej lätt att på förhand sätta upp någon gräns, då ju åtskilligt af latingymnasiets kurs bör behandlas vidlyftigare med realisterna. Här måste nog flera års erfarenhet föregå ett fixerande af kurserna. Och framför allt kräfves här samarbete mellan de allmänna läroverkens och högskolornas lärare, då reallinjens matematikkurser böra uppställas med särskild hänsyn till kommande studier i matematiska och tekniska vetenskaper.